

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

**НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»
ІМЕНІ ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО
ФІЗИКО-ТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ**

**В.В. ЗАГОРОДНІЙ
С.В. БЕХ**

**ЗАДАЧІ З ЗАГАЛЬНОЇ ФІЗИКИ
МЕХАНІКА**

Рекомендовано Вченою радою
Фізико-технічного інституту НТУУ «КПІ»
як посібник для студентів, які навчаються
за спеціальністю 105
«Прикладна фізика та наноматеріали»

КИЇВ
НТУУ «КПІ»

2017

ББК 22.2
УДК 531/534

Рекомендовано до видання Вченою радою ФТІ НТУУ «КПІ»
(протокол № 5/2017 від 10 травня 2017 року)

Рецензент: С.М. Пономаренко, к. ф.-м. н, доцент.

Загородній В.В., Бех С.В.
Задачі з загальної фізики. Механіка

Відповідно до навчальної програми наведено понад 400 задач з курсу «Загальна фізика. Механіка», які торкаються всіх тем. Кожний розділ присвячений окремій темі та містить теоретичний вступ і задачі. Розв'язування більшості запропонованих задач потребує поглибленого засвоєння теоретичного курсу. У «Додатку» наведені задачі, які були запропоновані на письмових іспитах останніх років студентам-фізикам. Частина задач є оригінальними. Посібник може бути використаний для роботи на практичних заняттях, виконання домашніх завдань і індивідуальних розрахункових завдань.

Для студентів Фізико-технічного інституту напрямку підготовки і спеціальності «Прикладна фізика та наноматеріали» та інших фізичних спеціальностей.

Відповідальний редактор

С.О. Воронов, д.т.н., професор

ББК 22.2
УДК 531/534

З М І С Т

ПЕРЕДМОВА	4
1 КІНЕМАТИКА	5
2 КІНЕМАТИКА СПЕЦІАЛЬНОЇ ТЕОРІЇ ВІДНОСНОСТІ	22
3 ДИНАМІКА ТОЧКИ І СИСТЕМИ ТОЧОК ЗАКОНИ НЬЮТОНА	30
4 ЗАКОНИ ЗБЕРЕЖЕННЯ ІМПУЛЬСУ	47
5 РУХ ТІЛ ЗІ ЗМІННОЮ МАСОЮ	56
6 РЕЛЯТИВІСТСЬКА ДИНАМІКА ТОЧКИ	69
7 РОБОТА І ЕНЕРГІЯ. ЗАКОНИ ЗБЕРЕЖЕННЯ	72
8 РЕЛЯТИВІСТСЬКІ ЕНЕРГІЯ І ІМПУЛЬС	89
9 РУХ ТІЛ У ПОЛІ ЦЕНТРАЛЬНИХ СИЛ ЗАКОНИ КЕПЛЕРА	97
10 НЕІНЕРЦІАЛЬНІ СИСТЕМИ ВІДЛІКУ	106
11 ДИНАМІКА ТВЕРДОГО ТІЛА	114
12 КОЛИВАЛЬНИЙ РУХ	126
ЛІТЕРАТУРА	138
ДОДАТОК 1 ЕКЗАМЕНАЦІЙНІ ЗАДАЧІ ПОПЕРЕДНІХ РОКІВ	140
ДОДАТОК 2 НЕОБХІДНІ ВІДОМОСТІ З МАТЕМАТИКИ	196
1 Вектори, дії з векторами	196
2 Диференціювання скалярних і векторних функцій	203
3 Інтегрування елементарних функцій	206
4 Прості диференціальні рівняння і методи їх розв'язування..	209
5 Задачі	211

ПЕРЕДМОВА

Знання законів фізики передбачає вміння не тільки сформулювати ці закони, але і застосовувати їх в конкретних випадках під час розв'язування задач. Розв'язування задач – важлива складова частина процесу навчання. Лекції дають лише загальні напрямки теоретичного опису якогось фізичного явища, а конкретні задачі наповнюють явища певним фізичним змістом, наближують його до експерименту. Проте, для розв'язування задач недостатньо тільки формального знання законів фізики. Головне, що сприяє успіху (крім знання теорії) під час процесу отримання рішення – це здатність до аналітичного мислення.

Запропонований збірник задач має мету навчити студентів-першкурсників застосовувати закони механіки для розв'язування конкретних задач. Він складається із задач, які були запропоновані протягом останніх років на семінарських заняттях з механіки, під час проведення контрольних та самостійних робіт, на письмових екзаменах та як індивідуальні розрахункові завдання студентам-фізикам в Фізико-технічному інституті КПІ. Частина задач є оригінальними. Збірник складається з окремих розділів, кожний з яких присвячений відповідній лекційній темі і супроводжується теоретичною частиною. Рівень задач відповідає тим вимогам, які пред'являються до студентів-фізиків ФТІ і є достатнім для надійного засвоєння лекційного курсу. Разом із звичайними задачами майже кожний розділ містить задачі підвищеної складності. Такі задачі помічені зіркою (*). Задачник охоплює всі лекційні теми від кінематики до коливальних рухів і разом містить 12 розділів. Для студентів фізичних та фізико-технічних напрямків підготовки, зокрема, напряму підготовки «Прикладна фізика та наноматеріали».

1 КІНЕМАТИКА

Кінематика – розділ механіки, який описує рух тіл без з'ясування причин, що його викликають. В класичній механіці Ньютона просторові і часові координати, необхідні для опису руху тіла, розглядають незалежно один від одного. Простір є 3-вимірним Евклідовим, час – абсолютним, тобто таким, що плине однаково в усіх точках простору.

Для опису руху використовують модель матеріальної точки (частинки). *Матеріальна точка* – це тіло, розмірами якого можна нехтувати порівняно з тими відстанями, на які тіло може переміщуватись під час свого руху. В геометричному сенсі матеріальна точка еквівалентна математичній точці: вона не має внутрішньої структури, форми і розмірів. Завдання кінематики полягає в тому, щоб повністю описати рух точки, тобто визначити її положення, швидкість, прискорення і інші характеристики руху в будь-який момент часу. Описати рух точки – означає задати спосіб, що дає можливість визначити її положення відносно вибраної системи відліку у будь-який момент часу.

Відомі три основні способи завдання руху: природний, координатний, векторний. В природному способі задають закон руху точки уздовж траєкторії у вигляді функції $s = f(t)$. В координатному способі закон руху – це залежність вибраних координат рухомої точки від часу $x = x(t)$; $y = y(t)$; $z = z(t)$. У векторному способі положення точки задають за допомогою радіус-вектора, проведеного в цю точку з початку відліку. Закон руху представляють у вигляді $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$. Для рішення конкретних задач використовують зв'язок з координатним способом опису. В декартовій системі координат будь-який вектор можна задати його проєкціями на осі координат, які співпадають з його координатами

$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$, де $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ – проєкції радіус-вектора $\mathbf{r}(t)$ на осі x, y, z в момент часу t ; $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ – одиничні орти (вектори), напрямком яких співпадає з додатним напрямком уздовж координатних осей.

Вектор переміщення $\Delta\mathbf{r}$ характеризує зміну положення точки за певний проміжок часу: $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t) = \Delta x\mathbf{i} + \Delta y\mathbf{j} + \Delta z\mathbf{k}$.

Швидкість. Відношення переміщення матеріальної точки $\Delta\mathbf{r}$ до відповідного інтервалу часу Δt є **величина середньої швидкості** матеріальної точки за проміжок часу $t, t + \Delta t$

$$\mathbf{v}_{\text{сеп}}(t, t + \Delta t) = \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\mathbf{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\mathbf{j} + \frac{\Delta z}{\Delta t}\mathbf{k}$$

Миттєва швидкість точки у конкретний момент часу t – це векторна величина, яка дорівнює першій похідній від радіус-вектора матеріальної точки за часом:

$$\mathbf{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k}$$

Вектор $\mathbf{v}(t)$ у будь-який момент часу спрямований по дотичній до траєкторії руху матеріальної точки.

Оскільки $\frac{ds}{dt} = v$, то, знаючи початкове положення точки і залежність швидкості від часу, можна знайти координату точки $s(t)$ у будь-який момент часу t :

$$s(t) = s(0) + \int_0^t v(t) dt$$

де $s(0)$ – координата матеріальної точки в початковий момент часу $t = 0$.

Прискорення. Прискоренням називають швидкість зміни швидкості. **Середнє прискорення** матеріальної точки за проміжок часу $t, t + \Delta t$ є величина:

$$\mathbf{a}_{\text{сеп}}(t, t + \Delta t) = \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t}$$

Миттєве прискорення точки в момент часу t визначають як величину, що дорівнює першій похідній від вектора швидкості або другій похідній від радіус-вектора точки за часом:

$$\mathbf{a}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d^2 x}{dt^2} \mathbf{i} + \frac{d^2 y}{dt^2} \mathbf{j} + \frac{d^2 z}{dt^2} \mathbf{k} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}$$

Під час руху по криволінійній траєкторії миттєва швидкість точки може змінюватись як за величиною, так і за напрямом, і може бути представлена у вигляді $\mathbf{v} = v\boldsymbol{\tau}$, де v – величина швидкості, її модуль, $v = |\mathbf{v}|$, а $\boldsymbol{\tau}$ – одиничний вектор, спрямований по дотичній до траєкторії у бік руху, $\boldsymbol{\tau} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}$. Для отримання вектора прискорення необхідно обчислити похідну

за часом від вектора швидкості $\mathbf{v} = v\boldsymbol{\tau}$ за правилами обчислення похідної від складної функції

$$\mathbf{a} = \frac{dv}{dt} \boldsymbol{\tau} + v \frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt}$$

Перший доданок – вектор $\frac{dv}{dt} \boldsymbol{\tau}$, спрямований по дотичній до траєкторії.

Це **тангенціальна (дотична) складова прискорення** точки, яка відповідає за зміну величини швидкості. Другий доданок вектора прискорення \mathbf{a} має вигляд:

$$v \frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt} = v \cdot \frac{v}{R} \mathbf{n} = \frac{v^2}{R} \mathbf{n}$$

Ця складова прискорення спрямована по нормалі \mathbf{n} до центру кривизни траєкторії в даній точці і відповідає за зміну вектора швидкості \mathbf{v} за напрямком. Остаточно для вектора прискорення \mathbf{a} отримуємо:

$$\mathbf{a} = \frac{dv}{dt} \boldsymbol{\tau} + \frac{v^2}{R} \mathbf{n} = a_\tau \boldsymbol{\tau} + a_n \mathbf{n} = \mathbf{a}_\tau + \mathbf{a}_n$$

де a_τ, a_n – проєкції прискорення \mathbf{a} на напрямки дотичної і нормалі до траєкторії руху відповідно. Їх називають **тангенціальним (дотичним) прискоренням** a_τ і **нормальним прискоренням** a_n матеріальної точки. Оскільки \mathbf{a}_τ перпендикулярне \mathbf{a}_n , модуль повного прискорення дорівнює:

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{R}\right)^2}$$

При русі матеріальної точки по колу з постійним радіусом R рух розглядають в площині (x, y) , поєднавши початок координат з центром кола. У цьому випадку рух точки характеризують вектором кутової швидкості обертального руху і вектором кутового прискорення відповідно:

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{d\varphi}{dt}, \quad \boldsymbol{\beta} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$$

де $d\varphi$ – **вектор елементарного кутового переміщення, перпендикулярний до площині руху**. Напрямок цього вектора вибирають так, щоб спостерігач, дивлячись з кінця вектора $d\varphi$, бачив, що круговий рух точки здійснюється проти годинникової стрілки, тобто за правилом правого гвинта. Напрямки $\boldsymbol{\omega}$ і $d\varphi$ співпадають. Кутове прискорення як вектор спрямований уздовж осі кругового руху. Водночас напрямок $\boldsymbol{\beta}$ співпадає з напрямком $\boldsymbol{\omega}$ для $\omega > 0$, і протилежний для $\omega < 0$. Для вектора лінійної швидкості \mathbf{v} отримуємо:

$$\mathbf{v} = [\boldsymbol{\omega} \mathbf{R}]$$

Вектор повного прискорення матеріальної точки під час руху по колу є $\mathbf{a} = \mathbf{a}_n + \mathbf{a}_\tau$, де $\mathbf{a}_\tau = [\boldsymbol{\beta} \mathbf{R}]$, $\mathbf{a}_n = [\boldsymbol{\omega} \mathbf{v}]$. Для опису **обертального руху твердого тіла** навколо нерухомої осі **використовують кутові**

кінематичні характеристики, однакові для всіх точок твердого тіла. Лінійні характеристики руху пов'язані з кутовими.

1.1. Точка описує коло радіусом R . Прискорення точки утворює з її швидкістю сталий кут α ($\alpha < \pi/2$). Знайти проміжок часу, протягом якого швидкість точки збільшиться в n разів, якщо в початковий момент часу вона дорівнювала v_0 .

$$\left(t = \frac{n-1}{nv_0} R \cdot \operatorname{tg} \alpha \right)$$

1.2. Електрон в постійному магнітному полі рухається уздовж гвинтової лінії, рівняння якої має вигляд: $x = b \cos \omega t$, $y = b \sin \omega t$, $z = ct$, де b , c та ω – додатні сталі. Знайти тангенціальне a_τ , нормальне a_n прискорення та радіус кривизни R траєкторії.

$$\left(a_\tau = 0; a_n = b\omega^2; R = \frac{b^2\omega^2 + c^2}{b\omega^2} \right)$$

1.3. Точка рухається в площині (xoy) за законом $x = A \sin \omega t$, $y = A(1 - \cos \omega t)$, де A і ω – додатні сталі. Знайти шлях s , що проходить точка за час τ , а також кут між швидкістю і прискоренням.

$$\left(s = A\omega\tau; \cos(\widehat{v,a}) = 0 \right)$$

1.4. Точка описує коло радіусом R . Прискорення точки утворює з її швидкістю сталий кут α ($\alpha < \pi/2$). За проміжок часу t швидкість точки збільшується. Знайти її кінцеву швидкість, якщо в початковий момент вона дорівнювала v_0 .

$$\left(V = \frac{v_0 R}{R - v_0 t \cdot \operatorname{ctg} \alpha} \right)$$

1.5. Частинка рухається в площині (xoy) зі швидкістю $\mathbf{v}(x,y) = ax\mathbf{i} - by\mathbf{j}$, де $a, b > 0$ – додатні сталі, \mathbf{i}, \mathbf{j} – орти осей координат. Знайти рівняння траєкторії, модуль швидкості і прискорення в залежності від часу. Вважати, що при $t = 0$ частинка знаходилась в точці (x_0, y_0) .

$$\left(y = y_0 \left(\frac{x}{x_0} \right)^{\frac{b}{a}}; v = e^t \sqrt{a^2 x_0^2 e^a + b^2 y_0^2 e^{-b}}; a = e^t \sqrt{a^4 x_0^2 e^a + b^4 y_0^2 e^{-b}} \right)$$

1.6. Матеріальна точка рухається так, що її радіус-вектор залежить від часу за законом: $\mathbf{r} = 2t\mathbf{i} + 3t^2\mathbf{j}$ [м]. Знайти рівняння траєкторії $y = f(x)$, а також залежність від часу нормального, тангенціального, повного прискорення, радіуса кривизни траєкторії, кута між векторами швидкості та повного прискорення.

$$\left(y = \frac{3}{4}x^2; a_\tau = \frac{18t}{\sqrt{1+9t^2}}; a_n = \frac{6}{\sqrt{1+9t^2}}; a = 6; R = \frac{2}{3}(1+9t^2)^{\frac{3}{2}}; \cos \varphi = \frac{3t}{\sqrt{1+9t^2}} \right)$$

1.7. Матеріальна точка рухається так, що її радіус-вектор залежить від часу за законом: $\mathbf{r} = 3t^2\mathbf{i} + 2t\mathbf{j}$ [м]. Знайти радіус кривизни траєкторії в момент часу τ .

$$\left(R = \frac{2}{3}(9\tau^2 + 1)^{\frac{3}{2}} \right)$$

1.8. Матеріальна точка рухається в площині (xoy) таким чином, що її координати залежать від часу за законом: $x = \alpha_1 + \beta_1 t + \gamma_1 t^2$; $y = \alpha_2 + \beta_2 t + \gamma_2 t^2$, де (α, β, γ) – додатні сталі. Написати вираз для вектора прискорення точки в момент часу τ та кут між напрямком швидкості і прискорення.

$$\left(\mathbf{a} = 2\gamma_1\mathbf{i} + 2\gamma_2\mathbf{j}; \cos(\widehat{\mathbf{v}, \mathbf{a}}) = \frac{\gamma_1(\beta_1 + 2\gamma_1 t) + \gamma_2(\beta_2 + 2\gamma_2 t)}{\sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_2^2} \cdot \sqrt{(\beta_1 + 2\gamma_1 t)^2 + (\beta_2 + 2\gamma_2 t)^2}} \right)$$

1.9. Рух точки задається рівняннями: $x = \cos\left(\frac{t}{\tau}\right)$, $y = 2\cos\left(\frac{2t}{\tau}\right)$, де $\tau = 1$ сек. Знайти рівняння траєкторії, швидкість і прискорення точки в момент часу, коли вона перетинає вісь oy . Навести зображення траєкторії.

$$\left(y = 4x^2 - 2; v_x = \pm \frac{1}{\tau} m/c; a_y = 8 m/c^2 \right).$$

1.10. Рівняння руху точки в залежності від часу має вигляд: $x = 2(e^t + e^{-t})$, $y = 2(e^t - e^{-t})$. Знайти рівняння траєкторії, швидкість і прискорення точки в момент часу $t = 1$ с.

$$\left(x^2 - y^2 = 16; a = v = 2\sqrt{2}\sqrt{e^{2t} + e^{-2t}} \right)$$

1.11. Задано рівняння руху точки: $x = \sqrt{3}\cos t - \sin t$; $y = \cos t - \sqrt{3}\sin t$. Знайти тангенціальне, нормальне прискорення точки, а також радіус кривизни траєкторії в залежності від часу та в момент часу $t = 0.5\pi$.

$$\left(a_\tau = \frac{2\sqrt{3}\cos 2t}{\sqrt{4 + 2\sqrt{3}\sin 2t}}; a_n = \frac{2}{\sqrt{4 + 2\sqrt{3}\sin 2t}}; R = \frac{(4 + 2\sqrt{3}\sin 2t)^{\frac{3}{2}}}{2} \right)$$

1.12. Точка описує коло радіусом R . Прискорення точки утворює з її швидкістю кут α ($\alpha < \pi/2$). Знайти, як змінюється від часу швидкість, тангенціальне і повне прискорення точки. Вважати, що в початковий момент часу швидкість точки дорівнювала v_0 .

$$\left(\begin{array}{l} V = \frac{v_0 R}{R - v_0 t \cdot \operatorname{ctg} \alpha}; a_\tau = \frac{v_0^2 R \cdot \operatorname{ctg} \alpha}{(R - v_0 t \cdot \operatorname{ctg} \alpha)^2}; \\ a_n = \frac{v_0^2 R}{(R - v_0 t \cdot \operatorname{ctg} \alpha)^2}; a = \frac{v_0 R}{(R - v_0 t \cdot \operatorname{ctg} \alpha)^2} \cdot \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}; \end{array} \right)$$

1.13. Точка описує коло радіусом R . Прискорення точки утворює з її швидкістю кут α ($\alpha < \pi/2$). Знайти, як змінюється від часу швидкість,

тангенціальне і повне прискорення точки, а також шлях, пройдений точкою, якщо в початковій момент часу швидкість точки дорівнювала v_0 .

$$\left(\begin{array}{l} V = \frac{v_0 R}{R - v_0 t \cdot \operatorname{ctg} \alpha}; a_\tau = \frac{v_0^2 R \cdot \operatorname{ctg} \alpha}{(R - v_0 t \cdot \operatorname{ctg} \alpha)^2}; a_n = \frac{v_0^2 R}{(R - v_0 t \cdot \operatorname{ctg} \alpha)^2}; \\ a = \frac{v_0 R}{(R - v_0 t \cdot \operatorname{ctg} \alpha)^2} \cdot \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}; S = R \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot \ln \frac{R}{R - v_0 t \cdot \operatorname{ctg} \alpha} \end{array} \right)$$

1.14. Матеріально точка рухається за законом $x = 2t$, $y = t^2$. Знайти радіус кривизни траєкторії в залежності від часу на початку руху (при $t = 0$) і через 2 сек.

$$\left(R = 2(1 + t^2)^{\frac{3}{2}}; 2; 10\sqrt{5} \right)$$

1.15. В полярній системі координат на площині закон руху точки задається у вигляді $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$; $\varphi = \varphi(t)$, де $\mathbf{r}(t)$ – радіус-вектор, $\varphi(t)$ – кут повороту від горизонтального напрямку. Вводячи одиничні вектори $\mathbf{e}_r(t)$, $\mathbf{e}_\varphi(t)$, які направлені у бік зростання координат r і φ , перпендикулярні один одному і змінні за напрямком, вивести співвідношення для вектора швидкості $\mathbf{v}(t)$ точки М.

$$\left(\mathbf{v}(t) = \dot{r}(t)\mathbf{e}_r + r(t)\dot{\varphi}(t)\mathbf{e}_\varphi \right)$$

1.16. Від колеса автомобіля радіусом R , який рухається зі швидкістю v , відскакують каміння бруду ($v^2 \geq gR$). Знайти максимальну висоту, на яку вони закидаються.

$$\left(h = R + \frac{v^2}{2g} + \frac{gR^2}{2v^2} \right)$$

1.17. Точка починає рух із початку полярній системі координат так, що компоненти її швидкості змінюються з часом за законом: $v_r = ae^{kt}$, $v_\varphi = br$, де a , b , k – додатні сталі. Знайти $r(t)$, $\varphi(t)$ і траєкторію руху точки $r(\varphi)$.

$$\left(r(t) = \frac{a}{k}(e^{kt} - 1); \varphi(t) = bt; r(\varphi) = \frac{a}{k} \left(e^{\frac{k\varphi}{b}} - 1 \right) \right)$$

1.18. Сферичні координати двох векторів – $\mathbf{r}_1 = (r_1, \theta_1, \varphi_1)$ і $\mathbf{r}_2 = (r_2, \theta_2, \varphi_2)$.

Знайти кут між векторами.

$$\left(\cos(\widehat{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2}) = \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \cos \theta_1 \cos \theta_2 \right)$$

1.19*. Кулька падає з висоти h без початкової швидкості. Опір повітря зменшує прискорення кульки в порівнянні із прискоренням вільного падіння g на величину βv^2 , де β – стала. Знайти швидкість кульки перед ударом.

$$\left(v = \sqrt{\frac{g}{\beta}(1 - e^{-2\beta h})} \right)$$

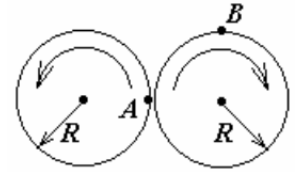
1.20. Рівняння руху точки є $x = 1 - 2\cos^2 \frac{\pi}{4}t$, $y = 6 - 2\cos^2 \frac{\pi}{4}t$. Знайти рівняння траєкторії. Визначити початкове положення точки на траєкторії. Вказати моменти часу, коли точка перетинає осі координат. Знайти закон руху точки по траєкторії у вигляді $s = s(t)$, приймаючи за початок відліку відстаней початкове положення точки.

$$\left(y = x + 5; M_0 = (-1, 4); t_y = 1 \pm 8\pi n; s(t) = \sqrt{2} - \sqrt{2} \cos \frac{\pi}{2}t \right)$$

1.21. Під час вільного падіння стержня АВ його середина С рухається донизу з постійним прискоренням g , а стержень обертається у вертикальній площині навколо центру С із постійною кутовою швидкістю $\omega = \frac{1}{6}\pi$ 1/с. Довжина стержня L . В початковий момент часу стержень горизонтальний. Знайти лінійну швидкість його кінців А, В в момент часу $t = 2c$.

$$\left(\mathbf{V}_{A,\text{лін}} = \mathbf{V}_{B,\text{лін}} = \frac{[\boldsymbol{\omega}\mathbf{L}]}{2}; |\mathbf{V}_{A,\text{лін}}| = \sqrt{V_C^2 + V_{A,\text{лін}}^2 + 2V_C V_{A,\text{лін}} \cos 120^\circ} \right)$$

1.22. Дві точки А і В рухаються рівномірно по двох однакових колах, які стикаються і мають радіус R . Початкове положення точок і напрямки руху показані на рис. Знайти рівняння руху однієї точки відносно



іншої. (Вказівка: ввести систему відліку з початком в точці дотику кіл, кут повороту точок $\varphi = \omega t$, де ω – кутова швидкість, та записати положення точок у довільний момент часу).

($x + y = 2R$ – рівняння прямої, де x і y – відносні координати точок)

1.23*. По стінці будинку втягують колоду довжиною L таким чином, що її верхній кінець рухається вертикально вгору із постійною швидкістю V , а нижній пересувається по землі. Знайти кутову швидкість і кутове прискорення як функцію часу для точки колоди, яка розташована на відстані $l < L$ від кінця, що знаходиться на землі.

$$\left(\dot{x}_l = \frac{V^2 t}{\sqrt{L^2 - V^2 t^2}} \left(\frac{l}{L} - 1 \right); \ddot{x}_l = \frac{V^2 L (l - L)}{(L^2 - V^2 t^2)^{3/2}}; \dot{y}_l = \frac{l}{L} V; \ddot{y}_l = 0 \right)$$

1.24. Знайти кутову швидкість, кутове прискорення і миттєву вісь обертання колеса трамвая на повороті. Колесо рухається без ковзання з постійною за модулем швидкістю V по рейці з радіусом закруглення R . Радіус колеса r .

$$\left(\omega_1 = \frac{V}{R}; \omega_2 = \frac{V}{r}; \omega = V \sqrt{\frac{1}{R^2} + \frac{1}{r^2}}; \beta = \dot{\omega} = \omega_1 \omega_2 = \frac{V^2}{rR}; r' = \frac{V}{\omega} \right)$$

1.25. Тіло кинули зі швидкістю v_0 під кутом α до горизонту. Знайдіть нормальне a_n і тангенціальне a_t прискорення тіла як функцію часу через τ секунд після початку руху. Опір повітря не враховувати.

1.26. Під яким кутом до горизонту необхідно кинути камінь зі швидкістю v_0 , щоб він потрапив у точку А, розташовану на висоті h і на відстані L від місця кидання.

$$\left(\operatorname{tg} \alpha = \frac{v_0^2}{gL} \left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{g^2 L^2}{v_0^4} - \frac{2gh}{v_0^2}} \right] \right)$$

1.27. Точка рухається за законом $x = \frac{\alpha(e^{\gamma t} + e^{-\gamma t})}{2}$, $y = \frac{\alpha(e^{\gamma t} - e^{-\gamma t})}{2}$, де α, γ – сталі. Знайти рівняння траєкторії і виразити швидкість і прискорення точки як функцію її радіус-вектора $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

$$(v = \gamma r; \dot{v} = \gamma^2 r; x^2 - y^2 = \alpha^2)$$

1.28. Точка рухається в площині (xoy) за законом: $x = a \sin \omega t$, $y = b(1 + \cos \omega t)$, де ω, a, b ($a > b$) – додатні сталі. Визначити: 1) рівняння траєкторії; 2) прискорення як функцію радіус-вектора; 3) кут між векторами швидкості і прискоренням як функцію координат.

$$\left(\frac{x^2}{a^2} + \left(\frac{y}{b} - 1 \right)^2; a = \omega^2 \sqrt{x^2 + (y-b)^2}; \mathbf{a} = -\omega^2 \mathbf{r} + \omega^2 b \mathbf{j} \right)$$

$$\cos(\widehat{\mathbf{v}, \mathbf{a}}) = \frac{x(y-b)(b^2 - a^2)}{\sqrt{x^2 + (y-b)^2} \cdot \sqrt{b^4 x^2 + a^4 (y-b)^2}}$$

1.29. Матеріальна точка рухається по колу радіусом R зі швидкістю $v = v_0 \exp(-S/R)$, де S – пройдений шлях; v_0 – додатна стала. Знайти: 1) залежність шляху від часу; 2) кут φ між векторами швидкості і прискоренням в будь-який момент часу; 3) величину прискорення як функцію швидкості.

$$\left(S = R \cdot \ln \left(\frac{v_0 t}{R} + 1 \right); \operatorname{tg} \varphi = -1; a = \frac{v^2}{R} \sqrt{2} \right)$$

1.30. Точка рухається по колу радіусом R зі швидкістю $v = v_0(1 - S/R)$, де v_0 – додатна стала, S – пройдений шлях. Знайти: 1) залежність шляху від часу; 2) кут φ між векторами швидкості і прискоренням в будь-який момент часу.

$$\left(S = R \left(1 - \exp \left(-\frac{v_0 t}{R} \right) \right); \operatorname{tg} \varphi = -\exp \left(-\frac{v_0 t}{R} \right) \right)$$

1.31. Тверде тіло обертається навколо нерухомої осі таким чином, що кутова швидкість змінюється за законом $\omega = \omega_0(1 + a\varphi)$, де φ – кут повороту, ω_0, a – додатні сталі. В початковий момент часу при $t_0 = 0$ кут $\varphi = 0$. Знайти залежність від часу: 1) кута повороту; 2) кутової швидкості та кутового прискорення.

$$\left(\varphi = \frac{1}{a} (e^{a\omega_0 t} - 1); \omega(t) = \omega_0 e^{a\omega_0 t}; \beta = a\omega_0^2 e^{a\omega_0 t} \right)$$

1.32. Тверде тіло обертається навколо нерухомої осі таким чином, що його кутова швидкість змінюється за законом $\omega = \omega_0 b(\varphi - \varphi_0)$, де φ – кут повороту, ω_0, b – додатні сталі. В початковий момент часу при $t_0 = 0$ кут $\varphi = \varphi_0$. Знайти залежність від часу: 1) кута повороту; 2) кутової швидкості.

$$\left(\varphi = \varphi_0 - \exp(1 - \omega_0 b t); \beta = \omega_0^2 b^2 (\varphi - \varphi_0) \right)$$

1.33*. Тверде тіло обертається навколо нерухомої осі таким чином, що кутова швидкість змінюється за законом $\omega = 0.5 \cdot \omega_0(1 + \cos \varphi)$, де φ – кут повороту, ω_0 – додатна стала. В початковий момент часу при $t_0 = 0$ вважати, що кут $\varphi = 0$. Знайти залежність від часу: 1) кута повороту; 2) кутової швидкості. (Вказівка: при інтегруванні виконати підстановку

$$\cos \varphi = \frac{1 - \operatorname{tg}^2(\varphi/2)}{1 + \operatorname{tg}^2(\varphi/2)} = \frac{1 - y^2}{1 + y^2}$$

$$\left(\varphi = 2 \operatorname{arctg} \frac{\omega_0 t}{2}; \omega(t) = \frac{4\omega_0}{4 + \omega_0^2 t^2} \right)$$

1.34. Тверде тіло обертається навколо нерухомої осі таким чином, що кутова швидкість змінюється за законом $\omega = \omega_0(a\varphi - b\varphi_0)$, де φ – кут повороту, ω_0, a, b – додатні сталі. В початковий момент часу при $t_0 = 0$ вважати, що кут $\varphi = \varphi_0$. Знайти залежність від часу: 1) кута повороту; 2) кутової швидкості.

$$\left(\varphi = \frac{1}{a} \varphi_0 [b(1 - \exp(a\omega_0 t)) + a \exp(a\omega_0 t)]; \beta = \varphi_0 \omega_0^2 a(1 - b) \exp(a\omega_0 t) \right)$$

1.35. Тверде тіло обертається навколо нерухомої осі таким чином, що кутове прискорення змінюється за законом $\beta = \beta_0(a + b\omega)$, де ω – кутова швидкість, a, b, β_0 – додатні сталі. В початковий момент часу при $t_0 = 0$ $\omega = \omega_0$. Знайти залежність від часу: 1) кута повороту; 2) кутової швидкості, кутового прискорення.

$$\left(\omega = \frac{b}{a} (e^{a\beta_0 t} - 1) + \omega_0 e^{a\beta_0 t}; \beta = \beta_0 e^{a\beta_0 t} \cdot (b + a\omega_0); \right. \\ \left. \varphi = \frac{1}{a\beta_0} (e^{a\beta_0 t} - 1) \left(\frac{b}{a} + \omega_0 \right) - \frac{b}{a^2 \beta_0} \right)$$

1.36. Залежність модулю швидкості v точки від пройденого нею шляху s визначається функцією $v(s) = v_0 - bs$, де v_0 – додатна стала. Знайти залежність 1) пройденого шляху s від часу t ; 2) швидкості v від часу t ; 3) наближений вираз для $s(t)$ і $v(t)$, справедливий при $t = 1/b$.

$$\left(s = \frac{v_0}{b} (1 - e^{-bt}); v = v_0 e^{-bt}; s \approx v_0 t; v \approx v_0 (1 - bt) \right)$$

1.37. Залежність модулю прискорення a точки від швидкості v визначається функцією $a(v) = a_0 - bv$, де a_0, b – додатні сталі. Знайти: 1) залежність швидкості від часу; 2) пройденого шляху від часу.

$$\left(v = \frac{a_0}{b}(1 - e^{-bt}); s = \frac{a_0}{b}t + a_0 e^{-bt} \right)$$

1.38. Камінь кинули на схилі гори під кутом α до горизонту. Нахил гори до горизонту складає кут β . За яким законом змінюється з часом нормальна і тангенціальна проекції його повного прискорення, а також радіус кривизни траєкторії? Опором повітря знехтувати.

