

КОРЕЛЯЦІЙНІ ВЛАСТИВОСТІ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ ГОЛДА

Мрачковський О.Д., к.т.н., доцент,

Часник А. А. аспірант

Національний технічний університет України

“Київський політехнічний інститут”, м. Київ, Україна

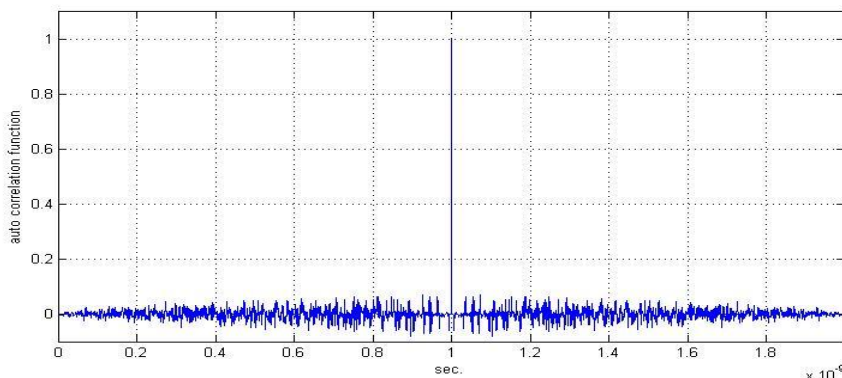
Вступ

Періодична послідовність Голда має тривірневу АКФ та ВКФ. Що дозволяє використовувати її в якості навігаційних сигналів за рахунок можливості їх швидкого захвату[5]. Послідовність Голда формується, як сума за модулем два двох М-послідовностей. Кожній М-послідовності довжини $N=2^n-1$, де n – деяке ціле число, відповідає свій многочлен ступеня n , що не приводиться. Відповідно до методу Голда твірним М-послідовностям повинні відповідати примітивні многочлени, корені яких є α^{-v} для першої і $(\alpha^{2l+1})^{-v}$ для другої послідовностей, де l — будь-яке ціле число, взаємно-просте з n . Вибираються такі послідовності досить просто за допомогою таблиць многочленів, що не приводяться [2]. Якщо М-послідовності вибрані по методу Голда, то їх періодичні ВКФ приймають значення [4, 3]:

$$Q(\lambda) = \begin{cases} Q_1 = -1/N \\ Q_2 = \sqrt{2/N} - 1/N \\ Q_3 = -\sqrt{2/N} - 1/N \end{cases} \quad (1)$$

Кореляційні функції послідовностей Голда.

На рис.1а приведена аперіодична автокореляційна функція ФМ сигналу з кодом Голда.



