

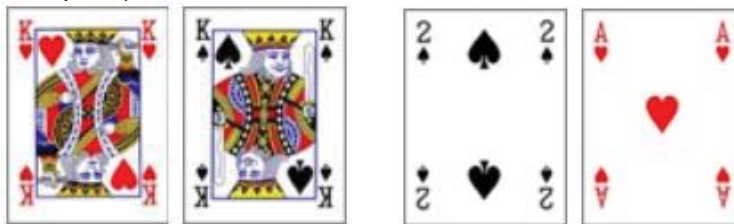
**СЕКЦІЯ: МАТЕМАТИКА**

**Леся Барановская, Александр Буковский  
(Киев, Украина)**

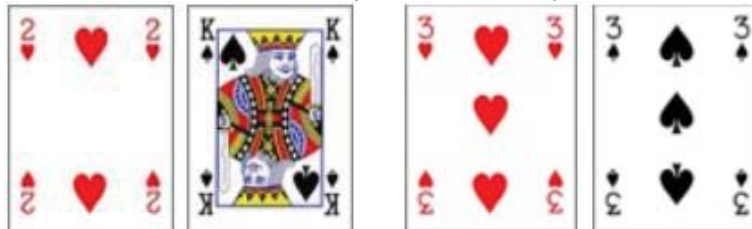
**ОБ ОДНОМ РАВНОВЕСИИ НЭША В СМЕШАННЫХ СТРАТЕГИЯХ**

Рассмотрим игру двух лиц, найдем равновесие Нэша в смешанных стратегиях, что даёт нам теоретическое предсказание игры, и, наконец, приведем для сравнения экспериментальный результат этой игры.

Итак, есть два игрока: Красный и Чёрный. У каждого игрока есть четыре карты. У Чёрного: король, двойка, тройка, туз пик; у Красного: король (К), двойка (2), тройка (3), туз (А) чирв. Каждый игрок выбирает одну карту и показывает своему противнику одновременно с ним. Красный выигрывает, если выпали оба короля или разные карты (не короли):



Чёрный выигрывает, если выпал только один король или обе карты одного номинала:



Сформулируем такие три вопроса: 1) поскольку правила игры, как мы видим, «несимметричны», поэтому возможно ли, что один из игроков имеет некоторое преимущество и у кого есть преимущество: у Красных или у Чёрных; 2) какова ставка выигрыша каждого игрока, какова вероятность победы Красных и Чёрных; 3) можем ли мы что-нибудь сказать о распределении карт каждого игрока?

Скорее всего, ответ на первый вопрос мы можем получить эмпирическим путем, играя много раз подряд, т.е. проверяя характер игры. Но второй и третий вопрос – вычисление выигрышной ставки для каждого игрока и вычисление распределения карт каждого игрока – довольно трудные. Поэтому применим теоретико-игровой подход к данной игре. Запишем игру в нормальной форме, т.е. таблицу выигрышей, и по ней вычислим стратегическое равновесие Нэша.

	<b>Чёрный</b>	<i>К</i>	<i>3</i>	<i>2</i>	<i>А</i>
<b>Красный</b>					
	<i>К</i>	1;0	0;1	0;1	0;1
	<i>3</i>	0;1	0;1	1;0	1;0
	<i>2</i>	0;1	1;0	0;1	1;0
	<i>А</i>	0;1	1;0	1;0	0;1

Поскольку в этой игре важно сделать себя непредсказуемым, поэтому единственным равновесием здесь является равновесие в смешанных стратегиях [1]. Найдем это равновесие, при этом каждый игрок выбирает карты с определенной вероятностью.

Определим распределение вероятностей по стратегиям Чёрного игрока: *К*, *2*, *3*, *А*. Предположим, что он выбирает *3* с вероятностью *p*, *2* с вероятностью *q*, *А* с вероятностью *r*. С оставшейся вероятностью  $(1-p-q-r)$  Чёрный игрок выбирает стратегию *К*. Определим их значения. Поскольку карты *2*, *3*, *А* имеют очень схожую роль, будем считать, что Чёрный игрок выбирает их с равными вероятностями *p*. Тогда с вероятностью  $1-3p$  он выбирает *К*.

