

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ  
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

**ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ТА ІНТЕГРАЛЬНЕ  
ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ.  
ТЕОРІЯ ПОЛЯ. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ**

ЗБІРНИК ЗАВДАНЬ  
ДО ТИПОВОЇ РОЗРАХУНКОВОЇ РОБОТИ  
ДЛЯ СТУДЕНТІВ І КУРСУ ТЕХНІЧНИХ ФАКУЛЬТЕТІВ

*Затверджено Методичною радою НТУУ «КПІ»*

Київ  
«ПОЛІТЕХНІКА»  
2002

Диференціальне та інтегральне числення функцій багатьох змінних. Теорія поля. Диференціальні рівняння: Збірник завдань до типової розрахункової роботи для студентів I курсу технічних факультетів / Уклад.: С.В. Горленко, Л.Б. Федорова, В.О. Гайдей. — К.: ІВЦ «Політехніка», 2002. — 65 с.

*Гриф надано Методичною  
радою НТУУ «КПІ»  
(Протокол № 4 від 20.12.2001)*

Навчальне видання

**ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ТА ІНТЕГРАЛЬНЕ  
ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ.  
ТЕОРІЯ ПОЛЯ. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ**

**Збірник завдань  
до типової розрахункової роботи  
для студентів I курсу технічних факультетів**

Укладачі: Горленко Святослав Васильович  
Федорова Лідія Борисівна  
Гайдей Віктор Олександрович  
Відповідальний редактор В.В. Булдигін, д-р фіз.-мат. наук, проф.  
Рецензент Ю.П. Буценко, канд. фіз.-мат. наук, доц.

Темплан 2001, поз. 140

Редактор Т.В. Камінська

Підп. до друку 25.02.2002. Формат 60×84 <sup>1</sup>/<sub>16</sub>.  
Інформаційно-видавничий центр «Політехніка» НТУУ «КПІ»  
Лабораторія офсетного друку НТУУ «КПІ»  
03056, Київ-56, просп. Перемоги, 37.  
Зам. № 140. Тираж 200. Ум. друк. арк. 3,78.  
Папір офсетний. Ризограф.

## Вступ

Дотепер накопичено багаторічний досвід використання типових індивідуальних розрахункових робіт для організації і контролю самостійної роботи студентів. Результатом цього є створена нова зручна форма типового варіанта.

Запропонований збірник містить 30 варіантів індивідуальних завдань і додаткові задачі, а кожний варіант — завдання з розділів: функції багатьох змінних, кратні, криволінійні, поверхневі інтеграли та їх застосування, диференціальні рівняння. Додаткові задачі, які вміщено в кінці збірника, дають змогу урізноманітнити запропонований типовий варіант і заохотити сумлінних студентів. Частина задач узято зі збірників завдань з вищої математики Л.А. Кузнецова «Сборник заданий по высшей математике» (М., 1994) і А.П. Рябушка «Сборник индивидуальных заданий по высшей математике» (Минск, 1990). Крім того, укладачі пропонують використовувати збірники задач [1—8].

Передбачається, що перед виконанням завдань типового варіанта розрахункової роботи, студент ознайомиться з відповідними розділами методичних вказівок, які містять:

1. Стислий виклад теоретичного матеріалу з вказівками шляхів поглиблення знань.
2. Приклади розв'язання типових задач з використанням ефективних, оригінальних методик.
3. Довідковий матеріал, зібраний та організований у зручній формі.
4. Зразок розв'язання типового варіанта та деяких додаткових задач, а також поради щодо розв'язання останніх.
5. Відповіді до частини задач.
6. Список рекомендованої літератури.

### Список рекомендованої літератури

1. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. — М.: Наука, 1985. — 446 с.
2. Вища математика: Збірник задач / В.П. Дубовик, І.І. Юрик, І.П. Вовкодав та ін. — К.: Вища шк., 1999. — 480 с.
3. Гудименко Ф.С. Збірник задач з вищої математики. — К.: КДУ, 1967. — 352 с.
4. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. — М.: МГУ, 1999. — 624 с.
5. Сборник задач по курсу высшей математики / Г.И. Кручкович, Н.И. Гутарина, П.Е. Дюбюк и др. — М.: Высш. шк., 1973. — 576 с.
6. Сборник задач по математике для втузов: Линейная алгебра и основы математического анализа. В 3 ч. / В.А. Болгов, А.В. Ефимов, А.Ф. Каракулин и др. — М.: Наука, 1986. — Ч. 2. — 368 с.
7. Сборник задач по математическому анализу. Функции нескольких переменных / Л.Д. Кудрявцев, А.Д. Кутасов, В.И. Чехлов, М.И. Шабунин. — С.Пб.: Наука, 1994. — 496 с.
8. Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям / М.Л. Краснов, А.И. Киселев, Г.И. Макаренко. — М.: Высш. шк., 1978. — 288 с.

### Варіант 1

1.  $u = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}; du|_{M_0(0,-1,1)} = ?$

2.  $z = x^2 y^2, x = ue^v, y = ve^u; z'_u, z'_v = ?$

3. Скласти рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні в точці  $M_0(2, 1, -1)$ :

$$x^2 + y^2 + z^2 + 6z - 4x + 8 = 0.$$

4. Дослідити функцію на екстремум:

$$z = y\sqrt{x} - 2y^2 - x + 14y.$$

5. Знайти найбільше та найменше значення функції  $z = 3x + y - xy$  в області  $\bar{D}: y = x, y = 4, x = 0$ .

6. Змінити порядок інтегрування:

$$\int_{-2}^{-1} dy \int_{-\sqrt{2+y}}^0 f dx + \int_{-1}^0 dy \int_{-\sqrt{-y}}^0 f dx.$$

7. Обчислити:

1)  $\iint_D y \exp\left(\frac{xy}{2}\right) dx dy.$   
 $D: y = \ln 2, y = \ln 3, x = 2, x = 4$

2)  $\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}} dy.$

3)  $\iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz.$   
 $V: x^2 + y^2 + z^2 = 4, x, y, z \geq 0$

8. Знайти площі фігур, обмежених лініями:

1)  $y = \frac{3}{x}, y = 4e^x, y = 3, y = 4.$

2)  $y^2 - 2y + x^2 = 0, y^2 - 4y + x^2 = 0,$   
 $y = \frac{x}{\sqrt{3}}, y = \sqrt{3}x.$

9. Знайти масу пластинки  $D$  з густиною

$$\mu = y^2, D: x^2 + \frac{y^2}{4} \leq 1.$$

10. Знайти об'єми тіл, обмежених поверхнями:

1)  $y = 16\sqrt{2x}, y = \sqrt{2x}, z = 0, x + z = 2.$

2)  $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}, 9z = 2(x^2 + y^2).$

3)  $z = 2 - 12(x^2 + y^2), z = 24x + 2.$

11. Знайти масу тіла  $V$  з густиною  $\mu$ :

$$V: 64(x^2 + y^2) = z^2, x^2 + y^2 = 4,$$

$$y, z \geq 0; \mu = \frac{5(x^2 + y^2)}{4}.$$

12. Знайти координати центра мас однорідного тіла, обмеженого поверхнями:

$$x = 6(y^2 + z^2), y^2 + z^2 = 3, x = 0.$$

13. Знайти довжину дуги кривої:

1)  $y = \ln x, \sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{15}.$

2)  $\rho = 3e^{\frac{3\varphi}{4}}, -\frac{\pi}{2} \leq \varphi < \frac{\pi}{2}.$

14. Знайти масу кривої  $x = t \cos t, y = t \sin t, z = t, 0 \leq t \leq 2\pi$  з густиною

$$\mu = 2z - \sqrt{x^2 + y^2}.$$

15. Знайти роботу сили  $\mathbf{F} = (x^2 - 2y)\mathbf{i} + (y^2 - 2x)\mathbf{j}$  при переміщенні вздовж відрізка  $MN$  від точки  $M(-4, 0)$  до точки  $N(0, 2)$ .

16. Знайти функцію за її диференціалом:

$$du = (e^y + 2(2x + 1) \sin 2x) dx + (xe^y + 2y) dy.$$

17. Знайти циркуляцію векторного поля (безпосередньо та за теоремою Стокса):

1)  $\mathbf{a} = (x^2 - y, x, 1),$

$$\Gamma: x^2 + y^2 = 1 \cap z = 1.$$

2)  $\mathbf{a} = (y, -x, z^2), 0 \leq t \leq 2\pi,$

$$\Gamma: \left\{ x = \frac{\cos t}{\sqrt{2}}, y = \frac{\cos t}{\sqrt{2}}, z = \sin t. \right.$$

$$18. \left[ \begin{array}{l} u = 4 \ln(3 + x^2) - 8xyz, \\ S: x^2 - 2y^2 + 2z^2 = 1, \\ \angle(\mathbf{n}, Oz) \leq 90^\circ, M(1, 1, 1) \end{array} \right] \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \Big|_M = ?$$

19. Знайти кут між градієнтами скалярних

$$\text{полів } v = \frac{x^3}{2} + 6y^3 + 3\sqrt{6}z^3 \text{ і } u = \frac{yz^2}{x^2} \text{ у}$$

$$\text{точці } M\left(\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

20. Знайти величину і напрям найбільшої зміни функції  $u(M) = xyz$  у точці  $M_0(0, 1, -2)$ .

21. Знайти найбільшу густину циркуляції векторного поля  $\mathbf{a} = (x^2, -xy, z^2)$  у точці  $M_0(0, 1, -2)$ .

22. Знайти потік векторного поля крізь частину поверхні  $S$  (нормаль зовнішня):

$$1) \mathbf{a} = (x, y, z), S : \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ (0 < z < 2). \end{cases}$$

$$2) \mathbf{a} = (x, y, z), S : \begin{cases} x + y + z = 1, \\ (x, y, z > 0). \end{cases}$$

$$3) \mathbf{a}(x^2, x, xz), S : \begin{cases} z = x^2 + y^2, x, y \geq 0, \\ (0 \leq z < 1). \end{cases}$$

23. Знайти потік векторного поля  $\mathbf{a}$  крізь замкнену поверхню  $S$  (нормаль зовнішня):

$$1) \mathbf{a}(e^z + 2x, e^x, e^y),$$

$$S : x + y + z = 1, x, y, z = 0.$$

$$2) \mathbf{a}(x + z, 0, z + y), S : \begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ z = x, z \geq 0. \end{cases}$$

24. Знайти масу частини поверхні  $\Omega$ , обмеженої  $S$ , з густиною  $\mu = \mu_0$ :

$$\Omega : z^2 = 2px,$$

$$S : \{0 < z < a, \beta z < y < \alpha z\}.$$

Зінтегрувати диференціальне рівняння або розв'язати задачу Коші (25 – 34):

$$25. e^{x+3y} dy = x dx.$$

$$26.1) y - xy' = x \sec \frac{y}{x}.$$

$$2) y' = \frac{y^2}{x^2} + 4 \frac{y}{x} + 2.$$

$$3) y' = \frac{x + 2y - 3}{2x - 2}.$$

$$27.1) (x^2 + 1)y' + 4xy = 3, y(0) = 0.$$

$$2) y^2 dx + (x + e^{\frac{2}{y}}) dy = 0, y(e) = 2.$$

$$28. y' + xy = (1 + x)e^{-x}y^2, y(0) = 1.$$

$$29. 3x^2 e^y dx + (x^3 e^y - 1) dy = 0.$$

$$30.1) y''' = \sin x, y(0) = 1, y'(0) = 1, \\ y''(0) = y''(0) = 0.$$

$$2) y''' x \ln x = y''.$$

$$3) y'' = y' e^y, y(0) = 0, y'(0) = 1.$$

$$31.1) y'' + 4y = 0.$$

$$2) y'' - 10y' + 25y = 0.$$

$$3) y'' + 3y' + 2y = 0.$$

$$32. y''' - 7y'' + 6y' = 0, \\ y(0) = y'(0) = 0, y''(0) = 30.$$

$$33.1) y''' + 3y'' + 2y' = 1 - x^2.$$

$$2) y''' - 4y'' + 5y' - 2y = (16 - 12x)e^{-x}.$$

$$3) y'' + 2y' = 4e^x (\sin x + \cos x).$$

$$4) y'' - 2y' = 2 \operatorname{ch} 2x.$$

$$5) y'' - 2y' + y = -12 \cos 2x - 9 \sin 2x, \\ y(0) = -2, y'(0) = 0.$$

$$34.1) y'' - y = \frac{e^x}{e^x + 1}.$$

$$2) y'' + \pi^2 y = \frac{\pi^2}{\cos \pi x}, \\ y(0) = 3, y'(0) = 0.$$

35. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

$$1) \begin{cases} x' = 2x + y, \\ y' = 3x + 4y. \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x' = 2x + 3y - 3e^{2t}, \\ y' = x + y - e^{2t}. \end{cases}$$

## Варіант 2

1.  $u = \ln\left(x + \frac{y}{2z}\right); du|_{M_0(1,2,1)} = ?$

2.  $z = y^2 \cos x, x = u \ln v, y = v \ln u;$

$$z'_u, z'_v = ?$$

3. Скласти рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні в точці  $M_0(-2, 1, 2)$ :

$$z^2 = 4y^2 - x^2 - 2xy.$$

4. Дослідити функцію на екстремум:

$$z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 5.$$

5. Знайти найбільше та найменше значення функції  $z = xy - x - 2y$  в області  $\bar{D} : x = 3, y = x, y = 0$ .

6. Змінити порядок інтегрування:

$$\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^0 f dx + \int_1^{\sqrt{2}} dy \int_{-\sqrt{2-y^2}}^0 f dx.$$

7. Обчислити:

1)  $\iint_{D: x=0, y=\sqrt{\pi}, y=\frac{x}{2}} y^2 \sin \frac{xy}{2} dx dy.$

2)  $\int_{-\sqrt{3}}^0 dx \int_0^{\sqrt{3-x^2}} \frac{dy}{\sqrt{1+x^2+y^2}}.$

3)  $\iiint_{V: z^2=4x^2+4y^2, z=2, y \geq \pm x, z \geq 0} y \sqrt{x^2+y^2} dx dy dz.$

8. Знайти площі фігур, обмежених лініями:

1)  $x = \sqrt{36 - y^2}, x = 6 - \sqrt{36 - y^2}.$

2)  $x^2 - 4x + y^2 = 0, x^2 - 8x + y^2 = 0,$

$$y = 0, y = \frac{x}{\sqrt{3}}.$$

9. Знайти масу пластинки  $D$  з густиною

$$\mu = \frac{y}{x}, D : 1 \leq \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leq 2, 0 \leq y \leq \frac{2}{3}x.$$

10. Знайти об'єми тіл, обмежених поверхнями:

1)  $y = 5\sqrt{x}, y = \frac{5x}{3}, z = 0, z = 5 + \frac{5}{3}\sqrt{x}.$

2)  $z = \frac{15}{2}\sqrt{x^2 + y^2}, z = \frac{17}{2} - x^2 - y^2.$

3)  $z = 10((x-1)^2 + y^2) + 1, z = 21 - 20x.$

11. Знайти масу тіла  $V$  з густиною  $\mu$ :

$$V : x^2 + y^2 + z^2 = 4, x^2 + y^2 \leq 1,$$

$$x \geq 0, \mu = 4|z|.$$

12. Знайти координати центра мас однорідного тіла, обмеженого поверхнями:

$$y = 3\sqrt{x^2 + z^2}, x^2 + z^2 = 36, y = 0.$$

13. Знайти довжину дуги кривої:

1)  $y = \frac{x^2}{4} - \frac{\ln x}{2}, 1 \leq x \leq 2.$

2)  $\rho = 2e^{\frac{4\varphi}{3}}, -\frac{\pi}{2} \leq \varphi < \frac{\pi}{2}.$

14. Знайти масу кривої  $x = \cos t, y = \sin t, z = \sqrt{3}t, 0 \leq t \leq 2\pi$  з густиною  $\mu = x^2 + y^2 + z^2$ .

15. Знайти роботу сили  $\mathbf{F} = (x^2 + 2y)\mathbf{i} + (y^2 + 2x)\mathbf{j}$  при переміщенні вздовж відрізка  $MN$  від точки  $M(-4, 0)$  до точки  $N(0, 2)$ .

16. Знайти функцію за її диференціалом:

$$du = (e^y + 2x) dx +$$

$$+ (xe^y + 4(4y + 2) \cos 4y) dy.$$

17. Знайти циркуляцію векторного поля (безпосередньо та за теоремою Стокса):

1)  $\mathbf{a} = (xz, -1, y),$

$$\Gamma : z = 5(x^2 + y^2) - 1 \cap z = 4.$$

2)  $\mathbf{a} = (-x^2y^3, 1, z), 0 \leq t \leq 2\pi,$

$$\Gamma : \{x = \sqrt[3]{4} \cos t, y = \sqrt[3]{4} \sin t, z = 3.\}$$

$$18. \left[ \begin{array}{l} u = x\sqrt{y} + y\sqrt{z}, \\ S : 4z + 2x^2 - y^2 = 0, \\ \angle(\mathbf{n}, Oz) \leq 90^\circ, M(2, 4, 4) \end{array} \right] \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \Big|_M = ?$$

19. Знайти кут між градієнтами скалярних полів  $v = \frac{4\sqrt{6}}{x} - \frac{\sqrt{6}}{9y} + \frac{3}{z}$  і  $u = x^2yz^3$  у

точці  $M\left(2, \frac{1}{3}, \sqrt{\frac{3}{2}}\right).$

20. Знайти величину і напрям найбільшої зміни функції  $u(M) = x^2yz$  у точці  $M_0(2, 0, 2)$ .

21. Знайти найбільшу густину циркуляції векторного поля  $\mathbf{a} = (xy, yz + xz, xz)$  у точці  $M_0(2, 0, 3)$ .

22. Знайти потік векторного поля крізь частину поверхні  $S$  (нормаль зовнішня):

$$1) \mathbf{a} = (x, y, -z), S : \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ (0 < z < 4). \end{cases}$$

$$2) \mathbf{a} = (0, y, z), S : \begin{cases} x + y + z = 1, \\ (x, y, z > 0). \end{cases}$$

$$3) \mathbf{a} = (2x, 0, z), S : \begin{cases} z = 3x^2 + 2y^2 + 1, \\ x^2 + y^2 = 4 (z > 0). \end{cases}$$

23. Знайти потік векторного поля  $\mathbf{a}$  крізь замкнену поверхню  $S$  (нормаль зовнішня):

$$1) \mathbf{a} = (3z^2 + x, e^x - 2y, 2z - xy),$$

$$S : x^2 + y^2 = z^2, z = 1, z = 4.$$

$$2) \mathbf{a} = (x^2 + y^2, y^2 + x^2, y^2 + z^2),$$

$$S : x^2 + y^2 = 1, z = 0, z = 1.$$

24. Знайти масу частини поверхні  $\Omega$ , обмеженої  $S$ , з густиною  $\mu = \mu_0$ :

$$\Omega : z^2 = 2px, S : \{y^2 = 2qx, x = a\}.$$

Зінтегрувати диференціальне рівняння або розв'язати задачу Коші (25 – 34):

$$25. y' \sin x = y \ln y.$$

$$26.1) (y^2 - 3x^2)dy + 2xydx = 0.$$

$$2) xy' = \frac{3y^3 + 2yx^2}{2y^2 + x^2}.$$

$$3) y' = \frac{x + y - 2}{2x - 2}.$$

$$27.1) y' - y \operatorname{ctg} x = 2x \sin x, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

$$2) (y^4 e^y + 2x)y' = y, y(0) = 1.$$

$$28. xy' + y = 2y^2 \ln x, y(1) = \frac{1}{2}.$$

$$29. \left( 3x^2 + \frac{2}{y} \cos \frac{2x}{y} \right) dx - \frac{2x}{y^2} \cos \frac{2x}{y} dy = 0.$$

$$30.1) y''' = \frac{1}{x}, y(1) = \frac{1}{4}, y'(1) = y''(1) = 0.$$

$$2) 2xy'y'' + x^2y' = 0.$$

$$3) y'' = 128y^3, y(0) = 1, y'(0) = 8.$$

$$31.1) y'' - y' - 2y = 0.$$

$$2) y'' - 9y = 0.$$

$$3) y'' + 4y' + 4y = 0.$$

$$32. y^{(5)} - 9y''' = 0, y(0) = 1, y'(0) = -1,$$

$$y''(0) = y'''(0) = y^{(4)}(0) = 1.$$

$$33.1) y'' - 2y' + 5y = 10e^{-x} \cos 2x.$$

$$2) y''' - 3y'' + 2y' = (1 - 2x)e^x.$$

$$3) y'' - 4y' + 4y = -6e^{2x} \sin 6x.$$

$$4) y'' + y = 2 \sin x - 6 \cos x + 2e^x.$$

$$5) y'' - 6y' + 9y = 9x^2 - 39x + 65,$$

$$y(0) = -1, y'(0) = 1.$$

$$34.1) y'' + 4y = \frac{1}{\cos 2x}.$$

$$2) y'' + 3y' = \frac{9e^{3x}}{1 + e^{3x}}, y(0) = \ln 4,$$

$$y'(0) = 3(1 - \ln 2).$$

35. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

$$1) \begin{cases} x' = x - y, \\ y' = -4x + y. \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x' = x + 4y - 4e^t, \\ y' = x + y - e^t. \end{cases}$$

### Варіант 3

1.  $u = (\sin x)^{yz}; du|_{M_0(\frac{\pi}{6}, 1, 2)} = ?$

2.  $z = x^3y - yx, x = u \cos v, y = u \sin v;$   
 $z'_u, z'_v = ?$

3. Скласти рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні в точці  $M_0(1, 2, 1)$ :

$$x^2 + y^2 + z^2 - xy + 3z - 7 = 0.$$

4. Дослідити функцію на екстремум:

$$z = 15x - 2x^2 - xy - 2y^2.$$

5. Знайти найбільше та найменше значення функції  $z = x^2 + 2xy - 4x + 8y$  в області  $\bar{D}: x = 0, x = 1, y = 0, y = 2$ .

6. Змінити порядок інтегрування:

$$\int_0^1 dy \int_0^y f dx + \int_1^{\sqrt{2}} dy \int_0^{\sqrt{2-y^2}} f dx.$$

7. Обчислити:

1)  $\iint_{D: y=\frac{\pi}{2}, y=\pi, x=1, x=2} y \cos xy dx dy.$

2)  $\int_0^R dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \frac{\operatorname{tg} \sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} dy.$

3)  $\iiint_V z^2 dx dy dz.$   
 $V: 1 \leq x^2 + y^2 \leq 36,$   
 $y \geq x, x, z \geq 0, z \leq 2$

8. Знайти площі фігур, обмежених лініями:

1)  $x^2 + y^2 = 72, 6y = -x^2 (y \leq 0).$

2)  $y^2 - 6y + x^2 = 0, y^2 - 8y + x^2 = 0,$   
 $\sqrt{3}y = x, y = \sqrt{3}x.$

9. Знайти масу пластинки  $D$  з густиною

$$\mu = x^2y, D: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} \leq 1, y \geq 0.$$

10. Знайти об'єми тіл, обмежених поверхнями:

1)  $x^2 + y^2 = 2, y = \sqrt{x}, y, z = 0, z = 15x.$

2)  $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}, 15z = \sqrt{x^2 + y^2}.$

3)  $z = 8(x^2 + y^2) + 3, z = 16x + 3.$

11. Знайти масу тіла  $V$  з густиною  $\mu$ :

$$V: x^2 + y^2 = 1, x^2 + y^2 = 2z,$$

$$x, y \geq 0, z = 0; \mu = 10x.$$

12. Знайти координати центра мас однорідного тіла, обмеженого поверхнями:

$$x = 7(y^2 + z^2), x = 28.$$

13. Знайти довжину дуги кривої:

1)  $y = \sqrt{1-x^2} + \arcsin x, 0 \leq x \leq \frac{7}{9}.$

2)  $\rho = \sqrt{2}e^\varphi, -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}.$

14. Знайти масу кривої  $x = 2 \cos t, y = 2 \sin t, z = 2t, 0 \leq t \leq 2\pi$  з густиною  $\mu = z^2(x^2 + y^2)^{-1}.$

15. Знайти роботу сили  $\mathbf{F} = (x^2 + 2y)\mathbf{i} + (y^2 + 2x)\mathbf{j}$  при переміщенні вздовж параболи  $y = 2 - \frac{x^2}{8}$  від точки  $M(-4, 0)$

до точки  $N(0, 2).$

16. Знайти функцію за її диференціалом:

$$du = (xy^2 + \operatorname{arctg} \frac{x}{3}) dx + (x^2y + \sin y) dy.$$

17. Знайти циркуляцію векторного поля (безпосередньо та за теоремою Стокса):

1)  $\mathbf{a} = (yz, 2xz, xy), (z > 0)$

$$\Gamma: x^2 + y^2 + z^2 = 25 \cap x^2 + y^2 = 9.$$

2)  $\mathbf{a} = (y - z, z - x, x - y), 0 \leq t \leq 2\pi,$

$$\Gamma: \{x = \cos t, y = \sin t, z = 2(1 - \cos t)\}.$$

18.  $S: x^2 + 2y^2 - 2z^2 = 1, \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \Big|_M = ?$   
 $\angle(\mathbf{n}, Oz) \leq 90^\circ, M(1, 1, 1)$

19. Знайти кут між градієнтами скалярних полів  $v = 9\sqrt{2}x^3 - \frac{y^3}{2\sqrt{2}} - \frac{4z^3}{\sqrt{3}}$  і

$$u = \frac{z^3}{xy^2} \text{ у точці } M\left(\frac{1}{3}, 2, \sqrt{\frac{3}{2}}\right).$$

20. Знайти величину і напрям найбільшої зміни функції  $u(M) = xy^2z$  у точці  $M_0(1, -2, 0).$



21. Знайти найбільшу густину циркуляції векторного поля  $\mathbf{a} = (xy^2, yz^2, -x^2)$  у точці  $M_0(1, -2, 0)$ .

22. Знайти потік векторного поля крізь частину поверхні  $S$  (нормаль зовнішня):

$$1) \mathbf{a} = (x, y, 2z), S : \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ (0 < z < 3). \end{cases}$$

$$2) \mathbf{a} = (2x, y, z), \begin{cases} S : x + y + z = 1, \\ (x, y, z > 0). \end{cases}$$

$$3) \mathbf{a} = (2x, 2y, z), S : y = x^2, y = 4x^2, \\ y = 1, x \geq 0 \quad (0 < z \leq y).$$

23. Знайти потік векторного поля  $\mathbf{a}$  крізь замкнену поверхню  $S$  (нормаль зовнішня):

$$1) \mathbf{a} = (\ln y + 7x, \sin z - 2y, e^y - 2z),$$

$$S : (x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 1.$$

$$2) \mathbf{a} = (x^2, y^2, z^2), S : x^2 + y^2 + z^2 = 4, \\ x^2 + y^2 = z^2 \quad (z \geq 0).$$

24. Знайти масу частини поверхні  $\Omega$ , обмеженої  $S$ , з густиною  $\mu = \sqrt{x^2 + y^2}$ :  $\Omega : x^2 + y^2 + z^2 = R^2, S : \{z = 0\}$ .

Зінтегрувати диференціальне рівняння або розв'язати задачу Коші (25 – 34):

$$25. \sqrt{4 + y^2} dx - y dy = x^2 y dy.$$

$$26. 1) x + 2y) dx - x dy = 0.$$

$$2) y' = \frac{x + y}{x - y}.$$

$$3) y' = \frac{3y - x - 4}{3x + 3}.$$

$$27. 1) (1 - x)(y' + y) = e^{-x}, y(0) = 0.$$

$$2) y^2 dx + (xy - 1) dy = 0, y(1) = e.$$

$$28. 2(xy' + y) = xy^2, y(1) = 2.$$

$$29. (3x^2 + 4y^2) dx + (8xy + e^y) dy = 0.$$

$$30. 1) y'' = \frac{1}{\cos^2 x}, y(0) = 1, y'(0) = \frac{3}{5}.$$

$$2) x^3 y'' + x^2 y' = 1.$$

$$3) y'' y^3 + 64 = 0, y(0) = 4, \\ y'(0) = 2.$$

$$31. 1) y'' - 4y' = 0.$$

$$2) y'' - 4y' + 13y = 0.$$

$$3) y'' - 3y' + 2y = 0.$$

$$32. y''' - y'' = 0,$$

$$y(0) = y'(0) = 0, y''(0) = -1.$$

$$33. 1) y''' - y' = x^2 + x.$$

$$2) y''' - y'' - y' + y = (3x + 7)e^{2x}.$$

$$3) y'' + 2y' = -2e^x (\sin x + \cos x).$$

$$4) y''' - y' = 2e^x + \cos x.$$

$$5) y'' + 2y' + 2y = 2x^2 + 8x + 6,$$

$$y(0) = 1, y'(0) = 4.$$

$$34. 1) y'' - 4y' + 5y = \frac{e^{2x}}{\cos x}.$$

$$2) y'' + 4y = 8 \operatorname{ctg} 2x, y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 5,$$

$$y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 4.$$

35. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

$$1) \begin{cases} x' = -x + 8y, \\ y' = x + y. \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x' = x + 8y + 10e^t, \\ y' = x + 3y + 5e^t. \end{cases}$$

**Варіант 4**

1.  $u = \ln(x^3 + 2y^3 - z^3); du|_{M_0(2,1,0)} = ?$

2.  $z = x^2 \ln y, x = \frac{u}{v}, y = 3u - 2v;$

$z'_u, z'_v = ?$

3. Скласти рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні в точці  $M_0(-1,1,2)$  :

$x^2 + y^2 + z^2 + 6y + 4x - 8 = 0.$

4. Дослідити функцію на екстремум:

$z = 6x - x^2 - xy - y^2.$

5. Знайти найбільше та найменше значення функції  $z = 5x^2 - 3xy + y^2$  в області  $\bar{D} : x = 0, x = 1, y = 0, y = 1.$ 

6. Змінити порядок інтегрування:

$$\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} f dx + \int_1^2 dy \int_0^{\sqrt{2-y}} f dx.$$

7. Обчислити:

1)  $\iint_{D: x=0, y=2, y=x} y^2 \exp\left(-\frac{xy}{4}\right) dx dy.$

2)  $\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \ln(1+x^2+y^2) dy.$

3)  $\iiint_{V: \begin{matrix} x^2+y^2+z^2=32, \\ y^2=x^2+z^2, y \geq 0 \end{matrix}} y dx dy dz.$

8. Знайти площі фігур, обмежених лініями:

1)  $x = 8 - y^2, x = -2y.$

2)  $x^2 - 2x + y^2 = 0, x^2 - 4x + y^2 = 0,$   
 $y = 0, y = x.$

9. Знайти масу пластинки  $D$  з густиною

$\mu = \frac{7x^2y}{18}, D : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} \leq 1, y \geq 0.$

10. Знайти об'єми тіл, обмежених поверхнями:

1)  $x + y = 2, y = \sqrt{x}, z = 12y, z = 0.$

2)  $z = \sqrt{64 - x^2 - y^2}, z = 1, x^2 + y^2 \leq 60.$

3)  $2 - z = 20((x+1)^2 + y^2),$   
 $z = -40x - 38.$

11. Знайти масу тіла  $V$  з густиною  $\mu$  :

$V : x^2 + y^2 = \frac{16}{49}z^2, x^2 + y^2 = \frac{4}{7}z,$

$x, y \geq 0; \mu = 80yz.$

12. Знайти координати центра мас однорідного тіла, обмеженого поверхнями:

$z = 2\sqrt{x^2 + y^2}, z = 8.$

13. Знайти довжину дуги кривої:

1)  $y = \ln \frac{5}{2x}, \sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{8}.$

2)  $\rho = 3e^{\frac{5\varphi}{12}}, -\frac{\pi}{2} \leq \varphi < \frac{\pi}{2}.$

14. Знайти масу кривої  $x = \frac{a}{\sqrt{2}} \cos t,$ 

$y = \frac{a}{\sqrt{2}} \cos t, z = a \sin t, 0 \leq t \leq 2\pi$  з

густиною  $\mu = \sqrt{2y^2 + z^2}.$

15. Знайти роботу сили  $\mathbf{F} = (x+y)\mathbf{i} + 2x\mathbf{j}$  при переміщенні вздовж кола  $x^2 + y^2 = 4$  ( $y \geq 0$ ) від точки  $M(2,0)$  до точки  $N(-2,0).$ 

16. Знайти функцію за її диференціалом:

$du = (x\sqrt{y} + \cos x) dx +$

$+ \left( \frac{x^2}{4\sqrt{y}} + \ln \frac{y+1}{5} \right) dy.$

17. Знайти циркуляцію векторного поля (безпосередньо та за теоремою Стокса):

1)  $\mathbf{a} = (x, yz, -x),$

$\Gamma : x^2 + y^2 = 1 \cap x + y + z = 1.$

2)  $\mathbf{a} = (x^2, y, -z), 0 \leq t \leq 2\pi,$

$\Gamma : \left\{ x = \cos t, y = \frac{\sin t}{\sqrt{2}}, z = \frac{\cos t}{\sqrt{2}}. \right.$

18.  $S : z^2 = x^2 + 4y^2 - 4,$   $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \Big|_M = ?$

$u = \frac{1}{4}x^2y - \sqrt{x^2 + 5z^2},$

$\angle(\mathbf{n}, Oz) \leq 90^\circ, M\left(-2, \frac{1}{2}, 1\right)$

19. Знайти кут між градієнтами скалярних полів  $v = \frac{3}{x} + \frac{4}{y} - \frac{1}{\sqrt{6}z}$  і  $u = \frac{z}{x^3y^2}$ 

у точці  $M\left(1, 2, \frac{1}{\sqrt{6}}\right).$

20. Знайти величину і напрям найбільшої зміни функції  $u(M) = xyz^2$  у точці  $M_0(3, 0, 1)$ .

