

## МІКРОМЕХАНІКА ПОШКОДЖУВАНOSTІ КОНСТРУКЦІЙНИХ МАТЕРІАЛІВ

*В работе рассмотрена кинетика накопления повреждений в конструкционных материалах через изменение объема выделенного единичного элемента, модуля упругости  $E$  и линейных деформаций при осевом упругопластическом деформировании, через изменение модуля упругости  $G$  и угловых упругопластических деформаций при сдвиге. Получен тензор и девиатор кинетики накопления повреждений, которые трансформируются накоплением упругопластических осевых и угловых деформаций. Определены первый, второй и третий инварианты тензора и девиатора накопления повреждений.*

*In this article the damage accumulation kinetics of structural materials by the change of volume element, elastic modulus  $E$  and linear deformations under axial elastoplastic deformation, elastic modulus  $G$  and elastoplastic shear deformations are presented. The damage accumulation kinetics tensor and deviator, which transform by accumulation of elastoplastic axial and shear deformations, are calculated. The first, second and third invariants of the damage accumulation tensor and deviator are determined.*

Забезпечення високої надійності машин, працюючих в екстремальних умовах багатопараметричного навантаження і теплового впливу, пов'язане із застосуванням нових методів розрахунків і випробувань конструкцій на міцність, які дозволяють проводити детальний аналіз напружено-деформованого стану в області пружнопластичних деформацій матеріалу, а також прогнозувати можливість руйнування при експлуатації і випробуваннях.

Багато машинобудівних конструкцій зберігають робочу спроможність при пластичних деформаціях. Частіше всього вони виникають в зонах концентрації напружень. Аналіз результатів вимірювання пружнопластичних деформацій конструкцій при випробуваннях дозволяє прогнозувати запаси міцності її окремих елементів, розв'язувати питання про можливості подальшого використання конструкції, установлювати причини завчасного руйнування, давати оцінку можливих відхилень несучої спроможності конструкції в серійному виробництві. Аналіз пружнопластичного стану конструкції дозволяє також оцінювати її роботоспроможність у випадку, коли за умовами нормального функціонування існують обмеження на значення накопленої деформації. У зв'язку з цим виникає задача дослідження залежності напружень від пружнопластичних деформацій при складному напруженому стані і складному навантаженні в умовах наближених до експлуатаційних режимів роботи високонапружених конструкцій.

Деформування матеріалу, яке спричинене температурно-силовими діями супроводжується глибокими змінами його структури у зв'язку з розпушенням – утворення розривів у субмікро- та мікрооб'ємах, виділення нових фаз, утворення текстури, хімічні та фізичні флуктуації і т.д. Явище розпушення матеріалу призводить до деградації фізико-механічних властивостей матеріалу – щільності, електропровідності, магнітних властивостей, питомої ваги, модулів пружності при осьовому навантаженні  $E$  та зсуві  $G$  [1-4].

Зміна об'єму виділеного одиничного елемента (ВОЕ) матеріалу робочої зразка, який характеризує кінетику його пошкоджуваності в процесі термосилового навантаження –  $D_V$  (рис. 1) дорівнює:

$$D_V = \frac{V_i - V_0}{V_i} = 1 - \frac{V_0}{V_i} \quad (1)$$

де  $V_0$  та  $V_i$  - відповідно, початкова та поточна величини ВОЕ, який підлягає термосиловому навантаженню.

Поточна величина зміни об'єму ВОЕ, при навантаженні, дорівнює:

$$V_i = V_0 + \Delta V_V \quad (2)$$

де  $\Delta V_V$  - приріст об'єму ВОЕ за рахунок розпушення, визваного кінетикою накопичення пошкоджень при термосиловому навантаженні.

Розв'язавши рівняння (1), (2) відносно  $\Delta V_V$ , маємо:

$$\Delta V_V = V_0 \frac{D_V}{1 - D_V} \quad (3)$$

Розглянемо кінетику накопичення пошкоджень при осьовому навантаженні та зсуві:

### 1. Осьове навантаження

Пошкоджуваність ВОЕ при осьовому навантаженні -  $D_\sigma$  дорівнює:

$$D_\sigma = \frac{V_{i\sigma} - V_0}{V_{i\sigma}} = 1 - \frac{V_0}{V_{i\sigma}} \quad (4)$$

де  $V_{i\sigma}$  - поточний об'єм ВОЕ при осьовому термосиловому навантаженні.

Поточна величина зміни об'єму ВОЕ при осьовому навантаженні, дорівнює:

$$V_{i\sigma} = V_0 + \Delta V_\sigma \quad (5)$$

де  $\Delta V_\sigma$  - зміна об'єму ВОЕ за рахунок розпушення, визваного кінетикою накопичення пошкоджень при осьовому термосиловому деформуванні.

Розглянувши рівняння (4), (5) відносно  $\Delta V_\sigma$ , маємо:

$$\Delta V_\sigma = V_0 \frac{D_\sigma}{1 - D_\sigma} \quad (6)$$

В роботі [6] розглядається співвідношення для оцінки кінетики накопичення пошкоджень при осьовому навантаженні через зміну модуля пружності при пружнопластичному деформуванні, яке виражається формулою:

$$D_i = 1 - \sqrt{\frac{\tilde{E}_i}{E_0}} \quad (7)$$

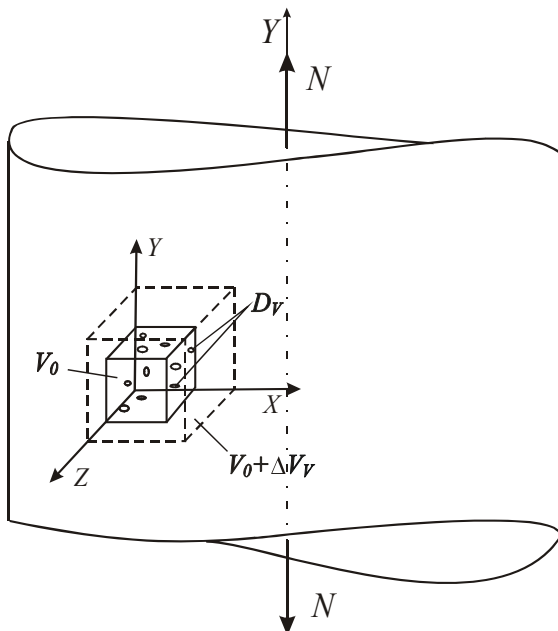


Рис. 1. Принципова схема кінетики накопичення пошкоджень ВОЕ при пружнопластичному складному термосиловому навантаженні

$E_0$  та  $\tilde{E}_i$  - початковий та поточний модулі пружності матеріалу при осьовому навантаженні.

На рис. 2 (крива 1) приведена характерна крива зміни модуля пружності при пружнопластичному осьовому навантаженні-розвантаженні від величини поточної відносної пластичної деформації  $\varepsilon_i$ , яка описується рівнянням:

$$\tilde{E}_i = E_0 \left[ 1 - \varphi_\sigma \left( \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_R} \right)^\alpha \right] \quad (8)$$

де  $\varphi_\sigma = \frac{E_0 - \tilde{E}_R}{E_0}$  це параметр зміни модуля пружності  $E$  від початкового значення  $E_0$  до кінцевої величини -  $\tilde{E}_R$ , яка визначається при пружнопластичному навантаженні на межі міцності конструкційного матеріалу.