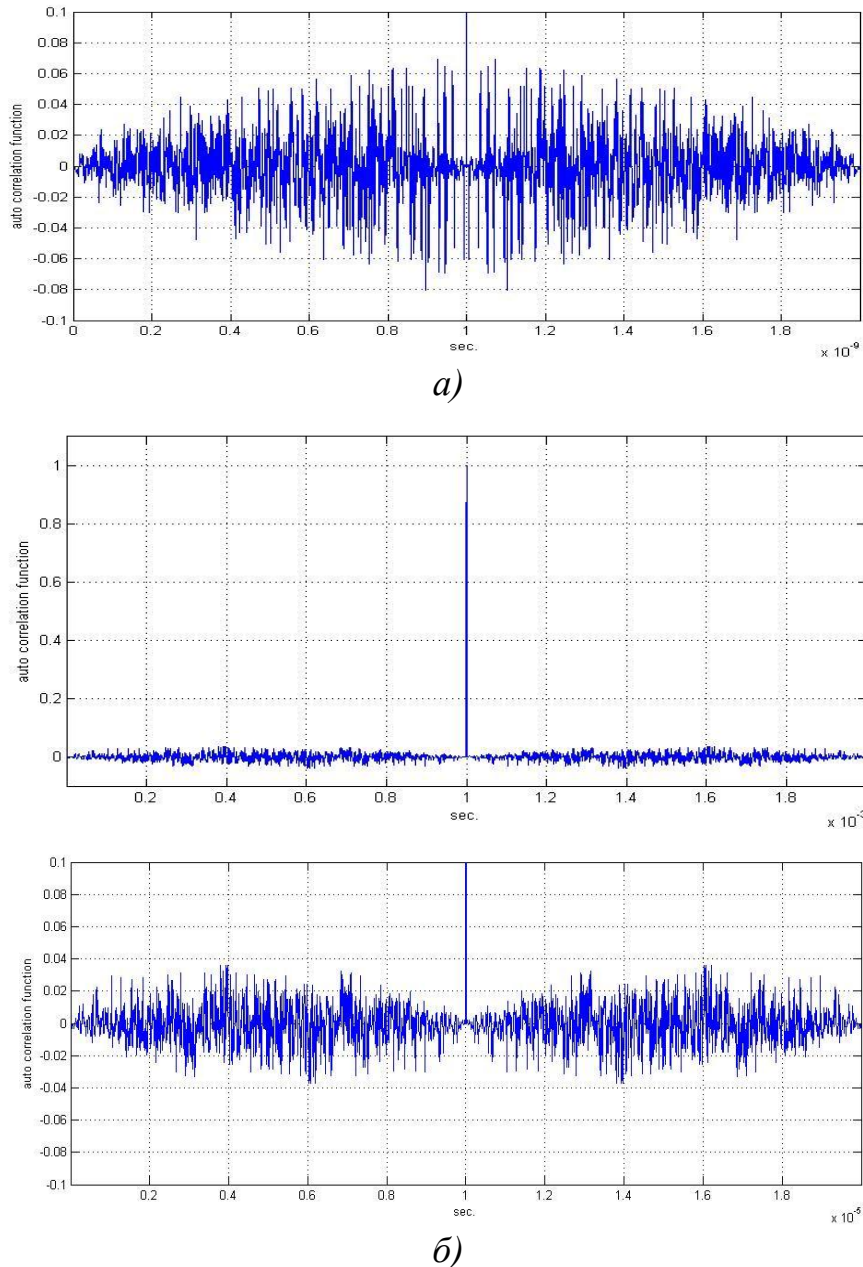


Рис.1. Аперіодична автокореляційна функція: а) для послідовності Голда; б) для М- послідовності при однакових $N=1023$

Порівнюючи рівень бічних сплесків аперіодичної автокореляційної функції (ААКФ) ФМ сигналів, фазоманіпульованих послідовністю Голда, з ФМ сигналами, фазоманіпульованих М-послідовністю (рис.1б), при однакових значеннях періоду послідовності $N=1023$, слід сказати, що у ФМ сигналів з М-послідовності він менший, ніж у сигналів з кодами Голда, приблизно в 2,6 разів.

Як вже згадувалося вище, якщо М-послідовності вибрані за методом Голда, то їх періодичні ВКФ є трирівневими, тобто приймають тільки три значення (1).

Вірогідність появи цих значень наступна:

$$P_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}N \quad P_2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}N - \frac{1}{\sqrt{8N}} \quad P_3 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}N + \frac{1}{\sqrt{8N}} \quad (2)$$

Відома оцінка ВКФ сигналів циклічної системи [7]:

$$R_{\max}(\lambda) \leq \max_{\lambda} |Q(\lambda)| + \max_{\lambda, \rho} |Q(\lambda, \rho)| \delta \quad (3)$$

Таким чином, оцінка першого доданку в (3) дається максимальним значенням (1), рівним $\sqrt{\frac{2}{N}} + \frac{1}{N}$. Максимум модуля періодичної ВФН

$$\max_{\lambda, \rho} |Q(\lambda, \rho)| < (2^{3/2} \pi^{-1} N^{-1/2} + N^{-1})^{1/2} \approx 0.94 N^{-1/4} \quad (4)$$

Підставляючи в (3) оцінки (1), (4), знаходимо оцінку максимальних піків ВКФ циклічної системи:

$$R_{\max}(\lambda) < \sqrt{\frac{2}{N}} + \frac{1}{N} + 0.94 \frac{\delta}{\sqrt[4]{N}} \quad (5)$$

На рис. 2-4 представлені взаємкореляційні функції (ВКФ) послідовності Голда періоду $N=1023$, для яких рівень кореляції падає на -1, -3, -6 дБ.

