

ТЕОРЕТИЧНІ ТА ПРИКЛАДНІ ПРОБЛЕМИ ФІЗИКИ

УДК 530.182

В.Г. Бар'яхтар¹, Г.В. Самар²

¹Національна академія наук України, Київ, Україна

²Київський національний університет України "КПІ", Київ, Україна

ТОЧНО РОЗВ'ЯЗУВАНА МОДЕЛЬ У ТЕОРІЇ ПАРАМЕТРИЧНОГО РЕЗОНАНСУ

Background. Construction of the exactly solvable model of the parametric resonance with the solutions in analytical form. The study of the parametric resonance basic properties in the exactly solvable model in case that the periodic potential of the Hill equation is the Lamé potential.

Objective. Using of the Lamé one-dimensional finite-zone potentials for calculating of the parametric resonance parameters.

Methods. To achieve this purpose the methods of theoretical physics, the methods of the elliptic functions theory for use of the finite-zone potentials, the weak- and strong-binding approximations for studying of the limit cases of finite-zone potential are used.

Results. The study of exactly solvable models in case that the periodic potential of the Hill equation is the Lamé potential proportional to the elliptic Weierstrass function is performed. These potentials correspond to a spectrum that consists of a finite number of zones. Zone approach for the analysis of the effect of parametric resonance is developed. The increments of growth of oscillations in the Lamé potential model for external force applied to the oscillator are calculated. It is shown that the increment of growth reaches a maximum in the middle of zone (parametric resonance condition) and that derivatives of the increment of growth with respect to the natural frequency tend to infinity on the zone boundaries. This result corresponds to a conversion to infinity of derivatives of quasifrequency with respect to the natural frequency in case of the parametric oscillator fluctuations with constrained amplitude.

Conclusions. The Lamé potential model gives an opportunity to explore the dependence of the increment of growth on the intensity of external influence in case that the weak- and strong-binding approximations are modulated by the potential periods.

Keywords: parametric resonance; increments of parametric oscillation; Lamé potentials; exactly solvable model; elliptic Weierstrass functions.

Вступ

Ефект вибіркового підсилення (згасання) збуджень у класичних та квантових системах, що виникає внаслідок накачки енергії в систему через модуляцію її параметрів, називають параметричним резонансом (ПР). Подібні явища проявляються в різних формах у багатьох фізичних явищах і процесах. Зокрема, це стосується механічних коливних систем, оптичних і спінових систем, багаточастинкових квантових бозонних і ферміонних систем із сильними кореляціями (див. [1–3]). Задачі параметричного резонансу тісно зв'язані з вивченням умов стійкості при параметричній модуляції системи.

Систематичні експериментальні і теоретичні дослідження почали Л. Мандельштам і Я. Папалексі, реалізуючи параметричне збудження струму в електричному резонансному контурі [4]. Проблема параметричного резонансу в механіці розглядалася А. Андроновим, М. Леонтовичем і С. Хайкіним [5]. Ними було показано, що коливання звичайного маятника, коли точка підвісу вища за центр тяжіння, ста-

ють нестійкими при параметричному резонансі. Загальний метод вивчення нелінійних коливань був розвинений та математично обґрунтований М.М. Боголюбовим та Ю.А. Митропольським (див. [4, 5]).

Близькою до параметричного резонансу є задача стабілізації пучка заряджених частинок у циклічних прискорювачах. Досягається це за допомогою "сильного фокусування". Ідея сильного фокусування була висунута в працях Н.К. Крістофілоса, Е.Д. Куранта, М.С. Ливингстона, Х.С. Снайдера (див. [6]).

Ще більш потужний розвиток одержала фізика електронів у кристалі. Обидва явища: параметричний резонанс і рух електрона в кристалі, описуються подібними рівняннями Хілла. Руху електрона в кристалі відповідають його хвильова функція й власна енергія, побудовані для дозволеної зони енергії. Параметричному резонансу відповідає зміщення від положення рівноваги як функції часу, коли власні частоти осцилятора лежать у "забороненій" зоні частот. Саме для цих інтервалів власних частот частота коливань параметричного осцилятора має дійсну та уявну частини.

Аналогія між рухом електрона в кристалі та параметричним резонансом була поза увагою з таких причин. В електронній теорії кристалів головна увага звертається на залежність енергії електрона від квазіімпульсу, у теорії параметричного резонансу – на залежність інкремента зростання коливань від амплітуди зовнішньої сили, тобто від ширини забороненої зони. Залежність інкремента зростання від квазічастоти не досліджувалась.

Постановка задачі

Можливості загального опису властивостей коливальних систем у багатьох випадках обмежені тими чи іншими наближеннями, наприклад наближенням слабкої зміни параметра модуляції. Тому мета роботи – розвинути теорію параметричного резонансу в точно розв'язуваній моделі потенціалів Ламе й отримати точні розв'язки в аналітичному вигляді для параметрів, що описують систему.

Вихідні положення

Математично названі явища описуються рівнянням Хілла і в найпростішому випадку – рівнянням осцилятора зі змінною в часі частотою.

