Дрозд А.О.
Капустян В.О.
доктор фіз.-мат. наук, професор
Національній технічний університет Україні «КПІ»

КЕРУВАННЯ КРЕДИТНОЮ ТА ДЕПОЗИТНОЮ СТАВКАМИ КОМЕРЦІЙНОГО БАНКУ З КАПІТАЛОМ ДОСТАТНІМ ДЛЯ ЗАДОВОЛЕННЯ ПОПИТУ НА КРЕДИТИ

УПРАВЛЕНИЯ КРЕДИТНЫЕ И ДЕПОЗИТНЫЕ СТАВКИ КОММЕРЧЕСКИХ БАНКОВ С КАПИТАЛОМ ДОСТАТОЧНОГО ДЛЯ УДОВЛЕТВОРЕНИЯ СПРОСА НА КРЕДИТЫ

LOAN AND DEPOSIT RATES CONTROL OF A COMMERCIAL BANK WITH SUFFICIENT CAPITAL TO MEET LOANS DEMAND

В роботі описано комерційний банк, який займається кредитною та депозитною діяльністю та який має капітал, достатній для насичення кредитного ринку. Було поставлено задачу оптимізації капіталу банку на кінець періоду керування за умови керування кредитною та депозитною ставками. Було описано набір припущень, на які опирається побудова функцій попиту на кредити, пропозиції депозитів та потокова модель банку, формалізовано задачу максимізації капіталу та показано її розв'язання. Було отримано оптимальні кредитну та депозитну ставки, що максимізують капітал банку на кінець періоду керування та знайдено відповідні максимальні значення прибутку та капіталу та проаналізовано як зміняться отримані результати при зміні параметрів функцій попиту і пропозиції.

Ключові слова: потокова модель банку, кредити, депозити, оптимальне керування, максимізація прибутку, максимізація капіталу.

В работе описан коммерческий банк, который занимается кредитной и депозитной деятельностью и имеет капитал, достаточный для насыщения кредитного рынка. Было поставлено задачу оптимизации капитала банка на конец периода управления при условии управления кредитной и депозитной ставками. Было описано набор предположений, на которых базируется построение функций спроса на кредиты, предложения депозитов и потоковая модель банка, формализована задача максимизации капитала и показано ее решение. Были получены оптимальные кредитная и депозитная ставки, которые максимизируют капитал банка на конец периода управления и найдены соответствующие максимальные значения прибыли и капитала, а также проанализировано как изменятся полученные результаты при изменении параметров функций спроса и предложения.

Ключевые слова: потоковая модель банка, кредиты, депозиты, оптимальное управление, максимизация прибыли, максимизация капитала.

Commercial bank that has credit and deposit activity and equity capital sufficient for maximum credit demand fulfilment was described. Problem of capital at the end of control period under conditions of credit rate and deposit rate control was stated. Set of assumptions needed to build loan demand function, deposit supply function and bank flow model was described. Capital maximization problem was formalized and solution showed. Optimal credit rate and deposit rate that maximize bank's equity capital at the end of control period and respective maximal profit and equity capital was obtained. Changes in the results from demand and supply functions parameters changing was analysed.

Keywords: production model of bank loans, deposits, optimal control, profit maximization, maximization of capital.

Вступ. Одним з підходів до моделювання банків та банківської діяльності є використання потокової моделі банку, де фінансовий потік являє собою певний об'єм коштів за одиницю часу.

Потокова модель банку має ряд особливостей. Потоки в моделі неперервні. Кошти, які надійшли одним із вхідних потоків, можуть бути використані для формування вихідного потоку іншого типу. Тобто, увійшовши до банку, гроші знеособлюються та змішуються у єдину грошову масу, яка може бути використана для формування кожного із трьох вихідних потоків у довільних пропорціях. Потокова модель банку зручна для розгляду різноманітних задач з точки зору теорії керування.

Моделюванням банківської діяльності з точки зору теорії керування та за допомогою потокових моделей займалися Гришин [1-2, 13], Іваненко [1,13], Козак [1], Куц [13], Осіпенко [14], Умрик [1]. Також цю проблематику досліджували автори в попередніх працях [3-12].

В роботі [1] було запропоновано розглядати банк з точки зору теорії керування, а в [2] було описано деякі вхідні та вихідні потоки банку. В роботі [14] було описано потокову модель з лінійними функціями кредитів та депозитів та розглянуто задачі оптимального керування кредитною та депозитною ставкою за умови, що всі залучені депозити видаються як кредити. В роботі [13] було описано потокову модель з лінійними функціями кредитів та депозитів, які враховували невизначеність в обсягах депозитів та кредитів. В роботі [3] було запропоновано використовувати програмну реалізацію потокової моделі для навчання працівників банку. В роботі [4] до потокової моделі банку були додані рекламні витрати та притік депозитів внаслідок реклами. В роботі [5] за допомогою чисельних методів отримані графіки розподілу обсягів повернених кредитів за умови, що термін повернення виданих кредитів був випадковою величиною. В роботі [6] аналітично були отримані оптимальна кредитна ставка банку, що максимізує власний капітал на кінець періоду керування, максимальний прибуток банку та власний капітал банку на кінець періоду, за умов, що банк має вдосталь власного капіталу для здійснення кредитної діяльності навіть без залучення депозитів (функціонує, як кредитна фірма). В роботі [7] була отримана оптимальна кредитна ставка для банку, що максимізує власний капітал на кінець періоду керування, максимальний прибуток банку та власний капітал банку на кінець періоду, за умов, що він не здійснює депозитну діяльність, і що його власний капітал може бути будь-яким, в тому числі і недостатнім для видачі обсягу кредитів, на який є попит. В роботі [9] були отримані оптимальна кредитна та депозитна ставки банку, що максимізує власний капітал на кінець періоду керування, максимальний прибуток банку та власний капітал банку на кінець періоду, за умов, що банк має вдосталь власного капіталу для здійснення кредитної діяльності навіть без залучення депозитів, але при цьому здійснює і депозитну діяльність. В роботі [8] були порівняні результати, отримані в [6] та [9], зроблено висновок про необхідність модифікації потокової моделі, щоб вона враховувала залежність між активами та пасивами банку. В роботі [10] було зазначено, що оптимальне керування відрізняється залежно від вигляду функції попиту на кредити. В роботі [11] на основі потокової моделі було розглянуто парадокс Бертрана та запропоновано можливе пояснення його виникнення, проведено паралелі із банківською діяльністю. В роботі [12] потокова модель побудована на основі експоненціальних функцій попиту на кредити та пропозиції депозитів.