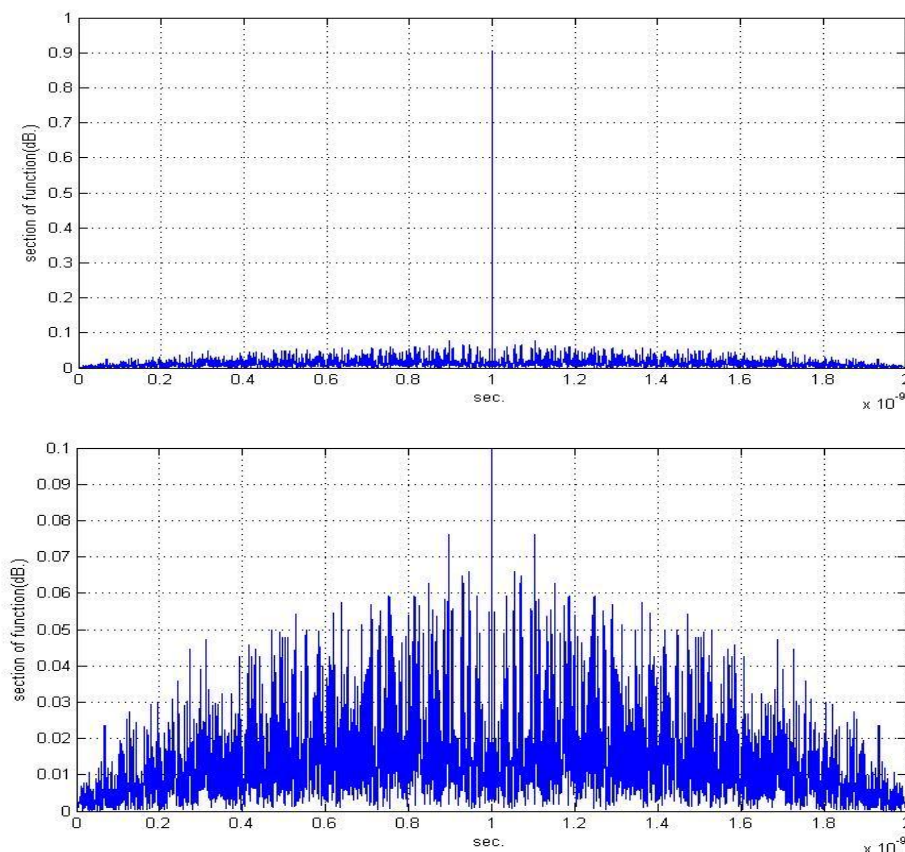


Рис.2 ВКФ послідовність Голда на рівні -1 дБ

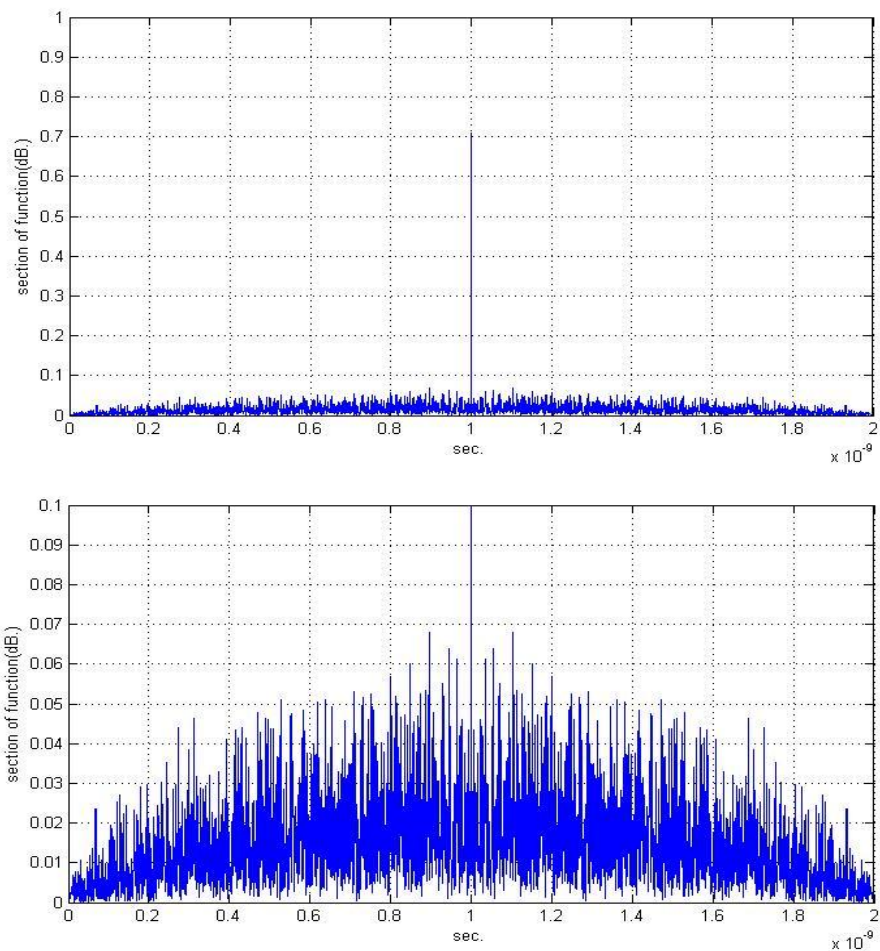
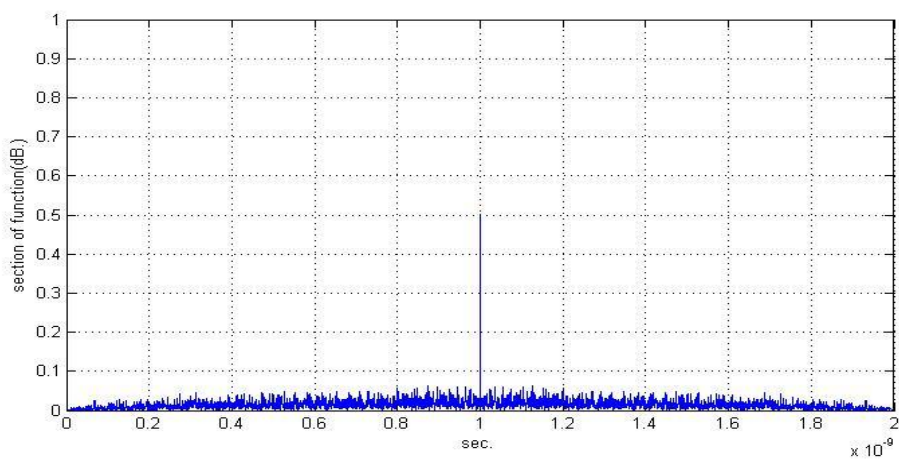


