МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
ІМЕНІ ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

О. І. Кушлик-Дивульська
Н. В. Поліщук

ЕЛЕМЕНТИ ЛІНІЙНОЇ, ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ ВСТУП ДО МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

Збірник завдань ДКР
навчальної дисципліни «Вища математика»
для студентів Видавничо-поліграфічного інституту
спеціальності **186 *«Видавництво та поліграфія»***
(заочна форма навчання)

Київ-2017

Елементи лінійної, векторної алгебри. Аналітична геометрія. Вступ до математичного аналізу. Збірник завдань ДКР навчальної дисципліни «Вища математика» для студентів видавничо-поліграфічного інституту спеціальності 186 «Видавництво та поліграфія» (заочна форма навчання) / Уклад. О. І. Кушлик-Дивульська, Н. В. Поліщук. – К. 2017. – 43с.

Рекомендовано Вченою радою
ФМФ КПІ ім. Ігоря Сікорського

(Протокол № 1 від 23 лютого 2017 р.)

Н а в ч а л ь н е в и д а н н я

Елементи лінійної, векторної алгебри
Аналітична геометрія
Вступ до математичного аналізу
Збірник завдань ДКР навчальної дисципліни «Вища математика»
для студентів Видавничо-поліграфічного інституту
спеціальності **186 *«Видавництво та поліграфія»***
(заочна форма навчання)

Укладачі: *Кушлик-Дивульська Ольга Іванівна*
Поліщук Наталія Володимирівна

Відповідальний редактор *С. Д. Івасишен*, д-р фіз.-мат. наук, проф.

Рецензент *О. М. Величко*, д-р техн. наук, проф.

Передмова

Навчальні плани заочної форми навчання передбачають велику кількість годин для самостійного опрацювання студентами теоретичного матеріалу, виконання індивідуальних домашніх контрольних завдань. Ґрунтовне вивчення кредитного модуля «Вища математика-1» передбачає забезпечення студентів необхідною методичною літературою.

У збірник завдань домашньої контрольної роботи (ДКР) включено завдання із тем «Елементи лінійної алгебри», «Елементи аналітичної геометрії», «Вступ до математичного аналізу», які відповідають робочій навчальній програмі відповідного кредитного модуля. В збірнику наведено10 різних варіантів завдань для ДКР, детально розв’язані типові приклади, що допомагає студентові вивчати, знайомитись із основними формулами, правилами, теоремами теоретичної частини матеріалу, працювати над виконанням індивідуальної роботи. Навчальне видання містить також додатки основних формул за відповідними темами.

Збірник завдань призначено для студентів заочної форми навчання технічних спеціальностей. Його також можна використати для домашніх контрольних робіт студентам економічних спеціальностей та для підготовки до занять, заліків, екзаменів студентів денної форми навчання, які вивчають подібний матеріал.

Варіанти завдань для домашньої контрольної роботи (ДКР)

Варіант 1

Елементи лінійної алгебри

1. Дано матриці A і B. Знайти $3A - B\cdot A + A^{-1}$, якщо $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -6 & 3 & 4 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$,

$B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Для оберненої матриці A^{-1} зробити перевірку.

2. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 = -1, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

за правилами Крамера та матричним способом.

Елементи аналітичної геометрії

3. Задано координати вершин піраміди $A_1A_2A_3A_4$:

$A_1(-5,4,1)$, $A_2(3,-2,0)$, $A_3(7,-6,4)$, $A_4(-1,-1,5)$. Знайти:

1) рівняння та довжину ребра A_1A_2;
2) площу грані $A_1A_2A_3$;
3) об'єм піраміди;
4) рівняння площини $A_2A_3A_4$;
5) кут між ребрами A_1A_2 і A_1A_4;
6) двогранний кут між гранями $A_1A_2A_3$, $A_2A_3A_4$;
7) відстань від точки A_4 до площини $A_1A_2A_3$.

4. Точки $A(2,0)$, $B(0,2)$ та $C(-1,-1)$ – вершини трикутника. Знайти:

1) рівняння медіани CM та її довжину;
2) рівняння висоти AH;

3) рівняння прямої, що проходить через точку B, паралельно стороні AC.

5. Визначити і описати криву другого порядку:

а) $2x^2+5y^2-12x+10y+13=0$; б) $2x^2-3x+y-5=0$.

Вступ до математичного аналізу

6. Побудувати графіки елементарних функцій:

а) $y=\dfrac{2}{|x|}-3$; б) $y=4^{3x-1}+5$.

7. Обчислити границі.

а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+3x-10}{3x^2-5x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x-3)(3x+5)(4x-6)}{3x^3+x-1}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{4x}-e^{-2x}}{2\operatorname{arctg}x-\sin x}$.

8. Знайти похідну:

а) $y=\sqrt{x}\sin 3x+e^{-x^2}$; б) $y=\operatorname{arctg}4x+\dfrac{\lg(4x^2-1)}{x}$.

9. Провести повне дослідження функції $y=\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^2$ і побудувати її графік.

Варіант 2

Елементи лінійної алгебри

1. Дано матриці A і B. Знайти $3A-B\cdot A+A^{-1}$, якщо $A=\begin{pmatrix}3&-1&-2\\0&1&3\\4&1&2\end{pmatrix}$,

$B=\begin{pmatrix}2&-4&1\\3&0&-2\\1&-1&5\end{pmatrix}$. Для оберненої матриці A^{-1} зробити перевірку.

2. Розв’язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3=14,\\x_1+x_2+x_3=6,\\2x_1+3x_2-x_3=5\end{cases}$$

за правилами Крамера та матричним способом.

Елементи аналітичної геометрії

3. Задано координати вершин піраміди $A_1A_2A_3A_4$:

$A_1(-4,1,3)$, $A_2(0,2,3)$, $A_3(-1,5,2)$, $A_4(0,-4,1)$. Знайти:

1) рівняння та довжину ребра A_1A_2;
2) площу грані $A_1A_2A_3$;
3) об'єм піраміди;
4) рівняння площини $A_2A_3A_4$;
5) кут між ребрами A_1A_2 і A_1A_4;
6) двогранний кут між гранями $A_1A_2A_3$, $A_2A_3A_4$;
7) відстань від точки A_4 до площини $A_1A_2A_3$.

4. Точки $A(2,0)$, $B(-1,4)$ та $C(-4,-2)$ – вершини трикутника. Знайти:

1) рівняння медіани CM та її довжину;
2) рівняння висоти AH;
3) рівняння прямої, що проходить через точку B, паралельно стороні AC.

5. Визначити і описати криву другого порядку:

а) $x^2 - y^2 + 6x + 4y - 4 = 0$; б) $2x^2 - 4x + 3y - 1 = 0$.

Вступ до математичного аналізу

6. Побудувати графіки елементарних функцій:

а) $y = 2\mathrm{tg}\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) - 1$; б) $y = 5e^{2x+1} + 1$.

7. Обчислити границі.

а) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^3 + 3x^2 + 2x}{x^2 - x - 6}$; б) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{4x^6 - x^3 + 2x}{2x^6 - 1}$; в) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x \sin x}$.

8. Знайти похідну:

а) $y = x^3 e^{-x^2 + x} + \arcsin\sqrt{x}$; б) $y = \dfrac{\cos^2 x}{\sqrt{x}} + \lg(4x^2 + 10)$.

9. Провести повне дослідження функції $y = \dfrac{1}{1-x^2}$ і побудувати її графік.

Варіант 3

Елементи лінійної алгебри

1. Дано матриці A і B. Знайти $3A - B \cdot A + A^{-1}$, якщо $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 1 & 4 & -5 \\ 0 & 3 & -4 \end{pmatrix}$,

$B = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 2 \\ 1 & -5 & 1 \end{pmatrix}$. Для оберненої матриці A^{-1} зробити перевірку.

2. Розв’язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 5, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$$

за правилами Крамера та матричним способом.

Елементи аналітичної геометрії

3. Задано координати вершин піраміди $A_1A_2A_3A_4$:

$A_1(1,-3,4)$, $A_2(0,-1,2)$, $A_3(7,2,-3)$, $A_4(-1,2,3)$. Знайти:

1) рівняння та довжину ребра A_1A_2;

2) площу грані $A_1A_2A_3$;

3) об’єм піраміди;

4) рівняння площини $A_2A_3A_4$;

5) кут між ребрами A_1A_2 і A_1A_4;

6) двогранний кут між гранями $A_1A_2A_3$, $A_2A_3A_4$;

7) відстань від точки A_4 до площини $A_1A_2A_3$.

4. Точки $A(2,1)$, $B(-3,2)$ та $C(-2,3)$ – вершини трикутника. Знайти:

1) рівняння медіани CM та її довжину;

2) рівняння висоти AH;

3) рівняння прямої, що проходить через точку B, паралельно стороні AC.

5. Визначити і описати криву другого порядку:

а) $2x^2+3y^2-4x+6y-7=0$; б) $2y^2-2y+5x-2=0$.

Вступ до математичного аналізу

6. Побудувати графіки елементарних функцій:

а) $y=\left|\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)\right|$; б) $y=3+\log_{0,2}(x+1)$.

7. Обчислити границі.

а) $\lim\limits_{u\to-2}\dfrac{u^3+4u^2+4u}{(u+2)(u-3)}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+4x-x^4}{x+3x^2+2x^4}$; в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2^x-1}{\ln(1+2x)}$.

8. Знайти похідну:

а) $y=e^{2x}\cos 3x+\operatorname{arctg}x^2$; б) $y=\dfrac{\sin 4x}{\sqrt{x^2+3}}+\lg(3x^2+13)$.

9. Провести повне дослідження функції $y=\dfrac{3-3x}{x^2}$ і побудувати її графік.