Нагадаємо, що рівняння Хілла має вигляд

$$\frac{d^2 X}{dt^2} + \lambda X + V(t) X = 0, \quad (1)$$

де λ – стала величина, $V(t)$ – періодична функція, $V(t+a) = V(t)$.

У випадку електрона в кристалі

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} + 2mE\psi - 2mU(x)\psi = 0$$

$X(t)$ має сенс його хвильової функції: $X(t) = \Psi(x)$, $V(t) = -U(x)$ – потенційна енергія взаємодії електрона з кристалом, a – стала ґратки кристала, $\lambda = E$ – енергія електрона в кристалі, x – його координата.

У разі електричного коливального контуру $X = q$ – електричний заряд на конденсаторі, $V(t) + \lambda = [1/L(t)C(t)] = \omega_0^2(t)$ – частота коливань, L і C – відповідно індуктивність і ємність коливального контуру, залежні від часу. Похідна береться за часом.

У разі маятника з віброуючою точкою підвісу (задача Боголюбова–Капіци) змінна t має сенс часу, $X = \varphi$ – кут зміщення маятника, $f(t) = V(t)\varphi$ є періодичною з періодом T силою, що діє на точку підвісу, $-\lambda\varphi(t) = \omega_0^2\varphi(t)$ – сила, що відхиляє маятник зі стану з максимальною потенційною енергією, $\omega_0^2 = g/l$, g – прискорення вільного падіння, l – довжина маятника.

У нашій роботі запропоновано метод вивчення основних властивостей параметричного резонансу в точно розв'язуваній моделі, коли періодичним потенціалом рівняння Хілла є потенціал Ламе:

$$V(x) = n(n+1)\wp(it+t_1, t_1, t_2), \quad (2)$$

де \wp – функція Вейерштрасса, n – цілі числа, $2t_1$, $2t_2$ – дійсний та уявний періоди функції Вейерштрасса. Потенціал є періодичним з періодом $T = -2it_2 = 2|t_2|$. Рівняння Хілла з періодичним потенціалом Ламе називають рівнянням Ламе. Рівняння Ламе має точні розв'язки.

Уперше рівняння Ламе виникло при розділенні змінних рівняння Лапласа в еліпсоїдних координатах. Це рівняння відіграє важливу роль у різних розділах сучасної фізики: фізиці твердого тіла [7–9], у точно розв'язуваних задачах квантової механіки [10, 11], у проблемах магнітостатики [12] і багатьох інших.

У нашій роботі для аналізу розв'язків рівняння (1) ми використаємо аналогію із задачею руху електрона (квазічастинки) в кристалі [13].

Запишемо рівняння (1) у вигляді

$$\frac{d^2 X}{dt^2} + \omega_0^2 X - V(t) X = 0. \quad (3)$$

У цьому рівнянні ω_0 – власна частота осцилятора при $V = 0$, V – множник, що описує періодичну зміну параметра осцилятора за рахунок зовнішньої сили $f = V(t)X$, X – відхилення від положення рівноваги.

Точно розв'язувана модель параметричного резонансу

Розглянемо випадок, коли є дві зони обмежених коливань параметричного осцилятора та дві зони наростаючих коливань. Цьому ви-

падку відповідає моделюючий множник $V(t)$, що дорівнює

$$V(t) = -2\wp(it + t_1). \quad (4)$$

У цій формулі $2t_1$ позначений дійсний період функції Вейерштрасса, уявний період будемо позначати $2t_2$. Потенціал (4) є періодичним із періодом $T = -2it_2 = 2|t_2|$.

Рівняння (3) з $V(t)$, визначеним формулою (4), набуває вигляду

$$\frac{d^2 X}{dt^2} + \omega_0^2 X + 2\wp(it + t_1)X = 0. \quad (5)$$

Розв'язки цього рівняння мають вигляд, що нагадує функцію Блоха [13, 14]:

$$X_{\pm}(t) = u_{\pm}(t) \text{Exp}[\mp i\omega' t]. \quad (6)$$

Моделюючі множники в цій формулі $u_{\pm}(t)$ та ω' визначаються формулами

$$u_{\pm}(t) = \frac{\sigma(it + t_1 \pm x)}{\sigma(it + t_1)\sigma(x)}, \quad (7)$$

$$\omega' = \zeta(x). \quad (8)$$

Параметр x пов'язаний із частотою власних коливань ω_0^2 співвідношенням

$$\wp(x) = \omega_0^2. \quad (9)$$

У формулах (7)–(9) \wp , σ і ζ є пе-, сигма- і зета-функціями Вейерштрасса. Їх визначення та властивості описані в багатьох книгах, наприклад у [15]. Функції ζ та σ – квазіперіодичні. Вони мають ті ж періоди, що й $\wp(z)$: $2t_1$, $2t_2$. Квазіперіодичність функцій ζ і σ зумовлює те, що $\omega' = \zeta(x)$ і $u_{\pm}(t)$ не є відповідно квазічастотою та блохівським модулюючим множником. Щоб отримати вираз для квазічастоти ω , використаємо таку умову (теорему Флоке):

$$\begin{aligned} X_{\pm}(t + T) &= u_{\pm}(t + T) \text{Exp}[\mp i\omega'(t + T)] = \\ &= X_{\pm}(t) \text{Exp}[\mp i\omega T]. \end{aligned}$$