1.39. Точка рухається в площині (xoy) за законом $x = a \cos \omega t$, $y = b(1 + \sin \omega t)$, де ω , a , b ($a > b$) – додатні сталі. Визначити: 1) рівняння траєкторії; 2) прискорення як функцію координат і радіус-вектора \mathbf{r} ; 3) кут α між векторами швидкості і прискорення як функцію координат.

$$\left(\frac{x^2}{a^2} + \left(\frac{y}{b} - 1 \right)^2; a = \omega^2 \sqrt{x^2 + (y-b)^2}; \mathbf{a} = -\omega^2 \mathbf{r} + \omega^2 b \mathbf{j} \right)$$

$$\cos(\widehat{\mathbf{v}, \mathbf{a}}) = \frac{x(y-b)(a^2 - b^2)}{\sqrt{x^2 + (y-b)^2} \cdot \sqrt{b^4 x^2 + a^4 (y-b)^2}}$$

1.40. Необхідно з Землі потрапити каменем в ціль з відстані S . Ціль розташована на висоті h . При якій найменшій початковій швидкості каменя це можливо?

$$\left(v_0 = \sqrt{g \left(h + \sqrt{h^2 + S^2} \right)} \right)$$

1.41. Віз котиться по горизонтальній мокрій дорозі з постійною швидкістю v_0 . На яку максимальну висоту піднімуться краплі води, які відриваються від колесив? Вважати, що радіус колеса дорівнює R .

$$\left(h_{\max} = \frac{gR^2}{v_0^2} + \frac{v_0^2}{2g}; \sin \varphi = \frac{gR}{v_0^2} \right)$$

1.42. З літака, що летить горизонтально із швидкістю v_0 на висоті H , скидають вантаж. На якій висоті швидкість вантажу направлена під кутом

α до горизонту? Який радіус кривизни траєкторії руху вантажу в цій точці? Опором повітря знехтувати.

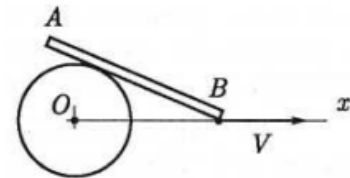
$$\left(h = H - \frac{v_0^2 \operatorname{tg}^2 \alpha}{2g}; R = \frac{v_0^2 (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)^{3/2}}{g} \right)$$

1.43. З якою найменшою швидкістю і під яким кутом до горизонту треба кинути м'яч з відстані S від будинку висотою h , щоб він потрапив на дах цього будинку? Опором повітря знехтувати.

$$\left(\operatorname{tg} \alpha = \frac{h \pm \sqrt{h^2 + S^2}}{S}; v_0 = \sqrt{g (h + \sqrt{h^2 + S^2})} \right)$$

1.44. Матеріальна точка рухається в площині (xoy) зі швидкістю $\mathbf{v}(x,y) = ax \mathbf{i} - by \mathbf{j}$, де a і b – додатні сталі, \mathbf{i}, \mathbf{j} – одиничні орти осей координат. Визначити: 1) вид траєкторії; 2) радіус кривизни траєкторії в залежності від часу, вважаючи що при $t = 0$ точка мала координати x_0, y_0 .

1.45. Жорсткий стержень AB рухається в площині (xoy) , спираючись на коло, центр якого знаходиться в початку координат (див. рис.). Знайти кутову швидкість стержня, якщо його кінець B рухається вздовж осі x зі сталою швидкістю V . Вважати відомим радіус кола R і положення точки його початку x_0 .



$$\left(\omega = \frac{VR}{x\sqrt{x^2 - R^2}}, x = x_0 + Vt \right)$$

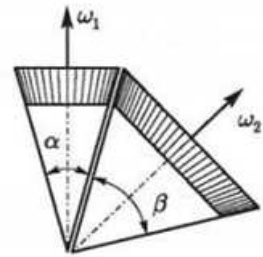
1.46. Стержень AB довжиною L рухається в площині (xoy) , спираючись своїми кінцями на взаємно перпендикулярні прямі ox і oy . Знайти координати миттєвого центру обертання в момент, коли кут OAB дорівнює 60° .

$$(x = L \cos \varphi, y = L \sin \varphi).$$

1.47. У конічній шестерні осі зубчастої передачі обертання нерухомі (див. рис.). Відомо ω_1 , кути α, β .

Знайти ω_2 .

$$\left(\omega_2 = \frac{\omega_1 R_1}{R_2} = \omega_1 \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\beta}{2}} \right)$$



1.48. Конус, який лежить бічною поверхнею на горизонтальній площині, котиться по ній без ковзання таким чином, що його вершина нерухома. Кут при вершині конуса $\alpha = 90^\circ$. Центр основи конуса рухається рівномірно і повертається в початкове положення через 1 сек. Знайти вектор кутового прискорення конуса.

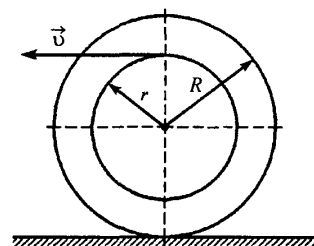
$$\left(\boldsymbol{\beta} = [\boldsymbol{\omega}_1 \boldsymbol{\omega}_2]; \beta = \frac{2\pi^2}{t^2} \right)$$

1.49. Два твердих тіла обертаються навколо нерухомих взаємно перпендикулярних осей з постійними кутовими швидкостями $\boldsymbol{\omega}_1$ і $\boldsymbol{\omega}_2$. Знайти кутову швидкість і кутове прискорення одного тіла відносно іншого.

$$(\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_1 - \boldsymbol{\omega}_2; \boldsymbol{\beta} = [\boldsymbol{\omega}_1 \boldsymbol{\omega}_2])$$

1.50. Нитку, яка намотана на катушку, тягнуть зі швидкістю \mathbf{v} (див. рис.). З якою швидкістю рухається центр катушки? Прослизання немає, радіуси катушки R і r задані.

$$\left(v_c = \frac{vR}{R+r} \right)$$

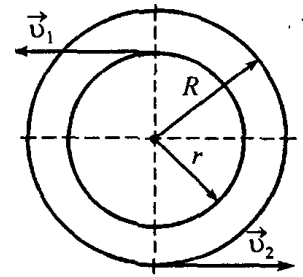


1.51. Космічний апарат при посадці випускає гальмовий парашут і таким чином прискорення гальмування виявляється пропорційним

квадрату швидкості з коефіцієнтом β . При зменшенні початкової швидкості v_0 у 100 разів вмикаються гальмові колодки, і апарат зупиняється. Знайти час і шлях гальмування, а також середню швидкість руху апарату при посадці.

$$\left(t = \frac{99}{v_0 \beta}; S = \frac{1}{\beta} \ln 100; \langle v \rangle = \frac{v_0 \ln 100}{99} \right)$$

1.52. Дві нитки, які намотані на котушку, тягнуть зі швидкістю v_1 і v_2 , як показано на рис. З якою швидкістю рухається центр котушки? З якою кутовою швидкістю обертається котушка? Прослизання нема, радіуси котушки R і r задані.



$$\left(v_c = \frac{Rv_1 - rv_2}{R + r}; \omega = \frac{v_1 + v_2}{R + r} \right)$$

1.53. Тіло кинули під кутом α до горизонту. В деякий момент часу t^* радіус-вектор \mathbf{r} , проведений із точки кидання, і швидкість тіла \mathbf{v} стали взаємно перпендикулярними один одному. При якому куті кидання α це можливо? Якщо це можливо, коли це може статись: під час підйому тіла чи під час зниження?

$$\left(\alpha > \arcsin \left(\frac{2\sqrt{2}}{3} \right) \right)$$

1.54. Тіло кинули під деяким кутом до горизонту таким чином, що воно впало на відстані S від точки кидання. Знайти, яка мінімальна початкова швидкість $v_{0\min}$ необхідна для цього? Яка при цьому висота підйому?

$$\left(v_{0\min} = \sqrt{gS}; h = \frac{S}{4} \right)$$

2 КІНЕМАТИКА СПЕЦІАЛЬНОЇ ТЕОРІЇ ВІДНОСНОСТІ

Спеціальна теорія відносності (СТВ) була створена А. Ейнштейном. **Термін «спеціальна» підкреслює ті обставини, що ця теорія розглядає явища в інерціальних системах відліку.** Це привело до перегляду початкових положень класичної фізики, зокрема, уявлень про властивості простору і часу. Як вихідні позиції СТВ Ейнштейн прийняв два постулати або принципи, на підтвердження яких говорить увесь експериментальний матеріал.

1. **Перший постулат – принцип відносності**, що узагальнює принцип відносності Галілея на будь-які фізичні процеси: усі фізичні явища відбуваються однакою чином в усіх інерціальних системах відліку за однакових початкових умов; усі закони природи і рівняння, що їх описують, інваріантні, тобто не змінюються при переході від однієї інерціальної системи відліку до іншої.

2. **Другий постулат надає швидкості світла особливе положення** в природі і стверджує, що швидкість світла у вакуумі не залежить від швидкості джерела і швидкості спостерігача, однакою по всіх напрямках і в усіх інерціальних системах відліку.

Якщо що-небудь відбувається в деякій точці простору в якій-небудь момент часу, то говорять, що має місце подія. Інтервал між подіями ΔS визначають наступним чином:

$$\Delta S^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2$$

де $\Delta t = t_2 - t_1$; $\Delta x = x_2 - x_1$; $\Delta y = y_2 - y_1$; $\Delta z = z_2 - z_1$, c – швидкість світла.

Тут перший доданок – часова частина інтервалу, інші – просторова частина інтервалу. **Постулюється інваріантність події при переході з однієї інерціальної системи відліку (ІСВ) в іншу:**

$$S^2 = S'^2$$

Рівняння для перетворення координат і часу при переході від однієї ІСВ до іншої, використовуючи принцип відносності, постулати Ейнштейна, а також однорідність і ізотропність простору і часу, вивів Лоренц. Це **перетворення Лоренца**. Якщо ми розглянемо дві системи відліку: систему K в стані спокою, і систему K' , що рухається з постійною швидкістю V у напрямі осі Ox , то:

$$x' = \Gamma(x - Vt); \quad y' = y; \quad z' = z; \quad t' = \Gamma\left(t - \frac{V}{c^2}x\right)$$

де $\Gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$ – масштабний множник або чинник Лоренца.

З перетворень Лоренца випливає, що **довжина рухомого об'єкта** що спостерігається в нерухомій системі відліку і розташованого у напрямі руху, менша від довжини об'єкта, що знаходиться в стані спокою:

$$l' = l\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}$$

Найбільша довжина предмета в тій системі відліку, де тіло нерухоме. **Система відліку, в якій тіло знаходиться в стані спокою, називають власною для цього тіла**. Поперечні розміри рухомого тіла не змінюються.

Інтервал часу між подіями, виміряними рухомим і нерухомим годинником пов'язані таким чином:

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\Gamma} = \Delta t\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}$$

Він менший від інтервалу Δt між тими ж подіями, виміряними нерухомим годинником. Це означає, що **хід рухомого годинника сповільнюється відносно нерухомої системи**. **Час, відлічуваний нерухомими годинами в системі відліку, в якій тіло нерухоме (у власній системі відліку для**

цього тіла), називають власним часом цього тіла. Такий годинник відлічує власний час тіла в точці, де тіло знаходиться. У такому разі співвідношення вказує на те, що *проміжок власного часу тіла між подіями, що сталися з тілом, завжди менше проміжку часу в системі, відносно якої тіло рухається.*

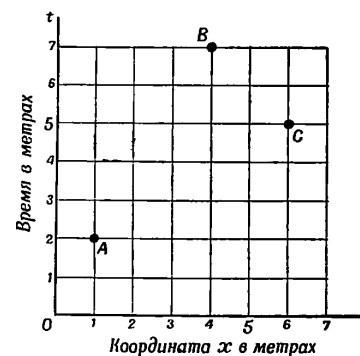
З перетворень Лоренца витікає *релятивістське перетворення швидкостей:*

$$v'_x = \frac{v_x - V}{1 - \frac{V}{c^2}v_x}; \quad v'_y = \frac{v_y \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 - \frac{V}{c^2}v_x}; \quad v'_z = \frac{v_z \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 - \frac{V}{c^2}v_x}$$

2.1. У лабораторній системі відліку дві події сталися в точках $x_1 = 0, x_2 = 5\text{ м}$ в моменти часу $t_1 = 0, t_2 = 4/3 \cdot 10^{-8}\text{ с}$. Знайти інтервал між подіями. Знайти систему відліку, в якій просторова і часова відстані між подіями мінімальні. Чому вони дорівнюють?

2.2. У лабораторній системі відліку дві події сталися в точках $x_1 = 0, t_1 = 0$ і $x_2 = 4\text{ м}, t_2 = 5/3 \cdot 10^{-8}\text{ с}$. Знайти систему відліку, в якій просторова і часова відстані між подіями мінімальні. Чому вони дорівнюють?

2.3. На діаграмі простір-час на рисунку в лабораторній системі відліку зображені події А, В, С. Для усіх пар подій визначити: значення інтервалу; власний час, власну відстань між подіями; причинно-наслідковий зв'язок.



2.4. Вивести формулу релятивістського перетворення прискорень.

$$\left(\begin{array}{l} a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{a'_x}{\Gamma^3 \left(1 + \frac{V}{c^2} v'_x\right)^3}; \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{a'_y \left(1 + \frac{V}{c^2} v'_x\right) - \frac{V}{c^2} a'_x}{\Gamma^2 \left(1 + \frac{V}{c^2} v'_x\right)^3}; \\ \\ a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{a'_z \left(1 + \frac{V}{c^2} v'_x\right) - \frac{V}{c^2} a'_x}{\Gamma^2 \left(1 + \frac{V}{c^2} v'_x\right)^3} \end{array} \right)$$

2.5. Знайти матрицю перетворення Лоренца при русі рухомої системи відліку (СВ) уздовж осі x із швидкістю V_x , услід за яким здійснюється рух уздовж осі y із швидкістю V_y . Довести, що той же рух в зворотному порядку призводить до інших перетворень.

$$\left(\begin{array}{cccc} \Gamma_x \Gamma_y & \Gamma_x \beta_x & \Gamma_x \beta_y \Gamma_y & 0 \\ \Gamma_x \Gamma_y \beta_x & \Gamma_x & \Gamma_x \Gamma_y \beta_x \beta_y & 0 \\ \Gamma_y \beta_y & 0 & \beta_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right); \left(\begin{array}{cccc} \Gamma_x \Gamma_y & \Gamma_y \Gamma_x \beta_x & \Gamma_y \beta_y & 0 \\ \Gamma_x \beta_x & \Gamma_x & 0 & 0 \\ \Gamma_x \Gamma_y \beta_y & \Gamma_x \Gamma_y \beta_x \beta_y & \Gamma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

2.6. На відстані L від Землі стався вибух найновішої, і були випущені нейтрони. Період напіврозпаду (час, за який половина нейтронів розпадається в системі відліку, в якій вони нерухомі) вільного нейтрона T . З якою швидкістю повинен рухатись нейтрон, щоб встигнути долетіти до Землі до свого розпаду?

$$\left(v = \frac{Lc}{\sqrt{c^2 \Delta \tau^2 + L^2}}; \quad \Delta \tau = T \right)$$

2.7. Системи відліку S_1 і S_2 рухаються у напрямку вісі X відносно системи відліку S зі швидкостями v_1 і v_2 відповідно. Вимірний в системі відліку інтервал часу, за який стрілка годинника в системі відліку S_1 здійснить один оберт, дорівнює t . Який той же інтервал часу t_2 , вимірний у системі S_2 ?

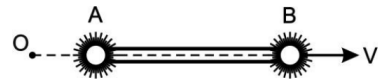
$$\left(t_2 = \left(1 - \frac{v_1 v_2}{c^2} \right) t \right)$$

2.8. Яким стане кут між діагоналями квадрату, якщо він буде рухатись зі швидкістю V в напрямку, паралельному одній з його сторін?
 $(\alpha = \pi - 2 \arctg \Gamma)$

2.9. Космічний корабель прямує від Землі із швидкістю V . Через час T після його старту з Землі надсилають сигнал зв'язку. Яка з точки зору космонавтів відстань між Землею і кораблем у момент отримання сигналу?

$$\left(L = TV \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}}, \beta = \frac{V}{c} \right)$$

2.10. На кінцях стержня власною довжиною L_0 , який рухається зі швидкістю V , одночасно у системі відліку стержня запалюються дві лампочки (див. рис.). Яка з них запалюється раніше і на скільки в Л-системі відліку? Який спалах побачить раніше і на скільки нерухомий спостерігач, що знаходиться в точці O ?



$$\left(\Delta t_1 = t_B - t_A = \Gamma \frac{V}{c^2} L_0 > 0; \Delta t_2 = \frac{x_B - x_A}{c} = \frac{\Gamma L_0}{c}; \Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2 = \Gamma \left(\frac{L_0}{c} + \frac{V}{c^2} L_0 \right) \right)$$

2.11. У двох точках інерціальної системи відліку K здійснились події, які розділені проміжком часу Δt . Покажіть, що, якщо ці події причино пов'язані у системи K , то вони також причино пов'язані і в будь-якій іншій інерціальній системі відліку.

2.12. Масивна плита рухається перпендикулярно власній площині зі швидкістю $c/2$, і налітає на легку нерухому частинку. Знайти швидкість частинки після пружного зіткнення із плитою.

$$\left(u = \frac{2\beta}{1 + \beta^2} c \right)$$

2.13. Джерело світла знаходиться на відстані L від нерухомого дзеркала. На шляху від джерела до дзеркала і в зворотному напрямку світло проходить через скляну пластинку товщиною l із показником заломлення n . Пластинка рухається від джерела вздовж променя зі швидкістю V . Знайти час проходження світла від джерела до дзеркала і в зворотному напрямку.

$$\left(T = \frac{L}{c} + \frac{\Gamma l}{c} (n-1)(1-\beta); T' = \frac{2L}{c} + \frac{2Ll}{c} + (n-1) \right)$$

2.14. Фотон летить перпендикулярно руху ракети зі швидкістю світла відносно ракети. Ракета рухається відносно зірок зі швидкістю V . Знайти повну швидкість фотона у системі відліку зірок.

$$\left(u_x = V, u_y = \frac{c}{\Gamma}, u = \sqrt{u_x^2 + u_y^2} \right)$$

2.15. Перетворення Лоренца були отримані для випадку, коли система відліку рухається вздовж якою-небудь осі, зокрема, вздовж осі X . Отримайте формулу перетворення Лоренца у випадку довільного кута між швидкістю V системи відліку і віссю X . (Вказівка: представити радіус - вектор точки у вигляді суми двох векторів: вздовж швидкості і перпендикулярно).

$$\left(t' = \Gamma \left(t - \frac{\mathbf{r}\mathbf{v}}{c^2} \right); \mathbf{r}' = \mathbf{r} + \frac{\mathbf{v}(\mathbf{v}\mathbf{r})}{|\mathbf{v}|} (\Gamma - 1) - \Gamma(\mathbf{v}t) \right)$$

2.16. Системи відліку K' і K'' рухаються відносно системи K зі швидкостями V_1 і V_2 уздовж осі x . З точки зору системи K стрілка годинника в системі K' здійснює один оберт за час t . Який проміжок часу проходить при цьому в системі K'' ?

2.17. У K' - системі відліку, що рухається з постійною швидкістю V у напрямі осі Ox нерухомої системи відліку K , розташовано рівносторонній трикутник зі стороною a , причому одна із сторін розміщена уздовж

напряму $O'x'$ системи K' . В системі відліку K визначити периметр і площину трикутника.

$$\left(P = a\sqrt{1-\beta^2} + 2\sqrt{1-\beta^2}\cos^2\alpha; S = \frac{a^2}{2}\sin\alpha\sqrt{1-\beta^2}; \alpha = 60^\circ \right)$$

2.18. Елементарна нестабільна частинка рухається зі швидкістю $V \approx c$ відносно нерухомої K -системи відліку і в цій же системі час її життя склав Δt . Знайти власний час життя частинки і відстань, яку вона пройшла в K -системі та у системі, яка пов'язана із частинкою.

$$\left(t' = t\sqrt{1-\beta^2}; K:l' = Vt; K':l = \Gamma l' \right)$$

2.19. Дві нестабільні частинки рухаються в одному напрямку в нерухомій системі відліку K зі швидкістю $V \approx c$, і власна відстань між ними складає l . В K -системі частинки розпались одночасно. Знайти відстань між частинками в цій системі до розпаду, а також власний час їх життя.

$$\left(l' = l\sqrt{1-\beta^2}; \Delta t' = \frac{V}{c^2}l \right)$$

2.20. Власний час життя елементарної частинки складає $2.5 \cdot 10^{-8}$ сек, після чого вона розпадається. Частинка рухається зі швидкістю $V = c(1 - 2 \cdot 10^{-6}) \frac{\text{м}}{\text{сек}}$. Яку відстань пройшла частинка в системах відліку K

і K' відповідно?

$$\left(L = 7.5 \text{ м}; T = 1.25 \cdot 10^{-5} \text{ с}; L' = 3750 \text{ м} \right)$$

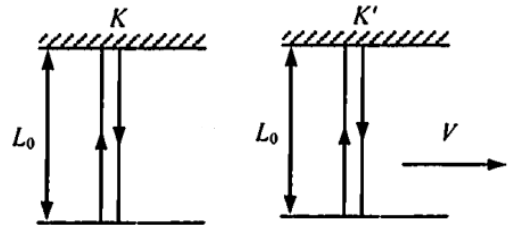
2.21. Довести, що власний час є величина, яка пропорційна інтервалу між подіями: $\tau = \frac{dS}{c}$, де c – швидкість світла.

2.22. Нехай із початку системи відліку K' , яка рухається зі швидкістю V удовж осі Ox нерухомої системи K , надсилають світловий сигнал під

кутом φ' до осі $O'x'$. Знайти складові швидкості сигналу c_x, c_y в лабораторній системі відліку.

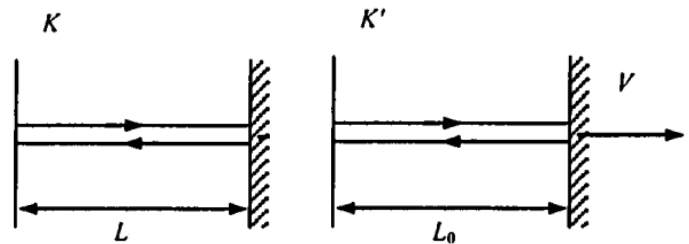
$$\left(c_x = c \frac{c \cos \varphi' + V}{c + V \cos \varphi'}; c_y = \frac{c \sin \varphi' \sqrt{c^2 - V^2}}{c + V \cos \varphi'}; \operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{\Gamma} \left(\frac{c \sin \varphi'}{c \cos \varphi' + V} \right) \right)$$

2.23. Маємо дві системи відліку, K і K' . Нехай система K' рухається відносно K уздовж осі Ox із швидкістю V . Кожна система відліку складається із джерела світла і дзеркала (див. рис.).



Сигнал від джерела надсилається до дзеркала и в зворотному напрямку. За допомогою цього експерименту виведіть формулу релятивістського перетворення часу.

2.24. Маємо дві системи відліку, K і K' . Нехай система K' рухається відносно K уздовж осі Ox із швидкістю V . Кожна



система відліку складається із джерела світла і дзеркала (див. рис.). Сигнал від джерела надсилається до дзеркала и в зворотному напрямку. Відстань між джерелом і дзеркалом дорівнює L і L_0 відповідно до систем відліку K і K' . Виведіть закон перетворення довжини L і L_0 .

2.25. У K -системі відліку розміщено рівносторонній трикутник зі стороною a , причому одна із сторін розташована уздовж напрямку Ox системи K . Система відліку K' рухається з постійною швидкістю V у напрямку осі Ox нерухомої системи відліку K . В системі відліку K' визначити периметр і площину трикутника.

3 ДИНАМІКА ТОЧКИ І СИСТЕМИ ТОЧОК ЗАКОНИ НЬЮТОНА

Завдання динаміки полягає в тому, щоб встановити взаємозв'язок між рухом тіла і тими причинами, які викликали або змінили цей рух.

В основі динаміки лежать три закони Ньютона. Перший закон Ньютона відповідає на питання: чи існують такі системи відліку, в яких прискорення матеріального тіла обумовлене тільки його взаємодією з іншими тілами, а не за рахунок властивостей самої системи відліку. Перший закон Ньютона ствердно відповідає на це питання: *«Всяке тіло продовжує утримуватися у своєму стані спокою або рівномірного і прямолінійного руху, поки і оскільки воно не вимушено прикладеними силами змінити цей стан»*. Згідно першого закону, існують інерціальні системи відліку (ІСВ), в яких вільне тіло рухатиметься рівномірно і прямолінійно, або за інерцією. Існує безліч інерціальних систем відліку, які рухаються одна відносно одної рівномірно і прямолінійно в силу однорідності і ізотропної простору, і класична механіка постулює, що такі ІСВ існують, наявність таких ІСВ підтверджує експеримент.

Другий закон Ньютона відповідає на запитання, що викликає рух тіла, а, головне, що викликає зміну стану тіла, зміна його швидкості і напрямку руху. Згідно Ньютона *«...прикладена сила є дія, здійснювана над тілом, щоб змінити його стан спокою або рівномірного і прямолінійного руху»*. В сучасному розумінні сила розглядається як кількісна міра взаємодії тіл. Передбачається, що в ІСВ завжди можна вказати джерело сили, а для вирішення задач – визначити закон дії сили. Другий закон Ньютона встановлює кількісне співвідношення між силою і прискоренням. Його формулюють таким чином: *прискорення, що надається тілу силою F , спрямоване уздовж сили, пропорційне її величині і обернене*

пропорційно масі тіла. Математичне формулювання другого закону Ньютона має вигляд:

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}; \quad m \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F}$$

Це рівняння називають *рівнянням руху*. Найбільш загальний запис такого рівняння має вигляд:

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}; \quad m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$$

Фізичний зміст другого закону Ньютона полягає в тому, що сила визначає другу похідну координат за часом. При дії на матеріальну точку

декількох тіл сумарна сила $\mathbf{F} = \sum_i^n \mathbf{F}_i$ дорівнює сумі взаємодії окремих тіл,

за умови незалежності впливу цих тіл один на одного, тобто вважаючи, що наявність інших тіл не змінює умови взаємодії:

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} = \sum_i^n \mathbf{F}_i$$

де $\sum_i^n \mathbf{F}_i$ – рівнодійна сила.

Третій закон Ньютона формулюють в так: *дії завжди є рівна і протилежна протидія. Інакше кажучи: сили, що виникають при взаємодії двох тіл, однакові за величиною і протилежні за напрямом:* $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$. У третьому законі Ньютона передбачається, що обидві сили рівні по модулю у будь-який момент часу незалежно від руху точок, *що відповідає ньютонівському уявленню про миттєве поширення взаємодії* і існування принципу далекодії ньютонівської механіки. Згідно з ним, взаємодії між тілами поширюються з нескінченно великою швидкістю. Але існує скінченна максимальна швидкість поширення взаємодії – це швидкість світла у вакуумі. Тому третій закон має певні межі застосування

– класична механіка з малими швидкостями взаємодії, де він виконується з великою точністю.

3.1. Із початку системи відліку під кутом α до горизонту кинули тіло масою m з початковою швидкістю \mathbf{v}_0 . Сила опору повітря пропорційна швидкості $\mathbf{F}_{\text{оп}} = -mk\mathbf{v}$. Знайти радіус-вектор тіла $\mathbf{r}(t)$ і рівняння траєкторії.

$$\left(\begin{array}{l} \mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}; \\ x(t) = \frac{v_0}{k} \cos \alpha (1 - e^{-kt}), \quad y(t) = \left(\frac{v_0}{k} \sin \alpha + \frac{g}{k^2} \right) (1 - e^{-kt}) - \frac{g}{k} t; \\ y(x) = xt \tan \alpha + \frac{gx}{kv_0 \cos \alpha} + \frac{g}{k^2} \ln \left(1 - \frac{kx}{v_0 \cos \alpha} \right) \end{array} \right)$$

3.2*. Парашутист здійснює зтяжний стрибок із нульовою початковою швидкістю з нерухомого аеростату. Опір повітря є пропорційним квадрату швидкості його падіння $F = -kv^2$. Вважаючи відомою граничну швидкість падіння парашутиста $v_{\text{гр}}^2 = \frac{mg}{k}$, знайти залежність швидкості падіння від часу. Знайти залежність зміни швидкості від висоти.

$$\left(\begin{array}{l} v(t) = v_{\text{зр}} \frac{\left(1 - e^{-\frac{2g}{v_{\text{зр}}} t} \right)}{1 + e^{-\frac{2g}{v_{\text{зр}}} t}}; \quad v(x) = v_{\text{зр}} \sqrt{1 - e^{-2kx}} = v_{\text{зр}} \sqrt{1 - e^{-\frac{mgx}{v_{\text{зр}}^2}}} \end{array} \right)$$

3.3. На похилій площині з кутом α до горизонту знаходиться дошка масою M , а на краю дошки лежить брусок масою m . На дошку діє сила F , яка направлена вгору під кутом β до її поверхні. Коефіцієнт тертя між дошкою і площиною є k_1 , між бруском і дошкою k_2 , причому $k_2 < k_1$.

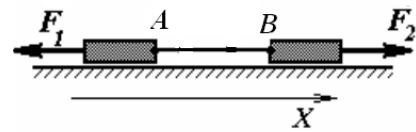
Знайти прискорення обох тіл. При якому значенні сили F брусок зісковзне з дошки? Через який час брусок впаде з дошки, якщо її довжина L ?

$$\left(\begin{array}{l} F > g \frac{2M \sin \alpha - \cos \alpha (k_1 + k_2)(M + m)}{\cos \beta + k_1 \sin \beta}; t = \sqrt{\frac{2L}{a_{\text{відн}}}}, \\ a_{\text{відн}} = \frac{F(\cos \beta - k_2 \sin \beta) - mg \cos \alpha (k_1 + k_2) - 2Mg \sin \alpha + Mg \cos \alpha (k_2 - k_1)}{M} \end{array} \right)$$

3.4. Тіло масою m кинули в полі тяжіння з невеликою швидкістю V_0 під кутом θ до горизонту. Сила опору повітря є $F = -\alpha V$. Якою буде швидкість тіла у верхній точці траєкторії?

$$\left(V_x = \frac{V_0 \cos \theta}{1 + \frac{\alpha V_0}{mg} \sin \theta} \right)$$

3.5. На гладкій горизонтальній поверхні знаходяться два бруски, маси яких дорівнюють m_1 і m_2 . Вони пов'язані ниткою, маса якої m_0 . До брусків приклали постійні горизонтальні сили F_1 і F_2 в протилежних напрямках: F_1 – до першого бруска, F_2 – до другого. Знайти силу натягу нитки в точках A і B її кріплення до брусків.



$$\left(T_A = \frac{F_1 m_0 + F_1 m_2 + F_2 m_1}{m_0 + m_1 + m_2}, T_B = \frac{F_1 m_2 + F_2 m_0 + F_2 m_1}{m_0 + m_1 + m_2}; (F_1 > F_2) \right)$$

3.6. Два бруски, маси яких m_1 і m_2 відповідно, сполучені один з одним нерозтяжною ниткою масою m . Бруски рухаються в полі тяжіння вертикально вгору під дією постійної сили F , яка прикладена до першого бруска. Знайти: 1) прискорення системи; 2) сили натягу нитки в точках, в яких вона торкається до брусків.

$$\left(T_1 = \frac{m + m_1}{m + m_1 + m_2} F, T_2 = \frac{m_2}{m + m_1 + m_2} F \right)$$

3.7. На поверхні гладкого стола знаходяться два бруски, маси яких дорівнюють m_1 і m_2 . Вони пов'язані ниткою, маса якої m , а довжина l . На перший брусок діє постійна сила \mathbf{F} паралельно поверхні стола. Знайти: 1) прискорення системи; 2) силу натягу нитки як функцію відстані s від першого бруска. Нитка не провисає.

$$\left(a = \frac{F}{m_1 + m_2 + m}; T(s) = \frac{Fm_2}{m_1 + m_2 + m} + \frac{Fm/l(l-s)}{m_1 + m_2 + m} \right)$$

3.8. Матеріальна точка масою m в момент часу $t = 0$ починає рухатись під дією сили $\mathbf{F}(t) = \mathbf{F}_0(1 - t/T)$, де \mathbf{F}_0 – постійний вектор, T – додатна стала. Знайти: 1) кінематичний закон руху; 2) час повернення в початкову точку; 3) шлях, пройдений за цей час.

$$\left(x(t) = \frac{F_0}{2m} t^2 - \frac{F_0}{6Tm} t^3; t_{\text{пов}} = 3T; S = \frac{4}{3} \frac{F_0 T^2}{m} \right)$$

3.9. На невеличке тіло масою m , яке знаходиться на горизонтальній площині, діє сила $\mathbf{F}(s)$, яка залежить від пройденого шляху за законом $\mathbf{F} = \mathbf{F}_0(1 + s^2/R^2)^{1/2}$, $\alpha = \text{arctg}(s/R)$, де α – кут між вектором \mathbf{F} і площиною; \mathbf{F}_0 ($F_0 > fmg$) і R – додатні стали; f – коефіцієнт тертя. Визначити швидкість тіла в момент відриву від площини.

$$\left(v = \sqrt{2gR \left(1 - \frac{fmg}{2F_0} \right)} \right)$$

3.10. На вершині клина розташований невагомий блок. Через блок перекинута невагома і нерозтяжна нитка, до кінців якої прикріплені вантажі масами m_1 і m_2 , причому $m_1 < m_2$. Коефіцієнти тертя вантажів і площин клина складають k_1 і k_2 ($k_1 > k_2$) відповідно. Кути площин клина з

горизонтальною площиною є α_1 і α_2 ($\alpha_1 < \alpha_2$) відповідно. Знайти силу натягу нитки.