21. Знайти найбільшу густину циркуляції векторного поля  $\mathbf{a} = (xz, z, yz)$  у точці  $M_0(3, 0, 1)$ .

22. Знайти потік векторного поля крізь частину поверхні  $S$  (нормаль зовнішня):

$$1) \mathbf{a} = (x, y, z^3), S : \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ (0 < z < 1). \end{cases}$$

$$2) \mathbf{a} = (x, 3y, 2z), \begin{cases} S : x + y + z = 1, \\ (x, y, z > 0). \end{cases}$$

$$3) \mathbf{a} = (x^2, y, z), S : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ (z > 0). \end{cases}$$

23. Знайти потік векторного поля  $\mathbf{a}$  крізь замкнену поверхню  $S$  (нормаль зовнішня):

$$1) \mathbf{a} = (\cos z + 3x, x - 2y, 3z + y^2),$$

$$S : z^2 = 36(x^2 + y^2), z = 6.$$

$$2) \mathbf{a} = (3x, 0, -z), S : z = 6 - x^2 - y^2,$$

$$z^2 = x^2 + y^2 \quad (z \geq 0).$$

24. Знайти масу частини поверхні  $\Omega$ , обмеженої  $S$ , з густиною  $\mu = \mu_0$ :

$$\Omega : x^2 + y^2 = R^2, S : \{x^2 + z^2 = R^2\}.$$

Зінтегрувати диференціальне рівняння або розв'язати задачу Коші (25 – 34):

$$25. \sqrt{3 + y^2} dx - y dy = x^2 y dy.$$

$$26.1) (x - y) dx + (x + y) dy = 0.$$

$$2) xy' = \sqrt{x^2 + y^2} + y;$$

$$3) y' = \frac{2y - 2}{x + y - 2}.$$

$$27.1) y' + y \operatorname{tg} x = \cos^2 x, y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}.$$

$$2) 2(4y^2 + 4y - x)y' = 1, y(0) = 0.$$

$$28. y' + 4x^3 y = 4(x^3 + 1)e^{-4x} y^2,$$

$$y(0) = 1.$$

$$29. \left(2x - 1 - \frac{y}{x^2}\right) dx - \left(2y - \frac{1}{x}\right) dy = 0.$$

$$30.1) y''' = \frac{6}{x^3}, y(1) = 0,$$

$$y'(1) = 5, y''(1) = 1.$$

$$2) y'' + y' \operatorname{tg} x = \sin 2x.$$

$$3) y'' + 2 \sin y \cos^3 y = 0,$$

$$y(0) = 0, y'(0) = 1.$$

$$31.1) y'' - 5y' + 6y = 0.$$

$$2) y'' + 3y' = 0.$$

$$3) y'' + 2y' + 5y = 0.$$

$$32. y''' - 4y' = 0,$$

$$y(0) = 0, y'(0) = 2, y''(0) = 4.$$

$$33.1) y^{\text{IV}} - 3y''' + 3y'' - y' = 2x.$$

$$2) y''' - 2y'' + y' = (2x + 5)e^{2x}.$$

$$3) y'' + y = 2 \cos 7x + 3 \sin 7x.$$

$$4) y'' - 3y' = 2 \operatorname{ch} 3x.$$

$$5) y'' - 6y' + 25y = 9 \sin 4x -$$

$$- 24 \cos 4x, y(0) = 2, y'(0) = -2.$$

$$34.1) y''' + y' = \frac{\sin x}{\cos^2 x}.$$

$$2) y'' - 6y' + 8y = \frac{4}{1 + e^{-2x}},$$

$$y(0) = 1 + 2 \ln 2, y'(0) = 6 \ln 2.$$

35. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

$$1) \begin{cases} x' = -x - 3y, \\ y' = -x. \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x' = 2x + 9y - 12e^{-t}, \\ y' = x + 2y - 4e^{-t}. \end{cases}$$

**Варіант 5**

1.  $u = \frac{x}{\sqrt{y^2 + z^2}}; du|_{M_0(1,0,1)} = ?$

2.  $z = \arcsin xy, x = u \cos v, y = u^2 v^{-1};$

$z'_u, z'_v = ?$

3. Скласти рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні в точці  $M_0(2, 1, -1)$  :

$2x^2 - y^2 + z^2 - 4z + y - 13 = 0.$

4. Дослідити функцію на екстремум:

$z = x^3 + y^3 - 6xy - 39x + 18y.$

5. Знайти найбільше та найменше значення функції  $z = x^2 + y^2 - 2x - 2y$  в області  $\bar{D} : x - y + 1 = 0, x = 3, y = 0.$

6. Змінити порядок інтегрування:

$$\int_{-\sqrt{2}}^{-1} dy \int_{-\sqrt{2-y^2}}^0 f dx + \int_{-1}^0 dy \int_y^0 f dx.$$

7. Обчислити:

1)  $\iint_{D: y=\frac{\pi}{2}, y=\pi, x=1, x=2} y \sin xy dx dy.$

2)  $\int_{-2}^2 dx \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} \sqrt{4-x^2-y^2} dy.$

3)  $\iiint_{V: x^2+y^2+z^2=8, x^2=y^2+z^2, x \geq 0} x dx dy dz.$

8. Знайти площі фігур, обмежених лініями:

1)  $y = \frac{3}{x}, y = 8e^x, y = 3, y = 8.$

2)  $y^2 - 8y + x^2 = 0, y^2 - 10y + x^2 = 0,$   
 $y = \frac{x}{\sqrt{3}}, y = \sqrt{3}x.$

9. Знайти масу пластинки  $D$  з густиною

$\mu = \frac{8y}{x^3}, D : 1 \leq \frac{x^2}{4} + y^2 \leq 4, 0 \leq y \leq \frac{x}{2}.$

10. Знайти об'єми тіл, обмежених поверхнями:

1)  $x = 20\sqrt{2y}, x = 5\sqrt{2y}, z = 0, z + y = \frac{1}{2}.$

2)  $3z = \sqrt{16 - 9x^2 - 9y^2}, 2z = x^2 + y^2.$

3)  $z = 4 - 14(x^2 + y^2), z = 4 - 28x.$

11. Знайти масу тіла  $V$  з густиною  $\mu$  :

$V : x^2 + y^2 + z^2 = 1, x^2 + y^2 = 4z^2,$

$x, y \geq 0 (z \geq 0); \mu = 20z.$

12. Знайти координати центра мас однорідного тіла, обмеженого поверхнями:

$z = 5(x^2 + y^2)x^2 + y^2 = 2, z = 0.$

13. Знайти довжину дуги кривої:

1)  $y = -\ln \cos x, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{6}.$

2)  $\rho = 5e^{\frac{12\varphi}{5}}, -\frac{\pi}{2} \leq \varphi < \frac{\pi}{2}.$

14. Знайти масу кривої  $x = \frac{1}{2} \cos t,$

$y = \frac{1}{2} \cos t, z = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin t, 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$  з

густиною  $\mu = xyz.$

15. Знайти роботу сили  $\mathbf{F} = x^3 \mathbf{i} - y^3 \mathbf{j}$  при переміщенні вздовж кола  $x^2 + y^2 = 4 (x, y \geq 0)$  від точки  $M(2, 0)$  до точки  $N(0, 2).$

16. Знайти функцію за її диференціалом:

$du = (x^3 y^4 + e^x (6x + 1)) dx + (y^3 x^4 + y \sqrt{y^2 + 2}) dy.$

17. Знайти циркуляцію векторного поля (безпосередньо та за теоремою Стокса):

1)  $\mathbf{a} = (x - y, x, -z),$

$\Gamma : x^2 + y^2 = 1 \cap z = 5.$

2)  $\mathbf{a} = (y - z, z - x, x - y), 0 \leq t \leq 2\pi,$

$\Gamma : \{x = 4 \cos t, y = 4 \sin t, z = 1 - \cos t.\}$

18.  $S : x^2 - y^2 - 3z + 12 = 0, \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}|_M = ?$   
 $\angle(\mathbf{n}, Oz) \leq 90^\circ, M(2, 2, 4)$

19. Знайти кут між градієнтами скалярних полів  $v = \frac{x^3}{2} + 6y^3 + 3\sqrt{6}z^3$  і  $u = \frac{x^2}{yz^2}$  у

точці  $M\left(\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$

20. Знайти величину і напрям найбільшої зміни функції  $u(M) = x^2 y^2 z$  у точці  $M_0(-1, 0, 3)$ .

21. Знайти найбільшу густину циркуляції векторного поля  $\mathbf{a} = (xy, xyz, -x)$  у точці  $M_0(-1, 0, 3)$ .

22. Знайти потік векторного поля крізь частину поверхні  $S$  (нормаль зовнішня):

$$1) \mathbf{a} = (x, y, xyz), S : \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ (0 < z < 5). \end{cases}$$

$$2) \mathbf{a} = (2x, 3y, 0), S : \begin{cases} x + y + z = 1, \\ (x, y, z > 0). \end{cases}$$

$$3) \mathbf{a} = (z + y, y, -x), S : \begin{cases} x^2 + z^2 = 2y, \\ (0 \leq y < 2). \end{cases}$$

23. Знайти потік векторного поля  $\mathbf{a}$  крізь замкнену поверхню  $S$  (нормаль зовнішня):

$$1) \mathbf{a} = (e^{-z} - x, xz + 3y, z + x^2),$$

$$S : 2x + y + z = 2, x, y, z = 0.$$

$$2) \mathbf{a} = (xz, z, y), S : x^2 + y^2 = 1 - z, z = 0.$$

24. Знайти масу частини поверхні  $\Omega$ , обмеженої  $S$ , з густиною  $\mu = x^2 + y^2$ :  $\Omega : x^2 + y^2 + z^2 = R^2, S : \{z = 0\}$ .

Зінтегрувати диференціальне рівняння або розв'язати задачу Коші (25 – 34):

$$25. (1 + e^x)ydy - e^y dx = 0.$$

$$26.1) (y^2 - 2xy)dx + x^2 dy = 0.$$

$$2) 2y' = \frac{y^2}{x^2} + 6\frac{y}{x} + 3.$$

$$3) y' = \frac{x + y - 2}{3x - y - 2}.$$

$$27.1) y' - \frac{y}{x+2} = x^2 + 2x, y(-1) = \frac{3}{2}.$$

$$2) (\cos 2y \cos^2 y - x)y' = \sin y \cos y,$$

$$y\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{\pi}{3}.$$

$$28. xy' - y = -y^2(\ln x + 2) \ln x, y(1) = 1.$$

$$29. (y^2 + y \sec^2 x) dx + (2xy + \operatorname{tg} x) dy = 0.$$

$$30.1) y'' = 4 \cos 2x, y(0) = 1, y'(0) = 3.$$

$$2) y'' x \ln x = y'.$$

$$3) y'' \operatorname{tg} y = 2y'^2, y(1) = \frac{\pi}{2}, y'(1) = 2.$$

$$31.1) y'' - 2y' + 10y = 0.$$

$$2) y'' + y' - 2y = 0.$$

$$3) y'' - 2y' = 0.$$

$$32. y''' + y' = 0,$$

$$y(0) = 0, y'(0) = y''(0) = 1.$$

$$33.1) y^{IV} - y''' = 5(x + 2)^2.$$

$$2) y''' - 3y'' + 4y = (18x - 21)e^{-x}.$$

$$3) y'' + 2y' + 5y = -2 \sin 2x.$$

$$4) y'' + 4y = -2 \sin 2x + 8 \cos 2x + e^{2x}.$$

$$5) y'' - 14y + 53y = 53x^3 - 42x^2 + 59x - 14, y(0) = 0, y'(0) = 7.$$

$$34.1) y'' + 9y = \frac{1}{\sin 3x}.$$

$$2) y'' - 9y' + 18y = \frac{9e^{3x}}{1 + e^{-3x}},$$

$$y(0) = y'(0) = 0.$$

35. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

$$1) \begin{cases} x' = x - y, \\ y' = -4x + 4y. \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x' = x + 12y - 10e^{3t}, \\ y' = x + 5y - 3e^{3t}. \end{cases}$$

**Варіант 6**

1.  $u = \ln \cos(x^2 y^2 + z); du|_{M_0(0,0,\frac{\pi}{4})} = ?$

2.  $z = \operatorname{tg} x^2 y, x = u \operatorname{tg} v, y = v \operatorname{ctg} u;$

$z'_u, z'_v = ?$

3. Скласти рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні в точці  $M_0(2, 1, -1)$ :

$x^2 + y^2 + z^2 - 6y + 4z + 4 = 0.$

4. Дослідити функцію на екстремум:

$z = 2x^3 + 2y^3 - 6xy + 5.$

5. Знайти найбільше та найменше значення функції  $z = x^2 + y^2 - 2x - 2y$  в області  $\bar{D} : x = 0, y = 0, x + y - 1 = 0.$ 

6. Змінити порядок інтегрування:

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} dy \int_0^{\arcsin y} f dx + \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 dy \int_0^{\arccos y} f dx.$$

7. Обчислити:

1) 
$$\iint_{D: x=0, y=\sqrt{\frac{\pi}{2}}, y=\frac{x}{2}} y^2 \cos \frac{xy}{2} dx dy.$$

2) 
$$\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dx \int_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}} \frac{xy}{x^2 + y^2} dy.$$

3) 
$$\iiint_{V: 4 \leq x^2 + y^2 + z^2 = 16, y \leq \sqrt{3}x, z \geq 0} y dx dy dz.$$

8. Знайти площі фігур, обмежених лініями:

1)  $y = \frac{\sqrt{x}}{2}, y = \frac{1}{2x}, x = 16.$

2)  $x^2 - 4x + y^2 = 0, x^2 - 8x + y^2 = 0, y = 0, y = x.$

9. Знайти масу пластинки  $D$  з густиною

$\mu = 7xy^6, D : \frac{x^2}{9} + y^2 \leq 1, x \geq 0.$

10. Знайти об'єми тіл, обмежених поверхнями:

1)  $y = \frac{5\sqrt{y}}{2}, x = \frac{5y}{6}, z = 0, z = \frac{5}{6}(3 + \sqrt{y}).$

2)  $z = 3\sqrt{x^2 + y^2}, z = 10 - x^2 - y^2.$

3)  $z = 28((x+1)^2 + y^2) + 3, z = 56x + 59.$

11. Знайти масу тіла  $V$  з густиною  $\mu$ :

$V : 36(x^2 + y^2) = z^2, x^2 + y^2 = 1,$

$x, z \geq 0; \mu = \frac{5(x^2 + y^2)}{6}.$

12. Знайти координати центра мас однорідного тіла, обмеженого поверхнями:

$x = 6\sqrt{y^2 + z^2}, y^2 + z^2 = 9, x = 0.$

13. Знайти довжину дуги кривої:

1)  $y = e^x + 6, \ln \sqrt{8} \leq x \leq \ln \sqrt{15}.$

2)  $\rho = 3e^{\frac{3\varphi}{4}}, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}.$

14. Знайти масу кривої  $x = a \cos t, y = a \sin t, z = bt, 0 \leq t \leq 2\pi$  з густиною  $\mu = x^2 + y^2 + z^2.$ 15. Знайти роботу сили  $\mathbf{F} = (x+y)\mathbf{i} + (x-y)\mathbf{j}$  при переміщенні вздовж параболи  $y = x^2$  від точки  $M(-1, 1)$  до точки  $N(1, 1).$ 

16. Знайти функцію за її диференціалом:

$$du = \left( x \cos y + \frac{x}{x^2 + 1} \right) dx - \left( \frac{1}{2} x^2 \sin y + \arctg \frac{x+1}{3} \right) dy.$$

17. Знайти циркуляцію векторного поля (безпосередньо та за теоремою Стокса):

1)  $\mathbf{a} = (y, -x, z^2),$

$\Gamma : z = 3(x^2 + y^2) + 1 \cap z = 4.$

2)  $\mathbf{a} = (2y, -3x, x), 0 \leq t \leq 2\pi, \Gamma :$

$\{x = \cos t, y = \sin t, z = 1 - \cos t - \sin t.$

18. 
$$S : x^2 + y^2 = 4z, \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \Big|_M = ?$$
$$\left[ \begin{array}{l} u = x\sqrt{y} - yz^2, \\ \angle(\mathbf{n}, Oz) \leq 90^\circ, M(2, 1, -1) \end{array} \right]$$

19. Знайти кут між градієнтами скалярних полів  $v = 3\sqrt{2}x^2 - \frac{y^2}{\sqrt{2}} - 3\sqrt{2}z^2$  і

$u = \frac{z^2}{xy^2}$  у точці  $M\left(\frac{1}{3}, 2, \sqrt{\frac{2}{3}}\right).$

20. Знайти величину і напрям найбільшої зміни функції  $u(M) = x^2 y z^2$  у точці  $M_0(2, 1, -1)$ .

21. Знайти найбільшу густину циркуляції векторного поля  $\mathbf{a} = (yz, -z^2, xyz)$  у точці  $M_0(2, 1, -1)$ .

22. Знайти потік векторного поля крізь частину поверхні  $S$  (нормаль зовнішня):

$$1) \mathbf{a} = (x - y, x + y, z^2), S : \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ (0 < z < 2). \end{cases}$$

$$2) \mathbf{a} = (x, y, z), S : \begin{cases} \frac{x}{2} + y + z = 1, \\ (x, y, z > 0). \end{cases}$$

$$3) \mathbf{a} = (x, -x - 2y, y), S : \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ x + 2y + 3z = 6 \quad (z > 0). \end{cases}$$

23. Знайти потік векторного поля  $\mathbf{a}$  крізь замкнену поверхню  $S$  (нормаль зовнішня):

$$1) \mathbf{a} = (6x - \cos y, -e^x - z, -2y - 3z),$$

$$S : \begin{cases} x^2 + y^2 = z^2, \\ z = 1, \\ z = 2. \end{cases}$$

$$2) \mathbf{a} = (3xz, -2x, y), S : \begin{cases} x + y + z = 2, \\ x = 1, \\ x, y, z = 0. \end{cases}$$

24. Знайти масу частини поверхні  $\Omega$ , обмеженої  $S$ , з густиною  $\mu = \mu_0$ :

$$\Omega : x^2 + y^2 = R^2,$$

$$S : \{z \pm x = 0, x, y > 0\}.$$

Зінтегрувати диференціальне рівняння або розв'язати задачу Коші (25 – 34):

$$25. x\sqrt{3 + y^2} dx + y\sqrt{2 + x^2} dy = 0.$$

$$26.1) y^2 + x^2 y' = x y y'.$$

$$2) x y' = \frac{3y^3 + 4yx^2}{2y^2 + 2x^2}.$$

$$3) y' = \frac{2x + y - 3}{x - 1}.$$

$$27.1) y' - \frac{y}{x+1} = e^x(x+1), y(0) = 1.$$

$$2) (x \cos^2 y - y^2) y' = y \cos^2 y,$$

$$y(\pi) = \frac{\pi}{4}.$$

$$28.2(y' + xy) = (1 + x)e^{-x}y^2, y(0) = 2.$$

$$29. \frac{2x(1 - e^x)}{(1 + x^2)^2} dx + \frac{e^y dy}{1 + x^2} = 0.$$

$$30.1) y'' = \frac{1}{1 + x^2}, y(0) = y'(0) = 0.$$

$$2) x y'' - y' = x^2 e^x.$$

$$3) y'' = 98y^3, y(1) = 1, y'(1) = 7.$$

$$31.1) y'' - 4y = 0.$$

$$2) y'' + 2y' + 17y = 0.$$

$$3) y'' - y' - 12y = 0.$$

$$32. y''' - y' = 0, y(0) = 0,$$

$$y'(0) = 2, y''(0) = 4.$$

$$33.1) y^{IV} - 2y''' + y'' = 2x(1 - x).$$

$$2) y''' - 5y'' + 8y' - 4y = (2x - 5)e^x.$$

$$3) y'' - 4y' + 8y = e^x(5 \sin x - 3 \cos x).$$

$$4) y''' - y' = 10 \sin x + 6 \cos x + 4e^x.$$

$$5) y'' + 16y = e^x(\cos 4x - 8 \sin 4x), \\ y(0) = 0, y'(0) = 5.$$

$$34.1) y'' + 2y' + y = x e^x + \frac{1}{x e^x}.$$

$$2) y'' + \pi^2 y = \frac{\pi^2}{\sin \pi x}, y\left(\frac{1}{2}\right) = 1,$$

$$y'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi^2}{2}.$$

35. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

$$1) \begin{cases} x' = -2x + y, \\ y' = -3x + 2y. \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x' = 2x - 3y + 5e^{4t}, \\ y' = x + 6y - 3e^{4t}. \end{cases}$$

**Варіант 7**

1.  $u = \sqrt[3]{x + y^2 + z^3}; du|_{M_0(3,4,2)} = ?$

2.  $z = x^2 2^y, x = u - \sin v, y = u + \cos v;$   
 $z'_u, z'_v = ?$

3. Скласти рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні в точці  $M_0(1, 2, -3)$ :

$$x^2 + z^2 - 5yz + 3y - 46 = 0.$$

4. Дослідити функцію на екстремум:

$$z = 3x^3 + 3y^3 - 9xy + 10.$$

5. Знайти найбільше та найменше значення функції  $z = 2x^3 - xy^2 + y^2$  в області  $\bar{D}: x = 0, x = 1, y = 0, y = 6$ .

6. Змінити порядок інтегрування:

$$\int_{-2}^{-1} dy \int_0^{\sqrt{2+y}} f dx + \int_{-1}^0 dy \int_0^{\sqrt{-y}} f dx.$$

7. Обчислити:

1)  $\iint_D 4ye^{xy} dx dy.$

$$D: y = \ln 3, y = \ln 4, x = \frac{1}{2}, x = 1$$

2)  $\int_{-R}^0 dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \cos \sqrt{x^2 + y^2} dy.$

3)  $\iiint_V y dx dy dz.$

$$V: \begin{cases} z = \sqrt{8-x^2-y^2}, \\ z = \sqrt{x^2+y^2}, y \geq 0 \end{cases}$$

8. Знайти площі фігур, обмежених лініями:

1)  $x = 5 - y^2, x = -4y.$

2)  $y^2 - 4y + x^2 = 0, y^2 - 6y + x^2 = 0,$   
 $x = 0, y = x.$

9. Знайти масу пластинки  $D$  з густиною

$$\mu = 4y^4, D: \frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1.$$

10. Знайти об'єми тіл, обмежених поверхнями:

1)  $x^2 + y^2 = 2, x = \sqrt{y}, x, z = 0, z = 30y.$

2)  $z = \sqrt{25 - x^2 - y^2}, z = \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{99}}.$

3)  $z = 32(x^2 + y^2) + 3, z = 3 - 64x.$

11. Знайти масу тіла  $V$  з густиною  $\mu$ :

$$V: x^2 + y^2 + z^2 = 16, x^2 + y^2 \leq 4;$$

$$\mu = 2|z|.$$

12. Знайти координати центра мас однорідного тіла, обмеженого поверхнями:

$$z = 8(x^2 + y^2), z = 32.$$

13. Знайти довжину дуги кривої:

1)  $y = 2 + \arcsin \sqrt{x} + \sqrt{x - x^2}, x \in [\frac{1}{4}; 1].$

2)  $\rho = 4e^{\frac{4\varphi}{3}}, 0 \leq \varphi < \frac{\pi}{3}.$

14. Знайти масу кривої  $x = t \cos t, y = t \sin t, z = t, 0 \leq t \leq 2\pi$  з густиною

$$\mu = 2z - \sqrt{x^2 + y^2}.$$

15. Знайти роботу сили  $\mathbf{F} = x^2 y \mathbf{i} - y \mathbf{j}$  при переміщенні вздовж відрізка  $MN$  від точки  $M(-1, 0)$  до точки  $N(0, 1)$ .

16. Знайти функцію за її диференціалом:

$$du = \left( x \operatorname{arctg} y + \ln \frac{x+1}{2} \right) dx + \left( \frac{x^2}{2(y^2+1)} + \sin 3y \right) dy.$$

17. Знайти циркуляцію векторного поля (безпосередньо та за теоремою Стокса):

1)  $\mathbf{a} = (yz, 2xz, y^2), (z > 0)$

$$\Gamma: x^2 + y^2 + z^2 = 25 \cap x^2 + y^2 = 16.$$

2)  $\mathbf{a} = (2z, -x, y), 0 \leq t \leq 2\pi,$

$$\Gamma: \{x = 2 \cos t, y = 2 \sin t, z = 1\}.$$

18.  $S: 7x^2 - 4y^2 + 4z^2 = 7, \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}|_M = ?$   
 $\angle(\mathbf{n}, Oz) \leq 90^\circ, M(1, 1, 1)$

19. Знайти кут між градієнтами скалярних полів  $v = 6\sqrt{6}x^3 - 6\sqrt{6}y^3 + 2z^3$  і

$$u = \frac{xz^2}{y} \text{ у точці } M\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, 1\right).$$



20. Знайти величину і напрям найбільшої зміни функції  $u(M) = xy^2z^2$  у точці  $M_0(-2, 1, 1)$ .

21. Знайти найбільшу густину циркуляції векторного поля  $\mathbf{a} = (y^2, -xy, z^2)$  у точці  $M_0(-2, 1, 1)$ .

22. Знайти потік векторного поля крізь частину поверхні  $S$  (нормаль зовнішня):

$$1) \mathbf{a} = (x + y, y - x, xyz), S : \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ (0 < z < 4). \end{cases}$$

$$2) \mathbf{a} = (x, 2y, z), S : \begin{cases} \frac{x}{2} + y + z = 1, \\ (x, y, z > 0). \end{cases}$$

$$3) \mathbf{a} = (x^2, y^2, z^2), S : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 2, \\ (z > 0). \end{cases}$$

23. Знайти потік векторного поля  $\mathbf{a}$  крізь замкнену поверхню  $S$  (нормаль зовнішня):

$$1) \mathbf{a} = \left( 4x - 2y^2, \ln z - 4y, x + \frac{3z}{4} \right),$$

$$S : x^2 + y^2 + z^2 = 2x + 3.$$

$$2) \mathbf{a} = (0, 2z - 2y, x - z), S : x^2 + y^2 = 1, \\ z = x^2 + 3y^2 + 1, z = 0.$$

24. Знайти масу частини поверхні  $\Omega$ , обмеженої  $S$ , з густиною  $\mu = z$ :

$$\Omega : x^2 + y^2 + z^2 = R^2,$$

$$S : \{a \leq z \leq a\sqrt{2}\}.$$

Зінтегрувати диференціальне рівняння або розв'язати задачу Коші (25 – 34):

$$25. (e^{2x} + 5)dy + ye^{2x}dx = 0.$$

$$26.1) xy' - y = x \operatorname{tg} \frac{y}{x}.$$

$$2) y' = \frac{x + 2y}{2x - y}.$$

$$3) y' = \frac{x + 7y - 8}{9x - y - 8}.$$

$$27.1) y' - \frac{y}{x} = x \sin x, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

$$2) e^{y^2} (dx - 2xydy) = ydy, y(0) = 0.$$

$$28. 3(xy' + y) = y^2 \ln x, y(1) = 3.$$

$$29. \frac{2x}{y^3} dx + \frac{y^2 - 3x^2}{y^4} dy = 0.$$

$$30.1) y''' = \frac{2}{x}, y(1) = \frac{1}{2}, y'(1) = y''(1) = 0.$$

$$2) y''' \operatorname{ctg} 2x + 2y'' = 0.$$

$$3) y''y^3 + 49 = 0, y(3) = -7,$$

$$y'(3) = -1.$$

$$31.1) y'' + y' - 6y = 0.$$

$$2) y'' + 9y' = 0.$$

$$3) y'' - 4y' + 20y = 0.$$

$$32. y^{IV} + 2y''' - 2y' - y = 0,$$

$$y(0) = y'(0) = y''(0) = 0, y'''(0) = 8.$$

$$33.1) y^{IV} + 2y''' + y'' = x^2 + x - 1.$$

$$2) y''' - 4y'' + 4y' = (x - 1)e^x.$$

$$3) y'' + 2y' = e^x (\sin x + \cos x).$$

$$4) y'' - y' = 16 \operatorname{ch} 4x.$$

$$5) y'' - 4y' + 20y = 16xe^{2x},$$

$$y(0) = 1, y'(0) = 2.$$

$$34.1) y'' + 2y' + 2y = \frac{1}{e^x \cos x}.$$

$$2) y'' + \frac{1}{\pi^2} y = \frac{1}{\pi^2 \cos \frac{x}{\pi}}, y(0) = 2,$$

$$y'(0) = 0.$$

35. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

$$1) \begin{cases} x' = 6x - y, \\ y' = 3x + 2y. \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x' = 3x + 3y + 5e^{5t}, \\ y' = x + 5y - e^{5t}. \end{cases}$$

### Варіант 8

1.  $u = \operatorname{arctg}(xy^2 + z); du|_{M_0(2,1,0)} = ?$

2.  $z = x^2y^2, x = ue^v, y = ve^u; z'_u, z'_v = ?$

3. Скласти рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні в точці  $M_0(0, 2, 2)$  :

$$x^2 + y^2 - xz - yz = 0.$$

4. Дослідити функцію на екстремум:

$$z = x^2 + xy + y^2 + x - y.$$

5. Знайти найбільше та найменше значення функції  $z = 3x + 6y - x^2 - xy - y^2$  в області  $\bar{D} : x = 0, x = 1, y = 0, y = 1$ .

6. Змінити порядок інтегрування:

$$\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^0 f dx + \int_1^e dy \int_{-1}^{-\ln y} f dx.$$

7. Обчислити:

1)  $\iint_D 4y^2 \sin xy dx dy.$

$$D: x=0, y=\sqrt{\frac{\pi}{2}}, y=x$$

$$R \quad \sqrt{R^2 - x^2}$$

2)  $\int_{-R}^R dx \int_0^{\sqrt{R^2 - x^2}} \operatorname{tg}(x^2 + y^2) dy.$

3)  $\iiint_V \frac{y^2 dx dy dz}{x^2 + y^2 + z^2}.$

$$V: \begin{cases} 4 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 36, \\ x, z \geq 0, y \geq \sqrt{3}x \end{cases}$$

8. Знайти площі фігур, обмежених лініями:

1)  $x^2 + y^2 = 12, -\sqrt{6}y = x^2 (y \leq 0).$

2)  $x^2 - 2x + y^2 = 0, x^2 - 10x + y^2 = 0,$

$$y = 0, y = \sqrt{3}x.$$

9. Знайти масу пластинки  $D$  з густиною

$$\mu = \frac{x}{y}, D: 1 \leq \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 4, x \geq 0, y \geq \frac{3x}{2}.$$

10. Знайти об'єми тіл, обмежених поверхнями:

1)  $x + y = 2, x = \sqrt{y}, z = 0, 5z = 12x.$

2)  $z = \sqrt{100 - x^2 - y^2}, z = 6,$

$$x^2 + y^2 \leq 51.$$

3)  $z = 4 - 6((x - 1)^2 + y^2), z = 12x - 8.$

11. Знайти масу тіла  $V$  з густиною  $\mu$  :

$$V: x^2 + y^2 = 4, x^2 + y^2 = 8z,$$

$$x, y \geq 0, z = 0; \mu = 5x.$$

12. Знайти координати центра мас однорідного тіла, обмеженого поверхнями:

$$y = 3\sqrt{x^2 + z^2}, y = 9.$$

13. Знайти довжину дуги кривої:

1)  $y = \ln(x^2 - 1), 2 \leq x \leq 3.$

2)  $\rho = \sqrt{2}e^\varphi, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}.$

14. Знайти масу кривої  $x = t, y = \frac{3}{\sqrt{2}}t^2,$

$$z = t^3, 0 \leq t \leq 1$$
 з густиною  $\mu = x + z$ .

15. Знайти роботу сили  $\mathbf{F} = (2xy - y)\mathbf{i} + (x^2 + x)\mathbf{j}$  при переміщенні вздовж кола  $x^2 + y^2 = 9 (y \geq 0)$  від точки  $M(3, 0)$

до точки  $N(-3, 0)$ .