Варіант 4

Елементи лінійної алгебри

1. Дано матриці A і B. Знайти $3A-B\cdot A+A^{-1}$, якщо $A=\begin{pmatrix}-5 & 3 & 3\\ 2 & 0 & -1\\ -1 & 4 & 1\end{pmatrix}$,

$B=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 3\\ 2 & -1 & 4\\ -1 & 1 & -3\end{pmatrix}$. Для оберненої матриці A^{-1} зробити перевірку.

2. Розв’язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases}2x_1-5x_2+3x_3=-5,\\ x_1+x_2-x_3=2,\\ x_1-2x_2+x_3=0\end{cases}$$

за правилами Крамера та матричним способом.

Елементи аналітичної геометрії

3. Задано координати вершин піраміди $A_1A_2A_3A_4$:

$A_1(0,-3,1)$, $A_2(2,-3,-4)$, $A_3(-1,-1,2)$, $A_4(0,2,3)$. Знайти:

1) рівняння та довжину ребра A_1A_2;

2) площу грані $A_1A_2A_3$;

3) об'єм піраміди;

4) рівняння площини $A_2A_3A_4$;

5) кут між ребрами A_1A_2 і A_1A_4;

6) двогранний кут між гранями $A_1A_2A_3$, $A_2A_3A_4$;

7) відстань від точки A_4 до площини $A_1A_2A_3$.

4. Точки $A(3,2)$, $B(-2,-2)$ та $C(1,-4)$ – вершини трикутника. Знайти:

1) рівняння медіани CM та її довжину;

2) рівняння висоти AH;

3) рівняння прямої, що проходить через точку B, паралельно стороні AC.

5. Визначити і описати криву другого порядку:

а) $4x^2 - y^2 + 4x + 6y - 12 = 0$; б) $y^2 - 4y + 4x = 0$.

Вступ до математичного аналізу

6. Побудувати графіки елементарних функцій:

а) $y = \log_{0,1}(3x-7)$; б) $y = \dfrac{3}{2-x} + 5.$

7. Обчислити границі.

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^3 + 7n^2 - 2}{6n^3 - 4n + 3}$; б) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2 + x - 12}{\sqrt{x-2} - \sqrt{4-x}}$; в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - \cos^3 x}{x \sin 2x}$.

8. Знайти похідну:

а) $y = 2^{x^3} \lg(4x+1) + \sin^2 3x$; б) $y = \arcsin x^2 + \dfrac{\cos 3x}{\sqrt{x}}$.

9. Провести повне дослідження функції $y = \dfrac{x^2}{x^2 - 1}$ і побудувати її графік.

Варіант 5

Елементи лінійної алгебри

1. Дано матриці A і B. Знайти $3A - B \cdot A + A^{-1}$, якщо $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$,

$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Для оберненої матриці A^{-1} зробити перевірку.

2. Розв’язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11 \end{cases}$$

за правилами Крамера та матричним способом.

Елементи аналітичної геометрії

3. Задано координати вершин піраміди $A_1A_2A_3A_4$:

$A_1(1,3,0),\ A_2(4,-1,2),\ A_3(3,0,1),\ A_4(-4,3,5)$. Знайти:

1) рівняння та довжину ребра A_1A_2;

2) площу грані $A_1A_2A_3$;

3) об’єм піраміди;

4) рівняння площини $A_2A_3A_4$;

5) кут між ребрами A_1A_2 і A_1A_4;

6) двогранний кут між гранями $A_1A_2A_3$, $A_2A_3A_4$;

7) відстань від точки A_4 до площини $A_1A_2A_3$.

4. Точки $A(-2,1), B(2,0)$ та $C(-2,-3)$ – вершини трикутника. Знайти:

1) рівняння медіани CM та її довжину;

2) рівняння висоти AH;

3) рівняння прямої, що проходить через точку B, паралельно стороні AC.

5. Визначити і описати криву другого порядку:

а) $x^2+4y^2+4x-16y-8=0$; б) $y-x^2+8x-15=0$.

Вступ до математичного аналізу

6. Побудувати графіки елементарних функцій:

а) $y=e^{-2x}+1$; б) $y=3\arccos(2x-1)$.

7. Обчислити границі.

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-2x^2+1}{x^2+5x+5}$; б) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^2-x-6}{x+2}$; в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+4}-2}$.

8. Знайти похідну:

а) $y=\dfrac{2x+1}{\sqrt[3]{x^3+4}}$; б) $y=\operatorname{arctg}^2(\ln x)+\dfrac{\cos^4 x}{1+x^3}$.

9. Провести повне дослідження функції $y=\dfrac{x^2}{x-1}$ і побудувати її графік

Варіант 6

Елементи лінійної алгебри

1. Дано матриці A і B. Знайти $3A-B\cdot A+A^{-1}$, якщо $A=\begin{pmatrix}1&-1&3\\2&0&-1\\4&-1&2\end{pmatrix}$,

$B=\begin{pmatrix}1&-3&2\\0&-1&3\\-4&2&1\end{pmatrix}$. Для оберненої матриці A^{-1} зробити перевірку.

2. Розв’язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 2, \\ 4x_1 + x_2 - x_3 = 4 \end{cases}$$

за правилами Крамера та матричним способом.

Елементи аналітичної геометрії

3. Задано координати вершин піраміди $A_1A_2A_3A_4$:

$A_1(-1,2,-3)$, $A_2(5,-4,0)$, $A_3(-2,3,1)$, $A_4(0,-4,-2)$. Знайти:

1) рівняння та довжину ребра A_1A_2;

2) площу грані $A_1A_2A_3$;

3) об'єм піраміди;

4) рівняння площини $A_2A_3A_4$;

5) кут між ребрами A_1A_2 і A_1A_4;

6) двогранний кут між гранями $A_1A_2A_3$, $A_2A_3A_4$;

7) відстань від точки A_4 до площини $A_1A_2A_3$.

4. Точки $A(-2,-3), B(2,3)$ та $C(2,-1)$ – вершини трикутника. Знайти:

1) рівняння медіани CM та її довжину;

2) рівняння висоти AH;

3) рівняння прямої, що проходить через точку B, паралельно стороні AC.

5. Визначити і описати криву другого порядку:

а) $x^2 + 4y^2 + 2x - 32y + 64 = 0$; б) $x^2 - 2x + y - 2 = 0$.

Вступ до математичного аналізу

6. Побудувати графіки елементарних функцій:

а) $y = \log_{0,5}(x-5)$; б) $y = \dfrac{2}{3}\sin\left(3x + \dfrac{\pi}{4}\right) - 2.$

7. Обчислити границі.

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3-100n^2+1}{100n^2+5n}$;   б) $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\dfrac{x^2-3}{x^4+x^2-12}$;   в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

8. Знайти похідну:

а) $y=\sqrt[3]{x^2}\cos^2 x+\arccos 2x$;   б) $y=\lg(x^3-4x)+\dfrac{5^{-x}}{x}$.

9. Провести повне дослідження функції $y=\dfrac{4x}{4+x^2}$ і побудувати її графік.

Варіант 7

Елементи лінійної алгебри

1. Дано матриці A і B. Знайти $3A-B\cdot A+A^{-1}$, якщо $A=\begin{pmatrix}-1 & -2 & 2\\ 1 & 0 & 1\\ 2 & -1 & 3\end{pmatrix}$,

$B=\begin{pmatrix}-2 & 1 & -4\\ 3 & -1 & 2\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}$. Для оберненої матриці A^{-1} зробити перевірку.

2. Розв’язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases}2x_1+x_2=5,\\ x_1+3x_3=16,\\ 5x_2-x_3=10\end{cases}$$

за правилами Крамера та матричним способом.

Елементи аналітичної геометрії

3. Задано координати вершин піраміди $A_1A_2A_3A_4$:

$A_1(-3,4,1)$, $A_2(5,-3,1)$, $A_3(-1,-2,-3)$, $A_4(-4,2,-3)$. Знайти:

1) рівняння та довжину ребра A_1A_2;

2) площу грані $A_1A_2A_3$;

3) об’єм піраміди;

4) рівняння площини $A_2A_3A_4$;

5) кут між ребрами A_1A_2 і A_1A_4;

6) двогранний кут між гранями $A_1A_2A_3$, $A_2A_3A_4$;

7) відстань від точки A_4 до площини $A_1A_2A_3$.

4. Точки $A(-3,-4), B(0,0)$ та $C(1,-2)$ – вершини трикутника. Знайти:

1) рівняння медіани CM та її довжину;

2) рівняння висоти AH;

3) рівняння прямої, що проходить через точку B, паралельно стороні AC.

5. Визначити і описати криву другого порядку:

а) $9x^2-25y^2-18x-100y-316=0$; б) $x^2-12x+6y+2=0$.

Вступ до математичного аналізу

6. Побудувати графіки елементарних функцій:

а) $y=|2x|-3$; б) $y=2\arcsin(x+1)+3$.

7. Обчислити границі.

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1000n^3+3n^2}{0{,}001n^4-100n^3+1}$; б) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^3-x}$; в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{\sin 3x}$.

8. Знайти похідну:

а) $y=\ln(\ln(1+x^2))$; б) $y=10^{1-\sin^4 3x}+\dfrac{\arcsin x}{1+x}$.

9. Провести повне дослідження функції $y=\dfrac{x^3+1}{x^2}$ і побудувати її графік.

Варіант 8

Елементи лінійної алгебри

1. Дано матриці A і B. Знайти $3A-B\cdot A+A^{-1}$, якщо $A=\begin{pmatrix}1&-3&5\\-4&-1&0\\-1&1&-2\end{pmatrix}$,

$B=\begin{pmatrix}4&-1&2\\-1&1&0\\2&1&-3\end{pmatrix}$. Для оберненої матриці A^{-1} зробити перевірку.

