

УДК 539.3

Чемерис О.М. к.т.н., доц.

НТУУ «Київський політехнічний інститут», м.Київ, Україна

КОЛИВАННЯ КРУГЛИХ ПЛАСТИН З ПРОМІЖНИМ ШАРНІРОМ

Chemeris O.

National Technical University of Ukraine «Kyiv Polytechnic Institute», Kyiv, Ukraine (mmi@kpi.ua)

VIBRATION OF THE CIRCULAR PLATE OR INTERMEDIATE HINGE

Кругла цільна пластинка закріплена жорстко чи шарнірно по зовнішній границі і має проміжний кільцевий шарнір. В роботі визначаються власні частоти та радіуси вузлових діаметрів для симетричних і несиметричних коливань пластинки. При рішенні задачі використані функції Бесселя різного роду нульового і першого порядку. Для кожної форми коливань з числом вузлових діаметрів $n=0,1,2$ складені частотні рівняння та рівняння для визначення положення вузлових кілець. Проведені обчислення власних частот та радіусів вузлових кілець в випадку, коли число вузлових діаметрів $n=0,1,2$, а число вузлових кілець $s=0,1,2$. Робота може бути використана для визначення власних частот і радіусів вузлових діаметрів для різного типу коливань шарнірно чи жорстко, закріплених цільних пластин з проміжним шарніром, які зустрічаються в елементах машин та приладів.

Ключові слова: кругла зацемлена і шарнірна пластинка, проміжний шарнір, частоти, форми.

Вступ

Круглі пластинки використовують в різного типу конструкціях в вигляді діафрагм, днищ, пружин. Досить часто використовують схему з проміжним шарніром. Для раціонального проектування таких пластин необхідно знати такі динамічні характеристики як частоти і форми коливань. В випадку кругової проміжної опори, яка розміщена на довільній відстані від центра методика визначення частот і форм приведена в роботі [1]. Для центральної опори результати визначення частот приведені в [2-3]. Ряд задач по визначення частот і критичних сил круглих пластин з проміжною опорою розглянуто в [4]. В науковій і довідковій літературі нема даних по визначенню частот і форм круглих пластин з проміжним шарніром.

Мета досліджень

Скласти частотні рівняння на основі аналітичного рішення рівнянь коливань круглих пластин з проміжним шарніром для двох варіантів закріплення контура пластинки. Провести обчислення для зацемленої і шарнірно-закріпленої пластинки частот і форм при симетричних і несиметричних коливаннях. Знайти частоти і форми при різних положеннях проміжного шарніра.

Дослідження

Рівняння коливань круглої пластинки має вигляд

$$D\left(\frac{\partial^2}{\partial^2\rho} + \frac{\partial}{\rho\partial\rho} + \frac{\partial^2}{\rho^2\partial\theta^2}\right)^2 w + R^4 m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0,$$

де $D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$,

E -модуль Юнга, μ -коефіцієнт Пуассона, a - радіус кругового шарніра, R - радіус пластинки, $\xi = a/R$,

w - переміщення, m - маса пластинки на одиницю площі, θ - кутова координата, t - час.

По методу розділення змінних рішення даного рівняння можна записати в вигляді

$$w(\rho, \theta, t) = C_1 J_n(k\rho) + C_2 I_n(k\rho) + \\ + C_3 [J_n(k\xi) \cdot Y_n(k\rho) - \frac{2}{\pi} I_n(k\xi) \cdot K_n(k \cdot \rho)] \cos n\theta \cos \omega t.$$

Де C_i - сталі величини, I_n, J_n, K_n, Y_n - функції Бесселя, $k = \left(\frac{m\omega^2}{D}\right)^{\frac{1}{4}}$

ω - кругова частота коливань, ($n=0, 1, 2\dots$), k - невідоме число (невідомий частотний параметр) ;
 Переміщення при коливаннях для пластинки з проміжним шарніром можна записати [в такій формі

$$w(\rho, \theta, t) = w_n(\rho) \cdot \cos \omega t ; w_n(\rho) = [w_n^1(\rho) + w_n^0(\rho)] \quad (1)$$

$$w_n^1(\rho) = C_1 J_n(k\rho) + C_2 I_n(k\rho).$$

Ця складова (1) відповідає загальному рішенню, яке по термінології В.Г Коренева називають компенсаційним.

