УДК 539.3

О. М. Чемерис

КОЛИВАННЯ КРУГЛИХ КІЛЬЦЕВИХ ПЛАСТИ З ВІЛЬНИМ КРАЄМ

Вступ

Круглі кільцеві пластинки з вільним краєм зустрічаються в різного типу, діафрагм,пружин, підвісок. Рішення задач по визначенню частот власних коливань для кільцевих пластин приведені в роботах [1 – 2]. Форми коливань в даних роботах не визначалися. Алгоритми рішення та результати обчислень частотного параметра для даних випадків приведені також в довідниках [3 - 4]. Частоти і форми коливань кільцевих пластин [1 - 2]приведені в роботі [3]. Розглянуто круглі пластинки, які жорстко кріпляться до опори по внутрішньому контуру. Зовнішній край вільний, защемлений чи шарнірно закріплений.. Частоти і форми коливань круглих кільцевих пластин з внутрішньою шарнірною опорою і з зовнішніми границями відмінними від шарнірних не визначались. В роботі [5] визначені частоти і форми шарнірно закріпленої по обох контурах пластинки. Частоти і форми коливань кільцевої пластинки з затиснутою внутрішньою і ковзною зовнішньою границею при різних співвідношеннях внутрішнього і зовнішнього діаметрів приведено в роботі [6].

Мета досліджень

В роботі ставиться задача аналітичного рішення рівняння коливань пластинки та складання частотних рівнянь кільцевої пластинки з внутрішнім вільним краєм при защемленому чи шарнірному закріпленні зовнішнього. Метою роботи є також одержання динамічних характеристик пластинки:частот і форм коливань при різних співвідношеннях внутрішнього та зовнішнього діаметрів.

Дослідження

Рівняння коливань стиснутої круглої пластинки матиме такий вигляд [3]

$$D\nabla^2 w + b^4 m\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \qquad D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$$

де ∇^2 – оператор Лапласа, E – модуль Юнга, ω – коефіцієнт Пуассона, b - зовнішній радіус пластинки, r змінний радіус пластинки,

a - внутрішній, $\rho = r/b$ - відносний змінний радіус пластинки, $c = \dfrac{a}{b}$, w - нормальні переміщення точок пластинки, m - маса пластинки на одиницю площі, θ - кутова координата, t - час.

По методу розділення змінних рішення даного рівняння можна записати в вигляді

$$w(\rho,\theta,t) = \left(C_1 I_n(k\rho) + C_2 J_n(k\rho) + \right.$$
$$\left. + C_3 K_n(k\rho) + C_4 Y_n(k\rho)\right)\cos(n\theta)\cos(\omega t) \qquad (1)$$

де C_i – сталі величини, I_n, J_n, K_n, Y_n – функції Бесселя, ω – кругова частота коливань, (n = 0,1, 2), k - невідоме число (частотний параметр)

$$k^4 = \frac{m\omega^2 b^2}{D}.$$

Нехай пластинка по внутрішньому краю вільна, а по зовнішньому краю защемлена (рис. 1.).

Рис. 1. Розрахункова схема 1

Граничні умови

$$\left[\frac{\partial^3}{\partial\rho^3} + \frac{1}{k}\cdot\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} - \frac{\partial}{k^2\partial\rho} + \frac{(2-\mu)}{k^2}\cdot\frac{\partial^3}{\partial\rho\cdot\partial\theta^2} - (3-\mu)\cdot\frac{\partial^2}{k^3\cdot\partial\theta^2}\right] w(c,\theta,t) = 0$$

$$\frac{\partial^2 w(c,\theta,t)}{\partial\rho^2} + \mu\left(\frac{\partial^2 w(c,\theta,t)}{k^2\partial\theta^2} + \frac{\partial w(c,\theta,t)}{k\partial\rho}\right) = 0, \qquad (2)$$

$$w(1,\theta,t) = 0, \frac{\partial w(1,\theta,t)}{\partial\rho} = 0$$

Із формул(1), (2) одержимо лінійну однорідну лінійну систему чотирьох рівнянь відносно C_i