$\tilde{E}_R$   $\varepsilon_R$  - відносна величина пружнопластичної деформації на межі міцності матеріалу, яка відповідає модулю пружності

$\alpha$  - параметр пластичності конструкційного матеріалу.

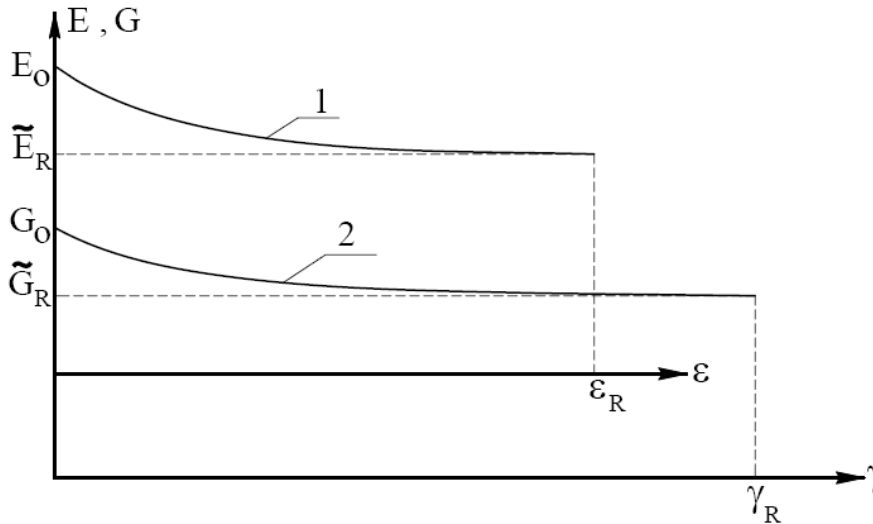


Рис. 2. Зміна модулів пружності  $\tilde{E}_i$  та  $\tilde{G}_i$ , відповідно, від відносної величини деформації –  $\varepsilon_i$  при осьовому навантаженні, та від величини відносного кута –  $\gamma_i$  при крученні

Підставивши відношення (8) в формулу (7) кінетика накопичення пошкоджуваності  $D_\sigma$  при осьовому навантаженні, визначатиметься відношенням:

$$D_i = 1 - \sqrt{1 - \varphi_\sigma \left( \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_R} \right)^\alpha} \quad (9)$$

## 2. Зсув

Пошкоджуваність ВОЕ при пружнопластичному зсуві –  $D_{\sigma_i \tau_j}$  на площадці з нормаллю  $\sigma_i$  в напрямку  $\tau_j$ , дорівнює:

$$D_{ij} = \frac{V_{\sigma_i \tau_j} - V_0}{V_{\sigma_i \tau_j}} = 1 - \frac{V_0}{V_{\sigma_i \tau_j}} \quad (10)$$

де  $V_{\sigma_i \tau_j}$  – поточний об'єм ВОЕ при термосиловому зсуві на площадці з нормаллю  $i$  в напрямку  $j$ .

Поточна величина зміни об'єму ВОЕ при термосиловому зсуві, дорівнює:

$$V_{\sigma_i \tau_j} = V_0 + \Delta V_{\sigma_i \tau_j} \quad (11)$$

де  $\Delta V_{\sigma_i \tau_j}$  – відповідно приріст об'єму ВОЕ за рахунок розпушення, викликаного кінетикою накопичення пошкоджень при термосиловому зсуві.

Розв'язавши рівняння (10), (11) відносно  $\Delta V_{\sigma_i \tau_j}$ , маємо:

$$\Delta V_{\sigma_i \tau_j} = V_0 \frac{D_{ij}}{1 - D_{ij}} \quad (12)$$

З іншої сторони пошкоджуваність при зсуві через величину зміни модуля пружності  $G$ , виражається відношенням [6]:

$$D_{ij} = 1 - \sqrt{\frac{\tilde{G}_{ij}}{G_{0ij}}} \quad (13)$$

$G_{0ij}$  та  $\tilde{G}_{ij}$  – початковий та поточний модулі пружності матеріалу при зсуві (крученні).

На рис. 2 (крива 2) приведена характерна крива зміни модуля пружності при зсуві –  $G$  при пружнопластичному зсуві (крученні) від величини поточного відносного кута зсуву –  $\tilde{\gamma}_{ij}$ , яка описується рівнянням:

$$\tilde{G}_i = G_0 \left[ 1 - \varphi_\tau \left( \frac{\tilde{\gamma}_{ij}}{\gamma_R} \right)^\beta \right] \quad (14)$$

де

$\varphi_\sigma = \frac{G_0 - \tilde{G}_R}{G_0}$  це параметр зміни модуля пружності  $G$  від початкового значення  $G_0$  до кінцевої величини  $-G_R$ , яка визначається при пружнопластичному крученні до межі міцності конструкційного матеріалу.

$\tilde{G}_R \gamma_R$  – відносна величина пружнопластичної деформації зсуву на межі міцності матеріалу, яка відповідає модулю пружності.

$\beta$  – параметр пластичності конструкційного матеріалу при зсуві (крученні).

Підставивши відношення (14) в залежність (13) кінетика накопичення пошкоджень при зсуві –  $D_{ij}$  при зсуві (крученні) визначається відношенням:

$$D_{ij} = 1 - \sqrt{1 - \varphi_\tau \left( \frac{\tilde{\gamma}_{ij}}{\gamma_R} \right)^\beta} \quad (15)$$

### 3. Об'ємний напружений стан

В загальному випадку термосилового навантаження конструкційних матеріалів при довільній орієнтації ВОЕ в межах точки навантаженого тіла (рис. 3) на його гранях діють три незалежні компоненти тензора зміни об'єму, із-за кінетики накопичення пошкоджень  $\Delta V_{\sigma_x}$ ,  $\Delta V_{\sigma_y}$ ,  $\Delta V_{\sigma_z}$  та

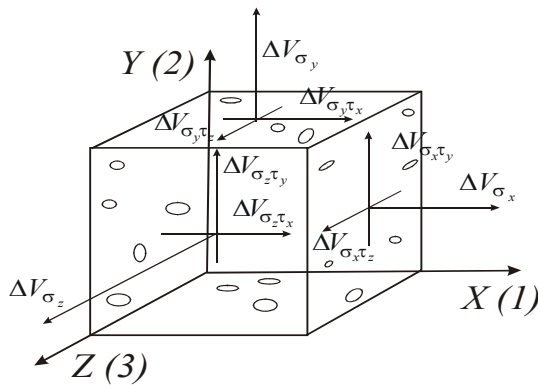


Рис. 3. Пошкоджуваність на гранях елементарного паралелепіпеда ВОЕ

шість компонент зміни форми  $\Delta V_{\sigma_x\tau_y}$ ,  $\Delta V_{\sigma_x\tau_z}$ ,  $\Delta V_{\sigma_y\tau_x}$ ,  $\Delta V_{\sigma_y\tau_z}$ ,  $\Delta V_{\sigma_z\tau_x}$ ,  $\Delta V_{\sigma_z\tau_y}$ , які діють на площадках перпендикулярних осям координат  $x, y, z$ .