3.11. Парашутист масою m здійснює зтяжний стрибок з початковою швидкістю v_0 , спрямованою горизонтально. Знайти закон зміни його швидкості і радіус-вектора $\mathbf{r}(t)$ від часу до розкриття парашуту, якщо сила опору повітря пропорційна швидкості руху парашутиста $\mathbf{F} = -k\mathbf{v}$, де k – додатна стала.

$$\left(\begin{array}{l} \mathbf{v}(t) = v_0 e^{-\frac{k}{m}t} \mathbf{i} + \frac{mg}{k} \left(1 - e^{-\frac{k}{m}t} \right) \mathbf{j}; \\ \mathbf{r}(t) = \frac{mv_0}{k} \left(1 - e^{-\frac{k}{m}t} \right) \mathbf{i} + \left[\frac{mg}{k} t - \frac{m^2 g}{k^2} \left(1 - e^{-\frac{k}{m}t} \right) \right] \mathbf{j} \end{array} \right)$$

3.12. На абсолютно гладкій похилій площині з кутом α до горизонту лежить дощечка, маса якої m . По дощечці тягнуть вгору вантаж масою M з силою \mathbf{F} , спрямованою під кутом β до поверхні дощечки. Дощечка залишається нерухомою. Знайти, при якому коефіцієнті тертя між вантажем і дощечкою це можливо. Знайти шлях, який проходить вантаж, якщо його швидкість досягла v , а початкова швидкість дорівнює нулю.

$$\left(k = \frac{mg \sin \alpha}{Mg \cos \alpha - F \sin \beta}; S = \frac{v^2}{2a} = \frac{v^2 M}{2[F \cos \beta - g \sin \alpha (M + m)]} \right)$$

3.13. На платформі масою M лежить вантаж масою m . Коефіцієнт тертя між платформою і вантажем k_1 . Платформу тягнуть із силою \mathbf{F} під кутом α до горизонту. Знайти прискорення платформи і вантажу, якщо платформа рухається по поверхні з тертям з коефіцієнтом k_2 ?

$$\left(a_1 = \frac{F \sin \alpha - k_1 (Mg - F \cos \alpha) - k_2 mg}{M}; a_2 = k_2 g \right)$$

3.14. Возик масою M стоїть на гладкій поверхні, по якій може рухатися без тертя. На возику лежить брусок масою m . До бруску прив'язана

мотузка, за яку брусок тягнуть з силою F , спрямованою під кутом α . Знайти силу тертя і прискорення возика і бруска. Коефіцієнт тертя між бруском і возиком дорівнює k .

$$\left(F_{\text{тер}} = k(mg - F \sin \alpha); a_1 = \frac{k(mg - F \sin \alpha)}{M}; a_2 = \frac{F(\cos \alpha + k \sin \alpha) - kmg}{m} \right)$$

3.15. Два вантажі масами m_1 і m_2 ($m_1 > m_2$) лежать на бічних сторонах трикутного клина, які є похилими площинами з кутами α і β до горизонту відповідно. Вантажі скріплені між собою нерозтяжною невагомою ниткою, перекинutoю через блок на вершині клина. До початку руху вантажі знаходились на однаковій висоті. Знайти, на скільки один вантаж опуститься нижче від іншого через час t . Коефіцієнт тертя між вантажами і площинами дорівнює k . Масою блока знехтувати. Тертя в осі блока відсутнє.

3.16*. Сталева кулька з радіусом r падає з висоти h без початкової швидкості на горизонтальну сталеву плиту впродовж часу t . Опір повітря пропорційний швидкості з коефіцієнтом α . Удар абсолютно пружний. Знайти час підйому кульки вгору. Знайти висоту підйому.

$$\left(t_{\text{під}} = \frac{m}{\alpha} \ln \left(2 - e^{-\frac{\alpha t}{m}} \right); H = \frac{m^2}{\alpha^2} \ln \left[\frac{g \left(2 - e^{-\frac{\alpha t}{m}} \right)}{g + \ln \left(\left(2 - e^{-\frac{\alpha t}{m}} \right) \right)} \right]; m = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho \right).$$

3.17*. Сталева кулька з радіусом r падає з висоти h без початкової швидкості на горизонтальну сталеву плиту. Опір повітря пропорційний квадрату швидкості $F = -kv^2$. Удар абсолютно пружний. Знайти час підйому кульки вгору, якщо опір повітря під час руху вгору пропорційний швидкості $F = -kv$.

$$\left(t = \frac{mg}{k} \ln \left(1 + \frac{k}{mg} v_{\max} \right), v_{\max} = \left[\frac{mg}{k} \left(1 - e^{-\frac{2kh}{m}} \right) \right]^{1/2}; m = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho \right)$$

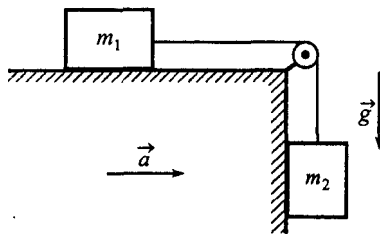
3.18*. Сталева кулька з радіусом r падає з висоти h без початкової швидкості на горизонтальну сталеву плиту. Опір повітря пропорційний квадрату швидкості $F = -\alpha v^2$. Удар абсолютно пружний. На яку відстань Δh не долітає кулька до первинного положення при першому підскоку?

$$\left(\Delta h = h - \frac{m}{2\alpha} \ln \left(1 - e^{-\frac{2\alpha h}{m}} \right); m = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho \right)$$

3.19. Дошка довжиною L і масою M може без тертя ковзати по гладкій горизонтальній поверхні. На краю дошки знаходиться брусок масою m . Коефіцієнт тертя між бруском і дошкою μ . До дошки прикладають горизонтальну силу F , яка перевищує силу тертя спокою бруска і дошки. Знайти прискорення бруска і дошки. Через який час після дії сили брусок впаде з дошки?

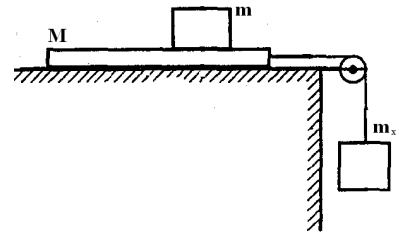
$$\left(t = \sqrt{\frac{2LM}{F - \mu g(m + M)}} \right)$$

3.20. Брусок масою m_1 знаходиться на горизонтальному столі і сполучений невагомою і нерозтяжною ниткою з вантажем масою m_2 (див. рис.) Знайти прискорення тіл відносно столу, якщо стіл рухається із прискоренням a . Коефіцієнти тертя бруска і вантажу об стіл однакові і дорівнюють k . Розглянути 3 випадки: бруски рухаються в бік m_2 ; протилежній бік; знаходяться у стані спокою. Визначить умови таких рухів.



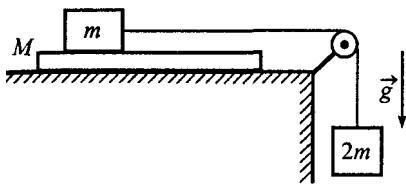
$$\left(1. a_1 = \frac{g(m_2 - \mu m_1) - a(m_1 + \mu m_2)}{m_1 + m_2}, \mu > \frac{m_1 a - m_2 g}{m_1 g + m_2 a}; 3. a_1 = 0, \mu \geq \frac{|m_2 g - m_1 a|}{m_1 g + m_2 a} \right)$$

3.21. Дошка масою M може ковзати без тертя по горизонтальній поверхні. На дошці лежить брусок масою m . Коефіцієнт тертя між поверхнями дошки і бруска μ . Дошка сполучена невагомою ниткою, перекинутаю через легкий блок, з вантажем m_x (див. рис.). Якою повинна буди маса вантажу m_x , щоб брусок ковзав по дошці?



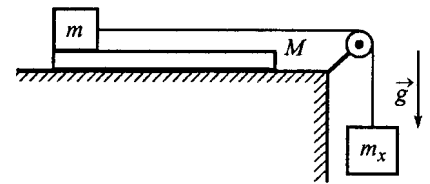
$$m_x > \frac{\mu(M + m)}{1 - \mu}$$

3.22. На гладкому горизонтальному столі лежить дошка масою M , на якій знаходиться брусок масою m . Брусок сполучений невагомою нерозтяжною ниткою, перекинутаю через блок, із вантажем масою $2m$. (див. рис.) З яким прискоренням будуть рухатись тіла, якщо коефіцієнт тертя між поверхнями бруска і дошки дорівнює μ ?



$$a_1 = \frac{\mu mg}{M}, \quad a_2 = \frac{g(2 - \mu)}{3}$$

3.23. На гладкому горизонтальному столі лежить дошка масою M , на кінці якої утримується брусок масою m . До бруска за допомогою невагомої нерозтяжної нитки, перекинутаю через блок, підвішений вантаж масою m_x (див. рис.). Коефіцієнт тертя між бруском і дошкою є μ . При якому мінімальному значенні маси вантажу $m_{x\min}$ брусок буде ковзати по дошці, якщо тіла звільнити? Через який час після початку руху брусок впаде із дошки, якщо $m_x = m_{x\min}$, а довжина дошки дорівнює L ?



$$\left(m_x > \frac{\mu m(M + m)}{M - \mu m}; t = \sqrt{\frac{2LM(m_x + m)}{Mm_x g - \mu m(M + m_x + m)g}} \right)$$

3.24. Брусок масою m тягнуть за нитку під кутом до горизонту по горизонтальній площині. Коефіцієнт тертя між бруском і площиною μ . Знайти кут α , при якому натяг нитки при русі буде найменшим. Яка величина сили натягу? Масою нитки знехтувати.

$$\left(\alpha = \arctg \mu; T_{\min} = \frac{\mu mg}{\sqrt{1 + \mu^2}} \right)$$

3.25*. Тіло масою m пустили вниз по похилій площині довжиною S і з кутом α до горизонтальної основи без початкової швидкості. Похила площина закріплена на деякій висоті над Землею. Коефіцієнт тертя при русі по похилій площині залежить від відстані за законом $\mu = \gamma x^{1/2}$, де γ – стала. Після відриву від похилої площини тіло рухається за криволінійною траєкторією і падає на відстані L від проекції на Землю точки початку падіння. При умові, що опір повітря при падінні пропорційний швидкості тіла із коефіцієнтом k , знайти: 1) закон зміни вектору швидкості від часу під час падіння; 2) висоту h , з якої впало тіло.

$$\left(\mathbf{v}(t) = ve^{-\frac{k}{m}t} \mathbf{i} + \left[\frac{m}{k} g \left(1 - e^{-\frac{k}{m}t} \right) - ve^{-\frac{k}{m}t} \right] \mathbf{j}, v^2 = 2g \left(S \sin \alpha - \gamma \frac{4}{3} S^{3/2} \cos \alpha \right); \right. \\ \left. h = \frac{m^2}{k^2} g \ln \left(\frac{mv}{mv - Lk} \right) - \frac{mgL}{kv} - \frac{Lk^2}{m^2} \right)$$

3.26*. Тіло масою m пустили вниз по похилій площині довжиною S і з кутом α до горизонтальної основи, без початкової швидкості. Похила площина закріплена на висоті над h Землею. Коефіцієнт тертя при русі по похилій площині залежить від швидкості тіла за законом $\mu = \gamma v^2$, де γ – стала. Після відриву від похилої площини тіло рухається за криволінійною траєкторією і падає на відстані L від проекції на Землю точці початку

падіння. Знайти рівняння траєкторії при падінні тіла, якщо опір повітря при падінні пропорційний швидкості тіла із коефіцієнтом k .

$$\left(\begin{aligned} h(x) &= \frac{mg}{k} \left[\frac{gx}{ku \cos \alpha} + \frac{1}{m} x \operatorname{tg} \alpha - \frac{m}{k} \ln \left(1 - \frac{kx}{mu \cos \alpha} \right) \right], u = \sqrt{\frac{1}{\gamma} \operatorname{tg} \alpha (1 - e^{-2\gamma S \cos \alpha})} \\ x &= u \cos \alpha \frac{m}{k} \left(1 - e^{-\frac{k}{m} t} \right), h = \frac{m^2 g}{k^2} \left(\frac{mg}{k} + u \sin \alpha \right) \left(1 - e^{-\frac{k}{m} t} \right) + \frac{mg}{k} t \end{aligned} \right)$$

3.27. Камінь кидають в горизонтальному напрямку з початкової швидкістю v із високої вежі. Сила тертя каменю по повітрі дорівнює $\mathbf{F} = -mkv$. Камінь падає на землю на відстані L від основи вежі. Знайти висоту вежі.

$$\left(h = \frac{g}{k^2} \ln \left(\frac{v}{v - Lk} \right) - \frac{gL}{kv} \right)$$

3.28. Камінь кидають в горизонтальному напрямку з початковою швидкістю v із вежі висотою H . Сила тертя каменю по повітрі дорівнює $\mathbf{F} = -mkv$. Камінь падає на землю на відстані L від основи вежі. Знайти час падіння, як функцію цих величин.

$$\left(t = \frac{kH}{g} + \frac{L}{v} \right)$$

3.29. Плоска шайба масою M лежить на тонкій пластині на відстані L від її краю. Пластину з великою постійною швидкістю висмикують з-під шайби, яка при цьому практично не устигає зміститися. Знайти залежність $x(t)$ відстані, яку проходить шайба, від часу її ковзання по поверхні столу. На яку відстань в результаті зміститься шайба? Вважати, що сила тертя між шайбою і дошкою, шайбою і столом прямо пропорційна швидкості із коефіцієнтом пропорційності γ .

$$\left(x(t) = L \left(1 - e^{-\frac{\gamma}{M} t} \right) \right)$$

3.30. Знайти мінімальну силу, яку необхідно прикласти, щоб перемістити брусок масою m вздовж похилої площини із точки 1 до точки 2, відстань між якими по горизонталі L , а по вертикалі H . Коефіцієнт тертя між бруском і площиною μ . Силу прикладають під кутом β до площини переміщення.

$$\left(F_{\min} = \frac{m(g \sin \alpha + \mu g \cos \alpha)}{\cos \beta + \mu \sin \beta} \right)$$

3.31. Тіло масою m впало з деякої висоти без початкової швидкості на похилу площину з кутом α при основі. Час падіння склав t . Опір повітря при падінні пропорційний швидкості з коефіцієнтом k . Після падіння тіло починає ковзати по похилій площині з коефіцієнтом тертя, пропорційним швидкості $\mu = \gamma v$, де γ – стала. Знайти час руху тіла по похилій площині до повної зупинки. (Вказівка: вважати час взаємодії тіла и площини під час падіння нехтовно малим).

$$\left(t_1 = \frac{1}{\gamma g \cos \alpha} \ln(1 - u \gamma \operatorname{ctg} \alpha), u = \frac{1}{\sin \alpha} \frac{mg}{k} \left(1 - e^{-\frac{k}{m} t} \right) \right)$$

3.32. Тіло масою m впало з висоти h без початкової швидкості на похилу площину з кутом α при основі. Опір повітря при падінні пропорційний квадрату швидкості з коефіцієнтом k . Після падіння тіло починає ковзати по похилій площині з коефіцієнтом тертя, пропорційним швидкості $\mu = \gamma v$, де γ – стала. Знайти час руху тіла по похилій площині до повної зупинки. (Вказівка: вважати час взаємодії тіла и площини під час падіння нехтовно малим).

$$\left(t = \frac{1}{g \gamma \cos \alpha} \ln(1 - \gamma \cdot \operatorname{ctg} \alpha), u = \sqrt{\frac{mg}{k} \left(1 - e^{-\frac{2kh}{m}} \right)} \right)$$

3.33. Човен під вітрилом розвинув швидкість v_0 . Як буде зменшуватись

з часом швидкість руху човна по стоячій воді після спуску вітрила, якщо опір води руху човна можна вважати пропорційним квадрату швидкості з коефіцієнтом k ? Як довго буде рухатись човен? Який шлях він пройде до повної зупинки? Як швидкість буде залежати від пройденого шляху? Розглянути ті ж самі питання у припущенні, що опір води пропорційний першій степені швидкості човна. Порівняти результати.

$$\left(\begin{array}{l} 1. v(t) = \frac{mv_0}{m + ktv_0}, \quad s(t) = \frac{m}{k} \ln \left(1 + \frac{k}{m} v_0 t \right), \quad v = v_0 e^{-\frac{ks}{m}} \\ 2. v(t) = v_0 e^{-\frac{k}{m}t}, \quad s = \frac{m}{k} (v_0 - v(t)), \quad v = v_0 - \frac{sk}{m} \end{array} \right)$$

3.34. Тіло масою m кидають вертикально вгору з початковою швидкістю v_0 . Сила опору середовища пропорційна швидкості руху тіла $F = -\alpha v$. Обчислити швидкість, з якою тіло впаде на Землю, якщо час падіння складає t_1 .

$$\left(v = \frac{mg}{\alpha} \left(1 - e^{-\frac{\alpha t_1}{m}} \right) - v_0 e^{-\frac{\alpha t_1}{m}} \right)$$

3.35. Два бруски з масами m_1 і m_2 сполучені нерозтяжною і невагомою ниткою. Вони рухаються вгору по похилій площині за допомогою сили F , яка направлена під кутом β до похилої площини. Знайти силу натягу нитки між брусками. Коефіцієнти тертя брусків під час руху вздовж площини дорівнюють μ .

$$\left(T = \frac{m_2}{m_1 + m_2} F (\cos \beta + \mu \sin \beta) \right)$$

3.36. Два бруски з масами m_1 і m_2 сполучені нерозтяжною і невагомою ниткою і знаходяться на горизонтальній площині. До них прикладені сили F_1 і F_2 , які діють в протилежні сторони і направлені під кутом α і β відповідно: F_1 прикладена до першого бруска, F_2 – до другого. Знайти

прискорення системи і натяг нитки. Коефіцієнти тертя брусків об поверхню дорівнюють μ_1 і μ_2 відповідно. Вважати, що система рухається в бік сили F_1 .

3.37. Невеличка шайба зісковзує без початкової швидкості з вершини похилої площини з кутом при основі α . Коефіцієнт тертя між шайбою і площиною змінюється з відстанню x від вершини за законом $\mu = kx$, де k – стала. На якій відстані від вершини необхідно поставити упор, щоб після абсолютно пружного удару і відскоку шайба пройшла як можна більший шлях вгору?

$$\left(S = \frac{1}{k} \operatorname{tg} \alpha \right)$$

3.38. Тіло зісковзує без початкової швидкості з вершини похилої площини з кутом при основі α . Коефіцієнт тертя між тілом і похилою площиною змінюється з відстанню x від вершини площини за законом $k = bx$, де b – стала. Знайти час, який проходить тіло від початку руху до його зупинки.

$$\left(t = \frac{\pi}{\sqrt{bg \cos \alpha}} \right)$$

3.39. У момент часу $t=0$ частинці з масою m придали початкову швидкість v_0 , і вона почала рухатись під дією сили опору середовища, яка спрямована проти напрямку швидкості і пропорційна v^β . При яких значеннях показника степені β час руху частинки до повної зупинки скінченний? Окремо розглянути випадок $\beta = 1$. При яких значеннях β шлях, який пройшла частинка до зупинки, скінченний? Окремо розглянути випадок у разі, коли $\beta = 2$.

$$\left(t = \frac{m v_0^{1-\beta}}{\alpha 1-\beta}; s = \frac{m v_0^{2-\beta}}{\alpha 2-\beta} \right)$$

3.40*. Дослідити рух точки в однорідному силовому полі (полі тяжіння) при лінійній залежності сили опору від швидкості $F = -\alpha v$. Вважати, що точка влетіла в поле з початковою швидкістю v_0 . Знайти $v(t)$, $a(t)$, $S(t)$, $v(S)$ (або $S(v)$). Масу точки m вважати відомою.

$$\left(\begin{array}{l} v(t) = \frac{mg}{\alpha} \left(1 - e^{-\frac{\alpha t}{m}} \right) + v_0 e^{-\frac{\alpha t}{m}}, \quad a(t) = e^{-\frac{\alpha t}{m}} \left(g - \frac{\alpha v_0}{m} \right) \\ s(t) = \frac{mg}{\alpha} + \frac{mg}{\alpha} \left(e^{-\frac{\alpha t}{m}} - 1 \right) \left(\frac{m}{\alpha} - \frac{v_0}{g} \right), \quad s(v) = \frac{m}{\alpha} (v - v_0) - \frac{m^2}{\alpha} g \ln \left(\frac{g - \alpha/m v}{g - \alpha/m v_0} \right) \end{array} \right)$$

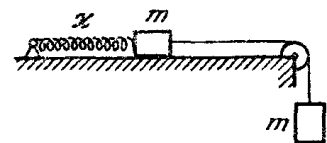
3.41. На похилій площині довжиною L і висотою H знаходиться вантаж масою m . Коефіцієнт тертя між вантажем і площиною дорівнює μ . Яку силу необхідно прикласти до вантажу під кутом β до похилої площини, щоб: 1) втягнути вантаж; 2) стягнути вантаж?

$$\left(\begin{array}{l} 1. F > \frac{mg \left(\frac{H}{L} + \mu \sqrt{1 - H^2/L^2} \right)}{\cos \beta - \mu \sin \beta}; \quad 2. F > \frac{mg \left(\frac{H}{L} - \mu \sqrt{1 - H^2/L^2} \right)}{\cos \beta - \mu \sin \beta} \end{array} \right)$$

3.42. Два бруски масою m кожний лежать на похилій площині з кутом α до горизонту. Яку силу необхідно прикласти вздовж похилої площини до нижнього бруска, щоб витягнути його з-під нерухомого верхнього? Коефіцієнт тертя на обох поверхнях нижнього бруска дорівнює μ .

$$(F > mg(\sin \alpha + 3\mu \cos \alpha))$$

3.43. В системі, яка показана на рис., маса кожного бруска m , жорсткість пружини k , коефіцієнт тертя між бруском і площиною μ . Маса блока і пружини нехтовно малі. Система почала рухатись з нульовою початковою швидкістю при недеформованій пружині. Знайти максимальну швидкість брусків.



$$\left(v_{\max} = g(1 - \mu) \sqrt{\frac{m}{2k}} \right)$$

3.44. На гладкій горизонтальній площині лежить дошка АВ довжини L. На кінці А дошки знаходиться невеличка шайба. Маса дошки у η разів більше маси шайби, коефіцієнт тертя між ними є μ . Яку початкову швидкість необхідно придати шайбі в напрямку від А до В, щоб вона змогла зісковзнути з дошки?

$$\left(v_0^2 > 2kgL \frac{1 + \eta}{\eta} \right).$$

3.45*. Знайти закон руху тіла при падінні у полі тяжіння. Сила опору повітря пропорційна квадрату швидкості $F = -\alpha v^2$. Початкова швидкість тіла дорівнює нулю. (Вказівка: позначити $\frac{mg}{\alpha} = v_{\text{гран}}^2$).

$$\left(v(t) = v_{\text{гран}} \frac{1 - e^{-\frac{2g}{v_{\text{гран}}}t}}{1 + e^{-\frac{2g}{v_{\text{гран}}}t}} = v_{\text{гран}} \operatorname{th} \frac{gt}{v_{\text{гран}}}; x(t) = \frac{v_{\text{гран}}^2}{g} \ln \left(ch \frac{gt}{v_{\text{гран}}} \right) \right)$$

3.46. На яку висоту і за який час підніметься тіло, яке кинули вертикально вгору. Опір повітря пропорційний квадрату швидкості $F = -\alpha v^2$. Початкова швидкість v_0 . (Вказівка: позначити $\frac{mg}{\alpha} = v_{\text{гран}}^2$).

$$\left(t = \frac{v_{\text{гран}}}{g} \operatorname{arctg} \frac{v_0}{v_{\text{гран}}}; H = \frac{v_{\text{гран}}^2}{2g} \ln \frac{v_{\text{гран}}^2 + v_0^2}{v_{\text{гран}}^2} \right)$$

3.47. Знайти залежність швидкості тіла від пройденої відстані при падінні в полі тяжіння. Сила опору повітря пропорційна квадрату швидкості $F = -\alpha v^2$, початкова швидкість тіла дорівнює нулю, максимальна швидкість падіння v_{\max} відома (див. вказівку до задачі 3.45)

$$\left(v = v_{\text{гран}} \sqrt{1 - e^{-\frac{2gH}{v_{\text{гран}}^2}}} \right)$$

3.48. Тіло масою m , яке підкинули вертикально вгору з малою швидкістю v_1 , повернулось назад зі швидкістю v_2 . Опір повітря $F = -\alpha V$, прискорення вільного падіння g . Який час тіло знаходилось у польоті?

$$\left(t = \frac{m}{\alpha} \ln \frac{g + \frac{\alpha}{m} v_1}{g - \frac{\alpha}{m} v_2} \right)$$

3.49 На горизонтальному столі знаходиться клин масою M і кутом α до горизонту, а на ньому – брусок масою m . Нехтуючи тертям, знайдіть прискорення бруска і клина.

$$\left(a_1 = \frac{g \sin \alpha (m + M)}{M + m \sin^2 \alpha}; a_2 = \frac{mg \sin \alpha \cos \alpha}{M + m \sin^2 \alpha} \right)$$

3.50. У плоский конденсатор влітає під кутом α до його обкладань заряджена частинка. Гальмівне електричне поле E у конденсаторі перпендикулярне до обкладань і змінюється від часу за законом $E \propto t^n$. При якому куті α дальність польоту у горизонтальному напрямку буде максимальною?

$$\left(\alpha = \arctg \left(\pm \sqrt{1/n + 1} \right) \right)$$

3.51. На тіло масою m , яке знаходиться на гладкій горизонтальній поверхні, в момент часу $t_0 = 0$ починає діяти постійна за величиною сила $F > mg$. Напрямок сили складає кут α з горизонтом, який змінюється з часом за законом $\alpha = at$, де a – додатна стала. Знайти: 1) швидкість тіла в момент відриву від поверхні; 2) шлях, який пройшло тіло до моменту відриву. $\left(v = g/a; S = F/ma^2 \left[1 - \sqrt{1 - m^2 g^2 / F^2} \right] \right)$

4 ЗАКОНИ ЗБЕРЕЖЕННЯ ІМПУЛЬСУ

Імпульс або кількість руху матеріальної точки визначають як добуток маси точки і її швидкості:

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}$$

З введенням поняття імпульсу другий закон Ньютона записують у вигляді:

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}; \quad \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = \mathbf{F}; \quad \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}$$

Приріст імпульсу за скінченний проміжок часу $\Delta t = t - t_0$ є:

$$\Delta \mathbf{p} = \mathbf{p} - \mathbf{p}_0 = \int_{t_0}^t \mathbf{F}(t) dt$$

де вирази $\int_0^t \mathbf{F}(t) dt$, $\mathbf{F}\Delta t$ називають імпульсом сили за проміжок часу Δt . Ці рівняння означають, що приріст кількості руху точки за деякий проміжок часу дорівнює імпульсу рівнодійної усіх сил, що діють на цю точку. Отже, кількість руху, що набула точка, залежить не лише від величини сили, але і від тривалості її дії.

Імпульс системи матеріальних точок визначають як векторну суму імпульсів окремих складових її частинок:

$$\mathbf{P} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \dots + \mathbf{p}_n = \sum_{i=1}^n \mathbf{p}_i$$

Зміну імпульсу системи точок можна записати таким чином:

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i^{ex} = \mathbf{F}^{ex}$$

де \mathbf{F}^{ex} – результуюча усіх зовнішніх сил, що діють на частинки системи.

Для ізольованої системи матеріальних точок, у якій сума усіх зовнішніх сил, що діють на систему, дорівнює нулю, $\mathbf{F}^{ex} = 0$, тому $\frac{d\mathbf{P}}{dt} = 0$, $\mathbf{P} = \text{const}$,

тобто сумарний імпульс замкнутої ізольованої системи матеріальних точок залишається постійним. *Імпульс ізольованої системи матеріальних точок не змінюється при будь-яких процесах усередині системи.*

У нерелятивістській механіці імпульс $\mathbf{P} = \sum_{i=1}^n \mathbf{p}_i$ системи матеріальних точок дорівнює імпульсу однієї матеріальної точки з масою, рівній сумарній масі часток, *що рухаються із швидкістю центру мас системи.* Радіус-вектор \mathbf{R}_C , що задає положення центру мас, виражається через радіус-вектори $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n$ окремих матеріальних точок системи таким чином:

$$\mathbf{R}_C = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 + \dots + m_n \mathbf{r}_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i} = \frac{1}{M} \cdot \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i$$

Центр мас системи точок – уявна точка. Центр мас системи точок співпадає з її центром тяжіння в однорідному полі тяжіння. Точка центру мас має масу усієї системи точок, а положення її визначається радіус-вектором \mathbf{R}_C .

Імпульс системи матеріальних точок дорівнює добутку маси системи точок на швидкість її центру мас:

$$\mathbf{P} = M \mathbf{V}_C$$

Зміна імпульсу системи матеріальних точок в цьому разі має вигляд:

$$M \frac{d\mathbf{V}_C}{dt} = \mathbf{F}^{ex}$$

де \mathbf{F}^{ex} – сума усіх зовнішніх сил, прикладених до системи матеріальних точок. *Отже, центр мас системи точок рухається, як рухалася б матеріальна точка з масою, рівною M під дією прикладених до неї усіх зовнішніх сил.* Це твердження називають теоремою про рух центру мас.

4.1. Два візки масою m кожний рухаються один за одним без тертя з однаковою швидкістю v_0 . На задньому візку знаходиться людина масою m_1 . У деякий момент часу людина стрибає в горизонтальному напрямку в передній візок так, що його (візка) швидкість стає рівною v_1 . З якою швидкістю відносно заднього візка він стрибнув?

$$\left(u' = \frac{(m_1 + m_2)^2}{m_1 m_2} (v_1 - v_0) \right)$$

4.2. Снаряд у верхній точці траєкторії на висоті h розірвався на два осколки так, що відношення їх мас $m_1/m_2 = 2$. Швидкість снаряда в цій точці v . Осколок масою m_2 полетів в тому ж напрямі із швидкістю $v_2 = 3v_1$. Визначити відстань S між точками падіння осколків. Опором повітря нехтувати.

$$\left(S = 3v \sqrt{\frac{2h}{g}} \right)$$

4.3. Людина масою M стрибає під кутом α до горизонту із швидкістю v_0 . У вищій точці людина кидає назад гирю масою m із швидкістю v_1 відносно себе. Наскільки збільшиться дальність стрибка?

$$\left(\Delta S = S_2 - S_1 = \frac{m}{g(M + m)} v_1 v_0 \sin \alpha \right)$$

4.4. Ящик з піском масою M заковтується на крижану гірку з кутом α до горизонту. На початку гірки ящик мав швидкість v_0 . Коли він пройшов шлях L , в нього попала цеглина масою m , що летіла вертикально вниз. Ящик на мить зупинився. Визначити, з якої висоти падала цеглина, якщо її початкова швидкість дорівнювала нулю?

$$\left(H = \frac{M^2 (v_0^2 - 2gL \sin \alpha)}{2gm^2 \sin^2 \alpha} \right)$$

4.5. На кормі човна довжиною L і масою M сидить людина масою m . В результаті короткочасного поштовху човен з людиною набуває швидкості v_0 і починає рухатися від одного берега каналу шириною d до іншого, при цьому людина переходить з корми на ніс човна. Нехтуючи опором води, знайти час руху човна.

$$\left(t = \frac{1}{v_0} \left(d - \frac{ML}{M+m} \right) \right)$$

4.6. Снаряд, що летів на висоті h горизонтально із швидкістю v_0 , розривається на два рівні осколки. Один осколок через час Δt падає на землю точно під місцем розриву. Визначити швидкість іншого осколка відразу після розриву. Опором повітря нехтувати.

$$\left(v_2 = \sqrt{\left(\frac{h}{t} - \frac{gt}{2} \right)^2 + 4v_0^2} \right)$$

4.7. Тіло маси m кинуте під кутом до горизонту. При польоті тіла над поверхнею Землі між точками A і B модуль зміни імпульсу тіла рівний $|\Delta p|$. Знайти час польоту між A і B . Опором повітря нехтувати.

$$\left(t_B - t_A = \frac{\Delta p}{mg} \right)$$

4.8. Човен масою M і довжиною L знаходиться на нерухомій воді. На кормі і на носі човна сидять два рибалки. Їх маси рівні m_1 і m_2 . Наскільки зміститься човен відносно берега, якщо вони поміняються місцями? Опором води знехтувати.

$$\left(\Delta x = \frac{m_2 - m_1}{M + m_1 + m_2} L \right)$$

4.9. По похилій площині, що утворює кут α з горизонтом, починає зісковзувати без тертя брусок масою M . У той момент, коли брусок пройшов

шлях S , в нього попадає куля масою m , яка летить йому назустріч і застряє у бруску. Швидкість кулі спрямована під кутом β до горизонту (вниз). Брусок при цьому зупинився. З якою швидкістю летіла куля?

$$\left(v_0 = \frac{M \sqrt{2gS \sin \alpha}}{m \cos(\alpha + \beta)} \right)$$

4.10. На нерухомому візку, розташованому навпроти вертикальної стінки, стоїть людина і тримає в руках м'яч масою m . Сумарна маса візка і людини рівна M . В деякий момент часу людина кидає м'яч в горизонтальному напрямку у бік стінки по нормалі до неї із швидкістю u відносно візка і знову ловить його після пружного відскоку від стінки. Яку швидкість V в результаті придбає людина з візком?

$$\left(V = \frac{2Mt}{(M + m)^2} u \right)$$

4.11. Довести, що, якщо закон збереження імпульсу виконується в довільній інерціальній системі відліку, то він виконується і в будь-якій іншій інерціальній системі відліку.