$$C_1 MI_n(ck) + C_2 MJ_n(ck) + C_3 MK_n(ck) + C_4 MY_n(ck) = 0,$$
$$C_1 QI_n(ck) + C_2 QJ_n(ck) + C_3 QK_n(ck) + C_4 QY_n(ck) = 0,$$
$$C_1 I_n(k) + C_2 J_n k) + C_3 K_m(k) + C_4 Y_n(k) = 0, \qquad (3)$$
$$C_1 L_1 I_n(k) + C_2 L_1 J_n(k) + C_3 L_1 K_n(k) + C_4 L_1 Y_n(k) = 0;$$

$$L=\frac{d}{d\rho};M=\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}+\mu(\frac{\partial}{r\cdot\partial r}+\frac{\partial^2}{r^2\cdot\partial r^2});$$

$$Q=\left[\frac{\partial^3}{\partial\rho^3}+\frac{1}{k}\cdot\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}-\frac{\partial}{k^2\partial\rho}+\frac{(2-\mu)}{k^2}\cdot\frac{\partial^3}{\partial\rho\cdot\partial\theta^2}-(3-\mu)\cdot\frac{\partial^2}{k^3\cdot\partial\theta^2}\right].$$

Прирівнюємо до нуля визначник системи (3) і знаходимо

$$\begin{vmatrix} I_n(ck)J_n(ck)K_n(ck)Y_n(ck) \\ LI_n(ck)LJ_n(ck)LK_n(ck)LY_n(ck) \\ I_n(k)J_n(k)K_n(k)Y_n(k) \\ L_1I_n(k)L_1J_n(k)L_1K_n(k)L_1Y_n(k) \end{vmatrix}=0 \qquad (4)$$

При $n = 0$ визначник (4) можна привести до виду

$$X(x)=a11(x)\cdot a22(x)-a12(x)\cdot a21(x)=0 \qquad (5)$$

$$a11(x)=J0(x)\cdot\delta0(x)+Y0(x)\cdot kj0(x)+K0(x)\cdot yj0(x);$$
$$a12(x)=I0(x)\cdot\delta0(x)+Y0(x)\cdot ki0(x)+K0(x)\cdot yi0(x);$$
$$a21(x)=J01(x)\cdot\delta0(x)+Y01(x)\cdot kj0(x)+K01(x)\cdot yj0(x);$$
$$a22(x)=I01(x)\cdot\delta0(x)+Y01(x)\cdot ki0(x)+K01(x)\cdot yi0(x);$$
$$\delta0(x)=QY0(x\cdot c)\cdot MK0(x\cdot c)-MY0(x\cdot c)\cdot QK0(x\cdot c);$$
$$ki0(x)=-QI0(x\cdot c)\cdot MK0(x\cdot c)+MI0(x\cdot c)\cdot QK0(x\cdot c);$$
$$kj0(x)=-QJ0(x\cdot c)\cdot MK0(x\cdot c)+MJ0(x\cdot c)\cdot QK0(x\cdot c);$$
$$yj0(x)=-QY0(x\cdot c)\cdot MJ0(x\cdot c)+MY0(x\cdot c)\cdot QJ0(x\cdot c).$$

Аналогічно знаходимо $X(x)$ при $n = 1, 2$. Параметр к при $n = 0, 1, 2$ наведено в табл. 1. – табл. 3.

***Таблиця* 1.**

Значення частотного параметра к при $n = 0$ (вільний – защемлений)

s	*c* = 0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7
0	4.226	4.147	4.185	4.48	4.39	6.714	7.755
1	7.293	7.35	7.32	5.489	11.14	9.05	12.28
2	10.389	10.99	12.67	13.57	—	—	21.282
3	13.563	15.03	16.96	19.74	—	—	30.27

***Таблиця* 2.**

Значення частотного параметра к при $n = 1$ (вільний – защемлений)

s	*c* = 0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7
0	3.73	3.87	4.15	4.48	4.62	4.64	4.71

s	c = 0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7
1	7.07	7.54	7.83	7.94	8.69	7.24	11
2	10.43	10.98	11.15	12.83	14.42	17.84	20.09
3	13.74	14.2	14.48	17.33	20.6	23.43	—

***Таблиця* 3.**

Значення частотного параметра к при $n = 2$ (вільний – защемлений)

s	c = 0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7
0	5.88	5.98	—	—	—	—	7.58
1	9.16	9.55	6.24	7.18	7.44	7.53	—
2	12.4	13.51	10.54	10.75	10.8	13.99	17.1
3	15.68	16.97	13.92	13.99	—	17.16	—