Використовуючи властивості функцій Вейерштрасса [15]

$$\sigma[i(t + T)] = \sigma(it + 2t_2) = -\text{Exp}[2\eta_2(it + t_2)]\sigma(it),$$

знаходимо

$$\omega(x) = \zeta(x) - (\eta_2/t_2)x = -\int_{e_3}^x [\wp(y) + (\eta_2/t_2)] dy. \quad (10)$$

Покажемо, що $\omega(x)$ – періодична функція з періодом $T = 2t_2$:

$$\begin{aligned} \omega(x + 2t_2) &= \zeta(x + 2t_2) - (\eta_2/t_2)(x + 2t_2) = \\ &= \zeta(x) - (\eta_2/t_2)x + 2\eta_2 - 2t_2(\eta_2/t_2) = \\ &= \zeta(x) - (\eta_2/t_2)x = \omega(x). \end{aligned}$$

При аналізі інкремента наростання амплітуди $X_{\pm}(t)$ зручно використовувати формулу [13]

$$\omega(x) = -\int_{e_3}^x \frac{ds[s + (\eta_2/t_2)]}{2\sqrt{(s - e_1)(s - e_2)(s - e_3)}}, \quad (11)$$

де $e_1 = \wp(t_1)$; $e_2 = \wp(t_1 + t_2)$; $e_3 = \wp(t_2)$; $e_1 + e_2 + e_3 = 0$. Параметри e_1, e_2, e_3 задовольняють умову $e_1 > e_2 > e_3$. Формула (11) для квазічастоти еквівалентна формулі (10). Для доведення тотожності цих формул використаємо співвідношення [13]

$$\begin{aligned} (d\wp(z)/dz)^2 &= 4\wp^3(z) + g_2\wp(z) - g_3 = \\ &= 4(\wp - e_1)(\wp - e_2)(\wp - e_3) \end{aligned} \quad (12)$$

або

$$(d\wp(z)/dz) = 2\sqrt{(\wp - e_1)(\wp - e_2)(\wp - e_3)}. \quad (12a)$$

Перейдемо у формулі (11) від змінної інтегрування s до змінної z по формулі $s = \wp(z)$:

$$\omega(x) = -\int_{e_3}^x \frac{[d\wp(z)/dz][\wp(z) + (\eta_2/t_2)] dz}{2\sqrt{(\wp - e_1)(\wp - e_2)(\wp - e_3)}}. \quad (13)$$

Використаємо цю формулу, щоб визначити зони обмежених коливань параметричного осцилятора та зони необмежених коливань цього осцилятора. Нагадаємо, що $\wp(x) = \omega_0^2$ має зміст власної частоти коливань “незбудженого” осцилятора, а $\omega(x)$ – квазічастоти коливань параметричного осцилятора. Якщо квазічастота – величина дійсна, то амплітуда коливань параметричного осцилятора буде обмеженою. Якщо квазічастота має уявну частину, то амплітуда коливань параметричного осцилятора буде експоненційно збільшуватися з часом (див. формули (6), (8), (10)).

Із формули (12) видно, що дійсних значень $\omega(x)$ набуває за умови $e_2 > \omega_0^2 > e_3$; $\omega_0^2 > e_1$ в усьому інтервалі інтегрування від e_3 до x .

Якщо x таке, що $\omega_0^2 < e_3$ або $e_1 > \omega_0^2 > e_2$, то або всі три множники під знаком кореня, або один із них негативний. Квазічастота $\omega(x)$ за цих умов буде чисто уявна.

Викладені міркування дають змогу так класифікувати зони зміни ω_0^2 :

інтервали $e_2 < \omega_0^2 < e_1$ та $-\infty < \omega_0^2 < e_3$ є інтервалами необмеженого зростання амплітуди коливань параметричного осцилятора;

інтервали $e_3 < \omega_0^2 < e_2$ та $e_1 < \omega_0^2 < \infty$ є інтервалами коливань параметричного осцилятора з обмеженими амплітудами. В теорії електрона в кристалі цим зонам відповідають "заборонені" та "дозволені" зони енергії.