16. Знайти функцію за її диференціалом:

$$du = (x \sin y + e^x(8x + 4)) dx +$$

$$+ \left( \frac{1}{2} x^2 \cos y + \operatorname{tg}(y + 1) \right) dy.$$

17. Знайти циркуляцію векторного поля (безпосередньо та за теоремою Стокса):

1)  $\mathbf{a} = (xy, yz, xz),$

$$\Gamma: x^2 + y^2 = 9 \cap x + y + z = 1.$$

2)  $\mathbf{a} = (y, -x, z), 0 \leq t \leq 2\pi,$

$$\Gamma: \{x = \cos t, y = \sin t, z = 3\}.$$

18.  $S: x^2 + y^2 - 2z = 10, \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \Big|_M = ?$

$$\left[ \begin{array}{l} u = u = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + xz, \\ \angle(\mathbf{n}, Oz) \leq 90^\circ, M(2, 2, -1) \end{array} \right]$$

19. Знайти кут між градієнтами скалярних полів  $v = \frac{\sqrt{6}}{2x} - \frac{\sqrt{6}}{2y} + \frac{2}{3z}$  і  $u = \frac{yz^2}{x}$

$$\text{у точці } M \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right).$$

20. Знайти величину і напрям найбільшої зміни функції  $u(M) = y^2z - x^2$  у точці  $M_0(0, 1, 1)$ .

21. Знайти найбільшу густину циркуляції векторного поля  $\mathbf{a} = (xz, -xyz, x^2z)$  у точці  $M_0(0,1,1)$ .

22. Знайти потік векторного поля крізь частину поверхні  $S$  (нормаль зовнішня):

1)  $\mathbf{a} = (x^3 + xy^2, y^3 + x^2y, z^2)$ ,

$$S : x^2 + y^2 = 1, (0 < z < 3).$$

2)  $\mathbf{a} = (0, y, 3z), S : \begin{cases} \frac{x}{2} + y + z = 1, \\ (x, y, z > 0). \end{cases}$

3)  $\mathbf{a} = (1 + \sqrt{z}, 4y - \sqrt{x}, xy)$ ,

$$S : z^2 = 4(x^2 + y^2), (0 \leq z < 3).$$

23. Знайти потік векторного поля  $\mathbf{a}$  крізь замкнену поверхню  $S$  (нормаль зовнішня):

1)  $\mathbf{a} = (x, z, -y), S : z = 2(x^2 + y^2)$ ,

$$z = 4 - 2(x^2 + y^2).$$

2)  $\mathbf{a} = (x^3, y^3, z^3), S : x^2 + y^2 + z^2 = 1$ .

24. Знайти масу частини поверхні  $\Omega$ , обмеженої  $S$ , з густиною  $\mu = \mu_0$ :

$$\Omega : x^2 + y^2 = \pm ax,$$

$$S : \{x^2 + y^2 + z^2 = a^2\}.$$

Зінтегрувати диференціальне рівняння або розв'язати задачу Коші (25 – 34):

25.  $(y - y^2)dx + (x + xy^2)xdy = 0$ .

26.1)  $xy' = y - xe^{\frac{y}{x}}$ .

2)  $xy' = 2\sqrt{x^2 + y^2} + y$ .

3)  $y' = \frac{x + 3y + 4}{3x - 6}$ .

27.1)  $y' + \frac{y}{x} = \sin x, y(\pi) = \frac{1}{\pi}$ .

2)  $(104y^3 - x)y' = 4y, y(8) = 1$ .

28.  $2y' + y \cos x = \frac{\cos x(1 + \sin x)}{y}$ ,

$$y(0) = 1.$$

29.  $(\sin 2x - 2 \cos(x + y))dx - 2 \cos(x + y)dy = 0$ .

30.1)  $y''' = e^{2x}, y(0) = \frac{9}{8}$ ,

$$y'(0) = \frac{1}{4}, y''(0) = -\frac{1}{2}.$$

2)  $x^3y''' + x^2y'' = 1$ .

3)  $4y''y^3 = 16y^4 - 1$ ,

$$y(0) = \frac{\sqrt{2}}{2}, y'(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

31.1)  $y'' - 49y = 0$ .

2)  $y'' - 4y' + 5y = 0$ .

3)  $y'' + 2y' - 3y = 0$ .

32.  $y''' + y'' - 5y' + 3y = 0$ ,

$$y(0) = 0, y'(0) = 1, y''(0) = -14.$$

33.1)  $y^V - y^{IV} = 2x + 3$ .

2)  $y''' + 2y'' + y' = (18x + 21)e^{2x}$ .

3)  $y'' - 4y' + 4y = e^{2x} \sin 3x$ .

4)  $y'' + 9y = -18 \sin 3x - 18e^{3x}$ .

5)  $y'' - 12y' + 36y = 32 \cos 2x + 24 \sin 2x, y(0) = 2, y'(0) = 4$ .

34.1)  $y'' - 2y' + 2y = \frac{e^x}{\sin^2 x}$ .

2)  $y'' - 3y' = \frac{9e^{-3x}}{3 + e^{-3x}}, y(0) = 4 \ln 4$ ,

$$y'(0) = 3(3 \ln 4 - 1).$$

35. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

1)  $\begin{cases} x' = 2x + y, \\ y' = -6x - 3y. \end{cases}$

2)  $\begin{cases} x' = 5x + 8y + 2e^{-t}, \\ y' = x + 3y + 3e^{-t}. \end{cases}$

### Варіант 9

1.  $u = \arcsin\left(\frac{x^2}{y} - z\right); du|_{M_0(2,5,0)} = ?$

2.  $z = x^2y^2, x = ue^v, y = ve^u; z'_u, z'_v = ?$

3. Скласти рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні в точці  $M_0(1, 1, 1)$ :

$$x^2 + y^2 - z^2 + 2yz + y - 2z - 2 = 0$$

4. Дослідити функцію на екстремум:

$$z = 6x - 6y - 3x^2 - 3y^2.$$

5. Знайти найбільше та найменше значення функції  $z = x^2 - 2y^2 + 4xy - 6x$  в області  $\bar{D}: x = 0, y = 0, x + y - 3 = 0$ .

6. Змінити порядок інтегрування:

$$\int_{-\sqrt{2}}^{-1} dy \int_0^{\sqrt{2-y^2}} f dx + \int_{-1}^0 dy \int_0^y f dx.$$

7. Обчислити:

1)  $\iint_D y \cos xy dx dy.$

$$D: y = \frac{\pi}{2}, y = \pi, x = \frac{1}{2}, x = 1$$

2)  $\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}} dy.$

3)  $\iiint_V \frac{y^2 z dx dy dz}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}}.$

$$V: z = 3x^2 + 3y^2, 0 \leq y \leq \sqrt{3}x, z = 3$$

8. Знайти площі фігур, обмежених лініями:

1)  $y = 2\sqrt{3} - \sqrt{12 - x^2},$

$$y = \sqrt{12 - x^2}, x \geq 0.$$

2)  $y^2 - 6y + x^2 = 0, y^2 - 10y + x^2 = 0,$

$$y = 0, y = x.$$

9. Знайти масу пластинки  $D$  з густиною

$$\mu = \frac{x}{y}, D: 1 \leq \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} \leq 4, x \geq 0, y \geq \frac{x}{2}.$$

10. Знайти об'єми тіл, обмежених поверхнями:

1)  $y = 7\sqrt{2}x, y = 2\sqrt{2}x, z = 0, x + z = \frac{1}{2}.$

2)  $z = \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + y^2}, z = \frac{23}{2} - x^2 - y^2.$

3)  $z = 2 - 4(x^2 + y^2), z = 8x + 2.$

11. Знайти масу тіла  $V$  з густиною  $\mu$ :

$$V: x^2 + y^2 = \frac{4}{25}z^2, x^2 + y^2 = \frac{2}{5}z,$$

$$x, y \geq 0; \mu = 28xz.$$

12. Знайти координати центра мас однорідного тіла, обмеженого поверхнями:

$$9y = x^2 + z^2, x^2 + y^2 = 4, y = 0.$$

13. Знайти довжину дуги кривої:

1)  $y = \sqrt{1 - x^2} + \arccos x, 0 \leq x \leq \frac{8}{9}.$

2)  $\rho = 5e^{\frac{5\varphi}{12}}, 0 \leq \varphi < \frac{\pi}{3}.$

14. Знайти масу кривої  $x = \frac{R}{\sqrt{2}} \cos t,$

$$y = \frac{R}{\sqrt{2}} \cos t, z = R \sin t, 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

з густиною  $\mu = x + y.$

15. Знайти роботу сили  $\mathbf{F} = (x + y)\mathbf{i} + (x - y)\mathbf{j}$  при переміщенні вздовж еліпса

$x^2 + \frac{y^2}{9} = 1 (x, y \geq 0)$  від точки  $M(1, 0)$  до точки  $N(0, 3).$

16. Знайти функцію за її диференціалом:

$$du = (e^y + 2xe^{x^2})dx + (xe^y + \arccos \frac{y}{7})dy.$$

17. Знайти циркуляцію векторного поля (безпосередньо та за теоремою Стокса):

1)  $\mathbf{a} = (y, 1 - x, -z), (z > 0)$

$$\Gamma: x^2 + y^2 + z^2 = 4 \cap x^2 + y^2 = 1.$$

2)  $\mathbf{a} = (x, z^2, y), 0 \leq t \leq 2\pi, \Gamma: \{x = \cos t,$

$$y = 2 \sin t, z = 2 \cos t - 2 \sin t - 1.$$

$$18. S: 4x^2 - y^2 + z^2 = 16, \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \Big|_M = ?$$
$$\angle(\mathbf{n}, Oz) \leq 90^\circ, M(1, -2, 4)$$

19. Знайти кут між градієнтами скалярних полів

$$v = 3\sqrt{2}x^2 - \frac{y^2}{\sqrt{2}} - 3\sqrt{2}z^2 \text{ і}$$

$$u = \frac{xy^2}{z^2} \text{ у точці } M\left(\frac{1}{3}, 2, \sqrt{\frac{2}{3}}\right).$$

20. Знайти величину і напрям найбільшої зміни функції  $u(M) = x^2y - z^2$  у точці  $M_0(0, -2, 1)$ .

21. Знайти найбільшу густину циркуляції векторного поля  $\mathbf{a} = (xy, -y^2z, -xz)$  у точці  $M_0(0, -2, 1)$ .

22. Знайти потік векторного поля крізь частину поверхні  $S$  (нормаль зовнішня):

$$1) \mathbf{a} = (x, y, \sin z), S : \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ (0 < z < 5). \end{cases}$$

$$2) \mathbf{a} = (x, y, z), S : \begin{cases} x + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1, \\ (x, y, z > 0). \end{cases}$$

$$3) \mathbf{a} = (z, -4y, 2x), S : \begin{cases} z = x^2 + y^2, \\ (0 \leq z < 1). \end{cases}$$

23. Знайти потік векторного поля  $\mathbf{a}$  крізь замкнену поверхню  $S$  (нормаль зовнішня):

$$1) \mathbf{a} = (\sqrt{z} - x, x - y, y^2 - z),$$

$$S : 3x - 2y + z = 6, x, y, z = 0.$$

$$2) \mathbf{a} = (zx + y, zy - x, -x^2 - y^2),$$

$$S : x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0.$$

24. Знайти масу частини поверхні  $\Omega$ , обмеженої  $S$ , з густиною  $\mu = z$ :

$$\Omega : x^2 + y^2 = 2z, S : \{z \leq 1\}.$$

Зінтегрувати диференціальне рівняння або розв'язати задачу Коші (25 – 34):

$$25. y' + 2y = y^2.$$

$$26.1) xy' - y = (x + y) \ln \left(1 + \frac{y}{x}\right).$$

$$2) 3y' = \frac{y^2}{x^2} + 8\frac{y}{x} + 4.$$

$$3) y' = \frac{3y + 3}{2x + y - 1}.$$

$$27.1) y' + \frac{y}{2x} = x^2, y(1) = 1.$$

$$2) dx + (xy - y^3)dy = 0, y(-1) = 0.$$

$$28. y' + 4x^3y = 4y^2e^{4x}(1 - x^3),$$

$$y(0) = -1.$$

$$29. \left(xy^2 + \frac{x}{y^2}\right)dx + \left(x^2y - \frac{x^2}{y^3}\right)dy = 0.$$

$$30.1) y''' = \cos^2 x, y(0) = 1,$$

$$y'(0) = -\frac{1}{8}, y''(0) = 0.$$

$$2) y'y'' = -x.$$

$$3) y'' = 1 - y'^2, y(0) = y'(0) = 0.$$

$$31.1) y'' + 7y' = 0.$$

$$2) y'' - 5y' + 4y = 0.$$

$$3) y'' + 16y = 0.$$

$$32. y''' + y'' = 0, y(0) = 0,$$

$$y'(0) = 1, y''(0) = -1.$$

$$33.1) 3y^{IV} + y''' = 6x - 1.$$

$$2) y''' + y'' - y' - y = (8x + 4)e^x.$$

$$3) y'' - 3y' + 2y = 3 \cos x + 19 \sin x.$$

$$4) y''' - 4y' =$$

$$= 24e^{2x} - 4 \cos 2x + 8 \sin 2x.$$

$$5) y'' + y = x^3 - 4x^2 +$$

$$+ 7x - 10, y(0) = 2, y'(0) = 3.$$

$$34.1) y'' + 2y' + 2y = e^{-x} \operatorname{ctg} x.$$

$$2) y'' + y = 4 \operatorname{ctg} x,$$

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4.$$

35. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

$$1) \begin{cases} x' = y, \\ y' = x. \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x' = 4x + 4y + e^t, \\ y' = x + 4y + 2e^t. \end{cases}$$

### Варіант 10

1.  $u = \sqrt{z} \sin \frac{y}{x}; du|_{M_0(2,0,4)} = ?$

2.  $z = x^2 y^2, x = ue^v, y = ve^u; z'_u, z'_v = ?$

3. Скласти рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні в точці  $M_0(1, 1, 1)$  :

$$x^2 + y^2 - z^2 - 2xz + 2x - z = 0.$$

4. Дослідити функцію на екстремум:

$$z = 4x - 4y - x^2 - y^2.$$

5. Знайти найбільше та найменше значення функції  $z = x^2 + 2xy - 10$  в області  $\bar{D} : y = 0, y = x^2 - 4$ .

6. Змінити порядок інтегрування:

$$\int_{-2}^{-\sqrt{3}} dy \int_{-\sqrt{4-y^2}}^0 f dx + \int_{-\sqrt{3}}^0 dy \int_{\sqrt{4-y^2}}^0 f dx.$$

7. Обчислити:

1)  $\iint_D y^2 \exp\left(-\frac{xy}{8}\right) dx dy.$   
 $D: x=0, y=2, y=\frac{x}{2}$

2)  $\int_{-R}^R dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \sin \sqrt{x^2 + y^2} dy.$

3)  $\iiint_V \frac{x^2 dx dy dz}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}}.$   
 $V: x^2 + y^2 + z^2 = 16, z \geq 0$

8. Знайти площі фігур, обмежених лініями:

1)  $y = \frac{3\sqrt{x}}{2}, y = \frac{3}{2x}, x = 9.$

2)  $y^2 - 2x + x^2 = 0, y^2 - 4x + x^2 = 0,$   
 $\sqrt{3}y = x, y = \sqrt{3}x.$

9. Знайти масу пластинки  $D$  з густиною

$$\mu = x^3 y, D: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1, x, y \geq 0.$$

10. Знайти об'єми тіл, обмежених поверхнями:

1)  $y = \frac{5\sqrt{x}}{3}, y = \frac{5x}{9}, z = 0, z = \frac{5(3 + \sqrt{x})}{9}.$

2)  $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}, 6z = x^2 + y^2.$

3)  $z = 22((x-1)^2 + y^2), z = 44 - 44x.$

11. Знайти масу тіла  $V$  з густиною  $\mu$  :

$$V: x^2 + y^2 + z^2 = 4, x^2 + y^2 = z^2,$$

$$x, y \geq 0 (z \geq 0); \mu = 6z.$$

12. Знайти координати центра мас однорідного тіла, обмеженого поверхнями:

$$3z = \sqrt{x^2 + y^2}, x^2 + y^2 = 4, z = 0.$$

13. Знайти довжину дуги кривої:

1)  $y = \ln(1 - x^2), 0 \leq x \leq \frac{1}{4}.$

2)  $\rho = 12e^{\frac{12\varphi}{5}}, 0 \leq \varphi < \frac{\pi}{3}.$

14. Знайти масу кривої  $x = a \cos t, y = a \sin t, z = bt, 0 \leq t \leq 2\pi$  з густиною  $\mu = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1}.$

15. Знайти роботу сили  $\mathbf{F} = y\mathbf{i} - x\mathbf{j}$  при переміщенні вздовж кола  $x^2 + y^2 = 1 (y \geq 0)$  від точки  $M(1, 0)$  до точки  $N(-1, 0).$

16. Знайти функцію за її диференціалом:

$$du = \left( \sqrt{xy} + \frac{1}{3x+5} \right) dx + \left( \frac{1}{3} \frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{y}} + \arcsin \frac{y}{6} \right) dy.$$

17. Знайти циркуляцію векторного поля (безпосередньо та за теоремою Стокса):

1)  $\mathbf{a} = (y, -x, z^2),$

$$\Gamma: x^2 + y^2 = 1 \cap z = 4.$$

2)  $\mathbf{a} = (3y, -3x, x), 0 \leq t \leq 2\pi, \Gamma:$

$$\{x = \cos t, y = \sin t, z = 1 - \cos t - \sin t.\}$$

$u = \sqrt{x^2 + y^2} - z,$	$\left. \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right _M = ?$
$S: x^2 + y^2 = 24z,$	
$\angle(\mathbf{n}, Oz) \leq 90^\circ, M(3, 4, 1)$	

19. Знайти кут між градієнтами скалярних полів  $v = \frac{3}{x} + \frac{4}{y} - \frac{1}{\sqrt{6}z}$  і  $u = \frac{x^3 y^2}{z}$

у точці  $M\left(1, 2, \frac{1}{\sqrt{6}}\right).$

20. Знайти величину і напрям найбільшої зміни функції  $u(M) = xy + xz$  у точці  $M_0(0, 1, 2)$ .

21. Знайти найбільшу густину циркуляції векторного поля  $\mathbf{a} = (xz, -y, -zy)$  у точці  $M_0(0, 1, 2)$ .

22. Знайти потік векторного поля крізь частину поверхні  $S$  (нормаль зовнішня):

$$1) \mathbf{a} = (x, y, 1), S : \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ (0 < z < 1). \end{cases}$$

$$2) \mathbf{a} = (2x, y, z), S : \begin{cases} x + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1, \\ (x, y, z > 0). \end{cases}$$

$$3) \mathbf{a} = (y^2x, z^2y, x^2z),$$

$$S : x^2 + y^2 + z^2 = 1 \quad (z > 0).$$

23. Знайти потік векторного поля  $\mathbf{a}$  крізь замкнену поверхню  $S$  (нормаль зовнішня):

$$1) \mathbf{a} = (yz + x, x^2 + y, xy^2 + z),$$

$$S : x^2 + y^2 + z^2 = 2z.$$

$$2) \mathbf{a} = (4x, -2y, -z), S : 3x + 2y = 12,$$

$$3x + y = 6, y, z = 0, x + y + z = 6.$$

24. Знайти масу частини поверхні  $\Omega$ , обмеженої  $S$ , з густиною  $\mu = \mu_0$ :

$$\Omega : x^2 + y^2 = 2ax, S : \{z^2 = 2a(2a - x)\}.$$

Зінтегрувати диференціальне рівняння або розв'язати задачу Коші (25 – 34):

$$25. x\sqrt{5 + y^2} dx + y\sqrt{4 + x^2} dy = 0.$$

$$26.1) xy' = y \cos \ln \frac{y}{x}.$$

$$2) xy' = \frac{3y^3 + 6yx^2}{2y^2 + 3x^2}.$$

$$3) y' = \frac{x + 2y - 3}{4x - y - 3}.$$

$$27.1) y' + \frac{2xy}{1 + x^2} = \frac{2x^2}{1 + x^2}, y(0) = \frac{2}{3}.$$

$$2) (3y \cos 2y - 2y^2 \sin 2y - 2x)y' = y,$$

$$y(16) = \frac{\pi}{4}.$$

$$28. 3y' + 2xy = 2xy^{-2}e^{-2x^2}, y(0) = -1.$$

$$29. (3x^2 + 6xy^2)dx +$$

$$+ (6x^2y + 4y^3)dy = 0.$$

$$30.1) y'' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, y(0) = 2,$$

$$y'(0) = 3.$$

$$2) xy'' = y'.$$

$$3) y'' = 72y^3, y(2) = 1, y'(2) = 6.$$

$$31.1) y'' - 6y' + 8y = 0.$$

$$2) y'' + 4y' + 5y = 0.$$

$$3) y'' + 5y' = 0.$$

$$32. y''' - 5y'' + 8y' - 4y = 0,$$

$$y(0) = 1, y'(0) = -1, y''(0) = 0.$$

$$33.1) y^{IV} + 2y''' + y'' = 4x^2.$$

$$2) y''' - 3y' - 2y = -4xe^x.$$

$$3) y'' + y = 2 \cos 3x - 3 \sin 3x.$$

$$4) y'' - 5y' = 50 \operatorname{ch} 5x.$$

$$5) y'' - y = (14 - 16x)e^{-x},$$

$$y(0) = 0, y'(0) = -1.$$

$$34.1) y'' - 2y' + 2y = \frac{e^x}{\sin x}.$$

$$2) y'' - 6y' + 8y = \frac{4}{2 + e^{-2x}},$$

$$y(0) = 1 + 3 \ln 3, y'(0) = 10 \ln 3.$$

35. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

$$1) \begin{cases} x' = -x - 2y, \\ y' = 3x + 4y. \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x' = x - 7y + 7e^t, \\ y' = x + 9y - 10e^t. \end{cases}$$

**Варіант 11**

1.  $u = \frac{y}{\sqrt{x^2 + z^2}}; du|_{M_0(-1,1,0)} = ?$

2.  $z = x^3y - yx, x = u \cos v, y = u \sin v;$   
 $z'_u, z'_v = ?$

3. Скласти рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні в точці  $M_0(1, 1, 1)$  :

$$z = x^2 + y^2 - 2xy + 2x - y.$$

4. Дослідити функцію на екстремум:

$$z = x^2 + xy + y^2 - 6x - 9y.$$

5. Знайти найбільше та найменше значення функції  $z = xy - 2x - y$  в області  $\bar{D} : x = 0, x = 3, y = 0, y = 4$ .

6. Змінити порядок інтегрування:

$$\int_0^1 dy \int_{1-y^2}^1 f dx + \int_1^e dy \int_{\ln y}^1 f dx.$$

7. Обчислити:

1)  $\iint_D 12y \sin 2xy dx dy.$   
 $D: y = \frac{\pi}{4}, y = \frac{\pi}{2}, x = 2, x = 3$

2)  $\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} dx \int_0^{\sqrt{3-x^2}} \sqrt{1+x^2+y^2} dy.$

3)  $\iiint_V \frac{xz dx dy dz}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$   
 $V: z = 2(x^2 + y^2), 0 \leq y \leq \frac{x}{\sqrt{3}}, z = 18$

8. Знайти площі фігур, обмежених лініями:

1)  $y = \sqrt{24 - x^2}, 2\sqrt{3}y = x^2, x \geq 0.$

2)  $y^2 - 2y + x^2 = 0, y^2 - 4y + x^2 = 0,$   
 $y = \sqrt{3}x, x = 0.$

9. Знайти масу пластинки  $D$  з густиною

$$\mu = 6x^3y^3, D : \frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1, x, y \geq 0.$$

10. Знайти об'єми тіл, обмежених поверхнями:

1)  $x^2 + y^2 = 8, y = \sqrt{2x}, y, z = 0, z = \frac{15x}{11}.$

2)  $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}, \sqrt{80}z = \sqrt{x^2 + y^2}.$

3)  $z = 24(x^2 + y^2) + 1, z = 48x + 1.$

11. Знайти масу тіла  $V$  з густиною  $\mu$  :

$$V : 25(x^2 + y^2) = z^2, x^2 + y^2 = 4,$$

$$x, y, z \geq 0; \mu = 2(x^2 + y^2).$$

12. Знайти координати центра мас однорідного тіла, обмеженого поверхнями:

$$x^2 + z^2 = 6y, y = 8.$$

13. Знайти довжину дуги кривої:

1)  $y = 2 + \operatorname{ch} x, 0 \leq x \leq 1.$

2)  $\rho = 1 - \sin \varphi, -\frac{\pi}{2} \leq \varphi < -\frac{\pi}{6}.$

14. Знайти масу кривої  $x = a \cos t,$   
 $y = a \sin t, z = at, 0 \leq t \leq 2\pi$  з густиною  $\mu = z^2(x^2 + y^2)^{-1}.$

15. Знайти роботу сили  $\mathbf{F} = (x^2 + y^2)\mathbf{i} + (x^2 - y^2)\mathbf{j}$  при переміщенні вздовж

кривої  $L : \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1, \\ 2 - x, & 1 \leq x \leq 2, \end{cases}$  від точки  $M(2, 0)$  до точки  $N(0, 0)$ .

16. Знайти функцію за її диференціалом:

$$du = (x \cos y + 3(3x + 3) \cos 3x) dx + \left( \frac{1}{2} x^2 \sin y + e^{-y} \right) dy.$$

17. Знайти циркуляцію векторного поля (безпосередньо та за теоремою Стокса):

1)  $\mathbf{a} = (y, -x, z^2), \Gamma : x^2 + y^2 = 1 \cap z = 4.$

2)  $\mathbf{a} = (3y, -3x, x), 0 \leq t \leq 2\pi, \Gamma : x =$   
 $= 3 \cos t, y = 3 \sin t, z = 3 - x - y.$

18.  $S : x^2 - y^2 + z^2 = 4,$   
 $\angle(\mathbf{n}, Oz) \leq 90^\circ, M(1, 1, -2)$   
 $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \Big|_M = ?$   
 $u = x\sqrt{y} - (z + y)\sqrt{x},$

19. Знайти кут між градієнтами скалярних

$$\text{полів } v = -\frac{4\sqrt{2}}{x} + \frac{\sqrt{2}}{9y} + \frac{1}{\sqrt{3}z} \text{ і } u = \frac{1}{x^2yz}$$

у точці  $M\left(2, \frac{1}{3}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right).$



20. Знайти величину і напрям найбільшої зміни функції  $u(M) = xy - xz$  у точці  $M_0(-1, 2, 1)$ .

21. Знайти найбільшу густину циркуляції векторного поля  $\mathbf{a} = (y^2, -xy^2, z^2)$  у точці  $M_0(-1, 2, 1)$ .

22. Знайти потік векторного поля крізь частину поверхні  $S$  (нормаль зовнішня):

1)  $\mathbf{a} = (x + xy^2, y - yx^2, z - 3)$ ,

$$S : x^2 + y^2 = z^2 \quad (0 \leq z < 1).$$

2)  $\mathbf{a} = (3x, 0, 2z)$ ,  $S : \begin{cases} x + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1, \\ (x, y, z > 0). \end{cases}$

3)  $\mathbf{a} = (x^2, y^2, z^2)$ ,  $S : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ (x, y, z > 0). \end{cases}$

23. Знайти потік векторного поля  $\mathbf{a}$  крізь замкнену поверхню  $S$  (нормаль зовнішня):

1)  $\mathbf{a} = (e^{2y} + x, x - 2y, y^2 + 3z)$ ,

$$S : x + y + z = 1, x, y, z = 0.$$

2)  $\mathbf{a} = (8x, -2y, x)$ ,  $S : z = x^2 + y^2$ ,

$$x + y = 1, x, y, z = 0.$$

24. Знайти масу частини поверхні  $\Omega$ , обмеженої  $S$ , з густиною  $\mu = \mu_0$  :

$$\Omega : x^2 + y^2 = 2z, S : \{z \leq 1\}.$$

Зінтегрувати диференціальне рівняння або розв'язати задачу Коші (25 – 34) :

25.  $(xy^3 + x)ydx + (x^2y^2 - y^2)dy = 0$ .

26.1)  $(y + \sqrt{xy})dx = xdy$ .

2)  $y' = \frac{x^2 + xy - y^2}{x^2 - 2xy}$ ;

3)  $y' = \frac{x - 2y + 3}{-2x - 2}$ .

27.1)  $y' - \frac{2x - 5}{x^2}y = 5, y(2) = 4$ .

2)  $8(4y^3 + xy - y)y' = 1, y(0) = 0$ .

28.  $2xy' - 3y = -(5x^2 + 3)y^3, y(1) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

29.  $\frac{y}{x^2} \cos \frac{y}{x} dx - \left( \frac{1}{x} \cos \frac{y}{x} + 2y \right) dy = 0$ .

30.1)  $y'' = \frac{1}{\sin^2 2x}, y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}, y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$ .

2)  $x^4 y'' + x^3 y' = 1$ .

3)  $y'' y^3 + 36 = 0, y(0) = 3, y'(0) = 2$ .

31.1)  $y'' + 4y = 0$ .

2)  $y'' + 9y' = 0$ .

3)  $y'' + y' - 6y = 0$ .

32.  $y''' + 3y'' + 2y' = 0$ ,

$$y(0) = y'(0) = 0, y''(0) = 2.$$

33.1)  $y''' + y'' = 5x^2 - 1$ .

2)  $y''' - 3y' + 2y = (4x + 9)e^{2x}$

3)  $y'' + 2y' + 5y = -2 \sin x$ .

4)  $y'' + 16y = 16 \cos 4x - 16e^{4x}$ .

5)  $y'' + 8y' + 16y = 16x^2 - 16x + 66$ ,

$$y(0) = 3, y'(0) = 0.$$

34.1)  $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x^2}$ .

2)  $y'' + 6y' + 8y = \frac{4}{1 + 2e^{-2x}}$ ,

$$y(0) = 0, y'(0) = 0.$$

35. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

1)  $\begin{cases} x' = 2x + y, \\ y' = 3x + 4y. \end{cases}$

2)  $\begin{cases} x' = 2x + 7y - 2 \cos t - \sin t, \\ y' = x + 8y - \cos t. \end{cases}$

**Варіант 12**

1.  $u = \arctg \frac{xz}{y^2}; du|_{M_0(2,1,1)} = ?$

2.  $z = x^2 \ln y, x = uv^{-1}, y = 3u - 2v;$

$z'_u, z'_v = ?$

3. Скласти рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні в точці  $M_0(1, -1, 1)$  :

$z = y^2 - x^2 + 2xy - 3y.$

4. Дослідити функцію на екстремум:

$z = (x - 2)^2 + 2y^2 - 10.$

5. Знайти найбільше та найменше значення функції  $z = \frac{x^2}{2} - xy$  в області

$\bar{D} : y = 8, y = 2x^2.$

6. Змінити порядок інтегрування:

$$\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt[3]{y}} f dx + \int_1^2 dy \int_0^{2-y} f dx.$$

7. Обчислити:

1)  $\iint_D y^2 \cos xy dx dy. :$

$D: x=0, y=\sqrt{\pi}, y=x$

$\sqrt{2} \quad \sqrt{2-x^2}$

2)  $\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dx \int_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}} (1 + x^2 + y^2) dy.$

3)  $\iiint_V \frac{xy dx dy dz}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}}.$

$V: 0 \leq y \leq x, z=4$

8. Знайти площі фігур, обмежених лініями:

1)  $y = x^2, y = -x.$

2)  $x^2 - 2x + y^2 = 0, x^2 - 6x + y^2 = 0,$

$\sqrt{3}y = x, y = \sqrt{3}x.$

9. Знайти масу пластинки  $D$  з густиною

$\mu = \frac{x}{y^3}, D : 1 \leq \frac{x^2}{4} + y^2 \leq 25, 0 \leq x \leq 2y.$

10. Знайти об'єми тіл, обмежених поверхнями:

1)  $x + y = 4, y = \sqrt{2x}, z = 3y, z = 0.$

2)  $z = \sqrt{81 - x^2 - y^2}, z = 5, x^2 + y^2 \leq 45.$

3)  $z = 2 - 18((x + 1)^2 + y^2),$   
 $z = -36x - 34.$

11. Знайти масу тіла  $V$  з густиною  $\mu$  :

$V : x^2 + y^2 + z^2 = 9, x^2 + y^2 \leq 4,$

$y \geq 0, \mu = |z|.$

12. Знайти координати центра мас однорідного тіла, обмеженого поверхнями:

$8x = \sqrt{y^2 + z^2}, x = \frac{1}{2}.$

13. Знайти довжину дуги кривої:

1)  $y = 1 - \ln \cos x, 1 \leq x \leq \frac{\pi}{6}.$

2)  $\rho = 2(1 - \cos \varphi), -\pi \leq \varphi < -\frac{\pi}{2}.$

14. Знайти масу кривої  $x = \cos t + t \sin t,$   
 $y = \sin t - t \cos t, z = 1, 0 \leq t \leq 2\pi$  згустиною  $\mu = \sqrt{x^2 + y^2}.$ 15. Знайти роботу сили  $\mathbf{F} = y\mathbf{i} - x\mathbf{j}$  при переміщенні вздовж кола  $x^2 + y^2 = 2$  ( $y \geq 0$ ) від точки  $M(\sqrt{2}, 0)$  до точки  $N(-\sqrt{2}, 0).$ 

16. Знайти функцію за її диференціалом:

$$du = \left( (xy)^3 + \ln \frac{x+1}{4} \right) dx +$$
  
$$+ \left( \frac{3}{4} x^4 y^2 + y \sin y^2 \right) dy.$$

17. Знайти циркуляцію векторного поля (безпосередньо та за теоремою Стокса):

1)  $\mathbf{a} = (2y, -3x, z^2),$

$\Gamma : x^2 + y^2 = 1 \cap z = 1.$

2)  $\mathbf{a} = (6z, -x, xy), 0 \leq t \leq 2\pi,$

$\Gamma : \{x = 3 \cos t, y = 3 \sin t, z = 3.\}$

18. 
$$S : z = x^2 - y^2, \quad \left. \begin{array}{l} u = \sqrt{xy} - \sqrt{4 - z^2}, \\ \angle(\mathbf{n}, Oz) \leq 90^\circ, M(1, 1, 0) \end{array} \right\} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \Big|_M = ?$$

19. Знайти кут між градієнтами скалярних

полів  $v = \frac{6}{x} + \frac{2}{y} - \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}z}$  і  $u = \frac{x^2}{y^2 z^3}$  у

точці  $M \left( \sqrt{2}, \sqrt{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right).$

20. Знайти величину і напрям найбільшої зміни функції  $u(M) = x^2yz$  у точці  $M_0(1, -1, 1)$ .