2. Розв’язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \end{cases}$$

за правилами Крамера та матричним способом.

Елементи аналітичної геометрії

3. Задано координати вершин піраміди $A_1A_2A_3A_4$:

$A_1(-4,3,1)$, $A_2(0,1,-5)$, $A_3(2,4,3)$, $A_4(-5,3,1)$. Знайти:

1) рівняння та довжину ребра A_1A_2;

2) площу грані $A_1A_2A_3$;

3) об’єм піраміди;

4) рівняння площини $A_2A_3A_4$;

5) кут між ребрами A_1A_2 і A_1A_4;

6) двогранний кут між гранями $A_1A_2A_3$, $A_2A_3A_4$;

7) відстань від точки A_4 до площини $A_1A_2A_3$.

4. Точки $A(0,2), B(-3,-1)$ та $C(4,2)$ – вершини трикутника. Знайти:

1) рівняння медіани CM та її довжину;

2) рівняння висоти AH;

3) рівняння прямої, що проходить через точку B, паралельно стороні AC.

5. Визначити і описати криву другого порядку:

а) $4x^2 + y^2 - 16x - 6y + 21 = 0$; б) $2x^2 - 4x - y - 3 = 0$.

Вступ до математичного аналізу

6. Побудувати графіки елементарних функцій:

а) $y = |2x| - 3$; б) $y = 2\arcsin(x+1) + 3$.

7. Обчислити границі.

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1000n^3+3n^2}{0{,}001n^4-100n^3+1}$; б) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^3-x}$; в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{\sin 3x}$.

8. Знайти похідну:

а) $y=\sqrt[3]{2x-1}\sin 3x$; б) $y=5^{x^2-2x}+\dfrac{\ln 4(x-1)}{x^2}$.

9. Провести повне дослідження функції $y=\dfrac{16}{x(x-4)}$ і побудувати її графік.

Варіант 9

Елементи лінійної алгебри

1. Дано матриці A і B. Знайти $3A-B\cdot A+A^{-1}$, якщо $A=\begin{pmatrix}4&3&3\\3&4&3\\1&1&1\end{pmatrix}$,

$B=\begin{pmatrix}2&0&-2\\1&0&-1\\1&1&-1\end{pmatrix}$. Для оберненої матриці A^{-1} зробити перевірку.

2. Розв’язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases}x_1+x_2-2x_3=6,\\2x_1+3x_2-7x_3=16,\\5x_1+2x_2+x_3=16\end{cases}$$

за правилами Крамера та матричним способом.

Елементи аналітичної геометрії

3. Задано координати вершин піраміди $A_1A_2A_3A_4$:

$A_1(1{,}3{,}6)$, $A_2(2{,}2{,}1)$, $A_3(-1{,}0{,}1)$, $A_4(-4{,}6{,}-3)$. Знайти:

1) рівняння та довжину ребра A_1A_2;

2) площу грані $A_1A_2A_3$;

3) об’єм піраміди;

4) рівняння площини $A_2A_3A_4$;

5) кут між ребрами A_1A_2 і A_1A_4;

6) двогранний кут між гранями $A_1A_2A_3$, $A_2A_3A_4$;

7) відстань від точки A_4 до площини $A_1A_2A_3$.

4. Точки $A(2,2)$, $B(-2,-3)$ та $C(2,-4)$ – вершини трикутника. Знайти:

1) рівняння медіани CM та її довжину;

2) рівняння висоти AH;

3) рівняння прямої, що проходить через точку B, паралельно стороні AC.

5. Визначити і описати криву другого порядку:

а) $x^2+2y^2+8x-4=0$; б) $-2y^2+x+12y-14=0$.

Вступ до математичного аналізу

6. Побудувати графіки елементарних функцій:

а) $y=\arccos(3x+2)$. б) $y=\ln(x-1)+1$.

7. Обчислити границі.

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2-2n-1}{n^3+4}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos^5 x}{x^2}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{x}}$.

8. Знайти похідну:

а) $y=(1+2x)e^{\mathrm{tg}^3 x}$; б) $y=2^{x\cos x}+e^{-x/2}\cdot\sin 2x$.

9. Провести повне дослідження функції $y=\dfrac{4x^3+5}{x}$ і побудувати її графік.

Варіант 10

Елементи лінійної алгебри

1. Дано матриці A і B. Знайти $3A-B\cdot A+A^{-1}$, якщо $A=\begin{pmatrix}2 & 0 & -3\\ 4 & 0 & -1\\ 5 & 1 & -1\end{pmatrix}$,

$B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ -1 & 2 & 0\\ -1 & 0 & 3\end{pmatrix}$. Для оберненої матриці A^{-1} зробити перевірку.

2. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 16, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 10, \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 16 \end{cases}$$

за правилами Крамера та матричним способом.

Елементи аналітичної геометрії

3. Задано координати вершин піраміди $A_1A_2A_3A_4$:

$A_1(0,-1,-1)$, $A_2(-2,3,5)$, $A_3(1,-5,-9)$, $A_4(-1,-6,3)$. Знайти:

1) рівняння та довжину ребра A_1A_2;

2) площу грані $A_1A_2A_3$;

3) об'єм піраміди;

4) рівняння площини $A_2A_3A_4$;

5) кут між ребрами A_1A_2 і A_1A_4;

6) двогранний кут між гранями $A_1A_2A_3$, $A_2A_3A_4$;

7) відстань від точки A_4 до площини $A_1A_2A_3$.

4. Точки $A(6,2), B(0,-2)$ та $C(-4,0)$ – вершини трикутника. Знайти:

1) рівняння медіани CM та її довжину;

2) рівняння висоти AH;

3) рівняння прямої, що проходить через точку B, паралельно стороні AC.

5. Визначити і описати криву другого порядку:

а) $9x^2 + 16y^2 - 90x + 32y + 97 = 0$; б) $x^2 - 12x + 6y + 2 = 0$.

Вступ до математичного аналізу

6. Побудувати графіки елементарних функцій:

а) $y = 2^{-\frac{x}{3}+1}$; б) $y = 3 + \dfrac{5}{2x+1}$.

7. Обчислити границі.

а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-12x+20}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)(n+2)(n+3)}{5n^3}$; в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+5}$.

8. Знайти похідну:

а) $y=x^4\left(\dfrac{1}{2}\ln x+1\right)^2$; б) $y=\mathrm{arctg}\sqrt{\dfrac{3-x}{x-2}}$.

9. Провести повне дослідження функції $y=\dfrac{x^2+1}{x}$ і побудувати її графік.

Розв'язування типового варіанта контрольної роботи

Задача 1. Дано матриці A і B. Знайти $3A + BA + A^{-1}$, якщо

$$A=\begin{pmatrix}-3&2&5\\-2&0&7\\2&-3&-1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2&-1&3\\1&-4&0\\-1&1&-3\end{pmatrix}.$$

Для оберненої матриці A^{-1} зробити перевірку.

Розв'язування. Виконуємо за діями:

$$1)\ 3\cdot A=3\cdot\begin{pmatrix}-3&2&5\\-2&0&7\\2&-3&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\cdot(-3)&3\cdot 2&3\cdot 5\\3\cdot(-2)&3\cdot 0&3\cdot 7\\3\cdot 2&3\cdot(-3)&3\cdot(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-9&6&15\\-6&0&21\\6&-9&-3\end{pmatrix};$$

$$2)\ B\cdot A=\begin{pmatrix}2&-1&3\\1&-4&0\\-1&1&-3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-3&2&5\\-2&0&7\\2&-3&-1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-6+2+6&4+0-9&10-7-3\\-3+8+0&2-0-0&5-28-0\\3-2-6&-2+0+9&-5+7+3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-5&0\\5&2&-23\\-5&7&5\end{pmatrix};$$

$$3)\ 3A+BA=\begin{pmatrix}-9&6&15\\-6&0&21\\6&-9&-3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&-5&0\\5&2&-23\\-5&7&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-9+2&6-5&15+0\\-6+5&0+2&21-23\\6-5&-9+7&-3+5\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-7&1&15\\-1&2&-2\\1&-2&2\end{pmatrix}.$$

Знайдемо обернену матрицю до *A*, використовуючи елементарні перетворення та її означення. Допишемо справа одиничну матрицю і за допомогою елементарних перетворень одержимо одиничну матрицю зліва. Отже, маємо

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} -3 & 2 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Міняємо місцями 1-ий та 2-ий рядок, перемноживши 2-ий рядок на (-1).