В систему алгебраїчних рівнянь (3) підставляємо знайдені корні частотних рівнянь і знаходимо рішення даної системи. Виражаючи сталі $C_i\,(i = 2,\ 3,\ 4)$ через C_1 знаходимо радіус вузлових кілець ρ (x^* – корінь частотного рівняння) при $n = 0, 1, 2$ із умови

$$w(x,\rho)=0$$

Із рішення даного рівняння знаходимо радіуси вузлових кілець, які приведені в табл. 4.

***Таблиця* 4.**

Величини вузлових діаметрів $\rho \cdot 10^4$ (вільний - защемлений)

c	$n = 0$			$n = 1$			$n = 2$		
	$s = 1$	2	3	$s = 1$	2	3	$s = 1$	2	3
0.1	46	32 62	25 48 71	50	37 65	30 51 73	55	41 67	33 54 74
0.3	63	45 68	49 58 78	55	42 67	38 59 81	25	29 61	24 48 71
0.5	67	—	75 85 96	64	57 76	55 68 82	43	48 71	39 58 76

Розглянемо(рис. 2.) випадок шарнірного закріплення отвору пластинки при вільному зовнішньому. Граничні умови:

Рис. 2. Розрахункова схема 2

$$w(c,\theta,t)=0,$$

$$\frac{\partial^2 w(c,\theta,t)}{\partial\rho^2}+\mu\left(\frac{\partial^2 w(c,\theta,t)}{k^2\partial\theta^2}+\frac{\partial w(c,\theta,t)}{k\partial r}\right)=0,$$

$$\frac{\partial^2 w(1,\theta,t)}{\partial\rho^2}+\mu\left(\frac{\partial^2 w(1,\theta,t)}{k^2\partial\theta^2}+\frac{\partial w(1,\theta,t)}{k\partial r}\right)=0,$$

$$\left[\frac{\partial^3}{\partial\rho^3}+\frac{1}{k}\cdot\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}-\frac{\partial}{k^2\partial\rho}+\frac{(2-\mu)}{k^2}\cdot\frac{\partial^3}{\partial\rho\cdot\partial\theta^2}-(3-\mu)\cdot\frac{\partial^2}{k^3\cdot\partial\theta^2}\right]w(1,\theta,t)=0,$$

$$L=\frac{d}{d\rho};\quad S=\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}+\mu\left(\frac{\partial}{r\cdot\partial r}+\frac{\partial^2}{r^2\cdot\partial r^2}\right),$$

$$Q=\frac{\partial^3}{\partial\rho^3}+\frac{1}{k}\cdot\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}-\frac{\partial}{k^2\partial\rho}+\frac{(2-\mu)}{k^2}\cdot\frac{\partial^3}{\partial\rho\cdot\partial\theta^2}-(3-\mu)\cdot\frac{\partial^2}{k^3\cdot\partial\theta^2}=0$$

При $n=0$ система (5)матиме вигляд

$$b11(x)\cdot b22(x)-b2(x)\cdot b21(x)=b \tag{9}$$

$$b11(x)=J0(x)\cdot d0(x)+Y0(x)\cdot kj0(x)+K0(x)\cdot yj0(x);$$

$$b12(x)=I0(x)\cdot d0(x)+Y0(x)\cdot ki0(x)+K0(x)\cdot yi0(x);$$

$$b21(x)=MJ0(x)\cdot\delta 0(x)+MY0(x)\cdot kj0(x)+MK0(x)\cdot yj0(x);$$

$$b22(x)=MI0(x)\cdot\delta 0(x)+MY0(x)ki0(x)+MK0(x)\cdot yi0(x);$$

$$d0(x)=QY0(x\cdot c)\cdot MK0(x\cdot c)-MY0(x\cdot c)\cdot QK0(x\cdot c);$$

$$ki0(x)=-QI0(x\cdot c)\cdot MK0(x\cdot c)+MI0(x\cdot c)\cdot QK0(x\cdot c);$$

$$kj0(x)=-QJ0(x\cdot c)\cdot MK0(x\cdot c)+MJ0(x\cdot c)\cdot QK0(x\cdot c);$$

$$yj0(x)=-QY0(x\cdot c)\cdot MJ0(x\cdot c)+MY0(x\cdot c)\cdot QJ0(x\cdot c);$$

$$yi0(x)=-MY0(x\cdot c)\cdot QI0(x\cdot c)+QY0(x\cdot c)\cdot MI0(x\cdot c).$$

Значення частотного параметра к при $n=1, 2, 3$ приведено в табл. 5.