Доведемо тепер еквівалентність формул (8) і (10). Підставивши формулу (12a) в (11), отримаємо

$$\omega(x) = - \int_{e_3}^x [\wp(z) + (\eta_2/t_2)] dz.$$

Цей вираз збігається з (8). Використовуючи формули (9) і (10), знайдемо:

$$\begin{aligned} 2\omega_0 d\omega_0 &= [d\wp(x)/dx] dx = \\ &= 2\sqrt{(\wp(x) - e_1)(\wp(x) - e_2)(\wp(x) - e_3)} dx, \\ d\omega(x) &= -[\wp(x) + (\eta_2/t_2)] dx, \end{aligned}$$

звідки похідна від власної частоти по квазічастоті $(d\omega_0/d\omega)$ дорівнює

$$\begin{aligned} (d\omega_0/d\omega) &= \frac{\sqrt{(\wp - e_1)(\wp - e_2)(\wp - e_3)}}{(\wp)^{1/2}[\wp + (\eta_2/t_2)]} = \\ &= \frac{\sqrt{(\omega_0^2 - e_1)(\omega_0^2 - e_2)(\omega_0^2 - e_3)}}{(\omega_0^2)^{1/2}[\omega_0^2 + (\eta_2/t_2)]}. \end{aligned}$$

Ця важлива формула показує, що на границях зон ($\omega_0^2 = \wp = e_i$) похідна $(d\omega_0/d\omega)$ обертається на нуль. В теорії електрона в кристалі формулі (12) відповідає формула

$$(d\varepsilon_n/dk) = v_n(k),$$

де $\varepsilon_n(k)$ – енергія електрона в n -й дозволеній зоні, k – квазіімпульс, $v_n(k)$ – швидкість елек-

трона, що дорівнює нулю на границях зони Бріллюена [13, 14].

Звернемося до основної комірки функції Вейерштрасса $\wp(t; t_1, t_2)$, на комплексній площині t (рис. 1).

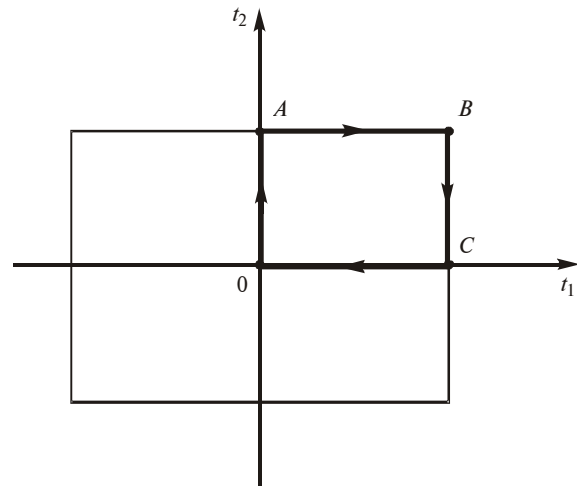


Рис. 1. Паралелограм періодів. Точки O, A, B і C мають координати $(0,0), (0,t_2), (t_1,t_2), (t_1,0)$. Задання функції $\wp(t;t_1,t_2)$ усередині паралелограма періодів визначає її на всій площині $t = t' + it''$ унаслідок її періодичності

При зміні змінної t уздовж контуру виділеного на рис. 1 прямокутника від точки $t = i\varepsilon$ на уявній осі до точки $t = \varepsilon$ на дійсній осі $\wp(z)$ монотонно зростає від $-\infty$ до $+\infty$.

Відрізку OA уявної осі відповідають негативні значення $\wp(z)$, у точці $z = A = t_2$ маємо: $\omega_0^2 = \wp(t_2) = e_3 < 0$. На цьому відрізку $\zeta(z)$ має чисто уявні значення. Відповідно до формули (9) цьому відрізку відповідають негативні квадрати частоти ω_0^2 , що означає нестійкість власних коливань. Така ситуація реалізується, наприклад, у маятнику в полі тяжіння, коли центр тяжіння займає верхнє положення, що відповідає максимуму потенційної енергії. У цій роботі випадок $\omega_0^2 < 0$ (і відповідні інтервали z) ми розглядати не будемо.

Відрізку AB на рис. 1 відповідають дійсні значення $\zeta(z)$. Що ж стосується $\omega_0^2 = \wp(t_2)$, то вона змінюється від від'ємного значення $\omega_0^2 = \wp(t_2) = e_3 < 0$ [15] до значення $\omega_0^2 = \wp(t_1 + t_2) = e_2$, яке може бути як позитивною величиною, так і негативною залежно від значень періодів $2t_1, 2t_2$. Цьому інтервалу зна-

чень параметра z можуть відповідати обмежені коливання параметричного осцилятора. Ці коливання реалізуються при тих z , коли $\wp(z) = \omega_0^2 > 0$. Ми будемо розглядати такі t_1 і t_2 , що $e_2 > 0$.

Відрізку BC змінних z на рис. 1 відповідають уявні значення $\zeta(z)$ та уявні значення $\omega(z)$. Це означає, що цьому відрізку відповідають експоненціально зростаючі з часом коливання параметричного резонансу (див. формули (6), (8), (10)). Величині $z = t_1$ відповідає додатне значення $\wp(t_1) = e_1 > 0$ за будь-яких t_1, t_2 .

Нарешті, відрізку CO дійсної осі на площині комплексної змінної z , відповідають додатні значення $\omega_0^2 = \wp(z)$ та дійсні значення $\zeta(z) = \infty > \wp(z) > e_1 > 0$. Цьому інтервалу параметра z відповідають обмежені коливання параметричного осцилятора з власними частотами $\infty \geq \omega_0^2 \geq e_1$.