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 2 & 0 & -7 & 0 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Множимо 1-ий рядок на 3, 2-ий рядок на 2 і додаємо їх. Від 1-го рядка віднімаємо 3-ій рядок:

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 2 & 0 & -7 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & -11 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & -6 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right).$$

Міняємо місцями 2-ий та 3-ій рядки

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 2 & 0 & -7 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -6 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & -11 & 2 & -3 & 0 \end{array}\right),$$

далі множимо 2-ий рядок на 4, 3-ій рядок на (-3) і додаємо їх:

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 2 & 0 & -7 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -6 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 9 & -6 & 5 & -4 \end{array}\right).$$

Отримали зліва матрицю трикутного виду. Зводимо її до діагонального. Множимо 3-ій рядок на 7, 1-ий рядок на 9 і додаємо їх та ділимо отриманий 1-ий рядок на спільний дільник 2. Далі множимо 3-ій рядок на 2, 2-ий рядок на 3 і додаємо їх. Маємо

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 9 & 0 & 0 & -21 & 13 & -14 \\ 0 & 9 & 0 & -12 & 7 & -11 \\ 0 & 0 & 9 & -6 & 5 & -4 \end{array}\right)$$

Поділивши елементи головної діагоналі на 9, одержуємо шукану обернену матрицю:

$$A^{-1} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -21 & 13 & -14 \\ -12 & 7 & -11 \\ -6 & 5 & -4 \end{pmatrix} \text{ або } A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{3} & \frac{13}{9} & -\frac{14}{9} \\ -\frac{4}{3} & \frac{7}{9} & -\frac{11}{9} \\ -\frac{2}{3} & \frac{5}{9} & -\frac{4}{9} \end{pmatrix}.$$

Зробимо перевірку:

$$A^{-1} \cdot A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -21 & 13 & -14 \\ -12 & 7 & -11 \\ -6 & 5 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 2 & 5 \\ -2 & 0 & 7 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 63-26-28 & -42+0+42 & -105+91+14 \\ 36-14-22 & -24+0+33 & -60+49+11 \\ 18-10-8 & -12+0+12 & -30+35+4 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Остаточно одержимо:

$$3A + BA + A^{-1} = \begin{pmatrix} -7 & 1 & 15 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -21 & 13 & -14 \\ -12 & 7 & -11 \\ -6 & 5 & -4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -7-\frac{7}{3} & 1+\frac{13}{9} & 15-\frac{14}{9} \\ -1-\frac{4}{3} & 2+\frac{7}{9} & -2-\frac{11}{9} \\ 1-\frac{2}{3} & -2+\frac{5}{9} & 2-\frac{4}{9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{28}{3} & \frac{22}{9} & \frac{121}{9} \\ -\frac{7}{3} & \frac{25}{9} & -\frac{29}{9} \\ \frac{1}{3} & -\frac{13}{9} & \frac{14}{9} \end{pmatrix}.$$

Відповідь: $\begin{pmatrix} -\dfrac{28}{3} & \dfrac{22}{9} & \dfrac{121}{9} \\ -\dfrac{7}{3} & \dfrac{25}{9} & -\dfrac{29}{9} \\ \dfrac{1}{3} & -\dfrac{13}{9} & \dfrac{14}{9} \end{pmatrix}$.

Задача 2. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4, \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 1, \\ 2x_1 + 7x_2 - x_3 = 8 \end{cases}$$

за правилами Крамера та матричним способом.

Розв'язування.

1) Правила Крамера

Розв'язок системи лінійних алгебраїчних рівнянь 3-го порядку шукається за формулами Крамера

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta_{x_3}}{\Delta},$$

де Δ − головний визначник системи, Δ_{x_1}, Δ_{x_2}, Δ_{x_3} −допоміжні. Обчислюємо всі визначники та значення невідомих змінних.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 3 \\ 2 & 7 & -1 \end{vmatrix} = 5 + 12 + 21 + 10 - 21 + 6 = 33,$$

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 8 & 7 & -1 \end{vmatrix} = 20 + 48 + 7 + 40 - 84 + 2 = 33, \quad x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta} = \frac{33}{33} = 1;$$

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & 8 & -1 \end{vmatrix} = -1 + 24 + 24 - 2 - 24 + 12 = 33, \; x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta} = \frac{33}{33} = 1;$$

$$\Delta_{x_3}=\begin{vmatrix}1&2&4\\3&-5&1\\2&7&8\end{vmatrix}=-40+4+84+40-7-48=33,\ x_3=\frac{\Delta_{x_3}}{\Delta}=\frac{33}{33}=1.$$

2) Матричний спосіб

Маємо матричне рівняння $AX=B$, де

$$A=\begin{pmatrix}1&2&1\\3&-5&3\\2&7&-1\end{pmatrix},\ X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}4\\1\\8\end{pmatrix},$$

для якого розв'язок $X=A^{-1}\cdot B$.

Знайдемо обернену матрицю A^{-1} за формулою

$$A^{-1}=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&A_{31}\\A_{12}&A_{22}&A_{32}\\A_{13}&A_{23}&A_{33}\end{pmatrix},$$

З попереднього пункту відомо, що для матриці A її визначник $|A|=33$.

Обчислюємо алгебраїчні доповнення $A_{ij}, i, j=1,2,3$:

$$A_{11}=\begin{vmatrix}-5&3\\7&-1\end{vmatrix}=-16,\ A_{12}=-\begin{vmatrix}3&3\\2&-1\end{vmatrix}=9,\ A_{13}=\begin{vmatrix}3&-5\\2&7\end{vmatrix}=31,$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix}2&1\\7&-1\end{vmatrix}=9,\ A_{22}=\begin{vmatrix}1&1\\2&-1\end{vmatrix}=-3,\ A_{23}=-\begin{vmatrix}1&2\\2&7\end{vmatrix}=-3,$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix}2&1\\-5&3\end{vmatrix}=11,\ A_{32}=-\begin{vmatrix}1&1\\3&3\end{vmatrix}=0,\ A_{33}=\begin{vmatrix}1&2\\3&-5\end{vmatrix}=-11.$$

Таким чином,

$$A^{-1}=\frac{1}{33}\begin{pmatrix}-16&9&11\\9&-3&0\\31&-3&-11\end{pmatrix}$$

і розв'язок запишеться так:

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\frac{1}{33}\begin{pmatrix}-16&9&11\\9&-3&0\\31&-3&-11\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\1\\8\end{pmatrix}=\frac{1}{33}\begin{pmatrix}-16\cdot4+9\cdot1+11\cdot8\\9\cdot4-3\cdot1+0\\31\cdot4-3\cdot1-11\cdot8\end{pmatrix}=\frac{1}{33}\begin{pmatrix}33\\33\\33\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

Відповідь: $X=(1;1;1)$.

Задача 3. Задано координати вершин піраміди $A_1A_2A_3A_4$:
$A_1(1,-2,3)$, $A_2(4,-3,-2)$, $A_3(4,5,-1)$, $A_4(0,1,-3)$. Знайти:

1) рівняння та довжину ребра A_1A_2;
2) площу грані $A_1A_2A_3$;
3) об'єм піраміди;
4) рівняння площини $A_2A_3A_4$;
5) кут між ребрами A_1A_2 і A_1A_4;
6) двогранний кут між гранями $A_1A_2A_3$, $A_2A_3A_4$;
7) відстань від точки A_4 до площини $A_1A_2A_3$.

Розв'язування.

1) Рівняння прямої, що проходить через 2 вказані точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, записують таким чином

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

Записуємо шукану пряму A_1A_2: $\dfrac{x-1}{4-1}=\dfrac{y+2}{-3+2}=\dfrac{z-3}{-2-3}$;

$$\frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z-3}{-5}.$$

Довжина відрізка між вказаними вище двома точки в просторі обчислюється за формулою

$$M_1M_2=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2},$$

тому довжина ребра

$$A_1A_2=\sqrt{(4-1)^2+(-3+2)^2+(-2-3)^2}=\sqrt{9+1+25}=\sqrt{35}.$$

2) Площу грані $A_1A_2A_3$ обчислимо із геометричного змісту векторного добутку, за яким площа просторового трикутника дорівнює половині модуля векторного добутку двох векторів.

Координати векторів $\overrightarrow{A_1A_2}$ та $\overrightarrow{A_1A_3}$: $\overrightarrow{A_1A_2}(3,-1,-5)$, $\overrightarrow{A_1A_3}(3,7,-4)$.

Векторний добуток дорівнює:

$$\overrightarrow{A_1A_2}\times\overrightarrow{A_1A_3}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 3 & -1 & -5\\ 3 & 7 & -4\end{vmatrix}=\bar{i}\cdot\begin{vmatrix}-1 & -5\\ 7 & -4\end{vmatrix}-\bar{j}\cdot\begin{vmatrix}3 & -5\\ 3 & -4\end{vmatrix}+\bar{k}\cdot\begin{vmatrix}3 & -1\\ 3 & 7\end{vmatrix}=$$

$$=39\bar{i}-3\bar{j}+24\bar{k}=3(13\bar{i}-\bar{j}+8\bar{k}).$$

Тоді площа трикутника

$$S=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{A_1A_2}\times\overrightarrow{A_1A_3}\right|=\frac{3}{2}\sqrt{13^2+\left(-1\right)^2+8^2}=\frac{3}{2}\sqrt{234}\left(кв.\quad од.\right).$$

3) Для об’єму піраміди маємо наступну формулу

$$V_{піраміди}=\frac{1}{6}\left|\bar{a}\bar{b}\bar{c}\right|,$$

де на векторах $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, як на сторонах піраміди, добудовано паралелепіпед.

Отже, обчислимо мішаний добуток векторів $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_1A_3}$ та $\overrightarrow{A_1A_4}=(-1,3,-6)$.

$$\overrightarrow{A_1A_2}\cdot\overrightarrow{A_1A_3}\cdot\overrightarrow{A_1A_4}=\begin{vmatrix}3 & -1 & -5\\ 3 & 7 & -4\\ -1 & 3 & -6\end{vmatrix}=-126-4-45-35+36-18=-192.$$

Тоді об'єм піраміди

$$V=\frac{1}{6}\begin{vmatrix}3 & -1 & -5\\ 3 & 7 & -4\\ -1 & 3 & -6\end{vmatrix}=\frac{|-192|}{6}=32\ (од.\,об'єму).$$

4) Рівняння площини, що проходить через 3 вказані точки $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$, $M_3(x_3,y_3,z_3)$ має вигляд

$$\begin{vmatrix}x-x_1 & y-y_1 & z-z_1\\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1\end{vmatrix}=0.$$

Підставляємо вихідні значення, тобто координати точок $A_2(4,-3,-2)$, $A_3(4,5,-1)$, $A_4(0,1,-3)$, в записану вище формулу

$$\begin{vmatrix} x-4 & y+3 & z+2 \\ 4-4 & 5+3 & -1+2 \\ 0-4 & 1+3 & -3+2 \end{vmatrix} = 0; \begin{vmatrix} x-4 & y+3 & z+2 \\ 0 & 8 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 0,$$

звідки і записуємо рівняння площини (обчислення визначника за елементами 1-го рядка):

$$(x-4)\begin{vmatrix} 8 & 1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} - (y+3)\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -1 \end{vmatrix} + (z+2)\begin{vmatrix} 0 & 8 \\ -4 & 4 \end{vmatrix} = 0,$$

$$-12(x-4) - 4(y+3) + 32(z+2) = 0.$$

Ділимо останнє на (-4) та розкриваємо дужки:

$$3(x-4) + y + 3 - 8(z+2) = 0, \quad 3x + y - 8z - 25 = 0.$$

Отже, рівняння площини $A_2A_3A_4$: $3x + y - 8z - 25 = 0$.