$$w_n^0 = C_3 [J_n(k\xi) \cdot Y_n(k\rho) - \frac{2}{\pi} I_n(k\xi) \cdot K_n(k \cdot \rho)]; \rho \geq \xi$$

$$w_n^0 = C_3 [J_n(k\rho) \cdot Y_n(k\xi) - \frac{2}{\pi} I_n(k\rho) \cdot K_n(k \cdot \xi)]; \rho \leq \xi.$$

Розглянемо випадок защемленої по контуру пластинки з проміжним шарніром (Рис.1) Граничні умови

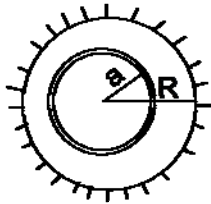


Рис. 1. Розрахункова схема 1

$$w(1) = 0, w'(1) = 0 \quad (2)$$

Підставляємо (1) в (2) і знаходимо

$$\delta(k) \cdot C_1 = \delta_1(k) \cdot C_3, \delta(k) \cdot C_2 = \delta_2(k) \cdot C_3 \quad (3)$$

$$\delta(k) = J_n(k) \cdot I_n'(k) - J_n'(k) \cdot I_n(k) \quad \delta_1(k) = q_1(k) \cdot I_n'(k) - I_n(k) \cdot q_2(k)$$

$$\delta_2(k) = q_2(k) \cdot J_n(k) - J_n'(k) \cdot q_1(k)$$

$$q_1(k) = -[J_n(\xi \cdot k) \cdot Y_n(k) - \frac{2}{\pi} I_n(\xi \cdot k) \cdot K_n(k)]$$

$$q_2(k) = -[J_n(\xi \cdot k) \cdot Y_n'(k) - \frac{2}{\pi} I_n(\xi \cdot k) \cdot K_n'(k)]$$

$$w(\rho) = C_3 \bar{w}_n; \bar{w}_n(\rho) = [J_n(\rho \cdot k)(I_n'(k \cdot \xi) \cdot q_1(\xi \cdot k) - I_n(\xi \cdot k) \cdot q_2(\xi \cdot k)) +$$

$$+ I_n(\rho \cdot k)(J_n(\xi \cdot k) \cdot q_2(\xi \cdot k) - J_n'(\xi \cdot k) \cdot q_1(\xi \cdot k)) + \delta(k)(J_n(\xi \cdot k) \cdot Y_n(\rho \cdot k) - \frac{2}{\pi} I_n(\xi \cdot k) \cdot K_n(\rho \cdot k)].$$

Для пониження порядку функцій Бесселя використовуємо такі співвідношення

$$J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} J_n(x) - J_{n-1}(x); Y_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} Y_n(x) - Y_{n-1}(x)$$

$$I_{n+1}(x) = -\frac{2}{x} I_n(x) + I_{n-1}(x); K_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} K_n(x) + K_{n-1}(x).$$

Для визначення похідних функцій $J_n(x), K_n(x), I_n(x)$ маємо такі залежності:

$$J_n'(x) = I_{n-1}(x) - \frac{n}{x} I_n(x); J_n'(x) = -J_{n+1}'(x) + \frac{n}{x} I_n(x); K_n'(x) = -K_{n-1}(x) + \frac{n}{x} K_n(x).$$

Частоту коливань знайдемо із умови

$$\left[\frac{d^2 \bar{w}(\rho)}{d\rho^2} + \mu \left(\frac{1}{\rho} \frac{d\bar{w}(\rho)}{d\rho} - n^2 \frac{\bar{w}(\rho)}{\rho^2} \right) \right]_{\rho=\xi} = 0. \quad (4)$$

Позначимо через S оператор

$$S = \frac{d^2}{d\rho^2} + \mu \left(\frac{1}{\rho k} \frac{d}{d\rho} - \frac{n^2}{(k\rho)^2} \right).$$

Із рівняння (2), враховуючи (3), (5), знаходимо $S w(k) = C_3 \cdot X(x) = 0$

$$X(x) = S J_n(\xi \cdot k)(I_n'(k \cdot \xi) \cdot q_1(\xi \cdot k) - I_n(\xi \cdot k) \cdot q_2(\xi \cdot k)) +$$

$$+ S I_n(\xi \cdot k)(J_n(\xi \cdot k) \cdot q_2(\xi \cdot k) - J_n'(\xi \cdot k) \cdot q_1(\xi \cdot k)) +$$

$$+ \delta(k)(J_n(\xi \cdot k) \cdot Y_n(\xi \cdot k) - \frac{2}{\pi} I_n(\xi \cdot k) \cdot K_n(\xi \cdot k)). \quad (5)$$

В системі «МАТКАД» знаходимо корні частотного рівняння

$$read[X\{k\}, k, k_1, k_2] = 0$$

k_1, k_2 - границі невідомого кореня.