4.12. На нитці, прикріпленій до повітряної кулі масою M , яка вільно висить у повітрі, сидить жук масою m . Він починає рухатись зі сталою відносно нитки швидкістю u вгору. Знайти швидкості жука і кулі відносно Землі.

$$\left(v_{жк} = \frac{Mu}{M + m}, v_k = -\frac{mu}{M + m} \right)$$

4.13. Два однакових візка, на кожному з яких знаходиться людина, рухаються без тертя по інерції назустріч один одному паралельними курсами. Коли візки порівнялись, з кожного з них на другий перестрибнула людина у напрямку, перпендикулярному руху візків. В результаті перший візок зупинився, а швидкість другого стала рівною V . Знайти модулі початкових

швидкостей візків V_1 і V_2 , якщо маса кожного візка M , а маса кожної людини m .

$$\left(V_1 = \frac{m}{M-m}V; V_2 = \frac{M}{M-m}V \right)$$

4.14. Човен стоїть нерухомо у спокійній воді. Людина, яка знаходиться у човні, переходить із носу на корму. На яку відстань S зрушиться човен, якщо маса людини m , маса човна M , довжина човна L . Опором води знехтувати.

$$\left(S = \frac{mL}{M+m} \right)$$

4.15. Два тіла масами m_1 і m_2 рухаються зі швидкостями $\mathbf{v}_1 = (3\mathbf{i} + 4\mathbf{j})$ і $\mathbf{v}_2 = (-2\mathbf{i} + 3\mathbf{j})$ відносно деякої ІСВ. Вони зіштовхуються абсолютно не пружно. Знайти їх швидкість \mathbf{V} після удару.

$$\left(V_x = \frac{1}{m_1+m_2}(3m_1-2m_2); V_y = \frac{1}{m_1+m_2}(4m_1+3m_2) \right)$$

4.16. Механічна система складається з двох кульок, сполучених між собою пружиною, масою якої можна нехтувати. Маса кульок рівні m_1 і m_2 відповідно. В початковий момент пружина не деформована, і кульки утримуються в одній горизонтальній площині на деякій відстані від Землі. Їм надають початкові швидкості: кульці масою m_1 – швидкість \mathbf{v}_1 у вертикальному напрямку, кульці масою m_2 – \mathbf{v}_2 у горизонтальному напрямку. Швидкості кульок знаходяться в одній площині. Нехтуючи опором повітря, знайти величину імпульсу цієї системи у момент, коли її центр мас досягне половини максимальної висоти відносно початкового рівня.

$$\left(P_C = (m_1+m_2)V_C = \sqrt{0.5m_1^2v_1^2 + m_2^2v_2^2}; \operatorname{tg}\beta = \frac{V_{Cy}}{V_{Cx}} \right)$$

4.17. На похилій площині, що утворює кут α з горизонтом, лежить тіло масою M , яке підпоркою утримується від ковзання. У тіло попадає куля масою m , яка летить знизу вгору вздовж похилої площині зі швидкістю v , і застряє в ньому. Коефіцієнт тертя між тілом і похилою площиною $\mu < \operatorname{tg}\alpha$. Через який час тіло повернеться у початкове положення?

$$\left(t = \frac{mv}{g(M+m)} \left(\frac{1}{\sin\alpha + \mu\cos\alpha} + \frac{1}{\sqrt{\sin^2\alpha - \mu^2\cos^2\alpha}} \right) \right)$$

4.18. Ящик з піском масою M лежить на горизонтальній площині, коефіцієнт тертя між ящиком і поверхнею μ . Під кутом α до вертикалі у ящик попадає куля масою m , яка летить зі швидкістю v , і майже миттєво застряє у піску. Через який час ящик зупиниться? При якому μ він залишиться на місці?

$$\left(\Delta t = \frac{mv(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}{\mu g(M+m)}; \operatorname{tg}\alpha < \mu \right)$$

4.19. По похилій площині, що утворює кут α з горизонтом, вгору рухається тіло масою M з початковою швидкістю V_0 . Коефіцієнт тертя між тілом і похилою площиною $k < \operatorname{tg}\alpha$. У тіло попадає куля масою m , яка летить знизу вгору вздовж похилої площини зі швидкістю v , і застряє в ньому у той час, коли тіло пройшло відстань S_1 . Знайти повну відстань, яку пройшло тіло до зупинки. Взаємодію вважати миттєвою.

$$\left(S_2 = S_1 + \frac{1}{2g(\sin\alpha + k\cos\alpha)} \left(\frac{mv + MV}{m + M} \right)^2 \right)$$

4.20. По похилій площині, що утворює кут α з горизонтом, вниз рухається тіло масою M з початковою швидкістю V_0 . Коефіцієнт тертя між тілом і похилою площиною $\mu < \operatorname{tg}\alpha$. У тіло попадає куля масою m , яка летить вниз уздовж похилої площини зі швидкістю v , і застряє в ньому у

той час, коли тіло пройшло відстань S_1 . Знайти повну відстань, яку пройшло тіло до зупинки. Взаємодію вважати миттєвою.

$$\left(S_2 = S_1 - \frac{1}{2g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)} \left(\frac{mv + MV}{m + M} \right)^2 \right)$$

4.21. На горизонтальній поверхні знаходиться дошка масою M , а на дошці – вантаж масою m . У вантаж попадає куля масою $m_1 < m$, яка летить горизонтально зі швидкістю v і застряє в ньому. Коефіцієнт тертя між дошкою та вантажем дорівнює μ . Знайти час, через який закінчиться ковзання вантажу по дошці. Тертям між дошкою та поверхнею нехтувати. Взаємодію вважати миттєвою.

$$\left(t = \frac{m_1 M v}{\mu g (m + M + m_1)(m + m_1)} \right)$$

4.22. На горизонтальній поверхні знаходиться дошка масою M , а на дошці – вантаж масою m . У вантаж попадає куля масою m_1 , яка летить горизонтально зі швидкістю v і застряє в ньому. Коефіцієнт тертя між дошкою та вантажем дорівнює k_1 . Знайти час, через який закінчиться ковзання вантажу по дошці. Коефіцієнт тертя між дошкою та поверхнею дорівнює k_2 . Взаємодію вважати миттєвою.

$$\left(t = \frac{m_1 M v}{g (m + M + m_1)(m + m_1)(k_1 - k_2)} \right)$$

4.23. На горизонтальній поверхні знаходиться дошка масою M , а на дошці – вантаж масою m . У дошку попадає куля масою m_1 , яка летить горизонтально зі швидкістю v і застряє в ній. Коефіцієнт тертя між дошкою та вантажем дорівнює k_1 . Знайти час, через який закінчиться ковзання вантажу по дошці. Коефіцієнт тертя між дошкою та поверхнею дорівнює k_2 . Взаємодію вважати миттєвою.

$$\left(t = \frac{m_1 v}{g [2k_1(M + m + m_1) - k_2 m]} \right)$$

4.24. На горизонтальній поверхні знаходиться дошка масою M , а на дошці – вантаж масою m на відстані L від її кінця. У дошку попадає куля масою m_1 , яка летить горизонтально зі швидкістю v і і застряє в ній. Коефіцієнт тертя між дошкою та вантажем дорівнює k_1 . Знайти швидкість кулі, при якій вантаж упаде з дошки. Коефіцієнт тертя між дошкою та поверхнею дорівнює k_2 . Взаємодію вважати миттєвою.

$$\left(v^2 > \frac{2gL(k_1 + k_2)(M + m + m_1)^2 + 2gLmk_1(M + m + m_1)}{m_1^2} \right)$$

4.25. На горизонтальній поверхні знаходиться дошка масою M , а на дошці – вантаж масою m . У вантаж попадає куля масою m_1 і застряє в ньому. Коефіцієнт тертя між дошкою та вантажем дорівнює k_1 . Знайти швидкість кулі, якщо час, через який закінчиться ковзання вантажу по дошці, дорівнює t . Коефіцієнт тертя між дошкою та поверхнею дорівнює k_2 . Взаємодію вважати миттєвою.

$$\left(v = gt \frac{(m + m_1)}{m_1} \left(\frac{M + m + m_1}{M} \right) (k_1 - k_2) \right)$$

4.26. Спортсмен масою M стрибає під кутом α до горизонту зі швидкістю V_0 . У вищій точці він зустрічається з м'ячем масою m , який летить горизонтально зі швидкістю v . Після захоплення м'яча спортсмен летить далі у тому ж напрямку. Наскільки збільшиться чи зменшиться дальність стрибка?

$$\left(\Delta S = \frac{v_0^2}{g} \sin \alpha \cos \alpha - \frac{mv_0^2}{g(M + m)} \sin \alpha \cos \alpha + \frac{mvv_0}{g(M + m)} \sin \alpha \right)$$

5 РУХ ТІЛ ЗІ ЗМІННОЮ МАСОЮ

Маса тіла при русі може змінюватися, тобто під час руху від нього можуть безперервно відокремлюватися частки речовини, з якої складається це тіло. Або навпаки, до нього може приєднуватись якась частина маси, нові частки. Приклад: рух літака або ракети, що випускає безперервний струмінь газу при згоранні палива. У цих випадках рух літального апарату здійснюється за рахунок сил, що виникають в результаті виверження часток маси, що належать тілу. Тому **другий закон Ньютона в формі, де маса тіла вважається незмінною, не може дати правильного опису руху такого тіла.**

У разі відсутності зовнішніх сил рівняння руху такого тіла може бути виведено із закону збереження імпульсу і має вигляд:

$$M \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\mu \mathbf{u}$$

де $\mu = -\frac{dM}{dt}$ – витрати палива в одиницю часу; \mathbf{u} – відносна швидкість газів, що викидаються ракетою і вважається не змінною в часі. Добуток $\mathbf{F}_T = -\mu \mathbf{u}$ називають реактивною силою. **Реактивна сила виникає тоді, коли частинкам, що викидаються, надається швидкість \mathbf{u} . Сила, протидіюча їй, за третім законом Ньютона прикладена до ракети і спрямована у бік, протилежний до маси, що викидається.**

З останнього рівняння отримують відповідь, як змінюється швидкість ракети при зміні її маси від M_0 до M :

$$v = v_0 - u \ln \frac{M}{M_0}$$

Цей вираз називають **формулою К. Ціолковського**. Зміну маси представляють у вигляді:

$$M = M_0 e^{-\frac{v-v_0}{u}}$$

Формула дає відповідь на питання, як змінюється маса ракети при зміні швидкості від v_0 до v .

Під час дії зовнішніх сил рівняння руху має вигляд:

$$M \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} + \mathbf{u}'\mu'$$

у випадку руху тіла з приєднанням часток (космічний пил, наприклад), в якому $\mathbf{u}'\mu'$ – реактивна сила, що виникає при зіткненні часток з тілом, або

$$M \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} - \mathbf{u}\mu$$

у випадку руху тіла з частками, що відокремлюються (згорання палива у ракети, наприклад). Під силою \mathbf{F} розуміють результуючу усіх зовнішніх сил, що діють на тіло. Тут

$$\mu = -\frac{dM_B}{dt}; \quad \mu' = \frac{dM'}{dt}$$

маса, що відокремлюється і приєднується в одиницю часу з відносною швидкістю \mathbf{u} і \mathbf{u}' відповідно. При одночасному відокремленні і приєднанні часток тіла та дії зовнішніх сил рівняння має вигляд

$$M \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} + \mathbf{u}'\mu' - \mathbf{u}\mu$$

і носить назву рівняння Мещерського, яке описує, зокрема, рух ракет з нерелятивістськими швидкостями у присутності зовнішніх сил. Воно справедливе у будь-якій ІСВ.

5.1. Визначити закон зміни маси ракети під час вертикального підйому в однорідному полі тяжіння: а) з постійною швидкістю; б) з постійним прискоренням. Швидкість витікання газів відносно ракети постійна і дорівнює u .

$$\left(m = m_0 e^{-\frac{g}{u}t}; m = m_0 e^{-\frac{t}{u}(a+g)} \right)$$

5.2. Знайти висоту підйому ракети в однорідному полі тяжіння, якщо маса ракети змінюється згідно з законом $m = m_0 e^{-kt}$, де k – стала. Швидкість витікання газів u вважати постійною. Відомий час τ роботи двигуна ракети.

$$\left(h = \frac{(uk - g)^2 \tau^2}{2g} \right)$$

5.3*. На скільки швидкість, досяжна у вільному польоті за допомогою двоступінчатої ракети більша, ніж у разі одноступінчатої? Швидкість витікання газів одна і та ж і дорівнює u , маса пального в першій і другій ступенях M_1 і M_2 відповідно, маса кожної ступені без пального складає 10% від маси пального в ній.

$$\left(\Delta V = u \ln \left[\frac{(1 + \alpha)(M_1 + M_2)}{\alpha M_1 + \alpha M_2 + M_2} \right] \right)$$

5.4*. Ракета стартує в однорідному полі тяжіння. Маса ракети змінюється за законом $m = m_0 e^{-kt}$, де k – стала. Швидкість витікання газів постійна і дорівнює u . Через час польоту τ двигун ракети відмовив, але ракета за інерцією продовжувала підніматися вгору. Вважати, що опір повітря при роботі двигуна нехтовно малий, а після відмови двигуна опір пропорційний квадрату швидкості $F = -rV^2$, де r – стала. Визначити, на яку висоту піднялася ракета. З якою швидкістю ракета впаде на Землю?

$$\left(H = h_1 + h_2; h_1 = \frac{(uk - g)^2 \tau^2}{2g}; h_2 = \frac{1}{2} \frac{m_0}{r} e^{-k\tau} \ln \left[1 + \frac{r e^{k\tau}}{2m_0 g^2} (uk - g)^2 \tau^2 \right] \right)$$

$$\left(u = \left[\frac{mg}{r} \left(1 - e^{-\frac{2Hr}{m}} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \right)$$

5.5. Знайти залежність швидкості руху кальмара від часу, якщо він витрачає потужність N і вистрілює воду із швидкістю u . Стартова швидкість кальмара дорівнює нулю. Сила тертя $F = -\alpha V$. (Вказівка: дізнатися, яким чином рухається кальмар, а потім вирішувати задачу).

$$\left(V = \mu \frac{u}{\alpha + \mu} \left(1 - e^{-\frac{(\alpha + \mu)t}{m}} \right); \mu = \frac{2N}{u^2} \right)$$

5.6. Дві ракети масою m_0 кожна стартують одночасно у вільному просторі, де силою тяжіння можна нехтувати. Перша ракета рухається з постійною витратою палива μ , друга – з постійним прискоренням a . Визначити відношення їх мас і швидкостей в мить, коли маса першої ракети зменшилася в 2 рази. Відносні швидкості витікання газів у обох ракет однакові, постійні і дорівнюють u .

$$\left(\frac{m_2}{m_1} = 2e^{-\frac{a m_0}{u 2\mu}}; \frac{v_2}{v_1} = \frac{a m_0}{2\mu u \ln 2} \right)$$

5.7. Двигун метеорологічної ракети двічі запускається на короткий час: при зльоті і при поверненні на Землю, щоб забезпечити м'яку посадку. Маса ракети перед стартом M , після посадки – m . Яка маса ракети після старту? Опором повітря під час польоту нехтувати.

$$\left(M' = \sqrt{mM} \right)$$

5.8. Ракета масою m_0 стартує у вільному просторі, де силою тяжіння можна нехтувати. Впродовж часу τ ракета рухалась з постійною витратою палива μ , при цьому маса ракети зменшилася в 2 рази. Потім ракета рухалась впродовж такого ж часу τ з постійним прискоренням a .

Визначити масу і швидкість ракети у момент часу 2τ , якщо відносно ракети швидкість витікання газів постійна і дорівнює u .

$$\left(m = \frac{m_0}{2} e^{-\frac{a m_0}{u 2\mu}}; v = v_1 + v_2 = u \ln 2 + \frac{a m_0}{2\mu} \right)$$

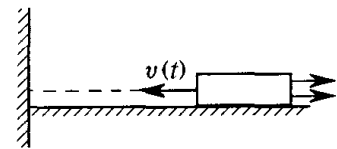
5.9. Космічна станція рухається із швидкістю v_0 у напрямку до центру Місяця. Для м'якої посадки на поверхню Місяця включається на час τ двигун, що викидає газовий струмінь із швидкістю u у напрямку руху станції. В кінці гальмування швидкість зменшилася практично до нуля. В скільки разів зменшилася маса станції за цей час, якщо гальмування відбувається поблизу поверхні Місяця, де прискорення вільного падіння можна вважати постійним і рівним $g/6$?

$$\left(\frac{m_0}{m} = e^{\frac{1}{u} \left(v_0 + \frac{g\tau}{6} \right)} \right)$$

5.10. Ракета рухається прямолінійно під дією реактивної сили. У початковий момент ракета була у стані спокою, а її маса дорівнювала m_0 ; відносна швидкість витікання газів u постійна; дією зовнішніх сил можна нехтувати. 1) При якому значенні швидкості кінетична енергія, що набуває ракета, буде максимальною? 2) При якому значенні маси ракети імпульс, придбаний ракетою, буде максимальним?

$$\left(1) V = 2u; 2) m = \frac{m_0}{e} \right)$$

5.11. На деякій відстані від вертикальної стінки на гладкій горизонтальній поверхні лежить іграшкова ракета. Із стану спокою ракета починає рухатися перпендикулярно стінці у напрямку до неї. Через проміжок часу T_1 відбувається абсолютно пружний удар ракети об стінку. При цьому ракета не міняє своєї орієнтації відносно стінки. Визначити,



через який мінімальний час T_2 після удару швидкість ракети буде дорівнювати нулю. Вважати, що швидкість витікання газів відносно ракети постійна, а маса ракети залежить від часу за законом $m(t) = m_0 - \alpha t$. Час удару об стінку малий у порівнянні з T_1 .

$$\left(T_2 = \frac{m_0^2 - (m_0 - \alpha T_1)^2}{\alpha m_0} \right)$$

5.12. Людина підтримується в повітрі на постійній висоті за допомогою невеликого реактивного двигуна за спиною. Двигун викидає струмінь газів вертикально вниз із швидкістю (відносно людини) u . Витрата палива автоматично підтримується такою, щоб реактивна сила урівноважувала вагу людини з вантажем. Скільки часу людина може протриматися на постійній висоті, якщо її маса m_1 , маса двигуна без палива m_2 , початкова маса палива m_0 . Яку відстань L в горизонтальному напрямі може пролетіти людина, якщо вона розбіглась на землі із швидкістю v , а потім включила двигун?

$$\left(t = \frac{u}{g} \ln \left(1 + \frac{m_0}{m_1 + m_2} \right); L = vt \right)$$

5.13. За яким законом повинна змінюватися в часі маса ракети разом з паливом, щоб вона увесь час лишилась нерухомою в полі тяжіння Землі, якщо швидкість u газового струменя відносно ракети постійна? Визначити час, через який повна маса системи зменшується удвічі, а також час, коли ракета витратить увесь свій запас палива, якщо маса ракети без палива m_1 , а маса палива m_2 .

$$\left(t_{1/2} = \frac{u}{g} \ln 2; t_2 = \frac{g}{u} \ln \frac{m_1 + m_2}{m_1} \right)$$

5.14. За яким законом повинна змінюватися витрата палива $\mu(t)$, щоб в

полі тяжіння з постійним g ракета рухалася вертикально вгору з постійним прискоренням a ? Швидкість витікання газового струменя відносно ракети постійна і дорівнює u .

$$\left(\mu = \frac{g+a}{u} m_0 e^{-\frac{g+a}{u} t} \right)$$

5.15. Ракета летить вертикально вгору в полі тяжіння Землі. Впродовж інтервалу часу тривалістю T швидкість витікання газів з двигуна відносно ракети рівномірно зменшувалася від u до $u/2$. Визначити величину T , якщо за цей час маса ракети зменшилася удвічі, а її швидкість залишилася постійною. Вважати поле тяжіння однорідним.

$$\left(T = \frac{u}{2g} \right)$$

5.16. Космічний корабель стартує з початковою масою m_0 та нульовою початковою швидкістю u в просторі, вільному від поля тяжіння. Маса корабля змінюється у часі за законом: $m = m_0 \exp(-\lambda t)$, швидкість продуктів згорання відносно корабля постійна і дорівнює u . Яку відстань x пройде корабель до того моменту, коли його маса зменшиться у 1000 разів?

$$\left(x = 4.5 \frac{u}{\lambda} \ln^2 10 \right)$$

5.17. Водометний катер стартує зі стану спокою. В одиницю часу двигун катера проганяє масу води μ , забираючи її зі сторони носової частини і викидаючи назад зі швидкістю u . Маса катера M , ширина його D , силу опору води вважати рівною $\mathbf{F} = -(A\eta D)\mathbf{v}$, де η – в'язкість води, що вважається відомою, A – постійний коефіцієнт. Знайти залежність швидкості катера від часу. Оцінити її на початку, відразу після старту. (Вказівка: при $t \rightarrow 0$ розкласти експоненту у ряд).

$$\left(V = \frac{\mu u}{\mu + A\eta D} \left(1 - e^{-\frac{t}{M}(\mu + A\eta D)} \right); V(t \rightarrow 0) \approx \frac{\mu u t}{M} \right)$$

5.18. Спостерігаючи космічний корабель, що пролітає повз Землю, земні астрономи встановили, що швидкість його міняється згідно із законом $v = -v_0 \ln(1 - \beta t)$. Визначити, як повинна залежати від часу маса корабля в припущенні постійності швидкості витікання газів з сопла відносно корабля. Тяжінням нехтувати.

$$\left(m = m_0 (1 - \beta t)^{\frac{v_0}{u}} \right)$$

5.19. На скільки відсотків зменшилася маса ракети, яка впродовж часу t піднімалася з поверхні Землі вертикально вгору з постійною швидкістю v ? Швидкість витікання газів відносно ракети рівна u . Тертям об повітря нехтувати. (Вказівка. Задачу вирішити у припущенні, що: а) прискорення вільного падіння є стала величина; б) прискорення вільного падіння залежить від висоти підйому)

$$\left(\text{а) } \frac{\Delta m}{m} = 1 - e^{-\frac{gt}{u}}; \text{ б) } \frac{\Delta m}{m} = 1 - e^{-\frac{gR_3 t}{u(R_3 + vt)}}, \text{ де } R_3 - \text{радіус Землі} \right)$$

5.20. В початковий момент ракета знаходилась у стані спокою. Потім під дією реактивної сили ракета починає рухатися таким чином, що швидкість u витікання газів відносно ракети постійна. Знайти швидкість v ракети, при якій кінетична енергія, придбана ракетою, буде максимальною. Дією зовнішніх сил нехтувати.

$$(v = 2u)$$

5.21. Для ураження цілі з літака запускають ракету. Літак летить горизонтально на висоті $H = 8$ км із швидкістю $v_0 = 300$ м/с. Маса ракети змінюється за законом $m(t) = m_0 \exp(-t/\tau)$ і зменшується за час польоту до

цілі в e разів. Швидкість витікання газів відносно ракети $u = 1000$ м/с, корпус ракети під час її польоту горизонтальний. Яка відстань L від цілі до точки, над якою знаходився літак у момент запуску ракети? Опір повітря не враховувати.

$$\left(L = \left(v_0 + \frac{u}{2} \right) \sqrt{\frac{2H}{g}} \right)$$

5.22. Ракета починає рухатися в хмарі пилу. Порошинки нерухомі і прилипають до ракети при ударі. Початкова швидкість ракети дорівнює нулю, швидкість витікання газів відносно ракети рівна u , масою корпусу ракети в порівнянні із стартовою масою можна нехтувати. Крім того відомо, що у будь-який момент польоту ракети маса витраченого палива дорівнює масі налиплого пилу. Знайти в такій хмарі максимальну швидкість ракети.

$$\left(v(t) = u \left(1 - e^{-\frac{\mu}{m}t} \right); v_{\max} = u(1 - e^{-1}) \right)$$

5.23. Реактивний корабель масою M приводиться до руху насосом, який забирає воду з річки і викидає її назад з корми корабля. Швидкість струменя води відносно корабля постійна і рівна u , а маса води, яка щомиті викидається насосом, також постійна і дорівнює μ . Знайти модуль швидкості корабля v як функцію часу, а також коефіцієнт корисної дії η системи як функцію величин u і v . Дослідити вираз для коефіцієнта корисної дії на максимум. Силу тертя в насосі і опір води руху корабля не враховувати. (Вказівка: коефіцієнт корисної дії у даному випадку – це відношення приросту кінетичної енергії корабля до приросту витраченої роботи насосу).

$$\left(v = u \left(1 - e^{-\frac{\mu}{m}t} \right); |\eta_{\max}| = \frac{1}{2} \right)$$

5.24*. Ракета стартує в однорідному полі тяжіння. Маса ракети змінюється за законом $m = m_0 e^{-kt}$, де k – стала. Швидкість витікання газів u відносно ракети постійна. Через час τ двигун ракети відмовив, і ракета продовжила підніматися вгору за інерцією. На яку висоту піднялася ракета? Вважати, що опір атмосфери під час роботи двигуна нехтовно малий, а після відмови двигуна – пропорційний квадрату швидкості $F = -r v^2$.

$$\left(H = h_1 + h_2; h_1 = \frac{(uk - g)^2 \tau^2}{2g}; h_2 = \frac{1}{2} \frac{m_0}{r} e^{-k\tau} \ln \left[1 + \frac{r e^{k\tau}}{m_0 g^2} (uk - g)^2 \tau^2 \right] \right)$$

5.25. Ракета масою m_0 стартує з вершини гори висотою h і летить так, що газу увесь час викидаються горизонтально. Нехтуючи опором повітря, підрахувати кінетичну енергію W_k під час удару об Землю. Швидкість витікання газів дорівнює u , витрата палива $\mu = 0.03m_0$ в секунду.

$$\left(W_k = \frac{1}{2} \left(m_0 - 0.03m_0 \sqrt{\frac{2h}{g}} \right) \left[(gt)^2 + \left(u \ln \frac{m_0}{m_0 - 0.03m_0 \sqrt{\frac{2h}{g}}} \right)^2 \right] \right)$$

5.26. По двох горизонтальних рейках рухаються з постійної швидкістю v_0 без тертя по інерції два однакових візка масою M_0 кожний. В деякий момент часу t_0 на обидва візка зверху безперервним струменем починає сипатися пісок таким чином, що маса його зростає лінійно за законом $m = kt$, де k – певна стала. У першого візка є пристрій для безперервного викидання всього насипаного піску у напрямку, перпендикулярному швидкості візка. В другому візку пісок не викидають. Як буде залежить від часу швидкість і переміщення кожного візка? За який час кожен візок пройде відстань L ?

$$\left(\begin{array}{l} v_1(t) = v_0 e^{-\frac{k}{M_0}t}; v_2(t) = v_0 \frac{M_0}{M_0 + kt}; S_1(t) = \frac{M_0 v_0}{k} (1 - e^{-\frac{k}{M_0}t}); \\ S_2(t) = \frac{M_0 v_0}{k} \left(1 + \frac{k}{M_0} t \right); t_1 = \frac{M_0}{k} \ln \frac{1}{1 - \frac{Lk}{M_0 v_0}}; t_2 = \frac{M_0}{k} \left(e^{\frac{Lk}{M_0 v_0}} - 1 \right) \end{array} \right)$$

5.27*. Крижаний метеорит сферичної форми гальмується у атмосфері Землі. Сила тертя об повітря пропорційна його площині і швидкості $F = -\alpha SV$. Швидкість випари речовини пропорційна його площині $\frac{dM}{dt} = -\beta S$, причому у системи відліку метеориту випар ізотропний. Знайти залежність швидкості метеориту від часу, якщо його щільність є ρ , а початковий радіус дорівнює R_0 . Силою тяжіння знехтувати. Початкова швидкість дорівнює V_0 .

$$\left(V = V_0 \left(1 - \frac{\beta}{\rho R_0} t \right)^{\frac{3\alpha}{\beta}} \right)$$

5.28. Однорідна мотузка довжиною $2L$ зісковзує під дією сили тяжіння через трубу зі столу висотою L . Знайти максимальну швидкість мотузки, з якої вона впаде на підлогу, якщо в початковий момент вона знаходилась у стані спокою, а довжина її частини, яка звішувалась, дорівнювала L .

$$(V^2 = 2gL \ln 2 + 1)$$

5.29. Знайти мінімальний запас палива для м'якої посадки ракети на Місяць, якщо гальмовий двигун включається на висоті h над його поверхню ($h \ll R_M$) і працює протягом часу τ . Швидкість ракети на висоті h дорівнює v_0 , маса m_0 , а швидкість газів відносно ракети u .

$$\left(m_{нал} = m_0 \left[1 - \exp \left(-\frac{v_0 + g\tau}{u} \right) \right] \right)$$

5.30. Льодинка починає сповзати з гори з кутом нахилу α . Коефіцієнт тертя між льодинкою і горою є k . В наслідок тертя льодинка розігрівається і тане таким чином, що маса льодинки зменшується протягом часу за законом $m = m_0 - \mu t$. Нехтуючи абсолютною швидкістю частинок, що відділяються, знайти залежність швидкості льодинки від часу.

$$\left(V = g(\sin \alpha - k \cos \alpha) \frac{m_0 t - \mu t^2 / 2}{m_0 - \mu t} \right)$$

5.31. Знайти швидкість ракети на активній ділянці траєкторії на висоті h в однорідному полі тяжіння Землі, якщо маса ракети змінюється за законом $m = m_0 e^{-kt}$, де k – стала.

$$\left(v = \sqrt{2h(ku - g)} \right)$$

5.32. Ракета рухається вгору з прискоренням a в однорідному полі тяжіння. За який час маса ракети зміниться в два рази? Вважати, що швидкість газів відносно ракети постійна і дорівнює u . Опором повітря нехтувати.

$$\left(t = \frac{u \ln 2}{a + g} \right)$$

5.33. Стартова швидкість космічного апарату v , швидкість витікання газів стала і дорівнює u . Нехтуючи опором повітря, знайти такий закон зміни маси апарату від часу, щоб у космонавта не було перевантаження. (Вказівка: використати залежність прискорення вільного падіння g від висоти над рівнем Землі).

$$\left(m = m_0 \exp\left(-\frac{gR_3 t}{u(R_3 + vt)}\right), \text{ де } R_3 \text{ – радіус Землі} \right)$$

5.34. Нехай ракета рухається рівномірно і прямолінійно із швидкістю

v_0 . Для зміни напрямку її руху вмикається маневровий двигун, що викидає струмінь газу зі швидкістю u відносно ракети перпендикулярно до напрямку її швидкості. Початкова маса ракети дорівнює m_0 . Витрату палива $\mu = -\frac{dm}{dt}$ вважати сталою величиною. Знайти повний час розвороту ракети на кут 90° .

$$\left(t = \frac{m_0}{\mu} \left[1 - \exp\left(-\frac{\pi v}{2u}\right) \right] \right)$$

5.35. Використовуючи умови задачі (5.34) знайти, як повинна змінюватись маса ракети, коли вмикається маневровий двигун, щоб траєкторія ракети була дугою кола радіусом R ?

$$\left(m = m_0 \exp\left(-\frac{v^2}{uR}t\right) \right)$$

5.36. Реактивний літак летить горизонтально в атмосфері Землі. Швидкість викиду газів відносно літака постійна і дорівнює u . На літак діє сила опору атмосфери, яка пропорційна швидкості літака $F = -kv$. Як змінюється швидкість літака з часом? Який шлях пролетів літак за час горизонтального польоту? Вважати, що на момент початку відліку часу, тобто, при $t_0 = 0$ $v(t_0) = v_0$. Маса літака змінюється з часом за лінійним законом $m = m_0(1 - \alpha t)$.

$$\left(\begin{aligned} v(t) &= \frac{m_0 \alpha u}{k} - \left(\frac{m_0 \alpha u}{k} - v_0 \right) (1 - \alpha t)^{\frac{k}{\alpha m_0}}, \\ s(t) &= \frac{m_0 \alpha u}{k} t + \frac{m_0}{k + \alpha m_0} \left(\frac{m_0 \alpha u}{k} - v_0 \right) \left(1 - (1 - \alpha t)^{\frac{k}{\alpha m_0} + 1} \right) \end{aligned} \right)$$

6 РЕЛЯТИВІСТСЬКА ДИНАМІКА ТОЧКИ

Якщо виходити з визначення імпульсу, наведеного Ньютоном у вигляді $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$, при релятивістських швидкостях руху закон збереження імпульсу не виконується. *Тому у релятивістському випадку імпульс тіла визначають по-іншому – як вектор, що належить простору СТВ – 4-вимірному псевдо евклідовому простору Мінковського.* Його будують за аналогією з класичним імпульсом як добуток інваріантної маси (маси спокою) на 4-вектор швидкості:

$$\mathbf{P} = m\mathbf{V} = m \frac{d\mathbf{R}}{d\tau}$$

Компоненти 4-вектора імпульсу \mathbf{P} мають вигляд:

$$\mathbf{P}(p_0, p_1, p_2, p_3) = \mathbf{P}(mc\gamma, mv_x\gamma, mv_y\gamma, mv_z\gamma) = \mathbf{P}(mc\gamma, m\mathbf{v}\gamma)$$

Тривимірні частини релятивістського імпульсу визначаються так:

$$\mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = m\mathbf{v}\gamma$$

При $v \ll c$ отримуємо класичний імпульс $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$. Маса є інваріантною величиною, що зберігає своє значення в усіх ІСВ.

Рівняння руху записується у вигляді:

$$\frac{d\mathbf{P}}{d\tau} = \mathbf{F}$$

де τ – власний час, а $\mathbf{F}(f_0, f_1, f_2, f_3)$ – 4-вектор сили. Остаточний вигляд рівняння руху для просторової частини імпульсу має вигляд:

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}\gamma) = \frac{d}{dt} \left(\frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right), \quad \beta = \frac{v}{c}$$

Звідси легко отримати *квазікласичне рівняння руху*

$$m\gamma \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} - \mathbf{v} \left(\frac{\mathbf{F}\mathbf{v}}{c^2} \right)$$

яке можна використати для опису руху заряджених частинок в різних полях, зокрема, в електричних і магнітних.

6.1. Побудувати 4-вектор прискорення і визначити його компоненти.

$$\left(\mathbf{a} = \mathbf{a} \left(\gamma \frac{d}{dt} (\gamma c); \left(\gamma^2 \dot{v}_x + \gamma^4 \frac{v_x}{c^2} (\mathbf{v}\dot{\mathbf{v}}) \right); \left(\gamma^2 \dot{v}_y + \gamma^4 \frac{v_y}{c^2} (\mathbf{v}\dot{\mathbf{v}}) \right); \left(\gamma^2 \dot{v}_z + \gamma^4 \frac{v_z}{c^2} (\mathbf{v}\dot{\mathbf{v}}) \right) \right) \right)$$

6.2. Релятивістська частинка з масою m рухається уздовж осі x згідно із законом $x = \frac{\alpha t^2}{2}$, де α – задана додатна стала. Знайти залежність від часу сили, що діє на частинку.

6.3. У системі відліку K задані 4-швидкості частинки у вигляді 4-вектора з компонентами $\mathbf{V}(v_0, v_1, v_2, v_3)$. У системі K' складові швидкості цієї ж частинки є $\mathbf{V}'(v'_0, v'_1, v'_2, v'_3)$. Система K' рухається уздовж осі x системи K із швидкістю U . Вивести формулу перетворення компонентів швидкості частинки при переході з K в K' і навпаки.

6.4. Знайти вираз для тривимірного прискорення точки з релятивістського рівняння руху під час дії на неї сили \mathbf{F} . (Вказівка: див. лекційний матеріал)

6.5. Довести, що інтервал власного часу частинки, що рухається, є інваріантом і визначити значення цього інваріанту.

6.6. Нехай система відліку K' рухається вздовж осі x системи K із швидкістю U . В системі K рухаються назустріч одна одній дві абсолютно однакові матеріальні точки масою m кожна із швидкістю v відносно K , їх швидкості спрямовані також вздовж осі x . Після лобового (центрального) абсолютно не пружного зіткнення в системі K точки залишаються у стані

спокою. Розгляньте той же процес у системі відліку K' і доведіть, що в ній не виконується закон збереження імпульсу в разі визначення його у ньютонівському вигляді.

6.7. Нехай у системі K здійснюється нецентральне абсолютно пружне зіткнення двох матеріальних частинок (див. умови попередньої задачі). Розгляньте той же процес у системі відліку K' і доведіть, що в ній не виконується закон збереження імпульсу в разі визначення його у ньютонівському вигляді.