На рис. 2 наведена залежність $\omega_0^2 = \wp(z)$ від квазічастоти $\omega(z) = \zeta(z) - (\eta_2/t_2)z$, на рис. 3 – залежність інкремента наростання коливань $\gamma(z) = \text{Im}[\zeta(z) - (\eta_2/t_2)z]$ – від частоти коливань $\omega_0^2 = \wp(z)$.

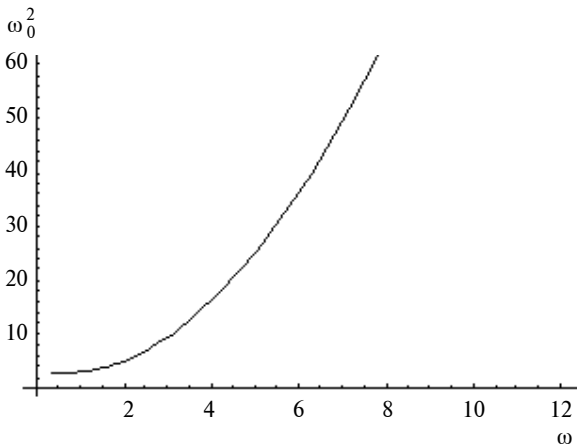


Рис. 2. Залежність власної частоти ω_0^2 від квазічастоти ω у дозволеній зоні. Негативним ω відповідають ті ж значення ω_0^2 , що і позитивним: $\omega_0^2(-\omega) = \omega_0^2(\omega)$

Розрахунок проведено для значень $t_1 = 1$; $t_2 = 0,6i$. Цим значенням відповідають елементарна комірка квазічастот

$$-\frac{\pi}{0,6} \leq \omega \leq \frac{\pi}{0,6} \text{ або } -5,23 \leq \omega \leq 5,23$$

та “границі” зон

$$e_1 = \wp(1) = 2,578 \approx 2,6; e_2 = \wp(1 + 0,6i) = 1,994 \approx 2; e_3 = \wp(0,6i) = -4,572 \approx -4,6.$$

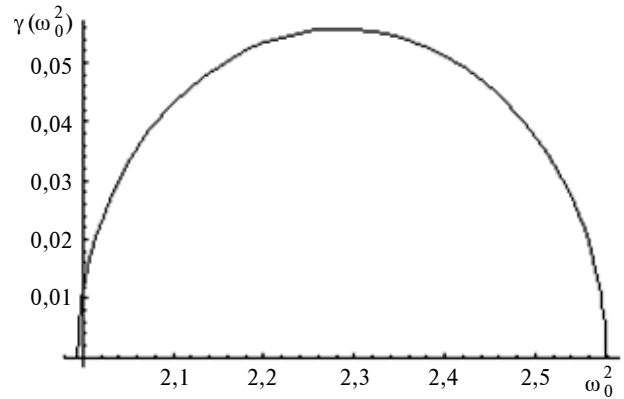


Рис. 3. Залежність інкремента наростання $\gamma(\omega_0^2)$ у “забороненій” зоні $2 \leq \omega_0^2 \leq 2,6$. Відзначимо, що на границях зони похідна $[d\gamma(\omega_0^2)/d\omega_0^2]$ обертається на нескінченність. На верхній і нижній границях зон інкремент перетворюється на нуль. Максимального значення інкремент наростання досягає посередині зони при $\omega_0^2 \approx 2,3 = (1/2)(2 + 2,6)$

Зона обмежених коливань визначається умовою $e_2 < \omega_0^2 < \infty$ або $2 \leq \omega_0^2 \leq \infty$.

Зоні $-\infty < \omega_0^2 < e_3$ або $-\infty < \omega_0^2 \leq -4,6$ відповідає нестійкий основний стан осцилятора.

Зона необмежених коливань визначається умовою $e_2 < \omega_0^2 < e_1$ або $2 \leq \omega_0^2 \leq 2,6$.

Зону $e_3 < \omega_0^2 < e_2$ або $-4,6 \leq \omega_0^2 \leq 2$ не розглядатимемо через наявність у ній від’ємних ω_0^2 .

У зоні необмежених коливань $e_2 < \omega_0^2 < e_1$ або $2 \leq \omega_0^2 \leq 2,6$ інкремент зростання амплітуди коливань $\gamma(z) = -\text{Im} \zeta(1 + iz) + (\eta_2/t_2)z$ має максимум приблизно посередині зони і обертається на нуль на границях зони. Похідні $(d\gamma/d\omega_0^2)$ на границях зони обертаються на нескінченність.

