охватывающей не только дискретные по элементному составу сообщения, но и воздействия более сложного математического строения. В качестве таких воздействий предложено рассматривать асинхронные воздействия произвольной природы, которые в общем случае можно описывать континуальными по математическому строению многомерными сегментами значений действующих величин. Проведен сравнительный анализ возможностей изложенного подхода применительно к ряду нетрадиционных приложений теории информации. Показана глубокая внутренняя связь рассматриваемых конструкций с современными подходами в теоретической информатике и более явная связь построенных структур с энтропией в термодинамике.

Литература:

1. Шеннон К. Математическая теория связи // Клод Шеннон. Работы по теории информации и кибернетике. – М.: Изд-во ИЛ, 1963. – С. 243 – 322.

2. Винер Н. Кибернетика: или управление и связь в животном и машине. – М.: Советское радио, 1968. – 326 с.

3. Мазур М. Качественная теория информации. – М.: Мир, 1974. – с. 240.

4. Бауэр Ф., Гооз Г. Информатика. – М.: Мир, 1976. – 484 с. (1971, 1973)

5. Максвелл Д. К., Вышнеградский И. А., Стодола А. Теория автоматического регулирования (линеаризованные задачи) – М.: Изд-во АН СССР, 1949. – С. 33 – 100.

6. Флоренсов А. Н. Динамические аспекты информационной компонетны сложных систем. – Омск : Изд-во ОмГТУ, 2007. – 344 с.

7. Хоар Ч. Взаимодействующие последовательные процессы. – М.: Мир, 1989. –264 с.

8. Эшби У. Р. Введение в кибернетику / У. Росс Эшби. – М.: Изд-во ИЛ, 1959. – 432 с.

9. Стратонович *Р. Л.* Теория информации – М.: Сов. Радио, 1975. – 424 с.

Дата отправки: 27.11.16

ЦИТ: 416-140
DOI: 10.21893/2410-6720-2016-45-1-140
УДК 518.9

Барановская Л.В., Барановская Г.Г.

О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ И ИХ АКТУАЛЬНОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ В НАУКЕ И ТЕХНИКЕ

Национальный технический университет Украины «КПИ»,
Киев, просп. Победы 37, 03056

Baranovska L.V., Baranovska G.G.

ON DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH DELAY AND THEIR RELEVANCE APPLICATION IN SCIENCE AND TECHNOLOGY

National Technical University of Ukraine "Kyiv Polytechnic Institute",
Kyiv, prosp. Peremohy 37, 03056

Аннотация. Рассматриваются некоторые возможности использования дифференциальных уравнений с запаздыванием при построении математических моделей. Обсуждаются особенности таких уравнений. Представлено решение одной дифференциально-разностной системы нейтрального типа. Показана актуальность применение такой системы в теории управления, в частности, в дифференциальных играх преследования.

Ключевые слова: дифференциальные игры, задача преследования, дифференциально-разностные уравнения нейтрального типа, дифференциальных уравнений с запаздыванием.

Abstract. Some of the possibility of using the differential equations with delay in the construction of mathematical models are considered. The specific features such equations are discussed. The solution of a differential-difference neutral type system is presented. The relevant application of such system in control theory, especially in differential games of pursuit, is shown.

Key words: differential games, the pursuit problem, differential-difference equations of neutral type, differential equations with delay.

Вступление.