21. Знайти найбільшу густину циркуляції векторного поля  $\mathbf{a} = (xy, -xy^2, z^2)$  у точці  $M_0(1, -1, 1)$ .

22. Знайти потік векторного поля крізь частину поверхні  $S$  (нормаль зовнішня):

$$1) \mathbf{a} = (y, -x, 1), S : \begin{cases} x^2 + y^2 = z^2, \\ (0 \leq z < 4). \end{cases}$$

$$2) \mathbf{a} = (2x, 3y, z), S : \begin{cases} \frac{x}{3} + y + \frac{z}{2} = 1, \\ (x, y, z > 0). \end{cases}$$

$$3) \mathbf{a} = (z, x, -z), S : \begin{cases} 4z = x^2 + y^2, \\ (0 \leq z < 4). \end{cases}$$

23. Знайти потік векторного поля  $\mathbf{a}$  крізь замкнену поверхню  $S$  (нормаль зовнішня):

$$1) \mathbf{a} = (\sqrt{z} - 2x, e^x + 3y, \sqrt{y+x}),$$

$$S : x^2 + y^2 = z^2, z = 2, z = 5.$$

$$2) \mathbf{a} = (x^2, xy, 3z), S : \begin{cases} x^2 + y^2 = z^2, \\ z = 4. \end{cases}$$

24. Знайти масу частини поверхні  $\Omega$ , обмеженої  $S$ , з густиною  $\mu = \mu_0$ :

$$\Omega : x^2 + y^2 = 2ax,$$

$$S : \{x^2 + y^2 = z^2, z = 0\}.$$

Зінтегрувати диференціальне рівняння або розв'язати задачу Коші (25 – 34):

$$25. 3e^x \sin y dx + (1 - e^x) \cos y dy = 0.$$

$$26.1) xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y.$$

$$2) xy' = \sqrt{2x^2 + y^2} + y.$$

$$3) y' = \frac{x + 8y - 9}{10x - y - 9}.$$

$$27.1) y' + \frac{y}{x} = \frac{x+1}{x} e^x, y(1) = e.$$

$$2) y' = \frac{y}{3x - y^2}, y(0) = 1.$$

$$28. 3xy' + 5y = (4x - 5)y^4, y(1) = 1.$$

$$29. \left( \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + y \right) dx + \left( x + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) dy = 0.$$

$$30.1) y'' = x + \sin x, y(0) = -3, y'(0) = 0.$$

$$2) xy''' + 2y'' = 0.$$

$$3) y'' = 18 \sin^3 y \cos y, y(1) = \frac{\pi}{2}, y'(1) = 3.$$

$$31.1) y'' + 4y' + 20y = 0.$$

$$2) y'' - 3y' - 10y = 0.$$

$$3) y'' - 16y = 0.$$

$$32. y''' + 3y'' + 3y' + y = 0,$$

$$y(0) = -1, y'(0) = 0, y''(0) = 1.$$

$$33.1) y^{IV} + 4y''' + 4y'' = x - x^2.$$

$$2) y''' + 4y'' + 5y' + 2y = (12x + 16)e^x.$$

$$3) y'' - 4y' + 8y = e^x(4 \cos x - 3 \sin x).$$

$$4) y''' - 9y' = 18 \sin 3x - 9 \cos 3x - 9e^{3x}.$$

$$5) y'' + 10y' + 34y = -9e^{-5x},$$

$$y(0) = 0, y'(0) = 6.$$

$$34.1) y'' + y = \operatorname{tg} x.$$

$$2) y'' + 9y = \frac{9}{\sin 3x}, y\left(\frac{\pi}{6}\right) = 4,$$

$$y'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3\pi}{2}.$$

35. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

$$1) \begin{cases} x' = 4x + 2y, \\ y' = 4x + 6y. \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x' = 4x + 8y + \cos t - 4 \sin t, \\ y' = x + 6y - \sin t. \end{cases}$$

**Варіант 13**

1.  $u = \ln \sin \left( x - 2y + \frac{z}{4} \right); du|_{M_0(1, \frac{1}{2}, \pi)} = ?$

2.  $z = \arcsin xy, x = u \cos v, y = u^2 v^{-1};$

$z'_u, z'_v = ?$

3. Скласти рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні в точці  $M_0(-1, 1, 1)$ :

$z = x^2 - y^2 - 2xy - x - 2y.$

4. Дослідити функцію на екстремум:

$z = (x - 5)^2 + y^2 + 1.$

5. Знайти найбільше та найменше значення функції  $z = 3x^2 + 3y^2 - 2x - 2y$  в області  $\bar{D} : x = 0, y = 0, x + y = 1.$

6. Змінити порядок інтегрування:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} dy \int_0^{\sin y} f dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} dy \int_0^{\cos y} f dx.$$

7. Обчислити:

1)  $\iint_{D: y=\ln 2, y=\ln 3, x=4, x=8} ye^{\frac{xy}{4}} dx dy.$

2)  $\int_0^2 dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \frac{dy}{1+x^2+y^2}.$

3)  $\iiint_{V: x^2+y^2=4y, y+z=4, z \geq 0} \frac{z dx dy dz}{\sqrt{x^2+y^2}}.$

8. Знайти площі фігур, обмежених лініями:

1)  $y = 20 - x^2, y = -8x.$

2)  $y^2 - 4y + x^2 = 0, y^2 - 6y + x^2 = 0,$

$y = \sqrt{3}x, x = 0.$

9. Знайти масу пластинки  $D$  з густиною

$\mu = x^2 y^2, D : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leq 1, y \geq 0.$

10. Знайти об'єми тіл, обмежених поверхнями:

1)  $x = \frac{5\sqrt{y}}{6}, x = \frac{5y}{18}, z = 0, z = \frac{5(3 + \sqrt{y})}{18}.$

2)  $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}, \frac{3z}{2} = x^2 + y^2.$

3)  $1 - z = 16(x^2 + y^2), z = -32x - 1.$

11. Знайти масу тіла  $V$  з густиною  $\mu$ :

$V : x^2 + y^2 = 1, x^2 + y^2 = 6z,$

$x, y \geq 0, z = 0; \mu = 90y.$

12. Знайти координати центра мас однорідного тіла, обмеженого поверхнями:

$2x = y^2 + z^2, y^2 + z^2 = 4, x = 0.$

13. Знайти довжину дуги кривої:

1)  $y = e^x + 13, \ln \sqrt{15} \leq x \leq \ln \sqrt{24}.$

2)  $\rho = 3(1 + \sin \varphi), -\frac{\pi}{6} \leq \varphi \leq 0.$

14. Знайти масу кривої  $x = 5 \cos t, y = 5 \sin t, z = t, 0 \leq t \leq 2\pi$  з густиною  $\mu = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1}.$

15. Знайти роботу сили  $\mathbf{F} = xy\mathbf{i} + 2y\mathbf{j}$  при переміщенні вздовж кола  $x^2 + y^2 = 1$  ( $x, y \geq 0$ ) від точки  $M(1, 0)$  до точки  $N(-1, 0).$

16. Знайти функцію за її диференціалом:

$$du = \left( (xy)^2 + \frac{x}{x^2 + 1} \right) dx + \left( \frac{2}{3} x^3 y + \arctg \frac{y}{2} \right) dy.$$

17. Знайти циркуляцію векторного поля (безпосередньо та за теоремою Стокса):

1)  $\mathbf{a} = (-3z, y^2, 2y),$

$\Gamma : x^2 + y^2 = 4 \cap x - 3y - 2z = 1.$

2)  $\mathbf{a} = (z, y^2, -x), 0 \leq t \leq 2\pi,$

$\Gamma : \{ x = z = \sqrt{2} \cos t, y = 2 \sin t. \}$

18.  $S : 2x^2 - y^2 + z^2 = 1, \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \Big|_M = ?$   
 $\angle(\mathbf{n}, Oz) \leq 90^\circ, M(0, -3, 4)$

19. Знайти кут між градієнтами скалярних полів  $v = x^2 + 9y^2 + 6z^2$  і  $u = xyz$  у точці  $M\left(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right).$

20. Знайти величину і напрям найбільшої зміни функції  $u(M) = xyz$  у точці  $M_0(2, 1, 0).$

21. Знайти найбільшу густину циркуляції векторного поля  $\mathbf{a} = (x + y, yz, xz)$  у точці  $M_0(2, 1, 0)$ .

22. Знайти потік векторного поля крізь частину поверхні  $S$  (нормаль зовнішня):

$$1) \mathbf{a} = (xy, -x^2, 3), S : \begin{cases} x^2 + y^2 = z^2, \\ (0 \leq z < 1). \end{cases}$$

$$2) \mathbf{a} = (x, 3y, -z), S : \begin{cases} \frac{x}{3} + y + \frac{z}{2} = 1, \\ (x, y, z > 0). \end{cases}$$

$$3) \mathbf{a} = (zx + y, xy - z, x^2 + yz),$$

$$S : x^2 + y^2 = 2, (0 \leq z < 1).$$

23. Знайти потік векторного поля  $\mathbf{a}$  крізь замкнену поверхню  $S$  (нормаль зовнішня):

$$1) \mathbf{a} = \left( e^z + \frac{x}{4}, \ln x + \frac{y}{4}, \frac{z}{4} \right),$$

$$S : (x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z + 1)^2 = 1.$$

$$2) \mathbf{a} = (6x, -2y, -z), S : z^2 = x^2 + y^2,$$

$$z = 3 - 2(x^2 + y^2) (z \geq 0).$$

24. Знайти масу частини поверхні  $\Omega$ , обмеженої  $S$ , з густиною  $\mu = \mu_0$  :

$$\Omega : x^2 + y^2 + z^2 = a^2,$$

$$S : \left\{ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, a > b \right\}.$$

Зінтегрувати диференціальне рівняння або розв'язати задачу Коші (25 – 34) :

$$25. 2xdx - 2ydy = x^2ydy - 2xy^2dx.$$

$$26.1) y = x(y' - \sqrt[3]{e^y}).$$

$$2) y' = \frac{y^2}{x^2} + 6\frac{y}{x} + 6;$$

$$3) y' = \frac{2x + 3y - 5}{5x - 5}.$$

$$27.1) y' - \frac{y}{x} = -\frac{2 \ln x}{x}, y(1) = 1.$$

$$2) 2(x + y^4)y' = y, y(-2) = -1.$$

$$28. 2y' + 3y \cos x = e^{2x}(2 + 3 \cos x)y^{-1},$$

$$y(0) = 1.$$

$$29. \left( 2x + \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y} \right) dx = \frac{x^2 + y^2}{xy^2} dy.$$

$$30.1) y'' = \operatorname{arctg} x, y(0) = y'(0) = 0.$$

$$2) (1 + x^2)y'' + 2xy' = x^3.$$

$$3) 4y^3y'' = y^4 - 16, y(0) = 2\sqrt{2},$$

$$y'(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$31.1) 9y'' + 6y' + y = 0.$$

$$2) y'' - 4y' - 21y = 0.$$

$$3) y'' + y = 0.$$

$$32. y''' - 2y'' + 9y' - 18y = 0,$$

$$y(0) = -2, 5, y'(0) = y''(0) = 0.$$

$$33.1) 7y''' - y'' = 12x.$$

$$2) y''' - y'' - 2y' = (6x - 11)e^{-x}.$$

$$3) y'' + 2y' = 10e^x(\cos x + \sin x).$$

$$4) y'' - y' = 2 \operatorname{ch} x.$$

$$5) y'' - 6y' + 25y = -36x \cos 3x + (32x - 12) \sin 3x, y(0) = 4,$$

$$y'(0) = 0.$$

$$34.1) y'' + 4y = \operatorname{ctg} 2x.$$

$$2) y'' + 9y = \frac{9}{\cos 3x}, y(0) = 1,$$

$$y'(0) = 0.$$

35. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

$$1) \begin{cases} x' = 8x - 3y, \\ y' = 2x + y. \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x' = 5x + y - \cos t, \\ y' = x + 5y - 5 \cos t - \sin t. \end{cases}$$

**Варіант 14**

1.  $u = \frac{y}{x} + \frac{z}{y} - \frac{x}{z}; du|_{M_0(1,1,2)} = ?$

2.  $z = \operatorname{tg} x^2 y, x = u2^v, y = v \operatorname{ctg} u; z'_u, z'_v = ?$

3. Скласти рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні в точці  $M_0(3, 1, 2)$ :

$$x^2 - 2y^2 + z^2 + xz - 4y - 13 = 0.$$

4. Дослідити функцію на екстремум:

$$z = x^3 + y^3 - 3xy.$$

5. Знайти найбільше та найменше значення функції  $z = 2x^2 + 3y^2 + 1$  в області  $\bar{D}$ :

$$y = \sqrt{9 - \frac{9}{4}x^2}, y = 0.$$

6. Змінити порядок інтегрування:

$$\int_{-2}^1 dy \int_{-2-y}^0 f dx + \int_{-1}^0 dy \int_{\frac{2}{3}y}^0 f dx.$$

7. Обчислити:

1)  $\iint_{D: x=0, y=\sqrt{2\pi}, y=2x} 4y^2 \sin 2xy dx dy.$

2)  $\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \frac{dy}{1 + \sqrt{x^2 + y^2}}.$

3)  $\iiint_{V: \begin{matrix} x^2+y^2=2x, \\ x+z=2, y \geq 0 \end{matrix}} \frac{y dx dy dz}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$

8. Знайти площі фігур, обмежених лініями:

1)  $y = \sqrt{18 - x^2}, y = 3\sqrt{2} - \sqrt{18 - x^2}.$

2)  $x^2 - 2x + y^2 = 0, x^2 - 8x + y^2 = 0,$

$$\sqrt{3}y = x, y = \sqrt{3}x.$$

9. Знайти масу пластинки  $D$  з густиною

$$\mu = 5xy^7, D: \frac{x^2}{16} + y^2 \leq 1, x, y \geq 0.$$

10. Знайти об'єми тіл, обмежених поверхнями:

1)  $x = 19\sqrt{2y}, x = 4\sqrt{2y}, z = 0, z + y = 2.$

2)  $z = 6\sqrt{x^2 + y^2}, z = 16 - x^2 - y^2.$

3)  $z = 30((x+1)^2 + y^2) + 1,$

$$z = 60x + 61.$$

11. Знайти масу тіла  $V$  з густиною  $\mu$ :

$$V: x^2 + y^2 = \frac{z^2}{25}, x^2 + y^2 = \frac{z}{5},$$

$$x, y \geq 0; \mu = 14yz.$$

12. Знайти координати центра мас однорідного тіла, обмеженого поверхнями:

$$4y = \sqrt{x^2 + z^2}, x^2 + z^2 = 16, y = 0.$$

13. Знайти довжину дуги кривої:

1)  $y = \sqrt{x - x^2} - \arccos \sqrt{x}, 0 \leq x \leq \frac{1}{4}.$

2)  $\rho = 4(1 - \sin \varphi), 0 \leq \varphi < \frac{\pi}{6}.$

14. Знайти масу кривої  $x = 4 \cos t, y = 4 \cos t, z = 3 \sin t, 0 \leq t \leq 2\pi$  з густиною  $\mu = x^2 + y^2 + z^2.$

15. Знайти роботу сили  $\mathbf{F} = y\mathbf{i} - x\mathbf{j}$  при переміщенні вздовж еліпса  $2x^2 + y^2 = 1$  ( $y \geq 0$ ) від точки  $M\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$  до точки

$$N\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 2\right).$$

16. Знайти функцію за її диференціалом:

$$du = (e^y + 2(2x + 1) \sin 2x) dx + (xe^y + 2y) dy.$$

17. Знайти циркуляцію векторного поля (безпосередньо та за теоремою Стокса):

1)  $\mathbf{a} = (2y, 5z, 3x),$

$$\Gamma: 2x^2 + 2y^2 = 1 \cap x + y + z = 3.$$

2)  $\mathbf{a} = (3y, -3x, x), \Gamma: \{x = 3 \cos t,$

$$y = 3 \sin t, z = 3 - 3 \cos t - 3 \sin t,$$

$$0 \leq t \leq 2\pi.$$

$$u = \ln(1 + x^2 + y^2) - \sqrt{x^2 + z^2},$$

18.  $S: x^2 - 6x + 9y^2 + z^2 = 4z + 4,$

$$\angle(\mathbf{n}, Oz) \leq 90^\circ, M(3, 0, -4); \left. \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right|_M = ?$$

19. Знайти кут між градієнтами скалярних полів

$$v = \frac{2}{x} + \frac{3}{2y} - \frac{\sqrt{6}}{4z} \text{ і } u = \frac{y^3}{x^2 z}$$

у точці  $M\left(\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{1}{2}\right).$

20. Знайти величину і напрям найбільшої зміни функції  $u(M) = xyz^2$  у точці  $M_0(4, 0, 1)$ .

21. Знайти найбільшу густину циркуляції векторного поля  $\mathbf{a} = (xy, -y - z, xz)$  у точці  $M_0(4, 0, 1)$ .

22. Знайти потік векторного поля крізь частину поверхні  $S$  (нормаль зовнішня):

$$1) \mathbf{a} = (xz, yz, z^2 - 1), S : \begin{cases} x^2 + y^2 = z^2, \\ (0 \leq z < 4). \end{cases}$$

$$2) \mathbf{a} = (-2x, y, 4z), S : \begin{cases} \frac{x}{3} + y + \frac{z}{2} = 1, \\ (x, y, z > 0). \end{cases}$$

$$3) \mathbf{a} = (y^2x, x^2y, z), S : x^2 + y^2 = 1, \\ x, y \geq 0 \quad (0 \leq z < 1).$$

23. Знайти потік векторного поля  $\mathbf{a}$  крізь замкнену поверхню  $S$  (нормаль зовнішня):

$$1) \mathbf{a} = (3x - 2z, z - 2y, 1 + 2z),$$

$$S : z^2 = 4(x^2 + y^2), z = 2.$$

$$2) \mathbf{a} = (z + y, x - z, z), S : x^2 + 4y^2 = 4, \\ 3x + 4y + z = 12, z = 1.$$

24. Знайти масу частини поверхні  $\Omega$ , обмеженої  $S$ , з густиною  $\mu = \sqrt{x^2 + y^2}$ :  
 $\Omega : x^2 + y^2 = z, S : \{0 \leq z \leq 1\}$ .

Зінтегрувати диференціальне рівняння або розв'язати задачу Коші (25 – 34):

$$25. x\sqrt{4 + y^2}dx + y\sqrt{1 + x^2}dy = 0.$$

$$26.1) y' = \frac{y}{x} - 1.$$

$$2) xy' = \frac{3y^3 + 8yx^2}{2y^2 + 4x^2}.$$

$$3) y' = \frac{4y - 8}{3x + 2y - 7}.$$

$$27.1) y' - \frac{y}{x} = -\frac{12}{x^3}, y(1) = 4.$$

$$2) (y + 2 - 3xy^3 + 3xy^2)dy = \\ = y^3(y - 1)dx, y\left(\frac{1}{4}\right) = 2.$$

$$28.3(xy' + y) = xy^2, y(1) = 3.$$

$$29. \left(\frac{\sin 2x}{y} + x\right)dx = \left(\frac{\sin^2 x}{y^2} - y\right)dy.$$

$$30.1) y'' = \frac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x}, y(0) = \frac{1}{2},$$

$$y'(0) = 0.$$

$$2) x^5y''' + x^4y'' = 1.$$

$$3) y'' = 50y^3, y(3) = 1, y'(3) = 5.$$

$$31.1) 2y'' + 3y' + y = 0.$$

$$2) y'' + 4y' + 8y = 0.$$

$$3) y'' - 6y' + 9y = 0.$$

$$32. y''' + 9y' = 0, y(0) = 0,$$

$$y'(0) = 9, y''(0) = -18.$$

$$33.1) y''' + 3y'' + 2y' = 3x^2 + 2x.$$

$$2) y''' + y'' - 2y' = (6x + 5)e^x.$$

$$3) y'' - 4y' + 4y = e^{2x} \sin 5x.$$

$$4) y'' + 25y = 20 \cos 5x -$$

$$- 10 \sin 5x + 50e^{5x}.$$

$$5) y'' + 25y = e^x (\cos 5x - 10 \sin 5x),$$

$$y(0) = 3, y'(0) = -4.$$

$$34.1) y'' + y = \operatorname{ctg} x.$$

$$2) y'' - y' = \frac{1}{2e^x + 1}, y(0) = \ln 27,$$

$$y'(0) = \ln 9 - 1.$$

35. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

$$1) \begin{cases} x' = 3x + y, \\ y' = x + 3y. \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x' = 2x + 9y - 9 \sin t, \\ y' = x + 10y - \cos t - 10 \sin t. \end{cases}$$

**Варіант 15**

1.  $u = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - z^2}}; du|_{M_0(1,2,2)} = ?$

2.  $z = x^2 2^y, x = u - \sin v, y = u + \cos v;$   
 $z'_u, z'_v = ?$

3. Скласти рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні в точці  $M_0(1, -2, 1)$ :

$$4y^2 - z^2 + 4xy - xz + 3z - 9 = 0$$

4. Дослідити функцію на екстремум:  
 $z = 2xy - 2x^2 - 4y^2.$

5. Знайти найбільше та найменше значення функції  $z = x^2 - 2xy - y^2 + 4x$  в області  $\bar{D}: x = -3, y = 0, x + y = -1.$

6. Змінити порядок інтегрування:

$$\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} f dx + \int_1^e dy \int_{\ln y}^1 f dx.$$

7. Обчислити:

1)  $\iint_{D: y=\frac{\pi}{2}, y=\frac{\pi}{4}, x=1, x=2} 2y \cos 2xy dx dy.$

2)  $\int_{-R}^R dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^0 \frac{\sin \sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} dy.$

3)  $\iiint_{V: x^2+y^2=16y, y+z=16, x, z \geq 0} \frac{x dx dy dz}{\sqrt{x^2+y^2}}.$

8. Знайти площі фігур, обмежених лініями:

1)  $y = 32 - x^2, y = -4x.$

2)  $y^2 - 2y + x^2 = 0, y^2 - 6y + x^2 = 0,$   
 $\sqrt{3}y = x, x = 0.$

9. Знайти масу пластинки  $D$  з густиною

$$\mu = 30x^3 y^7, D: \frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1, x, y \geq 0.$$

10. Знайти об'єми тіл, обмежених поверхнями:

1)  $3y = \sqrt{x}, y \leq x, x + y + z = 10,$   
 $y = 1, z = 0.$

2)  $z = \sqrt{36 - x^2 - y^2}, \sqrt{63}z = \sqrt{x^2 + y^2}.$

3)  $z = 26(x^2 + y^2) - 2, z = -52x - 2.$

11. Знайти масу тіла  $V$  з густиною  $\mu$ :

$$V: x^2 + y^2 + z^2 = 4, x^2 + y^2 = 9z^2,$$

$$x, y \geq 0 (z \geq 0); \mu = 10z.$$

12. Знайти координати центра мас однорідного тіла, обмеженого поверхнями:

$$y^2 + z^2 = 8x, x = 2.$$

13. Знайти довжину дуги кривої:

1)  $y = 2 - e^x, \ln \sqrt{3} \leq x \leq \ln \sqrt{8}.$

2)  $\rho = 5(1 - \cos \varphi), -\frac{\pi}{3} \leq \varphi < 0.$

14. Знайти масу кривої  $x = 9 \cos t,$   
 $y = 9 \sin t, z = 9 \sin t, 0 \leq t \leq 2\pi$  з густиною  $\mu = z^2 (x^2 + y^2)^{-1}.$

15. Знайти роботу сили  $\mathbf{F} = (x^2 + y^2)\mathbf{i} + (2x^2 + 2y^2)\mathbf{j}$  при переміщенні вздовж кола  $x^2 + y^2 = R^2 (y \geq 0)$  від точки  $M(R, 0)$  до точки  $N(-R, 0).$

16. Знайти функцію за її диференціалом:

$$du = \left( \sqrt{xy} + \frac{1}{3x+5} \right) dx + \left( \frac{1}{3} \frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{y}} + \arcsin \frac{y}{6} \right) dy.$$

17. Знайти циркуляцію векторного поля (безпосередньо та за теоремою Стокса):

1)  $\mathbf{a} = (y, -x, z^2),$

$$\Gamma: x^2 + y^2 = 1 \cap z = 4.$$

2)  $\mathbf{a} = \left( x, -\frac{1}{3}z^2, y \right), \Gamma: \left\{ x = \frac{1}{2} \cos t, \right.$

$$y = \frac{1}{3} \sin t, z = \cos t - \frac{1}{3} \sin t - \frac{1}{4}$$

$$0 \leq t \leq 2\pi.$$

18.  $\boxed{u = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}, \frac{\partial u}{\partial l}|_M = ?}$   
 $\mathbf{l} = (1, -1, 1), M(1, 1, 1)$

19. Знайти кут між градієнтами скалярних

полів  $v = \frac{3}{x} + \frac{4}{y} - \frac{1}{\sqrt{6}z}$  і  $u = \frac{x^3 y^2}{z}$  у

точці  $M\left(1, 2, \frac{1}{\sqrt{6}}\right).$



20. Знайти величину і напрям найбільшої зміни функції  $u(M) = 2x^2yz$  у точці  $M_0(-3, 0, 2)$ .

21. Знайти найбільшу густину циркуляції векторного поля  $\mathbf{a} = (x, -zy, x^2z)$  у точці  $M_0(-3, 0, 2)$ .

22. Знайти потік векторного поля крізь частину поверхні  $S$  (нормаль зовнішня):

$$1) \mathbf{a} = (y^2x, -yx^2, 1), S : \begin{cases} x^2 + y^2 = z^2, \\ (0 \leq z < 5). \end{cases}$$

$$2) \mathbf{a} = (x, -y, 6z), S : \begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{3} + z = 1, \\ (x, y, z > 0). \end{cases}$$

$$3) \mathbf{a} = (e^y + 2x, x - y, 2z - 1),$$

$$S : x + 2y + z = 2, x, y = 0 (z > 0).$$

23. Знайти потік векторного поля  $\mathbf{a}$  крізь замкнену поверхню  $S$  (нормаль зовнішня):

$$1) \mathbf{a} = (y + 2z, -y, 3x), S : z^2 = x^2 + y^2,$$

$$3z = 27 - 2(x^2 + y^2) (z \geq 0).$$

$$2) \mathbf{a} = (xy, yz, zx), S : x^2 + y^2 + z^2 = 16, \\ x^2 + y^2 = z^2 (z \geq 0)$$

24. Знайти масу частини поверхні  $\Omega$ , обмеженої  $S$ , з густиною  $\mu = \sqrt{z}$ :

$$\Omega : x^2 + y^2 = 2az, S : \{x^2 + y^2 = a^2\}.$$

Зінтегрувати диференціальне рівняння або розв'язати задачу Коші (25 – 34):

$$25. (e^x + 8)dy - ye^x dx = 0.$$

$$26.1) y'x + x + y = 0.$$

$$2) y' = \frac{x^2 + 2xy - y^2}{2x^2 - 2xy}.$$

$$3) y' = \frac{x + 3y - 4}{5x - y - 4}.$$

$$27.1) y' + \frac{2y}{x} = x^3, y(1) = -\frac{5}{6}.$$

$$2) 2y^2 dx + (x + e^{\frac{1}{y}}) dy = 0, y(e) = 1.$$

$$28. y' - y = 2xy^2, y(0) = \frac{1}{2}.$$

$$29. \frac{ydx}{x^2} - \frac{xy + 1}{x} dy = 0.$$

$$30.1) y''' = e^{\frac{x}{2}} + 1, y(0) = 8,$$

$$y'(0) = 5, y''(0) = 2.$$

$$2) xy''' - y'' + \frac{1}{x} = 0.$$

$$3) y^3 y'' + 25 = 0, y(2) = -5,$$

$$y'(2) = -1.$$

$$31.1) y'' - 10y' + 21y = 0.$$

$$2) y'' - 2y' + 2y = 0.$$

$$3) y'' + 4y' = 0.$$

$$32. y''' - 13y'' + 12y' = 0, y(0) = 0,$$

$$y'(0) = 1, y''(0) = 133.$$

$$33.1) y''' - y' = 3x^2 - 2x + 1.$$

$$2) y''' + 4y'' + 4y' = (9x + 15)e^x.$$

$$3) y'' + y = 2 \cos 5x + 3 \sin 5x.$$

$$4) y''' - 16y' = 48e^{4x} + \\ + 64 \cos 4x - 64 \sin 4x.$$

$$5) y'' + 2y' + 5y = -8e^{-x} \sin 2x,$$

$$y(0) = 2, y'(0) = 6.$$

$$34.1) y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}.$$

$$2) y'' + 4y = 4 \operatorname{ctg} 2x, y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3,$$

$$y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2.$$

35. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

$$1) \begin{cases} x' = x + 3y, \\ y' = 5x + 4y. \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x' = x - 16y + 1 - t, \\ y' = x + 11y - t. \end{cases}$$

**Варіант 16**

1.  $u = \ln(x + y^2) - \sqrt{x^2 - z^2}; du|_{M_0(5,2,3)} = ?$

2.  $z = x^2y - \ln y, x = ve^u, y = ue^v; z'_u, z'_v = ?$

3. Скласти рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні в точці  $M_0(2, 1, 0)$  :

$$z = x^2 + y^2 - 3xy - x + y + 2.$$

4. Дослідити функцію на екстремум:

$$z = x\sqrt{y} - x^2 - y + 6x + 3.$$

5. Знайти найбільше та найменше значення функції  $z = 3x^2 + 3y^2 - x - y$  в області  $\bar{D} : x = 5, y = 0, x - y = 1$ .

6. Змінити порядок інтегрування:

$$\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^0 f dx + \int_1^2 dy \int_{-\sqrt{2-y}}^0 f dx.$$

7. Обчислити:

1)  $\iint_{D: x=0, y=\sqrt{2}, y=x} y^2 e^{-\frac{xy}{2}} dx dy.$

2)  $\int_0^R dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \frac{dy}{\sqrt{x^2+y^2} \cos^2 \sqrt{x^2+y^2}}.$

3)  $\iiint_{V: x^2+y^2=2x, x+z=2, z \geq 0} \sqrt{x^2+y^2} dx dy dz.$

8. Знайти площі фігур, обмежених лініями:

1)  $y = \frac{2}{x}, y = 5e^x, y = 2, y = 5.$

2)  $y^2 - 2x + x^2 = 0, y^2 - 4x + x^2 = 0, y = 0, \sqrt{3}y = x.$

9. Знайти масу пластинки  $D$  з густиною

$$\mu = \frac{y}{x}, D : 1 \leq \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leq 3, 0 \leq y \leq \frac{2x}{3}.$$

10. Знайти об'єми тіл, обмежених поверхнями:

1)  $x + y = 4, x = \sqrt{2y}, 5z = 3x, z = 0.$

2)  $z = \sqrt{64 - x^2 - y^2}, z = 4, x^2 + y^2 \leq 39.$

3)  $z = -2((x-1)^2 + y^2) - 1, z = 4x - 5.$

11. Знайти масу тіла  $V$  з густиною  $\mu$  :

$$V : 9(x^2 + y^2) = z^2, x^2 + y^2 = 4,$$

$$x, y, z \geq 0; \mu = \frac{5(x^2 + y^2)}{3}.$$

12. Знайти координати центра мас однорідного тіла, обмеженого поверхнями:

$$z = 9\sqrt{x^2 + y^2}, z = 36.$$

13. Знайти довжину дуги кривої:

1)  $y = \arcsin x - \sqrt{1 - x^2}, 0 \leq x \leq \frac{15}{16}.$

2)  $\rho = 6(1 + \sin \varphi), -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq 0.$

14. Знайти масу кривої  $x = R \cos t,$ 

$$y = R \sin t, z = \frac{at}{2\pi}, 0 \leq t \leq 2\pi$$
 з густиною  $\mu = x^2 + y^2 + z^2.$

15. Знайти роботу сили  $\mathbf{F} = (y\sqrt{x^2 + y^2} + x)\mathbf{i} + (y - x\sqrt{x^2 + y^2})\mathbf{j}$  при переміщенні вздовж кола  $x^2 + y^2 = 1$  ( $y \geq 0$ )від точки  $M(1, 0)$  до точки  $N(-1, 0)$ .