Постановка завдання. Мета роботи полягає у визначенні раціонального керування кредитною та депозитною ставками комерційного банку, що має власний капітал, достатній для насичення кредитного ринку, протягом періоду часу з метою максимізації капіталу банку на кінець періоду та аналізу змін такого оптимального керування в залежності від зміни ринкових умов.

Для досягнення цієї мети були поставлені такі завдання:

1. Опис припущень, необхідних для побудови моделі банку.
2. Побудова двоконтурної безбалансової потокової моделі банку без запізнення.
3. Постановка задачі оптимального керування і визначення оптимальної кредитної та депозитної ставок, максимального прибутку та максимального капіталу банку на кінець періоду.
4. Аналіз змін оптимальних кредитної та депозитної ставок, прибутку та капіталу в залежності від зміни ринкових умов.

Методологія: аналіз та синтез, графічний метод, диференційні рівняння, теорія керування, двоконтурна безбалансова потокова модель банку без запізнення.

Результати дослідження. Припущення А1. Весь прибуток використовується для збільшення капіталу.

Оскільки весь прибуток використовується для збільшення капіталу, ми можемо записати співвідношення

$$\dot{x}(t) = p(t),$$

де

$x(t)$ — капітал комерційного банку в момент часу t;

$\dot{x}(t)$ — приріст капіталу в момент часу t;

$p(t)$— прибуток комерційного банку в момент часу t.

Оскільки банк займається і кредитною, і депозитною діяльністю, його прибуток складається з процентного доходу від кредитної та депозитної діяльності і дорівнює різниці між сумарним обсягом вхідних потоків (повернених кредитів з відсотками та залучених депозитів) та сумарним обсягом вихідних потоків (виданих кредитів та повернених вкладникам депозитів з відсотками) у грошових одиницях.

$$p(t) = K_{in}(t) - K_{out}(t) + D_{in}(t) - D_{out}(t),$$

де

$K_{in}(t)$ — обсяг повернених з відсотками кредитів в момент часу t, у грошових одиницях;
$K_{out}(t)$ — обсяг виданих кредитів в момент часу t;
$D_{in}(t)$ — обсяг залучених депозитів в момент часу t;
$D_{out}(t)$ — обсяг повернених з відсотками депозитів в момент часу t.
Припущення А2. Обсяг виданих кредитів (у грошових одиницях) в певний момент часу залежить від кредитної ставки в цей момент часу та двох лінійних коефіцієнтів (що можуть мати економічний сенс). В такому разі є сенс у керуванні кредитною ставкою.
Припущення А3. Залежність між загальним обсягом виданих кредитів та кредитною ставкою є оберненою, тобто з вищою кредитною ставкою за інших незмінних умов банк видаватиме менший загальний обсяг кредитів. Що логічно відповідає функції попиту на кредити — з більшою ціною товару (кредиту) менша кількість покупців зможе дозволити собі його купити.
Припущення А4. Форма залежності обсягу виданих кредитів від кредитної ставки лінійна.
Припущення А5. Банк може задовольнити увесь попит на кредити.
Припущення А6. Кредитна ставка є невід'ємною. Банк не доплачує кредиторам — не працює собі у збиток.
Припущення А7. Відсутня диференціація кредитних продуктів, кредитна ставка єдина.
Оскільки залежність між обсягом виданих кредитів та кредитною ставкою обернена та лінійна, ми можемо записати її у вигляді

$$K_{out}(t) = K - b \cdot u_K(t),$$

де
K, b — коефіцієнти лінійної залежності;
$u_K(t)$ — кредитна ставка в момент часу t.
Хоча K і b вводяться лише як коефіцієнти, можна надати їм трактування в економічному сенсі.
При нульовій кредитній ставці (тобто, мінімально допустимій для банку в цій роботі) обсяг виданих кредитів становитиме K, тому цей коефіцієнт можна трактувати як інвестиційну ємність ринку, максимальний обсяг попиту на кредити. Вважається, що він не є необмеженим. В цій роботі розглядатимемо лише випадок, коли $K \geq 0$, оскільки при $K < 0$ банк не зможе видавати кредити, яку б кредитну ставку він не вибирав би.
Від коефіцієнта b залежить, на яку величину зміниться обсяг виданих кредитів, якщо змінити на певну величину кредитну ставку, тому його можна трактувати як еластичність попиту на кредити. Можна трактувати цей показник, як рівень конкуренції, при збільшенні конкурентної боротьби, він буде вищим. Таким чином модель неявно враховує існування на ринку інших банківських установ. Вважатимемо, що $b > 0$, щоб виконувалося припущення про обернену форму залежності між обсягом виданих кредитів та кредитною ставкою.
Комбінацію цих показників можна вважати ринковими умовами.
Вважається, що банк має достатньо капіталу, щоб при потребі видати K

кредитів.
Графік залежності обсягу виданих кредитів від кредитної ставки подано нижче.
Припущення А8. Кредити з відсотками повертаються в той же момент часу що й видаються.
Припущення А9. Кредити з відсотками повертаються гарантовано вчасно і у повному обсязі.

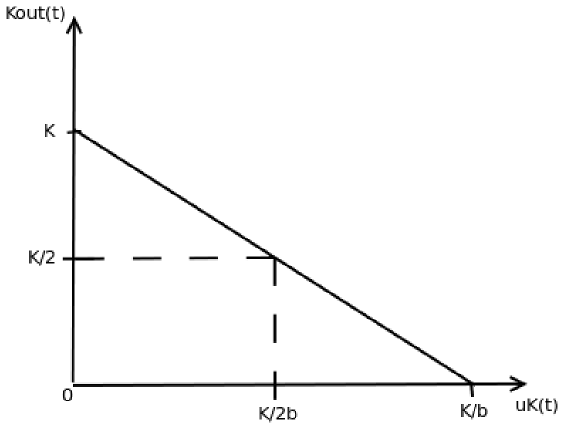

Рисунок 1. Функція попиту на кредити

Оскільки кредити з відсотками повертаються в той же момент часу що й видаються у повному обсязі, то формулу для обсягу повернених кредитів з відсотками можна записати так

$$K_{in} = K_{out}(t) \cdot (1 + u_K(t))$$

або

$$K_{in} = (K - b \cdot u_K(t)) \cdot (1 + u_K(t))$$

Графік залежності обсягу повернених кредитів з відсотками від кредитної ставки подано нижче.
Таким чином враховуються три (терміновість, поверненість, платність) з п'яти (терміновість, поверненість, диференційованість, забезпеченність, платність) загальних принципів кредитування.