Рис.3 ВКФ послідовність Голда на рівні -3 дБ



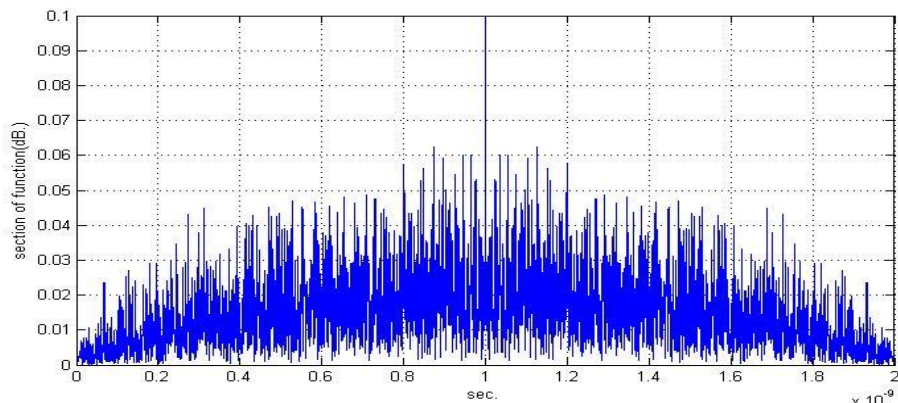


Рис.4. ВКФ послідовність Голда на рівні -6 дБ

З рисунків видно, що при зміні рівня кореляції спостерігається спад бічних піків з рівня 0,71(-1 дБ) до рівня 0,62 (-6 дБ), на відміну від М-послідовності, де, навпаки, із спадом кореляції відбувається ріст бічних піків. Це є важливим фактом з боку застосування неперіодичних послідовностей Голда з погляду радіолокації.

На рис.5 приведена періодична автокореляційна функція для сигналу з послідовністю Голда з параметрами $N=1023$, $T=1$ мс.