Отримані дев'ять компонент зміни об'єму повністю визначають рівень пошкоджуваності ВОЕ і утворюють тензор зміни об'єму із-за кінетики накопичення пошкоджень при пружнопластичному

навантаженні, який можна претставити в такому вигляді:

$$T_{(\Delta V_V)} = \begin{vmatrix} \Delta V_{\sigma_x} & \Delta V_{\sigma_x\tau_y} & \Delta V_{\sigma_x\tau_z} \\ \Delta V_{\sigma_y\tau_x} & \Delta V_{\sigma_y} & \Delta V_{\sigma_y\tau_z} \\ \Delta V_{\sigma_z\tau_x} & \Delta V_{\sigma_z\tau_y} & \Delta V_{\sigma_z} \end{vmatrix} \quad (16)$$

В загальному випадку просторової зміни об'єму із-за розпушення ВОЕ при термосиловому навантаженні по всім трьом взаємно перпендикулярним площадкам, які проходять через точку, зміна об'єму в якій досліджується зв'язок між складовими головних напрямків змін об'єму ВОЕ і зміною об'єму ВОЕ на будь-якій похилій площадці, що проходить через дану точку, описується наступним кубічним рівнянням:

$$\Delta V_v^3 - I_1 \Delta V_v^2 + I_2 \Delta V_v - I_3 = 0 \quad (17)$$

Коефіцієнти рівняння (17)  $I_1, I_2, I_3$ , не залежать від вибору координатної системи, інакше кажучи, вони являються інваріантами тензору зміни об'єму, викликаного кінетикою накопичення пошкоджень по відношенню до координатних осей.

Перший (або лінійний) інваріант представляє собою суму компонентів тензора зміни об'єму ВОЕ розташованих на головній діагоналі рівняння (16) і дорівнює:

$$I_1 = \Delta V_{\sigma_x} + \Delta V_{\sigma_y} + \Delta V_{\sigma_z} \quad (18)$$

Другий інваріант можна отримати, розклавши по головній діагоналі квадратичну матрицю тензора зміни об'єму ВОЕ і представити у вигляді суми мінорів

$$I_2 = \begin{vmatrix} \Delta V_{\sigma_x} & \Delta V_{\sigma_x \tau_y} \\ \Delta V_{\sigma_y \tau_x} & \Delta V_{\sigma_y} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \Delta V_{\sigma_x} & \Delta V_{\sigma_x \tau_z} \\ \Delta V_{\sigma_z \tau_x} & \Delta V_{\sigma_z} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \Delta V_{\sigma_y} & \Delta V_{\sigma_y \tau_z} \\ \Delta V_{\sigma_z \tau_y} & \Delta V_{\sigma_z} \end{vmatrix}. \quad (19)$$

Третій інваріант розглядається як розвернутий в строчку визначник, складений із компонентів тензора зміни об'єму ВОЕ (16)

$$I_3 = \begin{vmatrix} \Delta V_{\sigma_x} & \Delta V_{\sigma_x \tau_y} & \Delta V_{\sigma_x \tau_z} \\ \Delta V_{\sigma_y \tau_x} & \Delta V_{\sigma_y} & \Delta V_{\sigma_y \tau_z} \\ \Delta V_{\sigma_z \tau_x} & \Delta V_{\sigma_z \tau_y} & \Delta V_{\sigma_z} \end{vmatrix}. \quad (20)$$

Враховуючи те, що зміна об'єму ВОЕ, яка викликана кінетикою накопичення пошкоджень осьюовою складовою описується відношеннями (6), то величини нормальних об'ємних деформацій тензора зміни об'єму при деформуванні паралелепіпеда ВОЕ, відповідно дорівнюють:

$$\Delta V_{\sigma_x} = V_0 \frac{D_{\sigma_x}}{1 - D_{\sigma_x}}; \quad \Delta V_{\sigma_y} = V_0 \frac{D_{\sigma_y}}{1 - D_{\sigma_y}}; \quad \Delta V_{\sigma_z} = V_0 \frac{D_{\sigma_z}}{1 - D_{\sigma_z}}. \quad (21)$$

Величини об'ємних деформацій обумовлені зміною форми ВОЕ в точці, при пружнопластичному навантаженні, які діють на гранях паралелепіпеда перпендикулярно до напрямів декартових осей  $x$ ,  $y$ ,  $z$  будуть, відповідно, для грані перпендикулярній до осі  $x$  –  $\Delta V_{\sigma_x \tau_y}$ ,  $\Delta V_{\sigma_x \tau_z}$ ; для грані перпендикулярній до осі  $y$  –  $\Delta V_{\sigma_y \tau_x}$ ,  $\Delta V_{\sigma_y \tau_z}$ ; для грані перпендикулярній до осі  $z$  –  $\Delta V_{\sigma_z \tau_x}$ ,  $\Delta V_{\sigma_z \tau_y}$  (див. Рис. 3). З урахуванням співвідношення (12) об'ємні деформації зміни форми через відповідні параметри пошкоджуваності будуть дорівнювати:

$$\begin{aligned} \Delta V_{\sigma_x \tau_y} &= V_0 \frac{D_{\sigma_x \tau_y}}{1 - D_{\sigma_x \tau_y}}; \quad \Delta V_{\sigma_x \tau_z} = V_0 \frac{D_{\sigma_x \tau_z}}{1 - D_{\sigma_x \tau_z}}; \\ \Delta V_{\sigma_y \tau_x} &= V_0 \frac{D_{\sigma_y \tau_x}}{1 - D_{\sigma_y \tau_x}}; \quad \Delta V_{\sigma_y \tau_z} = V_0 \frac{D_{\sigma_y \tau_z}}{1 - D_{\sigma_y \tau_z}}; \\ \Delta V_{\sigma_z \tau_x} &= V_0 \frac{D_{\sigma_z \tau_x}}{1 - D_{\sigma_z \tau_x}}; \quad \Delta V_{\sigma_z \tau_y} = V_0 \frac{D_{\sigma_z \tau_y}}{1 - D_{\sigma_z \tau_y}}. \end{aligned} \quad (22)$$

Враховуючи співвідношення (3), (21), (22) тензор зміни об'єму ВОЕ при пружнопластичному деформуванні (16), через відповідні складові пошкоджуваностей об'єму і форми, перетворюється в

тензор пошкоджуваності –  $M\left(\frac{D_V}{1 - D_V}\right)$ , який матиме вигляд:

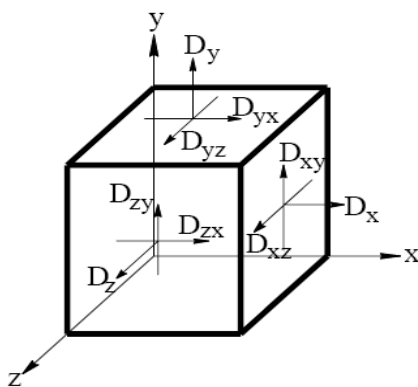


Рис. 4. Пошкоджуваність на гранях ВОЕ

$$M\left(\frac{D_V}{1 - D_V}\right) = \begin{pmatrix} \frac{D_x}{1 - D_x} & \frac{D_{xy}}{1 - D_{xy}} & \frac{D_{xz}}{1 - D_{xz}} \\ \frac{D_{yx}}{1 - D_{yx}} & \frac{D_y}{1 - D_y} & \frac{D_{yz}}{1 - D_{yz}} \\ \frac{D_{zx}}{1 - D_{zx}} & \frac{D_{zy}}{1 - D_{zy}} & \frac{D_z}{1 - D_z} \end{pmatrix} \quad (23)$$

На Рис. 4 приведений загальний випадок пошкодженого стану ВОЕ в точці при пружнопластичному навантаженні.

Враховуючи співвідношення (18), (21), (23), перший інваріант пошкоджуваності дорівнює:

$$I_1(D_V) = 1 - \left( 1 + \frac{D_x}{1-D_x} + \frac{D_y}{1-D_y} + \frac{D_z}{1-D_z} \right)^{-1} \quad (24)$$

Другий інваріант з урахуванням співвідношень (19), (22), (23) виразиться відношенням:

$$I_2(D_V) = 1 - \left( 1 + \frac{D_x D_y}{(1-D_x)(1-D_y)} + \frac{D_y D_z}{(1-D_y)(1-D_z)} + \frac{D_x D_z}{(1-D_x)(1-D_z)} - \frac{D_{yx} D_{xy}}{(1-D_{yx})(1-D_{xy})} - \frac{D_{zx} D_{xz}}{(1-D_{zx})(1-D_{xz})} - \frac{D_{zy} D_{yz}}{(1-D_{zy})(1-D_{yz})} \right)^{-1} \quad (25)$$

Третій інваріант з урахуванням співвідношень (19), (22), (23) виразиться відношенням:

$$I_3(D_V) = 1 - \left( 1 + \frac{D_x D_y D_z}{(1-D_x)(1-D_y)(1-D_z)} + \frac{D_{xy} D_{yz} D_{zx}}{(1-D_{xy})(1-D_{yz})(1-D_{zx})} + \frac{D_{xz} D_{yx} D_{zy}}{(1-D_{xz})(1-D_{yx})(1-D_{zy})} - \frac{D_z D_{yx} D_{xy}}{(1-D_z)(1-D_{yx})(1-D_{xy})} - \frac{D_y D_{zx} D_{xz}}{(1-D_y)(1-D_{zx})(1-D_{xz})} - \frac{D_x D_{zy} D_{yz}}{(1-D_x)(1-D_{zy})(1-D_{yz})} \right)^{-1} \quad (26)$$

Враховуючи те, що пошкоджуваність при пружнопластичних осьових навантаженнях через параметр поточних відносних деформацій виражається залежністю (9), а при пружнопластичному зсуві (крученні) через параметр поточного відносного кута зсуву залежністю (15), тензор пошкоджуваності запишеться наступним чином:

$$M \left( \frac{D_V}{1-D_V} \right) = \begin{pmatrix} 1 - \sqrt{1 - \varphi_\sigma \left( \frac{\tilde{\varepsilon}_{ix}}{\varepsilon_R} \right)^\alpha} & 1 - \sqrt{1 - \varphi_\tau \left( \frac{\tilde{\gamma}_{ixy}}{\gamma_R} \right)^\beta} & 1 - \sqrt{1 - \varphi_\tau \left( \frac{\tilde{\gamma}_{ixz}}{\gamma_R} \right)^\beta} \\ \sqrt{1 - \varphi_\sigma \left( \frac{\tilde{\varepsilon}_{ix}}{\varepsilon_R} \right)^\alpha} & \sqrt{1 - \varphi_\tau \left( \frac{\tilde{\gamma}_{ixy}}{\gamma_R} \right)^\beta} & \sqrt{1 - \varphi_\tau \left( \frac{\tilde{\gamma}_{ixz}}{\gamma_R} \right)^\beta} \\ 1 - \sqrt{1 - \varphi_\tau \left( \frac{\tilde{\gamma}_{ixy}}{\gamma_R} \right)^\beta} & 1 - \sqrt{1 - \varphi_\sigma \left( \frac{\tilde{\varepsilon}_{iy}}{\varepsilon_R} \right)^\alpha} & 1 - \sqrt{1 - \varphi_\tau \left( \frac{\tilde{\gamma}_{iyz}}{\gamma_R} \right)^\beta} \\ \sqrt{1 - \varphi_\tau \left( \frac{\tilde{\gamma}_{ixy}}{\gamma_R} \right)^\beta} & \sqrt{1 - \varphi_\sigma \left( \frac{\tilde{\varepsilon}_{iy}}{\varepsilon_R} \right)^\alpha} & \sqrt{1 - \varphi_\tau \left( \frac{\tilde{\gamma}_{iyz}}{\gamma_R} \right)^\beta} \\ 1 - \sqrt{1 - \varphi_\tau \left( \frac{\tilde{\gamma}_{ixz}}{\gamma_R} \right)^\beta} & 1 - \sqrt{1 - \varphi_\tau \left( \frac{\tilde{\gamma}_{izy}}{\gamma_R} \right)^\beta} & 1 - \sqrt{1 - \varphi_\sigma \left( \frac{\tilde{\varepsilon}_{iz}}{\varepsilon_R} \right)^\alpha} \\ \sqrt{1 - \varphi_\tau \left( \frac{\tilde{\gamma}_{ixz}}{\gamma_R} \right)^\beta} & \sqrt{1 - \varphi_\tau \left( \frac{\tilde{\gamma}_{izy}}{\gamma_R} \right)^\beta} & \sqrt{1 - \varphi_\sigma \left( \frac{\tilde{\varepsilon}_{iz}}{\varepsilon_R} \right)^\alpha} \end{pmatrix} \quad (27)$$