5) Кут між ребрами A_1A_2 і A_1A_4.

Обчислюємо із скалярного добутку за формулою

$$\cos\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}},$$

де вектори задані своїми координатами $\vec{a} = \left(a_x, a_y, a_z\right)$, $\vec{b} = \left(b_x, b_y, b_z\right)$. Отже, $\overrightarrow{A_1A_2}(3, -1, -5)$, $\overrightarrow{A_1A_4} = (-1, 3, -6)$, тому

$$\cos\left(\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_4}\right) = \frac{\overrightarrow{A_1A_2} \cdot \overrightarrow{A_1A_4}}{\left|\overrightarrow{A_1A_2}\right| \cdot \left|\overrightarrow{A_1A_4}\right|} = \frac{-3 - 3 + 30}{\sqrt{9 + 1 + 25} \cdot \sqrt{1 + 9 + 36}} = \frac{24}{\sqrt{35} \cdot \sqrt{46}} \approx 0,598.$$

6) Двогранний кут між гранями піраміди обчислюють як кут між векторами-нормалями площин, які містять дані грані, через скалярний добуток, як в попередньому пункті. Із п.2) маємо для грані $A_1A_2A_3$ нормальний вектор $\vec{n}_1 = \left(13, -1, 8\right)$, із п.4), відповідно, $\overline{n}_2 = \left(3, 1, -8\right)$, тому,

$$\cos\left(\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}\right) = \frac{\left|\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2}\right|}{\left|\overrightarrow{n_1}\right| \cdot \left|\overrightarrow{n_2}\right|} = \frac{\left|39 - 1 - 64\right|}{\sqrt{169 + 1 + 64} \cdot \sqrt{9 + 1 + 64}} = \frac{26}{\sqrt{17316}} \approx 0,198.$$

7) Для обчислення відстані від вказаної точки до площини $Ax + By + Cz + D = 0$ за формулою

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

запишемо рівняння грані у вигляді

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0,$$

де $\vec{n}_1=(A,B,C)=(13,-1,8)$ і точка $M_0(x_0,y_0,z_0)$ – одна із точок грані. Маємо:

$$13(x-1)-(y+2)+8(z-3)=0,$$

$13x-y+8z-39=0$ – рівняння грані $A_1A_2A_3$. Тому

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{|13\cdot 0-1\cdot 1+8\cdot(-3)-39|}{\sqrt{169+1+64}}=\frac{64}{\sqrt{234}}\approx 4{,}18.$$

Відповідь:

1) $\frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z-3}{-5}$, $\sqrt{35}$; 2) $\frac{3}{2}\sqrt{234}$; 3) 32; 4) $3x+y-8z-25=0$; 5) $\cos\alpha\approx 0{,}598$; 6) $\cos\alpha\approx 0{,}198$; 7) 4,18.

Задача 4. Точки $A(-1,4)$, $B(2,2)$ та $C(-3,2)$ – вершини трикутника. Знайти:

1) рівняння сторони AB;
2) рівняння медіани CM та її довжину;
3) рівняння висоти AH;
4) рівняння прямої, що проходить через точку B, паралельно стороні AC.

Розв'язування.

1) Рівняння сторони AB, як прямої через дві точки $M_1(x_1,y_1)$, $M_2(x_2,y_2)$, записується у вигляді

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}.$$

Підставляємо дані і одержуємо:

$$\frac{x-(-1)}{2-(-1)}=\frac{y-4}{2-4}; \qquad \frac{x-(-1)}{3}=\frac{y-4}{-2};$$

$\frac{x+1}{3}=\frac{y-4}{-2}-$ канонічне рівняння прямої AB на площині, яке запишемо в загальному вигляді $-2(x+1)=3(y-4), \quad 2x+3y-10=0.$

2) Для рівняння медіани CM та обчислення її довжини знаходимо координати точки $M_0(x_0,y_0)$, як середини відрізка AB:

$$x_0=\frac{-1+2}{2}=\frac{1}{2}, \;\; y_0=\frac{4+2}{2}=3.$$

Знайдемо рівняння прямої, що проходить через дві точки: $M_0\left(\frac{1}{2},3\right)$ та $C(-3,2)$.

$$\frac{x-(-3)}{\frac{1}{2}-(-3)}=\frac{y-2}{3-2}, \qquad \frac{x+3}{\frac{7}{2}}=\frac{y-2}{1}; \qquad x+3=\frac{7}{2}y-7,$$

далі множимо рівняння на 2 і зводимо його до загального вигляду:

$$2x-7y+20=0.$$

Довжину медіани обчислимо за формулою відстані між двома точками

$$CM=\sqrt{\left(-3-\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2+(2-3)^2}=\sqrt{\frac{49}{4}+1}=\sqrt{\frac{53}{4}}=\frac{1}{2}\sqrt{53}.$$

3) Для рівняння висоти AH записуємо спочатку рівняння прямої BC, що проходить через дві точки $B(2,2)$ та $C(-3,2)$, як загальне рівняння. Отже,

$$\frac{x-2}{-3-2}=\frac{y-2}{2-2}, \qquad \frac{x-2}{-5}=\frac{y-2}{0};$$

тобто маємо $y-2=0-$ загальне рівняння сторони із вектором нормалі $\vec{n}(0,1)$, який є напрямним для шуканої висоти, яку запишемо спочатку в канонічному вигляді:

$$\frac{x-x_0}{a_1}=\frac{y-y_0}{a_2},$$

де точка $M_0(x_0,y_0)$ належить прямій, а вектор $\vec{a}(a_1,a_2)$ є напрямним вектором.

Підставляємо дані і одержуємо:

$$\frac{x-(-1)}{0}=\frac{y-4}{-1}; \qquad \frac{x+1}{0}=\frac{y-4}{-1},$$

тобто $x+1=0$ – рівняння висоти *AH*.

4) Прямі паралельні, якщо їх напрямні вектори колінеарні (або рівні), тому один із напрямних векторів прямої *AC* є вектором $\overrightarrow{AC}=(-2,-2)$. Запишемо шукану пряму в канонічному вигляді із напрямним вектором $\vec{a}(1,1)$:

$$\frac{x-2}{1}=\frac{y-2}{1},$$

тобто $y=x$ – рівняння шуканої прямої.

Відповідь:

1) $2x+3y-10=0$; 2) $2x-7y+20=0$, $\frac{1}{2}\sqrt{53}$; 3) $x+1=0$; 4) $y=x$.

Задача 5. Визначити і описати криву другого порядку:

а) $4x^2+9y^2-8x-36y+4=0$; б) $2x^2-4x+y-3=0$.

Розв'язування.

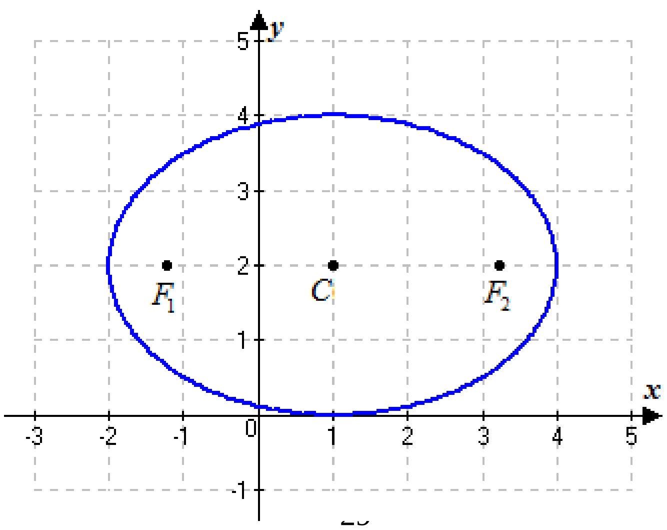
а) $4x^2+9y^2-8x-36y+4=0$.

Виконаємо перетворення рівняння:

$$4x^2-8x+4+9y^2-36y+36-36=0,\ 4\left(x^2-2x+1\right)+9\left(y^2-4y+4\right)-36=0,$$

$$4(x-1)^2+9(y-2)^2=36,$$

$\frac{(x-1)^2}{3^2}+\frac{(y-2)^2}{2^2}=1$ – одержали канонічне рівняння еліпса з центром в точці *C*(1, 2), півосями $a=3, b=2$ та $c=\sqrt{3^2-2^2}=\sqrt{5}$, відповідно, із фокусами (відносно центра еліпса як початку координат) $F_1\left(1-\sqrt{5},2\right)$ та $F_2\left(1+\sqrt{5},2\right)$.