6.8. Система K' рухається уздовж осі x системи K із швидкістю U . Вивести формулу перетворення компонентів 4-сили \mathbf{F} , яка діє на частинку, при переході з K в K' і навпаки. (Вказівка: використати відношення (γ'/γ) із рішення задачі 6.3). Проаналізувати отримане рішення у випадку відсутності дії сили в системі K та у випадку, коли відношення $\frac{U}{c} \ll 1$.

$$\left((\mathbf{F}'\mathbf{v}') = \frac{(\mathbf{F}\mathbf{v}) - UF_x}{1 - \frac{U}{c^2}v_x}; F'_x = \frac{F_x - \frac{U}{c^2}(\mathbf{F}\mathbf{v})}{1 - \frac{U}{c^2}v_x}; F'_y = \frac{F_y \sqrt{1 - \frac{U^2}{c^2}}}{1 - \frac{U}{c^2}v_x}; F'_z = \frac{F_z \sqrt{1 - \frac{U^2}{c^2}}}{1 - \frac{U}{c^2}v_x} \right)$$

6.9. Нехай система відліку K' рухається уздовж осі x системи K із швидкістю U . На частинку в системі K діє 3-вимірна сила \mathbf{F} , але частинка знаходиться і цій системі у стані спокою. Використовуючи формули перетворення 4-векторів, проаналізувати рух частинки в системі відліку K' : з якою швидкістю рухається частинка в K' -системі; які компоненти сили здійснюють роботу над частинкою і чому?

$$\left((\mathbf{F}'\mathbf{v}') = -UF_x; F'_x = F_x; F'_y = F_y \sqrt{1 - \frac{U^2}{c^2}}; F'_z = F_z \sqrt{1 - \frac{U^2}{c^2}}; \mathbf{v}' = -\mathbf{U}; F_y, F_z \perp \mathbf{v}' \right)$$

7 РОБОТА І ЕНЕРГІЯ. ЗАКОНИ ЗБЕРЕЖЕННЯ

Роботою сили \mathbf{F} на елементарному переміщенні $d\mathbf{r}$ називають проекцію цієї сили на напрямок переміщення, помножений на саме переміщення:

$$\delta A = \mathbf{F} d\mathbf{r} = F dr \cos \alpha$$

Тут α – кут між векторами \mathbf{F} і $d\mathbf{r}$. Підсумовуючи це співвідношення за всіма елементарними відрізками під час переміщення частинки від точки 1 до точки 2 траєкторії, можна знайти роботу на всьому шляху. Робота визначається інтегруванням сили уздовж шляху переміщення L . Ця величина може набувати як додатних, так і від'ємних значень – все залежить від кута між силою і переміщенням:

$$A_{1,2} = \int_1^2 \delta A = \int_1^2 \mathbf{F} d\mathbf{r} = \int_L \mathbf{F} d\mathbf{r} = \int_L \delta A$$

Потужність – робота, що здійснюється силою в одиницю часу:

$$\mathbb{P} = \frac{\delta A}{dt} = \mathbf{F} d\mathbf{r} = \mathbf{F} \mathbf{v}$$

Робота сили \mathbf{F} (де \mathbf{F} можна вважати як результуючу усіх сил, що діють на матеріальну точку) пов'язана з приростом деякої величини, яку називають кінетичною енергією:

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \mathbf{F} d\mathbf{r}; \int_{v_1}^{v_2} d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \int_{r_1}^{r_2} \mathbf{F} d\mathbf{r}$$

Величину

$$T = \frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2}(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) = \frac{p^2}{2m}$$

називають кінетичною енергією частинки. *Кінетична енергія характеризує здатність матеріальної частинки виконувати роботу.*

Приріст кінетичної енергії частинки в процесі деякого скінченного

переміщення дорівнює сумарній роботі всіх сил, що діють на частинку. **Це теорема про зміну кінетичної енергії.**

Центральні або центральносиметричні сили – це сили, спрямовані до однієї точки або від однієї точки – силового центру, залежать тільки від відстані до цього центру, і спрямовані уздовж радіус-вектора, що з'єднує силовий центр і точку. Центральна сила може бути представлена у вигляді:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = F(\mathbf{r}) \frac{\mathbf{r}}{r}$$

Робота центральних сил не залежить від шляху переміщення в полі цих сил, а залежить тільки від характеру взаємодії і від значень \mathbf{r}_1 , \mathbf{r}_2 – початкової і кінцевої відстані між частинкою і силовим центром:

$$A_{1,2} = \int_1^2 F(\mathbf{r}) dr$$

Ця дає можливість введення поняття потенціальної енергії частинки в полі таких сил:

$$A_{PO} = \int_P^O \mathbf{F} d\mathbf{r} = U(\mathbf{r})$$

де $U(\mathbf{r})$ – деяка скалярна функція векторного аргументу – функція координат, яку називають **потенціальною енергією** частинки в цьому полі. Таким чином, **потенціальна енергія – це робота, яка здійснюється результуючою силою \mathbf{F} поля, що діє на матеріальну точку, і переміщує її із положення з радіус-вектором \mathbf{r}_1 в положення з радіус-вектором \mathbf{r}_2 .** Якщо така скалярна функція координат існує, то сила, що діє на частинку, може бути представлена у вигляді

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\text{grad}U(\mathbf{r}) = -\vec{\nabla}U(\mathbf{r})$$

Якщо функція $U = U(\mathbf{r})$ що є тільки функцією координат, то силу, що

діє на матеріальну точку називають **консервативною**. **Робота, яка здійснюється консервативною силою, не залежить від шляху, по якому рухається частинка, а визначається тільки значеннями потенціальної енергії на початку і в кінці шляху:**

$$A_{1,2} = -\Delta U; \Delta U = U_2 - U_1 = U(\mathbf{r}_2) - U(\mathbf{r}_1)$$

Справедливо і зворотне твердження: якщо робота під час переміщення частинки в постійному силовому полі з точки 1 в точку 2 не залежить від форми траєкторії, по якій частинка переміщається з точки 1 в точку 2, то на частинку діє консервативна сила.

Повною механічною енергією системи матеріальних взаємодіючих точок називають величину

$$E = T + U$$

яка складається з кінетичної енергії точок і власної потенціальної енергії їх взаємодії. **В інерціальній системі відліку повна механічна енергія ізольованої системи, що складається з довільного числа взаємодіючих точок, в якій відсутні дисипативні сили, зберігається.**

Кінетична енергія системи складається з кінетичної енергії її руху як цілого із швидкістю, рівною швидкості центру мас, і кінетичної енергії точок по відношенню до центру мас. **Це твердження називають теоремою Кеніга.**

7.1. На похилій площині з кутом α до основи з початковою швидкістю v_0 зверху вниз пускають брусок масою m_1 . Коефіцієнт тертя між бруском та площиною дорівнює k . Пройшовши шлях S , брусок бічною поверхнею пружно зіштовхується з нерухомою кулькою масою m_2 , яка підвішена на нитці довжиною L . Удар центральний, миттєвий. Після цього брусок проходить ще деяку відстань і зупиняється, а кулька відхиляється на

деякий кут. Визначити кут відхилу кульки, натяг нитки при цьому куті і повний шлях, що пройшов брусок до зупинки.

$$\left(\begin{array}{l} \cos \beta = 1 - \frac{u^2}{2gL}, \quad T = mg \cos \beta, \quad u = \frac{2m_1 \cos \alpha}{m_1 \cos^2 \alpha + m_2} v, \\ S_1 = \frac{v'^2}{2g(\sin \alpha - k \cos \alpha)}, \quad v' = v \frac{m_1 \cos^2 \alpha - m_2}{m_1 \cos^2 \alpha + m_2}, \quad S_2 = S + S_1 \end{array} \right)$$

7.2. На похилій площині з кутом α до основи з початковою швидкістю v_0 вгору штовхають брусок масою m_1 . Коефіцієнт тертя між бруском та площиною дорівнює k . Пройшовши шлях S , брусок бічною поверхнею пружно зіштовхується з нерухомою кулькою масою m_2 , яка підвішена на нитці довжиною L . Удар центральний, миттєвий. Після цього брусок проходить вниз ще деяку відстань і зупиняється, а кулька відхиляється на деякий кут. Визначити кут відхилення, натяг нитки при цьому куті, а також повний шлях, який пройшов брусок з початку руху до зупинки.

7.3. Бруску масою M на похилій площині з кутом α до горизонту надали спрямовану вгору початкову швидкість V_0 . Після проходження деякої відстані в його бічну поверхню попадає невеличка шайба масою m , що летить в тому ж напрямку зі швидкістю v , спрямованою під кутом β до напрямку руху бруска. Після взаємодії брусок продовжує рухатися вгору ще на відстань S . Знайти повну відстань, яку пройшов брусок. Коефіцієнт тертя бруска по площині дорівнює k . Взаємодія абсолютно пружна, миттєва. Поверхні пружно взаємодіючих тіл абсолютно гладкі.

7.4. Бруску масою M на похилій площині з кутом α до горизонту надали спрямовану вгору початкову швидкість V_0 . Після проходження деякої відстані на його бічну поверхню налітає зі швидкістю v невеличка шайба масою m , яка рухається у тому ж напрямку паралельно поверхні похилої площини. Взаємодія абсолютно пружна, миттєва. Після взаємодії

брусок продовжує рухатися вгору ще на відстань S . Знайти повну відстань, яку пройшов брусок. Коефіцієнт тертя бруска по площині дорівнює k . Поверхні пружно взаємодіючих тіл абсолютно гладкі.

7.5. Невеликий брусок масою M пройшов вниз по похилій площині з кутом α до горизонту відстань L без початкової швидкості. У цей час він зіштовхується бічною поверхнею з тіла масою m , яке летить йому назустріч під кутом β до напрямку його руху. Вважаючи взаємодію абсолютно пружною, миттєвою, а поверхні взаємодіючих тіл абсолютно гладкими, знайти, з якою швидкістю має рухатись тіло m , щоб брусок пройшов вгору ту ж відстань L . Коефіцієнт тертя між бруском та площиною дорівнює k .

$$\left(v = \frac{\sqrt{2gL(\sin \alpha + k \cos \alpha)}(M + m) + \sqrt{2gL(\sin \alpha - k \cos \alpha)}(M - m)}{2m \cos \beta} \right)$$

7.6. Кульку масою m , яка підвішена на невагомій нерозтяжній нитці довжиною L відводять на кут β і відпускають. У момент проходження положення рівноваги вона зіштовхується з бічною поверхнею бруска масою M , який рухається по похилій площині з кутом α до основи зверху вниз з початковою швидкістю v_0 . Взаємодія абсолютно пружна, центральна. Коефіцієнт тертя між бруском та площиною дорівнює k . До зіткнення брусок пройшов шлях S . Визначити кут відхилення кульки після взаємодії, натяг нитки при цьому куті і шлях, що пройшов брусок до зупинки.

7.7. Кулька масою m яка підвішена на невагомій нерозтяжній нитці довжиною L . Її відводять на кут β і відпускають. У момент проходження положення рівноваги вона пружно зіштовхується з бічною поверхнею бруска масою M , який рухається уздовж похилої площини з кутом α до основи знизу вверх з початковою швидкістю v_0 . Удар центральний, абсолютно пружний. Коефіцієнт тертя між бруском та площиною дорівнює

к. До зіткнення брусок пройшов шлях S . Визначити кут відхилення кульки після взаємодії, натяг нитки при цьому куті і шлях, що пройшов брусок до зупинки.

7.8. Кульку масою m , яка підвішена на невагомій нерозтяжній нитці довжиною L , відводять на деякий кут і відпускають. У момент проходження положення рівноваги кулька абсолютно пружно зіштовхується з бічною поверхнею бруска масою M , який рухається уздовж похилої площині з кутом α до основи зверху вниз з початковою швидкістю v_0 . Удар центральний, абсолютно пружний. Коефіцієнт тертя між бруском та площиною дорівнює k . До зіткнення брусок пройшов шлях S . Кулька після взаємодії відхилилась на кут γ . Визначити початковий кут β і натяг нитки при цьому куті.

7.9. Кульку масою m , яка підвішена на невагомій нерозтяжній нитці довжиною L , відводять на кут β і відпускають. У момент проходження положення рівноваги вона абсолютно пружно зіштовхується з бічною поверхнею бруска масою M , який рухається уздовж похилої площини з кутом α до основи зверху вниз з початковою швидкістю v_0 . Удар центральний, абсолютно пружний. Коефіцієнт тертя між бруском та площиною дорівнює k . До зіткнення брусок пройшов деякий шлях. Після взаємодії брусок пройшов вгору шлях S_1 . Знайти шлях, що пройшов брусок до взаємодії.

7.10. Кульку масою m , яка підвішена на невагомій нерозтяжній нитці довжиною L , відводять на кут β і відпускають. У момент проходження положення рівноваги вона пружно зіштовхується з бічною поверхнею бруска масою M , який рухається уздовж похилої площини з кутом α до основи знизу вверх з початковою швидкістю v_0 . Удар центральний, абсолютно пружний. Коефіцієнт тертя між бруском та площиною дорівнює k . До зіткнення брусок пройшов деякий шлях. Після взаємодії брусок

пройшов вниз шлях S_1 . Знайти шлях, що пройшов брусок до взаємодії.

7.11. Кульку масою m , яка підвішена на невагомій нерозтяжній нитці довжиною L , відводять на деякий кут і відпускають. Під час проходження положення рівноваги вона зіштовхується з бічною поверхнею бруска масою M , який рухається по похилій площині з кутом α до основи знизу вверх з початковою швидкістю v_0 . Коефіцієнт тертя між бруском і площиною дорівнює k . Взаємодія абсолютно пружна, центральна. До зіштовхування брусок пройшов шлях S . Кулька після взаємодії відхилилась на кут γ . Визначити початковий кут β і натяг нитки при цьому куті.

7.12. На бічну поверхню нерухомого бруска масою M , який знаходиться на похилій площині з кутом α до горизонту, налітає шайба масою m зі швидкістю v , яка рухається паралельно поверхні похилої площини. Брусок починає рухатися вниз. Знайти відстань, яку пройшов брусок. Коефіцієнт тертя бруска по площині дорівнює k . Взаємодія шайби і бруска абсолютно пружна. Поверхні пружно взаємодіючих тіл абсолютно гладкі.

7.13. В бічну поверхню нерухомого бруска масою M , який знаходиться на похилій площині з кутом α до горизонту, влучає шайба масою m , яка рухається паралельно поверхні площини, і брусок починає рухатись вгору. З якою швидкістю v летіла шайба, якщо брусок пройшов відстань S ? Коефіцієнт тертя бруска по площині дорівнює k . Взаємодія шайби і бруска абсолютно пружна. Поверхні пружно взаємодіючих тіл абсолютно гладкі.

7.14. По закріпленій похилій площині висотою h і з кутом α до горизонту з початковою швидкістю v_0 рухається вниз брусок масою m_1 . Коефіцієнт тертя бруска по площині дорівнює μ_1 . Після спуску з похилої площини брусок продовжує рухатись по горизонтальній поверхні з коефіцієнтом тертя μ_2 . Пройшовши по горизонтальній площині відстань L_1 , він абсолютно пружно зіштовхується з невеличкою шайбою масою m_2 ,

яка летить йому назустріч зі швидкістю V . Удар центральний, абсолютно пружний. Яку відстань пройде брусок вгору вздовж похилої площини після зіткнення? Розміри бруска вважати значно меншими відстаней, які він проходить.

7.15. Брусок масою M на похилій площині з кутом α до горизонту рухається вниз з початковою швидкістю V_0 . Після проходження деякої відстані на його бічну поверхню налітає невеличка шайба масою m , яка рухається йому назустріч паралельно поверхні площини. Після абсолютно пружної взаємодії шайба відлітає від бруска зі швидкістю v_1 , а брусок починає рухатись вгору і проходить до зупинки відстань L_1 . Яку відстань пройшов брусок до зіткнення з шайбою? Коефіцієнт тертя бруска по площині дорівнює k . Взаємодія тіл абсолютно пружна. Поверхні пружно взаємодіючих тіл абсолютно гладкі.

7.16. Брусок масою M пустили вниз по похилій площині з кутом α до горизонту з початковою швидкістю V_0 . Після проходження відстані S у бічну поверхню бруска влучає шайба масою m , яка летить у той же бік зі швидкістю v паралельно поверхні площини. Після абсолютно пружної взаємодії брусок проходить ще деяку відстань S_1 вниз до упору, абсолютно пружно відбивається від нього і проходить вгору ще відстань S_2 до зупинки. Коефіцієнт тертя бруска по поверхні похилої площини під час рухів дорівнює μ . Знайти відстань S_1 .

7.17. Брусок масою M пустили вгору по похилій площині з кутом α до горизонту з початковою швидкістю V_0 . Після проходження відстані S в бічну поверхню бруска влучає шайба масою m , яка летить у той же бік зі швидкістю v паралельно поверхні площини. Після абсолютно пружної взаємодії брусок проходить ще деяку відстань S_1 вгору до упору, абсолю-

тно пружно відбивається від нього і проходить вниз ще відстань S_2 до зупинки. Коефіцієнт тертя бруска по поверхні похилої площини весь час руху дорівнює μ . Знайти відстань S_1 .

7.18. Брусок масою M , який підвішений на жорсткому невагомому стержні довжиною L , відводять на кут α і відпускають з початковою швидкістю V_0 . Після проходження положення рівноваги і відхилення на кут $\beta < \alpha$ у протилежний бік у бічну поверхню бруска влучає гумова кулька масою m , яка летить зі швидкістю v . Знайти кут відхилення бруска γ після абсолютно пружної взаємодії.

7.19. Від упору, встановленого на похилій площині з кутом α до горизонту, з початковою швидкістю V_0 пускають вниз брусок масою M . Після проходження шляху S в нього попадає куля масою m , яка летить зі швидкістю V йому назустріч уздовж похилої площини, і застряє у ньому. Через який час після абсолютно пружного удару об упор брусок з кулею знов пройде той же самий шлях? Коефіцієнт тертя складає $\mu < \operatorname{tg} \alpha$.

7.20. Теліжка масою M рухається по абсолютно гладкій горизонтальній поверхні зі швидкістю v . На її передній край кладуть брусок масою $m < M$ з нульовою початковою швидкістю. Знайти коефіцієнт тертя між бруском і теліжкою, якщо брусок після проходження відстані L відносно теліжки почав рухатись разом з теліжкою.

$$\left(k = \frac{Mv^2}{2gL(M + m)} \right)$$

7.21. З клином масою M і кутом α при основі, що знаходиться в стані спокою на гладкій горизонтальній поверхні, абсолютно пружно зіштовхується маленька кулька масою m . Швидкість кульки у момент удару рівна v_0 і спрямована перпендикулярно поверхні клина. Визначити швидкості тіл після зіткнення.

$$\left(V_x = \frac{2v_0 \sin \alpha}{1 + \frac{M}{m}}; v_x = -v_0 \sin \alpha \frac{M - m}{M + m} \right)$$

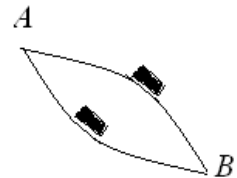
7.22. Від упору, встановленого на похилій площині з кутом α до горизонту, з початковою швидкістю V_0 пускають вгору брусок масою M . Після проходження шляху S в нього попадає куля масою m , яка летить зі швидкістю v йому на зустріч уздовж похилої площини. Взаємодія тіла і кулі абсолютно пружна. Через який час після абсолютно пружного удару об упор брусок знов пройде той же самий шлях? Коефіцієнт тертя складає $\mu < \operatorname{tg} \alpha$.

$$\left(t = \frac{V_2 - \sqrt{V_2^2 - 2gS(\sin \alpha - k \cos \alpha)}}{g(\sin \alpha - k \cos \alpha)}, V_2^2 = V_1^2 - 2gS(\sin \alpha - k \cos \alpha), \right. \\ \left. V_1 = \frac{2mv + (M + m)V}{M + m}, V = \sqrt{V_0^2 - 2gS(\sin \alpha - k \cos \alpha)} \right)$$

7.23. На ідеально гладкому горизонтальному столі лежить квадратна рамка масою M . У середині рамки починає рухатися кулька масою m із швидкістю v_0 , спрямованою уповдовж лінії, що сполучає середини суміжних сторін рамки. Визначити, наскільки зменшиться кінетична енергія кульки після двох ударів її об рамку. Удари вважати абсолютно пружними.

$$\left(\Delta E_k = \frac{2m^2 M}{(M + m)^2} v_0^2 \right)$$

7.24. Брусок зісковзує з точки A в точку B по двох викривлених похилих поверхнях, що проходять через точки A і B : один раз по опуклій дузі, другій, – по увігнутій. Обидві дуги мають однакову кривизну, і коефіцієнт тертя в обох випадках один і той же. У якому випадку швидкість тіла в точці B більше і чому?

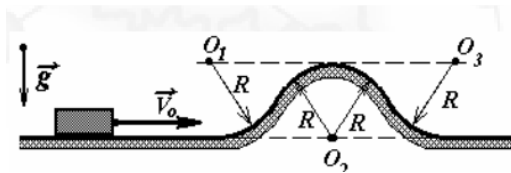


(У випадку руху по опуклій)

7.25. Легку кульку масою m обережно укладають на масивну кулю масою M і відпускають обидві кулі без початкової швидкості. Система куль падає, зберігаючи вертикальне положення, з висоти h на абсолютно пружну горизонтальну плиту. Визначити, на яку граничну висоту підніметься після відскоку легка кулька. Опором повітря нехтувати.

$$(h_m \rightarrow 9h; h_M \rightarrow h)$$

7.26. Шайба, що ковзає по горизонтальній поверхні, із швидкістю v_0



наїжджає на гірку, профіль якої складається з трьох дотичних кіл радіусом R кожна (O_1, O_2, O_3 – центри кіл, див. рис.). При якій

швидкості v_0 шайба здолає гірку без відриву?

$$(v_0^2 \geq 3gR \sin \alpha)$$

7.27. Три абсолютно пружних кулі з масами m_1, m_2, m_3 знаходяться на одній прямій в стані спокою. Потім куля m_1 ударяє кулю m_2 з відомою швидкістю v_1 . Якою повинна бути маса m_2 другої кулі, щоб після її удару по кулі m_3 швидкість кулі m_3 була найбільшою?

$$(m_2 = \sqrt{m_1 m_3})$$

7.28. Чи є консервативною сила $\mathbf{F} = \mathbf{a}$, де \mathbf{a} – деякий сталий вектор? Те ж саме для сили $\mathbf{F} = \alpha \mathbf{r}$, де α – деяка стала, і для сили $\mathbf{F} = [\mathbf{a} \times \mathbf{r}]$, де \mathbf{a} – деякий сталий вектор?

7.29. Чи є консервативними сила $\mathbf{F} = \mathbf{a}(\mathbf{a}\mathbf{r})$, де \mathbf{a} – деякий сталий вектор, і сила $\mathbf{F} = (\mathbf{a}(\mathbf{b}\mathbf{r}))$, де \mathbf{a}, \mathbf{b} – деякі сталі вектори?

7.30. Знайти силу, що діє на тіло, якщо потенціальна енергія тіла має

вигляд:

$$\text{а) } U = -\frac{GMm}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$\text{б) } U = \frac{GMm}{2R^3}(x^2+y^2+z^2) - \frac{3GMm}{2R}, \text{ де } M, m, R - \text{ сталі.}$$

$$\left(\mathbf{F} = -G \frac{Mm}{r^3} \mathbf{r}; \mathbf{F} = -G \frac{Mm}{R^3} \mathbf{r} \right)$$

7.31. Потенціальна енергія частинки залежить від координат \mathbf{r} згідно із законом $U(\mathbf{r}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{r}$, де \mathbf{a} – деякий сталий вектор. Знайти силу \mathbf{F} . Як виглядають екіпотенціальні поверхні і силові лінії? Те ж для випадків $U = ar^2$, $U = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})^2$, $U = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{r})$

7.32. Потенціальна енергія частинки залежить від координат \mathbf{r} згідно із законом $U = [\mathbf{a} \times \mathbf{r}]^2$. Знайти силу \mathbf{F} . Те ж для випадку $U = -x/r^2$.

7.33*. Важка частинка масою M зіштовхується з нерухомою частинкою масою m . На який максимальний кут α_{\max} може відхилитися важка частинка після удару? Зіткнення – абсолютно пружне, нецентральне.

$$\left(\sin \alpha_{\max} \leq \frac{m}{M} \right)$$

7.34*. Важка частинка масою M абсолютно пружно зіштовхується з легкою частинкою масою m . На який максимальний кут α_{\max} може відхилитися важка частинка після удару? Швидкість важкої і легкої частинок спрямовані в один бік і дорівнюють відповідно v_1 і v_2 . Зіткнення нецентральне.

$$\left(\sin \alpha = \frac{m(v_1 - v_2)}{Mv_1 + mv_2} \right)$$

7.35. Маленька кулька підвішена в точці на нитці довжиною L . У точці O на відстані $L/2$ нижче точки підвісу в стінку вбитий цвях. Кульку

відводять так, що нитка займає горизонтальне положення. В якій точці траєкторії зникає натяг нитки? Як далі рухатиметься кулька? На яку максимальну висоту y_{\max} від точки О підніметься кулька? У якій точці кулька перетне вертикаль, що проходить через точку підвісу?

$$\left(\cos \alpha = \frac{2}{3}; y_{\max} = \frac{23}{54}L; y = \frac{L}{3} \right)$$

7.36. На гладкому горизонтальному столі лежать гладкі кульки масою m і $2m$, пов'язані натягнутою ниткою довжиною L . Третя кулька масою m налітає на кульку масою m із швидкістю v , спрямованою перпендикулярно до нитки. Знайдіть натяг нитки і прискорення кульки $2m$. Масою нитки нехтувати. Зіткнення кульок абсолютно пружне.

$$\left(T = \frac{3mv_1^2}{2L}; a = \frac{3v_1^2}{4L} \right)$$

7.37. На жорсткій горизонтальній поверхні лежать два сполучені недеформованою пружиною бруски масами m_1 і m_2 . Яку найменшу горизонтальну силу F_{\min} необхідно прикласти до першого бруска, щоб зрушити другий брусок? Коефіцієнт тертя брусків по горизонтальній поверхні дорівнює μ .

$$\left(F_{\min} = g \left(m_1 + \frac{m_2}{2} \right) \right)$$

7.38. Суцільне сферичне тіло масою M підвішене на нитці довжиною L . Його відводять від положення рівноваги на кут α і відпускають. У момент проходження тілом положення рівноваги в нього попадає куля масою m , що летить йому назустріч зі швидкістю v_1 . Куля пробиває тіло і вилітає з нього горизонтально із швидкістю v_2 , після чого тіло продовжує рухатися в тому ж напрямку. На який максимальний кут відхилиться тіло після попадання в нього кулі? Маса тіла вважати незмінною, діаметр тіла –

нехтовно малим порівняно з довжиною нитки.

$$\left(\cos \varphi = 1 - \frac{\left[V + \frac{m}{M}(v_2 - v_1) \right]^2}{2gL}, V = \sqrt{2gL(1 - \cos \alpha)} \right)$$

7.39. На гладкий горизонтальний стержень насаджені дві однакові кулі і між ними куля масою m . Кулі можуть ковзати вздовж стержня без тертя. У початковий момент часу крайні кулі нерухомі, а середній надається деяка швидкість. Визначити, при яких значеннях маси M крайніх куль середня здійснить більше двох зіткнень з кулями. Удари вважати абсолютно пружними.

$$(M > (2 + \sqrt{5})m)$$

7.40. Частинка масою m_1 налітає зі швидкістю v на нерухому частинку масою m_2 . Після пружного нецентрального удару перша частинка m_1 відхиляється на максимально можливий кут. Знайти швидкості частинок після взаємодії.

$$\left(v_1 = v \sqrt{\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}}; v_2 = v \sqrt{\frac{2m_1}{m_1 + m_2}} \right)$$

7.41. Шпилька, яка складається з маленької важкої кульки і легкого стержня довжиною L , починає падати з вертикального положення з краю шафи висотою H . На яку відстані від шафи впаде шпилька на підлогу. Опором повітря знехтувати. (Вказівка: вважати, що $L \ll H$, тому можна припустити, що початкове відхилення від шафи під час падіння нехтовно мале.)

$$\left(x = L \frac{\sqrt{5}}{3} + \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2}{3}} gL \left(\frac{-v \sin \alpha \pm \sqrt{v^2 \sin^2 \alpha + 2gH}}{g} \right) \right)$$

7.42. Дві кульки однакової маси m сполучені невагомою пружиною жорсткістю k і довжиною L . Вони лежать нерухомо на гладкому горизонтальному столі. Третя кулька масою m рухається зі швидкістю v_0 по лінії, яка сполучає центри обох кульок і пружно ударяється з однією з них. Знайти максимальну відстань між кулями з пружиною в процесі їх подальшого руху. Вважати час удару малим в порівнянні з часом деформації пружин.

$$\left(L_{\max} = L + v_0 \sqrt{\frac{m}{2k}} \right)$$

7.43. По похилій площині з кутом α до горизонту зісковзує шайба і в кінці спуску вдаряє стінку, яка перпендикулярна похилій площині. На яку висоту підніметься шайба по площині після удару, якщо спочатку вона знаходилась на висоті H . Коефіцієнт тертя шайби при русі по площині складає μ . Удар шайби об стінку абсолютно пружний.

$$\left(h = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \mu}{\operatorname{tg} \alpha + \mu} H \right)$$

7.44. Біля основи похилої площини знаходиться брусок. Бруску придають деяку швидкість вгору уздовж площини. На висоті h швидкість бруска v_1 . Після абсолютно пружного удару об стінку, яка знаходиться на висоті H перпендикулярно площині, брусок ковзає донизу і на тій же висоті h його швидкість дорівнює v_2 . Знайти швидкість бруска в момент удару об стінку.

$$\left(v_1' = \sqrt{\frac{v_1^2}{2} + \frac{v_2^2}{2} - 2g(H + h)} \right)$$

7.45. Нерелятивістська α -частинка, що летить зі швидкістю v_0 , здійснює пружне зіткнення з нерухомою частинкою (ядром) і відлітає під кутом 90°

до початкового напрямку руху. При якому співвідношенні мас α -частинки m і ядра M це можливо? Визначити швидкість v α -частинки і u ядра після зіткнення. Визначити кут φ між напрямом швидкості ядра, що вилітає, і початковим напрямом руху α -частинки.

$$\left(v = \sqrt{\frac{M-m}{M+m}} v_0; u = \frac{m}{M} v_0 \sqrt{\frac{2M}{m+M}}; \operatorname{tg} \varphi = \sqrt{\frac{M+m}{M-m}} \right)$$

7.46. Кулька масою m , що рухається, пружно ударає кульку масою M , що знаходиться у стані спокою. Після удару кулька m рухається в протилежному напрямку. В скільки разів змінилась її енергія кульки m ?

$$\left(\frac{E}{E_0} = \left(\frac{\frac{M}{m} - 1}{\frac{M}{m} + 1} \right)^2 \right)$$

7.47*. Частинка масою m рухається в однорідному силовому полі (полі тяжіння). Сила опору від швидкості має лінійну залежність $F_{\text{оп}} = -\alpha v$. Знайти роботу сили опору як функцію швидкості. Вважати, що частинка влетіла в поле з початковою швидкістю v_0 . (Вказівка: спочатку знайти $S(v)$).

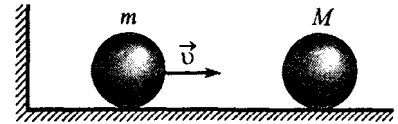
$$\left(\begin{aligned} S(v) &= \frac{m}{\alpha} (v - v_0) - \frac{m^2}{\alpha} g \ln \left(\frac{g - \alpha/m v}{g - \alpha/m v_0} \right); \\ A_{\text{оп}} &= -\frac{1}{2} \frac{m^3}{\alpha^2} g^2 \ln \left(\frac{(g - \alpha/m v)^2}{(g - \alpha/m v_0)^2} \right) + \frac{1}{2} \frac{m^3}{\alpha^3} g^2 \left[(g - \alpha/m v)^3 - (g - \alpha/m v_0)^3 \right] + \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{m^3}{\alpha^2} \left[(g - \alpha/m v)^2 - (g - \alpha/m v_0)^2 \right] \end{aligned} \right)$$

7.48. Два тіла масою m_1 і m_2 прикріплені до ниток однакової довжини і мають загальну точку підвісу. Тіла відводять – одне вліво, друге вправо –

на однаковий кут, і одночасно відпускають. Під час удару тіла злипаються. Знайти відношення висоти, на яку зліплені тіла піднімуться, до висоти, з якої вони почали рухатись.

$$\left(\frac{H}{h} = \frac{(m_1 - m_2)^2}{(m_1 + m_2)^2} \right)$$

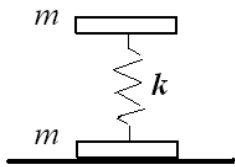
7.49. Кулька масою M знаходиться на гладкій горизонтальній поверхні на деякій відстані від вертикальної стінки. Друга кулька масою m рухається від стінки до першої, і здійснюється центральний абсолютно



пружний удар. При якому співвідношенні мас M/m кулек не буде другого удару? Взаємодію кульки масою m зі стінкою вважати пружною.