В последнее время в прикладной математике широко распространилось использование уравнений с последействием (именуемых также функционально-дифференциальными уравнениями, дифференциально-разностными уравнениями, дифференциальными уравнениями с отклоняющимся аргументом, уравнениями с запаздыванием и т.д.). Модели с последействием в механике используются для описания напряженно-деформированного состояния ряда материалов, например, бетона, пластмассы, древесины, льда, горных пород (явление вязкоупругости). С точки зрения теории функционально-дифференциальных уравнений, вязкоупругие конструкции относятся к классу интегро-дифференциальных уравнений Вольтера. К тому же классу систем приводят задачи аэроавтоупругости, возникающие при изучении движения тел с учетом их взаимодействия с окружающей средой. Также, в химических реактор наличие контура рециркуляции вносит специфику (запаздывание) в модель объекта. В настоящее время фрактальное материаловедение формирует концепцию создания интеллектуальных материалов, т.е. материалов, важнейшим свойством которых является свойство сохранения памяти о прошедших структурных изменениях. Так, например, созданы сплавы с эффектом памяти формы. Такие сплавы проявляют эффект тепловой упругости: они способны восстанавливать при нагреве свою форму, утраченную после охлаждения при низкой температуре. Сегодня разработка интеллектуальных материалов — одна из наиболее перспективных тем материаловедения.

В моделировании широкое применение нашли дифференциальные уравнения с распределенными параметрами с запаздыванием, например, в задачах теории управления, в навигационном управлении кораблями и летательными аппаратами. Дифференциальные уравнения в частных производных с запаздыванием возникают в различных прикладных задачах, таких, например, как задачи биологии, в динамике популяции, медицине (при изучении инфекционных болезней учитывается время инкубационного периода), в физиологической и фармацевтической кинетике (при моделировании реакции организма и циркуляции крови), в химической кинетике (при смешивании реагентов) и т.п. (см. [1-7]).

Примеры моделирования с использованием дифференциальных уравнений с запаздыванием.

При рассмотрении движения судна (см. [7]) считается, что изменение угла φ отклонения судна от курса при угле поворота руля ψ описывается дифференциальным уравнением второго порядка

$$I\varphi''(t)+h\varphi'(t)=-K\psi\left(t\right),\quad I,K>0.$$

Изменение угла поворота руля $\psi\left(t\right)$ происходит в силу уравнения

$$T\psi'\left(t\right)+\psi\left(t\right)=a\xi\left(t\right)+b\xi'\left(t\right),$$

где b – постоянная, ξ – измененное значение угла φ отклонения судна от курса. В реальных условиях отклонение не может изменяться мгновенно. Поэтому считают, что

$$\xi\left(t\right)=\varphi\left(t-\tau\right),\quad \tau>0.$$

Объединяя уравнения, получают систему дифференциальных уравнений с последействием

$$I\varphi''(t)+h\varphi'(t)=-K\psi\left(t\right),$$
$$T\psi''\left(t\right)+\psi\left(t\right)=a\varphi\left(t-\tau\right)+b\varphi'\left(t-\tau\right).$$

В качестве еще примера рассмотрим один из объектов химической промышленности, который содержит запаздывание как в координатах, так и в управлении [8].

Рассматриваемая задача состоит в поддержании заданного значения концентрационной переменной pH, характеризующей направление и скорость химической реакции взаимодействия смеси продукционного и циркуляционного растворов с сернистым газом.

Всякое отклонение величины pH от оптимального для данной реакции значения приводит к уменьшению концентрации целевого продукта и появлению побочных продуктов в выходном потоке. ,то приводит в конечном итоге к снижению экономической эффективности работы всего агрегата. Управление величиной pH чаще всего осуществляется с помощью изменения расхода или концентрации одного либо нескольких входных компонент реакции.

Приводимое ниже уравнение приближенно характеризует процесс получения гидроскиламиндисульфаната ГАДС в насадочно абсорбционной колонне с рециклом

$$\dot{x}(t)=-3{,}2x_1(t)+3{,}2x_1(t-1)+3{,}2u(t-0{,}625),$$

где $x_1(t)$ – выходная переменная, pH циркуляционного раствора, $u(t)$ – управляющее воздействие, расход нитрата аммония.

Здесь запаздывание в координатах объекта обусловлено контуром рециркуляции, запаздывание в управлении вызвано тем, что исполнительный механизм устанавливается на определенном расстоянии от реактора.