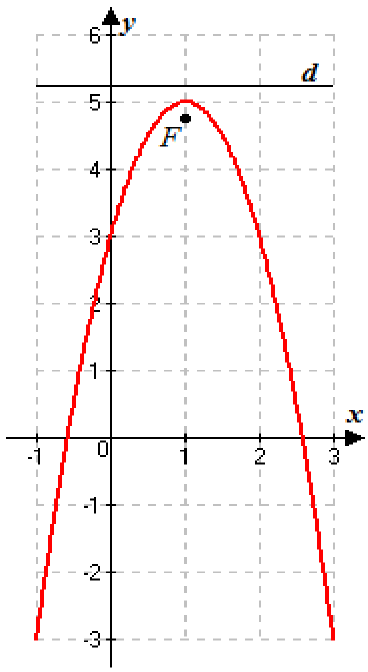


б) $2x^2-4x+y-3=0.$

Виконаємо також перетворення рівняння: $2x^2-4x+2+y-5=0,$

$$2\left(x^2-2x+1\right)+y-5=0,\ 2\left(x-1\right)^2=-y+5,\ \left(x-1\right)^2=-\frac{1}{2}\left(y-5\right),$$

$\left(x-1\right)^2=2\left(-\frac{1}{4}\right)\left(y-5\right)$ – одержали канонічне рівняння параболи з вершиною в точці $C(1,5)$, директрисою $y=5+\frac{1}{4}=\frac{21}{4}$ та фокусом $F\left(1;5-\frac{1}{4}\right)=\left(1;\frac{19}{4}\right)$, гілки якої напрямлені донизу.



Відповідь: а) $\frac{\left(x-1\right)^2}{9}+\frac{\left(y-2\right)^2}{4}=1$; б) $\left(x-1\right)^2=-\frac{1}{2}\left(y-5\right)$.

Задача 6. Побудувати графіки елементарних функцій:

а) $y=\frac{3}{\left|x-1\right|}$; б) $y=3\operatorname{arctg}\left(2x+3\right)$.

Розв'язування.

а) $y=\frac{3}{\left|x-1\right|}$.

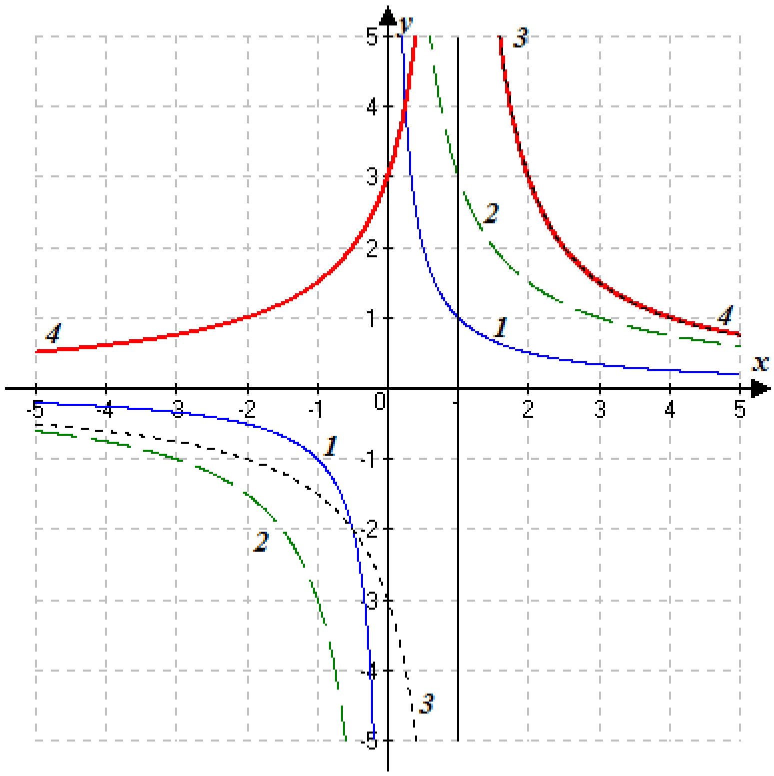
Виконаємо наступну послідовність побудов:

1) $y = \dfrac{1}{x}$ (початковий графік);

2) $y = \dfrac{3}{x}$ (розтяг по осі ординат в 3 рази);

3) $y = \dfrac{3}{x-1}$ (зсув по осі абсцис на 1 вправо);

4) $y = \dfrac{3}{|x-1|}$ (симетричне відображення від'ємної частини відносно осі абсцис):



б) $y = 3\operatorname{arctg}(2x+3)$.

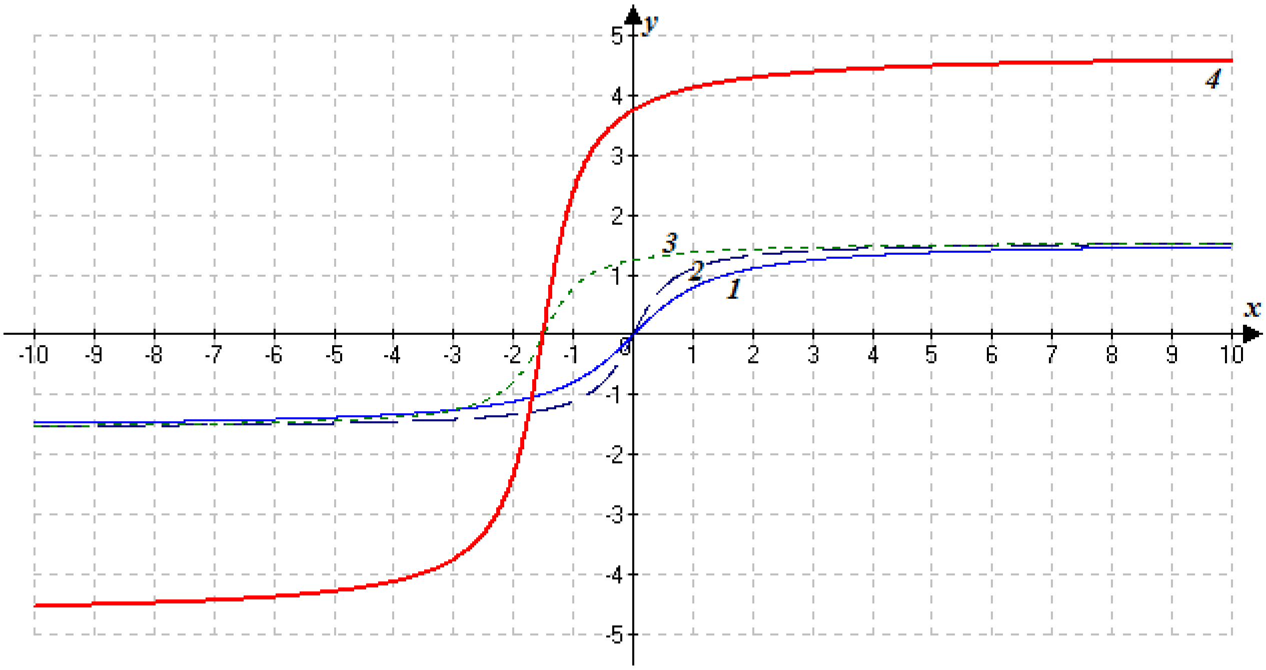
Виконаємо наступну послідовність побудов:

1) $y = \operatorname{arctg} x$ (початковий графік);

2) $y = \operatorname{arctg}(2x)$ (стискання по осі абсцис в 2 рази);

3) $y = \operatorname{arctg}(2x+3) = \operatorname{arctg} 2\left(x + \dfrac{3}{2}\right)$ (зсув по осі абсцис на 1,5 вліво);

4) $y = 3\operatorname{arctg}(2x+3)$ (розтяг по осі ординат в 3 рази):



Задача 7. Обчислити границі:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(n+1)^2}{2n^2}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x^3-3x+1}{x-4}+1\right)$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x-\arcsin x}{2x+\operatorname{arctg} x}$.

Розв'язування.

$$\text{а)}\lim_{x\to\infty}\frac{(n+1)^2}{2n^2}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{n^2+2n+1}{2n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{n^2+2n+1}{n^2}}{\dfrac{2n^2}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{n^2}{n^2}+\dfrac{2n}{n^2}+\dfrac{1}{n^2}}{\dfrac{2n^2}{n^2}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\dfrac{2}{n}+\dfrac{1}{n^2}}{2}=\frac{1+0+0}{2}=\frac{1}{2}.$$

$$\text{б)}\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{x^3-3x+1}{x-4}+1\right)=\frac{0^3-3\cdot 0+1}{0-4}+1=-\frac{1}{4}+1=\frac{3}{4};$$

$$\text{в)}\ \lim_{x\to 0}\frac{2x-\arcsin x}{2x+\operatorname{arctg} x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\begin{bmatrix}\arcsin x\sim x\\ \operatorname{arctg}\sim x\end{bmatrix}=\lim_{x\to 0}\frac{2x-x}{2x+x}=\lim_{x\to 0}\frac{x(2-1)}{x(2+1)}=\frac{1}{3}.$$

Відповідь: 1) $\dfrac{1}{2}$; 2) $\dfrac{3}{4}$; 3) $\dfrac{1}{3}$.

Задача 8. Знайти похідну:

а) $y=10^{-4x}\sin 3x+\operatorname{arctg} x$; б) $y=\lg(3x^2-1)+\dfrac{e^{-x^2}}{x}$.

Розв'язування.