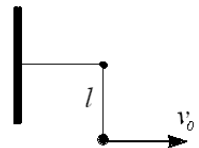
$$\left(\frac{M}{m} < 3 \right)$$

7.50. Маємо дві пластинки масою m кожна. Нижня лежить на горизонтальній площині, верхня сполучена з нижньою пружиною з коефіцієнтом жорсткості k (див. рис.). Верхню пластинку спустили так, що деформація пружини стала рівною A , а потім відпустили. Знайти, на яку висоту піднявся після цього центр мас системи.



$$\left(h = \frac{1}{8g} \left(\frac{kA^2}{m} - \frac{3mg^2}{k} - 2Ag \right) \right)$$

7.51. Невеличка кулька підвішена до балки на тонкій невагомій нитці довжиною l . Яку найменшу швидкість v_0 необхідно придати кульці в горизонтальному напрямку, щоб вона вдарилась об кронштейн в точці підвісу?



$$\left(v_0 = \sqrt{gl(3\cos\alpha + 2)}; \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$

8 РЕЛЯТИВІСТСЬКІ ЕНЕРГІЯ І ІМПУЛЬС

Енергія вільної частинки в релятивістській механіці визначається за співвідношенням:

$$E = m\gamma c^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

Нульова (часова) компонента 4-імпульсу пов'язана з енергією частинки, а 4-вектор імпульсу називають **4-вектором енергії-імпульсу**. Його записують, як

$$\mathbf{P}\left(\frac{E}{c}, \mathbf{p}\right); E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}; \mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = m\mathbf{v}\gamma$$

Рівняння руху в релятивістській механіці – його просторова і часова компоненти, мають вигляд:

$$\frac{d}{dt}(m\gamma\mathbf{v}) = \mathbf{F}; \frac{d}{dt}(m\gamma c^2) = \mathbf{F}\mathbf{v}$$

Релятивістський імпульс – 4-вектор, з його визначення автоматично виходить, що сума квадратів його компонент є інваріантом:

$$\left(\frac{E}{c}\right)^2 - p^2 = \text{inv}; E^2 - p^2 c^2 = \text{inv}$$

Величина інваріанту є

$$\left(\frac{E}{c}\right)^2 - p^2 = m^2 c^2$$

З отриманого визначення енергії частинки видно, що при $v=0$, тобто у тому випадку, коли вільна частинка знаходиться в стані спокою, ця частинка має енергію

$$E_0 = mc^2$$

Ця енергія пропорційна масі частинки і її називають енергією спокою.

У релятивістській механіці кінетичну енергію тіла (частинки) визначають як ту частину його (її) енергії, яка перетворюється на нуль при $v=0$. **Якщо тіло набуває швидкості, до його енергії спокою додається кінетична енергія, і ця сума є повною енергією тіла.** Звідси, кінетична енергія T тіла, що рухається з довільною швидкістю, дається виразом:

$$T = E - E_0 = mc^2(\gamma - 1)$$

Нехай система відліку K' рухається відносно системи K із швидкістю V уздовж осі x . Тоді:

$$p'_0 = \Gamma(p_0 - \beta p_1); \quad p'_1 = \Gamma(p_1 - \beta p_0); \quad p'_2 = p_2; \quad p'_3 = p_3; \quad \beta = \frac{V}{c}$$

8.1*. Релятивістська заряджена частинка (електрон) влітає в поперечне електричне поле напруженості \mathbf{E} перпендикулярно полю зі швидкістю v_0 . Знайти рівняння траєкторії частинки в класичному і релятивістському випадках. Масу частинки вважати відомою.

$$\left(\begin{array}{l} x(t) = \frac{P_0}{eE} \operatorname{Arcsh} \frac{ceEt}{E_0}; \quad y(t) = \frac{1}{eE} \left(\sqrt{E_0 + (ecEt)^2} - E_0 \right), \text{ де } E_0 = c^2 P_0^2 + m^2 c^4 \\ y(x) = \frac{E_0}{eE} \left(ch \frac{Eex}{cP_0} - 1 \right); \quad P_x = P_0 \end{array} \right)$$

8.2*. Релятивістська заряджена частинка (електрон) влітає в поперечне електричне поле напруженості \mathbf{E} перпендикулярно полю зі швидкістю v_0 . Знайти: залежність складових швидкості частинки від часу; залежність кута відхилення частинки від прямолінійного руху від часу; рівняння траєкторії частинки в класичному і релятивістському випадках. Масу частинки вважати відомою.

$$\left(v_x = \frac{c^2}{E} P_x; \quad v_y = \frac{c^2}{E} P_y; \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{v_y}{v_x} \right)$$

8.3*. Вирішити завдання 8.1 для релятивістської частинки масою m , яка летить в постійному полі сили тяжіння і має початкову швидкість v_0 , спрямовану перпендикулярно силі поля mg .

8.4. Частинка масою M перебуває в стані спокою. Яку мінімальну кінетичну енергію повинна мати частинка масою m , щоб при зіткненні народилася ще одна така ж частинка? (Вказівка: скористатися інваріантом і S -системою відліку)

$$\left(T_{\min} = mc^2 \left(1 + \frac{3m}{2M} \right) \right)$$

8.5. Частинка масою M розпадається на дві частинки з масами m_1 і m_2 . Знайти енергію частинок, що розпалися, в S -системі.

$$\left(E_2 = \frac{c^2(M^2 + m_1^2 - m_2^2)}{2M}; E_1 = \frac{c^2(M^2 - m_1^2 + m_2^2)}{2M} \right)$$

8.6*. В релятивістському випадку відсутнє поняття центру мас (чому?), але існує термін «система центру мас», в якій сума імпульсів частинок дорівнює нулю. Таку систему можна знайти завжди. Нехай в лабораторній системі (ЛС) відліку відома енергія E і імпульс \mathbf{P} системи точок, як сума імпульсів та енергій окремих її складових частинок. Знайти систему центру мас (тобто, знайти її швидкість), та визначити у ній енергію та імпульс системи матеріальних точок через їх значення в лабораторній системі. (Вказівка: вибрати ось x ЛС по напрямку сумарного імпульсу системи точок та скористатись перетвореннями Лоренца і відомим inv.).

$$\left(\mathbf{V} = \mathbf{P}c^2/E; E' = E\sqrt{1-V^2/c^2} \right)$$

8.7*. Частинка масою m_1 і швидкістю v налітає на нерухому частинку масою m_2 . Знайти масу M і швидкість частинки, що утворилася при умові поглинання частинки m_1 .

$$\left(M^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2m_1m_2\gamma; V = \frac{m_1v\gamma}{c^2(m_1^2 + m_2^2 + 2m_1m_2\gamma) + (m_1v\gamma)^2} \right)$$

8.8. Знайти час і довжину пробігу до зупинки для релятивістського електрона при його початковій повній енергії E_0 в гальмівному однорідному електричному полі напруженістю E , паралельному початковій швидкості електрона.

$$\left(L = \frac{E_0 - mc^2}{eE} \right)$$

8.9. Нехай в лабораторній системі відліку (ЛСВ) сталася пружна взаємодія двох частинок. Показати, що закони збереження, записані через 4-вектор енергії-імпульсу, інваріантні відносно будь-якої іншої інерціальної СВ, такої, що рухається відносно лабораторної СВ із швидкістю V уздовж осі x .

8.10. Знайти швидкість центру мас системи частинок з сумарними імпульсами \mathbf{P} і енергією E відповідно.

$$\left(\mathbf{V} = c^2 \frac{\mathbf{P}}{E} \right)$$

8.11. Нехай в системі K імпульс релятивістської частинки дорівнює нулю. Знайти енергію E' і імпульс P' цієї частинки в системі K' , що рухається відносно K уздовж осі x із швидкістю V . Пояснити отриманий результат.

$$\left(E' = mc^2\Gamma; P'_x = -mv\Gamma \right)$$

8.12. Частинка масою m влітає з початковою швидкістю \mathbf{v}_0 в область, де на неї діє постійна сила \mathbf{F} , перпендикулярна \mathbf{v}_0 . До яких значень мають прямувати складові імпульсу P_{\parallel} , P_{\perp} та швидкості V_{\parallel} , V_{\perp} , які направлені уздовж і перпендикулярно початковій швидкості відповідно?

$$\left(P_{\parallel} = mv_0\gamma_0; P_{\perp} = Ft; V_{\parallel} = \frac{v_0}{\sqrt{1+(Ft/cm\gamma_0)^2}} \rightarrow 0; V_{\perp} = \frac{Ftc^2}{\sqrt{m^2c^4 + P_0^2c^2 + (Ftc)^2}} \rightarrow c \right)$$

8.13. Електрон влітає в постійне однорідне електричне поле напруженістю E з початковою швидкістю v_0 , паралельною E . Через який час електрон повернеться в початкову точку? Який шлях він пройде за цей час?

$$\left(t = \frac{2mv_0\gamma}{eE}; L = \frac{2mc^2(\gamma-1)}{eE} \right)$$

8.14*. Між двома посрібленими пластинками, розташованими на відстані $2L$, паралельно їм посередині розміщено металеву сіточку. На сіточку подають електричний додатній потенціал таким чином, що утворюється однорідне електричне поле напруженістю E між кожною з пластин та сіточкою. Під час нагріву пластинок відбувається емісія електронів. Вважаючи, що електрони покидають пластини з нульовою початковою швидкістю, знайдіть у релятивістському випадку швидкостей **частоту**, з якою вони будуть коливатись навколо сіточки. Будь-якими зіткненнями знехтувати. Чи буде частота коливань зростати нескінченно при збільшенні напруженості поля?

$$\left(t = \sqrt{\frac{L^2}{c^2} + \frac{2Lm}{eE}}; T = 4t; v = \frac{1}{T} = \frac{1}{4\sqrt{\frac{L^2}{c^2} + \frac{2Lm}{eE}}}; \text{при } E \rightarrow \infty v = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{c^2}{L^2}} = \frac{1}{4}\frac{c}{L} \right)$$

8.15. По якій траєкторії буде рухатись релятивістська частинка масою m і зарядом q , яка влітає з кінетичною енергією T в поперечне магнітне поле з постійною індукцією \mathbf{B} ?

$$\left(R = \frac{mV}{qB\sqrt{1-V^2/c^2}}, \text{ де } V = \frac{c\sqrt{T(T+2mc^2)}}{T+mc^2} \right)$$

8.16. Частинка масою m зі швидкістю $\frac{4}{5}c$ здійснює не пружне зіткнення з нерухомою частинкою такої ж маси. Визначити швидкість U та масу M новоутвореної частинки.

$$\left(U = \frac{c}{2}; M = \frac{4}{\sqrt{3}}m \right)$$

8.17. Позитрон масою m , зарядом e^+ , енергією E та імпульсом P налітає на нерухомий електрон. Знайти енергію одного із γ -квантів в залежності від кута його вильоту. Розглянути граничні випадки для $\cos \varphi = 1, \cos \varphi = -1, T \gg 2mc^2, T = 0$

$$\left(E_1 = \frac{mc^2(mc^2 + E)}{mc^2 + E - Pc \cdot \cos \varphi} = \frac{mc}{1 - \frac{\cos \varphi}{\sqrt{1 + 2mc^2/T}}} \right)$$

8.18. В інерціальній K - системі відліку частинка масою m зі швидкістю v налітає на таку ж нерухому частинку. Знайти швидкість і масу частинки, що утворилась. Дослідити граничний випадок у разі $v/c \ll 1$.

$$\left(u = \frac{v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}; M = m \sqrt{2 + \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}} \right); \text{ якщо } \frac{v}{c} \ll 1, \text{ то } u = \frac{v}{2}; M = 2m$$

8.19. Нейтральна частинка піон з масою m рухається в лабораторній системі відліку вздовж осі x і має кінетичну енергію, рівну енергії спокою. Піон розпадається на два фотони з однаковими енергіями E_γ . Знайти енергію E_γ та кут між напрямками вильоту фотонів в цій системи відліку.

$$(E_\gamma = mc^2; \alpha = 30^\circ)$$

8.20. Релятивістська частинка масою m налітає на точно таку нерухому частинку. В результаті зіткнення утворюється одна частинка масою M .

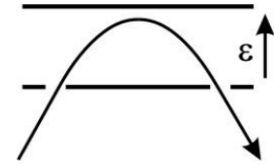
Знайти імпульс частинки, що налітає, та швидкість новоутвореної частинки.

$$\left(p = Mc \sqrt{\left(\frac{M}{2m}\right)^2 - 1}; V = c \sqrt{1 - \left(\frac{2m}{M}\right)^2} \right)$$

8.21. Отримати формули для розрахунків частинки масою M , яка може бути утворена на лінійному прискорювачу, де зіштовхуються частинки типу α і β . Вважати відомими маси частинок m_α , m_β та їх кінетичні енергії T_α , T_β .

$$\left(\sqrt{\frac{(Mc^2 + T_M)^2}{c^2} - M^2 c^2} = \sqrt{\frac{(T_\alpha + m_\alpha c^2)^2}{c^2} - m_\alpha^2 c^2} + \sqrt{\frac{(T_\beta + m_\beta c^2)^2}{c^2} - m_\beta^2 c^2} \right)$$

8.22*. Електрон з кінетичною енергією $T = 1 \text{ MeV}$ влітає в гальмівне однорідне електричне поле напруженістю $\mathcal{E} = 10^6 \frac{\text{В}}{\text{м}}$ під кутом $\alpha = 45^\circ$ (див. рис.) Яка висота траєкторії та швидкість в найвищій її точці? Знайти час прольоту електрона крізь конденсатор.



$$\left(V_x = c \sqrt{\frac{(T + mc^2)^2 - m^2 c^4}{(T + mc^2)^2 + m^2 c^4 \tan^2 \alpha}}; H = \frac{(T + mc^2) - E_1}{\mathcal{E} e} \right)$$

де $E_1 = \sqrt{[(T + mc^2)^2 - m^2 c^4] \cos^2 \alpha - m^2 c^4}$;

$$T = \frac{2 \sqrt{(T + mc^2)^2 - m^2 c^4} \sin \alpha}{c \mathcal{E} e}$$

8.23. Знайти кут симетричного розльоту фотонів, які утворюються при анігіляції нерухомого електрона з рухливим зі швидкістю V позитроном.

$$\left(\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{2}{1 + \frac{E}{mc^2}}} \right)$$

8.24. Фотон з енергією E_γ зіштовхується з нерухомим електроном. Знайти енергію фотона, розсіяного на кут θ .

$$\left(E'_\gamma = \left[1 + \frac{E_\gamma}{mc^2} (1 - \cos \theta) \right]^{-1} \right)$$

8.25. Матеріальна точка рухається по колу радіусом R із швидкістю V . Знайти прискорення точки в лабораторній і миттєво-супутній системах відліку? (Вказівка: скористатись релятивістським рівнянням руху та формулами перетворення сили).

$$\left(a' = \gamma^2 \frac{V^2}{R} \right)$$

8.26. Космічний корабель рухається по коловій орбіті з постійною швидкістю $V = 0.6c$. Доцентрове прискорення в миттєво-супутній системі відліку дорівнює $a' = g$. Протягом якого часу за власним годинником корабель здійснить повний оберт? (Вказівка: див. вказівку до попередньої задачі).

$$\left(t' = \frac{2\pi\gamma V}{g} \right)$$

8.27*. Релятивістська частинка масою m , зарядом q і енергією $3mc^2$ рухається у поперечному магнітному полі з індукцією B . За який час її енергія зменшиться до $2mc^2$, якщо на неї діє сила тертя $F = -\alpha V$? Скільки обертів здійснить частинка під час такого руху?

$$\left(T = \frac{m}{\alpha} \left(1 + \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2} \right) = 1.2 \frac{m}{\alpha}; N = \frac{qB}{4\pi\alpha} \cdot \ln \frac{E_0^2 - m^2 c^4}{E^2 - m^2 c^4} = \frac{qB}{4\pi\alpha} \cdot \ln \frac{8}{3} \right)$$

9 РУХ ТІЛ У ПОЛІ ЦЕНТРАЛЬНИХ СИЛ ЗАКОНИ КЕПЛЕРА

Центральним називають таке силове поле, в якому лінія дії сили проходить через одну і ту ж точку поля – силовий центр або полюс, а величина сили залежить тільки від відстані цієї точки до полюса. Відомі приклади таких полів – гравітаційне поле однорідного масивного тіла сферичної форми; електростатичне поле точкового заряду. У полі центральних сил

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = F(r) \frac{\mathbf{r}}{r}$$

Усі центральні сили консервативні. Під час руху в гравітаційному полі сила тяжіння \mathbf{F} двох точкових мас m_1, m_2 , що знаходяться на відстані \mathbf{r} одна від іншої, визначається законом всесвітнього тяжіння Ньютона:

$$\mathbf{F} = -G \frac{m_1 m_2}{r^3} \mathbf{r}$$

Робота гравітаційної сили під час переміщення матеріальної точки в просторі з положення 1 в положення 2 має вигляд:

$$\begin{aligned} A_{1,2} &= \int_1^2 \mathbf{F}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \int_1^2 \left(-G \frac{m_1 m_2}{r^3} \mathbf{r} d\mathbf{r} \right) = -G m_1 m_2 \int_1^2 \frac{1}{r^2} dr = \\ &= -G \frac{m_1 m_2}{r_1} - \left(-G \frac{m_1 m_2}{r_2} \right) = U(r_2) - U(r_1) \end{aligned}$$

де $U(r)$ – потенціальна енергія взаємодії точки масою m_1 в полі точки масою m_2 і навпаки, тобто, $U(r)$ – *потенціальна енергія взаємодії точкових мас m_1 і m_2 .*

Основною особливістю руху частинки в центральному полі є те, що момент імпульсу точки відносно центру сили зберігається:

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = [\mathbf{r}\mathbf{F}^{ex}] = \left[\mathbf{r} \left(-\frac{dU}{dr} \frac{\mathbf{r}}{r} \right) \right] = 0$$

Рівняння траєкторії руху точки в гравітаційному полі має вигляд рівняння конічного перерізу в полярних координатах, де початок координат, поміщений в силовий центр, знаходиться в одному з фокусів:

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi}$$

Постійну величину p називають параметром орбіти, а постійну ε – її ексцентриситетом. Рух по еліпсу означає, що повна енергія точки від’ємна, $(U_{\text{еф}}(r))_{\text{min}} < E < 0$; $\varepsilon < 1$, рух фінітний.

Рівняння орбіти було отримане при застосуванні законів збереження моменту імпульсу і енергії, що дало можливість описати рух планет Сонячної системи. **Три закони їх руху були запропоновані Кеплером:**

1. Кожна планета рухається по еліпсу, в одному з фокусів якого знаходиться Сонце.

2. Секторальна швидкість кожної планети відносно Сонця постійна.

3. Квадрати періодів обертання різних планет навколо Сонця відносяться як куби великих півосей їх еліпсів і для всіх планет однакові.

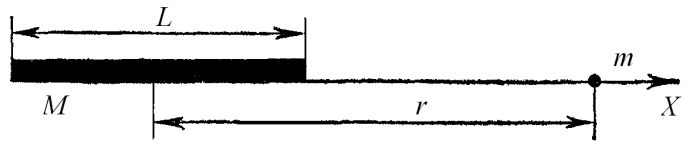
На основі закону всесвітнього тяжіння, рівняння II закону Ньютона, а також теорії фінітного і інфінітного руху планет була розроблена кількісна теорія руху штучних небесних тіл відносно геліоцентричної системи відліку. **Першої космічної швидкості** вистачає, щоб апарат здійснював політ навколо Землі на висоті R_0 від її поверхні. **Друга космічна швидкість** – це та швидкість, яку повинно мати тіло поблизу поверхні Землі, щоб покинути межі Земного тяжіння, тобто щоб тіло не

повернулося на її поверхню. **Третя космічна швидкість** – це та швидкість, яка потрібна тілу поблизу поверхні Землі, щоб це тіло здолало силу тяжіння Сонця і покинуло межі Сонячної системи, якщо воно видалене на відстань R_3 (радіуса орбіти Землі) від Сонця.

9.1. Є дротяне кільце радіусом R . Радіус дроту r , щільність матеріалу кільця ρ . Знайти силу, з якою це кільце притягує матеріальну точку m , що знаходиться на осі кільця на відстані L від центру. На якій відстані сила максимальна і чому вона дорівнює?

$$\left(F = G \frac{2\pi^2 r^2 m \rho R L}{(R^2 + L^2)^{3/2}}; F_{\max} = \frac{8}{27} \cdot \frac{\pi^2 r^2 m \rho}{R} \right)$$

9.2. Знайти силу взаємодії між нерухомою точковою масою m і тонким стержнем масою M і довжиною L . Точка знаходиться на відстані r від центру мас стержня. Вісь стержня спрямована уздовж лінії, що проходить через m .



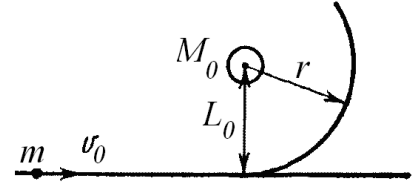
Знайти швидкість руху точки m уздовж осі стержня на відстані $R > r$ від центру мас стержня.

$$\left(F = -\frac{GMm}{r^2 - \frac{L^2}{4}}; V = \sqrt{2G \frac{M}{L} \left[\ln \left(\frac{R + \frac{L}{2}}{R - \frac{L}{2}} \right) - \ln \left(\frac{r - \frac{L}{2}}{r + \frac{L}{2}} \right) \right]} \right)$$

9.3. Маємо дві системи матеріальних точок з масами m_1, m_2, \dots, m_N і m'_1, m'_2, \dots, m'_K . Положення точок задається радіус-векторами $r_1 \dots r_N, r'_1 \dots r'_K$ відповідно. Знайти гравітаційну силу взаємодії однієї системи з іншою.

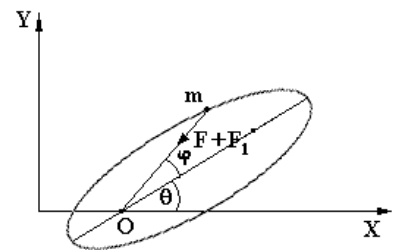
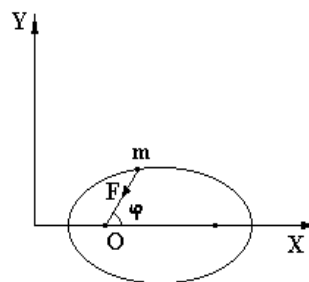
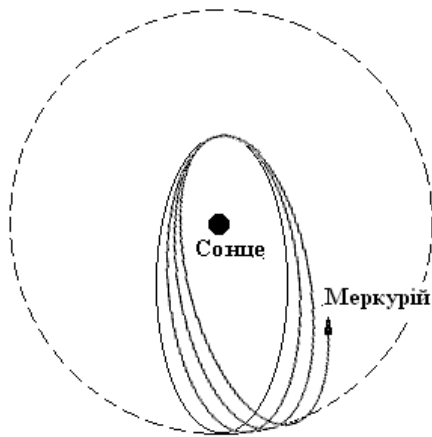
$$\left(\mathbf{F} = G \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^K \frac{m'_j m_i}{|r'_j - r_i|^3} (\mathbf{r}'_j - \mathbf{r}_i) \right)$$

9.4. Метеор масою $m \ll M_0$ маси Сонця летить з нескінченності і має далеко від Сонця швидкість v_0 і таку відстань L_0 , що траєкторія його змінюється і він огинає Сонце і йде на нескінченність. Знайти найменшу відстань r , на яку метеор наблизиться до Сонця. Впливом інших тіл нехтувати.



$$\left(r_{1,2} = -\frac{GM_0}{v_0^2} \pm \sqrt{\frac{G^2 M_0^2}{v_0^4} + L_0^2} \right)$$

9.5. Планета масою m рухається по еліпсу під дією центральної сили тяжіння \mathbf{F} . Як треба змінити величину сили, щоб відносний рух по орбіті залишився незмінним, а орбіта, не змінюючи свого виду, оберталася навколо центру сил O (див. рисунки), як у Меркурія?



$$\left(F_1 = -\frac{m}{r^3} (M_1^2 + 2MM_1) \right)$$

9.6. Два тіла з масами m_1 і m_2 взаємодіють за законом гравітації. При цьому обидва тіла здійснюють в просторі фінітний рух. Знайти траєкторії

тіл. Завдання вирішити в С-системі.

$$\left(r_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot \frac{P}{1 - \varepsilon \cos \varphi}; r_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \cdot \frac{P}{1 - \varepsilon \cos \varphi} \right)$$

9.7. Компоненти подвійної зірки мають маси M і $2m$. Швидкості зірок в початковий момент спрямовані перпендикулярно відрізка d , що сполучає їх центри, і рівні V і $2v$ відповідно. Знайти умову фінитності руху для цього випадку. Вчислити період їх руху, а також максимальну і мінімальну відстань між ними. (Вказівка: використати вирази для радіус-векторів зірок відносно ц.м. системи)

$$\left(T = \frac{\pi}{\sqrt{6MG}} \left(\frac{1}{d} - \frac{3}{2} \frac{V^2}{GM} \right)^{-\frac{3}{2}}; r_{\min} = \frac{P}{1+e}; r_{\max} = \frac{P}{1-e}; \right. \\ \left. P = \frac{3d^2V^2}{GM}; e = \sqrt{1 + 6 \frac{V^2 d^2}{GM} \cdot \left(\frac{3V^2}{2GM} - \frac{1}{d} \right)} \right)$$

9.8. Частинка масою m рухається по коловій орбіті радіусом r_0 в полі центральних сил, потенціал якого $-\frac{km}{r^n}$. Показати, що, якщо $n < 2$, то кругова орбіта стійка по відношенню до малих коливань, тобто частинка осцилює (рухається у даному випадку) по круговій орбіті.

9.9. Описати якісно характер руху частинки в полі $U = -\frac{\alpha}{r^5}$ при різних значеннях енергії частинки, α – додатна стала.

9.10. Частинка рухається у центральному полі із потенціальною енергією $U = -\alpha/r^4$, $\alpha > 0$. Вважати, що на відстані r_0 від центру поля швидкість частинки є v_0 і спрямована перпендикулярно до r_0 . Знайти межі руху частинки. Знайти силу, що діє на частинку. Маса частинки відома.

$$\left(r_1^2 = \frac{2\alpha}{mr_0^4 v_0^2 - 2\alpha} r_0^2; r_2^2 = r_0^2; \mathbf{F} = -\frac{4\alpha}{r^6} \mathbf{r} \right)$$

9.11. Частинка рухається в центральному полі з потенціальною енергією $U = -\frac{\alpha}{r^2}$, $\alpha > 0$. Вважати, що на відстані r_0 від центру поля швидкість частинки є v_0 і спрямована перпендикулярно до r_0 . Знайти межі руху частинки. Знайти силу, що діє на частинку. Маса частинки відома.

$$(r_{1,2} = \pm r_0 \sqrt{2})$$

9.12. Точка масою m рухається в центральному полі, причому її швидкість $V = \frac{\alpha}{r}$, де α – стала. Знайти залежність сили \mathbf{F} від відстані до центру поля \mathbf{r} і траєкторію руху точки.

$$\left(\mathbf{F} = -\frac{m\alpha^2}{r^4} \cdot \mathbf{r}; r = r_0 \exp \left[(\varphi - \varphi_0) \pm \sqrt{\frac{m^2 \alpha^2}{M^2} - 1} \right], \mathbf{M} = m[\mathbf{r}\mathbf{v}] \right)$$

9.13. При русі в центральному полі швидкість частинки масою m змінюється згідно із законом $V = ar^{-\frac{1}{2}}$. Встановити залежність сили від відстані до центру поля r . Знайти рівняння траєкторії частинки у разі, коли її максимальне наближення до центру поля має величину r_0 .

$$\left(\mathbf{F} = -\frac{m\alpha^2}{2r^3} \mathbf{r}; r = \frac{2r_0}{1 + \cos \varphi} \right)$$

9.14. Знайти закон руху частинки у вигляді $r = r(\varphi)$ по траєкторії в полі з потенціалом $U = -\alpha/r^2$, якщо повна енергія частинки E дорівнює нулю. Вважати відомим момент імпульсу M .

$$\left(r = e \frac{\varphi \sqrt{2m\alpha - M^2}}{M} \right)$$

9.15. Точка масою m рухається в центральному полі тяжіння по орбіті з параметром P і ексцентриситетом e . Знайти повну енергію точки.

$$\left(E = \frac{Gm_1m_2(e^2 - 1)}{2P} \right)$$

9.16. Знайти закон руху $r=r(\varphi)$ частинки по параболі в полі з потенціалом $U = -\alpha/r$, $\alpha > 0$. (Вказівка: момент імпульсу M точки вважати відомим).

$$\left(P = \frac{M^2}{m\alpha}; r = \frac{P}{1 + \cos \varphi} \right)$$

9.17. Точка масою m рухається в полі $U(r) = \alpha r^2 + \beta/r^2$; α, β – додатні сталі. Вважаючи момент імпульсу M не нульовим і відомим, знайти межі руху.

$$\left(r_{1,2}^2 = \frac{E}{2\alpha} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{2\alpha}{m^2 E^2} (2m\beta + M^2)} \right) \right)$$

9.18. Електрон рухається в площині перпендикулярно позитивно зарядженій нитці по траєкторії, близькій до кола радіуса R . Сила, що діє на частинку, дорівнює $F = \alpha/r$, $\alpha > 0$, де r – відстань до нитки. Знайти ефективну потенціальну енергію та її мінімальне значення.

$$\left(U_{ef}(r) = \alpha \ln \frac{r}{R} + \frac{\alpha R^2}{2r^2}; \frac{\alpha}{2} \right)$$

9.19. Знайти закон руху частинки у полі $U = -\alpha x^4$, $\alpha > 0$, якщо її повна енергія E дорівнює нулю.

$$\left(x = \frac{x_0}{1 \pm x_0 \sqrt{\frac{2\alpha}{m}} t} \right)$$

9.20. Частинка рухається в центральному полі з потенціальної енергією $U = -\frac{\alpha}{r^2}$, $\alpha > 0$. Вважати, що на відстані r_0 від центру поля швидкість

частинки є v_0 і спрямована перпендикулярно до r_0 . Знайти траєкторію руху $r = r(\varphi)$.

$$\left(r = \frac{r_0}{\cos\left(\varphi \sqrt{1 - \frac{2\alpha}{mv_0^2 r_0^2}}\right)} \right)$$

9.21. Точка масою m рухається в полі $U(r) = \alpha r^2 + \beta/r^2$; $\alpha, \beta > 0$, додатні сталі. Вважаючи момент імпульсу $M = 0$, знайти межі руху. Який вигляд має траєкторія в цьому випадку? Описати рух точки для $M = 0$ і $E = U(r)_{\min}$.

$$\left(r_{1,2}^2 = \frac{E}{2\alpha} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4\alpha\beta}{E^2}} \right); r_{1,2}^2 = \frac{E}{2\alpha}, E = 2\sqrt{\alpha\beta} \right)$$

9.22. Знайти траєкторію руху частинки по параболічній орбіті в полі с потенціалом $U = -\alpha/r^4$, $\alpha > 0$. Вважати відомим момент імпульсу частинки відносно центру сили.

$$\left(r = \frac{1}{M} \sqrt{2m\alpha} \sin \varphi \right)$$

9.23. Штучний супутник рухається по коловій орбіті радіусом r навколо Землі. Яку радіальну швидкість необхідно йому надати, щоб його орбіта стала еліптичною з перигелієм r_1 ?

$$\left(\Delta V_1 = \sqrt{gr} \left(\frac{r}{r_{\min}} - 1 \right) \right)$$

9.24. Дві зірки обертаються одна навколо одної з постійними за модулем швидкостями V_1, V_2 і з періодом T . Знайти маси зірок та відстань між ними. (Вказівка: зверніть увагу на те, що швидкість зірок постійна. По яких траєкторіях вони рухаються?)

$$\left(R = R_1 + R_2; R_1 = \frac{V_1 T}{2\pi}, R_2 = \frac{V_2 T}{2\pi}; m_1 = \frac{V_2 T (V_1 + V_2)^2}{2\pi G}, m_2 = \frac{V_1 T (V_1 + V_2)^2}{2\pi G} \right)$$

9.25. Мінімальна відстань між компонентами подвійної зірки дорівнює R_1 , їх відносна швидкість є V_1 . Сума мас зірок дорівнює M . Знайти відстань R_2 між ними та їх відносну швидкість V_2 при їх максимальному віддаленні.

$$\left(R_2 = \frac{V_1^2 R_1}{2GM - V_1^2 R_1}, V_2 = \frac{V_1^2 R_1 - 2GM}{V_1} \right)$$

9.26*. Дві однакові частинки в момент часу $t = 0$ опинились на відстані R_0 одна від одної зі швидкостями, рівними нулю. Між ними діє сила гравітаційного поля і вони починають наближатись. Вважаючи частинки матеріальними точками, знайти час їх зіткнення. (Вказівка: задачу можна розв'язати двома способами: 1 – інтегруванням рівняння руху; 2 – користуючись законами Кеплера.)

$$\left(t = \frac{\pi}{4} \sqrt{\frac{R_0^3}{Gm}} \right)$$

9.27. Матеріальна точка рухається в полі центральної сили $U(r) = kr^3$, $k > 0$. Знайти кінетичну енергію та момент імпульсу при русі по коловій орбіті радіусом a , а також період колового руху.

$$\left(K = \frac{3}{2} ka^3; M = a^2 m \sqrt{\frac{3ka}{m}}; T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{3ka}} \right)$$

9.28. Знайти період руху частинки масою m в центральному полі з потенціалом $U = \alpha r^2$, $\alpha > 0$.

$$\left(T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{2\alpha}} \right)$$

10. НЕІНЕРЦІАЛЬНІ СИСТЕМИ ВІДЛІКУ

Будь-яка система відліку K' , яка рухається поступально з прискоренням \mathbf{a} відносно системи K і (або) обертається відносно неї з кутовою швидкістю $\boldsymbol{\omega}$, називається неінерціальною системою відліку (НСВ). У загальному випадку НСВ може рухатися зі змінним поступальним прискоренням і обертатися нерівномірно.

Як співвідносяться рух тіл в НСВ і закони Ньютона? *У НСВ тіло може прискоритися простою зміною стану руху системи відліку, це прискорення не є результатом дії на тіло інших тіл. Тому I закон Ньютона в НСВ не має сенсу.* Другий закон Ньютона формулюється без зміни: в НСВ прискорення викликаються тільки силами, але *разом із звичайними силами взаємодії визнається існування сил інерції. Сили інерції беруть такими, щоб забезпечити в НСВ ті прискорення, які є фактично, але які звичайними силами взаємодії можуть бути пояснені лише частково.* Тому II закон Ньютона має вигляд:

$$m\mathbf{a}' = \mathbf{F} + \mathbf{F}_{\text{ін}}$$

де \mathbf{a}' – прискорення в НСВ; \mathbf{F} – звичайна сила в розумінні другого закону Ньютона, тобто результат взаємодії тіла з іншими тілами; $\mathbf{F}_{\text{ін}}$ – сили інерції.