Запаздывание в уравнении может повлиять на качественное поведение системы, например, иметь дестабилизирующий эффект, приводить к появлению колебаний. Так, при построении математических моделей явлений с малым запаздыванием им часто пренебрегают, что, вообще говоря, некорректно и может привести к неправильным заключениям. В [9] проиллюстрирован пример, в котором скалярная система асимптотически устойчива при отсутствии запаздывания $(\tau = 0)$, но неустойчива при любом запаздывании $(\tau > 0)$. Другими характерными свойствами являются возможные слипания или ветвления решений, характерные для самоорганизующихся систем, обладающих точками бифуркации. Такие уравнения могут оказаться перспективными при моделировании процессов образования трещин в материаловедении.

Дифференциально-разностные уравнения и системы.

Уравнениями с последействием принято называть уравнения относительно неизвестной функции $x(t)$, связывающую скорость $\dot{x}(t) = d\,x(t)/dt$ изменения функции $x(t)$ с ее значениями в текущий момент t и некоторый предшествующий момент времени $t - \tau$. Подобные уравнения возникают всякий раз, когда моделируемое явление содержит элемент задержки, в результате действия которого и возникает зависимость скорости эволюции от предыдущих состояний. Наличие запаздывания τ приводит как количественным, так и к качественным изменениям постановок задач и свойств их решений. Прежде всего, в качестве начального условия следует задавать не только значение $x(t_0)$, но и все значения искомой функции $x(t)$ на отрезке $t_0 - \tau \le t \le t_0$.

Простейшее линейное дифференциально-разностное уравнение имеет вид

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t - \tau) + f(t), \qquad (1)$$

где A, B, τ – постоянные, $\tau > 0$, f – заданная непрерывная функция на R.

Сразу возникает вопрос: какой должна быть начальная задача для уравнения (1)? Более того, каков минимальный набор начальных данных, которые должны быть заданы, чтобы уравнение (1) определяло x для $t \ge 0$?

Теорема [10]. *Если* φ *– заданная непрерывная функция на* $[-\tau, 0]$, *то существует единственная функция* $x(\varphi, f)$, *определенная на* $[-\tau, \infty)$, *которая совпадает с* φ *на* $[-\tau, 0]$ *и удовлетворяет уравнению (1) для* $t \ge 0$. *Причем иммет место формула Коши*

$$x(t) = \varphi(t), \quad t \in [-\tau, 0],$$

$$x(t) = e^{At}\varphi(0) + \int_0^t e^{A(t-s)}\left[Bx(s - \tau) + f(s)\right]ds, \quad t \ge 0.$$

Системы дифференциально-разностных уравнений запаздывающего типа имеют вид

$$\dot{z}(t) = Az(t) + Bz(t - \tau) + f(u,v), \qquad (2)$$

Начальным состоянием системы (2) является действительная функция

$$z(t)=\varphi(t), \qquad -\tau \le t \le 0, \tag{3}$$

$\varphi(t)$ непрерывная на $[-\tau, 0]$.

Состоянием системы (2) в момент t является кусок траектории $z^t(\cdot)=\{z(t+s), -\tau \le s \le 0\}$.

Теорема [10]. *Пусть $z(t)$ – непрерывное решение системы (1), удовлетворяющее начальному условию (3).*

Если $\varphi(.)\in C[-\tau,0]$, $f\in[0,+\infty)$, то при $t\ge 0$ имеет место формула Коши

$$z(t)=\varphi(0)K(t)+B\int_{-\tau}^{0}\varphi(s)K(t-s-\tau)\,ds+\int_{0}^{t}f(s)K(t-s)\,ds,$$

где $K(t)$ – функциональная матрица системы (2), обладающая следующими свойствами:

a) $K(t)=0,\ t<0$;

b) $K(0)=E$, E – единичная матрица;

c) *$K(t)$ непрерывна на $[0,+\infty)$;*

d) *$K(t)$ удовлетворяет уравнению $\dot K(t)=AK(t)+BK(t-\tau)$ при $t>0$.*

Пример одной дифференциально-разностной системы уравнений.