а) Використовуємо правило суми та добутку обчислення похідної

$$y' = \left(10^{-4x}\sin 3x + \operatorname{arctg} x\right)' = \left(10^{-4x}\right)' \cdot \sin 3x + 10^{-4x} \cdot \left(\sin 3x\right)' + \frac{1}{1+x^2} =$$

$$= -4\ln 10 \cdot 10^{-4x}\sin 3x + 3\cdot 10^{-4x}\cos 3x + \frac{1}{1+x^2}.$$

б) Для другого доданку маємо правило частки обчислення похідної:

$$y' = \left(\lg\left(3x^2-1\right) + \frac{e^{-x^2}}{x}\right)' = \frac{1}{\ln 10}\left(\ln\left(3x^2-1\right)\right)' + \left(\frac{e^{-x^2}}{x}\right)' =$$

$$= \frac{6x}{\ln 10\left(3x^2-1\right)} + \frac{\left(e^{-x^2}\right)' \cdot x - x'e^{-x^2}}{x^2} =$$

$$= \frac{6x}{\ln 10\left(3x^2-1\right)} + \frac{-2x^2e^{-x^2} - e^{-x^2}}{x^2} = \frac{6x}{\ln 10\left(3x^2-1\right)} - \frac{2x^2+1}{x^2}e^{-x^2}.$$

Задача 9. Провести повне дослідження функції $y = \dfrac{x}{(x-1)^2}$ і побудувати її графік.

Розв'язування.

Використаємо загальну схему дослідження функції для побудови графіка.

1) *Область визначення функції.*

$D(y) \in R \setminus \{1\}$, тобто функція визначена на всій числовій прямій, крім точки $x=1$.

2) *Точки перетину графіка з осями координат.*

Осі координат перетинає функція в точці (0, 0).

3) *Періодичність, парність.*

Функція неперіодична, ні парна, ні непарна.

4)Точки розриву, односторонні границі та границі на нескінченності.

В точці $x=1$ функція має розрив 2-го роду. Знайдемо односторонні границі.

$$\lim_{x\to 1-0}\frac{x}{(x-1)^2} = \infty;\ \lim_{x\to 1+0}\frac{x}{(x-1)^2} = \infty.$$

Отже, пряма $x=1$ є вертикальною асимптотою.

Знайдемо границі функції на нескінченності

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{(x-1)^2}=0;\ \lim_{x\to\infty}\frac{x}{(x-1)^2}=0,$$

тобто $y=0-$ горизонтальна асимптота.

Дослідимо на похилі асимптоти $y=kx+b$, визначаємо кутовий коефіцієнт

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{(x-1)^2x}=0.$$

Оскільки кутовий коефіцієнт k рівний 0, то похилих асимптот немає.

5) *Екстремуми функції.*

Знайдемо точки, в яких похідна перетворюється в 0, для чого розв'яжемо рівняння $y'=0$. Знайдемо похідну функції

$$y'=\left(\frac{x}{(x-1)^2}\right)'=\frac{x'(x-1)^2-(x)\left((x-1)^2\right)'}{(x-1)^4}=\frac{(x-1)^2-2x(x-1)}{(x-1)^4}=-\frac{x^2-1}{(x-1)^4}=-\frac{x+1}{(x-1)^3},$$

прирівнюємо чисельник до нуля $x+1=0,\Rightarrow x=-1-$ можлива точка екстремума. Вказана точка є точкою мінімума, бо похідна змінює знак з „–” на „+”, одержані результати дослідження занесемо в таблицю:

x	$(-\infty;-1)$	-1	$(-1,1)$	$(1;\infty)$
y'	–	0	+	–
y	↘	min -1/4	↗	↘

6) *Точки перегину функції.*

Розв'яжемо рівняння $y''=0$. Знайдемо другу похідну функції:

$$y''=-\left(\frac{x+1}{(x-1)^3}\right)'=-\frac{(x+1)'(x-1)^3-(x+1)\left((x-1)^3\right)'}{(x-1)^6}=$$

$$=-\frac{(x-1)^3-3(x+1)(x-1)^2}{(x-1)^6},$$

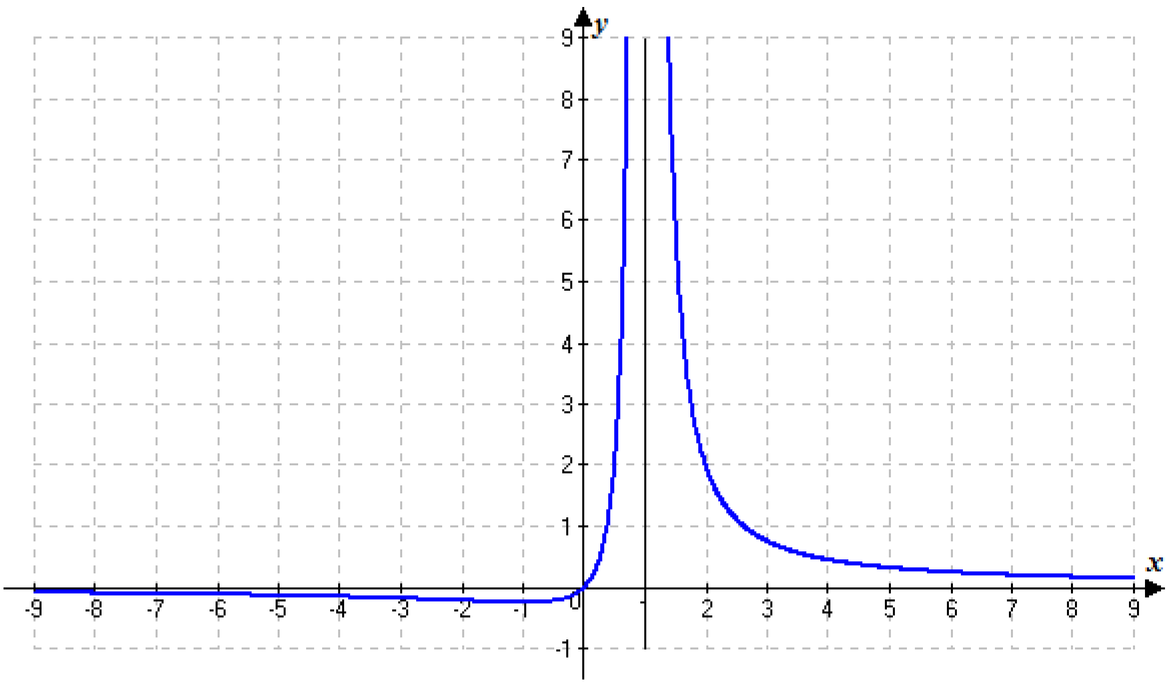
скорочуємо на $(x-1)^2$ і отримуємо

$$=-\frac{x-1-3(x+1)}{(x-1)^4}=-\frac{-2x-4}{(x-1)^4}=\frac{2(x+2)}{(x-1)^4}.$$

Із останнього випливає, що точка $x=-2$ – можлива точка перегину. Занесемо в таблицю дані, описавши таким чином інтервали опуклості графіка функції та точки перегину:

x	$(-\infty; -2)$	-2	$(-2, 1)$	$(1; \infty)$
y''	–	0	+	+
y	⌒	-2/9	◡	◡

7) *Графік функції.*



Додаток 1

Елементи лінійної алгебри

Визначники

другого порядку $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$;

третього порядку

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

або $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$

Правила Крамера для системи $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases}$:

$x_1 = \dfrac{\Delta_{x_1}}{\Delta}, \quad x_2 = \dfrac{\Delta_{x_2}}{\Delta}$, де $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{12} & b_2 \end{vmatrix}$, за умови, що $\Delta \neq 0$.

Матричний спосіб (для системи 3-го порядку) $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_3, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3, \end{cases}$ $X = A^{-1}B$,

або

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Додаток 2

Елементи векторної алгебри

Модуль вектора: $\vec{a} = (x_0,\ y_0,\ z_0),\quad |\vec{a}| = \sqrt{x_0^{\ 2} + y_0^{\ 2} + z_0^{\ 2}}.$

Координати вектора $\overrightarrow{AB}$, $A(x_0,\ y_0,\ z_0),\ B(x_1,\ y_1,\ z_1),\ \overrightarrow{AB} = (x_1 - x_0,\ y_1 - y_0,\ z_1 - z_0).$

Умова колінеарності векторів: $\vec{a} = (x_0,\ y_0,\ z_0),\ \vec{b} = (x_1,\ y_1,\ z_1),\quad \dfrac{x_0}{x_1} = \dfrac{y_0}{y_1} = \dfrac{z_0}{z_1}.$

Скалярний добуток:

$$\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi,\quad \vec{a}\vec{b} = x_0x_1 + y_0y_1 + z_0z_1,\ \cos\varphi = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{x_0x_1 + y_0y_1 + z_0z_1}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}\cdot\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}}.$$

Умова перпендикулярності векторів: $\vec{a}\vec{b} = 0,\quad x_0x_1 + y_0y_1 + z_0z_1 = 0.$

Проекція вектора $\vec{a}$ на напрям вектора $\vec{b}$: $np_{\bar{b}}\bar{a} = \dfrac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{b}|}$.

Векторний добуток: $\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_0 & y_0 & z_0 \\ x_1 & y_1 & z_1 \end{vmatrix} = (y_0\,z_1 - y_1\,z_0)\,\vec{i} - (x_0\,z_1 - x_1\,z_0)\,\vec{j} + (x_0\,y_1 - x_1\,y_0)\,\vec{k}$.

Площа паралелограма, трикутника, побудованих на векторах $\vec{a},\ \vec{b}$: $S_{пар} = |\vec{a}\times\vec{b}|,\quad S_{тр} = \dfrac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}|$.

Мішаний добуток: $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.$

Об'єм паралелепіпеда і піраміди: $V_{пар} = |\vec{a}\vec{b}\vec{c}|,\quad V_{пір} = \dfrac{1}{6}|\vec{a}\vec{b}\vec{c}|$.

Додаток 3

Аналітична геометрія на площині

Пряма на площині

Рівняння прямої через точку $M_0(x_0, y_0) \perp$ до вектора $\vec{N}(A, B)$: $A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$. Загальне рівняння прямої: $Ax+By+C=0$. Кут φ між двома прямими, які задані загальними рівняннями $A_1x+B_1y+C_1=0$ і $A_2x+B_2y+C_2=0$: $\cos\varphi = \dfrac{A_1A_2+B_1B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2}}$.