На рис. 4, 5 наведено графіки залежності $\gamma(\omega_0^2)$ від ω_0^2 та графік залежності $\gamma_{\max} = \gamma(-\eta_2/t_2)$ від ширини забороненої зони

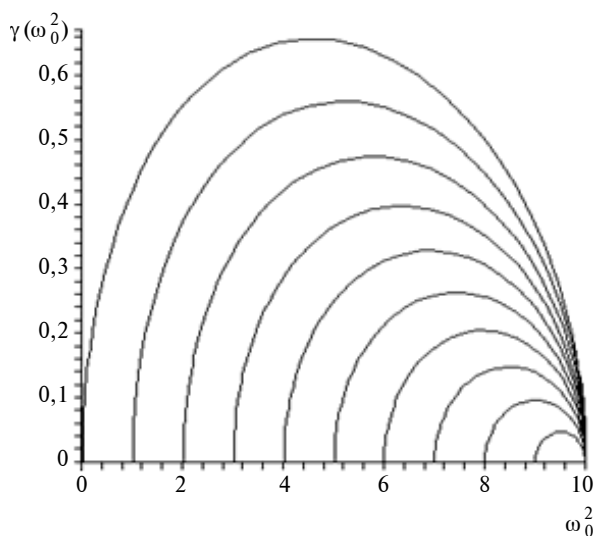


Рис. 4. Графік залежності інкремента наростання $\gamma(\omega_0^2)$ від ω_0^2 . Розрахунок проводився для 10 зон, ширина яких відрізняється на одиницю

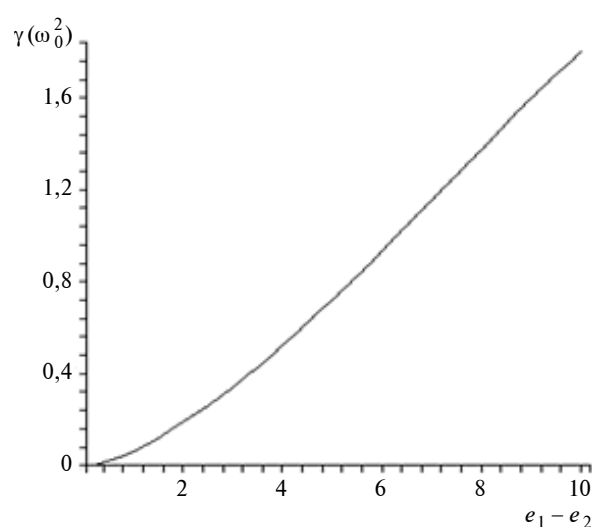


Рис. 5. Залежність максимуму інкремента наростання $\gamma(\omega_0^2)$ від ширини забороненої зони $e_1 - e_2$ (амплітуди зовнішньої сили)

$e_1 - e_2$. Ця ширина відіграє роль інтенсивності “потенціалу” $V(t)$. У випадку потенціалу Ламе вона відповідає різниці значень функції Вейерштрасса у півперіодах. Відзначимо, що у випадку однозонного потенціалу Ламе $n = 1$ за вимоги $\omega_0^2 > 0$ можна промодельовати “слабкий” зв’язок ($(e_1 - e_2) \ll (e_2 - e_3)$) та “середній” зв’язок ($(e_1 - e_2) \approx (e_2 - e_3)$).

Висновки

У випадку “слабкого зв’язку” (мала інтенсивність потенціалу $V(t)$) $\gamma = k(e_1 - e_2)$, де k – коефіцієнт пропорційності. Відхилення від лінійної залежності починається при $((e_1 - e_2) \approx (e_2 - e_3))$, що відповідає загальному наближенню “слабкого зв’язку”.

Інкремент зростання $\gamma(\omega_0^2)$ досягає свого максимального значення при $\omega_0^2 \approx (1/2)(e_1 - e_2)$. Це також відповідає наближенню “слабкого зв’язку” $\omega_0^2 \gg |V(t)|$. Цей результат збігається з результатом теорії параметричного резонансу.

Список літератури

1. Bloch I., Dalibard J., Zwirger W. Many-body physics with ultracold gases // Rev. Mod. Phys. – 2008. – 80. – P. 885. DOI: 10.1103/RevModPhys.80.885.
2. Галкина Е.Г., Михайлов И.Ю., Иванов Б.А. Динамическая спиновая переориентация в ортоферритах под действием лазерного импульса // Письма в ЖЭТФ. – 2011. – 93, № 12. – С. 792–796.

Оскільки величини e_1, e_2 визначаються двома періодами функції Вейерштрасса, то в точно розв’язуваній моделі умова параметричного резонансу (умова максимуму інкремента наростання $\gamma(\omega_0^2)$) має більш складний вигляд. Ця умова не пов’язує безпосередньо частоту власних коливань ω_0 і частоту потенціалу Ламе $\Omega = \pi/t_1$. Частота потенціалу Ламе входить в умову через e_1, e_2 . Наближення слабого зовнішнього потенціалу дає змогу знайти залежність інкремента наростання від величини цього потенціалу $\gamma \approx |V|$.

Запропонована модель потенціалу Ламе може бути застосована для дослідження інкремента наростання від інтенсивності зовнішнього впливу, якщо за допомогою періодів t_1, t_2 потенціалу Ламе промодельовати наближення “середнього” ($(e_1 - e_2) \approx (e_2 - e_3)$) та “сильного” зв’язку ($(e_1 - e_2) \gg (e_2 - e_3)$). У випадку “сильного” зв’язку необхідно використовувати двозонний потенціал, що пов’язано з деякими практичними труднощами при визначенні границь зон.