Рассмотрим дифференциально-разностную систему

$$\begin{aligned}\dot z_1(t)&=z_2(t-\tau)-v, && z_1\in\mathbf{R}^n,\ n\ge 2,\\ \dot z_2(t)&=u, && z_2\in\mathbf{R}^n,\end{aligned} \tag{4}$$

где $\|u\|\le\rho$, $\rho>0$, $\|v\|\le\sigma$, $\sigma>0$.

Запишем систему (4) в более общем виде

$$\dot z(t)=Bz(t-\tau)+u(t)-v(t), \text{ где } B=\begin{pmatrix}0 & E_n\\ 0 & 0\end{pmatrix};$$

области управлений - $U=\left\{\begin{pmatrix}0\\ u\end{pmatrix},\ u\in\mathbf{R}^n:\ \ \|u\|\le\rho\right\}$, $\quad V=\left\{\begin{pmatrix}v\\ 0\end{pmatrix},\ v\in\mathbf{R}^n:\ \ \|v\|\le\sigma\right\}$.

Система (4) широко применяется в конфликтно-управляемых процессах, таких, как, например, задачах преследования или сближения (см. [11-14]). Выбирая свои управления в виде некоторых функций $u, v,$ игроки (преследователь и убегающий) действуют на процесс, преследую свою цель. Цель преследователя – вывести траекторию процесса на некоторое замкнутое множество за минимальное время, цель убегающего – отклониться от этого, или, если это невозможно, максимально отклонить время встречи.

Определим функциональную матрицу $K(t)$:

a) $K(t)=0,\ t<0$;

b) $K(0)=E_{2n}$;

c) функция $K(t)$ непрерывна на $[0,+\infty)$;

d) $K(t)$ удовлетворяет уравнению

$$[\dot K(t)]=[B]\cdot[K(t-\tau)] \text{ при } t>0. \tag{5}$$

Уравнение (5) запишем в виде

$$\begin{pmatrix} \dot K_{11}(t) & \dot K_{12}(t) \\ \dot K_{21}(t) & \dot K_{22}(t) \end{pmatrix} \otimes E_n = \begin{pmatrix} 0 & E_n \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} K_{11}(t-\tau) & K_{12}(t-\tau) \\ K_{21}(t-\tau) & K_{22}(t-\tau) \end{pmatrix} \otimes E_n = \begin{pmatrix} K_{21}(t-\tau) & K_{22}(t-\tau) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes E_n ,$$

где $K_{ij}(\cdot)$ – числовые функции.

Отсюда с учётом условия b) получим:

$$\begin{cases} \dot K_{11}(t) = K_{21}(t-\tau), \\ \dot K_{12}(t) = K_{22}(t-\tau), \\ \dot K_{21}(t) = 0, \\ \dot K_{22}(t) = 0, \\ K_{12}(0) = K_{21}(0) = 0, \\ K_{11}(0) = K_{22}(0) = 1. \end{cases}$$

Решением системы будет:

$K_{11}(t) = 1, \quad K_{12}(t) = t, \quad K_{21}(t) = 0, \quad K_{22}(t) = 1.$

С учётом условия а) получим функциональную матрицу

$$[K(t)] = \begin{pmatrix} K_{11}(t) & K_{12}(t) \\ 0 & K_{22}(t) \end{pmatrix} \otimes E_n ,$$

где $K_{11}(t) = K_{22}(t) = \begin{cases} 1, & t \ge 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases} \quad K_{12}(t) = \begin{cases} t, & t \ge 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$

Таким образом, при $t \ge 0$ искомая функциональная матрица имеет вид

$$[K(t)] = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes E_n .$$

В играх преследования все больше применяют системы дифференциально-разностных систем. Такие системы более адекватно описывают процесс, поскольку они учитывают не только моментальные данные, но и предысторию процесса.