Якщо система відліку рухається прискорено поступально відносно системи відліку K (ІСВ) і одночасно обертається відносно миттєвої осі, що проходить через точку O' з кутовою швидкістю $\boldsymbol{\omega}$, причому кутова швидкість може змінюватися як за величиною, так і за напрямом, то *рівняння руху тіла в такій системі відліку має вигляд:*

$$m\mathbf{a}_{\text{відн}} = \mathbf{F} + 2m[\mathbf{v}_{\text{відн}}\boldsymbol{\omega}] + m\mathbf{r}_{\perp}\omega^2 - m\mathbf{a}_0 - m[\dot{\boldsymbol{\omega}}\mathbf{r}]$$

де $\mathbf{a}_{\text{відн}}$ – прискорення точки в НСВ – в K' - системі; \mathbf{F} – рівнодійна усіх

сил, що діють на матеріальну точку, у тому числі і з боку інших тіл; сила інерції Коріоліса $\mathbf{F}_{\text{кор}} = 2m[\mathbf{v}_{\text{відн}} \boldsymbol{\omega}]$; сила інерції $\mathbf{F}_{\text{п}} = -m\mathbf{a}_0$, пов'язана з прискореним поступальним рухом системи відліку K' відносно системи K ; відцентрова сила інерції $\mathbf{F}_{\text{вц}} = m\omega^2\mathbf{r}_{\perp}$; сила інерції $\mathbf{F}_{\text{н}} = m[\dot{\boldsymbol{\omega}}\mathbf{r}]$, пов'язана з нерівномірним обертанням системи відліку K' відносно системи K . **Всі вказані сили інерції існують тільки в тих системах відліку, які рухаються прискорено і обертаються. Ці сили зникають, якщо здійснити перехід до ІСВ.**

До особливостей сил інерції можна віднести таке.

1. Сили інерції не інваріантні, якщо здійснити перехід з однієї неінерціальної системи відліку в іншу.

2. Сили інерції не підпорядковуються третьому закону Ньютона: не існує протилежної сили, прикладеної до іншого тіла, оскільки немає іншого тіла. Таким чином, рух під дією сил інерції схожий на рух тіл в зовнішніх полях. Ці сили реальні, якщо розглядаються фізичні явища в НСВ, оскільки завжди можна вказати наслідки дій цих сил. Введення цих сил в рівняння руху тіл в НСВ є правильним і необхідним.

10.1. Горизонтально розташований диск обертається навколо осі, що проходить через його центр, з кутовою швидкістю ω . По диску рухається рівномірно на незмінній відстані від осі обертання частинка. Знайти: а) миттєві значення: швидкості \mathbf{V}' відносно диска, при якій $\mathbf{F}_{\text{кор}} = \mathbf{F}_{\text{вц}}$. Виразити \mathbf{V}' через радіус-вектор \mathbf{r} з центру диска; б) швидкість відносно нерухомої системи за тих же умов.

$$\left(\mathbf{V}' = -\frac{1}{2}[\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}], \dot{\mathbf{r}} = \frac{1}{2}[\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}] \right)$$

10.2. Горизонтально розташований диск обертається навколо осі, що

проходить через його центр, з кутовою швидкістю ω . Уздовж радіусу диска рухається частинка, відстань якої від центру диска змінюється згідно із законом $r = at$ де a – стала. Знайти результуючий момент сил \mathbf{N} , що діє на частинку в системі відліку, пов'язаної з диском, тобто, відносно центру диска.

$$(\mathbf{N} = -2m\alpha^2 t \boldsymbol{\omega})$$

10.3. Точка рухається відносно диска згідно із законом $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$. Диск обертається відносно спостерігача з постійною кутовою швидкістю $\boldsymbol{\omega}$. Знайти закон руху точки, її швидкість і прискорення в системі відліку нерухомого спостерігача.

10.4. Горизонтальний стержень OO' обертається навколо вертикальної осі, яка проходить через точку O його краю з постійною кутовою швидкістю ω . Невелика муфта маси m ковзає по стержню в напрямі O' з постійною швидкістю v відносно стержня. Знайти: 1) прискорення муфти в лабораторній системі (вектор і модуль); 2) перпендикулярну і паралельну сили, з якою муфта діє на стержень.

$$\left(\mathbf{a}_{abc} = 2[\boldsymbol{\omega}\mathbf{v}] - \mathbf{r}\omega^2; a_{abc} = \omega^2 \sqrt{(r\omega)^2 + 4v^2}; f_{\perp} = f_{кор} = 2m\omega v; f_{\parallel} = f_{вц} = m\omega^2 r \right)$$

10.5. Знайти різницю між екваторіальним і полярним радіусом Землі. Землю вважати еліпсоїдом обертання, гравітаційний потенціал на поверхні

якого міняється згідно із законом: $U = \frac{GM}{r} + \frac{\alpha_2 GM}{2r} \left[\frac{R^2}{n^2} (3\cos^2 \theta - 1) \right]$, де M

– маса Землі, R – її радіус на екваторі, r, θ – сферичні координати точки на поверхні Землі, причому кут $\theta = 0$ відповідає північному полюсу, α_2 – константа.

10.6*. Горизонтальна труба довжиною L рівномірно обертається навколо вертикальної осі з кутовою швидкістю ω . Усередині труби вільно

ковзає пробка. Визначити швидкість пробки відносно труби у момент вильоту, і час руху пробки в трубі. У початковий момент пробка знаходилась у стані спокою на відстані x_0 від осі. Знайти силу, з якою трубка діє на пробку у момент вильоту, а також роботу, яка здійснюється над пробкою за час руху усередині трубки.

$$\left(t = \frac{1}{\omega} \ln \left(\frac{L}{x_0} + \sqrt{\left(\frac{L}{x_0} \right)^2 - 1} \right); F = 2m\omega^2 \sqrt{L^2 - x_0^2}; A = m\omega^2 \left(\frac{L^2}{2} - \frac{x_0^2}{2} \right) \right)$$

10.7*. Стержень довжиною L , масою M шарнірно підвішений за верхню точку в полі сили тяжіння і рівномірно обертається з кутовою швидкістю ω відносно вертикальної осі. При якому куті нахилу стержня до вертикалі може відбуватися таке обертання? (Вказівка: розглянути сили, що діють на елемент маси стержня під час обертання).

$$\left(\cos \varphi = \frac{3}{2} \frac{g}{L\omega^2} \right)$$

10.8. Тіло масою m знаходиться на вершині похилої площини і утримується силою тертя. За який час тіло спуститься з похилої площини, якщо вона стане рухатися в горизонтальному напрямі з прискоренням \mathbf{a}_0 . Довжина площини L , кут нахилу α , коефіцієнт тертя тіла по площині μ .

$$\left(t = \sqrt{\frac{2L}{g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha + a_0(\cos \alpha + \mu \sin \alpha))}} \right)$$

10.9. Клиן з гострим кутом α тягнуть горизонтально з прискоренням \mathbf{a}_0 . Чому дорівнює прискорення тіла, покладеного на клин, відносно землі? При $t = 0$ швидкості тіла і клину дорівнюють нулю. Тертям нехтувати.

$$\left(a = \sin \alpha \sqrt{a_0^2 + g^2} \right)$$

10.10. Система відліку $(Oxyz)$ обертається з постійною кутовою швидкістю ω навколо осі z . У площині (Oxy) рухається точка масою m , на

яку діє сила $\mathbf{F} = -k\mathbf{r}$, де k – постійна величина, $\mathbf{r} = \mathbf{r}(x,y)$. Знайти закони зміни основних динамічних величин (моменту імпульсу, моменту сил, роботи по переміщенню і кінетичної енергії) точки в системі, що обертається.

$$\left(\mathbf{M} = m[\mathbf{r}\dot{\mathbf{r}}]; \mathbf{N} = \frac{d\mathbf{M}}{dt} \right)$$

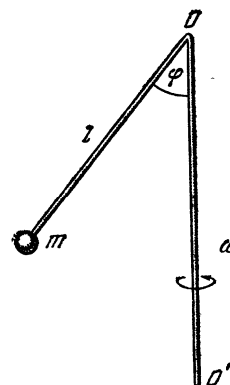
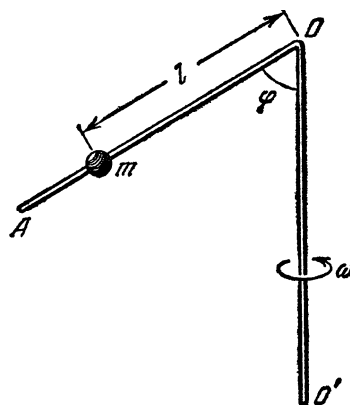
10.11. Кулька масою m прикріплена до кінця горизонтальної пружини, коефіцієнт жорсткості якої k , і знаходиться в положенні рівноваги в трубці на відстані x_0 від вертикальної осі OO' . Визначити закон відносного руху кульки $x(t)$, якщо трубка починає обертатися навколо вертикальної осі OO' з постійною кутовою швидкістю ω . Точка x_0 на осі обертання відповідає положенню ненавантаженої пружини.

$$\left(r = r_0 \cos \Omega t, \Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \omega^2}, \omega_0 = m/k \right)$$

10.12. Невагомий стержень AOO' , зігнений під кутом φ , обертається з кутовою швидкістю ω відносно осі OO' . На відігнаний кінець стержня надіта намистинка масою m . Визначити, на якій відстані L від точки O намистинка знаходиться в положенні рівноваги, якщо коефіцієнт тертя між намистинкою і стержнем рівний k .

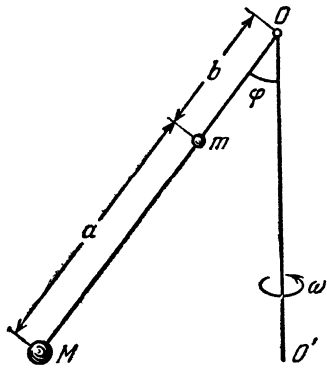
$$\left(l \leq \frac{g}{\omega^2} \frac{k \sin \varphi - \cos \varphi}{\sin \varphi (\sin \varphi + k \cos \varphi)} \right)$$

10.13. На невагомий стержень довжиною L , зігнений під кутом φ і який обертається з кутовою швидкістю ω відносно осі OO' , прикріплений вантаж масою m . Визначити силу, з якою стержень діє на вантаж.



$$\left(F = m\sqrt{g^2 + \omega^4 L^2 \sin^2 \varphi} \right)$$

10.14. На невагомому стержні закріплені два вантажі з масами M і m .



Стержень шарнірно сполучений в точці O із вертикальною віссю OO' . Ось обертається з кутовою швидкістю ω . Визначити кут φ , який утворює стержень з вертикаллю. Визначити, при яких значеннях ω рішення існує.

$$\left(1) \varphi = 0; 2) \cos \varphi = \frac{g}{\omega^2} \frac{mb + M(a+b)}{mb^2 + M(a+b)^2} \right)$$

10.15. Людина масою m йде по краю диска каруселі радіуса R , яка обертається з кутовою швидкістю Ω , в протилежний бік обертання каруселі. Людина сполучена з віссю каруселі нерозтяжною мотузкою довжиною R . Чому дорівнює натяг нитки T ? При якій швидкості руху v натяг мотузки буде мінімальним? Поясніть отриманий результат.

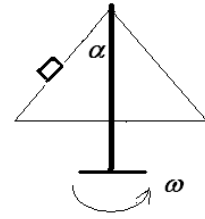
$$\left(T = \frac{mv^2}{R} + mR\Omega^2 - 2mv\Omega \right)$$

10.16. Жорсткий стержень обертається з постійною кутовою швидкістю ω навколо вертикальної осі, яка проходить через його край. На стержні знаходиться муфта, яка сполучена пружиною жорсткості k з краєм стержня. Нехтуючи тертям, визначити, при яких умовах муфта буде рухатись з постійною швидкістю вздовж стержня.

$$\left(k = m\omega^2 \right)$$

10.17. Земля обертається з кутовою швидкістю ω . По екватору зі Сходу в напрямку Заходу з відносною швидкістю v рухається потяг масою m . Вважаючи потяг твердим тілом і нехтуючи тертям, знайти силу, яка діє на потяг з боку рейок.

10.18. Тіло знаходиться у стані спокою на зовнішній поверхні конуса, що обертається із постійною кутовою швидкістю навколо вертикальної осі, на відстані R від осі обертання. При якому мінімальному коефіцієнті тертя це можливо?



$$\left(\mu = \frac{\omega^2 R \cos \alpha + g \sin \alpha}{g \cos \alpha - \omega^2 R \sin \alpha} \right)$$

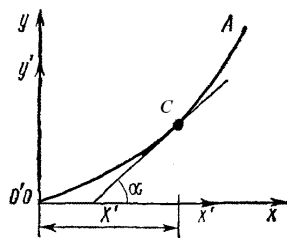
10.19. Суцільний циліндр скочується без ковзання з похилої площини з кутом α до горизонту. Похила площина рухається у ліфті вниз з прискоренням b . Не враховуючи силу тертя кочення, знайти прискорення a осі циліндра відносно похилої площини.

$$\left(a = \frac{2}{3}(g - b) \sin \alpha \right)$$

10.20. Знайти прискорення вантажів в машині Атвуда. Вважати, що блок невагомий, нитка нерозтяжна, тертя не враховувати. Маса вантажів $m_1, m_2 (m_1 > m_2)$. Задачу розглянути у системі відліку, пов'язаній з вантажем, який: а) піднімається; б) спускається.

$$\left(a = g \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right)$$

10.21. Зігнений стержень OA може обертатись навколо вертикальної осі

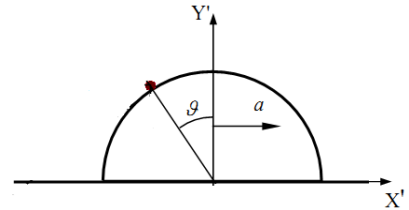


ОУ. На стержні розташоване кільце C , яке вільно, без тертя, може переміщуватися вздовж стержня. Знайти рівняння (форму) стержня, при якому кільце з будь-якою кутовою швидкістю обертання стержня не буде переміщуватися вздовж стержня.

$$\left(y' = \frac{1}{2} \frac{\omega^2}{g} x'^2 \right)$$

10.22. Математичний маятник з довжиною нитки L і масою кулі m підвішений на дошці, яка вільно падає з прискоренням g . Описати рух маятника відносно дошки в НСВ та в ІСВ, якщо вона починає свій рух у момент, коли швидкість маятника не дорівнює нулю.

10.23. Невелике тіло знаходиться на вершині гладкого напівциліндра радіусом R . Напівциліндр розташований на горизонтальній поверхні. Напівциліндру надають постійне горизонтальне прискорення a , в результаті чого тіло починає ковзати з його поверхні. Знайти модуль швидкості v_0 відносно напівциліндра в момент відриву і висоту H , на якій здійсниться відрив.

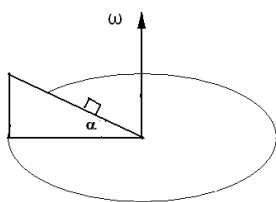


$$\left(v_0 = \sqrt{\frac{2}{3}} gR; H = R \cos \vartheta = \frac{2g^2 + a\sqrt{5g^2 + 9a^2}}{3(g^2 + a^2)} R \right)$$

10.24. Суцільний циліндр масою m скочується без ковзання з клина масою M і кутом при основі α . Клин знаходиться на гладкій горизонтальній поверхні. Знайти прискорення клина.

$$\left(a_0 = \frac{mg \sin 2\alpha}{3M + m(1 + 2 \sin^2 \alpha)} \right)$$

10.25. На горизонтальному диску закріплена похила площина довжиною S . Кут нахилу площини дорівнює α . Диск обертається зі сталою кутовою швидкістю ω . Уздовж похилої площини від осі обертання вгору рухається тіло масою m без початкової швидкості. Коефіцієнт тертя дорівнює k . Знайти в системі відліку, пов'язаною з похилою площиною, при якій величині ω це можливо. Знайти силу Коріоліса, яка діє на тіло в момент досягнення ним кінця площини.



11 ДИНАМІКА ТВЕРДОГО ТІЛА

Твердим тілом називають сукупність матеріальних точок, відстань між якими фіксована. Рух твердого тіла зводиться до руху його складових точок. Число незалежних змінних (координат) або параметрів, якими можна описати рух системи матеріальних точок, називають числом ступенів свободи. *В загальному випадку число ступенів свободи твердого тіла дорівнює шести. Відомі п'ять видів руху твердого тіла: поступальний рух; обертання навколо нерухомої осі; плоский або плоско-паралельний рух; рух твердого тіла з однією нерухомою точкою; рух вільного (незакріпленого) твердого тіла.*

Для опису руху твердого тіла, що має шість ступенів свободи, необхідно шість скалярних, або два незалежних векторних рівнянь. Одним з таких рівнянь є рівняння руху центру мас. Воно виводиться простим підсумовуванням рівнянь виду

$$\frac{d\mathbf{p}_i}{dt} = \mathbf{F}_i^{ex}$$

для кожної з точок, що складають тверде тіло, де \mathbf{p}_i – імпульс i -тої точки, \mathbf{F}_i^{ex} – зовнішня сила, що діє на неї. Іншим рівнянням є рівняння моментів:

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = \mathbf{N}^{ex}$$

у якому $\mathbf{M} = \sum_i \mathbf{M}_i$, $\mathbf{N}^{ex} = \sum_i \mathbf{N}_i^{ex}$. В це рівняння входять повний момент імпульсу твердого тіла відносно деякої точки і сумарний момент зовнішніх сил, прикладених до тіла відносно цієї ж точки.

Поступальний рух – це рух, під час якого будь-який виділений в твердому тілі відрізок в процесі переміщення залишається завжди паралельним самому собі. Для опису такого руху досить рівняння

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{F}^{ex}$$

яке задає рух центру мас тіла і визначає закон руху $\mathbf{R}_A = \mathbf{R}(t)$.

Для опису *обертання твердого тіла навколо нерухомої осі* використовують кутові кінематичні характеристики, однакові для всіх точок тіла, а лінійні характеристики руху пов'язані з кутовими:

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{d\varphi}{dt}; \quad \boldsymbol{\beta} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}; \quad \mathbf{v} = [\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}]$$

Плоский рух твердого тіла означає, що під час такого руху проєкції усіх його точок лежать в паралельних площинах. Такий рух є *суперпозицією двох рухів: обертального навколо миттєвої осі обертання, і поступального*. Для опису такого руху досить розглянути рух одного з перерізів тіла, наприклад, такого, в якому лежить центр мас. Рівняння руху в цьому випадку мають вигляд:

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}^{ex}; \quad I \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \mathbf{N}^{ex}$$

де I – момент інерції твердого тіла відносно осі обертання.

Рух твердого тіла з однією нерухомою точкою – це рух дзиги або гіроскопа із закріпленим на площині вістрям, щоб уникнути прослизання. Для опису руху таких тіл використовують кути Ейлера і рівняння Ейлера.

Рух вільного твердого тіла – будь-які переміщення твердого тіла відносно осей координат. У найзагальнішому випадку має шість ступенів свободи, характер руху – суперпозиція поступального і обертального рухів.

Для опису динаміки обертального руху твердого тіла відносно закріпленої точки застосовують рівняння моментів

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = \mathbf{N}$$

в якому $\mathbf{M} = I\boldsymbol{\omega}$, де величину

$$I = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix}$$

називають **тензором інерції**. Величини $I_{xx}, I_{xy}, I_{xz}, I_{yx}, I_{yy}, I_{yz}, I_{zx}, I_{zy}, I_{zz}$ в цій матриці називають моментами інерції відносно вибраного правила їх розрахунку. Для будь-якого твердого тіла і будь-якої точки O є принаймні три взаємно перпендикулярні напрями вектора $\boldsymbol{\omega}$ (три взаємно перпендикулярні осі обертання), для яких напрями \mathbf{M} і $\boldsymbol{\omega}$ співпадають. Такі осі називають **головними осями інерції тіла**. Про тензор в цьому випадку говорять, що він приведений до діагонального виду. Величини $I_{xx} = I_x, I_{yy} = I_y, I_{zz} = I_z$ в називають головними моментами інерції твердого тіла. Має місце співвідношення:

$$M_x = I_x \omega_x; M_y = I_y \omega_y; M_z = I_z \omega_z$$

Взагалі головні моменти інерції I_x, I_y, I_z будуть різні для різних точок.

Якщо ж точка O – центр мас тіла, тобто, якщо головні осі проведені через центр мас, то такі осі називаються центральними головними осями, тензор – центральним тензором а його компоненти – це головні моменти інерції тіла.

Для обчислення моментів інерції, як діагональних, так і відцентрових, необхідно знати щільність тіла $\rho(x, y, z) = \rho(\mathbf{r})$. Обчислення моменту інерції відносно якої-небудь осі зводиться до обчислення інтеграла:

$$I_{\sigma\sigma'} = \int_m r' dm = \int_V \rho(r) r'^2 dV = \int_V \rho(x, y, z) r'^2 dx dy dz$$

де r' – відстань елемента маси dm до осі обертання, відносно якої ведеться розрахунок.

У разі обертання твердого тіла навколо нерухомої осі $O'O''$ його рух

описують рівнянням, з урахуванням зв'язку між векторами \mathbf{M} і $\boldsymbol{\omega}$:

$$\mathbf{M} = I\boldsymbol{\omega}; \quad \frac{d(\mathbf{M})|_{O'O'}}{dt} = \frac{d}{dt}(I\boldsymbol{\omega}) = \sum_i (\mathbf{N}_i^{ex})|_{O'O'} = (\mathbf{N}^{ex})|_{O'O'}$$

В цьому рівнянні $I = \sum_i m_i r_i'^2$ – момент інерції тіла відносно осі обертання,

$(\mathbf{M})|_{O'O'}$ – момент імпульсу відносно осі обертання,; $(\mathbf{N}^{ex})|_{O'O'}$ – сумарний момент зовнішніх сил відносно осі обертання. В обох випадках вибір точки на осі значення не має.

Кінетична енергія обертального руху відносно точки для твердого тіла виражається скалярним добутком кутової швидкості і сумарного моменту імпульсу тіла:

$$T = \frac{1}{2} \mathbf{M}\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \sum_k M_k \omega_k$$

З урахуванням зв'язку векторів $\boldsymbol{\omega}$ і \mathbf{M} між собою в найбільш загальному випадку через тензор інерції

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 I_{kl} \omega_k \omega_l$$

Робота зовнішніх сил в процесі повороту на скінченний кут φ_0 є:

$$A = \int_0^{\varphi_0} \mathbf{N} d\varphi$$

Кінетична енергія твердого тіла, що здійснює плоский рух, є сумою кінетичних енергій складових його елементів:

$$T = \frac{mv_0^2}{2} + \frac{I_O \omega^2}{2}$$

що повністю відповідає теоремі Кеніга: кінетична енергія тіла під час плоского руху дорівнює сумі кінетичних енергій поступального руху зі швидкістю, рівною швидкості центру мас, і обертального руху навколо осі, що проходить через центр мас тіла.

Згідно до теореми Гюйгенса-Штейнера, момент інерції тіла відносно якої-небудь осі дорівнює моменту інерції цього тіла відносно паралельної осі, що проходить через центр мас плюс величина ma^2 , де \mathbf{a} – відстань між осями.:

$$I = I_0 + ma^2$$

Якщо кочення циліндра або колеса під час плоского руху відбувається без ковзання, між v_0 і ω виконується співвідношення $v_0 = \omega R$. *За відсутності ковзання точка дотику колеса і площини нерухома і через неї проходить миттєва вісь обертання.* Якщо $v_0 > \omega R$ або $v_0 < \omega R$, точка дотику ковзатиме, колесо рухатиметься з ковзанням. У обох випадках миттєва вісь вже не проходить через точку дотику. Під час коченні з ковзанням поступальна і обертальна швидкості пов'язані співвідношенням: $mv_0R + I\omega = \text{const}$; $\frac{dv}{d\omega} = -\frac{I}{mR}$; $\frac{d\omega}{dv} = -\frac{mR}{I}$

Останні два співвідношення справедливі за проміжок часу ковзання.

11.1. Однорідний тонкий не гнучкий стержень має вагу P і підтримується в горизонтальному положенні двома вертикальними опорами у кінців стержня. У момент часу $t=0$ одна з опор вибивається. Знайти силу, яка діє на другу опору відразу ж після цього моменту.

$$\left(F = \frac{P}{4} \right)$$

11.2. Куля радіусу r обертається навколо своєї осі з кутовою швидкістю ω . Вісь обертання горизонтальна. Куля падає на рівну поверхню, деякий час обертається на місці, а потім починає котитися без ковзання. Коефіцієнт тертя дорівнює μ . Знайти: кінцеву швидкість центру мас кулі; відстань, яка пройдена кулею перш, ніж встановиться ця швидкість.

Знайти час ковзання. Знайти кінцеву швидкість центру мас кулі для випадку великого μ , коли початкове ковзання повністю відсутнє.

$$\left(v = \frac{2}{7} \omega r; S = \frac{v^2}{2\mu g}; t = \frac{2}{7} \frac{\omega r}{\mu g}; V = \frac{2}{7} \omega r \right)$$

11.3. Знайти момент інерції кільцевого циліндра масою m з радіусами R_1, R_2 відносно осі, паралельної його висоті. Знайти головні центральні моменти інерції однорідного прямокутного бруска масою m з розмірами $2a \times 2b \times 2c$.

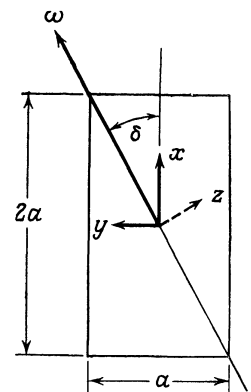
$$\left(I = \frac{m}{2}(R_1^2 + R_2^2); I_x = \frac{1}{3}m(b^2 + c^2), I_y = \frac{1}{3}m(a^2 + c^2), I_z = \frac{1}{3}m(a^2 + b^2) \right)$$

11.4. Густина тонкого диска радіуса R розподілена за законом $\rho(r) = \rho_0(1 - a \frac{r}{R})$, де $0 < a < 1$, ρ_0 – стала, r – відстань від центру диска.

При якому значенні параметра a момент інерції диска відносно осі, перпендикулярної до площини диска, і яка проходить скрізь його центр, дорівнює: $\frac{mR^2}{3}$; $\frac{mR^2}{2}$ відповідно?

$$\left(a = 0; a = \frac{15}{16} \right)$$

11.5. Тонка прямокутна пластинка із сторонами $a \times 2a$ обертається навколо осі, співпадаючої з однією з її діагоналей, з постійною кутовою швидкістю ω . Знайти головні центральні моменти інерції, момент імпульсу пластини і його напрям, і момент сил, що діє на вісь обертання.



$$\left(I_x = \frac{1}{12}ma^2, I_y = \frac{1}{3}ma^2, I_z = \frac{5}{12}ma^2; \mathbf{M} = I_x \omega_x \mathbf{i} + I_y \omega_y \mathbf{j} + I_z \omega_z \mathbf{k}; \mathbf{N} = \frac{d\mathbf{M}}{dt} = [\omega \mathbf{M}] \right)$$

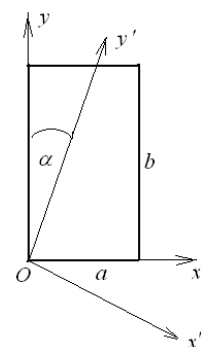
11.6. На горизонтальній поверхні лежить циліндр. Відомі його маса m , радіус R . У початковий момент часу центру мас циліндра надали швидкість v_0 , перпендикулярну осі циліндра і паралельну поверхні. Відомий коефіцієнт тертя ковзання між циліндром і поверхнею k . Описати рух циліндра в подальші моменти часу, припускаючи рух його з прослизанням. Знайти: залежність швидкості центру мас і кутовій швидкості від часу до закінчення ковзання; момент часу закінчення ковзання; відстань, що пройдена з прослизанням; втрату енергії під час ковзання.

$$\left(V(t) = v_0 - kgt; \omega(t) = \frac{2kdt}{R}; t_{\text{ковз}} = \frac{v_0}{3kg}; S = \frac{5}{18} \frac{v_0^2}{kg}; \frac{\Delta E}{E} = \frac{90}{91} \right)$$

11.7*. Циліндр радіусу R і маси m поклали на похилу площину з кутом α до горизонту. Циліндр починає рухатися з ковзанням. Відомий коефіцієнт тертя ковзання. Знайти повну енергію циліндра на відстані S від початкового положення.

$$\left(E = E_{\text{пост.}} + E_{\text{оберт.}} = mgS(\sin \alpha - k \cos \alpha) + \frac{2Sk^2 mg \cos^2 \alpha}{\sin \alpha - k \cos \alpha} \right)$$

11.8*. У прямокутній пластинки із сторонами a і b , масою m , осі координат спрямовані уздовж сторін. Виберіть осі Ox' , Oy' так, щоб вони стали головними осями інерції.



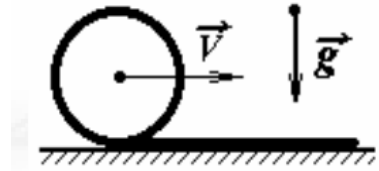
$$\left(\text{tg } 2\alpha = 3ab/2(b^2 - a^2) \right)$$

11.9. Через однорідний суцільний циліндр радіусом R і масою m перекинута легка нитка. До одного із кінців прикріплено тіло масою m_1 , а на іншій діє горизонтальна сила, залежна від шляху S , пройденого точкою дотику цієї сили згідно із законом $F = m_1 g \left(1 + \left(\frac{S}{R} \right)^{\frac{1}{3}} \right)$. Ковзання нитки і

тертя у блоці відсутні. Знайти залежність кутової швидкості циліндра від часу, якщо $\omega_0 = 0$.

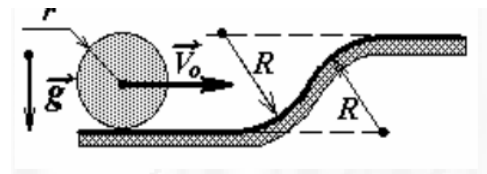
$$\left(\omega = \left[\frac{3m_1 g}{R(m + 2m_1)} \right]^{\frac{3}{2}} \cdot \left(\frac{t}{3} \right)^2 \right)$$

11.10. Яку максимальну швидкість необхідно придати тонкостінному циліндру масою m і радіусом R , щоб він, намотуючи на себе гнучку тонку стрічку, що лежить на горизонтальній поверхні, вчинив точно N оборотів? Лінійна щільність стрічки ρ .



$$\left(v = \sqrt{\frac{2\pi R^2 N \rho g}{M}} \right)$$

11.11. Тонкий обруч радіусу r котиться із швидкістю v_0 . На шляху обруча зустрічається гірка, профіль якої є дві окружності радіусу $R = 2r$. За яких умов обруч відірветься від гірки? На яку максимальну висоту може піднятися центр обруча під час такого руху?



$$\left(v_0^2 \geq v_0 + gr - g(R + r) \sin \alpha = v_0^2 - \frac{gr}{2}; h = \frac{v^2 \cos^2 \alpha}{2g} = \frac{3}{8g} \left(v_0^2 - \frac{gr}{2} \right) \right)$$

11.12. Хрест складається з однорідних однакових стрижнів, скріплених посередині під кутом α . Знайти момент інерції хреста відносно кінця одного із стержнів. Вісь обертання перпендикулярна площині хреста. Маса кожного стержня і його довжину вважати відомою.

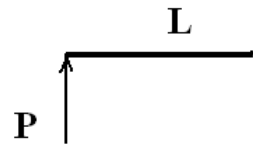
$$\left(I = \frac{1}{3} ML^2 \right)$$

11.13. Визначити мінімальне значення кутової швидкості, при якій обруч, кинутий вперед із закручуванням (назад) зможе покотитися назад.

Визначити його швидкість, що встановилася, якщо початкова кутова швидкість перевищує мінімальну. Знайти час ковзання. (Вказівка: вважати обруч кинутим з лінійною швидкістю його центру мас v_0 і закрученим проти руху з кутовою швидкістю ω_0 . Радіус обруча r , коефіцієнт тертя μ).

$$\left(v_{\text{стан.}} = \frac{v_0 - r\omega_0}{2}; t = \frac{v_0 + r\omega_0}{2\mu g}; v_{\text{min}} = r\omega_0 \right)$$

11.14. На гладкій горизонтальній поверхні столу лежить тонкий однорідний стержень довжини L . В горизонтальній площині на кінець стержня перпендикулярно йому діє імпульс сили. На яку відстань S пересунеться центр мас стержня за час повного оберту? Відповідь дати для випадків: 1) стержень обертається навколо центру мас; 2) стержень обертається навколо кінця.



$$\left(S = \frac{\pi L}{3}; S = \frac{2\pi L}{3} \right)$$

11.15. На льоду лежить стержень довжиною L , масою M , з яким пружно зіштовхується кулька масою m . Швидкість кульки V спрямована по нормалі до стержня. Точка удару близька к кінцю стержня. Знайти швидкість кульки після зіткнення. (Вказівка: використати закони збереження імпульсу, моменту імпульсу і енергії).

$$\left(v' = \frac{M - 4m}{M + 4m} V \right)$$

11.16. На гладкому столі лежить стержень масою M , довжиною L . Перпендикулярно до стержню рухається кулька масою m . Після пружного удару об стержень кулька зупинилася. На якій відстані від середини стержня здійснився удар?

$$\left(x = \frac{L}{\sqrt{12}} \sqrt{\frac{M}{m} - 1} \right)$$

11.17. Кульку радіусу r пускають вперед з лінійною швидкістю v_0 і одночасно закручують у зворотний бік з кутовою швидкістю ω_0 . Знайти швидкість центру мас кульки, з якою вона повертатиметься назад. При якій мінімальній швидкості $v_{0\min}$ це можливо? Знайти час ковзання, якщо коефіцієнт тертя дорівнює μ . Знайти повний час руху, шлях, пройдений за час ковзання і повний шлях, пройдений кулькою.

$$\left(\begin{array}{l} v = \frac{2}{7}r\omega_0 - \frac{5}{7}v_0; v_{\min} = \frac{2}{5}r\omega_0; t = \frac{2r\omega_0 - v_0}{3\mu g}; S = \frac{\mu g}{2} \left(\frac{2r\omega_0 - v_0}{3\mu g} \right)^2; \\ S_{\text{tot}} = \left[v_0^2 - \left(\frac{2}{7}r\omega_0 - \frac{5}{7}v_0 \right)^2 \right] \frac{1}{2\mu g}; v_{0\min} = \frac{2}{5}r\omega_0 \end{array} \right)$$

11.18. На кінцях довгого легкого стержня закріплені дві однакові маленькі масивні кульки. Отриману таким чином «гантель» поставили вертикально на горизонтальну поверхню і відпустили. При якому значенні коефіцієнта тертя між кулькою і поверхнею можливо те, що в процесі падіння «гантелі» нижня кулька почне ковзати по поверхні у той момент, коли стержень відхилиться від вертикалі на кут α ?

$$\left(\mu = \frac{\sin \alpha (3 \cos \alpha - 2)}{1 + \cos \alpha (3 \cos \alpha - 2)} \right)$$

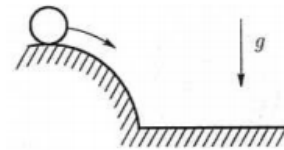
11.19*. Тонкий однорідний стержень довжиною L і масою m покладений симетрично на дві опори, відстань між якими рівна a . Одну з опор прибирають. Знайти силу реакції опори, що залишилася, в перший момент часу.

$$\left(N = \frac{mgL^2}{L^2 + 3a^2} \right)$$

11.20* На шорсткуватому столі стоїть паличка, яка починає падати з вертикального положення в полі тяжіння. Коли кут нахилу палички досягає φ ($\varphi = 45^\circ$), її нижній кінець починає ковзати. Знайти коефіцієнт

тертя.

$$\left(\mu = \frac{3 \sin \varphi \cos \varphi - 2 \sin \varphi}{\frac{1}{3} - 2 \cos \varphi + 3 \cos^2 \varphi} \right)$$



11.21. З верхньої точки циліндричної гірки радіуса R скочується без ковзання і без початкової швидкості циліндр радіуса r . На якій висоті циліндр одірветься від гірки?

$$\left(H = \frac{4}{7}(R + r) \right)$$

11.22. Суцільний однорідний стержень масою m_1 і довжиною l_1 прикріплений до горизонтальної осі обертання, яка проходить через його кінець. В точку на відстані $l_2 < l_1$ від осі обертання попадає куля масою $m_2 < m_1$, яка летить горизонтально із швидкістю v , і застряє в нім. Знайти кутову швидкість обертання стержня відразу після попадання кулі та максимальний кут відхилення.

$$\left(\omega = \frac{3l_2 m_2 v}{m_1 l_1^2 + 3m_2 l_2^2}; \cos \varphi = 1 - \frac{(m_1 l_1^2 + 3m_2 l_2^2) \omega^2}{3g(m_1 l_1 + 2m_2 l_2)} \right)$$

11.23. Уздовж осі циліндра на відстані $R/2$ від його центру просвердлений отвір. Радіус отвору $R/2$. Циліндр лежить на дощички, яку повільно піднімають за один кінець. Знайти граничний кут нахилу дощички, для якого циліндр ще може утримуватися у стані спокою. Коефіцієнт тертя дорівнює μ .