Теперь предположим, что мы – Красный игрок и наш оппонент, Чёрный игрок, смешивает свои карты с рассмотренным распределением вероятностей. Что будет, если мы выберем *К*? С вероятностью  $1-3p$  Чёрный тоже выберет *К* и мы проиграем, во всех остальных случаях мы выиграем. Итак, если мы выбираем *К*, наша вероятность выигрыша составляет  $1-3p$  и наша победная ставка, вероятность выигрыша, составляет  $1 \times (1-3p) + 0 \times p + 0 \times p + 0 \times p = 1-3p$ . Что будет, если мы выберем *3*? С вероятностью  $1-3p$  Чёрный тоже выберет *К* и мы проиграем, с вероятностью *p* Чёрный выберет *3* и мы проиграем, с вероятностью *p* Чёрный выберет *2* и мы выиграем, с вероятностью *p* Чёрный выберет *А* и мы выиграем.

Итак, если мы выбираем 3, наша победная ставка, вероятность выигрыша, составляет  $0 \times (1-3p) + 0 \times p + 1 \times p + 1 \times p = 2p$ . Аналогичные вычисления буду для случаев, если мы выберем 2 или А:

<b>Чёрный</b> \ <b>Красный</b>	К	3	2	А	Победная ставка Красного игрока
К	1;0	0;1	0;1	0;1	→ 1-3p
3	0;1	0;1	1;0	1;0	→ 2p
2	0;1	1;0	0;1	1;0	→ 2p
А	0;1	1;0	1;0	0;1	→ 2p

В положении равновесия Красный игрок должен смешивать все свои карты, а это означает, что выигрышные ставки должны быть идентичны во всех четырех случаях. В противном случае, если, например, число 1-3p являлось самым большим из всех победных ставок, то игрок выбирал бы К с вероятностью 1. Но в равновесной стратегии все ставки победные «хороши».

То есть получим

$$1 - 3p = 2p \Rightarrow p = 0.2.$$

Таким образом, все выигрышные ставки Красного игрока равны 0.4, а также получили вероятностное распределение ходов Чёрного игрока:

<b>Вероятностное распределение ходов Чёрного</b>	<b>0.4</b>	<b>0.2</b>	<b>0.2</b>	<b>0.2</b>	
<b>Чёрный</b> \ <b>Красный</b>	К	3	2	А	<b>Победная ставка Красного игрока</b>
К	1;0	0;1	0;1	0;1	→ 1-3p
3	0;1	0;1	1;0	1;0	→ 2p
2	0;1	1;0	0;1	1;0	→ 2p
А	0;1	1;0	1;0	0;1	→ 2p

Аналогично определим распределение вероятностей по стратегиям Красного игрока:

<b>Вероятностное распределение ходов Красного</b>	<b>Чёрный</b> \ <b>Красный</b>	К	3	2	А
1-3q	К	1;0	0;1	0;1	0;1
q	3	0;1	0;1	1;0	1;0
q	2	0;1	1;0	0;1	1;0
q	А	0;1	1;0	1;0	0;1

Тогда победная ставка Чёрного игрока:

<b>Вероятностное распределение ходов Красного</b>	<b>Чёрный</b> \ <b>Красный</b>	К	3	2	А
1-3q	К	1;0	0;1	0;1	0;1
q	3	0;1	0;1	1;0	1;0
q	2	0;1	1;0	0;1	1;0
q	А	0;1	1;0	1;0	0;1
	<b>Победная ставка Чёрного игрока</b>	↓ 3q	↓ 1-3q+q	↓ 1-3q+q	↓ 1-3q+q

В равновесной стратегии получим:

$$3q = 1 - 3q + q, \text{ откуда } q = 0.2.$$

Таким образом, все выигрышные ставки Чёрного игрока равны 0.6, а также получили вероятностное распределение ходов Красного игрока:

<b>Вероятностное распределение ходов Красного</b>	<b>Чёрный</b> \ <b>Красный</b>	К	3	2	А
0.4	К	1;0	0;1	0;1	0;1
0.2	3	0;1	0;1	1;0	1;0
0.2	2	0;1	1;0	0;1	1;0
0.2	А	0;1	1;0	1;0	0;1
	<b>Победная ставка Чёрного игрока</b>	↓ 0.6	↓ 0.6	↓ 0.6	↓ 0.6

В результате мы получили, что выигрышная ставка Черного равна 0.6, что больше, чем выигрышная ставка Красного 0.4. Другими словами, Чёрный игрок «сильнее», т.е. имеет предпочтение в рамках правил данной игры. Относительно распределения карт можно сделать вывод, что король здесь играет «чаще» (40%), а все остальные карты – реже (20%).