Корні частотного рівняння при $n = 2, 1, 0$ та різних значеннях параметра $\xi = a / R$ для защемленої по контуру пластинки з проміжним шарніром приведено в таблицях 1, 2, 3

Таблиця 1

Значення частотного параметра k_i при $n=2$ (шарнір-зашемлено) (Рис.1)

	$\zeta = 0.1$	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
1	6.05 (9.94)	6.42 (10.46)	6.69 (10.28)	6.56	6.33 (18.85)	6.27
2	--	--	--	9.66	15.66	9.48 (11.57) (12.34)
3	13.65	13.75 (16.87)	12.75 (15.59) [16.49]	12.43 (14.76)	----	14.7
4	16.999	--	17.32	15.88 (14.76) (17.88) (18.59)	17.94 (18.76)	15.6 (17.96) (18.74)
5	20.23	19.47	18.83	21.16	21.13	21.12

Таблиця 2

Значення частотного параметра k_i при $n=1$ (шарнір-зашемлено) (Рис.1)

	$\zeta = 0.1$	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
$s=0$	4.61	4.58	4.44	4.12	4.08	4.1
1	7.79	7.6	7.34	7.29	--	8.64
2	10.93	10.64	11.57	12.29	9.14	10.8
3	14.03	13.8	15.47	14.89	14.1	--
4	17.13	17.01	18.32	--	--	14.99
5	20.24	21.3	21.1	17.36	--	17.1

Таблиця 3

Значення частотного параметра k_i при $n=0$ (шарнір-зашемлено) (Рис.1)

	$\zeta = 0.1$	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
1	3.34	3.82	--		--	--
2	6.85	10.06	3.97	3.912	5.5	8.36 10.15
3	10.28	13.32	10.23, 13.35	12.51	7, 9.14, 10.15	--
4	--	16.54	--	13.31, 15.15	24.15	---
5	15.91	19.65	18.03 19.6	--	16.46	17.62

Знаходимо відносні діаметри вузлових кілець ρ_i із рівняння

$$\text{read} [\bar{w}_n(k), k, k_1, k_2] = 0$$

k_1, k_2 - границі невідомого кореня.

$$\begin{aligned} \bar{w}_n(\rho) = & [J_n(\rho \cdot k)(I'_n(k \cdot \xi) \cdot q1(\xi \cdot k) - I_n(\xi \cdot k) \cdot q2(\xi \cdot k)) + \\ & + I_n(\rho \cdot k)(J_n(\xi \cdot k) \cdot q2(\xi \cdot k) - J'_n(\xi \cdot k) \cdot q1(\xi \cdot k)) + \\ & + \delta(k)(J_n(\xi \cdot k) \cdot Y_n(\rho \cdot k) - \frac{2}{\pi} I_n(\xi \cdot k) \cdot K_n(\rho \cdot k))] \end{aligned}$$

Величин вузлових діаметрів ρ_i для защемленої по контуру пластинки з проміжним шарніром приведено в таблиці 4.

Таблиця 4

Величини вузлових діаметрів $\rho_i \cdot 10^3$ (шарнір-защемлено) (Рис. 1)

ζ	$n=0$			$n=1$			$n=2$		
	$s=1$	$s=2$	$s=3$	$s=1$	$s=2$	$s=3$	$s=1$	$s=2$	$s=3$
0.1	725	825 350	977 536 234	490	641 351	724 500 273	914 516	--	854 617 376
0.2	729	547 239	648 414 180	502	658 360	836 509 278	823 486	--	855 612 374
0.3		916 719	808 542 235	517	663 563	657 454 243	739 498		936 659 403
0.4		878 764	691 441 192	519	572 312	683 474 257	813	907 531	985 676 413
0.5							854 346	537 328	--
0.6			691 441 192				865	921 541	989 786 569