3. Baryakhtar V.G., Belokolos E.D., Samar G.V. A general method for solution of some problems of motion stabilization and destabilization // II Int. Conf. Quantum Electrodyn. Stat. Phys. Kharkov, September 19–23, 2006. – Kharkov, 2006. – P. 179.
4. Мандельштам Л.И. Лекции по колебаниям // Полное собрание трудов. – М.: Изд. АН СССР, 1955. – 4. – С. 511.
5. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. – М.: Наука, 1981 – 918 с.
6. Courant E.D., Snyder H.S. Theory of alternating – gradient synchrotron // Ann. Phys. – 1958 – 3. – P. 1–123.
7. Baryakhtar V.G., Belokolos E.D., Korostil A.M. A new method for calculating the electron spectrum of solids. Application to high-temperature superconductivity // Phys. Stat. Sol. (b). – 1992. – 169. – P. 105–114.
8. Белокопос Е.Д. Математические основы теории твердых тел с квазипериодической структурой. – К., 1982. – 27 с. – (Препринт /АН УССР, Ин-т теор. физики).
9. Belokolos E.D., Enolskii V.Z. Reduction of Abelian functions and Algebraically integrable systems // J. Math. Sci. – 2001. – 106, № 6. – p. 3395–3486; Ibid. – 2002. – 108, № 3. – P. 295–374.
10. Turbiner A.V. Quasi-exactly-solvable problems and $sl(2)$ algebra // Comm. Math. Phys. – 1988. – 118. – P. 467–474.
11. Correa F., Nieto L.M., Plyushchay M.S. Hidden nonlinear supersymmetry of finite-gap Lamé equation. – 2006. – Available: arXiv:hep-th/0608096v2. DOI: 10.1016/j.physletb.2006.11.02.
12. Belokolos E.D. Spectra of the Schrodinger Operators with Finite-Gap Potentials and Integrable Systems // Proc. Institute of Mathematics of NAS of Ukraine. – 2002. – 43, part I. – P. 273–280.
13. До теорії руху електрона в кристалі / В.Г. Бар'яхтар, Є.Д. Білокопос, Г.В. Самар, О.В. Дмитрієв // Наукові вісті НТУУ “КПІ”. – 2006. – № 4. – С. 7–13.
14. Лифшиц И.М., Азбель М.Я., Каганов М.И. Электронная теория металлов. – М.: Наука, 1971. – 415 с.
15. Уиттекер Э.Т., Ватсон Дж. Н. Курс современного анализа / Пер. с англ.; под ред. Ф.В. Широкова. – М.: УРСС, 2002. – Т. 2. – 515 с.

References

1. I. Bloch *et al.*, “Many-body physics with ultracold gases”, *Rev. Mod. Phys.*, no. 80, p. 885, 2008. DOI: 10.1103/RevModPhys.80.
2. E.G. Galkina *et al.*, “Dynamics of antiferromagnets exposed to ultrashort magnetic field pulses”, *Pis'ma v ZETF*, vol. 93, no. 12, pp. 792–796, 2011 (in Russian).
3. V.G. Baryakhtar *et al.*, “A general method for solution of some problems of motion stabilization and destabilization”, in *II Int. Conf. Quantum Electrodyn. Stat. Phys.*, Kharkiv, Ukraine, September 19–23, 2006, p. 179.
4. L.I. Mandel'shtam, “Lectures on oscillations”, in *Complete Set of Works*, vol. 4. Moscow, USSR: AN SSSR, 1955, 511 p. (in Russian).
5. A.A. Andronov *et al.*, *Vibration Theory*. Moscow, USSR: Nauka, 1981, 918 p. (in Russian).
6. E.D. Courant and H.S. Snyder, “Theory of alternating – gradient synchrotron”, *Ann. Phys.*, vol. 3, pp.1–123, 1958.
7. V.G. Baryakhtar *et al.*, “A new method for calculating the electron spectrum of solids. Application to high-temperature superconductivity”, *Phys. Stat. Sol. (b)*, vol. 169, pp. 105–114, 1992.
8. E.D. Belokolos, *Mathematical Foundations of the Theory of Solids with a Quasi-Periodic Structure*. Kyiv, USSR: ITF AN USSR, 1982 (in Russian).
9. E.D. Belokolos and V.Z. Enolskii, “Reduction of Abelian functions and Algebraically integrable systems”, *J. Math. Sci.*, vol. 106, no. 6, pp. 3395–3486, 2001; Ibid. vol. 108, no. 3, pp. 295–374 (2002).
10. A.V. Turbiner, “Quasi-exactly-solvable problems and $sl(2)$ algebra”, *Comm. Math. Phys.*, vol. 118, pp. 467–474, 1988.
11. F. Correa *et al.*, Hidden nonlinear supersymmetry of finite-gap Lamé equation [Online]. Available: arXiv:hep-th/0608096v2. DOI: 10.1016/j.physletb.2006.11.02.
12. E.D. Belokolos, “Spectra of the schrodinger operators with finite-gap potentials and integrable systems”, *Proc. Institute of Mathematics of NAS of Ukraine*, vol. 43, part I, pp. 273–280, 2002.
13. V.G. Baryakhtar *et al.*, “On the electron motion theory in a crystal”, *Naukovi Visti NTUU KPI*, no. 4, pp. 7–13, 2006 (in Ukrainian).
14. I.M. Lifshic *et al.*, *Electron Theory of Metals*. Moscow, USSR: Nauka, 1971, 415 p. (in Russian).
15. E.T. Uitteker and G.N. Vatson, *A Course of Modern Analysis*. Moscow: USSR, vol. 2, 2002, 515 p. (in Russian).