16. Знайти функцію за її диференціалом:

$$du = \left( x\sqrt{y+1} + \arctg \frac{x+1}{5} \right) dx + \left( \frac{x^2}{4\sqrt{y+1}} + \frac{y^2}{y+1} \right) dy.$$

17. Знайти циркуляцію векторного поля (безпосередньо та за теоремою Стокса):

1)  $\mathbf{a} = (x - y, x, z^2),$

$$\Gamma : x^2 + y^2 = 4z^2 \cap z = \frac{1}{2}.$$

2)  $\mathbf{a} = (4y, -3x, x), \Gamma : \{ x = 4 \cos t,$

$$y = 4 \sin t, z = 4 - 4 \cos t - 4 \sin t,$$

$$0 \leq t \leq 2\pi.$$

18. 
$$\boxed{u = x + \ln(z^2 + y^2), \mathbf{l} = (-2, 1, -1), M(2, 1, 1)} \left. \frac{\partial u}{\partial \mathbf{l}} \right|_M = ?$$

19. Знайти кут між градієнтами скалярних

полів  $v = -\frac{\sqrt{6}}{2x} + \frac{\sqrt{6}}{2y} - \frac{2}{3z}$  і  $u = \frac{x}{yz^2}$  у

точці  $M\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$

20. Знайти величину і напрям найбільшої зміни функції  $u(M) = x^2yz$  у точці  $M_0(1, 0, 4)$ .

21. Знайти найбільшу густину циркуляції векторного поля  $\mathbf{a} = (x + y^2, yz, -x^2)$  у точці  $M_0(1, 0, 4)$ .

22. Знайти потік векторного поля крізь частину поверхні  $S$  (нормаль зовнішня):

1)  $\mathbf{a} = (xz + y, yz - x, z^2 - 2)$ ,

$$S : x^2 + y^2 = z^2 \quad (0 \leq z < 3).$$

2)  $\mathbf{a} = (2x, 5y, 5z)$ ,  $S : \begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{3} + z = 1, \\ (x, y, z > 0). \end{cases}$

3)  $\mathbf{a} = (3x^2, -2x^2y, 2xz - z)$ ,

$$S : x^2 + y^2 = 1 \quad (0 \leq z < 1).$$

23. Знайти потік векторного поля  $\mathbf{a}$  крізь замкнену поверхню  $S$  (нормаль зовнішня):

1)  $\mathbf{a} = (x + y^2, xz + y, \sqrt{x^2 + 1} + z)$ ,

$$S : x^2 + y^2 = z^2, z = 2, z = 3.$$

2)  $\mathbf{a} = (y + 6x, 5x + 5z, 4y)$ ,  $S : y = x$ ,

$$y = 2x, y = 2, z = x^2 + y^2, z = 0.$$

24. Знайти масу частини поверхні  $\Omega$ , обмеженої  $S$ , з густиною  $\mu = \mu_0$  :

$$\Omega : x^2 + y^2 + z^2 = a^2,$$

$$S : \{x^2 + y^2 \geq \pm ax\}.$$

Зінтегрувати диференціальне рівняння або розв'язати задачу Коші (25 – 34) :

25.  $\sqrt{5 + y^2} + y'y\sqrt{1 - x^2} = 0.$

26.1)  $ydx + (2\sqrt{xy} - x)dy = 0.$

2)  $xy' = 3\sqrt{x^2 + y^2} + y.$

3)  $y' = \frac{y - 2x + 3}{x - 1}.$

27.1)  $y' + \frac{y}{x} = 3x, y(1) = 1.$

2)  $(xy + \sqrt{y})dy + y^2dx = 0,$

$$y\left(-\frac{1}{2}\right) = 4.$$

28.  $3y - 2xy' = (20x^2 + 12)y^3, y(1) = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$

29.  $\left(xe^x + \frac{y}{x^2}\right)dx - \frac{1}{x}dy = 0.$

30.1)  $y'' = xe^{-2x}, y(0) = \frac{1}{4},$

$$y'(0) = -\frac{1}{4}.$$

2)  $xy''' + y'' + x = 0.$

3)  $y'' + 18 \sin y \cos^3 y = 0,$

$$y(0) = 0, y'(0) = 3.$$

31.1)  $y'' + 6y' = 0.$

2)  $y'' + 10y' + 29y = 0.$

3)  $y'' - 8y' + 7y = 0.$

32.  $y^{IV} - 5y'' + 4y = 0, y(0) = -2,$

$$y'(0) = 1, y''(0) = 2, y'''(0) = 0.$$

33.1)  $y''' - y'' = 4x^2 - 3x + 2.$

2)  $y''' - 3y'' - y' + 3y = (4 - 8x)e^x.$

3)  $y'' + 2y' + 5y = -17 \sin 2x.$

4)  $y'' + 2y' = 2 \operatorname{sh} 2x.$

5)  $y'' - 10y' + 25y = e^{5x},$

$$y(0) = 1, y'(0) = 0.$$

34.1)  $y'' + 2y' + y = \frac{e^{-x}}{x}.$

2)  $y'' - 3y' + 2y = \frac{1}{3 + e^{-x}},$

$$y(0) = 1 + 8 \ln 2, y'(0) = 14 \ln 2.$$

35. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

1)  $\begin{cases} x' = x + 2y, \\ y' = 3x + 6y. \end{cases}$

2)  $\begin{cases} x' = 3x - 5y + 5t, \\ y' = x + 9y + 1 - 9t. \end{cases}$

**Варіант 17**

1.  $u = \sqrt{z}x^y; du|_{M_0(1,2,4)} = ?$

2.  $z = y^2 \cos x, x = u \ln v, y = v \ln u;$

$z'_u, z'_v = ?$

3. Скласти рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні в точці  $M_0(1, 2, 1)$  :

$2x^2 - y^2 + 2z^2 + xy + xz - 3 = 0$

4. Дослідити функцію на екстремум:

$z = 2xy - 5x^2 - 3y^2 + 2.$

5. Знайти найбільше та найменше значення функції  $z = 2x^2 + 2xy - \frac{y^2}{2} - 4x$ в області  $\bar{D} : y = 2x, y = 2, x = 0.$ 

6. Змінити порядок інтегрування:

$$\int_0^1 dy \int_{-y}^0 f dx + \int_1^{\sqrt{2}} dy \int_{-\sqrt{2-y^2}}^0 f dx.$$

7. Обчислити:

1)  $\iint_D y \sin xy dx dy.$

$D: y=\pi, y=2\pi, x=\frac{1}{2}, x=1$

2)  $\int_{-R}^R dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^0 \frac{dy}{\sqrt{x^2+y^2} \cos^2 \sqrt{x^2+y^2}}.$

3)  $\iiint_V xy dx dy dz.$

$V: \begin{cases} 2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 8, \\ z^2 = x^2 + y^2, x, y, z \geq 0 \end{cases}$

8. Знайти площі фігур, обмежених лініями:

1)  $x^2 + y^2 = 36, 3\sqrt{2}y = x^2 (y \geq 0).$

2)  $x^2 - 2y + y^2 = 0, x^2 - 10y + y^2 = 0,$

$y = \sqrt{3}x, y = \frac{x}{\sqrt{3}}.$

9. Знайти масу пластинки  $D$  з густиною

$\mu = 7x^4y, D : x^2 + \frac{y^2}{25} \leq 1, y \geq 0.$

10. Знайти об'єми тіл, обмежених поверхнями:

1)  $y = 6\sqrt{3}x, y = \sqrt{3}x, z = 0, x + z = 3.$

2)  $z = \sqrt{144 - x^2 - y^2}, 18z = x^2 + y^2.$

3)  $z = -2(x^2 + y^2) - 1, z = 4y - 1.$

11. Знайти масу тіла  $V$  з густиною  $\mu$  :

$V : x^2 + y^2 + z^2 = 4, x^2 + y^2 \leq 1;$

$\mu = 6|z|.$

12. Знайти координати центра мас однорідного тіла, обмеженого поверхнями:

$z = 3(x^2 + y^2), x^2 + y^2 = 9, z = 0.$

13. Знайти довжину дуги кривої:

1)  $y = 1 - \ln \sin x, \frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{2}.$

2)  $\rho = 7(1 - \sin \varphi), -\frac{\pi}{6} \leq \varphi < \frac{\pi}{6}.$

14. Знайти масу кривої  $x = \cos t,$  $y = \sin t, z = \sqrt{3}t, 0 \leq t \leq 2\pi$  з густиною  $\mu = x^2 + y^2 + z^2.$ 15. Знайти роботу сили  $\mathbf{F} = x^2y\mathbf{i} - xy^2\mathbf{j}$ при переміщенні вздовж кола  $(x, y \geq 0)$  $x^2 + y^2 = 4$  від точки  $M(2, 0)$  до точки  $N(0, 2).$ 

16. Знайти функцію за її диференціалом:

$du = (x \cos y^2 + 2x \sin x^2) dx +$

$+ (yx^2 \sin y^2 + (3y + 4)e^y) dy.$

17. Знайти циркуляцію векторного поля (безпосередньо та за теоремою Стокса):

1)  $\mathbf{a} = (xz, -1, y),$

$\Gamma : x^2 + y^2 + z^2 = 4 \cap z = 1.$

2)  $\mathbf{a} = (-z, -x, xz), 0 \leq t \leq 2\pi,$

$\Gamma : \{x = 5 \cos t, y = 5 \sin t, z = 4.\}$

18. 
$$\boxed{u = x^2y - \sqrt{xy + z^2}, \mathbf{l} = (0, 2, -2), M(1, 5, -2)} \left. \frac{\partial u}{\partial \mathbf{l}} \right|_M = ?$$

19. Знайти кут між градієнтами скалярних

полів  $v = \frac{6}{x} + \frac{2}{y} - \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}z}$  і  $u = \frac{y^2z^3}{x^2}$  уточці  $M\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$ 20. Знайти величину і напрям найбільшої зміни функції  $u(M) = (x + y)z^2$  уточці  $M_0(0, -1, 4).$

21. Знайти найбільшу густину циркуляції векторного поля  $\mathbf{a} = (xz, -y, yz)$  у точці  $M_0(0, -1, 4)$ .

22. Знайти потік векторного поля крізь частину поверхні  $S$  (нормаль зовнішня):

$$1) \mathbf{a} = (xyz, -x^2z, 3), S : \begin{cases} x^2 + y^2 = z^2, \\ (0 \leq z < 2). \end{cases}$$

$$2) \mathbf{a} = (x^2, y^2, 2z), S : \begin{cases} 2x + \frac{y}{2} + z = 1, \\ (x, y, z > 0). \end{cases}$$

$$3) \mathbf{a} = (x^2, x, xz), S : \begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{1}{4}, \\ (0 \leq z < 2). \end{cases}$$

23. Знайти потік векторного поля  $\mathbf{a}$  крізь замкнену поверхню  $S$  (нормаль зовнішня):

$$1) \mathbf{a} = \left( e^x + 2x, xz - y, \frac{1}{4}e^{xy} - \frac{z}{4} \right),$$

$$S : x^2 + y^2 + z^2 = 2y + 3.$$

$$2) \mathbf{a} = (y, 5y, z), S : \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ z = x, z \geq 0. \end{cases}$$

24. Знайти масу частини поверхні  $\Omega$ , обмеженої  $S$ , з густиною  $\mu = x$ :

$$\Omega : x^2 + y^2 = z^2, S : \{y^2 + z^2 = 2az\}.$$

Зінтегрувати диференціальне рівняння або розв'язати задачу Коші (25 – 34):

$$25. (y^2x + y^2)dy + xdx = 0.$$

$$26.1) xdy - ydx = \sqrt{x^2 + y^2}dx.$$

$$2) 2y' = \frac{y^2}{x^2} + 8\frac{y}{x} + 8.$$

$$3) y' = \frac{x + 2y - 3}{x - 1}.$$

$$27.1) y' - \frac{2xy}{1 + x^2} = 1 + x^2, y(1) = 3.$$

$$2) (\sin^2 2y - 2 \sin^2 y + 2x)dy = \sin 2y dx, y\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

$$28. y' + 2xy = 2x^3y^3, y(0) = \sqrt{2}.$$

$$29. (3x^2y + y^3)dx + (x^3 + 3xy^2)dy = 0.$$

$$30.1) y'' = \sin^2 3x, y(0) = -\frac{\pi^2}{16},$$

$$y'(0) = 0.$$

$$2) 2xy'y'' = y'^2 + 1.$$

$$3) y'' = 8 \sin^3 y \cos y, y(1) = \frac{\pi}{2},$$

$$y'(1) = 2.$$

$$31.1) y'' + 25y = 0.$$

$$2) y'' + 6y' + 9y = 0.$$

$$3) y'' + 2y' + 2y = 0.$$

$$32. y^{IV} - 10y'' + 9y = 0, y(0) = 0,$$

$$y'(0) = 0, y''(0) = 8, y'''(0) = 24.$$

$$33.1) y^{IV} - 3y''' + 3y'' - y' = x - 3.$$

$$2) y''' - y'' - 4y' + 4y = (7 - 6x)e^x.$$

$$3) y'' + 6y' + 13y = e^{-3x} \cos x.$$

$$4) y'' + 36y = 24 \sin 6x -$$

$$- 12 \cos 6x + 36e^{6x}.$$

$$5) y'' + y' - 12y = (16x + 22)e^{4x},$$

$$y(0) = 3, y'(0) = 5$$

$$34.1) y'' + y = \frac{1}{\cos x}.$$

$$2) y'' - 6y' + 8y = \frac{4e^{2x}}{1 + e^{-2x}},$$

$$y(0) = y'(0) = 0.$$

35. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

$$1) \begin{cases} x' = 5x + 4y, \\ y' = 4x + 5y. \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x' = 4x + 12y, \\ y' = x + 8y + 5. \end{cases}$$

### Варіант 18

1.  $u = -\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}; du|_{M_0(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2})} = ?$

2.  $z = \ln x \cdot y^2, x = ue^{-v}, y = 2ve^u;$

$z'_u, z'_v = ?$

3. Скласти рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні в точці  $M_0(3, 1, 4)$ :

$x^2 - y^2 + z^2 - 4x + 2y - 14 = 0.$

4. Дослідити функцію на екстремум:

$z = xy(12 - x - y).$

5. Знайти найбільше та найменше значення функції  $z = x^2 - 2xy + \frac{5y^2}{2} - 2x$  в

області  $\bar{D} : x = 0, x = 2, y = 0, y = 2.$

6. Змінити порядок інтегрування:

$$\int_0^1 dy \int_0^{y^2} f dx + \int_1^2 dy \int_0^{2-y} f dx.$$

7. Обчислити:

1)  $\iint_D y^2 \cos 2xy dx dy.$

$D: x=0, y=\sqrt{\frac{\pi}{2}}, y=\frac{x}{2}$

2)  $\int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} dy.$

3)  $\iiint_V \frac{y dx dy dz}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$   
 $V: x^2 + y^2 = 2y, z = 6, x^2 + y^2 = 4y, x, z \geq 0$

8. Знайти площі фігур, обмежених лініями:

1)  $y = 3\sqrt{x}, y = \frac{3}{x}, x = 4.$

2)  $y^2 - 2x + x^2 = 0, y^2 - 6x + x^2 = 0,$   
 $y = 0, \sqrt{3}y = x.$

9. Знайти масу пластинки  $D$  з густиною

$\mu = 35x^4y^3, D : x^2 + \frac{y^2}{9} \leq 1, y \geq 0.$

10. Знайти об'єми тіл, обмежених поверхнями:

1)  $x^2 = 1 - y, x + y + z = 3, y, z \geq 0.$

2)  $z = 26((x - 1)^2 + y^2) - 2, z = 50 - 52x.$

3)  $2z = 3\sqrt{x^2 + y^2}, z = \frac{5}{2} - x^2 - y^2.$

11. Знайти масу тіла  $V$  з густиною  $\mu$ :

$V : x^2 + y^2 = 1, x^2 + y^2 = z,$

$x, y \geq 0, z = 0; \mu = 10y.$

12. Знайти координати центра мас однорідного тіла, обмеженого поверхнями:

$x = 2\sqrt{y^2 + z^2}, y^2 + z^2 = 4, x = 0.$

13. Знайти довжину дуги кривої:

1)  $y = 1 - \ln(x^2 - 1), 3 \leq x \leq 4.$

2)  $\rho = 8(1 - \cos \varphi), -\frac{2\pi}{3} \leq \varphi \leq 0.$

14. Знайти масу кривої  $x = 2 \cos t, y = 2 \sin t, z = 2t, 0 \leq t \leq 2\pi$  з густиною  $\mu = z^2(x^2 + y^2)^{-1}.$

15. Знайти роботу сили  $\mathbf{F} = (y\sqrt{x^2 + y^2} + x)\mathbf{i} + (y - \sqrt{x^2 + y^2})\mathbf{j}$  при переміщенні вздовж параболи  $8y = 16 - x^2$  від точки  $M(4, 0)$  до точки  $N(0, 4).$

16. Знайти функцію за її диференціалом:

$du = (e^y + 2(2x + 1) \sin 2x) dx + (xe^y + 2y) dy.$

17. Знайти циркуляцію векторного поля (безпосередньо та за теоремою Стокса):

1)  $\mathbf{a} = (2yz, xz, -x^2), (z > 0)$

$\Gamma : x^2 + y^2 + z^2 = 25 \cap x^2 + y^2 = 9.$

2)  $\mathbf{a} = (z, x, y), 0 \leq t \leq 2\pi,$

$\Gamma : \{x = 2 \cos t, y = 2 \sin t, z = 0.\}$

18.  $\boxed{u = y \ln(1 + x^2) - \operatorname{arctg} z, \mathbf{l} = (2, -3, -2), M(0, 1, 1)}$   $\left. \frac{\partial u}{\partial \mathbf{l}} \right|_M = ?$

19. Знайти кут між градієнтами скалярних

полів  $v = \frac{1}{\sqrt{2}x} - \frac{2\sqrt{2}}{y} - \frac{3\sqrt{3}}{2z}$  і  $u = \frac{y^2z^3}{x}$

у точці  $M\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$

20. Знайти величину і напрям найбільшої зміни функції  $u(M) = (x + z)y^2$  у точці  $M_0(2, 2, 2)$ .

21. Знайти найбільшу густину циркуляції векторного поля  $\mathbf{a} = (xy, -x, yz)$  у точці  $M_0(2, 2, 2)$ .

22. Знайти потік векторного поля крізь частину поверхні  $S$  (нормаль зовнішня):

1)  $\mathbf{a} = (x + xy, y - x^2, z - 1)$ ,

$$S : x^2 + y^2 = z^2 \quad (0 \leq z < 3).$$

2)  $\mathbf{a} = (2x, y, -2z)$ ,  $S : \begin{cases} 2x + \frac{y}{2} + z = 1, \\ (x, y, z > 0). \end{cases}$

3)  $\mathbf{a} = (xy, yz, zx)$ ,  $S : \begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ (0 \leq z < 1). \end{cases}$

23. Знайти потік векторного поля  $\mathbf{a}$  крізь замкнену поверхню  $S$  (нормаль зовнішня):

1)  $\mathbf{a} = (\sqrt{z} + y, 3x, 3z + 5x)$ ,

$$S : z^2 = 8(x^2 + y^2), z = 2.$$

2)  $\mathbf{a} = (z, 3y - x, -z)$ ,  $S : x^2 + y^2 = 1$ ,

$$z = x^2 + y^2 + 2, z = 0.$$

24. Знайти масу частини поверхні  $\Omega$ , обмеженої  $S$ , з густиною  $\mu = \mu_0$  :

$$\Omega : x^2 + y^2 + z^2 = a^2,$$

$$S : \{(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)\}.$$

Зінтегрувати диференціальне рівняння або розв'язати задачу Коші (25 – 34) :

25.  $y \ln y + xy' = 0$ .

26.1)  $(4x^2 + 3xy + y^2)dx +$

$$+ (4y^2 + 3xy + x^2)dy = 0.$$

2)  $xy' = \frac{3y^3 + 10yx^2}{2y^2 + 5x^2}$ .

3)  $y' = \frac{3x + 2y - 1}{x + 1}$ .

27.1)  $y' + \frac{1 - 2x}{x^2}y = 1, y(1) = 1$ .

2)  $(y^2 + 2y - x)y' = 1, y(2) = 0$ .

28.  $xy' + y = y^2 \ln x, y(1) = 1$ .

29.  $\left(\frac{y}{x^2 + y^2} + e^x\right)dx - \frac{xdy}{x^2 + y^2} = 0$ .

30.1)  $y''' = x \sin x, y(0) = 0$ ,

$$y'(0) = y''(0) = 0.$$

2)  $xy''' + y'' = \sqrt{x}$ .

3)  $y'' = 32y^3, y(4) = 1, y'(4) = 4$ .

31.1)  $y'' - 3y' = 0$ .

2)  $y'' - 7y' - 8y = 0$ .

3)  $y'' + 4y' + 13y = 0$ .

32.  $y''' - y'' + y' - y = 0$ ,

$$y(0) = 0, y'(0) = 1, y''(0) = 0.$$

33.1)  $y^{IV} + 2y''' + y'' = 12x^2 - 6x$ .

2)  $y''' + 3y'' + 2y' = (1 - 2x)e^{-x}$ .

3)  $y'' - 4y' + 8y =$

$$= e^x(3 \sin x + 5 \cos x).$$

4)  $y''' - 25y' = 25(\sin 5x + \cos 5x) - 50e^{5x}$ .

5)  $y'' - 2y' + 5y = 5x^2 + 6x - 12$ ,

$$y(0) = 0, y'(0) = 2.$$

34.1)  $y'' + y = \frac{1}{\sin x}$ .

2)  $y'' + 16y = \frac{16}{\sin 4x}, y\left(\frac{\pi}{8}\right) = 3$ ,

$$y'\left(\frac{\pi}{8}\right) = 2\pi.$$

35. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

1)  $\begin{cases} x' = x + 2y, \\ y' = 4x + 3y. \end{cases}$

2)  $\begin{cases} x' = 5x + 14y + 4, \\ y' = x + 5y + 3. \end{cases}$

**Варіант 19**

1.  $u = \ln(x^3 + \sqrt[3]{y} - z); du|_{M_0(2,1,8)} = ?$

2.  $z = x^3y - yx, x = u \cos v, y = u \sin v;$

$z'_u, z'_v = ?$

3. Скласти рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні в точці  $M_0(1, 1, 2)$ :

$$x^2 + y^2 - z^2 + xz + 4y - 4 = 0.$$

4. Дослідити функцію на екстремум:

$$z = xy - x^2 - y^2 + 9.$$

5. Знайти найбільше та найменше значення функції  $z = xy - 3x - 2y$  в області  $\bar{D} : x = 0, x = 4, y = 0, y = 4$ .

6. Змінити порядок інтегрування:

$$\int_0^{\sqrt{3}} dy \int_{\sqrt{4-y^2}-2}^0 f dx + \int_{\sqrt{3}}^2 dy \int_{-\sqrt{4-y^2}}^0 f dx.$$

7. Обчислити:

1)  $\iint_D 8ye^{4xy} dx dy.$

$$D: y = \ln 3, y = \ln 4, x = \frac{1}{4}, x = \frac{1}{2}$$

2)  $\int_{-R}^0 dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \frac{dy}{\sqrt{x^2+y^2} \operatorname{ctg} \sqrt{x^2+y^2}}.$

3)  $\iiint_V \sqrt{x^2+y^2+z^2} dx dy dz.$   
 $V: x^2+y^2+z^2=36, y, z \geq 0, y \leq -x$

8. Знайти площі фігур, обмежених лініями:

1)  $y^2 = 4x, x = \frac{8}{y^2+4}.$

2)  $x^2 - 4y + y^2 = 0, x^2 - 10y + y^2 = 0,$   
 $\sqrt{3}y = x, y = \sqrt{3}x.$

9. Знайти масу пластинки  $D$  з густиною

$$\mu = \frac{7x^2y}{18}, D: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} \leq 1, y \geq 0.$$

10. Знайти об'єми тіл, обмежених поверхнями:

1)  $x = y^2, x = 1, x + y + z = 4, z = 0.$

2)  $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}, \sqrt{35}z = \sqrt{x^2 + y^2}.$

3)  $z = 30(x^2 + y^2) + 1, z = 60y + 1.$

11. Знайти масу тіла  $V$  з густиною  $\mu$ :

$$V: x^2 + y^2 = \frac{1}{49}z^2, x^2 + y^2 = \frac{1}{7}z,$$

$$x, y \geq 0; \mu = 10xz.$$

12. Знайти координати центра мас однорідного тіла, обмеженого поверхнями:

$$x^2 + z^2 = 4y, y = 9.$$

13. Знайти довжину дуги кривої:

1)  $y = \sqrt{x - x^2} - \arccos \sqrt{x}, \frac{1}{9} \leq x \leq 1.$

2)  $\rho = 2\varphi, 0 \leq \varphi \leq \frac{3}{4}.$

14. Знайти масу кривої  $x = \frac{a}{\sqrt{2}} \cos t,$

$$y = \frac{a}{\sqrt{2}} \cos t, z = a \sin t, 0 \leq t \leq 2\pi$$
 з

густиною  $\mu = \sqrt{2y^2 + z^2}.$

15. Знайти роботу сили  $\mathbf{F} = y^2\mathbf{i} - x^2\mathbf{j}$

при переміщенні вздовж кола  $(x, y \geq 0)$

$x^2 + y^2 = 9$  від точки  $M(3, 0)$  до точки  $N(0, 3).$

16. Знайти функцію за її диференціалом:

$$du = \left( e^{x+y} + \frac{2x}{x^2+1} \right) dx +$$

$$+ (e^{x+y} + 3(3y+5) \sin 3x) dy.$$

17. Знайти циркуляцію векторного поля (безпосередньо та за теоремою Стокса):

1)  $\mathbf{a} = (4x, -yz, x),$

$$\Gamma: x^2 + y^2 = 1 \cap x + y + z = 1.$$

2)  $\mathbf{a} = (y - z, z - x, x - y), 0 \leq t \leq 2\pi,$

$$\Gamma: \{x = 3 \cos t, y = 3 \sin t, z = 2(1 - \cos t)\}.$$

18.  $\left[ \frac{u = x(\ln y - \operatorname{arctg} z),}{\mathbf{l}(8, 4, 8), M(-2, 1, -1)} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{l}} \right]_M = ?$

19. Знайти кут між градієнтами скалярних полів  $v = 6\sqrt{6}x^3 - 6\sqrt{6}y^3 + 2z^3$  і

$$u = \frac{y}{xz^2}$$
 у точці  $M\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, 1\right).$

20. Знайти величину і напрям найбільшої зміни функції  $u(M) = x^2(y^2 + z)$  у точці  $M_0(4, 1, -3).$



21. Знайти найбільшу густину циркуляції векторного поля  $\mathbf{a} = (x + y, xyz, -x)$  у точці  $M_0(4, 1, -3)$ .

22. Знайти потік векторного поля крізь частину поверхні  $S$  (нормаль зовнішня):

1)  $\mathbf{a} = (x + y, y - x, z - 2)$ ,

$$S : x^2 + y^2 = z^2 \quad (0 \leq z < 2).$$

2)  $\mathbf{a} = (x, y, 2z)$ ,  $S : \begin{cases} 2x + \frac{y}{2} + z = 1, \\ (x, y, z > 0). \end{cases}$

3)  $\mathbf{a} = (xy, yz, zx)$ ,  $S : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ (x, y, z > 0). \end{cases}$

23. Знайти потік векторного поля  $\mathbf{a}$  крізь замкнену поверхню  $S$  (нормаль зовнішня):

1)  $\mathbf{a} = (8yz - x, x^2 - 1, xy - 2z)$ ,

$$S : 2x + 3y - z = 6, x, y, z = 0.$$

2)  $\mathbf{a} = (y, x + 2y, x)$ ,  $S : x^2 + y^2 = 2x$ ,

$$z = x^2 + y^2, z = 0.$$

24. Знайти масу частини поверхні  $\Omega$ , обмеженої  $S$ , з густиною  $\mu = x^2 + y^2 + z^2$ :  
 $\Omega : x^2 + y^2 = z^2, S : \{0 \leq z < 4\}$ .

Зінтегрувати диференціальне рівняння або розв'язати задачу Коші (25 – 34) :

25.  $(1 + e^x)y' = ye^x$ .

26.1)  $(x - y)ydx - x^2dy = 0$ .

2)  $y' = \frac{x^2 + 3xy - y^2}{3x^2 - 2xy}$ .

3)  $y' = \frac{5y + 5}{4x + 3y - 1}$ .

27.1)  $y' + \frac{3y}{x} = \frac{2}{x^3}, y(1) = 1$ .

2)  $2y\sqrt{y}dx - (6x\sqrt{y} + 7)dy = 0$ ,

$$y(-4) = 1.$$

28.  $2y' + 3y \cos x = \frac{(8 + 12 \cos x)e^{2x}}{y}$ ,

$$y(0) = 2.$$

29.  $e^y dx + (\cos y + xe^y)dy = 0$ .

30.1)  $y''' \sin^4 x = \sin 2x, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$ ,

$$y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, y''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1.$$

2)  $y''' \operatorname{tg} x = y'' + 1$ .

3)  $y''y^3 = -16, y(1) = 2, y'(1) = 2$ .

31.1)  $y'' - 3y' - 4y = 0$ .

2)  $y'' + 6y' + 13y = 0$ .

3)  $y'' + 2y' = 0$ .

32.  $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$ ,

$$y(0) = y'(0) = 0, y''(0) = 4.$$

33.1)  $y''' - 4y'' = 32 - 384x^2$ .

2)  $y''' - 5y'' + 7y' - 3y = (20 - 16x)e^{-x}$ .

3)  $y'' + 2y' = 6e^x(\sin x + \cos x)$ .

4)  $y'' + 3y' = 2 \operatorname{sh} 3x$ .

5)  $y'' + 8y' + 16y = 16x^3 + 24x^2 - 10x + 8, y(0) = 1, y'(0) = 3$ .

34.1)  $y'' + 4y = \frac{1}{\sin 2x}$ .

2)  $y'' + 16y = \frac{16}{\cos 4x}, y(0) = 3, y'(0) = 0$ .

35. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

1)  $\begin{cases} x' = x + 4y, \\ y' = x + y. \end{cases}$

2)  $\begin{cases} x' = 2x - 2y, \\ y' = x - 3y - 2. \end{cases}$

**Варіант 20**

1.  $u = \frac{z}{x^4 + y^2}; du|_{M_0(2,3,25)} = ?$

2.  $z = x^2 \ln y, x = \frac{u}{v}, y = 3u - 2v; z'_u, z'_v = ?$

3. Скласти рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні в точці  $M_0(-2, 1, 0)$ :

$$x^2 - y^2 - z^2 + xz + 4x + 5 = 0.$$

4. Дослідити функцію на екстремум:

$$z = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + 10.$$

5. Знайти найбільше та найменше значення функції  $z = x^2 + xy - 2$  в області  $\bar{D}: y = 4x^2 - 4, y = 0$ .