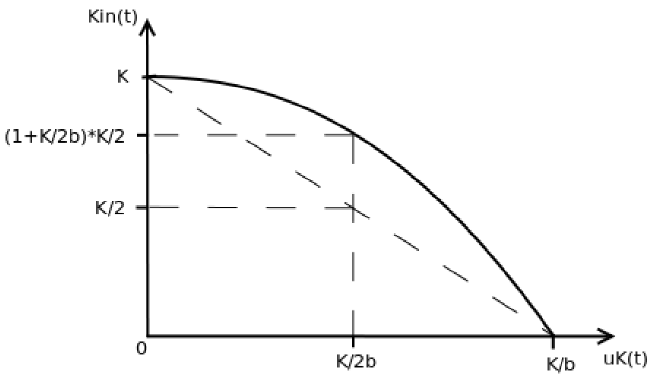

Рисунок 2. Залежність обсягу повернених кредитів в залежності від кредитної ставки

Припущення А10. Обсяг залучених депозитів (у грошових одиницях) в певний момент часу залежить від депозитної ставки в цей момент часу та двох лінійних коефіцієнтів (що можуть мати економічний сенс). В такому разі є сенс у керуванні депозитною ставкою.

Припущення А11. Залежність між загальним обсягом залучених депозитів та депозитною ставкою є прямою, тобто з вищою кредитною ставкою за інших незмінних умов банк залучатиме більший загальний обсяг депозитів. Що логічно відповідає функції пропозиції грошей — з більшою ціною товару (кредиту) більша кількість продавців пропонуватиме товар.

Припущення А12. Форма залежності обсягу залучених депозитів від депозитної ставки лінійна.

Припущення А13. Депозитна ставка є невід'ємною. Вкладники не платять банку за вклади — навпаки, банк платить вкладникам.

Припущення А14. Обсяг залучених депозитів невід'ємний. Відповідно до до параметрів лінійної залежності, може існувати більша від нуля мінімальна депозитна ставка.

Припущення А15. Відсутня диференціація депозитних продуктів, депозитна ставка єдина.

Оскільки залежність між обсягом залучених депозитів та депозитною ставкою пряма та лінійна, ми можемо записати її у вигляді

$$D_{in}(t) = D + a \cdot u_D(t),$$

де

D, a — коефіцієнти лінійної залежності;

$u_D(t)$ — кредитна ставка в момент часу t.

Хоча D і a вводяться лише як коефіцієнти, можна надати їм трактування в економічному сенсі.

У випадку, коли $D \geq 0$: При нульовій депозитній ставці (тобто, мінімально допустимій для банку) обсяг залучених депозитів становитиме D, тому цей коефіцієнт можна трактувати як мінімальні заощадження ринку, мінімальний обсяг пропозиції грошей. У випадку, коли $D < 0$: При нульовій депозитній ставці обсяг залучених депозитів буде від'ємним, що не допускається припущенням А14. Тому в такому випадку депозитна ставка буде обмежена знизу не нулем, а певною величиною, коли лінія пропозиції грошей банку (попиту на депозити) буде рівною нулю (тобто, банк не залучатиме депозитів). В такому випадку:

$$D + a \cdot u_{Dmin} = 0,$$

$$u_{Dmin}(t) = \frac{-D}{a}.$$

В загальному випадку депозитна ставка обмежена знизу величиною:

$$max\left(0;-\frac{D}{a}\right).$$

Від коефіцієнта a залежить, на яку величину зміниться обсяг залучених депозитів, якщо змінити на певну величину депозитну ставку, тому його можна трактувати як еластичність попиту на депозити. Можна трактувати цей показник, як рівень конкуренції на ринку депозитів, при збільшенні конкурентної боротьби, він буде нижчим. Таким чином модель неявно враховує існування на ринку інших банківських установ. Вважатимемо, що $a > 0$, щоб виконувалося припущення про пряму форму залежності між обсягом залучених депозитів та депозитною ставкою.

Комбінацію показників K, b, D, a можна вважати ринковими умовами.

Графік залежності обсягу залучених депозитів від депозитної ставки подано нижче.

Припущення А16. Депозити з відсотками банк повертає у той же момент часу що й залучає.

Припущення А17. Депозити з відсотками повертаються гарантовано вчасно і у повному обсязі.

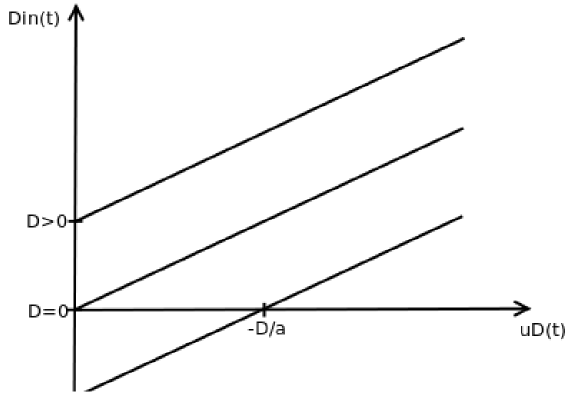

Рисунок 3. Функції пропозиції депозитів за різних ринкових ситуацій (D>0, D=0, D<0

Припущення А18. Не враховується можливість завчасного зняття депозиту та пролонгації. Лише опосередковано - через залежність обсягу залучених депозитів від депозитної ставки.

Оскільки депозити з відсотками повертаються в той же момент часу що й видаються у повному обсязі, то формулу для обсягу повернених депозитів з відсотками можна записати так

$$D_{out}(t) = D_{in}(t) \cdot (1 + u_D(t))$$

або

$$D_{out}(t) = (D + a \cdot u_D(t)) \cdot (1 + u_D(t))$$

Графік залежності обсягу повернених кредитів з відсотками від кредитної ставки подано на рис.2.9.