Перший, другий і третій інваріант, відповідно (24), (25), (26) тензора пошкоджуваності (27) через параметри пружнопластичних осьових і зсувних деформацій можуть бути представлені відношеннями:

$$I_1(D_V) = 1 - \left( 1 + \frac{1 - \sqrt{1 - \varphi_\sigma \left( \frac{\tilde{\varepsilon}_{ix}}{\varepsilon_R} \right)^\alpha}}{\sqrt{1 - \varphi_\sigma \left( \frac{\tilde{\varepsilon}_{ix}}{\varepsilon_R} \right)^\alpha}} + \frac{1 - \sqrt{1 - \varphi_\sigma \left( \frac{\tilde{\varepsilon}_{iy}}{\varepsilon_R} \right)^\alpha}}{\sqrt{1 - \varphi_\sigma \left( \frac{\tilde{\varepsilon}_{iy}}{\varepsilon_R} \right)^\alpha}} + \frac{1 - \sqrt{1 - \varphi_\sigma \left( \frac{\tilde{\varepsilon}_{iz}}{\varepsilon_R} \right)^\alpha}}{\sqrt{1 - \varphi_\sigma \left( \frac{\tilde{\varepsilon}_{iz}}{\varepsilon_R} \right)^\alpha}} \right)^{-1} \quad (28)$$

$$I_2(D_V)=1-\left[ \begin{array}{c} \left( 1-\sqrt{1-\varphi_\sigma\left(\frac{\tilde{\varepsilon}_{ix}}{\varepsilon_R}\right)^\alpha} \right) \left( 1-\sqrt{1-\varphi_\sigma\left(\frac{\tilde{\varepsilon}_{iy}}{\varepsilon_R}\right)^\alpha} \right) \left( 1-\sqrt{1-\varphi_\sigma\left(\frac{\tilde{\varepsilon}_{iz}}{\varepsilon_R}\right)^\alpha} \right) \left( 1-\sqrt{1-\varphi_\sigma\left(\frac{\tilde{\varepsilon}_{ix}}{\varepsilon_R}\right)^\alpha} \right) \\ + \left( \sqrt{1-\varphi_\sigma\left(\frac{\tilde{\varepsilon}_{ix}}{\varepsilon_R}\right)^\alpha} \right) \left( \sqrt{1-\varphi_\sigma\left(\frac{\tilde{\varepsilon}_{iy}}{\varepsilon_R}\right)^\alpha} \right) \left( \sqrt{1-\varphi_\sigma\left(\frac{\tilde{\varepsilon}_{iz}}{\varepsilon_R}\right)^\alpha} \right) \left( \sqrt{1-\varphi_\sigma\left(\frac{\tilde{\varepsilon}_{ix}}{\varepsilon_R}\right)^\alpha} \right) \\ + \left( 1-\sqrt{1-\varphi_\sigma\left(\frac{\tilde{\varepsilon}_{ix}}{\varepsilon_R}\right)^\alpha} \right) \left( 1-\sqrt{1-\varphi_\sigma\left(\frac{\tilde{\varepsilon}_{iz}}{\varepsilon_R}\right)^\alpha} \right) \left( 1-\sqrt{1-\varphi_\tau\left(\frac{\tilde{\gamma}_{hx}}{\gamma_R}\right)^\beta} \right) \left( 1-\sqrt{1-\varphi_\tau\left(\frac{\tilde{\gamma}_{ix}}{\gamma_R}\right)^\beta} \right) \\ + \left( \sqrt{1-\varphi_\sigma\left(\frac{\tilde{\varepsilon}_{ix}}{\varepsilon_R}\right)^\alpha} \right) \left( \sqrt{1-\varphi_\sigma\left(\frac{\tilde{\varepsilon}_{iz}}{\varepsilon_R}\right)^\alpha} \right) \left( \sqrt{1-\varphi_\tau\left(\frac{\tilde{\gamma}_{hx}}{\gamma_R}\right)^\beta} \right) \left( \sqrt{1-\varphi_\tau\left(\frac{\tilde{\gamma}_{ix}}{\gamma_R}\right)^\beta} \right) \\ + \left( 1-\sqrt{1-\varphi_\tau\left(\frac{\tilde{\gamma}_{ix}}{\gamma_R}\right)^\beta} \right) \left( 1-\sqrt{1-\varphi_\tau\left(\frac{\tilde{\gamma}_{iz}}{\gamma_R}\right)^\beta} \right) \left( 1-\sqrt{1-\varphi_\tau\left(\frac{\tilde{\gamma}_{ix}}{\gamma_R}\right)^\beta} \right) \left( 1-\sqrt{1-\varphi_\tau\left(\frac{\tilde{\gamma}_{iz}}{\gamma_R}\right)^\beta} \right) \\ + \left( \sqrt{1-\varphi_\tau\left(\frac{\tilde{\gamma}_{ix}}{\gamma_R}\right)^\beta} \right) \left( \sqrt{1-\varphi_\tau\left(\frac{\tilde{\gamma}_{iz}}{\gamma_R}\right)^\beta} \right) \left( \sqrt{1-\varphi_\tau\left(\frac{\tilde{\gamma}_{ix}}{\gamma_R}\right)^\beta} \right) \left( \sqrt{1-\varphi_\tau\left(\frac{\tilde{\gamma}_{iz}}{\gamma_R}\right)^\beta} \right) \end{array} \right)^{-1} \quad (29)$$