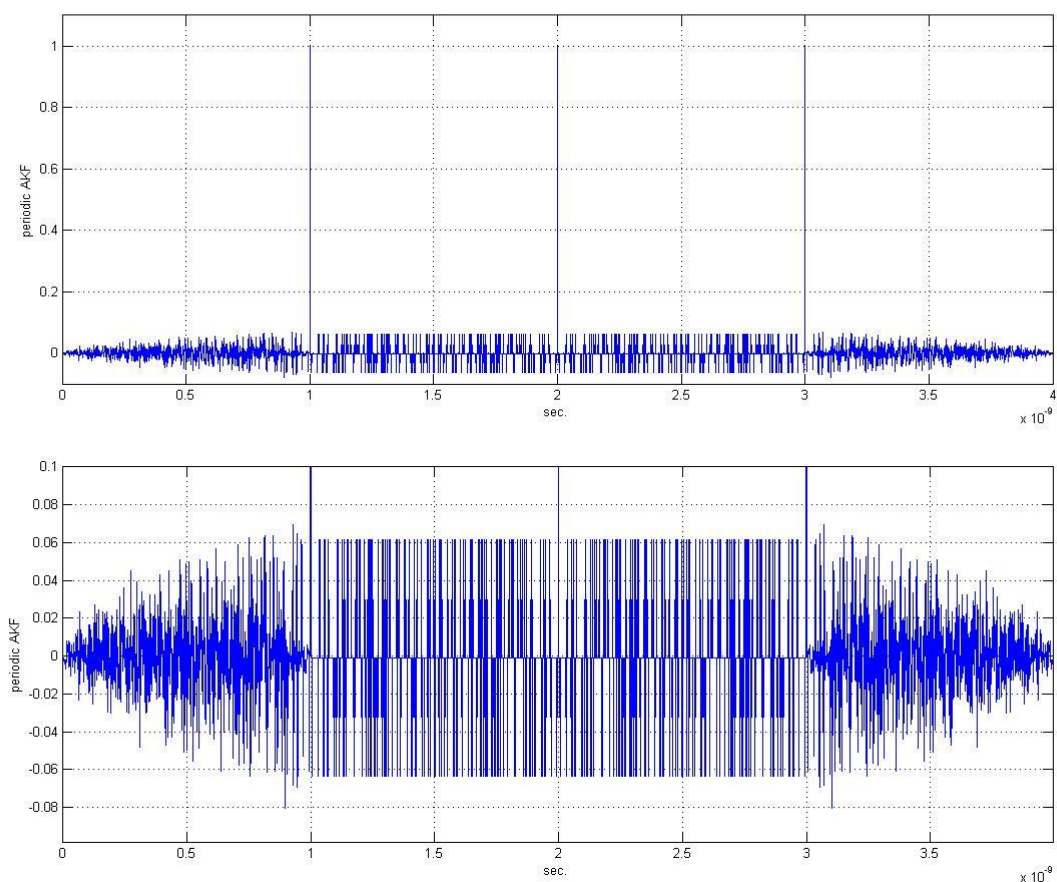


Рис.5. Періодична автокореляційна функція ФМ сигналу з послідовністю Голда.

З рисунка видно, що в області між основними списками автокореляційна функція приймає 3 значення. Нижче розраховані теоретичні значення при $N=1023$.

$$Q(\lambda) = \begin{cases} Q_1 = -1/N = -0.00098 \\ Q_2 = \sqrt{2/N} - 1/N = 0.043 \\ Q_3 = -\sqrt{2/N} - 1/N = -0.045 \end{cases}$$

Функція невизначеності послідовностей Голда.

Функція невизначеності для всіх послідовностей Голда аналітично записується як

$$R(\mu\tau_0, \Omega) = \frac{R_0(\Omega)}{N} \sum_{n_1}^{n_1+n_2} a_n^* a_{n-\mu} \exp(i(n-1)\Omega\tau_0)$$

де a_n – символи послідовності Голда, $\mu = \tau/\tau_0$, $R_0(\Omega)$ – функція невизначеності одиночного прямокутного імпульсу, яка залежить тільки від двох параметрів частоти Ω і тривалості τ_0 .

$$R_0(\Omega) = \left(\frac{\sin(0.5\Omega\tau_0)}{0.5\Omega\tau_0} \right) \exp(i \cdot 0.5\Omega\tau_0)$$

межі підсумовування визначаються наступною рівністю:

$$n_1 = \mu + 1, n_2 = N \text{ при } \mu > 0; \quad n_1 = 1, n_2 = N - |\mu| \text{ при } \mu < 0;$$

Виходячи з обмеженості об'єму тіла невизначеності довільного сигналу, середньоквадратичне значення ФН рівне $1/N$. На рис.6 приведена ФН послідовності Голда з $N=1023$, $f_0=1500$ МГц, $T=1$ мс.