Тепер приріст капіталу комерційного банку можна записати у вигляді

$$\dot{x}(t) = p(t) = K_{in}(t) — K_{out}(t) + D_{in}(t) - D_{out}(t) =$$
$$= (K - b \cdot u_K(t)) \cdot (1 + u_K(t)) - (K - b \cdot u_K(t)) + (D + a \cdot u_D(t)) - (D + a \cdot u_D(t)) \cdot (1 + u_D(t)) =$$
$$= (K - b \cdot u_K(t)) \cdot u_K(t) — (D + a \cdot u_D(t)) \cdot u_D(t) =$$
$$\dot{x}(t) = K \cdot u_K(t) - b \cdot u_K(t)^2 — D \cdot u_D(t) - a \cdot u_D(t)^2$$

Графік залежності приросту капіталу комерційного банку (що є його прибутком

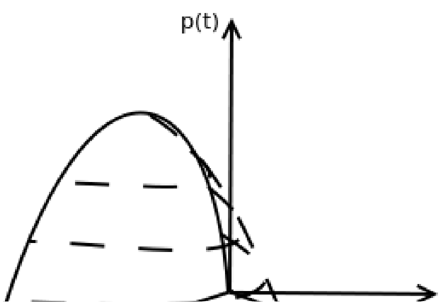

Рисунок 4. Функції пропозиції депозитів за різних ринкових умов та відповідні їм обсяги повернених депозитів

в момент часу t) подано нижче

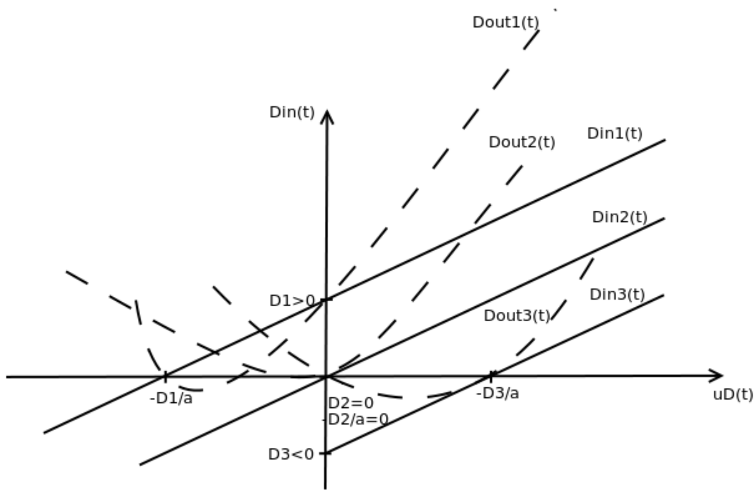

Рисунок 5. Прибуток банку за різних комбінацій кредитної та депозитної ставок

Отже, на основі вищезазначених припущень, задача керування формулюється так:

$$x(T) \rightarrow \max_{u_K(t), u_D(t)},$$

$$\dot{x}(t) = K \cdot u_K(t) - b \cdot u_K(t)^2 - D \cdot u_D(t) - a \cdot u_D(t)^2,$$

$$x(0) = x_0,$$

$$u_K(t) \geq 0,$$

$$u_D(t) \geq \max\left(0; -\frac{D}{a}\right),$$

$$0 \leq t \leq T.$$

Оскільки приріст капіталу не залежить від обсягу капіталу в поточний момент часу, то максимум капіталу в кінці періоду досягатиметься, якщо максимізувати приріст капіталу в кожен момент часу протягом періоду керування, тобто $\dot{x}(t)$.

Похідна від приросту капіталу по кредитній ставці становить

$$\frac{d\dot{x}(t)}{du_K(t)} = K - 2 \cdot b \cdot u_K(t)$$

В точці локального екстремуму (максимуму) вона буде рівною нулю:

$$K - 2 \cdot b \cdot u_K(t) = 0$$

$$2 \cdot b \cdot u_K(t) = K$$

$$u_K(t) = \frac{K}{2 \cdot b}$$

Похідна від приросту капіталу по депозитній ставці становить

$$\frac{d\dot{x}(t)}{du_D(t)} = -D - 2 \cdot a \cdot u_D(t)$$

В точці локального екстремуму (максимуму) вона буде рівною нулю:

$$-D-2\cdot a\cdot u_D(t)=0$$
$$2\cdot a\cdot u_D(t)=-D$$
$$u_D(t)=\frac{-D}{2\cdot a}$$

Для визначення точки глобального максимуму функції прибутку банку, потрібно перевірити точки локального екстремуму та граничні умови.
Для кредитної ставки це

$$u_K(t)=\frac{K}{2\cdot b}$$
$$u_K(t)=0$$
$$u_K(t)\to\infty$$

Останній не є власне обмеженням (кредитна ставка в нашій моделі не обмежена згори), проте потрібно дослідити, як вестиме себе функція прибутку банку, коли кредитна ставка прямуватиме до нескінченності.
А для депозитної ставки це

$$u_D(t)=\frac{-D}{2\cdot a}$$
$$u_D(t)=max\left(0;-\frac{D}{a}\right)$$
$$u_D(t)\to\infty$$

Зауважимо, що від знаку D залежить знак депозитної ставки в першому та другому випадках, тому розглянемо їх окремо.
При $D\geq 0$ залишаться лише варіанти

$$u_D(t)=0$$
$$u_D(t)\to\infty$$

оскільки $u_D(t)=\frac{-D}{2\cdot a}$ та $u_D(t)=\frac{-D}{a}$ не відповідають припущенню про невід'ємність депозитної ставки.
При $D<0$ будуть дійсними варіанти

$$u_D(t)=\frac{-D}{a}$$
$$u_D(t)\to\infty$$

оскільки $u_D(t)=\frac{-D}{2\cdot a}$ та $u_D(t)=0$ не відповідають припущенню про невід'ємність обсягів залучених депозитів.

1. При $D\geq 0$ на глобальний екстремум слід перевірити такі варіанти:

1.1. $u_K(t)=\frac{K}{2\cdot b}$ і $u_D(t)=0$;

У цьому випадку

$$\dot{x}(t)=K\cdot u_K(t)-b\cdot u_K(t)^2 - D\cdot u_D(t)-a\cdot u_D(t)^2=\frac{K\cdot K}{2\cdot b}-b\cdot\left(\frac{K}{2\cdot b}\right)^2 - D\cdot 0-a\cdot 0^2=\frac{K^2}{4\cdot b}$$

$$\dot{x}(t) = \frac{K^2}{4 \cdot b}$$

1.2. $u_K(t) = \frac{K}{2 \cdot b}$ і $u_D(t) \to \infty$;

$$\lim \dot{x}(t) = \lim_{u_D(t) \to \infty} \left(\frac{K \cdot K}{2 \cdot b} - b \cdot \left(\frac{K}{2 \cdot b} \right)^2 - D \cdot u_D(t) - a \cdot u_D(t)^2 \right) \to -\infty$$

$$\lim_{u_D(t) \to \infty} \dot{x}(t) \to -\infty$$

1.3. $u_K(t) = 0$ і $u_D(t) = 0$;

$$\dot{x}(t) = K \cdot u_K(t) - b \cdot u_K(t)^2 - D \cdot u_D(t) - a \cdot u_D(t)^2 = K \cdot 0 - b \cdot 0^2 - D \cdot 0 - a \cdot 0^2 = 0$$