Сравним теоретическое прогнозирование с фактическими данными. Согласно теоретическим расчётам, равновесием Нэша будет:

	Красный игрок	Чёрный игрок
Равновесие Нэша	<b>0.4</b>	<b>0.6</b>

Наши ожидания таковы, что если, например, Красный выигрывает с вероятностью в диапазоне 0.3 - 0.5, то теоретико-игровое «предсказание» работает так себе; в диапазоне 0.35 - 0.45 – хорошо; 0.39-0.41 – очень хорошо.

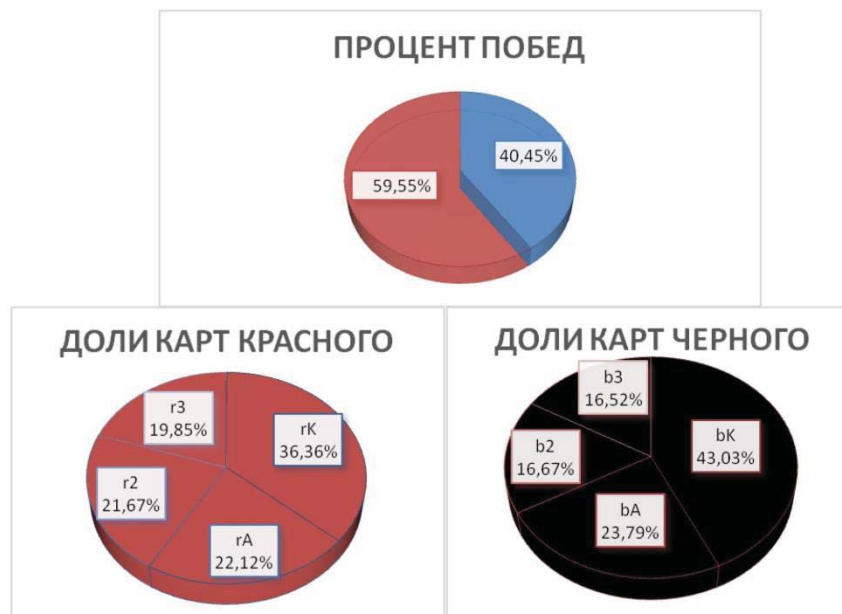
Теперь посмотрим на реальные результаты. В 2015 г. студенты курса “Welcome to Game Theory” [2] сыграли 30 раз в игру в 670 парах; в 2014 г. студенты профессора Michihiro Kandori Университета Токио играли 105 раз в 105 парах; в 2009 г. они же играли 105 раз в 1-2 парах; в 2017 г. студенты НТУУ «КПИ им. Игоря Сикорского» доцента Барановской Л.В. играли 30 раз в 22 парах.

	Красный игрок	Чёрный игрок
<b>Равновесие Нэша</b>	<b>0.4</b>	<b>0.6</b>
Студенты Coursera (2015)	0.415	0.585
Студенты Университета Токио (2014)	0.414	0.586
Студенты Университета Токио (2009)	0.409	0.591
Студенты НТУУ «КПИ им. Игоря Сикорского» (2017)	0.4045	0.5955

Приведем результаты распределения карт:

	Красный игрок				Чёрный игрок			
	К	А	2	3	К	А	2	3
<b>Равновесие Нэша</b>	<b>0.4</b>	<b>0.2</b>	<b>0.2</b>	<b>0.2</b>	<b>0.4</b>	<b>0.2</b>	<b>0.2</b>	<b>0.2</b>
2015	0.36	0.24	0.21	0.2	0.37	0.24	0.19	0.2
2014	0.38	0.21	0.2	0.21	0.44	0.2	0.17	0.18
2009	0.39	0.21	0.2	0.2	0.42	0.2	0.19	0.19
2017	0.36	0.22	0.22	0.2	0.43	0.24	0.17	0.17

Результаты игры 2017 (студенты НТУУ «КПИ им. Игоря Сикорского»), как видно, также очень близки к равновесным:



Данная игра была придумана профессором Университета Калифорнии Лос-Анджелеса (UCLA) Барри О’Нилом [3], который обнаружил, что в результате серии экспериментов поведение людей в этой карточной игре удивительно близко к предсказанию равновесия Нэша.