$$I_3(D_V)=1-\left[ \begin{array}{c} \left( 1-\sqrt{1-\varphi_\sigma\left(\frac{\tilde{\varepsilon}_{ix}}{\varepsilon_R}\right)^\alpha} \right) \left( 1-\sqrt{1-\varphi_\sigma\left(\frac{\tilde{\varepsilon}_{iy}}{\varepsilon_R}\right)^\alpha} \right) \left( 1-\sqrt{1-\varphi_\sigma\left(\frac{\tilde{\varepsilon}_{iz}}{\varepsilon_R}\right)^\alpha} \right) \left( 1-\sqrt{1-\varphi_\tau\left(\frac{\tilde{\gamma}_{iy}}{\gamma_R}\right)^\beta} \right) \left( 1-\sqrt{1-\varphi_\tau\left(\frac{\tilde{\gamma}_{iz}}{\gamma_R}\right)^\beta} \right) \left( 1-\sqrt{1-\varphi_\tau\left(\frac{\tilde{\gamma}_{ix}}{\gamma_R}\right)^\beta} \right) \\ + \left( \sqrt{1-\varphi_\sigma\left(\frac{\tilde{\varepsilon}_{ix}}{\varepsilon_R}\right)^\alpha} \right) \left( \sqrt{1-\varphi_\sigma\left(\frac{\tilde{\varepsilon}_{iy}}{\varepsilon_R}\right)^\alpha} \right) \left( \sqrt{1-\varphi_\sigma\left(\frac{\tilde{\varepsilon}_{iz}}{\varepsilon_R}\right)^\alpha} \right) \left( \sqrt{1-\varphi_\tau\left(\frac{\tilde{\gamma}_{iy}}{\gamma_R}\right)^\beta} \right) \left( \sqrt{1-\varphi_\tau\left(\frac{\tilde{\gamma}_{iz}}{\gamma_R}\right)^\beta} \right) \left( \sqrt{1-\varphi_\tau\left(\frac{\tilde{\gamma}_{ix}}{\gamma_R}\right)^\beta} \right) \\ + \left( 1-\sqrt{1-\varphi_\tau\left(\frac{\tilde{\gamma}_{iz}}{\gamma_R}\right)^\beta} \right) \left( 1-\sqrt{1-\varphi_\tau\left(\frac{\tilde{\gamma}_{hx}}{\gamma_R}\right)^\beta} \right) \left( 1-\sqrt{1-\varphi_\tau\left(\frac{\tilde{\gamma}_{iy}}{\gamma_R}\right)^\beta} \right) \left( 1-\sqrt{1-\varphi_\sigma\left(\frac{\tilde{\varepsilon}_{iz}}{\varepsilon_R}\right)^\alpha} \right) \left( 1-\sqrt{1-\varphi_\tau\left(\frac{\tilde{\gamma}_{hx}}{\gamma_R}\right)^\beta} \right) \left( 1-\sqrt{1-\varphi_\tau\left(\frac{\tilde{\gamma}_{iy}}{\gamma_R}\right)^\beta} \right) \\ + \left( \sqrt{1-\varphi_\tau\left(\frac{\tilde{\gamma}_{iz}}{\gamma_R}\right)^\beta} \right) \left( \sqrt{1-\varphi_\tau\left(\frac{\tilde{\gamma}_{hx}}{\gamma_R}\right)^\beta} \right) \left( \sqrt{1-\varphi_\tau\left(\frac{\tilde{\gamma}_{iy}}{\gamma_R}\right)^\beta} \right) \left( \sqrt{1-\varphi_\sigma\left(\frac{\tilde{\varepsilon}_{iz}}{\varepsilon_R}\right)^\alpha} \right) \left( \sqrt{1-\varphi_\tau\left(\frac{\tilde{\gamma}_{hx}}{\gamma_R}\right)^\beta} \right) \left( \sqrt{1-\varphi_\tau\left(\frac{\tilde{\gamma}_{iy}}{\gamma_R}\right)^\beta} \right) \\ + \left( 1-\sqrt{1-\varphi_\sigma\left(\frac{\tilde{\varepsilon}_{iy}}{\varepsilon_R}\right)^\alpha} \right) \left( 1-\sqrt{1-\varphi_\tau\left(\frac{\tilde{\gamma}_{ix}}{\gamma_R}\right)^\beta} \right) \left( 1-\sqrt{1-\varphi_\tau\left(\frac{\tilde{\gamma}_{iz}}{\gamma_R}\right)^\beta} \right) \left( 1-\sqrt{1-\varphi_\sigma\left(\frac{\tilde{\varepsilon}_{ix}}{\varepsilon_R}\right)^\alpha} \right) \left( 1-\sqrt{1-\varphi_\tau\left(\frac{\tilde{\gamma}_{iy}}{\gamma_R}\right)^\beta} \right) \left( 1-\sqrt{1-\varphi_\tau\left(\frac{\tilde{\gamma}_{iz}}{\gamma_R}\right)^\beta} \right) \\ + \left( \sqrt{1-\varphi_\sigma\left(\frac{\tilde{\varepsilon}_{iy}}{\varepsilon_R}\right)^\alpha} \right) \left( \sqrt{1-\varphi_\tau\left(\frac{\tilde{\gamma}_{ix}}{\gamma_R}\right)^\beta} \right) \left( \sqrt{1-\varphi_\tau\left(\frac{\tilde{\gamma}_{iz}}{\gamma_R}\right)^\beta} \right) \left( \sqrt{1-\varphi_\sigma\left(\frac{\tilde{\varepsilon}_{ix}}{\varepsilon_R}\right)^\alpha} \right) \left( \sqrt{1-\varphi_\tau\left(\frac{\tilde{\gamma}_{iy}}{\gamma_R}\right)^\beta} \right) \left( \sqrt{1-\varphi_\tau\left(\frac{\tilde{\gamma}_{iz}}{\gamma_R}\right)^\beta} \right) \end{array} \right)^{-1} \quad (30)$$

Для наглядності описування закономірностей кінетики пошкоджуваності при складному напруженому стані введемо поняття «середнього пошкодження», яке дорівнює середньому арифметичному від нормальних пошкоджень:

$$D_0 = \frac{D_x + D_y + D_z}{3} = \frac{D_1 + D_2 + D_3}{3} \quad (31)$$

Середня пошкоджуваність характеризує собою рівноважне розтягування-стискання і відповідальне тільки за зміну об'єму в межах ВОЕ. Якщо від компонентів тензора пошкоджуваності відокремимо ті, які пов'язані тільки з об'ємною деформацією, то отримаємо компоненти пошкоджуваностей  $D_x - D_0$ ;  $D_y - D_0$ ;  $D_z - D_0$ ;  $D_{yx}$ ;  $D_{xy}$ ;  $D_{zx}$ ;  $D_{xz}$ ;  $D_{zy}$ ;  $D_{yz}$ ; які мають відношення тільки до зміни форми. Таким чином, загальний випадок пошкодженого стану ВОЕ, представлений на рис. 2, можна розглядати як пошкоджений стан, пов'язаний тільки із зміною форми (рис. 5а), на яку «накладене» гідростатичне розтягування-стискання. (рис. 5,б)

Приведені міркування про можливість розкладання пошкодженого стану дозволяють представити тензор пошкоджень (27) в вигляді двох складових:  $M(D) = M^0(D) + L(D)$ , де  $M^0(D)$  - шаровий тензор пошкоджень, складений із компонентів, пов'язаних із зміною об'єму (рис. 5,б),

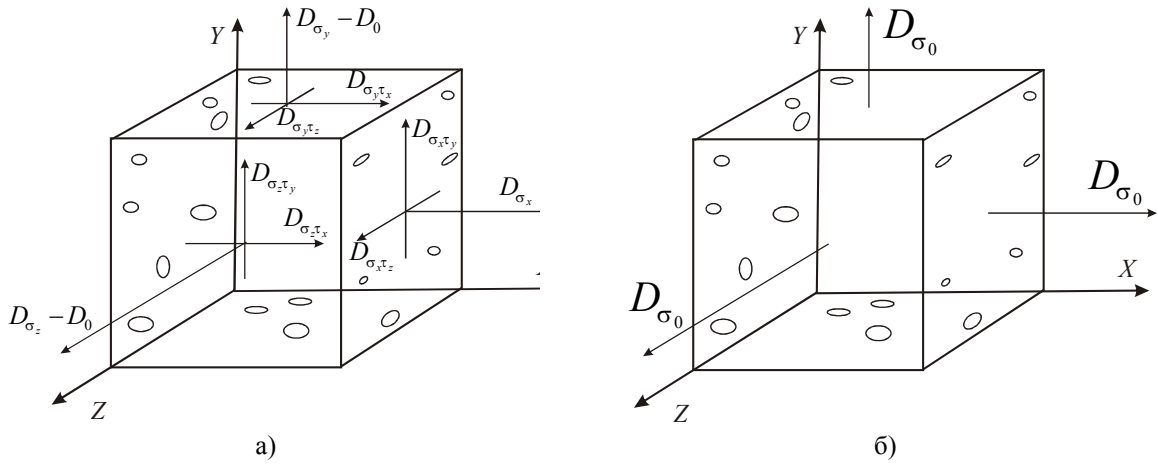


Рис. 5 Розкладення тензора пошкоджуваності ВОЕ на девіаторну (а) і шарову (б) частини

$$M^0\left(\frac{D_V}{1-D_V}\right) = \begin{vmatrix} \frac{D_0}{1-D_0} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{D_0}{1-D_0} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{D_0}{1-D_0} \end{vmatrix} \quad (32)$$