$$\dot{x}(t) = 0$$

1.4. $u_K(t) = 0$ і $u_D(t) \to \infty$

$$\lim \dot{x}(t) = \lim_{u_D(t) \to \infty} \left(K \cdot 0 - b \cdot 0^2 - D \cdot u_D(t) - a \cdot u_D(t)^2 \right) \to -\infty$$

$$\lim_{u_D(t) \to \infty} \dot{x}(t) \to -\infty$$

1.5. $u_K(t) \to \infty$ і $u_D(t) = 0$;

$$\lim \dot{x}(t) = \lim_{u_K(t) \to \infty} \left(K \cdot u_K(t) - b \cdot u_K(t)^2 - D \cdot 0 - a \cdot 0^2 \right) \to -\infty$$

$$\lim_{u_D(t) \to \infty} \dot{x}(t) \to -\infty$$

1.6. $u_K(t) \to \infty$ і $u_D(t) \to \infty$

$$\lim \dot{x}(t) = \lim_{u_K(t) \to \infty, u_D(t) \to \infty} \left(K \cdot u_K(t) - b \cdot u_K(t)^2 - D \cdot u_D(t) - a \cdot u_D(t)^2 \right) \to -\infty$$

$$\lim_{u_K(t) \to \infty, u_D(t) \to \infty} \dot{x}(t) \to -\infty$$

2. При $D < 0$ на глобальний екстремум слід перевірити такі варіанти:

2.1. $u_K(t) = \frac{K}{2 \cdot b}$ і $u_D(t) = \frac{-D}{a}$;

$$\dot{x}(t) = K \cdot u_K(t) - b \cdot u_K(t)^2 - D \cdot u_D(t) - a \cdot u_D(t)^2 = \frac{K \cdot K}{2 \cdot b} - b \cdot \left(\frac{K}{2 \cdot b} \right)^2 - \frac{D \cdot -D}{a} - a \cdot \left(\frac{-D}{a} \right)^2 = \frac{K^2}{4 \cdot b} + 0$$

$$\dot{x}(t) = \frac{K^2}{4 \cdot b}$$

2.2. $u_K(t) = \frac{K}{2 \cdot b}$ і $u_D(t) \to \infty$;

$$\lim \dot{x}(t) = \lim_{u_D(t) \to \infty} \left(\frac{K \cdot K}{2 \cdot b} - b \cdot \left(\frac{K}{2 \cdot b} \right)^2 - D \cdot u_D(t) - a \cdot u_D(t)^2 \right) \to -\infty$$

$$\lim_{u_D(t)\to\infty} \dot{x}(t) \to -\infty$$

2.3. $u_K(t) = 0$ і $u_D(t) = \dfrac{-D}{a}$;

$$\dot{x}(t) = K \cdot u_K(t) - b \cdot u_K(t)^2 - D \cdot u_D(t) - a \cdot u_D(t)^2 = K \cdot 0 - b \cdot 0^2 - \frac{D \cdot -D}{a} - a \cdot \left(\frac{-D}{a}\right)^2 = 0 + 0$$

$$\dot{x}(t) = 0$$

2.4. $u_K(t) = 0$ і $u_D(t) \to \infty$;

$$\lim \dot{x}(t) = \lim_{u_D(t)\to\infty} \left(K \cdot 0 - b \cdot 0^2 - D \cdot u_D(t) - a \cdot u_D(t)^2\right) \to -\infty$$

$$\lim_{u_D(t)\to\infty} \dot{x}(t) \to -\infty$$

2.5. $u_K(t) \to \infty$ і $u_D(t) = \dfrac{-D}{a}$;

$$\lim \dot{x}(t) = \lim_{u_K(t)\to\infty} \left(K \cdot u_K(t) - b \cdot u_K(t)^2 - \frac{D \cdot -D}{a} - a \cdot \left(\frac{-D}{a}\right)^2\right) \to -\infty$$

$$\lim_{u_D(t)\to\infty} \dot{x}(t) \to -\infty$$

2.6. $u_K(t) \to \infty$ і $u_D(t) \to \infty$.

$$\lim \dot{x}(t) = \lim_{u_K(t)\to\infty, u_D(t)\to\infty} \left(K \cdot u_K(t) - b \cdot u_K(t)^2 - D \cdot u_D(t) - a \cdot u_D(t)^2\right) \to -\infty$$

$$\lim_{u_K(t)\to\infty, u_D(t)\to\infty} \dot{x}(t) \to -\infty$$

Як бачимо, максимуму приріст капіталу досягає у випадках 1.1 та 2.1. Звідси оптимальні ставки при $D \geq 0$: $u_K^*(t) = \dfrac{K}{2 \cdot b}$ і $u_D^*(t) = 0$.

А при $D < 0$: $u_K^*(t) = \dfrac{K}{2 \cdot b}$ і $u_D^*(t) = \dfrac{-D}{a}$.

А в загальному випадку: $u_K^*(t) = \dfrac{K}{2 \cdot b}$ і $u_D^*(t) = max\left(0; -\dfrac{D}{a}\right)$

Відповідний їм обсяг виданих кредитів: $K_{out}^*(t) = \dfrac{K}{2}$ та залучених депозитів $D_{in}^*(t) = 0$ (при $D < 0$) чи $D_{in}^*(t) = D$ (при $D \geq 0$). Що є логічним, оскільки у випадку, коли банк має достатньо грошових ресурсів, щоб видати будь-який обсяг кредитів, недоцільно залучати депозитні ресурси, за які банк платить депозитну ставку (але якщо ця плата рівна нулю, то банк залучатиме ці ресурси).

Максимальний приріст капіталу (або прибуток) за оптимальних ставок становить:

$$\dot{x}^*(t) = p^*(t) = \frac{K \cdot K}{2 \cdot b} - b \cdot \left(\frac{K}{2 \cdot b}\right)^2 + 0 = \frac{K^2}{2 \cdot b} - \frac{b \cdot K^2}{4 \cdot b^2} = \frac{2 \cdot K^2}{4 \cdot b} - \frac{K^2}{4 \cdot b} = \frac{K^2}{4 \cdot b}$$

$$\dot{x}^*(t) = \frac{K^2}{4 \cdot b}$$

Тоді максимальний капітал банку в кінцевий момент часу T становитиме

$$x^*(T) = x_0 + \frac{K^2}{4 \cdot b} \cdot T$$

Якщо ринкові умови (K та b) не змінюються (що виглядає правдоподібно в короткостроковій перспективі), то

1. Обсяг виданих кредитів за оптимальної кредитної ставки в кожен момент часу є сталим і становить $K/2$, тобто половину від максимального обсягу попиту на кредити.
2. Банк не залучає депозитних ресурсів (хоч і може це робити), тобто $D_{in}(t) = 0$.
3. Банк не змінює кредитну та депозитну ставку протягом часу керування.