**Литература:**

1. Martin J. Osborn. An Introduction to Game Theory. – Oxford University Press, 2002. – 89 p.
2. Coursera. Welcome to Game Theory. Режим доступа: <https://www.coursera.org/learn/game-theory-introduction>.
3. B. O'Neill. Nonmetric Test of the Minimax Theory of Two-Person Zerosum Games // Proceedings of the National Academy of Science, U.S.A. – Vol. 84. – P. 2106-2109.

**Асел Аскарлова, Л.Т. Алдибаева**  
(Алматы, Казахстан)

### ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ И МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОЛЕ ТЕМПЕРАТУРЫ ПО ДЛИНЕ СТЕРЖНЯ ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ

Рассмотрим горизонтальный стержень переменного поперечного сечения. Ось  $Ox$  направим слева вправо по оси стержня. Предположим, что поперечное сечение стержня является круг. Радиус поперечного сечения стержня меняется линейно по его длине, т.е.  $r(x) = ax + b$ ,  $0 \leq x \leq l$ . где  $l$  [см] – длина стержня.  $a, b = const$ . Радиус площадь поперечного сечения левого конца обозначим через  $b$  [см], т.е.  $r(x=0) = a \cdot 0 + b = b$  [см]. Тогда радиус площадь поперечного сечения правого конца будет  $r(x=l) = a \cdot l + b$  [см<sup>2</sup>]. Площадь поперечного сечения стержня по ее длине меняется квадратичным образом, т.е.  $F(x) = \pi r^2 = \pi(ax+b)^2$ ,  $0 \leq x \leq l$ . Далее предположим, что боковая поверхность исследуемого стержня является теплоизолированной. На площадь поперечного сечения левого конца подведен тепловой поток  $q$  [ $\frac{Вт}{см^2}$ ], постоянной интенсивности.[1] В то время через площадь поперечного сечения правого конца происходит конвективный теплообмен окружающей этой площадь средой. При этом температура окружающей среды постоянно, т.е.  $T_{oc}$  [ $^{\circ}C$ ] = const. Коэффициент теплообмена между материалом стержня и окружающей среды  $h$  [ $\frac{Вт}{см^2 \cdot ^{\circ}C}$ ]. Теплофизическое свойства материала стержня характеризуется коэффициентом теплопроводности  $k_{xx}$  [ $\frac{Вт}{см \cdot ^{\circ}C}$ ]. При таких воздействиях требуется определить закон распределение температуры по длине исследуемого стержня переменного сечения. Расчетная схема рассматриваемой задачи приводится на рисунке – 1.

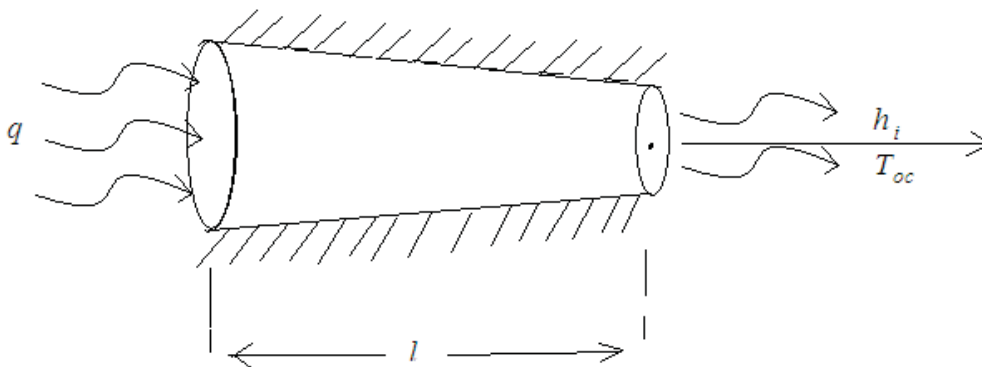


Рисунок – 1. Расчетная схема задачи.

Для решения данной задачи, в соответствии фундаментального закона сохранения энергии [1] напишем функционал полной тепловой энергии для рассматриваемой задачи

$$I = \int_{S(x=0)} q T ds + \int_v \frac{k_{xx}}{2} \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 dv + \int_{S(x=l)} \frac{h}{2} (T - T_{oc})^2 ds \quad (1)$$

где  $S(x=0)$  - площадь поперечного сечения левого конца стержня куда подведен тепловой поток  $q$ ;  $S(x=l)$  - площадь поперечного сечения правого конца стержня через которого происходит конвективный теплообмен.  $V$  - объем исследуемого стержня. Теперь, учитывая, что исследуемый процесс