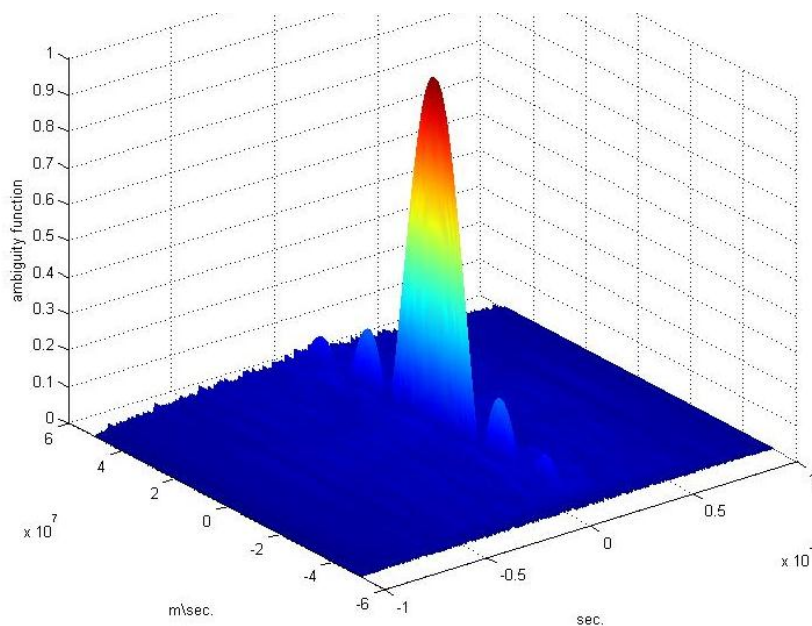


Рис.6 Функція невизначеності для ФМ сигналу з послідовністю Голда.

Як видно з рисунка, як і в М-послідовності, тіло невизначеності має малі бічні сплески в області слабкої кореляції.

На рис.7 приведені ізокореляти в області сильної кореляції.

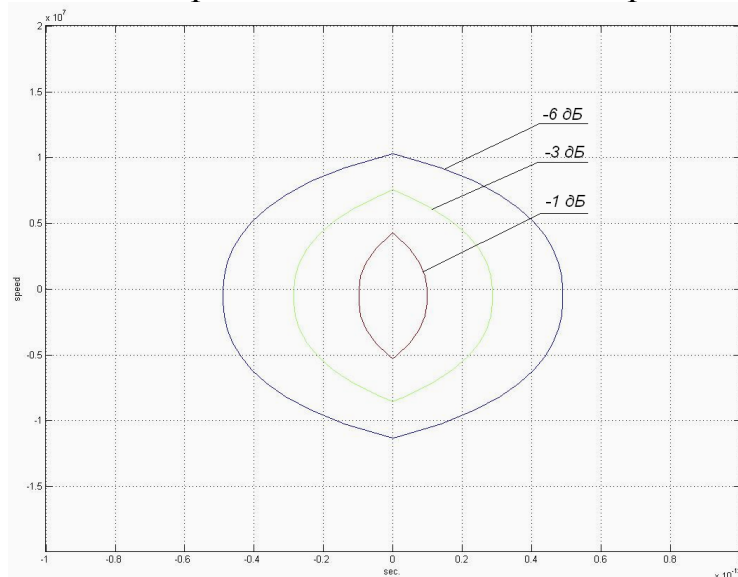


Рис.7 Ізокореляти в області сильної кореляції.

Нижче приведені ізокореляти в області слабкої кореляції.