$L(D)$  - девіатор пошкоджень, складений із компонентів, пов'язаних із зміною форми (рис. 3 а)

$$L\left(\frac{D_V}{1-D_V}\right) = \begin{vmatrix} \frac{D_x}{1-D_x} - \frac{D_0}{1-D_0} & \frac{D_{xy}}{1-D_{xy}} & \frac{D_{xz}}{1-D_{xz}} \\ \frac{D_{yx}}{1-D_{yx}} & \frac{D_y}{1-D_y} - \frac{D_0}{1-D_0} & \frac{D_{yz}}{1-D_{yz}} \\ \frac{D_{zx}}{1-D_{zx}} & \frac{D_{zy}}{1-D_{zy}} & \frac{D_z}{1-D_z} - \frac{D_0}{1-D_0} \end{vmatrix} \quad (33)$$

Поскілки перший інваріант шарового тензора пошкоджень (26) співпадає з першим інваріантом тензора пошкоджень (22)

$$I_1^0 = 1 - \left(1 + \frac{D_0}{1-D_0} + \frac{D_0}{1-D_0} + \frac{D_0}{1-D_0}\right)^{-1} = 1 - \left(1 + 3 \frac{D_0}{1-D_0}\right)^{-1} =$$

$$1 - \left(1 + \frac{D_1}{1-D_1} + \frac{D_2}{1-D_2} + \frac{D_3}{1-D_3}\right)^{-1} = I_1 \quad (34)$$

То перший інваріант девіатора пошкоджень дорівнює нулю.

$$I_1' = 1 - \left(1 + \left(\frac{D_1}{1-D_1} - \frac{D_0}{1-D_0}\right) + \left(\frac{D_2}{1-D_2} - \frac{D_0}{1-D_0}\right) + \left(\frac{D_3}{1-D_3} - \frac{D_0}{1-D_0}\right)\right)^{-1} = 0 \quad (35)$$



Із цього витікає, що при пошкодженому стані, який описується девіатором, середня пошкоджуваність дорівнює нулю, тобто складова об'ємної пошкоджуваності не змінюється:

Другий і третій інваріанти девіатора пошкодженень дорівнюють:

$$I'_2 = 1 - \left( 1 + \frac{1}{6} \left[ \left( \frac{D_x}{1-D_x} - \frac{D_y}{1-D_y} \right)^2 + \left( \frac{D_y}{1-D_y} - \frac{D_z}{1-D_z} \right)^2 + \left( \frac{D_z}{1-D_z} - \frac{D_x}{1-D_x} \right)^2 + 6 \left( \frac{D_{xy}}{1-D_{xy}} \frac{D_{yx}}{1-D_{yx}} + \frac{D_{yz}}{1-D_{yz}} \frac{D_{zy}}{1-D_{zy}} + \frac{D_{zx}}{1-D_{zx}} \frac{D_{xz}}{1-D_{xz}} \right) \right] \right)^{-1} \quad (36)$$

$$I'_3 = 1 - \left( 1 + \frac{1}{27} \left[ 2 \left( \frac{D_x}{1-D_x} + \frac{D_y}{1-D_y} + \frac{D_z}{1-D_z} \right)^3 + 27 \left( \frac{D_{xy}}{1-D_{xy}} \frac{D_{yz}}{1-D_{yz}} \frac{D_{zx}}{1-D_{zx}} + \frac{D_{yx}}{1-D_{yx}} \frac{D_{zy}}{1-D_{zy}} \frac{D_{xz}}{1-D_{xz}} \right) - 18 \left( \frac{D_{zx}}{1-D_{zx}} \frac{D_{xz}}{1-D_{xz}} \frac{D_y}{1-D_y} + \frac{D_{yx}}{1-D_{yx}} \frac{D_{zy}}{1-D_{zy}} \frac{D_z}{1-D_z} + \frac{D_{zy}}{1-D_{zy}} \frac{D_{yz}}{1-D_{yz}} \frac{D_x}{1-D_x} \right) + 9 \left\{ \left( \frac{D_{zy}}{1-D_{zy}} \frac{D_{yz}}{1-D_{yz}} - \left| \frac{D_x}{1-D_x} \right|^2 \right) \left( \frac{D_z}{1-D_z} + \frac{D_y}{1-D_y} \right) + \left( \frac{D_{yx}}{1-D_{yx}} \frac{D_{zy}}{1-D_{zy}} - \left| \frac{D_z}{1-D_z} \right|^2 \right) \left( \frac{D_x}{1-D_x} + \frac{D_y}{1-D_y} \right) + \left( \frac{D_{zx}}{1-D_{zx}} \frac{D_{xz}}{1-D_{xz}} - \left| \frac{D_y}{1-D_y} \right|^2 \right) \left( \frac{D_y}{1-D_y} + \frac{D_z}{1-D_z} \right) \right\} \right] \right)^{-1} \quad (37)$$

Враховуючи залежності (9), (15), другий інваріант девіатора пошкоджуваності конструкційних матеріалів (36) в трансформованому вигляді можна представити відношенням:

$$I'_2 = 1 - \left( 1 + \frac{1}{6} \left[ \left( \frac{1 - \sqrt{1 - \varrho_\sigma \left( \frac{\tilde{\varepsilon}_{xx}}{\varepsilon_R} \right)^\alpha}}{\sqrt{1 - \varrho_\sigma \left( \frac{\tilde{\varepsilon}_{xx}}{\varepsilon_R} \right)^\alpha}} - \frac{1 - \sqrt{1 - \varrho_\sigma \left( \frac{\tilde{\varepsilon}_{yy}}{\varepsilon_R} \right)^\alpha}}{\sqrt{1 - \varrho_\sigma \left( \frac{\tilde{\varepsilon}_{yy}}{\varepsilon_R} \right)^\alpha}} \right)^2 + \left( \frac{1 - \sqrt{1 - \varrho_\sigma \left( \frac{\tilde{\varepsilon}_{yy}}{\varepsilon_R} \right)^\alpha}}{\sqrt{1 - \varrho_\sigma \left( \frac{\tilde{\varepsilon}_{yy}}{\varepsilon_R} \right)^\alpha}} - \frac{1 - \sqrt{1 - \varrho_\sigma \left( \frac{\tilde{\varepsilon}_{zz}}{\varepsilon_R} \right)^\alpha}}{\sqrt{1 - \varrho_\sigma \left( \frac{\tilde{\varepsilon}_{zz}}{\varepsilon_R} \right)^\alpha}} \right)^2 + \left( \frac{1 - \sqrt{1 - \varrho_\sigma \left( \frac{\tilde{\varepsilon}_{zz}}{\varepsilon_R} \right)^\alpha}}{\sqrt{1 - \varrho_\sigma \left( \frac{\tilde{\varepsilon}_{zz}}{\varepsilon_R} \right)^\alpha}} - \frac{1 - \sqrt{1 - \varrho_\sigma \left( \frac{\tilde{\varepsilon}_{xx}}{\varepsilon_R} \right)^\alpha}}{\sqrt{1 - \varrho_\sigma \left( \frac{\tilde{\varepsilon}_{xx}}{\varepsilon_R} \right)^\alpha}} \right)^2 + 6 \left( \frac{1 - \sqrt{1 - \varrho_\tau \left( \frac{\tilde{\gamma}_{xy}}{\gamma_R} \right)^\beta}}{\sqrt{1 - \varrho_\tau \left( \frac{\tilde{\gamma}_{xy}}{\gamma_R} \right)^\beta}} - \frac{1 - \sqrt{1 - \varrho_\tau \left( \frac{\tilde{\gamma}_{yx}}{\gamma_R} \right)^\beta}}{\sqrt{1 - \varrho_\tau \left( \frac{\tilde{\gamma}_{yx}}{\gamma_R} \right)^\beta}} \right) \left( \frac{1 - \sqrt{1 - \varrho_\tau \left( \frac{\tilde{\gamma}_{yx}}{\gamma_R} \right)^\beta}}{\sqrt{1 - \varrho_\tau \left( \frac{\tilde{\gamma}_{yx}}{\gamma_R} \right)^\beta}} - \frac{1 - \sqrt{1 - \varrho_\tau \left( \frac{\tilde{\gamma}_{yz}}{\gamma_R} \right)^\beta}}{\sqrt{1 - \varrho_\tau \left( \frac{\tilde{\gamma}_{yz}}{\gamma_R} \right)^\beta}} \right) + \left( \frac{1 - \sqrt{1 - \varrho_\tau \left( \frac{\tilde{\gamma}_{yz}}{\gamma_R} \right)^\beta}}{\sqrt{1 - \varrho_\tau \left( \frac{\tilde{\gamma}_{yz}}{\gamma_R} \right)^\beta}} - \frac{1 - \sqrt{1 - \varrho_\tau \left( \frac{\tilde{\gamma}_{zy}}{\gamma_R} \right)^\beta}}{\sqrt{1 - \varrho_\tau \left( \frac{\tilde{\gamma}_{zy}}{\gamma_R} \right)^\beta}} \right) \left( \frac{1 - \sqrt{1 - \varrho_\tau \left( \frac{\tilde{\gamma}_{zy}}{\gamma_R} \right)^\beta}}{\sqrt{1 - \varrho_\tau \left( \frac{\tilde{\gamma}_{zy}}{\gamma_R} \right)^\beta}} - \frac{1 - \sqrt{1 - \varrho_\tau \left( \frac{\tilde{\gamma}_{zx}}{\gamma_R} \right)^\beta}}{\sqrt{1 - \varrho_\tau \left( \frac{\tilde{\gamma}_{zx}}{\gamma_R} \right)^\beta}} \right) + \left( \frac{1 - \sqrt{1 - \varrho_\tau \left( \frac{\tilde{\gamma}_{zx}}{\gamma_R} \right)^\beta}}{\sqrt{1 - \varrho_\tau \left( \frac{\tilde{\gamma}_{zx}}{\gamma_R} \right)^\beta}} - \frac{1 - \sqrt{1 - \varrho_\tau \left( \frac{\tilde{\gamma}_{xy}}{\gamma_R} \right)^\beta}}{\sqrt{1 - \varrho_\tau \left( \frac{\tilde{\gamma}_{xy}}{\gamma_R} \right)^\beta}} \right) \left( \frac{1 - \sqrt{1 - \varrho_\tau \left( \frac{\tilde{\gamma}_{xy}}{\gamma_R} \right)^\beta}}{\sqrt{1 - \varrho_\tau \left( \frac{\tilde{\gamma}_{xy}}{\gamma_R} \right)^\beta}} - \frac{1 - \sqrt{1 - \varrho_\tau \left( \frac{\tilde{\gamma}_{yx}}{\gamma_R} \right)^\beta}}{\sqrt{1 - \varrho_\tau \left( \frac{\tilde{\gamma}_{yx}}{\gamma_R} \right)^\beta}} \right) \right] \right)^{-1} \quad (38)$$

Третій інваріант девіатора пошкодженень конструкційних матеріалів (37), який трансформується рівняннями залежностей пошкоджуваностей від відносних лінійних пружнопластичних деформацій при осьових навантаженнях (9) і відносних кутових пружнопластичних деформацій при зсуві (15), в роботі не приводиться в зв'язку з громіздкістю його запису.

**Висновки:**

1. В процесі термосилового пружнопластичного навантаження конструкційні матеріали розпушуються, що призводить до зміни їх фізико-механічних властивостей.
2. Приведений тензор пошкоджуваності конструкційного матеріалу, який включає зміну об'єму і форми виділеного одиничного елемента (ВОЕ) матеріалу при пружнопластичному навантаженні. Тензор зміни об'єму ВОЕ матеріалу при пружнопластичному навантаженні, що характеризує його пошкоджуваність, трансформовано складовими пошкоджуваності від нормальних і дотичних напружень для об'ємного напруженого стану.
3. Отримані перший, другий і третій інваріанти тензора пошкоджуваності матеріалу при напруженні.
4. Параметри тензора пошкоджуваності конструкційних матеріалів і його інваріанти представлені кінетикою зміни пружнопластичних осьових і зсувних деформацій при пружнопластичному навантаженні.
5. Представлено тензор пошкоджуваності конструкційного матеріалу в вигляді шарового тензору зміни об'єму і девіатора зміни форми ВОЕ конструкційного матеріалу при напруженні.
6. Отримані інваріанти девіатора пошкоджуваності ВОЕ матеріалу при пружнопластичному навантаженні.
7. Представлені інваріанти девіатора пошкоджуваності конструкційного матеріалу параметрами пружнопластичних осьових і зсувних деформацій при напруженні.

**Список літератури**

1. Лебедев А.О., Чаусов М.Г., Недосека С.А., Богінч І.О., Модель накопичення пошкоджень в металевих матеріалах при статичному навантаженні// Проблемы прочности, 1995, №7, с. 31-34.
2. Лебедев А.О., Бобир М.І., Ламашевський В.П., Механіка матеріалів для інженерів. Навчальний посібник, Київ, НТУУ «КПІ», ВПІ ВПК, «Політехніка», 2006, 286 с.
3. Грабовський А.П., Тимошенко О.В., Масло О.М., Халімон О.П., Дослідження кінетики пошкоджуваності в конструкційних матеріалах при складному напруженому стані// Вестник НТУУ «КПІ», серія «Машиностроение», 2003, №44, с. 43-47.
4. Грабовський А.П., Деградація фізико-механічних властивостей конструкційних матеріалів при пружнопластичному розтягуванні та крученні// Вестник НТУУ «КПІ», серія «Машиностроение», 2007, К., №50, с. 155-161.
5. Lemaitre J. Damage mechanics – The Bath Press, Great Britain, - 1990. – 556 p.
6. Castagne S., Habraken A., Cescotto S., Application of Damage Model to an Aluminium Alloy// International Journal of Damage Mechanics – vol, 12 – Januar, 2003, p. 5-30.
7. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц, М., Издательство «Наука», 1988, 548 с.