6. Змінити порядок інтегрування:

$$\int_{-2}^{-1} dy \int_{-2-y}^0 f dx + \int_{-1}^0 dy \int_{\sqrt[3]{y}}^0 f dx.$$

7. Обчислити:

1)  $\iint_D 3y^2 \sin \frac{xy}{2} dx dy.$

$$D: x=0, y=\sqrt{\frac{4\pi}{3}}, y=\frac{2x}{3}$$

2)  $\int_{-3}^3 dx \int_{-\sqrt{9-x^2}}^0 \frac{xy}{x^2 + y^2} dy.$

3)  $\iiint_V \frac{x dx dy dz}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$

$$V: \begin{cases} x^2 + y^2 = 2x, z \geq 0, z = 4 \\ x^2 + y^2 = 4x, 0 \leq y \leq x \end{cases}$$

8. Знайти площі фігур, обмежених лініями:

1)  $y = \frac{25}{4} - x^2, y = x - \frac{5}{2}.$

2)  $y^2 - 8y + x^2 = 0, y^2 - 10y + x^2 = 0,$   
 $\sqrt{3}y = x, y = \sqrt{3}x.$

9. Знайти масу пластинки  $D$  з густиною

$$\mu = \frac{y}{x^3}, D: 1 \leq x^2 + \frac{y^2}{16} \leq 9, 0 \leq y \leq 4x.$$

10. Знайти об'єми тіл, обмежених поверхнями:

1)  $x + y = 6, y = \sqrt{3}x, z = 4y, z = 0.$

2)  $z = \sqrt{49 - x^2 - y^2}, z = 3, x^2 + y^2 \leq 33.$

3)  $z = -16((x+1)^2 + y^2) - 1,$   
 $z = -32x - 33.$

11. Знайти масу тіла  $V$  з густиною  $\mu$ :

$$V: x^2 + y^2 + z^2 = 4, x^2 + y^2 = 4z^2,$$

$$x, y \geq 0 (z \geq 0); \mu = 10z.$$

12. Знайти координати центра мас однорідного тіла, обмеженого поверхнями:

$$x = 5\sqrt{y^2 + z^2}, x = 20.$$

13. Знайти довжину дуги кривої:

1)  $y = \sqrt{1-x^2} - \arccos x, 0 \leq x \leq \frac{9}{16}.$

2)  $\rho = 2\varphi, 0 \leq \varphi \leq \frac{4}{3}.$

14. Знайти масу кривої  $x = \frac{1}{2} \cos t,$ 

$$y = \frac{1}{2} \cos t, z = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin t, 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

з густиною  $\mu = xyz.$ 15. Знайти роботу сили  $\mathbf{F} = (x+y)^2 \mathbf{i} - (x^2 + y^2) \mathbf{j}$  при переміщенні вздовж відрізка  $MN$  від точки  $M(1, 0)$  до точки  $N(0, 1).$ 

16. Знайти функцію за її диференціалом:

$$du = (\sqrt{x^3(y+1)} + 2(2x+7) \cos 2x) dx + \left( \frac{\sqrt{x^5}}{5\sqrt{y+1}} + e^{-y} \right) dy.$$

17. Знайти циркуляцію векторного поля (безпосередньо та за теоремою Стокса):

1)  $\mathbf{a} = (-y, 2, 1),$

$$\Gamma: x^2 + y^2 = z^2 \cap z = 1.$$

2)  $\mathbf{a} = (2y, -z, x), \Gamma: \{x = \cos t, y = \sin t,$

$$z = 4 - \cos t - \sin t, 0 \leq t \leq 2\pi.$$

18.  $\boxed{u = \ln(3-x^2) + xy^2z, \frac{\partial u}{\partial \mathbf{l}}|_M = ?}$   
 $\mathbf{l}(-1, 2, -2), M(1, 3, 2)$

19. Знайти кут між градієнтами скалярних полів  $v = x^3 - y^2 - 3z^2$  і  $u = \frac{yz^2}{x}$ 

у точці  $M\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$

20. Знайти величину і напрям найбільшої зміни функції  $u(M) = (x^2 + z)y^2$  у точці  $M_0(-4, 1, 0)$ .

21. Знайти найбільшу густину циркуляції векторного поля  $\mathbf{a} = (x - y, yz, -y)$  у точці  $M_0(-4, 1, 0)$ .

22. Знайти потік векторного поля крізь частину поверхні  $S$  (нормаль зовнішня):

$$1) \mathbf{a} = (x, y, z - 2), S : \begin{cases} x^2 + y^2 = z^2, \\ (0 \leq z < 1). \end{cases}$$

$$2) \mathbf{a} = (-x, y, 12z), S : \begin{cases} 2x + \frac{y}{2} + z = 1, \\ (x, y, z > 0). \end{cases}$$

$$3) \mathbf{a} = (z, yz, -xy), S : \begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ (0 \leq z < 1). \end{cases}$$

23. Знайти потік векторного поля  $\mathbf{a}$  крізь замкнену поверхню  $S$  (нормаль зовнішня):

$$1) \mathbf{a} = (y + z^2, x^2 + 3y, xy),$$

$$S : x^2 + y^2 + z^2 = 2x.$$

$$2) \mathbf{a} = (x, 2y - x, 3z + y), S : y = x,$$

$$y = 2x, x = 1, z = x^2 + y^2, z = 0.$$

24. Знайти масу частини поверхні  $\Omega$ , обмеженої  $S$ , з густиною  $\mu = \mu_0$ :

$$\Omega : x^2 + y^2 + z^2 = a^2,$$

$$S : \{x, y, z \geq 0, x + y \leq a\}.$$

Зінтегрувати диференціальне рівняння або розв'язати задачу Коші (25 – 34):

$$25. \sqrt{1 - x^2}y' + xy^2 + x = 0.$$

$$26.1) xy + y^2 = (2x^2 + xy)y'.$$

$$2) xy' = 3\sqrt{2x^2 + y^2} + y.$$

$$3) y' = \frac{x + 4y - 5}{6x - y - 5}.$$

$$27.1) y' + 2xy = -2x^3, y(1) = e^{-1}.$$

$$2) dx = (\sin y + 3 \cos y + 3x)dy,$$

$$y\left(e^{\frac{\pi}{2}}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

$$28. 4y' + x^3y = (x^3 + 8)e^{-2x}y^2, y(0) = 1.$$

$$29. (y^3 + \cos x)dx + (3xy^2 + e^y)dy = 0.$$

$$30.1) y'' = \cos x + e^{-x}, y(0) = -e^{-\pi}, \\ y'(0) = 1.$$

$$2) y''' \operatorname{tg} 5x = 5y''.$$

$$3) y'' = -32 \sin y \cos^3 y, y(0) = 0, \\ y'(0) = 4.$$

$$31.1) y'' + 25y' = 0.$$

$$2) y'' - 10y' + 16y = 0.$$

$$3) y'' - 8y' + 16y = 0.$$

$$32. y''' - y'' + 4y' - 4y = 0, \\ y(0) = -1, y'(0) = 0, y''(0) = -6.$$

$$33.1) y^{IV} + 2y''' + y'' = 2 - 3x^2.$$

$$2) y''' - 4y'' + 3y' = -4xe^x.$$

$$3) y'' - 4y' + 4y = -e^{2x} \sin 4x.$$

$$4) y'' + 49y = 14 \sin 7x + \\ + 7 \cos 7x - 98e^{7x}.$$

$$5) y'' - 2y' + 37y = 36e^x \cos 6x, \\ y(0) = 0, y'(0) = 6.$$

$$34.1) y'' + 4y = \operatorname{tg} 2x.$$

$$2) y'' - 2y' = \frac{4e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}, y(0) = \ln 4, \\ y'(0) = \ln 4 - 2.$$

35. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

$$1) \begin{cases} x' = 3x - 2y, \\ y' = 2x + 8y. \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x' = 2x - 5y + 1, \\ y' = x - 4y - 1. \end{cases}$$

**Варіант 21**

1.  $u = 8\sqrt{x^3 + y^2 + z}; du|_{M_0(3,2,1)} = ?$

2.  $z = \arcsin xy, x = u \cos v, y = u^2 v^{-1}; z'_u, z'_v = ?$

3. Скласти рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні в точці  $M_0(1, 4, -1)$ :

$$x^2 + y^2 - xz + y - 3z - 11 = 0.$$

4. Дослідити функцію на екстремум:

$$z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1.$$

5. Знайти найбільше та найменше значення функції  $z = x^2 y(4 - x - y)$  в області  $\bar{D}: x = 0, y = 0, y = 6 - x$ .

6. Змінити порядок інтегрування:

$$\int_0^1 dy \int_0^y f dx + \int_1^e dy \int_{\ln y}^1 f dx.$$

7. Обчислити:

1) 
$$\iint_{D: y=\pi, y=3\pi, x=\frac{1}{2}, x=1} y \cos xy dx dy.$$

2) 
$$\int_{-R}^0 dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^0 \cos(x^2 + y^2) dy.$$

3) 
$$\iiint_{V: 1 \leq x^2+y^2+z^2 \leq 9, y, z \geq 0, x \geq \sqrt{3}y} \frac{z dx dy dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

8. Знайти площі фігур, обмежених лініями:

1)  $y = \sqrt{x}, y = \frac{1}{x}, x = 16.$

2)  $x^2 - 2y + y^2 = 0, x^2 - 4y + y^2 = 0, y = 0, y = x.$

9. Знайти масу пластинки  $D$  з густиною

$$\mu = 11xy^8, D: \frac{x^2}{9} + y^2 \leq 1, x \geq 0.$$

10. Знайти об'єми тіл, обмежених поверхнями:

1)  $x = 7\sqrt{3y}, x = 2\sqrt{3y}, z = 0, z + y = 3.$

2)  $z = \sqrt{36 - x^2 - y^2}, 9z = x^2 + y^2.$

3)  $z = 2 - 18(x^2 + y^2), z = 2 - 36y.$

11. Знайти масу тіла  $V$  з густиною  $\mu$ :

$$V: 16(x^2 + y^2) = z^2, x^2 + y^2 = 1, x, y, z \geq 0; \mu = 5(x^2 + y^2).$$

12. Знайти координати центра мас однорідного тіла, обмеженого поверхнями:

$$y = x^2 + z^2, x^2 + z^2 = 10, y = 0.$$

13. Знайти довжину дуги кривої:

1)  $y = \ln \sin x, \frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{2}.$

2)  $\rho = 2\varphi, 0 \leq \varphi \leq \frac{5}{12}.$

14. Знайти масу кривої  $x = t \cos t, y = t \sin t, z = t, 0 \leq t \leq 2\pi$  з густиною

$$\mu = 2z - \sqrt{x^2 + y^2}.$$

15. Знайти роботу сили  $\mathbf{F} = (x^2 + y^2)\mathbf{i} + y^2\mathbf{j}$  при переміщенні вздовж відрізка  $MN$  від точки  $M(2, 0)$  до точки  $N(0, 2)$ .

16. Знайти функцію за її диференціалом:

$$du = \left( \arccos y + \frac{x^2}{x+2} \right) dx + \left( \frac{x}{\sqrt{1-y^2}} + (4y+5)e^y \right) dy.$$

17. Знайти циркуляцію векторного поля (безпосередньо та за теоремою Стокса):

1)  $\mathbf{a} = (y, 3x, z^2),$

$$\Gamma: z = x^2 + y^2 - 1 \cap z = 3.$$

2)  $\mathbf{a} = (xz, x, z^2), 0 \leq t \leq 2\pi,$

$$\Gamma: \{x = \cos t, y = \sin t, z = \sin t.\}$$

18. 
$$\boxed{u = \sin(x+2y) + \sqrt{xyz}}, \frac{\partial u}{\partial l} \Big|_M = ?$$
  
$$l(4, 3, 0), M\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, 3\right)$$

19. Знайти кут між градієнтами скалярних

полів  $v = \frac{3x^2}{\sqrt{2}} - \frac{y^2}{\sqrt{2}} - \sqrt{32}z^2$  і  $u = \frac{z^2}{x^2 y^2}$

у точці  $M\left(\frac{2}{3}, 2, \sqrt{\frac{2}{3}}\right).$

20. Знайти величину і напрям найбільшої зміни функції  $u(M) = x^2(y + z^2)$  у точці  $M_0(3, 0, 1)$ .

21. Знайти найбільшу густину циркуляції векторного поля  $\mathbf{a} = (y - z, -z^2, xyz)$  у точці  $M_0(3, 0, 1)$ .

22. Знайти потік векторного поля крізь частину поверхні  $S$  (нормаль зовнішня):

1)  $\mathbf{a} = (x + xz, y, z - x^2)$ ,

$$S : x^2 + y^2 + z^2 = 4 (z > 0).$$

2)  $\mathbf{a} = (x, 3y, 8z)$ ,  $S : \begin{cases} x + 2y + \frac{z}{2} = 1, \\ (x, y, z > 0). \end{cases}$

3)  $\mathbf{a} = (x^2, x, xz)$ ,  $S : z^2 = x^2 + y^2$ ,

$$x, y \geq 0 \quad (0 \leq z < 1).$$

23. Знайти потік векторного поля  $\mathbf{a}$  крізь замкнену поверхню  $S$  (нормаль зовнішня):

1)  $\mathbf{a} = (2yz - x, xz + 2y, x^2 + z)$ ,

$$S : y - x + z = 1, x, y, z = 0.$$

2)  $\mathbf{a} = (7x, z, x - y + 5z)$ ,  $S : z = x^2 + y^2$ ,

$$z = x^2 + 2y^2, y = x, y = 2x, x = 1.$$

24. Знайти масу частини поверхні  $\Omega$ , обмеженої  $S$ , з густиною  $\mu = \sqrt{x^2 + y^2}$  :

$$\Omega : x^2 + y^2 = z^2, S : \{0 \leq z \leq 1\}.$$

Зінтегрувати диференціальне рівняння або розв'язати задачу Коші (25 – 34) :

25.  $\frac{e^{-x^2} dy}{x} + \frac{dx}{\cos^2 y} = 0.$

26.1)  $(x^2 - 2xy)y' = xy - y^2.$

2)  $y' = \frac{y^2}{x^2} + 8\frac{y}{x} + 12.$

3)  $y' = \frac{x + y + 2}{x + 1}.$

27.1)  $y' + \frac{xy}{2(1 - x^2)} = \frac{x}{2}, y(0) = \frac{2}{3}.$

2)  $2(\cos^2 y \cos 2y - x)y' = \sin 2y,$

$$y\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{5\pi}{4}.$$

28.  $8xy' - 12y = -(5x^2 + 3)y^3, y(1) = \sqrt{2}.$

29.  $xe^{y^2} dx + (x^2 ye^{y^2} + \operatorname{tg}^2 y) dy = 0$

30.1)  $y'' = \sin^3 x, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{7}{9}, y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$

2)  $y''' \operatorname{th} 7x = 7y''.$

3)  $y'' = 50 \sin^3 y \cos y, y(1) = \frac{\pi}{2},$

$$y'(1) = 5.$$

31.1)  $y'' - 3y' - 18y = 0.$

2)  $y'' - 6y' = 0.$

3)  $y'' + 2y' + 5y = 0.$

32.  $y^{IV} - 2y''' + y'' = 0, y(0) = y'(0) = 0,$

$$y''(0) = 1, y'''(0) = 2.$$

33.1)  $y''' + y'' = 49 - 24x^2.$

2)  $y''' - 5y'' + 3y' + 9y = e^{-x}(32x - 32).$

3)  $y'' + 6y' + 13y = -e^{3x} \cos 5x.$

4)  $y''' - 36y' = 36e^{6x} - 72(\cos 6x + \sin 6x).$

5)  $y'' - 8y' = 16 + 48x^2 - 128x^3,$   
 $y(0) = -1, y'(0) = 14.$

34.1)  $y'' + 4y' + 4y = \frac{e^{-2x}}{x^3}.$

2)  $y'' + \frac{y}{4} = \frac{1}{4} \operatorname{ctg} \frac{x}{2}, y(\pi) = 2,$

$$y'(\pi) = \frac{1}{2}.$$

35. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

1)  $\begin{cases} x' = x + 4y, \\ y' = 2x + 3y. \end{cases}$

2)  $\begin{cases} x' = 2x + 7y + 1, \\ y' = x - 4y - 7. \end{cases}$

**Варіант 22**

1.  $u = \ln(\sqrt[5]{x} + \sqrt[4]{y} - z); du|_{M_0(1,1,1)} = ?$

2.  $z = \operatorname{tg} x^2 y, x = ue^{2v}, y = v \operatorname{ctg} u;$

$z'_u, z'_v = ?$

3. Скласти рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні в точці  $M_0(0, 2, 0)$  :

$$x^2 + 2y^2 + z^2 - 4xz - 8 = 0.$$

4. Дослідити функцію на екстремум:

$$z = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y.$$

5. Знайти найбільше та найменше значення функції  $z = x^3 + y^3 - 3xy$  в області  $\bar{D} : x = 0, x = 2, y = -1, y = 2$ .

6. Змінити порядок інтегрування:

$$\int_0^1 dy \int_0^{y^2} f dx + \int_1^{\sqrt{2}} dy \int_0^{\sqrt{2-y^2}} f dx.$$

7. Обчислити:

1)  $\iint_D y^2 e^{-\frac{xy}{2}} dx dy.$

$D: x=0, y=1, y=\frac{x}{2}$

2)  $\int_{-R}^0 dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \sin(x^2 + y^2) dy.$

3)  $\iiint_V \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz.$

$V: \begin{cases} x^2 - 2x + y^2 = 0, \\ y, z \geq 0, x + z = 2 \end{cases}$

8. Знайти площі фігур, обмежених лініями:

1)  $x = 5 - y^2, x = -4y.$

2)  $y^2 - 2x + x^2 = 0, y^2 - 4x + x^2 = 0,$

$y = 0, y = \sqrt{3}x.$

9. Знайти масу пластинки  $D$  з густиною

$\mu = \frac{x}{y}, D : 1 \leq \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} \leq 5, x \geq 0, y \geq 2x.$

10. Знайти об'єми тіл, обмежених поверхнями:

1)  $x = \frac{5}{3}\sqrt{y}, x = \frac{5y}{9}, z = 0, z = \frac{5}{9}(3 + \sqrt{y}).$

2)  $z = 9\sqrt{x^2 + y^2}, z = 22 - x^2 - y^2.$

3)  $z = 24((x+1)^2 + y^2) + 1, z = 48x + 49.$

11. Знайти масу тіла  $V$  з густиною  $\mu$  :

$V : x^2 + y^2 + z^2 = 16, x^2 + y^2 \leq 4,$

$x \geq 0, \mu = |z|.$

12. Знайти координати центра мас однорідного тіла, обмеженого поверхнями:

$y = 3\sqrt{x^2 + z^2}, x^2 + z^2 = 16, y = 0.$

13. Знайти довжину дуги кривої:

1)  $y = \ln \frac{7}{x}, \sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{8}.$

2)  $\rho = 2\varphi, 0 \leq \varphi \leq \frac{12}{5}.$

14. Знайти масу кривої  $x = \cos t, y = \sin t, z = \sqrt{3}t, 0 \leq t \leq 2\pi$  з густиною  $\mu = x^2 + y^2 + z^2$ .15. Знайти роботу сили  $\mathbf{F} = x^2 \mathbf{j}$  при переміщенні вздовж кола  $x^2 + y^2 = 9$  ( $x, y \geq 0$ ) від точки  $M(3, 0)$  до точки  $N(0, 3)$ .

16. Знайти функцію за її диференціалом:

$$du = \left( \operatorname{arctg} y + \ln \frac{x+1}{6} \right) dx +$$

$$+ \left( \frac{x}{1+y^2} + \frac{y^3}{y^2+2} \right) dy.$$

17. Знайти циркуляцію векторного поля (безпосередньо та за теоремою Стокса):

1)  $\mathbf{a} = (2yz, xz, y^2), \Gamma : x^2 + y^2 = 16 \cap$

$\cap x^2 + y^2 + z^2 = 25 (z > 0).$

2)  $\mathbf{a} = (-x^2 y^3, 3, y), 0 \leq t \leq 2\pi,$

$\Gamma : \{x = \cos t, y = \sin t, z = 5\}.$

18. 
$$\boxed{u = x^2 y^2 z - \ln(z-1), \mathbf{l} = (5, -6, 2\sqrt{5}), M(1, 1, 2)} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{l}} \Big|_M = ?$$

19. Знайти кут між градієнтами скалярних полів  $v = \frac{x^3}{\sqrt{2}} - \frac{y^3}{\sqrt{2}} - \frac{8z^3}{\sqrt{3}}$  і  $u = \frac{x^2}{y^2 z^3}$  у

точці  $M \left( \sqrt{2}, \sqrt{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right).$

20. Знайти величину і напрям найбільшої зміни функції  $u(M) = (x^2 - y)z^2$  у точці  $M_0(1, 3, 0)$ .

21. Знайти найбільшу густину циркуляції векторного поля  $\mathbf{a} = (yz, -z^2, x + y)$  у точці  $M_0(1, 3, 0)$ .

22. Знайти потік векторного поля крізь частину поверхні  $S$  (нормаль зовнішня):

1)  $\mathbf{a} = (x, y + yz^2, z - zy^2)$ ,

$$S : x^2 + y^2 + z^2 = 4 \quad (z > 0).$$

2)  $\mathbf{a} = (x, -y, 6z)$ ,  $S : \begin{cases} x + 2y + \frac{z}{2} = 1, \\ (x, y, z > 0). \end{cases}$

3)  $\mathbf{a} = (x^2, x, xz)$ ,  $S : \begin{cases} z^2 = x^2 + y^2, x \geq 0, \\ (0 \leq z < 1). \end{cases}$

23. Знайти потік векторного поля  $\mathbf{a}$  крізь замкнену поверхню  $S$  (нормаль зовнішня):

1)  $\mathbf{a} = (17x, 7y, 11z)$ ,  $S : z = x^2 + y^2$ ,

$$z = 2(x^2 + y^2), y = x^2, y = x.$$

2)  $\mathbf{a} = (x^2 + xy, y^2 + yz, z^2 + xz)$ ,  $S : x^2 + y^2 + z^2 = 1, x^2 + y^2 = z^2 \quad (z \geq 0)$ .

24. Знайти масу частини поверхні  $\Omega$ , обмеженої  $S$ , з густиною  $\mu = \mu_0$ :

$$\Omega : x^2 + y^2 + z^2 = a^2,$$

$$S : \{x^2 + y^2 = R^2, R \leq a\}.$$

Зінтегрувати диференціальне рівняння або розв'язати задачу Коші (25 – 34):

25.  $y(\ln y + 1) + xy' = 0$ .

26.1)  $(2\sqrt{xy} - y)dx + xdy = 0$ .

2)  $xy' = \frac{3y^3 + 12yx^2}{2y^2 + 6x^2}$ .

3)  $y' = \frac{2x + y - 3}{4x - 4}$ .

27.1)  $y' + xy = -x^3, y(0) = 3$ .

2)  $\operatorname{ch} y dx = (1 + x \operatorname{sh} y) dy, y(1) = \ln 2$ .

28.  $2(y' + y) = xy^2, y(0) = 2$ .

29.  $(5xy^2 - x^3)dx + (5x^2y - y)dy = 0$ .

30.1)  $y''' = \sqrt{x} - \sin 2x, y(0) = -\frac{1}{8}$ ,

$$y'(0) = \frac{1}{8} \cos 2, y''(0) = \frac{1}{2}.$$

2)  $x^3y''' + x^2y'' = \sqrt{x}$ .

3)  $y'' = 18y^3, y(1) = 1, y'(1) = 3$ .

31.1)  $y'' - 6y' + 9y = 0$ .

2)  $y'' - 2y' - 15y = 0$ .

3)  $y'' - 8y' = 0$ .

32.  $y^{\text{IV}} - y = 0, y(0) = y'(0) = 0$ ,

$$y''(0) = 0, y'''(0) = -4.$$

33.1)  $y''' - 2y'' = 3x^2 + x - 4$ .

2)  $y''' - 6y'' + 9y' = 4xe^x$ .

3)  $y'' + y = 2 \cos 7x - 3 \sin 7x$ .

4)  $y'' + 4y' = 16 \operatorname{sh} 4x$ .

5)  $y'' + 12y' + 36y = 72x^3 - 18$ ,

$$y(0) = 1, y'(0) = 0.$$

34.1)  $y'' - 4y' + 4y = \frac{e^{2x}}{x^3}$ .

2)  $y'' - 3y' + 2y = \frac{1}{2 + e^{-x}}$ ,

$$y(0) = 1 + 3 \ln 3, y'(0) = 5 \ln 3.$$

35. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

1)  $\begin{cases} x' = 7x + 3y, \\ y' = x + 5y. \end{cases}$

2)  $\begin{cases} x' = -4x + 16y + 4 \cos 2t - 2 \sin 2t, \\ y' = x + 2y - \cos 2t. \end{cases}$

**Варіант 23**

1.  $u = \frac{-2x}{\sqrt{y^2 + z^2}}; du|_{M_0(3,0,1)} = ?$

2.  $z = x^2 3^y, x = u - \sin v, y = u \cos v;$   
 $z'_u, z'_v = ?$

3. Скласти рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні в точці  $M_0(-1, -1, 1)$ :  
 $x^2 - y^2 - 2z^2 - 2y = 0.$

4. Дослідити функцію на екстремум:  
 $z = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y.$

5. Знайти найбільше та найменше значення функції  $z = 4x - 4y - x^2 - y^2$  в області  $\bar{D}: x + 2y = 4, x - 2y = 4, x = 0.$

6. Змінити порядок інтегрування:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} dy \int_0^{\sin y} f dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} dy \int_0^{\cos y} f dx.$$

7. Обчислити:

1)  $\iint_D y \sin 2xy dx dy.$   
 $D: y = \frac{\pi}{2}, y = \frac{3\pi}{2}, x = \frac{1}{2}, x = 2$

2)  $\int_{-1}^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1+x^2+y^2} dy.$

3)  $\iiint_V x^2 dx dy dz.$   
 $V: 1 \leq x^2 + y^2 \leq 16,$   
 $0 \leq y \leq x, z \geq 0$

8. Знайти площі фігур, обмежених лініями:

1)  $x = 27 - y^2, x = -6y.$

2)  $x^2 - 6y + y^2 = 0, x^2 - 8y + y^2 = 0,$   
 $y = x, x = 0.$

9. Знайти масу пластинки  $D$  з густиною

$$\mu = \frac{x}{y}, D: 1 \leq \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leq 5, x \geq 0, y \geq \frac{2x}{3}.$$

10. Знайти об'єми тіл, обмежених поверхнями:

1)  $x^2 + y^2 = 18, x = \sqrt{3y}, x, z = 0, z = \frac{10y}{11}.$

2)  $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}, \sqrt{15}z = \sqrt{x^2 + y^2}.$

3)  $z = 22(x^2 + y^2) + 3, z = 3 - 44y.$

11. Знайти масу тіла  $V$  з густиною  $\mu$ :

$$V: x^2 + y^2 = 4, x^2 + y^2 = 4z,$$

$$x, y \geq 0, z = 0; \mu = 5y.$$

12. Знайти координати центра мас однорідного тіла, обмеженого поверхнями:

$$y^2 + z^2 = 3x, x = 9.$$

13. Знайти довжину дуги кривої:

1)  $y = \operatorname{ch} x + 3, 0 \leq x \leq 1.$

2)  $\rho = 4\varphi, 0 \leq \varphi \leq \frac{3}{4}.$

14. Знайти масу кривої  $x = 2 \cos t, y = 2 \sin t, z = 2t, 0 \leq t \leq 2\pi$  з густиною  $\mu = z^2(x^2 + y^2)^{-1}.$

15. Знайти роботу сили  $\mathbf{F} = (y^2 - y)\mathbf{i} + (2xy + x)\mathbf{j}$  при переміщенні вздовж кола  $x^2 + y^2 = 9 (y \geq 0)$  від точки  $M(3, 0)$  до точки  $N(0, 3).$

16. Знайти функцію за її диференціалом:

$$du = (e^y + 2x\sqrt{x^2 + 1})dx + (xe^y + \arcsin \frac{x}{8})dy.$$

17. Знайти циркуляцію векторного поля (безпосередньо та за теоремою Стокса):

1)  $\mathbf{a} = (2 - xy, -yz, -xz),$

$$\Gamma: x^2 + y^2 = 4 \cap x + y + z = 1.$$

2)  $\mathbf{a} = (7z, -x, yz), 0 \leq t \leq 2\pi,$

$$\Gamma: \left\{ x = 6 \cos t, y = 6 \sin t, z = \frac{1}{3} \right\}.$$

18.  $\left[ \begin{array}{l} u = x^3 + \sqrt{y^2 + z^2}, \\ \mathbf{l} = (0, 1, -1), M(1, -3, 4) \end{array} \right] \frac{\partial u}{\partial \mathbf{l}} \Big|_M = ?$

19. Знайти кут між градієнтами скалярних полів  $v = \frac{3}{2}x^2 + 3y^2 - 2z^2$  і  $u = x^2yz^3$  у

точці  $M\left(2, \frac{1}{3}, \sqrt{\frac{3}{2}}\right).$

20. Знайти величину і напрям найбільшої зміни функції  $u(M) = x(y^2 + z^2)$  у точці  $M_0(1, -2, 1).$



21. Знайти найбільшу густину циркуляції векторного поля  $\mathbf{a} = (z^2, -xz, z^2)$  у точці  $M_0(1, -2, 1)$ .

22. Знайти потік векторного поля крізь частину поверхні  $S$  (нормаль зовнішня):

1)  $\mathbf{a} = (x + z, y + z, z - x - y)$ ,

$$S : x^2 + y^2 + z^2 = 4 \quad (z > 0).$$

2)  $\mathbf{a} = (x, 2y, 5z)$ ,  $S : \begin{cases} x + 2y + \frac{z}{2} = 1, \\ (x, y, z > 0). \end{cases}$

3)  $\mathbf{a} = (3x^2, -2x^2y, 1 - 2x)$ ,

$$S : x^2 + y^2 = 1 \quad (0 \leq z < 1).$$

23. Знайти потік векторного поля  $\mathbf{a}$  крізь замкнену поверхню  $S$  (нормаль зовнішня):

1)  $\mathbf{a} = \left( \cos z + \frac{x}{4}, e^x + \frac{y}{4}, \frac{z}{4} - 1 \right)$ ,

$$S : x^2 + y^2 + z^2 = 2z + 3.$$

2)  $\mathbf{a} = (x, z, -y)$ ,  $S : \begin{cases} z = 4 - 2(x^2 + y^2), \\ z = 2(x^2 + y^2). \end{cases}$

24. Знайти масу частини поверхні  $\Omega$ , обмеженої  $S$ , з густиною  $\mu = \sqrt{x^2 + y^2}$ :

$$\Omega : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}, S : \{0 \leq z \leq b\}.$$

Зінтегрувати диференціальне рівняння або розв'язати задачу Коші (25 – 34):

25.  $(3 + e^x)yy' = e^x$ .

26.1)  $xy' + y(\ln \frac{y}{x} - 1) = 0$ .

2)  $xy' = \frac{x^2 + xy - 3y^2}{x^2 - 4xy}$ .

3)  $y' = \frac{2x + y - 3}{2x - 2}$ .

27.1)  $y' - \frac{2y}{x+1} = e^x(x+1)^2, y(0) = 1$ .

2)  $(13y^3 - x)y' = 4y, y(5) = 1$ .

28.  $y' + xy = (x - 1)e^xy^2, y(0) = 1$ .

29.  $(\cos(x + y^2) + \sin x)dx + 2y \cos(x + y^2)dy = 0$ .

30.1)  $y'' = \sec^2 \frac{x}{2}, y(0) = 0, y'(0) = 1$ .

2)  $\operatorname{cth} x \cdot y'' - y' = -\frac{1}{\operatorname{ch} x}$ .

3)  $y''y^3 = -9, y(1) = 1, y'(1) = 3$ .

31.1)  $y'' + 2y' + y = 0$ .

2)  $y'' + 6y' + 25y = 0$ .

3)  $y'' - 4y' = 0$ .

32.  $y^{IV} - 16y = 0, y(0) = y'(0) = y''(0) = 0, y'''(0) = 16$ .

33.1)  $y''' - 13y'' + 12y' = x - 1$ .

2)  $y''' - 7y'' + 15y' - 9y = (8x - 12)e^x$ .

3)  $y'' + 2y' + 5y = -\cos x$ .

4)  $y'' + 64y = 16 \sin 8x - 16 \cos 8x - 64e^{8x}$ .

5)  $y'' + 3y' = (40x + 58)e^{2x}, y(0) = 0, y'(0) = 2$ .

34.1)  $y'' + 2y' + y = 3e^{-x}\sqrt{x+1}$ .

2)  $y'' + 3y' + 2y = \frac{e^{-x}}{2 + e^x}, y(0) = y'(0) = 0$ .

35. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

1)  $\begin{cases} x' = 4x - y, \\ y' = -x + 4y. \end{cases}$

2)  $\begin{cases} x' = -5x - 7y + 5 \sin 2t + 2 \cos 2t, \\ y' = x + y - \sin 2t. \end{cases}$

### Варіант 24

1.  $u = z \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2}\right); du|_{M_0(0,0,1)} = ?$

2.  $z = x^2y - \ln y, x = e^v \cos u,$   
 $y = e^u \sin v; z'_u, z'_v = ?$

3. Скласти рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні в точці  $M_0(1, 0, 1)$ :

$$x^2 + y^2 - 3z^2 + xz - 2z = 0.$$

4. Дослідити функцію на екстремум:  
 $z = xy(6 - x - y).$

5. Знайти найбільше та найменше значення функції  $z = x^2 + 2xy - y^2 - 4x$  в області  $\bar{D}: x = 3, y = 0, y = x + 1.$

6. Змінити порядок інтегрування:

$$\int_{-\sqrt{2}}^{-1} dy \int_{-\sqrt{2-y^2}}^0 f dx + \int_{-1}^0 dy \int_y^0 f dx.$$

7. Обчислити:

1)  $\iint_{D: x=0, y=\sqrt{\pi}, y=2x} y^2 \cos xy dx dy.$

2)  $\int_{-2}^2 dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \sqrt{x^2 + y^2} e^{x^2+y^2} dy.$

3)  $\iiint_{V: x^2+y^2=4y, y+z=4, z \geq 0} \frac{dx dy dz}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$

8. Знайти площі фігур, обмежених лініями:

1)  $x = 4 - y^2, x - y + 2 = 0.$

2)  $y^2 - 4x + x^2 = 0, y^2 - 8x + x^2 = 0,$   
 $y = \sqrt{3}x, y = 0.$

9. Знайти масу пластинки  $D$  з густиною

$$\mu = x^5 y, D: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1, x, y \geq 0.$$

10. Знайти об'єми тіл, обмежених поверхнями:

1)  $x + y = 6, x = \sqrt{3y}, z = \frac{4x}{5}, z = 0.$

2)  $2z = 21\sqrt{x^2 + y^2}, 2z = 23 - 2x^2 - 2y^2.$

3)  $z = 2 - 4((x - 1)^2 + y^2), z = 8x - 6.$

11. Знайти масу тіла  $V$  з густиною  $\mu$ :

$$V: x^2 + y^2 = \frac{4}{25} z^2, x^2 + y^2 = \frac{2}{5} z,$$

$$x, y \geq 0; \mu = 80xz.$$

12. Знайти координати центра мас однорідного тіла, обмеженого поверхнями:

$$y = \sqrt{x^2 + z^2}, y = 4.$$

13. Знайти довжину дуги кривої:

1)  $y = 1 + \arcsin x - \sqrt{1 - x^2}, 0 \leq x \leq \frac{3}{4}.$

2)  $\rho = 3\varphi, 0 \leq \varphi \leq \frac{4}{3}.$

14. Знайти масу кривої  $x = \frac{a}{\sqrt{2}} \cos t,$   
 $y = \frac{a}{\sqrt{2}} \sin t, z = a \sin t, 0 \leq t \leq 2\pi$  з

густиною  $\mu = \sqrt{2y^2 + z^2}.$

15. Знайти роботу сили  $\mathbf{F} = (x + y)\mathbf{i} + (x - y)\mathbf{j}$  при переміщенні вздовж кривої  $y = \sin x$  від точки  $M(\pi, 0)$  до точки  $N(0, 0).$

16. Знайти функцію за її диференціалом:

$$du = \left( (xy)^{\frac{4}{3}} + \operatorname{arctg} \frac{x+1}{9} \right) dx - \left( \frac{4}{7} x^2 (xy)^{\frac{1}{3}} + 4y^3 \sin y^4 \right) dy.$$

17. Знайти циркуляцію векторного поля (безпосередньо та за теоремою Стокса):

1)  $\mathbf{a} = (-y, x, 3z^2), (z > 0)$

$$\Gamma: x^2 + y^2 + z^2 = 9 \cap x^2 + y^2 = 1.$$

2)  $\mathbf{a} = (xy, x, y^2), 0 \leq t \leq 2\pi,$

$$\Gamma: \{x = \cos t, y = \sin t, z = \sin t.\}$$

18.  $\left. \begin{matrix} u = \frac{\sqrt{x}}{y} - \frac{yz}{x + \sqrt{y}}, \\ \mathbf{l} = (2, 0, 1), M(4, 1, -2) \end{matrix} \right| \frac{\partial u}{\partial \mathbf{l}} \Big|_M = ?$

19. Знайти кут між градієнтами скалярних

$$\text{полів } v = 9\sqrt{2}x^3 - \frac{3y^3}{2\sqrt{2}} - \frac{4z^3}{\sqrt{3}} \text{ і } u = \frac{xy^2}{z^3}$$

у точці  $M\left(\frac{1}{3}, 2, \sqrt{\frac{3}{2}}\right).$

20. Знайти величину і напрям найбільшої зміни функції  $u(M) = x^2 + 3y^2 - z^2$  у точці  $M_0(0, 0, 1)$ .

21. Знайти найбільшу густину циркуляції векторного поля  $\mathbf{a} = (xy, x - z, y - x)$  у точці  $M_0(0, 0, 1)$ .

22. Знайти потік векторного поля крізь частину поверхні  $S$  (нормаль зовнішня):

1)  $\mathbf{a} = (x + xy, y - x^2, z)$ ,

$$S : x^2 + y^2 + z^2 = 1 \quad (z > 0).$$

2)  $\mathbf{a} = (x, 4y, 5z)$ ,  $S : \begin{cases} x + 2y + \frac{z}{2} = 1, \\ (x, y, z > 0). \end{cases}$

3)  $\mathbf{a} = (\sqrt{z} + 1 + x, 2x + y, x + z)$ ,

$$S : z^2 = x^2 + y^2 \quad (0 \leq z < 1).$$

23. Знайти потік векторного поля  $\mathbf{a}$  крізь замкнену поверхню  $S$  (нормаль зовнішня):

1)  $\mathbf{a} = (2x + y, 0, y + 2z)$ ,

$$S : z = 2 - 4(x^2 + y^2), z = 4(x^2 + y^2).$$

2)  $\mathbf{a} = (x^2, 0, 0)$ ,  $S : z = 1 - x - y$ ,

$$x, y, z = 0.$$

24. Знайти масу частини поверхні  $\Omega$ , обмеженої  $S$ , з густиною  $\mu = \mu_0$  :

$$\Omega : x^2 + y^2 + z^2 = a^2,$$

$$S : \{z^2 = x^2 + y^2\}.$$

Зінтегрувати диференціальне рівняння або розв'язати задачу Коші (25 – 34) :

25.  $y' \sqrt{1 + y^2} = \frac{x^2}{y}$ .

26.1)  $(x^2 + y^2)dx + 2xydy = 0$ .

2)  $xy' = 2\sqrt{3x^2 + y^2} + y$ .

3)  $y' = \frac{y}{2x + 2y - 2}$ .

27.1)  $y' + 2xy = xe^{-x^2} \sin x, y(0) = 1$ .

2)  $y^2(y^2 + 4)dx + 2xy(y^2 + 4)dy = 2dy$ ,

$$y\left(\frac{\pi}{8}\right) = 2.$$

28.  $2y' - 3y \cos x = -e^{-2x}(2 + \cos x)y^{-1}$ ,  
 $y(0) = 2$ .

29.  $y \cdot 3^{xy} \ln 3 dx + (x \cdot 3^{xy} \ln 3 - 3) dy = 0$ .

30.1)  $y'' = 2 \sin x \cos^2 x, y(0) = -\frac{5}{9}$ ,

$$y'(0) = -\frac{2}{3}.$$

2)  $(x + 1)y''' + y'' = (x + 1)$ .

3)  $y''y^3 = 4(y^4 - 1)$ ,

$$y(0) = \sqrt{2}, y'(0) = \sqrt{2}.$$

31.1)  $y'' + 10y' = 0$ .

2)  $y'' - 6y' + 8y = 0$ .

3)  $4y'' + 4y' + y = 0$ .

32.  $y''' + y'' - 4y' - 4y = 0$ ,

$$y(0) = y'(0) = 0, y''(0) = 12.$$

33.1)  $y^{IV} + y''' = x$ .

2)  $y''' - y'' - 5y' - 3y = -(8x + 4)e^x$ .

3)  $y'' - 4y' + 8y = e^x(2 \sin x - \cos x)$ .

4)  $y'' - 49y = 14e^{7x} -$

$$- 49(\cos 7x + \sin 7x).$$

5)  $y'' - 9y' + 18y = 26 \cos x - 8 \sin x$ ,

$$y(0) = 0, y'(0) = 2.$$

34.1)  $y'' + y = -\operatorname{ctg}^2 x$ .

2)  $y'' + 4y = \frac{4}{\sin 2x}$ ,

$$y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2, y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \pi.$$

35. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

1)  $\begin{cases} x' = x + 8y, \\ y' = x + 4y. \end{cases}$

2)  $\begin{cases} x' = -5x + 7y + 3e^t, \\ y' = x + y - e^t. \end{cases}$

**Варіант 25**

1.  $u = z^{-1} \sin(x - y); du|_{M_0(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \sqrt{3})} = ?$

2.  $z = y^2 \cos x, x = u \ln v, y = v \ln u;$

$z'_u, z'_v = ?$

3. Скласти рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні в точці  $M_0(1, -1, 1)$  :

$2x^2 - y^2 + z^2 - 6x + 2y + 6 = 0$

4. Дослідити функцію на екстремум:

$z = x^2 + y^2 - xy + x + y.$

5. Знайти найбільше та найменше значення функції  $z = 6xy - 9x^2 - 9y^2 + 4x + 4y$  в області  $\bar{D} : x = 0, x = 1, y = 0, y = 2.$ 

6. Змінити порядок інтегрування:

$$\int_0^1 dy \int_0^{y^2} f dx + \int_1^2 dy \int_0^{2-y} f dx.$$

7. Обчислити:

1)  $\iint_{D: y=\ln 2, y=\ln 3, x=3, x=6} xy e^{\frac{xy}{3}} dx dy.$

2)  $\int_0^3 dx \int_0^{\sqrt{9-x^2}} \ln(1+x^2+y^2) dy.$

3)  $\iiint_{V: \begin{matrix} 4 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 16, \\ 0 \leq y \leq \sqrt{3}x, z \geq 0 \end{matrix}} \frac{y dx dy dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$

8. Знайти площі фігур, обмежених лініями:

1)  $x = y^2, x = \sqrt{2 - y^2}.$

2)  $x^2 - 4y + y^2 = 0, x^2 - 8y + y^2 = 0, y = 0, y = x.$

9. Знайти масу пластинки  $D$  з густиною

$\mu = x^4, D : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} \leq 1.$

10. Знайти об'єми тіл, обмежених поверхнями:

1)  $y = \sqrt{15x}, y = \sqrt{15}x, z = 0, z = \sqrt{15}(1 + \sqrt{x}).$

2)  $z = \sqrt{\frac{4}{9} - x^2 - y^2}, z = x^2 + y^2.$

3)  $z = 22((x - 1)^2 + y^2) + 3, z = 47 - 44x.$

11. Знайти масу тіла  $V$  з густиною  $\mu$  :

$V : x^2 + y^2 + z^2 = 1, x^2 + y^2 = z^2, x, y \geq 0 (z \geq 0); \mu = 32z.$

12. Знайти координати центра мас однорідного тіла, обмеженого поверхнями:

$x = y^2 + z^2, y^2 + z^2 = 9, x = 0.$

13. Знайти довжину дуги кривої:

1)  $y = \ln \cos x + 2, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{6}.$

2)  $\rho = 5\varphi, 0 \leq \varphi \leq \frac{12}{5}.$

14. Знайти масу кривої  $x = \frac{1}{2} \cos t,$ 

$y = \frac{1}{2} \cos t, z = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin t, 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$

з густиною  $\mu = xyz.$ 15. Знайти роботу сили  $\mathbf{F} = (xy - y^2)\mathbf{i} + x\mathbf{j}$  при переміщенні вздовж параболи  $y = 2x^2$  від точки  $M(0, 0)$  до точки  $N(1, 2).$ 

16. Знайти функцію за її диференціалом:

$$du = \left( \cos y + \frac{x^2 + 2}{x^2 + 1} \right) dx + \left( -x \sin y + \arccos \frac{y}{10} \right) dy.$$

17. Знайти циркуляцію векторного поля (безпосередньо та за теоремою Стокса):

1)  $\mathbf{a} = (x, -z^2, y),$

$\Gamma : x^2 + y^2 - \frac{z^2}{4} = 0, z = 2.$

2)  $\mathbf{a} = (x, -z^2, y), 0 \leq t \leq 2\pi, \Gamma : x = 2 \cos t, y = 3 \sin t, z = 4 \cos t - 3 \sin t - 3.$

18. 
$$\boxed{u = \sqrt{xy} + \sqrt{9 - z^2}, \mathbf{l} = (-2, 2, -1), M(1, 1, 0)} \left. \frac{\partial u}{\partial \mathbf{l}} \right|_M = ?$$

19. Знайти кут між градієнтами скалярних

полів  $v = \sqrt{2}x^2 - \frac{3y^2}{\sqrt{2}} - 6\sqrt{2}z^2$  і  $u = \frac{1}{xy^2z}$

у точці  $M\left(1, \frac{2}{3}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right).$

20. Знайти величину і напрям найбільшої зміни функції  $u(M) = x^2z - y^2$  у точці  $M_0(1, 1, -2)$ .

21. Знайти найбільшу густину циркуляції векторного поля  $\mathbf{a} = (xz, x - y, x^2z)$  у точці  $M_0(1, 1, -2)$ .

22. Знайти потік векторного поля крізь частину поверхні  $S$  (нормаль зовнішня):

1)  $\mathbf{a} = (x + z, y, z - x)$ ,

$$S : x^2 + y^2 + z^2 = 1 \quad (z > 0).$$

2)  $\mathbf{a} = (x, y, z)$ ,  $\begin{cases} S : 2x + 3y + z = 1, \\ (x, y, z > 0). \end{cases}$

3)  $\mathbf{a} = (y^2 + xz, yx - z, yz + x)$ ,

$$S : x^2 + y^2 = 1 \quad (0 \leq z < \sqrt{2}).$$

23. Знайти потік векторного поля  $\mathbf{a}$  крізь замкнену поверхню  $S$  (нормаль зовнішня):

1)  $\mathbf{a} = (5x - 6y, 11x^2 + 2y, x^2 - 4z)$ ,

$$S : x + y + 2z = 2, x, y, z = 0.$$

2)  $\mathbf{a} = (2y - 3z, 3x + 2z, x + y + z)$ ,

$$S : x^2 + y^2 = 1, z = 4 - x - y, z = 0.$$

24. Знайти масу частини поверхні  $\Omega$ , обмеженої  $S$ , з густиною  $\mu = |z|$ :

$$\Omega : x^2 - y^2 = 2az, S : \{x^2 + y^2 = a^2\}.$$

Зінтегрувати диференціальне рівняння або розв'язати задачу Коші (25 – 34):

25.  $x dx - y dy = yx^2 dy - xy^2 dx$ .

26.1)  $(y^2 - 2xy) dx - x^2 dy = 0$ .

2)  $4y' = \frac{y^2}{x^2} + 10 \frac{y}{x} + 5$ .

3)  $y' = \frac{x + 5y - 6}{7x - y - 6}$ .

27.1)  $y' - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^3, y(0) = \frac{1}{2}$ .

2)  $(x^2 + \ln^2 y - \ln y)y' = \frac{y}{2}, y(2) = 1$ .

28.  $y' - y = xy^2, y(0) = 1$ .

29.  $\left( \frac{1}{x-y} + 3x^2y^7 \right) dx + \left( 7x^3y^6 - \frac{1}{x-y} \right) dy = 0$ .

30.1)  $y'' = 2 \sin^2 x \cos x, y(0) = \frac{1}{9},$

$y'(0) = 1$ .

2)  $(1 + \sin x)y''' = y'' \cos x$ .

3)  $y'' + 50 \sin y \cos^3 y = 0,$

$y(0) = 0, y'(0) = 5$ .

31.1)  $y'' + 5y = 0$ .

2)  $9y'' - 6y' + y = 0$ .

3)  $y'' + 6y' + 8y = 0$ .

32.  $y''' + 2y'' + 9y' + 18y = 0,$

$y(0) = 1, y'(0) = -3, y''(0) = -9$ .

33.1)  $y''' - y'' = 6x + 5$ .

2)  $y''' + 5y'' + 7y' + 3y = (16x + 20)e^x$ .

3)  $y'' + 2y' = 3e^x(\sin x + \cos x)$ .

4)  $y'' + 5y' = 50 \operatorname{sh} 5x$ .

5)  $y'' + 8y' = 18x + 60x^2 - 32x^3,$

$y(0) = 5, y'(0) = 2$ .

34.1)  $y'' - y' = e^{2x} \cos e^x$ .

2)  $y'' + 4y = \frac{4}{\cos 2x},$

$y(0) = 2, y'(0) = 0$ .

35. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

1)  $\begin{cases} x' = 5x + 8y, \\ y' = 3x + 3y. \end{cases}$

2)  $\begin{cases} x' = x + 16y + 16e^t, \\ y' = x - 5y + 3e^t. \end{cases}$

**Варіант 26**

1.  $u = \sqrt{z} \ln(\sqrt{x} + \sqrt{y}); du|_{M_0(4,1,4)} = ?$

2.  $z = \sqrt{xy}^2, x = u^2 e^{-v}, y = v \ln u;$

$z'_u, z'_v = ?$

3. Скласти рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні в точці  $M_0(1, 1, 0)$  :

$x^2 + y^2 - z^2 + 6xy - z - 8 = 0.$

4. Дослідити функцію на екстремум:

$z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y.$

5. Знайти найбільше та найменше значення функції  $z = x^2 + 2xy - y^2 - 2x + 2y$  в області  $\bar{D} : y = x + 2, y = 0, x = 2.$ 

6. Змінити порядок інтегрування:

$$\int_0^{\sqrt{3}} dy \int_0^{2-\sqrt{4-y^2}} f dx + \int_{\sqrt{3}}^2 dy \int_0^{\sqrt{4-y^2}} f dx.$$

7. Обчислити:

1)  $\iint_{D: x=0, y=\sqrt{\pi}, y=x} y^2 \sin \frac{xy}{2} dx dy.$

2)  $\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dx \int_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}} e^{-(x^2+y^2)} dy.$

3)  $\iiint_V z \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz.$   
 $V: \begin{cases} x^2 + y^2 = 2x, \\ z = 3, y, z \geq 0 \end{cases}$

8. Знайти площі фігур, обмежених лініями:

1)  $y = \frac{3}{2}\sqrt{x}, y = \frac{3}{2x}, x = 4.$

2)  $x^2 - 4x + y^2 = 0, x^2 - 8x + y^2 = 0,$   
 $y = \sqrt{3}x, \sqrt{3}y = x.$

9. Знайти масу пластинки  $D$  з густиною

$\mu = 15x^5 y^3, D : x^2 + \frac{y^2}{4} \leq 1, x, y \geq 0.$

10. Знайти об'єми тіл, обмежених поверхнями:

1)  $x^2 + y^2 = 50, y = \sqrt{5}x, y, z = 0, z = \frac{3x}{11}.$

2)  $z = 12\sqrt{x^2 + y^2}, z = 28 - x^2 - y^2.$

3)  $z = 32((x-1)^2 + y^2) + 3, z = 67 - 64x.$

11. Знайти масу тіла  $V$  з густиною  $\mu$  :

$V : x^2 + y^2 = z^2, x^2 + y^2 = 4,$

$x, y, z \geq 0; \mu = \frac{5(x^2 + y^2)}{2}.$

12. Знайти координати центра мас однорідного тіла, обмеженого поверхнями:

$x, y, z = 0, x + y + z = 3.$

13. Знайти довжину дуги кривої:

1)  $y = e^x + 26, \ln \sqrt{8} \leq x \leq \ln \sqrt{24}.$

2)  $\rho = 2 \cos \varphi, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{6}.$

14. Знайти масу кривої  $x = a \cos t, y = a \sin t, z = bt, 0 \leq t \leq 2\pi$  з густиною  $\mu = x^2 + y^2 + z^2.$ 15. Знайти роботу сили  $\mathbf{F} = xi + yj$  при переміщенні вздовж відрізка  $MN$  від точки  $M(1, 0)$  до точки  $N(0, 3).$ 

16. Знайти функцію за її диференціалом:

$du = (\ln(y+1) + 2x \ln(2x+1)) dx + \left( \frac{x}{y+1} + \operatorname{tg}^2 y \right) dy.$

17. Знайти циркуляцію векторного поля (безпосередньо та за теоремою Стокса):

1)  $\mathbf{a} = (x^2, yz, 2z),$

$\Gamma : x^2 + y^2 + z^2 = 25 \cap z = 4.$

2)  $\mathbf{a} = (y - z, z - x, x - y), 0 \leq t \leq 2\pi,$

$\Gamma : \{x = 2 \cos t, y = 2 \sin t,$

$z = 3(1 - \cos t)\}.$

18. 
$$\left[ \begin{array}{l} u = 2\sqrt{x+y} + y \operatorname{arctg} z, \\ \mathbf{l} = (4, 0, -3), M(3, -2, 1) \end{array} \right] \frac{\partial u}{\partial \mathbf{l}} \Big|_M = ?$$

19. Знайти кут між градієнтами скалярних полів  $v = x^2 + 9y^2 + 6z^2$  і  $u = \frac{1}{xyz}$ 

у точці  $M\left(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right).$

20. Знайти величину і напрям найбільшої зміни функції  $u(M) = xz^2 + y$  у точці  $M_0(2, 2, 1).$

21. Знайти найбільшу густину циркуляції векторного поля  $\mathbf{a} = (x - z, xy, y^2z)$  у точці  $M_0(2, 2, 1)$ .

22. Знайти потік векторного поля крізь частину поверхні  $S$  (нормаль зовнішня):

1)  $\mathbf{a} = (x, y + yz, z - y^2),$

$$S : x^2 + y^2 + z^2 = 1 \quad (z > 0).$$

2)  $\mathbf{a} = (2x, y, z), S : \begin{cases} 2x + 3y + z = 1, \\ (x, y, z > 0). \end{cases}$

3)  $\mathbf{a} = (y^2 + 6x, e^z - 2y + x, x + y - z),$

$$S : x^2 + y^2 = z^2 \quad (1 \leq z < 3).$$

23. Знайти потік векторного поля  $\mathbf{a}$  крізь замкнену поверхню  $S$  (нормаль зовнішня):

1)  $\mathbf{a} = (-2x, z, x + y),$

$$S : x^2 + y^2 = 2y, z = x^2 + y^2, z = 0.$$

2)  $\mathbf{a} = (x^2, y^2, z^2),$

$$S : x^2 + y^2 + z^2 = 1, x, y, z \geq 0.$$

24. Знайти масу частини поверхні  $\Omega$ , обмеженої  $S$ , з густиною  $\mu = \mu_0$ :

$$\Omega : x^2 + y^2 + z^2 = a^2, S : \{\rho = a \sin 3\varphi\}.$$

Зінтегрувати диференціальне рівняння або розв'язати задачу Коші (25 – 34):

25.  $\sqrt{5 + y^2} dx + 4(x^2y + y) dy = 0.$

26.1)  $(x + 2y) dx + x dy = 0.$

2)  $xy' = \frac{3y^3 + 14yx^2}{2y^2 + 7x^2}.$

3)  $y' = \frac{x + y - 4}{x - 2}.$

27.1)  $y' - y \cos x = -\sin 2x, y(0) = 3.$

2)  $(2xy + \sqrt{y}) dy + 2y^2 dx = 0,$

$$y\left(-\frac{1}{2}\right) = 1.$$

28.  $2(xy' + y) = y^2 \ln x, y(1) = 2.$

29.  $(1 + y^{-1}e^{\frac{x}{y}}) dx + (1 - xy^{-2}e^{\frac{x}{y}}) dy = 0.$

30.1)  $y'' = 2 \sin x \cos^2 x - \sin^3 x,$

$$y(0) = 0, y'(0) = 1.$$

2)  $xy''' + y'' = \frac{1}{\sqrt{x}}.$

3)  $y'' = 8y^3, y(0) = 1, y'(0) = 2.$

31.1)  $y'' + 6y' + 10y = 0.$

2)  $y'' - 4y' + 4y = 0.$

3)  $y'' - 5y' + 4y = 0.$

32.  $y^V - 6y^{IV} + 9y''' = 0, y(0) = y'(0) =$

$$= y''(0) = y'''(0) = 0, y^{IV}(0) = 27.$$

33.1)  $y''' + 3y'' + 2y' = x^2 + 2x + 3.$

2)  $y''' - 2y'' - 3y' = (8x - 14)e^{-x}.$

3)  $y'' - 4y' + 4y = e^{2x} \sin 4x.$

4)  $y'' + 81y = 9 \sin 9x +$

$$+ 3 \cos 9x + 162e^{9x}.$$

5)  $y'' - 3y' + 2y = -\sin x -$

$$- 7 \cos x, y(0) = 2, y'(0) = 7.$$

34.1)  $y'' - y' = e^{2x} \sin e^x.$

2)  $y'' + y' = \frac{e^x}{2 + e^x}, y(0) = \ln 27,$

$$y'(0) = 1 - \ln 9.$$

35. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

1)  $\begin{cases} x' = 3x + y, \\ y' = 8x + y. \end{cases}$

2)  $\begin{cases} x' = -6x + 7y - 7 \sin 2t, \\ y' = x + 2y + 2 \cos 2t - 2 \sin 2t. \end{cases}$

**Варіант 27**

1.  $u = \frac{xz}{x-y}; du|_{M_0(3,1,1)} = ?$

2.  $z = x^3 \sqrt{y} - \ln y, x = u \cos v, y = ve^u;$   
 $z'_u, z'_v = ?$

3. Скласти рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні в точці  $M_0(-1, 1, 3)$ :

$$z = 2x^2 + 4x - 3y^2 - 2y + 10.$$

4. Дослідити функцію на екстремум:

$$z = (x-1)^2 + 2y^2.$$

5. Знайти найбільше та найменше значення функції  $z = 4 - 2x^2 - y^2$  в області  $\bar{D}: y = 0, y = \sqrt{1-x^2}$ .

6. Змінити порядок інтегрування:

$$\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^0 f dx + \int_1^2 dy \int_{-\sqrt{2-y}}^0 f dx.$$

7. Обчислити:

1) 
$$\iint_{D: y=\frac{\pi}{2}, y=\frac{3\pi}{2}, x=\frac{1}{2}, x=2} y \cos 2xy dx dy.$$

2) 
$$\int_0^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \ln \frac{(1 + \sqrt{x^2 + y^2})}{\sqrt{x^2 + y^2}} dy.$$

3) 
$$\iiint_{V: \begin{matrix} 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, \\ y \leq x, x, y, z \geq 0 \end{matrix}} \frac{x dx dy dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

8. Знайти площі фігур, обмежених лініями:

1)  $y^2 = 4 - x, y = x + 2, y = 2, y = -2.$

2)  $x^2 - 4y + y^2 = 0, x^2 - 8y + y^2 = 0,$   
 $x = 0, y = \sqrt{3x}.$

9. Знайти масу пластинки  $D$  з густиною

$$\mu = \frac{9x}{y^3}, D: 1 \leq \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 36, x \geq 0,$$
  
 $2y \geq 3x.$

10. Знайти об'єми тіл, обмежених поверхнями:

1)  $x + y = 8, y = \sqrt{4x}, z = 3y, z = 0.$

2)  $z = \sqrt{81 - x^2 - y^2}, z = 5, x^2 + y^2 \leq 45.$

3)  $z = 28(x^2 + y^2) + 3, z = 56y + 3.$

11. Знайти масу тіла  $V$  з густиною  $\mu$ :

$$V: x^2 + y^2 + z^2 = 9, x^2 + y^2 \leq 4,$$
  
 $y \geq 0; \mu = |z|.$

12. Знайти координати центра мас однорідного тіла, обмеженого поверхнями:

$$z = 2\sqrt{x^2 + y^2}, x^2 + y^2 = 9, z = 0.$$

13. Знайти довжину дуги кривої:

1)  $y = \operatorname{ch} x + 3, 0 \leq x \leq 2.$

2)  $\rho = 8 \cos \varphi, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}.$

14. Знайти масу кривої  $x = t \cos t, y = t \sin t, z = t, 0 \leq t \leq 2\pi$  з густиною

$$\mu = 2z - \sqrt{x^2 + y^2}.$$

15. Знайти роботу сили  $\mathbf{F} = 2(xy - x)\mathbf{i} + x^2\mathbf{j}$  при переміщенні вздовж  $y = 2\sqrt{x}$  від точки  $M(0, 0)$  до точки  $N(1, 2)$ .

16. Знайти функцію за її диференціалом:

$$du = \left( 2^y + 2x \arccos \frac{x}{5} \right) dx + \left( x 2^y \ln 2 + \frac{1}{2\sqrt{y}} e^{\sqrt{y}} \right) dy.$$

17. Знайти циркуляцію векторного поля (безпосередньо та за теоремою Стокса):

1)  $\mathbf{a} = (y, -2x, z^2),$

$$\Gamma: z = 4(x^2 + y^2) + 2 \cap z = 6.$$

2)  $\mathbf{a} = (-2z, -x, x^2), 0 \leq t \leq 2\pi,$

$$\Gamma: \left\{ x = \frac{\cos t}{3}, y = \frac{\sin t}{3}, z = 8. \right.$$

18. 
$$\boxed{u = z^2 + 2 \operatorname{arctg}(x - y), \frac{\partial u}{\partial \mathbf{l}} \Big|_M = ?}$$
  
 $\mathbf{l} = (1, 2, -2), M(1, 2, -1)$

19. Знайти кут між градієнтами скалярних

полів  $v = \frac{1}{\sqrt{2}x} - \frac{2\sqrt{2}}{y} - \frac{3\sqrt{3}}{2z}$  і  $u = \frac{x}{y^2 z^3}$

у точці  $M \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right).$



20. Знайти величину і напрям найбільшої зміни функції  $u(M) = x^2y - z$  у точці  $M_0(-2, 2, 1)$ .

21. Знайти найбільшу густину циркуляції векторного поля  $\mathbf{a} = (x - z, xyz, x)$  у точці  $M_0(-2, 2, 1)$ .

22. Знайти потік векторного поля крізь частину поверхні  $S$  (нормаль зовнішня):

1)  $\mathbf{a} = (x - y, x + y, z)$ ,

$$S : x^2 + y^2 + z^2 = 1 \quad (z > 0).$$

2)  $\mathbf{a} = (2x, 3y, z)$ ,  $\begin{cases} S : 2x + 3y + z = 1, \\ (x, y, z > 0). \end{cases}$

3)  $\mathbf{a} = (y, 2zy, 2z^2)$ ,  $S : \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 - z, \\ (z > 0). \end{cases}$

23. Знайти потік векторного поля  $\mathbf{a}$  крізь замкнену поверхню  $S$  (нормаль зовнішня):

1)  $\mathbf{a} = (2x + 2z, xz + y, 4xy - 8)$ ,

$$S : x^2 + y^2 + z^2 = 4x - 2y + 4z - 8.$$

2)  $\mathbf{a} = (2y - 15x, z - y, 3y - x)$ ,  $S : z = 0$ ,

$$S : z = 3x^2 + y^2 + 1, x^2 + y^2 = \frac{1}{4}.$$

24. Знайти масу частини поверхні  $\Omega$ , обмеженої  $S$ , з густиною  $\mu = |y|$ :

$$\Omega : x^2 + y^2 = 2az, S : \{x^2 + y^2 = z^2\}.$$

Зінтегрувати диференціальне рівняння або розв'язати задачу Коші (25 – 34):

25.  $(1 - y^2)xyy' = 1 + x^2$ .

26.1)  $(2x - y)dx + (x + y)dy = 0$ .

2)  $y' = \frac{x^2 + xy - 5y^2}{x^2 - 6xy}$ .

3)  $y' = \frac{2x + y - 1}{2x - 2}$ .

27.1)  $y' - 4xy = -4x^3, y(0) = -\frac{1}{2}$ .

2)  $ydx + (2x - 2\sin^2 y - y \sin 2y)dy = 0$ ,

$$y\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

28.  $y' + y = xy^2, y(0) = 1$ .

29.  $\left(\frac{y}{\sqrt{1 - x^2y^2}} - 2x\right)dx + \frac{xdy}{\sqrt{1 - x^2y^2}} = 0$ .

30.1)  $y'' = 2\sin^2 x \cos x - \cos^3 x$ ,

$$y(0) = \frac{2}{3}, y'(0) = 2.$$

2)  $-xy''' + 2y'' = \frac{2}{x^2}$ .

3)  $y''y^3 + 4 = 0, y(0) = -1$ ,

$$y'(0) = -2.$$

31.1)  $y'' - y = 0$ .

2)  $4y'' + 8y' - 5y = 0$ .

3)  $y'' - 6y' + 10y = 0$ .

32.  $y''' + 2y'' + y' = 0, y(0) = 0$ ,

$$y'(0) = 2, y''(0) = -3.$$

33.1)  $y''' - 5y'' + 6y' = (x - 1)^2$ .

2)  $y''' + 2y'' - 3y' = (8x + 6)e^x$ .

3)  $y'' + 6y' + 13y = e^{-3x} \cos 8x$ .

4)  $y''' - 64y' = 128 \cos 8x - 64e^{8x}$ .

5)  $y'' + 2y' = 6x^2 + 2x + 1$ ,

$$y(0) = 2, y'(0) = 2.$$

34.1)  $y'' + y = \operatorname{tg}^2 x$ .