Рис. 2. Розрахункова схема 2

Розглянемо випадок шарнірного закріплення по контуру пластинки з проміжним шарніром (Рис.2) Граничні умови $[\frac{d^2w(\rho)}{d\rho^2} + \mu(\frac{1}{\rho} \frac{dw(\rho)}{d\rho} - n^2 \frac{w(\rho)}{\rho^2})]_{\rho=1} = 0$

$$B = [\frac{d^2}{d\rho^2} + \mu(\frac{1}{\rho k} \frac{d}{d\rho} - \frac{n^2}{(k\rho)^2}]_{\rho=1} \alpha(k) \cdot C_1 = \alpha_1(k) \cdot C_3, \alpha(k) \cdot C_2 = \alpha_2(k) \cdot C_3$$

$$\alpha(k) = J_n(k) \cdot BI_n(k) - BJ_n(k) \cdot I_n(k)$$

$$\alpha_1(k) = q_1(k) \cdot BI_n(k) - I_n(k) \cdot b_2(k), \alpha_2(k) = b_2(k) \cdot J_n(k) - BJ_n(k) \cdot q_1(k)$$

$$q_1(k) = -[J_n(\xi \cdot k) \cdot Y_n(k) - \frac{2}{\pi} I_n(\xi \cdot k) \cdot K_n(k)], b_2(k) = -[J_n(\xi \cdot k) \cdot BY_n(k) - \frac{2}{\pi} I_n(\xi \cdot k) \cdot BK_n(k)]$$

Звідси випливає $Sw(k) = C_3 \cdot XX(x) = 0; XX(k) = SJ_n(\xi \cdot k) \cdot \alpha_1(k) + I_n(\xi \cdot k) \cdot \alpha_2(k) + \alpha(k)Sq_1(k)$.

Знаходимо корні частотного рівняння

$$read[X\{k, k, k_1, k_2\} = 0 \quad (k_1, k_2 - \text{границі невідомого кореня.)}$$

Корні частотного рівняння при $n=2, 1, 0$ та різних значеннях параметра $\xi = a/R$ для защемленої по контуру пластинки з проміжним шарніром приведено в таблицях 1, 2, 3.

Таблиця 5

Значення частотного параметра k_i при $n=2$ (шарнір-шарнірно) (Рис.2)

	$\zeta = 0.1$	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
$s=0$	5.06	5.009	4.841	4.576	--	
1	8.349	8.032	7.33	8.486	5.416	5.84, 8.447 10.009
2	11.504	10.572	11.337	11.815	8.07 (10.772)	14.477
3	14.549	13.696	14.804	13.737	13.667	--
4	17.437	17.497	17.763	16.79	--	16.929
5	20.187	20.984	19.553	20.644	19.04, 20.82	--

Таблиця 6

Значення частотного параметра k_i к при $n=1$ (шарнір-шарнірно) (Рис.2)

	$\zeta = 0.1$	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
$s = 0$	3.73	3.71	3.62	3.42	3.18	2.97
1	6.96	6.82	6.53	6.42	6.49	8.14
2	10.11	9.83	9.72	--	--	10.12
3	13.23	12.98	--	11.51, 14.22	11.01, 13.41	--
4	16.33	16.17	14.46	--	17.33	14.39
5	19.44	19.78	17.61, 20.39	16.8	--	--

Таблиця 7

Значення частотного параметра k_i к при $n=0$ (шарнір-шарнірно) (Рис.2)

	$\zeta = 0.1$	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
$s = 1$	2.79	2.56	2.99	3.08	3.147, 4.9	3.62, 5.36
2	5.712	5.68, 7.76	5.33, 7.08	5, 6.94	6.96, 8.53	10.15
3	9.23	10.77, 13.3	9.78	9.24, 11.55	10.15	12.47
4	12, 14.83	--	13.32	13.3, 14.6	12.82	13.31, 14.9
5	--	16.34	16.39, 17.42, 19.6	--	16.49, 18.75,	16.46, 17.36

Знаходимо відносні діаметри вузлових кілець ρ_i із рівняння

$$\text{read}[\bar{y}_n(k), k, k_1, k_2] = 0$$

k_1, k_2 - границі невідомого кореня.

$$\begin{aligned} \bar{y}_n(\rho) = & [J_n(\rho \cdot k)(BI_n(k \cdot \xi) \cdot q1(\xi \cdot k) - I_n(\xi \cdot k) \cdot q2(\xi \cdot k)) + \\ & + I_n(\rho \cdot k)(J_n(\xi \cdot k) \cdot q2(\xi \cdot k) - BI_n(\xi \cdot k) \cdot q1(\xi \cdot k)) + \\ & + \delta(k)(J_n(\xi \cdot k) \cdot Y_n(\rho \cdot k) - \frac{2}{\pi} I_n(\xi \cdot k) \cdot K_n(\rho \cdot k))]. \end{aligned}$$

Величин вузлових діаметрів ρ_i для защемленої по контуру пластинки з проміжним шарніром приведено в таблиці 7

Таблиця 8

Величини вузлових діаметрів $\rho^* \cdot 10^3$ (Рис.2) (шарнір-защемлено)