Якщо ринкові умови змінюються:

1. Оптимальна кредитна ставка визначається тим же співвідношенням $u_K^*(t) = \dfrac{K}{2 \cdot b}$.
2. Якщо збільшується максимальний попит на кредити (за інших незмінних умов), то оптимальна кредитна ставка також збільшується. І навпаки, якщо максимальний попит на кредити зменшується, оптимальна кредитна ставка також зменшується. Іншими словами, коли кредиторів стає мало, банк змушений пропонувати більш доступну ціну на кредити. (Альтернативний текст: коли економіка (ділова активність) зростає, банк збільшує кредитну ставку, коли ж вона спадає, банк зменшує кредитну ставку).

3. Якщо збільшується еластичність попиту на кредити (кут нахилу прямої залежності обсягу виданих кредитів від кредитної ставки, або рівень конкуренції), оптимальна кредитна ставка зменшується. І навпаки, якщо

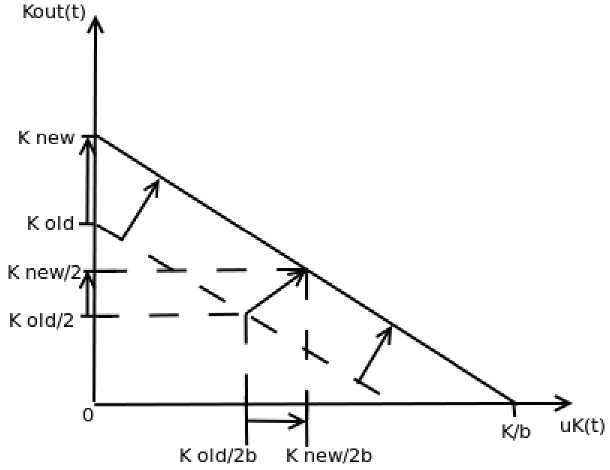

Рисунок 6. Зміна оптимальної кредитної ставки в залежності від зміни максимального попиту на кредити

еластичність попиту на кредити зменшується (менш конкурентна

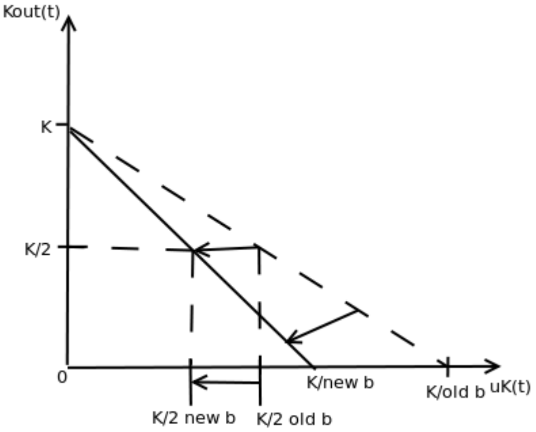

Рисунок 7. Зміна оптимальної кредитної ставки в залежності від зміни еластичності попиту на кредити

боротьба), оптимальна кредитна ставка збільшується. В умовах напруженої конкуренції, банк змушений зменшувати кредитну ставку і навпаки — в умовах ближчих до монополії банк буде збільшувати кредитну ставку.
4. Якщо еластичність попиту на кредити прямує до нескінченності, то оптимальна кредитна ставка прямує до нуля, що повторює результат парадоксу Бертрана — в умовах ідеальної конкуренції виробників однотипних товарів, що конкурують виключно за ціною, ціни товарів будуть рівними нулю.
5. Якщо максимальний попит на кредити та еластичність попиту на кредити зміняться в однакову кількість разів, оптимальна кредитна ставка не зміниться.

6. Хоч обмеження з боку максимуму на кредитну ставку немає, вона не прямує до нескінченності.

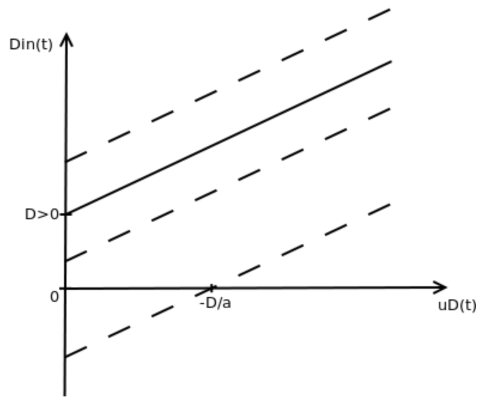

Рисунок 8. Зміна оптимальної депозитної ставки в залежності від зміни обсягу залучених депозитів за нульової депозитної ставки при D>0

7. Коли максимальний попит на кредити дорівнює нулю, сенсу в кредитній діяльності немає — обсяг виданих кредитів також буде рівним нулю.
8. Оптимальна депозитна ставка залежить від знаку параметра D (обсягу депозитів що можуть бути залучені банком за нульової депозитної ставки) — якщо $D \geq 0$, $u_D^*(t) = 0$, а при $D < 0$, $u_D^*(t) = \frac{-D}{a}$.
9. Якщо попит на депозити при нульовій ставці невід'ємний ($D \geq 0$), то при його збільшенні оптимальна депозитна ставка не змінюється і залишатиметься рівною нулю: $u_D^*(t) = 0$. Якщо він зменшуватиметься, то до $D = 0$ оптимальна депозитна ставка залишатиметься незмінною $u_D^*(t) = 0$, а потім зростатиме пропорційно до його значення: $u_D^*(t) = \frac{-D}{a}$.

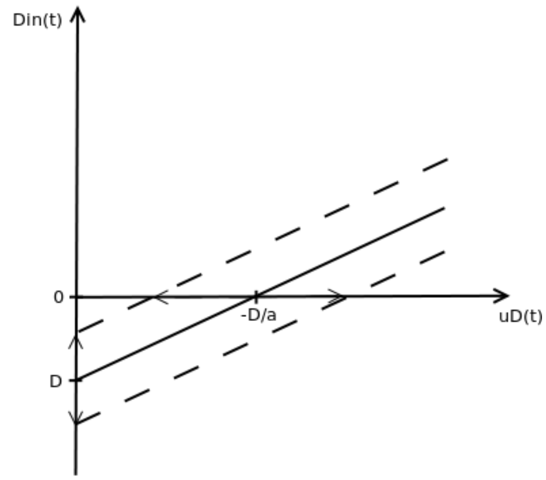

Рисунок 9. Зміна оптимальної депозитної ставки в залежності від зміни обсягу залучених депозитів за нульової депозитної ставки при D=0

І навпаки, при $D < 0$, якщо попит на депозити при нульовій ставці зменшуватиметься, то оптимальна кредитна ставка збільшуватиметься і становитиме $u_D^*(t) = \frac{-D}{a}$, при збільшенні ж вона буде зменшуватися до нуля (при $D = 0$), а потім залишатиметься незмінною $u_D^*(t) = 0$).