2)  $y'' + y = 2 \operatorname{ctg} x, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ ,

$$y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2.$$

35. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

1)  $\begin{cases} x' = x - 5y, \\ y' = -x - 3y. \end{cases}$

2)  $\begin{cases} x' = -x + 15y + 10, \\ y' = x - 3y + 2. \end{cases}$

**Варіант 28**

1.  $u = \sqrt{x^2 + y^2 - 2 \cos z}; du|_{M_0(3,4,\frac{\pi}{2})} = ?$

2.  $z = x^2 \ln y, x = \frac{u}{v}, y = 3u - 2v;$

$z'_u, z'_v = ?$

3. Скласти рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні в точці  $M_0(-1, 3, 4)$ :

$z = x^2 + y^2 - 4xy + 3x - 15.$

4. Дослідити функцію на екстремум:

$z = xy - 3x^2 - 2y^2.$

5. Знайти найбільше та найменше значення функції  $z = 5x^2 - 3xy + y^2$  в області  $\bar{D} : x = -1, x = 1, y = -1, y = 1.$

6. Змінити порядок інтегрування:

$$\int_0^1 dy \int_0^y f dx + \int_1^{\sqrt{2}} dy \int_0^{\sqrt{2-y^2}} f dx.$$

7. Обчислити:

1)  $\iint_D y^2 e^{-\frac{xy}{8}} dx dy.$

$D: x=0, y=\sqrt{\frac{\pi}{2}}, y=x$

2)  $\int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \cos \sqrt{x^2 + y^2} dy.$

3)  $\iiint_V x dx dy dz.$   
 $V: \begin{cases} x^2 = 2(y^2 + z^2), \\ x=4, x \geq 0 \end{cases}$

8. Знайти площі фігур, обмежених лініями:

1)  $y = \frac{1}{x}, y = 6e^x, y = 1, y = 6.$

2)  $x^2 - 4x + y^2 = 0, x^2 - 6x + y^2 = 0,$   
 $\sqrt{3}y = x, y = x\sqrt{3}.$

9. Знайти масу пластинки  $D$  з густиною

$\mu = 6xy^9, D : \frac{x^2}{100} + y^2 \leq 4, x, y \geq 0.$

10. Знайти об'єми тіл, обмежених поверхнями:

1)  $x = 16\sqrt{2y}, x = \sqrt{2y}, z + y = 2, z = 0.$

2)  $z = \sqrt{25 - x^2 - y^2}, z = 1, x^2 + y^2 \leq 21.$

3)  $z = 4 - 14((x+1)^2 + y^2), z = -28x - 24.$

11. Знайти масу тіла  $V$  з густиною  $\mu$ :

$V : x^2 + y^2 = 1, x^2 + y^2 = 3z,$

$x, y \geq 0, z = 0; \mu = 15x.$

12. Знайти координати центра мас однорідного тіла, обмеженого поверхнями:

$x^2 + y^2 = 2z, z = 3.$

13. Знайти довжину дуги кривої:

1)  $y = \arccos \sqrt{x} - \sqrt{x - x^2} + 4, x \in [0; \frac{1}{2}].$

2)  $\rho = 6 \cos \varphi, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}.$

14. Знайти масу кривої  $x = t,$

$y = \frac{3}{\sqrt{2}} t^2, z = t^3, 0 \leq t \leq 1$  з густиною  $\mu = x + z.$

15. Знайти роботу сили  $\mathbf{F} = y\mathbf{j} - x\mathbf{i}$  при переміщенні вздовж еліпса  $(x, y \geq 0)$

$x^2 + \frac{y^2}{9} = 1$  від точки  $M(1, 0)$  до точки  $N(0, 3).$

16. Знайти функцію за її диференціалом:

$du = (e^y + \cos 3x) dx + (xe^y + 5y) dy.$

17. Знайти циркуляцію векторного поля (безпосередньо та за теоремою Стокса):

1)  $\mathbf{a} = (3z, -2y, 2y),$

$\Gamma : x^2 + y^2 = 4 \cap 2x - 3y - 2z = 1.$

2)  $\mathbf{a} = (x, -3z^2, y), 0 \leq t \leq 2\pi, \Gamma : x = \cos t,$   
 $y = 4 \sin t, z = 2 \cos t - 4 \sin t + 3.$

18.  $\left. \frac{\partial u}{\partial \mathbf{l}} \right|_M = ?$   
 $u = \ln(x^2 + y^2) + xyz, \mathbf{l} = (1, -1, 5), M(1, -1, 2)$

19. Знайти кут між градієнтами скалярних

полів  $v = -\frac{4\sqrt{2}}{x} + \frac{\sqrt{2}}{9y} + \frac{1}{\sqrt{3}z}$  і  $u = x^2yz$

у точці  $M\left(2, \frac{1}{3}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right).$

20. Знайти величину і напрям найбільшої зміни функції  $u(M) = xy^2 - z$  у точці  $M_0(-1, 2, 1).$

21. Знайти найбільшу густину циркуляції векторного поля  $\mathbf{a} = (y - z, y, -z^2)$  у точці  $M_0(-1, 2, 1)$ .

22. Знайти потік векторного поля крізь частину поверхні  $S$  (нормаль зовнішня):

1)  $\mathbf{a} = (x + xz^2, y, z - zx^2)$ ,

$$S : x^2 + y^2 + z^2 = 9 \quad (z > 0).$$

2)  $\mathbf{a} = (2x, 3y, 4z)$ ,  $S : \begin{cases} 2x + 3y + z = 1, \\ (x, y, z > 0). \end{cases}$

3)  $\mathbf{a}(x^2, x, xz)$ ,  $S : \begin{cases} z = x^2 + y^2, x, y \geq 0, \\ (0 \leq z < 1). \end{cases}$

23. Знайти потік векторного поля  $\mathbf{a}$  крізь замкнену поверхню  $S$  (нормаль зовнішня):

1)  $\mathbf{a} = (y + z, x - 2y + z, x)$ ,

$$S : x^2 + y^2 = 1, z = x^2 + y^2, z = 0.$$

2)  $\mathbf{a} = (2xy, 2xy, z^2)$ ,

$$S : x^2 + y^2 + z^2 = \sqrt{2}, z = 0.$$

24. Знайти масу частини поверхні  $\Omega$ , обмеженої  $S$ , з густиною  $\mu = \mu_0$ :

$$\Omega : x^2 + y^2 = z^2, S : \{y^2 + z^2 = R^2\}.$$

Зінтегрувати диференціальне рівняння або розв'язати задачу Коші (25 – 34):

25.  $3(x^2y + y)dy + \sqrt{2 + y^2}dx = 0$ .

26.1)  $2x^3y' = y(2x^2 - y^2)$ .

2)  $xy' = 4\sqrt{x^2 + y^2} + y$ .

3)  $y' = \frac{3y - 2x + 1}{3x + 3}$ .

27.1)  $y' - \frac{y}{x} = -\frac{\ln x}{x}, y(1) = 1$ .

2)  $2(y^3 - y + xy)dy = dx, y(-2) = 0$ .

28.  $y' + 2y \operatorname{cth} x = y^2 \operatorname{ch} x, y(1) = \operatorname{sh}^{-1} 1$ .

29.  $(5x^4y^4 + 28x^6)dx + (4x^5y^3 - 3y^2)dy = 0$ .

30.1)  $y'' = x - \ln x, y(1) = -\frac{5}{12}, y'(1) = \frac{3}{2}$ .

2)  $y'''x \ln x = y''$ .

3)  $y'' = 2 \sin^3 y \cos y, y(1) = \frac{\pi}{2}$ ,

$y'(1) = 1$ .

31.1)  $y'' + 8y' + 25y = 0$ .

2)  $y'' + 9y' = 0$ .

3)  $9y'' + 3y' - 2y = 0$ .

32.  $y''' - y'' - y' + y = 0, y(0) = -1$ ,

$y'(0) = 0, y''(0) = 1$ .

33.1)  $y^{IV} - 6y''' + 9y'' = 3x - 1$ .

2)  $y''' + 6y'' + 9y' = (16x + 24)e^x$ .

3)  $y'' + 2y' + 5y = 10 \cos x$ .

4)  $y'' + y' = 2 \operatorname{sh} x$ .

5)  $y'' + 16y = 32e^{4x}, y(0) = 2$ ,

$y'(0) = 0$ .

34.1)  $y'' + y = \frac{2}{\sin^2 x}$ .

2)  $y'' - 3y' + 2y = \frac{1}{1 + e^{-x}}$ ,

$y(0) = 1 + 2 \ln 2, y'(0) = 3 \ln 2$ .

35. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

1)  $\begin{cases} x' = -5x + 2y, \\ y' = x - 6y. \end{cases}$

2)  $\begin{cases} x' = -x + 26y + 16, \\ y' = x + 5y + 15. \end{cases}$

**Варіант 29**

1.  $u = ze^{-xy}; du|_{M_0(0,1,1)} = ?$

2.  $z = \arcsin xy, x = u \cos v, y = u^2 v^{-1};$   
 $z'_u, z'_v = ?$

3. Скласти рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні в точці  $M_0(-7, 1, 8)$ :

$$z = x^2 + 2y^2 + 4xy - 5y - 10.$$

4. Дослідити функцію на екстремум:

$$z = x^2 + 3(y + 2)^2.$$

5. Знайти найбільше та найменше значення функції  $z = x^2 + 2xy + 4x - y^2$  в області  $\bar{D}: x + y + 2 = 0, x = 0, y = 0$ .

6. Змінити порядок інтегрування:

$$\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} f dx + \int_1^{\sqrt{2}} dy \int_0^{\sqrt{2-y^2}} f dx.$$

7. Обчислити:

1) 
$$\iint_{D: y=\frac{\pi}{2}, y=3\pi, x=1, x=3} 3y \sin xy dx dy.$$

2) 
$$\int_0^R dx \int_{-\sqrt{R-x^2}}^{\sqrt{R-x^2}} \sin(x^2 + y^2) dy.$$

3) 
$$\iiint_{V: \begin{matrix} 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 9, \\ 0 \leq y \leq x, z \geq 0 \end{matrix}} \frac{xdxdydz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

8. Знайти площі фігур, обмежених лініями:

1)  $y = 3\sqrt{x}, y = \frac{3}{x}, x = 9.$

2)  $y^2 - 2y + x^2 = 0, y^2 - 10y + x^2 = 0,$   
 $x = 0, x = \sqrt{3}y.$

9. Знайти масу пластинки  $D$  з густиною

$$\mu = 105x^3y^9, D: \frac{x^2}{16} + y^2 \leq 1, x, y \geq 0.$$

10. Знайти об'єми тіл, обмежених поверхнями:

1)  $y = 15\sqrt{y}, x = 15y, z = 0,$

$$z = 15(1 + \sqrt{y}).$$

2)  $z = \sqrt{64 - x^2 - y^2}, 12z = x^2 + y^2.$

3)  $z = 2 - 20(x^2 + y^2), z = 2 - 40y.$

11. Знайти масу тіла  $V$  з густиною  $\mu$ :

$$V: x^2 + y^2 = \frac{4}{49}z^2, x^2 + y^2 = \frac{2}{7}z,$$
  
 $x, y \geq 0; \mu = 20xz.$

12. Знайти координати центра мас однорідного тіла, обмеженого поверхнями:

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}, z = 4.$$

13. Знайти довжину дуги кривої:

1)  $y = \frac{1}{2} \operatorname{ch} 2x + \frac{3}{4}, 0 \leq x \leq 2.$

2)  $\rho = 2 \sin \varphi, 0 \leq \varphi < \frac{\pi}{6}.$

14. Знайти масу кривої

$$x = y = \frac{1}{\sqrt{2}a} \cos t, z = \frac{\sin t}{a}, t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \text{ з}$$

густиною  $\mu = x + y.$ 15. Знайти роботу сили  $\mathbf{F} = x\mathbf{j} - y\mathbf{i}$  при переміщенні вздовж  $y = x^3$  від точки  $M(0, 0)$  до точки  $N(2, 8).$ 

16. Знайти функцію за її диференціалом:

$$du = (\cos y + (2x + 1)e^x) dx +$$
  
$$+ (-x \sin y + 2y) dy.$$

17. Знайти циркуляцію векторного поля (безпосередньо та за теоремою Стокса):

1)  $\mathbf{a} = (x + y, -x, 6),$

$$\Gamma: x^2 + y^2 = 1 \cap z = 2.$$

2)  $\mathbf{a} = (x, -2z^2, y), 0 \leq t \leq 2\pi,$

$$\Gamma: \{x = 3 \cos t, y = 4 \sin t,$$

$$z = 6 \cos t - 4 \sin t + 1.\}$$

18. 
$$\boxed{u = xy - \frac{x}{z}, \mathbf{l} = (5, 1, -1), M(-4, 3, -1)} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{l}} \Big|_M = ?$$

19. Знайти кут між градієнтами скалярних

полів  $v = \frac{x^3}{\sqrt{2}} - \frac{y^3}{\sqrt{2}} - \frac{8z^3}{\sqrt{3}}$  і  $u = \frac{y^2 z^3}{x^2}$  у

точці  $M\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$

20. Знайти величину і напрям найбільшої зміни функції  $u(M) = y(x + z)$  у точці  $M_0(0, 2, -2)$ .

21. Знайти найбільшу густину циркуляції векторного поля  $\mathbf{a} = (x - y, -x, xz)$  у точці  $M_0(0, 2, -2)$ .

22. Знайти потік векторного поля крізь частину поверхні  $S$  (нормаль зовнішня):

1)  $\mathbf{a} = (x + y, y - x, z)$ ,

$$S : x^2 + y^2 + z^2 = 4 \quad (z > 0).$$

2)  $\mathbf{a} = (x, 9y, 8z)$ ,  $\begin{cases} S : x + 2y + 3z = 1, \\ (x, y, z > 0). \end{cases}$

3)  $\mathbf{a} = (x^2, x, xz)$ ,  $S : \begin{cases} z = x^2 + y^2, y \geq 0, \\ (0 \leq z < 4). \end{cases}$

23. Знайти потік векторного поля  $\mathbf{a}$  крізь замкнену поверхню  $S$  (нормаль зовнішня):

1)  $\mathbf{a} = (yz - 2x, \sin x + y, x - 2z)$ ,

$$S : x + 2y - 3z = 6, x, y, z = 0.$$

2)  $\mathbf{a} = (3x - y - z, 3y, 2z)$ ,

$$S : z = x^2 + y^2, z = 2y.$$

24. Знайти масу частини поверхні  $\Omega$ , обмеженої  $S$ , з густиною  $\mu = \sqrt{x^2 + y^2}$ :

$$\Omega : x^2 + y^2 + z^2 = a^2, S : \{z \geq 0\}.$$

Зінтегрувати диференціальне рівняння або розв'язати задачу Коші (25 – 34):

25.  $2xdx - ydy = yx^2dy - xy^2dx$ .

26.1)  $y - xy' = x \sec \frac{y}{x}$ .

2)  $3y' = \frac{y^2}{x^2} + 10 \frac{y}{x} + 10$ .

3)  $y' = \frac{6y - 6}{5x + 4y - 9}$ .

27.1)  $y' - 3x^2y = \frac{x^2(1 + x^3)}{3}, y(0) = 0$ .

2)  $(2y + x \operatorname{tg} y - y^2 \operatorname{tg} y)dy = dx$ ,

$$y(0) = \pi.$$

28.  $2(y' + xy) = (x - 1)e^x y^2, y(0) = 2$ .

29.  $(3x^3 + 6x^2y + 3xy^2)dx + (2x^3 + 3x^2y)dy = 0$ .

30.1)  $y'' = \frac{1}{x^2}, y(1) = 3, y'(1) = 1$ .

2)  $x^4 y'' + x^3 y' = 4$ .

3)  $yy'' - 2yy' \ln y = y'^2, y(0) = 1, y'(0) = 1$ .

31.1)  $6y'' + 7y' - 3y = 0$ .

2)  $y'' + 16y = 0$ .

3)  $4y'' - 4y' + y = 0$ .

32.  $y^{IV} + 5y'' + 4y = 0, y(0) = 1$ ,

$$y'(0) = 4, y''(0) = -1, y'''(0) = -16.$$

33.1)  $y''' - 13y'' + 12y' = 18x^2 - 39$ .

2)  $y''' - y'' - 9y' + 9y = (12 - 16x)e^x$ .

3)  $y'' + y = 2 \cos 4x + 3 \sin 4x$ .

4)  $y'' + 100y = 20 \sin 10x - 30 \cos 10x - 200e^{10x}$ .

5)  $y'' + 5y' + 6y = 52 \sin 2x$ ,

$$y(0) = -2, y'(0) = -2.$$

34.1)  $y'' + 2y' + 5y = \frac{e^{-x}}{\sin 2x}$ .

2)  $y'' - 3y' + 2y = \frac{e^x}{1 + e^{-x}}, y(0) = 0, y'(0) = 0$ .

35. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

1)  $\begin{cases} x' = 6x + 3y, \\ y' = -8x - 5y. \end{cases}$

2)  $\begin{cases} x' = 2x + 3y - 3e^{2t}, \\ y' = x + y - e^{2t}. \end{cases}$

**Варіант 30**

1.  $u = \arcsin(x\sqrt{y}) - yz^2; du|_{M_0(0,4,1)} = ?$

2.  $z = \operatorname{tg} x^2 y, x = u \ln v, y = v \operatorname{ctg} u;$

$z'_u, z'_v = ?$

3. Скласти рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні в точці  $M_0(1, -1, 2)$  :

$z = 2x^2 + 3x - 3y^2 + xy + 1.$

4. Дослідити функцію на екстремум:

$z = 2x + 2y - x^2 - y^2.$

5. Знайти найбільше та найменше значення функції  $z = 2x^2 y - x^3 y - x^2 y^2$  в області  $\bar{D} : x = 0, y = 0, x + y = 6.$ 

6. Змінити порядок інтегрування:

$$\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} f dx + 2 \int_1^0 dy \int_0^{\sqrt{2-y}} f dx.$$

7. Обчислити:

1)  $\iint_{D: x=0, y=\sqrt{2\pi}, y=2x} y^2 \cos \frac{xy}{2} dx dy.$

2)  $\int_0^R dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \frac{\operatorname{tg} \sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} dy.$

3)  $\iiint_{V: z=\sqrt{18-x^2-y^2}, z=\sqrt{x^2+y^2}, x \geq 0} x dx dy dz.$

8. Знайти площі фігур, обмежених лініями:

1)  $y = 11 - x^2, y = -10x.$

2)  $y^2 - 6x + x^2 = 0, y^2 - 10x + x^2 = 0,$   
 $\sqrt{3}y = x, y = \sqrt{3}x.$

9. Знайти масу пластинки  $D$  з густиною

$\mu = \frac{27y}{x^5}, D : 1 \leq \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} \leq 2, 0 \leq y \leq \frac{4x}{3}.$

10. Знайти об'єми тіл, обмежених поверхнями:

1)  $x^2 + y^2 = 50, x = \sqrt{5y}, x, z = 0, z = \frac{6y}{11}.$

2)  $2z = 9\sqrt{x^2 + y^2}, 2z = 11 - 2x^2 - 2y^2.$

3)  $z = 8((x+1)^2 + y^2) + 3, z = 16x + 19.$

11. Знайти масу тіла  $V$  з густиною  $\mu$  :

$V : x^2 + y^2 + z^2 = 16, x^2 + y^2 = 9z^2,$   
 $x, y \geq 0 (z \geq 0); \mu = 5z.$

12. Знайти координати центра мас однорідного тіла, обмеженого поверхнями:

$z = x^2 + y^2, x^2 + y^2 = 4, z = 0.$

13. Знайти довжину дуги кривої:

1)  $y = e^x + e, \ln \sqrt{3} \leq x \leq \ln \sqrt{15}.$

2)  $\rho = 8 \sin \varphi, 0 \leq \varphi < \frac{\pi}{4}.$

14. Знайти масу кривої  $x = a \cos t, y = a \sin t, z = bt, 0 \leq t \leq 2\pi$  з густиною  $\mu = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1}.$ 15. Знайти роботу сили  $\mathbf{F} = (x^2 - y^2)\mathbf{i} + (x^2 + y^2)\mathbf{j}$  при переміщенні вздовж еліпса  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 (y \geq 0)$  від точки  $M(3, 0)$  до точки  $N(-3, 0).$ 

16. Знайти функцію за її диференціалом:

$du = (e^y + 2(2x + 1) \sin 2x) dx + (xe^y + 2y) dy.$

17. Знайти циркуляцію векторного поля (безпосередньо та за теоремою Стокса):

1)  $\mathbf{a} = (4, 3x, 3xz),$

$\Gamma : x^2 + y^2 = z^2 \cap z = 3.$

2)  $\mathbf{a} = (-x^2 y^3, 4, x), 0 \leq t \leq 2\pi,$

$\Gamma : \{x = 2 \cos t, y = 2 \sin t, z = 4.\}$

18.  $\left. \frac{\partial u}{\partial \Gamma} \right|_M = ?$   
 $u = \ln(x + \sqrt{y^2 + z^2}),$   
 $\mathbf{l} = (-2, -1, 1), M(1, -3, 4)$

19. Знайти кут між градієнтами скалярних полів  $v = -\frac{3x^3}{\sqrt{2}} + \frac{2\sqrt{2}y^3}{3} + 8\sqrt{3}z^3$ 

і  $u = \frac{x^2 z}{y^3}$  у точці  $M\left(\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{1}{2}\right).$

20. Знайти величину і напрям найбільшої зміни функції  $u(M) = z(x + y)$  у точці  $M_0(1, -1, 0).$

21. Знайти найбільшу густину циркуляції векторного поля  $\mathbf{a} = (x - z, -y, xy)$  у точці  $M_0(1, -1, 0)$ .

22. Знайти потік векторного поля крізь частину поверхні  $S$  (нормаль зовнішня):

1)  $\mathbf{a} = (x + xy^2, y - yx^2, z)$ ,

$$S : x^2 + y^2 + z^2 = 9 \quad (z > 0).$$

2)  $\mathbf{a} = (8x, 11y, 17z)$ ,  $\begin{cases} S : x + 2y + 3z = 1, \\ (x, y, z > 0). \end{cases}$

3)  $\mathbf{a} = (-x, 2y, yz)$ ,  $S : \begin{cases} x^2 + y^2 = z^2, \\ (0 \leq z < 4). \end{cases}$

23. Знайти потік векторного поля  $\mathbf{a}$  крізь замкнену поверхню  $S$  (нормаль зовнішня):

1)  $\mathbf{a}(8x + 1, zx - 4y, e^x - z)$ ,

$$S : x^2 + y^2 + z^2 = 2y.$$

2)  $\mathbf{a}(x + y, y + z, z + x)$ ,

$$S : y = 2x, y = 4x, x = 1, z = y^2, z = 0.$$

24. Знайти масу частини поверхні  $\Omega$ , обмеженої  $S$ , з густиною  $\mu = \mu_0$ :

$$\Omega : x^2 + y^2 = z^2, S : \{z^2 = 2py\}.$$

Зінтегрувати диференціальне рівняння або розв'язати задачу Коші (25 – 34):

25.  $2x + 2xy^2 + \sqrt{2 - x^2}y' = 0$ .

26.1)  $y + xy' = x\sqrt{\frac{y}{x}}$ .

2)  $xy' = 4\sqrt{2x^2 + y^2} + y$ .

3)  $y' = \frac{x + 6y - 7}{8x - y - 7}$ .

27.1)  $y' - y \cos x = \sin 2x, y(0) = -1$ .

2)  $4y^2 dx + \left(x + e^{\frac{2}{y}}\right) dy = 0, y(e) = \frac{1}{2}$ .

28.  $y' - y \operatorname{tg} x = -\frac{2}{3}y^4 \sin x, y(0) = 1$ .

29.  $xy^2 dx + y(x^2 + y^2) dy = 0$ .

30.1)  $y''' = \cos 4x, y(0) = 2, y'(0) = \frac{15}{16}$ ,

$$y''(0) = 0.$$

2)  $y'' + \frac{2x}{x^2 + 1}y' = 2x$ .

3)  $y'' = \frac{1}{\sqrt{y}}, y(0) = y'(0) = 0$ .

31.1)  $9y'' - 6y' + y = 0$ .

2)  $y'' + 12y' + 37y = 0$ .

3)  $y'' - 2y' = 0$ .

32.  $y^{IV} + 10y'' + 9y = 0, y(0) = 1$ ,

$$y'(0) = 3, y''(0) = -9, y'''(0) = -27.$$

33.1)  $y^{IV} + y''' = 12x + 6$ .

2)  $y''' + 4y'' + 3y' = 4(1 - x)e^{-x}$ .

3)  $y'' - 4y' + 8y =$

$$= e^x(2 \cos x - \sin x).$$

4)  $y'' - 81y' = 162e^{9x} + 81 \sin 9x$ .

5)  $y'' - 4y = 8e^{2x}, y(0) = 1$ ,

$$y'(0) = -8.$$

34.1)  $y'' + 9y = \frac{1}{\cos 3x}$ .

2)  $y'' + y = \frac{1}{\sin x}, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ ,

$$y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

35. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

1)  $\begin{cases} x' = 4x - 8y, \\ y' = -8x + 4y. \end{cases}$

2)  $\begin{cases} x' = 2x + 3y - 3e^{2t}, \\ y' = x + y - e^{2t}. \end{cases}$

### Додаткові задачі

1.  $z = \arcsin xy, d^2z = ?$

2. Знайти умовні екстремуми функції  $u$  відносно заданого рівняння зв'язку:

1)  $u = 5 - 3x - 4y, x^2 + y^2 = 25.$

2)  $2x^2 + 12xy + y^2, x^2 + 4y^2 = 25.$

3)  $u = xy^2, x + 2y - 1 = 0.$

4)  $u = x^2 + y^2 + z^2, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$   
 $a > b > c > 0.$

5)  $u = xy^2z^3, x + y + z = 12, x, y, z > 0.$

3. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями:

1)  $z = x^2 + y^2, x + y = 1, x, y, z \geq 0.$

2)  $y = 16\sqrt{2x}, y = \sqrt{2x}, z = 0, x + z = 2.$

3)  $x^2 + y^2 = 2y, z = \frac{5}{4} - x^2, z = 0.$

4)  $y = 5x^2 + 2, y = 7, z = 3y^2 - 7x^2 - 2,$   
 $z = 3y^2 - 7x^2 - 5.$

5)  $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}, 9z = 2(x^2 + y^2).$

6)  $z = 2 - 12(x^2 + y^2), z = 24x + 2.$

7)  $1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 49, -x \leq y \leq 0,$   
 $-\sqrt{\frac{x^2 + y^2}{35}} \leq z \leq \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{3}}.$

4. Знайти координати центра мас тіла з густиною  $\mu$ :

1)  $R^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4R^2, y \geq 0,$

$$\mu = \mu_0(x^2 + y^2 + z^2).$$

2)  $\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq h, \mu = \mu_0 z^2.$

3)  $x^2 + y^2 \leq z \leq h, \mu = \mu_0 \sqrt{h - z}.$

4)  $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, z \geq 0,$

$$\mu = \frac{\mu_0}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

5. Знайти моменти інерції відносно координатних площин однорідних тіл:

1)  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} \leq 1, x, y, z \geq 0, a, b, c > 0.$

2)  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1.$

3)  $\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}} \leq \frac{z}{c} \leq 1.$

4)  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq \frac{2z}{c} \leq \frac{2x}{a} + \frac{2y}{b}, a, b, c, > 0.$

6. Знайти момент інерції відносно осі  $Oz$  однорідних тіл:

1)  $x^2 + y^2 \leq a^2, x + y + z \leq a\sqrt{2}, z \geq 0.$

2)  $0 \leq z \leq x^2 + y^2, |x \pm y| \leq 1.$

3)  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2, z \geq \sqrt{x^2 + y^2}.$

4)  $\sqrt{\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}} \leq \frac{x}{a} \leq 1, a, b, c > 0.$

7. Перевірити потенціальність і знайти потенціал поля:

1)  $\mathbf{a} = (y + z)\mathbf{i} + (z + x)\mathbf{j} + (x + y)\mathbf{k}.$

2)  $\mathbf{a} = \frac{y\mathbf{i} + zx\mathbf{j} + xy\mathbf{k}}{1 + x^2y^2z^2}.$

3)  $\mathbf{a} = y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + e^z\mathbf{k}.$

8. Чи є поле соленоїдальним, якщо:

1)  $\mathbf{a} = x(z^2 - y^2)\mathbf{i} + y(x^2 - z^2)\mathbf{j} +$   
 $+ z(y^2 + x^2)\mathbf{k}.$

2)  $\mathbf{a} = (1 + 2xy)\mathbf{i} - y^2z\mathbf{j} +$   
 $+ (z^2y - 2yz + 1)\mathbf{k}.$

9. Знайти масу частини поверхні  $\Omega$ , обмеженої  $S$ , з густиною  $\mu$ :

1)  $\Omega : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2,$

$$\mu = \mu_0 \sqrt{x^2 + y^2}, S : \{z \geq 0\}.$$

2)  $\Omega : x^2 + y^2 = 2z, \mu = \mu_0 z$   
 $S : \{z \leq 1\}.$

3)  $\Omega : x^2 - y^2 = 2z, \mu = \mu_0 |z|,$   
 $S : \{x^2 + y^2 \leq 1\}.$



10. Знайти криву, яка проходить через точку  $M_0$  і в якій:

1) кутовий коефіцієнт дотичної в довільній її точці дорівнює ординаті цієї точки, збільшеної в 3 рази,  $M_0(0, 2)$ ;

2) у довільній її точці нормальний вектор  $\overrightarrow{MN}$  з кінцем на осі  $Oy$  має довжину, що дорівнює 25, і утворює гострий кут з додатним напрямком осі  $Oy$ ,  $M_0(15, 1)$ ;

3) відрізок довільної її нормалі, що міститься між осями координат, поділяється точкою лінії у відношенні 1 : 2 (якщо відраховувати від осі  $Oy$ ),  $M_0(1, 1)$ ;

4) кутовий коефіцієнт дотичної в довільній її точці у 8 разів більший за кутовий коефіцієнт прямої, що з'єднує ту саму точку з початком координат,  $M_0(2, 5)$ ;

5) довжина відрізка, який відтинає на осі ординат нормаль, проведenu в довільній точці кривої, дорівнює відстані цієї точки до початку координат,  $M_0(0, 4)$ ;

6) відрізок довільної її дотичної, що міститься між точкою дотику й віссю ординат, поділяється в точці перетину з віссю абсцис у відношенні 3 : 1 (якщо відраховувати від осі  $Oy$ ),  $M_0(-1, 1)$ ;

7) довжина перпендикуляра, проведеного з початку координат на дотичну до кривої, дорівнює абсцисі точки дотику,  $M_0(-4, 1)$ .

11. Знайти закон руху тіла, якщо:

1) його прискорення пропорційне часу та  $v(0) = 0, v(2) = 10, s(2) = 10$ ;

2) воно рухається вздовж осі  $Ox$  під дією постійної сили  $a$ , спрямованої вздовж осі. Сила опору повітря чисельно дорівнює швидкості руху,  $x(0) = 0, v(0) = 0$ ;

3) його швидкість пропорційна пройденому шляху і тіло проходить 100 м за 10 с та 200 м за 15 с;

4) воно маси  $m$  і рухається прямолінійно під дією сили  $F = 3t^2$  та  $v(0) = v_0$ ,  $F_{\text{опір}} = kv$ .

12. Знайти силу струму при усталеному режимі в електричному колі, у якому послідовно увімкнено:

1) джерело струму  $E = E_0 \sin \omega t$ , опір  $R$  та ємність  $C$ ;

2) джерело струму  $E = E_0 \sin \omega t$ , опір  $R$  та індуктивність  $L$ . Початкова сила струму  $I(0) = 0$ ;

3) джерело постійного струму, що подає напругу  $E_0$ , опір  $R$  та конденсатор ємності  $C$ . Конденсатор до замкнення кола не заряджений;

4) опір  $R$ , конденсатор ємності  $C$ , заряд якого при  $t = 0$  дорівнює  $q$ ;

5) індуктивність  $L$ , опір  $R$  і конденсатор ємності  $C$ , заряд якого при  $t = 0$  дорівнює  $q$  (розглянути випадок коливного розряду);

6) джерело струму, напруга якого змінюється за законом  $E = E_0 \sin \omega t$ , опір  $R$ , індуктивність  $L$ ;

7) джерело струму, напруга якого змінюється за законом  $E = kt$ , опір  $R$ , індуктивність  $L$ , якщо  $I(0) = 0$ .

13. Провідник має заряд 1000 Кл. Через недосконалу ізоляцію він поступово втрачає свій заряд. Швидкість втрати заряду в кожен момент часу пропорційна заряду провідника. Який заряд залишиться на провіднику, якщо за першу хвилину втрачено 100 Кл?

14. Температура тіла знизилася зі 100 до 60 °С за 10 хв. Температура середовища — 20 °С. За який час тіло охолоне до 30 °С?