ζ	$n = 0$			$n = 1$			$n = 2$		
	$s = 1$	$s = 2$	$s = 3$	$s = 1$	$s = 2$	$s = 3$	$s = 1$	$s = 2$	$s = 3$
0.1	977	934 423	908 600 261	555	694 379	769 530 270	615	732 446	799 579 353
0.2	860	918 427	816 512 223	562	714 390	784 541 295	642	793 486	856 614 375
0.3	569	949 458	905 563 246	586	729 364	-- -- --	728	742 453	785 569 347
0.4	944	079 491	974 596 260	595	-- --	714 493 269	695	713 435	842 613 374
0.5	807	648 282	849 545 237	584	-- --	914 638 348	923	967 583	847 616 376
0.6	630	538 237	693 443 193	457	693 378	-- -- --	840 605	581 355	-- -- --

Висновки

1. Знайдені частотні рівняння для круглої пластинки з проміжним шарніром при защемленні її та при шарнірно закріпленню її контура
2. Проведені обчислення симетричних і несиметричних частот ($n=0,2,3$) та радіуси вузлових кілець при різному положенні проміжного шарніра
3. Наведений алгоритм рішення може бути використаний для визначення частот і форм коливання круглих пластин з іншим граничними умовами.

Аннотация. Круглая сплошная пластинка закреплена или шарнирно опёрта по внешнему контуру и имеет промежуточной круговой шарнир. При решении задачи использованы функции Бесселя разного рода нулевого и первого порядка. Для каждой формы колебаний $n=0, 1, 2$ составлены частотные уравнения и уравнения для определения положения узловых окружностей. Проведены результаты вычислений собственных частот в случае, когда число узловых диаметров ($n=0,1,2$), а число узловых окружностей ($s=0, 1, 2$). Проведены результаты вычислений по определению положения узловых колец в случае, когда число узловых диаметров ($n=0,1,2$), а число узловых окружностей ($s=0, 1, 2, 3$). Работа может быть использована при определении частот и форм собственных колебаний элементов машин и приборов, содержащих шарнирные или закреплённые пластинки с промежуточными шарнирами.

Ключевые слова: круглая закреплённая и шарнирная пластинка, промежуточный шарнир, частоты, формы.

Abstract. A round whole plate is fastened hardly or joint on an external border and has an intermediate circular hinge. Proper oscillation and radiuses of key diameters are in-process determined for symmetric and asymmetrical vibrations of plate. At the decision of task the used Bessel function of different sort of a zero and first order. For every form of vibrations with the number of key diameters of $n=0,1, 2$ worked out frequency equations and equalizations for position-finding key rings. The conducted calculations of proper oscillation and radiuses of key rings are in case, when number of key diameters of $n=0,1, 2$, and number of key rings of $s=0,1, 2$. The work can be used for determination of proper oscillation and radiuses of key diameters for the different type of vibrations joint or the hardly fastened whole plates with the intermediate hinge of, which meet at the elements of machines and devices.

Keywords: The circular supported or hinge plate, intermediate hinge, frequencies, forms.

Бібліографічний список використаної літератури

1. Коренев Б.Г. Некоторые задачи теории упругости и теплопроводности, решаемые в бесселевых функциях. М: Физматгиз, 1969,-358с.
2. Гонткевич В.С. Собственные колебания пластинок. Справочное пособие.-К: Наукова думка, 1964.-287с.
3. Справочник по динамике сооружений. Под ред.Б.Г.Коренева, И.М.Рабиновича.-М: Стройиздат, 1972,-511с.
4. Чемерис О.М. Коливання і стійкість круглих пластин з проміжними опорами //Вісник НТУУ “КПІ”, Серія «Машинобудування», – № 63, 2011, С16-2

References

1. Korenev B.G. Nekotorie zadachi teorii uprygosti I teploprovodnosti, reshaemie v besselevix phynkzijax. Moskow: Phismatchis, 1969, 358p.
2. Gontkevich V.S. Sobstvennyye kolebanija plastinok. Spravochnoe posobie [Frequencies of eigentones plates. Certificate manual] K: Naukova dumka, 1964, 287p.
3. Spravochnik po dinamike sooruzhenij [Reference book on the dynamics of buildings]. Pod red. B.G.Koreneva, I.M.Rabinovicha. Moskow: Strojizdat, 1972, 511p.
4. Chemeris O.M. Kolebanij i stiykist kruglyh plastinok z promishnimi sharnsramimi oporami. Visnik NTUU “KPI”, Seria «Machinobydyvania, no 63, 2011, p 16-23