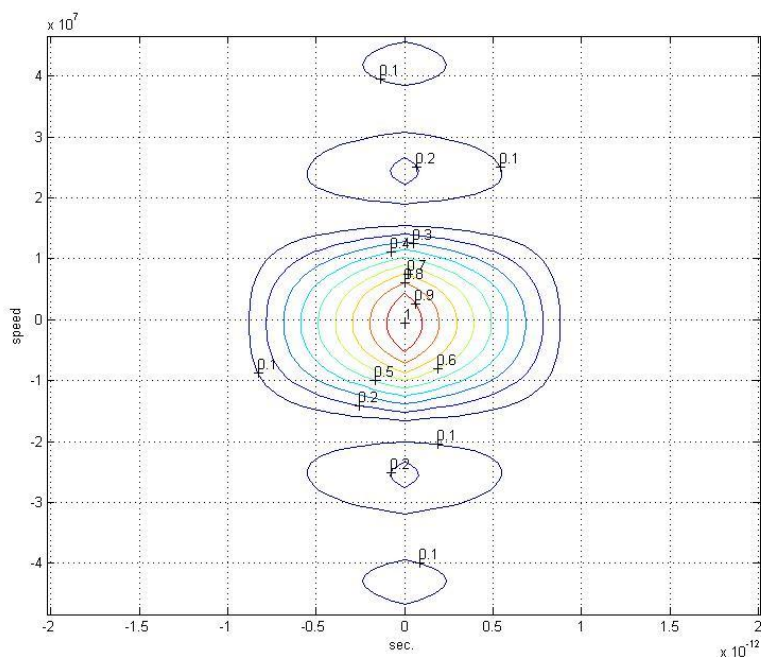


Рис.8 Ізокореляти в області слабкої кореляції.

Як видно з рис.6 по осі швидкості присутні бічні викиди, які викликані тим, що частотна кореляційна функція, як і для М-послідовності, описується виразом $\sin(x) / x$, де $x = \Omega\tau/2$.

Висновки

Застосування послідовностей Голда в радіолокації не доцільно з огляду на те, що М-послідовності мають менші бічні викиди кореляційних функцій, чим послідовності Голда при однакових значеннях періоду послідовності N . Крім того, для генерування послідовності Голда необхідно витратити більше матеріальних ресурсів, чим на М-послідовності (приблизно у 2 рази). Проте, у послідовностей Голда зі зменшення рівня кореляції знижується і рівень бічних викидів, на відміну від М-послідовностей.

Послідовності Голда широко використовуються в системах GPS із-за їх швидкої синхронізації (високої частоти синхронізації), хороших показників взаємної кореляції [5]. Крім того, вони володіють такою якістю, як хорошим криптографічним захистом даних [6], що є важливою умовою в радіонавігації. Послідовності Голда використовуються в системах GPS в грубих С/А кодах з довжиною послідовності 1023 елементів (чипів) і частотою 1 МГц, і в точному Р коді з довжиною 7 днів і частотою 10 МГц.

Література

1. Чеботарев Н.Г., Основы теории Галуа. Ч. I Изд. 2., 2004. с.224
2. Питерсон У., Уэлдон Э., Коды, исправляющие ошибки, пер. с англ., 2 изд., под ред. Р.Л. Добрушина, С.И. Самойленко. – М: Мир, 1976. –594 с
3. Gold R. Maximal Recursive Sequences with 3-valued Recursive Cross-correlation Functions.–IEEE Trans. Inf. Th., 1968, v. IT-14, N 1, p. 154-156.
4. Gold R. Optimal Binary Sequences for Spread Spectrum Multiplexing.–IEEE Trans., Inf. Th., 1967, v. IT-13, N 4, p. 619-621.
5. Peter H. Dana. Global positioning system overview.
<http://www.colorado.edu/geography/gcraft/notes/gps/gps.html>, 1999
6. F. Jessie MacWilliams and Neil A. Sloane. Psuedo-random sequences and arrays. Proceedings of the IEEE, 1976.
7. Варакин Л.Е. Теория сложных сигналов. – М.: Сов. радио, 1978 – 304 с.

*Мрачковській О.Д. Часник А.А. Кореляційні властивості послідовностей Голда. В статті докладно розглянені АКФ та ВКФ послідовностей Голда, в порівнянні з М-послідовністю. Також наведена функція невизначеності та її перерізи на різних рівнях.
Ключові слова: Послідовність Голда, АКФ, ВКФ, функція невизначеності.*

Мрачковский О.Д. Часнык А.А. Корреляционные свойства последовательностей Голда. В статье подробно рассмотрены АКФ и ВКФ последовательности Голда, в сравнении с М-последовательностью. Приведена функция неопределенности, и ее сечения на различных уровнях.

***Ключевые слова:** Последовательность Голда, АКФ, ВКФ, функция неопределенности*

*O. Mrachkovkiy A. Chasnyk **Properties of correlation functions of Gold's sequence** The article shows detailed analysis of correlation function and cross correlation function of Gold's sequence in comparison with max length sequence. The ambiguity function has been calculated.*

***Key words:** Gold's sequence, correlation analyze, ambiguity function.*