Графік залежності оптимальної депозитної ставки від попиту на депозити при нульовій депозитній ставці подано нижче. Коефіцієнт нахилу кривої при

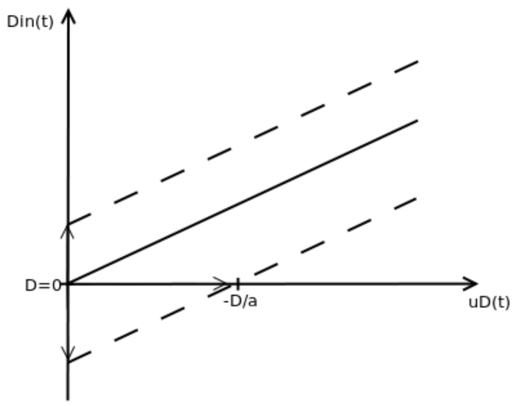

Рисунок 10. Зміна оптимальної депозитної ставки в залежності від зміни обсягу залучених депозитів за нульової депозитної ставки при D=0

від'ємному D рівний $\frac{-1}{a}$.

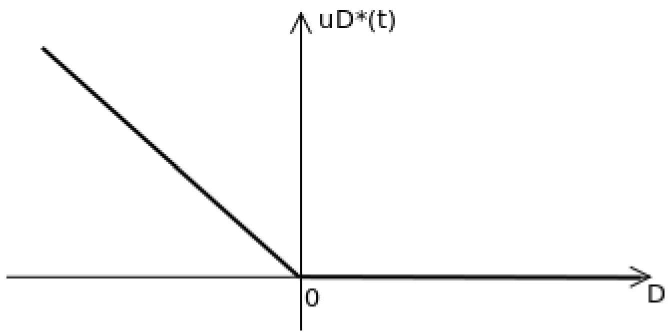

Рисунок 11. Оптимальна депозитна ставка за різних обсягів залучених депозитів при нульовій депозитній ставці

Графік залежності оптимального обсягу залучених депозитів від попиту на депозити при нульовій депозитній ставці подано нижче.

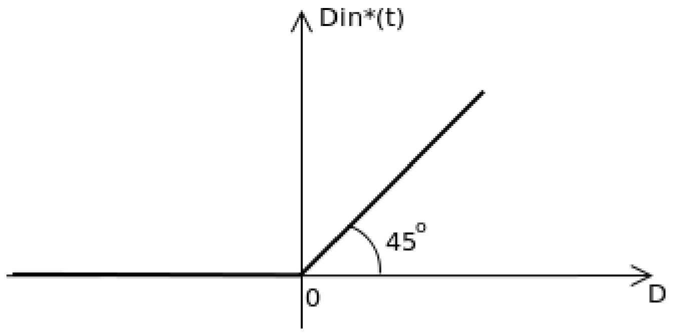

Рисунок 12. Оптимальний обсяг залучених депозитів за різних обсягів залучених депозитів при нульовій депозитній ставці

10. При зміні еластичності попиту на депозити a (коефіцієнту зміни обсягу залучених депозитів в залежності від зміни депозитної ставки) за умови, що $D \geq 0$, оптимальна депозитна ставка не буде змінюватися і залишатиметься $u_D^*(t) = 0$.

При $D < 0$ оптимальна депозитна ставка знаходиться в оберненій залежності від a: при його зростанні оптимальна депозитна ставка зменшується, а при його зменшенні оптимальна депозитна ставка зростає.

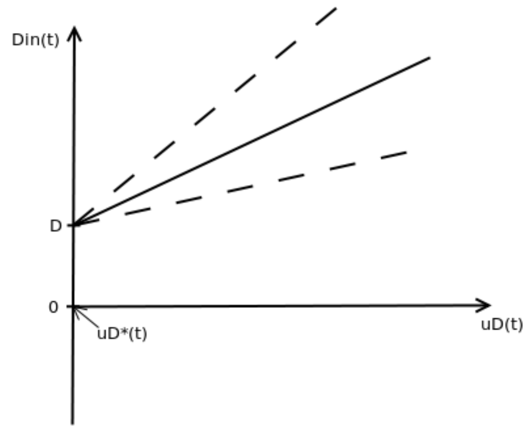

Рисунок 13. Зміна оптимальної депозитної ставки в залежності від зміни еластичності пропозиції депозитів при D>0

Коли еластичність попиту на депозити збільшується (зростає a), банк зменшує депозитну ставку, оскільки може досягти бажаного обсягу залучених депозитів (в даному випадку нульового) за меншу ціну (відсоткову ставку). І навпаки, при зменшенні еластичності, він змушений пропонувати "купувати" депозити за більшу "ціну" (відсоткову ставку), щоб досягти бажаного обсягу залучених депозитів. Це справедливо за умов, коли немає вкладників, що готові приносити депозити за будь-якої ненульової ставки ($D = 0$) або навіть і за нульової

($D > 0$). В цих же випадках банк не витрачає гроші на купівлю ресурсів, яких у нього вдосталь ($D = 0$) або безкоштовно отримує нові ресурси ($D > 0$), в яких, втім, однаково немає потреби.