В.Г. Бар'яхтар, Г.В. Самар

ТОЧНО РОЗВ'ЯЗУВАНА МОДЕЛЬ У ТЕОРІЇ ПАРАМЕТРИЧНОГО РЕЗОНАНСУ

Проблематика. Побудова точно розв'язуваної моделі параметричного резонансу з розв'язками в аналітичному вигляді. Вивчення основних властивостей параметричного резонансу в точно розв'язуваній моделі, коли періодичним потенціалом рівняння Хілла є потенціал Ламе.

Мета дослідження. Застосування одновимірних скінченнозонних потенціалів Ламе для розрахунку параметрів параметричного резонансу.

Методика реалізації. Для реалізації поставленої мети використовувалися методи теоретичної фізики, методи теорії еліптичних функцій для застосування скінченнозонних потенціалів; наближення слабого і сильного зв'язку для дослідження граничних випадків методу скінченнозонного потенціалу.

Результати дослідження. Проведено дослідження точно розв'язуваної моделі, коли періодичним потенціалом рівняння Хілла є скінченнозонний потенціал Ламе, пропорційний еліптичній функції Вейерштрасса. Таким потенціалам відповідає спектр, що складається зі скінченного числа зон. Розвинуто зонний підхід для аналізу явища параметричного резонансу. В моделі потенціалу Ламе для зовнішньої сили, прикладеної до осцилятора, розраховано інкременти наростання коливань. Показано, що інкремент наростання досягає максимуму посередині зони (умова параметричного резонансу) і що похідні від інкремента наростання за власною частотою перетворюються в нескінченність на границях зони. Цьому результату відповідає перетворення в нескінченність похідних від квазічастоти за власною частотою у випадку коливань параметричного осцилятора з обмеженою амплітудою.

Висновки. Модель потенціалу Ламе дає можливість досліджувати залежність інкремента наростання від інтенсивності зовнішнього впливу, якщо за допомогою періодів потенціалу промоделювати наближення слабого і сильного впливу.

Ключові слова: параметричний резонанс; інкремент наростання; потенціал Ламе; точно розв'язувана модель; еліптичні функції Вейерштрасса.

В.Г. Барьяхтар, А.В. Самар

ТОЧНО РЕШАЕМАЯ МОДЕЛЬ В ТЕОРИИ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО РЕЗОНАНСА

Проблематика. Построение точно решаемой модели параметрического резонанса с решениями в аналитическом виде. Изучение основных свойств параметрического резонанса в точно решаемой модели, когда периодическим потенциалом уравнения Хилла является потенциал Ламе.

Цель исследования. Применение одномерных конечнозонных потенциалов Ламе для расчета параметров параметрического резонанса.

Методика реализации. Для реализации поставленной задачи используются методы теоретической физики, методы теории эллиптических функций для применения конечнозонных потенциалов; приближения слабой и сильной связи для исследования предельных случаев метода конечнозонного потенциала.

Результаты исследования. Проведено исследование точно решаемой модели, когда периодическим потенциалом уравнения Хилла является конечнозонный потенциал Ламе, пропорциональный эллиптической функции Вейерштрасса. Таким потенциалам соответствует спектр, состоящий из конечного числа зон. Развит зонный подход для анализа явления параметрического резонанса. В модели потенциала Ламе для внешней силы, приложенной к осцилятору, рассчитаны инкременты нарастания колебаний. Показано, что инкремент нарастания достигает максимума посередине зоны (условие параметрического резонанса) и производные от инкремента нарастания по собственной частоте превращаются в бесконечность на границах зоны. Этому результату соответствует преобразование в бесконечность производных от квазічастоты по собственной частоте в случае колебаний параметрического осцилятора с ограниченной амплитудой.

Выводы. Модель потенциала Ламе дает возможность исследовать зависимость инкремента нарастания от интенсивности внешнего воздействия, если с помощью периодов потенциала промоделировать приближения слабого и сильного воздействия.

Ключевые слова: параметрический резонанс; инкремент нарастания; потенциал Ламе; точно решаемая модель; эллиптические функции Вейерштрасса.

Рекомендована Радою
фізико-математичного факультету
НТУУ "КПІ"

Надійшла до редакції
12 червня 2015 року