Рівняння прямої через точку $M_0(x_0, y_0)$, паралельно вектору $\vec{l}(m, n)$: $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}$.

Рівняння прямої через дві точки $M_0(x_0, y_0)$, $M_1(x_1, y_1)$: $\dfrac{x-x_0}{x_1-x_0}=\dfrac{y-y_0}{y_1-y_0}$.

Параметричні рівняння прямої: $\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt. \end{cases}$

Рівняння прямої через точку $M_0(x_0, y_0)$ з кутовим коефіцієнтом k: $y-y_0=k(x-x_0)$.

Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом k: $y=kx+b$. Для прямих $y=k_1x+b_1$, $y=k_2x+b_2$ тангенс кута між ними через їх кутові коефіцієнти обчислюють за формулою $\operatorname{tg}\alpha = \left|\dfrac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}\right|$.

Прямі перпендикулярні: $k_1\cdot k_2=-1$, паралельні: $k_1=k_2$.

Відстань від точки $M(x_0, \ y_0)$ до прямої $Ax+By+C=0$: $d=\dfrac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

Криві 2-го порядку

Рівняння кола з центром в точці $M_0(x_0, y_0)$ радіуса R: $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$.

Рівняння еліпса з центром в точці $O(0,0)$, $M_0(x_0, y_0)$:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \quad \frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1.$$

Рівняння гіперболи з центром в точці $O(0,0)$, $M_0(x_0, y_0)$:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\pm1, \quad \frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=\pm1.$$

Рівняння параболи з вершиною $O(0,0)$, $M_0(x_0, y_0)$:

$$y^2=2px, \ \ x^2=2py; \ \ (y-y_0)^2=2p(x-x_0), \ \ (x-x_0)^2=2p(y-y_0).$$

Додаток 4

Аналітична геометрія в просторі

Пряма в просторі

Рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, паралельно вектору $\vec{l}(m, n, p): \dfrac{x-x_0}{m} = \dfrac{y-y_0}{n} = \dfrac{z-z_0}{p}$.

Кут між двома прямими $\dfrac{x-x_1}{m_1} = \dfrac{y-y_1}{n_1} = \dfrac{z-z_1}{p_1}$ і $\dfrac{x-x_2}{m_2} = \dfrac{y-y_2}{n_2} = \dfrac{z-z_2}{p_2}$: $\cos\varphi = \dfrac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}$.

Умова паралельності двох прямих: $\dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{n_1}{n_2} = \dfrac{p_2}{p_2}$, умова перпендикулярності: $m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0$.

Рівняння прямої через дві точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $M_1(x_1, y_1, z_1)$: $\dfrac{x-x_0}{x_1-x_0} = \dfrac{y-y_0}{y_1-y_0} = \dfrac{z-z_0}{z_1-z_0}$.

Параметричні рівняння прямої через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, паралельно вектору $\vec{l}(m, n, p): x = x_0 + mt,\ y = y_0 + nt,\ z = z_0 + pt$.

Загальні рівняння прямої: $\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0, \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0 \end{cases}$.

Площина в просторі

Рівняння площини, яка проходить через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ із вектором нормалі $\vec{N}(A, B, C)$:

$$A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0.$$

Рівняння площини у відрізках на осях: $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1$.

Загальне рівняння площини: $Ax + By + Cz + D = 0$.

Рівняння площини через точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = 0.$$

Кут між площинами: $\cos\varphi = \dfrac{\overrightarrow{N_1}\ \overrightarrow{N_2}}{\left|\overrightarrow{N_1}\right|\left|\overrightarrow{N_2}\right|}$, $\cos\varphi = \dfrac{A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$.

Відстань від точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до площини $Ax + By + Cz + D = 0$: $d = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

Пряма і площина в просторі

Кут між прямою $\dfrac{x - x_0}{m} = \dfrac{y - y_0}{n} = \dfrac{z - z_0}{p}$ і площиною $Ax + By + Cz + D = 0$:

$$\sin\varphi = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}.$$

Умова паралельності прямої і площини: $Am + Bn + Cp = 0$, а умова перпендикулярності $\dfrac{A}{m} = \dfrac{B}{n} = \dfrac{C}{p}$.

Поверхні 2-го порядку

Сфера: $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, *еліпсоїд:* $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$.

Циліндри 2-го порядку: круговий $x^2 + y^2 = R^2$; еліптичний $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$; гіперболічний $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$; параболічний $y^2 = 2px$.

Конус $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 0$.

Гіперболоїди: однопорожнинний $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$, двопорожнинний $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = -1$.

Параболоїд: еліптичний $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 2z$; гіперболічний $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 2z$.

Функція однієї та багатьох змінних

Функція однієї змінної

Дві важливі границі: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{-x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(1\pm x\right)^{\pm\frac{1}{x}}=e.$

Основні еквівалентні величини:

$\sin x\sim x,\quad x\to 0$; $\quad\ln(1+x)\sim x,\ \log_a(1+x)\sim(\log_a e)x,\ x\to 0; e^x-1\sim x,\ a^x-1\sim x\ln a,\ x\to 0;$

$\arcsin x\sim x,\ x\to 0$; $\mathrm{tg}x\sim x,\ x\to 0$; $\mathrm{arctg}x\sim x,\ x\to 0$; $(1+x)^{\mu}-1\sim\mu x,\ x\to 0.$

Рівняння дотичної і нормалі

$$y-y_0=f'\left(x_0\right)\left(x-x_0\right),\qquad y-y_0=-\frac{1}{f'\left(x_0\right)}\left(x-x_0\right).\ k=\mathrm{tg}\alpha=f'(x_0).$$

Екстремуми функцій

Точки, в яких $f'(x_o)=0$ – критичні точки функції. Якщо похідна змінює знак з + на - , то точка x_0 – точка максимума, якщо з - на +, то точка мінімума.

Функція багатьох змінних

$z_x{}'=\dfrac{\partial z}{\partial x}$ – похідна за змінною $x,\ y$ – стала; $z_y{}'=\dfrac{\partial z}{\partial y}$ – похідна за змінною y, x – стала.

$z''_{xx}=\left(z'_x\right)'_x=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ – похідна 2-го порядку за x ; $z''_{yy}=\left(z'_y\right)'_y=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ – похідна 2-го порядку за y;

$z''_{xy}=\left(z'_y\right)'_x=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ – мішана похідна 2-го порядку за x, y .

Значення функцій деяких кутів

$\sin 0=0,\quad \sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{1}{2},\quad \sin\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2},\quad \sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2},\quad \sin\dfrac{\pi}{2}=1,\quad \sin\pi=0,\quad \sin\dfrac{3\pi}{2}=-1$;

$\cos 0=1,\quad \cos\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\sqrt{3}}{2},\quad \cos\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2},\quad \cos\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{2},\quad \cos\dfrac{\pi}{2}=0,\quad \cos\pi=-1,\quad \cos\dfrac{3\pi}{2}=0$;

$\mathrm{tg}\,0=0,\quad \mathrm{tg}\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\sqrt{3}}{3},\quad \mathrm{tg}\dfrac{\pi}{4}=1,\quad \mathrm{tg}\dfrac{\pi}{3}=\sqrt{3},\quad \mathrm{tg}\dfrac{\pi}{2}$ – не існує;

$\mathrm{ctg}\,0$ – не існує, $\quad\mathrm{ctg}\dfrac{\pi}{6}=\sqrt{3},\quad \mathrm{ctg}\dfrac{\pi}{4}=1,\quad \mathrm{ctg}\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{3},\quad \mathrm{ctg}\dfrac{\pi}{2}=0.$

Список рекомендованої літератури

1. Дубовик В.П. Вища математика: навч. посіб. / Дубовик В.П., Юрик І.І. – К.: А.С.К., 2005. – 648 с.
2. Грималюк В.П. Вища математика: У 2 ч.: навч. посіб. / Грималюк В.П., Кухарчук М.М., Ясінський В.В. – К.: Віпол, 2004. – Ч. 1. – 376 с.
3. Клетеник Д. В. Сборник задач по аналитической геометрии. – М.: Наука, 1980. – 240 с.
4. Дубовик В.П. Вища математика. Збірник задач: навч. посіб. / Дубовик В.П., Юрик І.І. – К.: А.С.К., 2005. – 648 с.
5. Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа: Уч. пособие. – 22-е изд., перераб. – СПб.: Изд-во «Профессия», 2005. – 432 с.
6. Бугров Я.С., Никольский С.М. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. М.: Дрофа, 2004. – 288 с.
7. Ефимов В.Н. Краткий курс аналитической геометрии. М.: Наука, 2005. – 240 с.
8. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления (т.1). М.: Наука, 1996. – 416 с.
9. Кушлик О. І. Збірник завдань для розрахункових робіт з вищої математики (Елементи лінійної алгебри й аналітичної геометрії). / О.І. Кушлик, Б.П. Орел, Н.В. Поліщук. − Київ, „Політехніка”, 2005. – 52 с.
10. Кушлик-Дивульська О.І. Елементи лінійної, векторної алгебри. Аналітична геометрія. Вступ до математичного аналізу [Електронний ресурс]: збірник типових завдань кредитного модуля «Вища математика-1» для студентів видавничо-поліграфічного інституту / НТУУ «КПІ» ; уклад. О. І. Кушлик-Дивульська, Н. В. Поліщук, Н. П. Селезньова. – Електронні текстові дані (1 файл: 3,67 Мбайт). – Київ : НТУУ «КПІ», 2015. – 149 с. – Назва з екрана. – Доступ : http://ela.kpi.ua/handle/123456789/10429.

Зміст