Заключение и выводы.

Были рассмотрены примеры применения дифференциально-разностных уравнений и систем в задачах моделирования, когда моделируемое явление содержит элемент задержки, в результате действия которого возникает зависимость скорости эволюции от предыдущих состояний. Показано, что наличие запаздывания приводит как количественным, так и к качественным изменениям постановок задач и свойств их решений.

Было получено решение для одной дифференциально-разностной системы, которая используется в конфликно-управляемых процессах.

Литература:

1. Wu J. Theory and Application of Partial Functional Differential Equations. – Springer-Verlag New York, Inc. 1996. – 429 p.

2. Kuang Y. Delay Differential Equations with Applications in Population Dynamics. – Academic Press, Boston, 1993. – 160 p.

3. Hale J.K. Partial neutral functiona-differential equations // Rev. Roumaine Math. Pures Appl. –1994. – Vol. 1. – P. 339-344.

4. Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматулина Л.Ф. Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. – М., Наука, 1991. – 277 с.

5. Беллман Р. Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений. –М., Изд-во иностранной лит-ры, 1954. – 216 с.

6. Колмановский В.Б., Носов В.Р. Устойчивость и периодические режимы

регулируемых систем с последействием. – М., Наука, 1981. – 448 с.
7. Красовский Н.Н. Теория управления движением. Линейные системы. – М., Наука, 1968. –475 с.
8. Громов Ю.Ю. Системы автоматического управления с запаздыванием: Учеб. пособие / Ю. Ю. Громов, Н. А. Земской, А. В. Лагутин, О. Г. Иванова, В. М. Тютюнник. – Тамбов: Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2007. –76 с.
9. Солодов А.В., Солодова Е.А. Системы с переменным запаздыванием. М.: Наука, 1980. 384 с.
10. Беллман Р., Кук К. Дифференциально-разностные уравнения. – М., Мир, 1967. – 548 с.
11. Барановська Л.В. Модифікація методу розв'язуючих функцій для диференціально-різницевих ігор зближення / Л. В. Барановська // Наукові вісті НТУУ "КПІ". – 2012. – № 4. – С. 14–20.
12. Барановская Л.В. Метод разрешающих функций для одного класса задач преследования // Восточно-европейский журнал передовых технологий. – № 2/4 (74), 2015. – С. 4-8.
13. G.G.Baranovskaya, L.V.Baranovskaya. Group Pursuit in Quasilinear Differential-Difference Games // Journal of Automation and Information Sciences, 29(1), 1997. – PP. 55-62.
14. Baranovska L.V. Method of resolving functions for the differential-difference pursuit game for different-inertia objects / Advance in Dynamical Systems and Control. – Springer, Vol. 69 of the series Studies in Systems, Decision and Control, pp. 159-176.

Статья отправлена: 15.12.2016 г.

ЦИТ: 416-055
DOI: 10.21893/2410-6720-2016-45-1-055
УДК 334.761

Ларкина Н.Г., Омаров М.О.

МАРКЕТИНГ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ КАК ИНСТРУМЕНТ РАЗВИТИЯ ОТНОШЕНИЙ С ПОТРЕБИТЕЛЯМИ

Южный федеральный университет,
Ростов-на-Дону, Большая Садовая, 105/42, 344006

Larkina N.G., Omarov M.O.

INTERACTION MARKETING AS INSTRUMENT OF DEVELOPMENT OF THE RELATIONS WITH CONSUMERS

Southern federal university
Rostov-on-Don, B. Sadovaya 105/42, 344006

В данной работе рассматривается необходимость внедрения концепции маркетинга взаимодействия как ключевого элемента при выстраивании отношений с клиентами.

Ключевые слова: маркетинг взаимодействия, управление взаимоотношениями с клиентами,CRM-системы

In this work describe introduction of the concept of marketing interaction as key