***Таблиця* 5.**

Значення частотного параметра к при *n* = 0 (вільний – шарнірний)

s	*c* = 0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7
0	—	3.29	3.22	3.26	3.44	3.66	5.6
1	3.42	6.45	6.92	8.22	9.58	11.95	12.3
2	9.57	10.01	—	13.17	15.8	—	16.8
3	12.75	13.99	15.39	18.44	22.05	27.83	—

***Таблиця* 6.**

Значення частотного параметра к при *n* = 1 (вільний – шарнірний)

s	*c* = 0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7
0	—	3.29	3.22	3.26	3.44	3.66	5.6
1	3.42	6.45	6.92	8.22	9.58	11.95	12.3
2	9.57	10.01	11.54	13.17	15.8	14.33	16.8
3	12.745	13.986	15.389	18.44	17.191	27.828	—
4	16.02	17.954	—	21.49	23.5	—	—

***Таблиця* 7.**

Значення частотного параметра к при *n* = 2 (вільний – шарнірний)

s	*c* = 0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7
0	5.042	5.031	—	—	—	—	—
1	8.342	—	5.165	5.969	6.495	6.644	6.706
2	11.57	8.57	9.61	9.89	—	—	9.99
3	14.83	12.55	13.08	13.17	13.18	13.18	13.18
4	18.21	16.11	16.34	14.2	19.52	16,35	16.35

***Таблиця* 8.**

Величини вузлових діаметрів $\rho \cdot 10^3$ (вільний – шарнірний)

c	*n* = 0		*n* = 1		*n* = 2	
	s = 1	*s* = 2	*s* = 1	*s* = 2	*s* = 1	*s* = 2
0.1	139	352 676	558	396 700	612	442 726
0.2	532	388 690	587	430 716	—-	172 623

c	***n* = 0**		***n* = 1**		***n* = 2**	
	***s* = 1**	***s* = 2**	***s* = 1**	***s* = 2**	***s* = 1**	***s* = 2**
0.3	571	5.98 935	607	447 720	193	320 667
0.4	639	536 763	621	516 798	443	342 677

Висновки

1 Для пластинки з вільною внутрішньою і защемленою зовнішньою границею знайдено частоти і форми переміщень при симетричних (n = 0) і несиметричних коливаннях (n = 1, 2).

2. Для пластинки з вільною внутрішньою і защемленою чи з шарнірною зовнішньою опорою знайдено частоти і форми переміщень при симетричних (n = 0) і несиметричних коливаннях (n = 1, 2).

3. Наведений алгоритм рішення може бути використаний для визначення частот і форм коливання круглих пластин з іншим граничними умовами.

Список використаноїлітератури

1. *Сахаров И. Е.* Частоты собственных колебаний кольцевых пластинок [Текст] / И. Е. Сахаров //Известия АН СССР, ОТН, №5, 1957. С. 125-132.
2. *Сахаров И. Е.* Динамические жёсткости в теории осесимметричных колебаний круглых и кольцевых пластинок[Текст] / И. Е. Сахаров //Известия АН СССР, Механика, №5, 1959. С. 118-124.
3. *Гонткевич В. С.* Собственные колебания пластинок. [Текст] / *В. С. Гонткевич//* Справочное пособие.-К: Наукова думка,1964, 287 с.
4. *Чемерис О. М.* Коливання круглих шарнірно закріплених кільцевих пластин. [Текст] / О. М. Чемерис//Вісник НТУУ “КПІ”, Серія «Машинобудування» , – № 62, 2011, С. 183-186.
5. *Чемерис О. М.* Коливання кільцевої пластинки з ковзною опорою. [Текст] / О. М. Чемерис //Вісник НТУУ “КПІ”, Серія «Машинобудування»,– № 64, 2012. С. 149-157.