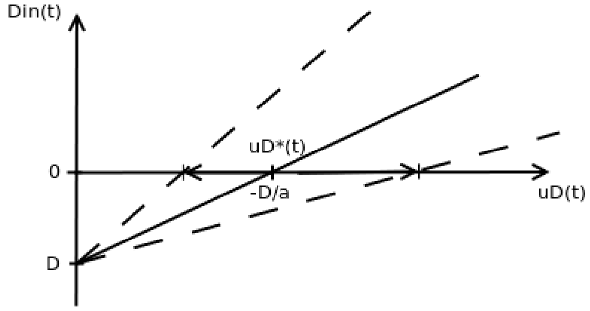

Рисунок 14. Зміна оптимальної депозитної ставки в залежності від зміни еластичності пропозиції депозитів при D<0

11. Якщо еластичність попиту на депозити a прямує до нескінченності, то оптимальна депозитна ставка прямує до нуля (незалежно від знаку D). Нульовий обсяг залучених депозитів банк зможе досягнути за ставки, що прямує до нуля справа.
12. При $D < 0$ еластичність попиту на депозити не може бути нульовою ($a = 0$), оскільки порушиться припущення про невід'ємність обсягу залучених депозитів. При нульовій еластичності попиту на депозити керування депозитною ставкою не впливає на обсяг залучених депозитів і він буде рівний D, тобто від'ємним. При $D \geq 0$ та $a = 0$, обсяг залучених депозитів буде невід'ємним, проте порушиться припущення про пряму залежність обсягу залучених депозитів від депозитної ставки.
13. Якщо попит на депозити при нульовій ставці та еластичність попиту на депозити зміняться в однакову кількість разів, оптимальна депозитна ставка не зміниться (незалежно від знаку D).
14. Як співвідносяться кредитна та депозитна ставки? При $D \geq 0$ кредитна ставка більша за депозитну, хоч явно таке співвідношення і не задавалось. При $D < 0$ все залежить від величини K, b, D та a.
15. Незалежно від знаку D потреби в депозитній діяльності немає. Це відбувається саме внаслідок того, що у банку достатньо грошових коштів, щоб видати будь-які обсяги кредитів.

Висновки. Таким чином, були отримані оптимальні кредитна та депозитна ставка, максимальний прибуток та максимальний капітал на кінець періоду банку, з власним капіталом, достатнім для задоволення максимального попиту на кредити та без врахування запізнення у термінах повернення кредитів.

Наукова новизна полягає у формалізації припущень в потоковій моделі банку, що не враховує запізнень в термінах повернення кредитів та за власного капіталу банку, достатнього для задоволення максимального попиту, побудові та аналізі такої моделі, постановці задачі максимізації капіталу на кінець періоду та її аналітичному розв'язку.

Результати роботи можуть бути використані для ілюстрації кредитної діяльності комерційного банку, ілюстрації парадоксу Бертрана в банківській діяльності, максимальної оцінки прибутку та капіталу комерційного банку в залежності від ринкових умов, ілюстрації та аналізу ринкової ситуації, коли зменшуються водночас і кредитні ставки, і обсяги виданих кредитів (як під час спадів виробництва) та для подальшої розробки на їх основі моделей банківської діяльності та постановки задач керування банком, що враховуватимуть і кредитну, і депозитну діяльність комерційного банку, запізнення в термінах повернення кредитів та депозитів, власний капітал банку, недостатній для задоволення максимального попиту на кредити.

Обґрунтовуються та підсумовуються результати, наукова новизна, практичне та теоретичне значення результатів дослідження

Література:

1. Гришин А.Г., Козак Д.В., Умрик А.В., Иваненко В.И., Постановка задачи оптимизации управления коммерческим банком // Вестник Национального технического университета “Харьковский политехнический институт”. - Х.: 2001. - ч.2, с. 154-157.
2. Гришин О.Г. Стратегічне планування та керування діяльністю банківської установи на основі математичної моделі комерційного банку // Економіка та підприємництво. КНЕУ. - К.: 2004. - Випуск 12, с. 261-266.
3. Дрозд А.О., Капустян В.О. Моделювання кредитного ризику в потоковій моделі банку // Збірник наукових праць «Сучасні проблеми економіки і підприємництва», випуск 5, ч.2. – Київ.: ВПК «Політехніка», 2010. – с. 103-105.
4. Дрозд А.О., Капустян В.О. Ефективне керування рекламними витратами банку // Міжнародний науково-практичний журнал «Економіка та держава». – Київ.: ТОВ «Редакція журналу «Економіка та держава», 2010. - № 6. –с. 65-67.
5. Дрозд А.О., Капустян В.О. До впливу невизначеності у термінах повернених кредитів на грошовий потік банку. // Матеріали ІІ міжнародної науково-методичної конференції «Математичні методи, моделі та інформаційні технології в економіці». – Чернівці: «ДрукАрт», 2011. – с. 109-110.
6. Дрозд А.О., Капустян В.О. До питання керування кредитною діяльністю банку. // Матеріали XVI всеукраїнської науково-методичної конференції «Проблеми економічної кібернетики». Том 2. – Одеса: ОНПУ, 2011. – с. 105-106.
7. Дрозд А.О. Керування кредитною ставкою комерційного банку з метою максимізації прибутку. // Збірник матеріалів міжнародної науково-практичної конференції «Економіко-соціальні аспекти реформування та розвитку України». – Київ: КЕНЦ, 2011. – с. 80-82.
8. Дрозд А.О. Порівняння керування кредитною та кредитно-депозитною діяльністю банку з капіталом, достатнім для задоволення максимального попиту на кредити. // Збірник тез V міжнародної науково-практичної конференції «Теорія і практика економічного аналізу: сучасний стан, актуальні проблеми та перспективи розвитку». – Тернопіль: СМП «Тайп», 2011. – с. 96-98.
9. Дрозд А.О. Керування основною діяльністю банку із власним капіталом, достатнім для задоволення максимального попиту на кредити. // Матеріали ІІ Міжнародної конференції молодих вчених ЕМ-2011. – Львів: Видавництво Львівської політехніки, 2011. – с. 244-245.
10. Дрозд А.О. До аналізу оптимального керування кредитною ставкою комерційного банку за різних функцій попиту на кредити. // Збірник тез доповідей XIV Всеукраїнської науково-практичної конференції. – Суми: ДВНЗ «УАБС НБУ», 2011. – с. 111-112.
11. Дрозд А.О. Парадокс Бертрана в потоковій моделі банку. // Матеріали V Міжнародної науково-практичної конференції «Моделювання та прогнозування економічних процесів». – Київ: НТУУ «КПІ», 2011. – с. 7.

12. Дрозд А.О. Огляд питання невизначеності в термінах погашення кредитів. // Матеріали VII Міжнародної конференції «Науково-технічний розвиток: економіка, технології, управління». – Київ: НТУУ «КПІ», 2008. – с. 238.
13. Іваненко В.І. До управління фінансами в комерційних банках / Іваненко В.І., Куц О.В., Гришин О.Г. // Моделювання та інформаційні системи в економіці. Випуск 84. - К.: КНЕУ, 2011. – с. 220-229.
14. Осипенко Д.В. Динамічна модель комерційного банку // Фінанси України. - 2005. - №11. - с. 87-92.
15. Закон України «Про банки і банківську діяльність»: за станом на 7 груд. 2000 р. / Верховна Рада України. — Офіц. вид. — К. : Відомості Верховної Ради України, 2009. — №15, 190 с. — (Бібліотека офіційних видань).