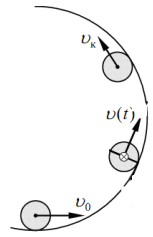
$$(\varphi = \arctg \mu)$$

11.24. Шайбі, що лежить на льоду, дотичним ударом в точку O на бічній поверхні надають імпульс P . Скільки обертів зробить шайба, і яку відстань вона пройде до зупинки? Сила тертя $F = -\alpha SV$ пропорційна швидкості і

площі контакту S шайби із льодом.

$$\left(L = \frac{P}{3\alpha S}; n = \frac{P}{3\alpha\pi^2 R^3} \right)$$

11.25. Кулі радіусу r придали початковий поступальний рух із швидкістю v_0 вздовж борту гладкої горизонтальної площини, яка має форму круга радіуса R , і вона при русі починає торкатися борта. Коефіцієнт тертя між кулею і бортом дорівнює μ (див. рис., вид зверху). Знайти модуль лінійної швидкості кулі після закінчення ковзання між бортом і кулею, інтервал часу ковзання, залежність лінійної та кутової швидкостей від часу при русі з ковзанням.

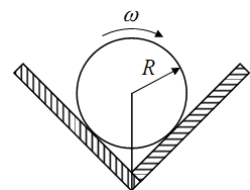


$$\left(v = \frac{5}{7}v_0; v(t) = \frac{v_0(R-r)}{R-r+v_0\mu t}; t_{\text{ковз.}} = \frac{2}{5} \frac{R-r}{\mu v_0}; \omega(t) = \frac{5}{2} \frac{\mu v_0 t}{r(R-r+v_0\mu t)} \right)$$

11.26. Тонкий стержень довжини L і масою m лежить на гладкій горизонтальній поверхні. Куля масою $m_0 = m/8$ летить перпендикулярно стержню і паралельно поверхні із швидкістю v_0 , попадає у стержень на відстані $L_0 = L/4$ від кінця стержня і застряє в ньому. Знайти кутову швидкість системи тіл після взаємодії.

$$\left(\omega = \frac{4}{13} \frac{v_0}{L} \right)$$

11.27. Горизонтальний жолоб складається з двох взаємно перпендикулярних дощок. Суцільний однорідний циліндр з радіусом R розкрутили до кутової швидкості ω і поклали у жолобі (див. рис.). Коефіцієнт тертя між стінками жолоба та циліндром дорівнює μ . Знайти час обертання циліндра у жолобі.



$$\left(t = \frac{\sqrt{2}}{4} \frac{\omega R}{\mu g} \right)$$

12 КОЛИВАЛЬНИЙ РУХ

При коливальному русі об'єкт здійснює фінітні переміщення поблизу деякого положення рівноваги. *Коливаннями називатимемо процеси, що повторюються (або що приблизно повторюються) в часі.* Такі процеси характеризуються наявністю періоду – часу, в перебігу якого величини набувають певного значення. Математично це означає, що, якщо $f(t)$ – періодична функція, то для будь-якого t $f(t+T) = f(t)$. Тобто, графік періодичної функції в точності повторюється через період T .

Якщо підвісити на невагомій нерозтяжній нитці невеликий важок та відхилити його від положення рівноваги і відпустити, то важок почне здійснювати власні коливання під дією рівнодійної сил натягу нитки T і сили тяжіння mg . *Власними ці коливання називають тому, що під час коливання важок знаходиться тільки під дією сил, що визначають фізичне облаштування цього маятника. Якщо можна вважати, що маса маятника зосереджена в одній точці – центрі мас, тобто центр мас – це математична точка, а нитка невагома і нерозтяжна, то такий маятник називають математичним маятником.* Рівняння руху такого маятника описується другим законом Ньютона і зводиться до рівняння виду:

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -\omega_0^2 s$$

в якому $s(t)$ – зміщення від положення рівноваги, $\omega_0^2 = \frac{g}{l}$, l – довжина нитки, g – прискорення вільного падіння. *Отримане рівняння набуває вигляду рівняння незгасаючих гармонічних коливань або гармонічного осцилятора.* Аналогічним чином, зміщення маси m з положення рівноваги *пружинного маятника*, якщо нехтувати силами опору (силами

тертя) описується рівнянням руху виду:

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -\frac{k}{m}s; \omega_0^2 = \frac{k}{m}; \frac{d^2s}{dt^2} = -\omega_0^2s$$

тобто, знову приходимо до рівняння гармонічного осцилятора. Загальний вигляд рівняння гармонічних коливань таким чином має вид:

$$\ddot{s} + \omega_0^2s = 0$$

Рішенням такого рівняння є сімейство гармонічних функцій виду

$$s(t) = s_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$$

Параметр s_0 називають амплітудою коливань, ω_0 – кутова частота, φ_0 – початкова фаза коливань, сума $\omega_0 t + \varphi_0$ – фаза коливань. Коливання характеризують лінійною частотою $\nu_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$, рівною числу коливань за одиницю часу, а також періодом коливань $T = \frac{1}{\nu_0} = \frac{2\pi}{\omega_0}$ – тривалістю

одного коливання. **Період гармонічних коливань не залежить від початкових умов і дорівнює:**

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}; T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

для математичного і пружинного маятників відповідно

Гармонічними коливаннями описуються також вільні коливання фізичного маятника – тіла довільної форми масою m , яке закріплене на горизонтальній осі, що не проходить через його центр мас. Частота і період коливань рівні відповідно:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mga}{I}}; T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mga}}$$

де I – момент інерції тіла відносно осі обертання, a – відстань від осі обертання до центру мас.

Для гармонічних коливань повна механічна енергія, що зберігається, може бути виражена у вигляді квадратичної функції від координати і її першої похідної за часом, тобто представлена у вигляді:

$$E = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^2}{2}$$

У цьому випадку власними коливаннями системи є гармонічні коливання, а частота коливань ω визначається повністю лише властивостями механічної системи і не залежить від початкових умов. **Максимальна кінетична енергія осцилятора дорівнює його максимальній потенціальній енергії, середня кінетична енергія дорівнює його середній потенціальній.**

В реальних системах завжди відбувається дисипація енергії. Коливання в таких системах згасатимуть. Основною зовнішньою силою є тертя. Енергія коливань зменшується, зменшується їх амплітуда, коливання стають згасаючими, змінюється їх частота. Вважають, що $F_{\text{тер}} = -\gamma\dot{s}$, де γ – стала величина. Тоді рівняння коливань набуває вигляду

$$\ddot{s} + 2\delta\dot{s} + \omega_0^2 s = 0$$

у якому $\delta = \frac{\gamma}{2m}$ – коефіцієнт загасання. Його загальне рішення має вид:

$$s(t) = s_0 e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi)$$

Частотою згасаючих коливань є вилична $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$, а амплітуда залежить від часу за законом $A(t) = s_0 e^{-\delta t}$. Експоненціальний закон убутання амплітуди від часу дає можливість ввести безрозмірний параметр – **логарифмічний декремент загасання θ** , який дорівнює логарифму відношення двох послідовних відхилень в один і той же бік:

$$\theta = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \delta T$$

Логарифмічний декремент загасання – це величина, обернена числу коливань, протягом яких амплітуда згасає в e разів. Або: амплітуда коливань згасає в e разів впродовж числа коливань, яке дорівнює величині логарифмічного декременту згасання.

Щоб збудити і підтримувати в системі незгасаючі коливання, необхідно компенсувати втрати енергії, обумовлені силами тертя. Це можна здійснити, впливаючи на систему змінною зовнішньою силою F , що змінюється в простому і практично найбільш важливому випадку за гармонічним законом. *Коливання, що виникають внаслідок цього, називають вимушеними коливаннями.* Нехай зовнішня сила, що діє на осцилятор, може бути записана таким чином:

$$F = F_0 \cos \Omega t$$

де F_0 – амплітуда сили, Ω – її частота. Рівняння руху запишеться у такому разі у вигляді:

$$m\ddot{s} + \gamma\dot{s} + ks = F_0 \cos \Omega t$$

Дійсна частина рішення має вигляд:

$$\operatorname{Re} \tilde{s} = s(t) = A_0 \cos(\Omega t + \varphi)$$

в якому

$$A_0 = \frac{F_0}{m} \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2\Omega^2}}; \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = -\frac{2\delta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2} = \frac{2\delta\Omega}{\Omega^2 - \omega_0^2}$$

Залежність A_0 від частоти змушувальної сили Ω називають амплітудно-частотною характеристикою процесу вимушених коливань, залежність $\varphi(\Omega)$ – фазовою характеристикою. *Максимальне значення амплітуда досягає, коли частота зовнішньої сили наближена до частоти власних коливань осцилятора ($\Omega \approx \omega_0$). Коливання з максимальною амплітудою називають резонансними, а саме явище*

«розгойдування» коливань до максимальної амплітуди для $\Omega \approx \omega_0$ називають резонансом. Під час відхилення частоти зовнішньої сили від резонансної амплітуда різко зменшується.

12.1 Знайти період малих коливань кульки маси m , укріпленої на середині горизонтальної натягнутої струни довжини L . Натягнення струни вважати постійним і рівним F .

$$\left(T = \pi \sqrt{\frac{mL}{F}} \right)$$

12.2. Знайти частоту коливання фізичного маятника із закону збереження повної механічної енергії.

12.3. Бажаючи визначити розподіл потенціалу уздовж осі «чорного ящика», експериментатор пускає уздовж осі іони з різними швидкостями. Іони, випущені із швидкістю V , повертаються назад через час $T = \alpha V^\beta$. Відновити залежність потенціалу від координати.

$$\left(U(x) = Kx^{\frac{2}{\beta+1}}, K = \left(\frac{4}{\alpha} \right)^{\frac{2}{\beta+1}} \right)$$

12.4. Точка масою m , що має заряд q , може рухатися по вертикалі в полі тяжіння. Нижче на тій же вертикалі закріплений однойменний заряд Q . Знайти частоту малих коливань точки. У рівновазі відстань між зарядами рівна L .

$$\left(\omega = \sqrt{2g \sqrt{\frac{mg}{Qq}}} \right)$$

12.5. Знайти залежність періоду коливань частинки масою m від енергії E , якщо вона вільно рухається між двома паралельними стінками, відстань між якими L , перпендикулярно стінкам. Зіткнення частинки із стінкою

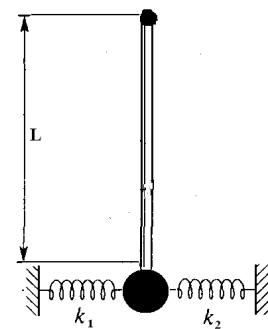
вважати абсолютно пружним.

$$\left(T = L\sqrt{\frac{2m}{E}} \right)$$

12.6*. Знайти період коливань точки масою m , яка рухається в полі тяжіння в гладкій циклоїдній чаші $x = R(\varphi + \sin\varphi)$, $y = R(1 - \cos\varphi)$. (Вказівка: звести вираз для повної енергії до квадратичної залежності від кута φ і похідної за часом від кута. Інтеграл по куту зводиться до \arcsin).

$$\left(T = 4\pi\sqrt{\frac{R}{g}} \right)$$

12.7. Знайти циклічну частоту ω_0 власних коливань системи: кульки масою m , закріпленої на кінці невагомому стержню довжиною L , до якого прикріплені дві пружини жорсткістю k_1 і k_2 . Пружини невагомі. (Вказівка: знайти повну механічну енергію системи).



$$\left(\omega_0^2 = \frac{k_1}{m} + \frac{k_2}{m} + \frac{g}{L} \right)$$

12.8. Тонкий однорідний брусок довжиною L ковзає по гладкій площині із швидкістю v_0 , спрямованою уздовж бруска. Брусок наїжджає на велику шорстку ділянку площини. Через який час брусок зупиниться, якщо коефіцієнт тертя між бруском і шорсткуватою ділянкою площини дорівнює μ ? (Зауваження: брусок не обов'язково повинен зупинитися після проходження шорсткуватої ділянки).

$$\left(t = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{L}{\mu g}} + \sqrt{\frac{v_0^2}{\mu^2 g^2} - \frac{L}{\mu g}} \right)$$

12.9. Гиря масою m підвішена до пружини, коефіцієнт жорсткості якої

дорівнює k і здійснює згасаючі коливання. Визначити їх період, якщо за час двох коливань ($n=2$) амплітуда їх зменшилася в N разів. Знайти коефіцієнт згасання δ .

$$\left(T = \frac{\sqrt{4\pi^2 + \frac{1}{n^2} \ln^2 N}}{\omega_0}; \delta = \frac{\omega_0 \ln N}{n\sqrt{4\pi^2 + \frac{1}{n^2} \ln^2 N}} \right)$$

12.10. Два тіла масою m кожне пов'язані невагомою пружиною жорсткістю k . На верхнє тіло поклали вантаж, який стиснув пружину. Нижнє тіло лежить на горизонтальному столі. При якому мінімальному значенні маси вантажу M нижнє тіло відірветься від столу, якщо вантаж швидко зняти?

$$(M = 2m)$$

12.11. Вантаж маси m , підвішений на пружині жорсткості k , знаходиться на підставці. Пружина при цьому не деформована. Підставку швидко прибирають. Визначити максимальне подовження пружини і максимальну швидкість вантажу.

$$\left(h = \frac{2mg}{k}; v_{\max} = g\sqrt{\frac{m}{k}} \right)$$

12.12. В суцільному однорідному циліндрі радіусу R зроблена циліндрична порожнина радіусом $R/2$ з віссю, що проходить через середину радіусу циліндра. Визначити період малих коливань T циліндра на горизонтальній площині, якщо циліндр коливається без ковзання.

$$\left(T = \pi\sqrt{\frac{29R}{g}} \right)$$

12.13. Обруч радіусу R лежить горизонтально усередині нерухомої гладкої сфери радіусу $2R$. Знайти частоту малих коливань обруча під дією

сили тяжіння.

$$\left(\omega_0^2 = \frac{2\sqrt{3} g}{7 R} \right)$$

12.14. Знайти частоту малих коливань тонкого стержня довжиною L в полі тяжіння навколо горизонтальної осі, перпендикулярної стержню і розташованої на відстані x від його середини.

$$\left(\omega = \sqrt{\frac{g}{\frac{L^2}{12x} + x}} \right)$$

12.15. Симетричний хрест, що складається з двох взаємно-перпендикулярних тонких однорідних стрижнів довжиною L , може коливатися в полі тяжіння навколо горизонтальної осі, що проходить через один із стрижнів і перпендикулярний йому. При якій відстані X осі обертання від центру хреста період його малих коливань буде мінімальний? Знайдіть мінімальне значення періоду коливань хреста.

$$\left(X = \pm \frac{L}{\sqrt{12}}; T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g\sqrt{3}}} \right)$$

12.16. Номерок з гардеробу є диском радіусу R , на краю якого є отвір радіусом r . Номерок висить на тонкому цвяху. Знайти частоту його малих коливань у своїй площині.

$$\left(\omega = \sqrt{\frac{2}{3} g \frac{R^3 - r^3}{R^4 - r^4}} \right)$$

12.17. У ободі колеса масою M , що має форму диска радіусом R , застряг камінчик масою m . Знайти частоту малих коливань при плоскому похитуванні колеса без прослизання на горизонтальній площині (вважати, що $m \ll M$).

$$\left(\omega = \sqrt{\frac{2gm}{3RM}} \right)$$

12.18. Однорідний стержень довжиною L може обертатися без тертя у вертикальній площині навколо осі, що проходить через одну з його точок. Стержень відхиляють на кут $\pi/2$ від вертикалі і без початкової швидкості відпускають. На якій відстані a від центру мас стержня повинна знаходитися вісь, щоб у момент проходження стержнем вертикалі його кутова швидкість була найбільшою?

$$\left(a = \frac{L}{2\sqrt{3}} \right)$$

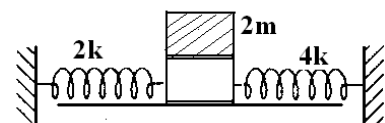
12.19. Однорідна квадратна пластинка із стороною a здійснює малі коливання у вертикальній площині навколо горизонтальної осі, що перпендикулярна до площини пластинки і проходить через одну з його точок. Знайти: 1) геометричне місце точок, відносно яких коливання проходять з найменшим періодом; 2) величину цього періоду.

$$\left(\text{Коло радіусом } r = \frac{a}{\sqrt{6}}; T_{\min} = \sqrt{\frac{a}{g}} \sqrt{\frac{2}{3}} \right)$$

12.20. У середині гладкої сферичної поверхні радіусу R знаходиться невелика кулька масою m , яка здійснює гармонічні коливання. Відоме мале зміщення кульки з положення рівноваги S_{\max} , виміряне уздовж поверхні сфери. Знайти частоту і енергію коливання створеного маятника.

$$\left(\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{R}}; E = \frac{mgS_{\max}^2}{2R} \right)$$

12.21. Знайти максимальну амплітуду гармонічних коливань системи, яка складається з двох брусків та двох невагомих пружин

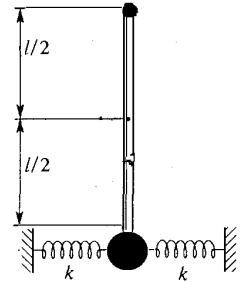


жорсткістю $2k$ і $4k$. Маса нижнього бруска m , маса верхнього – $2m$.

Коефіцієнт тертя між брусками дорівнює μ . В положенні рівноваги пружини не деформовані, тертя між нижнім брусом і площиною відсутнє. Бруски під час коливань не прослизують один відносно одного.

$$\left(x = \left| \frac{\mu mg}{2k} \right| \right)$$

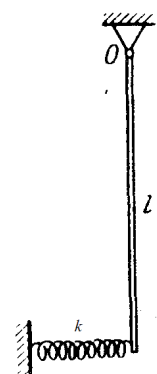
12.22*. Однорідний стержень масою m і довжиною l підвішений у полі тяжіння за верхній кінець. До його нижнього кінця прикріплена куля масою m з того ж матеріалу. До кулі прикріплені дві невагомі і нерозтяжні пружини жорсткості k кожна, другі кінці яких закріплені.



Система може здійснювати малі коливання біля положення рівноваги. Знайти період цих коливань. Як зміниться період коливань, якщо точку закріплення пересунути вниз таким чином, щоб вона опинилась на відстані a від центру мас системи.

$$\left(T = 2\pi \sqrt{\frac{8ml}{12kl + 9mg}}; T = 2\pi \sqrt{\frac{5ml^2 + 48ma^2}{48[k(l/4 + a)^2 + mga]}} \right)$$

12.23. Однорідний тонкий стержень масою M і довжиною L в першому випадку знаходиться у вертикальній площині і шарнірно закріплений у



верхній точці, а другий раз – в горизонтальній площині і закріплений за кінець. В обох випадках він здійснює малі

коливання під дією легкої пружини жорсткістю k . Пружина сполучена в першому випадку – у нижній точці стержня, в другому – за його інший

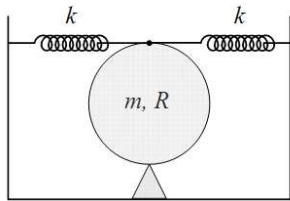


горизонтальний кінець, і знаходиться у вертикальному

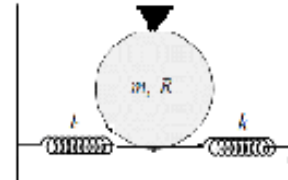
положенні. Пружини не розтягнені в положенні рівноваги стержня. Знайти відношення частот коливань.

$$\left(\frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{3kl}{2kl + mg}} \right)$$

12.24. Суцільний однорідний циліндр масою M і радіусом R в першому



випадку шарнірно закріплений у нижній точці, а другий раз у – верхній, і здійснює малі коливання під дією двох горизонтальних однакових легких пружин жорсткістю k кожна.



Пружини сполучені в першому випадку – в верхній точці циліндру, в другому – в нижній, і не розтягнені в положенні рівноваги циліндра. Знайти відношення частот коливань.

$$\left(\frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{8kR + Mg}{8kR - Mg}} \right)$$

12.25. Дві кульки однакового радіусу, маси яких є m_1, m_2 , з'єднані легкою пружиною довжиною L_0 і жорсткістю k . Система знаходиться на абсолютно гладкому столі. В деякий момент часу пружину розтягнули на відстань $a \ll L_0$ і відпустили. Знайти період малих коливань та зміну відстані між кульками від часу.

$$\left(T = 2\pi\sqrt{\frac{\mu}{k}}; L(t) = L_0 + a \cos \omega_0 t \right)$$

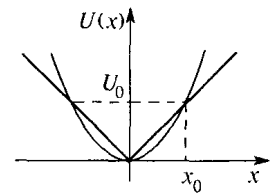
12.26. Під час гармонічних коливань відомі максимальна швидкість частинки v_{\max} та максимальне прискорення a_{\max} . Знайти частоту і амплітуду коливань, а також швидкість частинки у момент часу, коли її зміщення відносно положення рівноваги дорівнює половині максимального.

$$\left(\omega = \frac{a_{\max}}{v_{\max}}; A = \frac{v_{\max}^2}{a_{\max}}; v = \frac{\sqrt{3}}{2} v_{\max} \right)$$

12.27. Частинка здійснює гармонічні коливання за законом $x = A \sin(2\pi t + \frac{1}{6}\pi)$, де A – відома стала. В які моменти часу кінетична енергія частинки дорівнює її потенціальній?

$$\left(\tau_1 = \frac{1}{24} + \frac{1}{2}n; \tau_2 = -\frac{5}{24} + \frac{1}{2}m; n, m \in Z \right)$$

12.28*. Матеріальна точка здійснює одновимірні коливання в трикутній потенціальній ямі $U(x) = k|x|$ з періодом T_0 . Знайти період гармонічних коливань T цієї точки в параболічній потенціальній ямі



$U(x) = kx^2$, якщо максимальна потенціальна енергія точки і її амплітуда в обох випадках однакові.

$$\left(\frac{T}{T_0} = \frac{\pi}{4} \right)$$

12.29*. Як залежить період руху частинки масою m в полі $U = \alpha|x|^\beta$ від її повної енергії E ? Вважати, що $\alpha > 0$. (Зауваження: для оцінки інтегралу пропонується ввести нову змінну у вигляді $y = \frac{x}{E^{\frac{1}{\beta}}}$)

$$\left(T \sim E^{\frac{1}{\beta} - \frac{1}{2}} \right)$$

12.30. Знайти залежність періоду від енергії E для м'ячика масою m , який підстрибує вертикально вгору над поверхнею стола в однорідному полі тяжіння g . Удари м'ячика зі столом розглядати як абсолютно пружні.

$$\left(T = \frac{2\sqrt{2}}{g} \sqrt{\frac{E}{m}} \right)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. С.М. Козел, Э.И. Рашба, С.А. Славатинский. Сборник задач по физике. Задачи МФТИ. – М.: Наука, 1987 г.
2. И.Е. Иродов. Задачи по общей физике. – М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2003 г.
3. С.П. Стрелков, Д.В. Сивухин, В.А. Угаров, И.А. Яковлев. Сборник задач по общему курсу физики. Механика. Под ред. И.А. Яковлева. – М.: Наука, 1977 г.
4. А.Е. Иванов, С.А. Иванов. Механика. Молекулярная физика. Термодинамика. – М.: КноРус, 2012 г.
5. В.П. Демков, О.Н. Третьякова. Физика. Теория. Методика. Задачи. – М.: Высшая школа, 2001 г.
5. Н.Н. Взоров, О.И. Замша, И.Е. Иродов, И.В. Савельев. Сборник задач по общей физике. – М.: Наука, 1968 г.
6. Ю.И. Бельченко, Е.И. Гилёв, З.К. Силагадзе. Механика частиц и тел в задачах. – М–Ижевск, НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2008 г.
7. С.С. Прошкин, Н.В. Нименский В.А. Самолётов. Сборник задач по механике, термодинамике и молекулярной физике. – Дубна, «Феникс +», 2006 г.
8. И.В. Савельев. Сборник вопросов и задач по общей физике. – М.: Наука, 1982 г.
9. Д.А. Заикин, В.А. Овчинкин, Э.В. Прут. Сборник задач по общему курсу физики. Под ред. В.А. Овчинкина. Ч.1 Механика, термодинамика и молекулярная физика. – М.: МФТИ, 1998 г.
10. В.В. Батыгин, И.Н. Топтыгин. Сборник задач по электродинамике. И.А. – М.: Наука, 1970 г.

11. А. Лайтман, В. Пресс, Р. Прайс, С. Тюкальски. Сборник задач по теории относительности и гравитации. – М.: Мир, 1979 г.
12. Д.А. Паршин, Г.Г.Зегря. Классическая механика. Лекции по общему курсу физики. – Санкт-Петербург, Физико-технический Институт им. А.Ф. Иоффе РАН, Научно-образовательный центр, 2003 г.
13. Мин Чен. Задачи по физике с решениями. – М.: Мир, 1978 г.
14. В.И. Мурзов, А.Ф. Коненко, Л.Г. Филиппова. Общая физика в задачах и решениях. – Минск. Вышэйша школа, 1986 г.
15. И.И. Ольховский, Ю.Г. Павленко, Л.С. Кузьменков. Сборник задач по теоретической механике для физиков. – Из-во МГУ, 1977 г.
16. В.А. Угаров. Специальная теория относительности. – М.: Наука, 1977 г.
17. Задача по механике и теории относительности. Под ред. В.И. Тельнова. Новосибирск. 2016 г.
18. Р.Р. Нигматуллин, А.И. Скворцов, О.В. Недопекин. Методические указания к решению задач по курсу «Механика». – Казань, 2012 г.
19. Н.А. Кириченко, К.М. Крымский. Общая физика. Механика. – М., МФТИ, 2013 г
20. А.Г. Белянкин, А.Н. Матвеев, И.М. Сараева и др. Методика решения задач механики. Под ред. А.Н. Матвеева. – Изд-во МГУ, 1980 г.
21. В.С. Русаков, А.И. Слепков, Е.А. Никанорова, Н.И. Чистякова. Механика. Методика решения задач. – Физфак МГУ, 2010 г.
22. Ю.Н. Колмаков, Ю.А. Пекар, В.А. Сёмин. Механика и теория относительности. Задачи и методы их решения. – Тула, ТГУ, 2002 г.
23. Б.С. Беликов. Решение задач по физике. Общие методы. – М.: Высшая школа, 1986 г.
24. Л.Г. Гречко, В.И. Сугаков, О.Ф. Томасевич, А.М. Федорченко. Сборник задач по теоретической физике. – М.: Высшая школа, 1984 г.

ДОДАТОК 1
ЕКЗАМЕНАЦІЙНІ ЗАДАЧІ ПОПЕРЕДНІХ РОКІВ

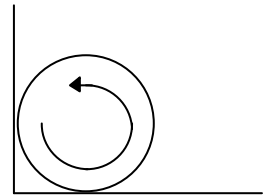
Прізвище	Задачі			
Група	1	2	3	4
Оцінка				

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
“КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ”
ФІЗИКО-ТЕХНІЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ

МЕХАНІКА
Січень 2003
Білет 1

(5) При розпаді деякої частинки з'являються дві частинки з масами m_1 і m_2 . З досліду відомі абсолютні величини імпульсів \mathbf{P}_1 і \mathbf{P}_2 цих частинок, та кут θ між напрямками їх розливу. Знайти масу частинки, що розпадається.

(10) Суцільний однорідний циліндр радіуса R розкрутили навколо його осі до кутової швидкості ω_0 і поставили в кут. Коефіцієнт тертя між стінками кута і циліндром дорівнює k . Скільки обертів має здійснити циліндр до повної зупинки?



(15) Ракета починає рухатися у пиловій хмарі. Пилинки нерухомі і прилипають до ракети при ударі. Початкова швидкість ракети дорівнює нулю, швидкість газів відносно ракети дорівнює u , масою корпусу в порівнянні із стартовою масою можна знехтувати. Відомо також, що в деякій момент польоту ракети маса витраченого пального дорівнює масі пилу, який налипає. Знайти швидкість, до якій можна розігнати ракету в такій хмарі.

(20) Десять мурашок вирішили стягнути зі столу соломинку. Чи в змозі вони здійснити замислене, якщо максимальне значення сили, яку може розвинути одна мурашка, складає $0,09$ сили тертя, що діє на соломинку, коли вона переміщується по столу? Коефіцієнт тертя $k = 0,6$. Соломинка нескінченно тонка та однорідна. Чи зможуть стягнути соломинку п'ять мурашок?

Оцінки: “відмінно” – більше 30 балів, “добре” – 20 балів, “задовільно” – 15 балів.
Відсутність числової відповіді – мінус 5 балів.

Прізвище	Задачі			
Група	1	2	3	4
Оцінка				

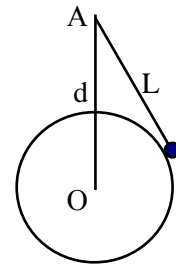
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
“КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ”
ФІЗИКО-ТЕХНІЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ

МЕХАНІКА
Січень 2003
Білет 2

(5) Релятивістська частинка з енергією спокою m_0c^2 розпадається в польоті на два фотона з енергіями E_1 і E_2 . Знайти кут θ між напрямками розливу фотонів.

(10) Однорідний стержень довжиною L дуже короткою ниткою одним кінцем прив'язано до стелі. Стержень відводять на кут 45° від вертикалі та надають його нижньому кінцю початкову швидкість v_0 в напрямку, перпендикулярному вертикальній площині відхилення стержня. Якої має бути мінімальна початкова швидкість $v_{0\min}$, щоб при подальшому руху стержень міг доторкнутися до стелі?

(15) Кулька, яку підвішене на нитці, лежить на поверхні гладкої сфери радіуса R . Точка підвісу знаходиться на вертикальному стержні, який жорстко зв'язаний із центром сфери. Відстань від точки підвісу до центру сфери дорівнює d . Знайти натяг нитки та реакцію сфери для нерухомої кульки. Визначити швидкість v , яку треба надати кульці в напрямку, перпендикулярному площині рисунку таку, щоб реакція сфери дорівнювала нулю. Кульку вважати точковою. Нитка невагома та нерозтяжна.



(20) Оцінити вплив, що здійснює Місяць на траєкторію руху Землі навколо Сонця. Чи є рух Землі відносно Сонця періодичним з математичної точки зору? Маса Місяця $7.36 \cdot 10^{22}$ кг, маса Землі $5.876 \cdot 10^{24}$ кг, маса Сонця $1984 \cdot 10^{27}$ кг. Відстань між центром Землі та центром Місяця $3.844 \cdot 10^5$ км, між центром Сонця та центром Землі $1.5 \cdot 10^8$ км. При оцінках рух в гравітаційному полі вважати таким, що відбувається по колу. Відповідь проілюструвати графічно.

Оцінки: “відмінно” – більше 30 балів, “добре” – 20 балів, “задовільно” – 15 балів.
Відсутність числової відповіді – мінус 5 балів.

Прізвище	Задачі			
Група	1	2	3	4
Оцінка				

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
“КІЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ”
ФІЗИКО-ТЕХНІЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ

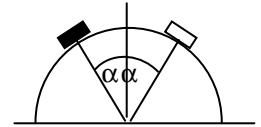
МЕХАНІКА

Січень 2004

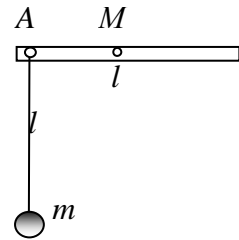
Білет 1

(5) Космічний корабель стартує з початковою масою m_0 та нульовою початковою швидкістю у просторі, вільному від поля тяжіння. Маса корабля змінюється у часі за законом: $m = m_0 \exp(-\lambda t)$, швидкість продуктів згоряння відносно корабля постійна і дорівнює u . Яку відстань x пройде корабель до того моменту, коли його маса зменшиться у 1000 разів?

(10) На горизонтальній поверхні лежить півсфера масою M . З її верхньої точки у протилежних напрямках без тертя з початковими нульовими швидкостями ковзають два тіла масами m_1 і m_2 ($m_1 > m_2$). Через тертя між півсферою та поверхнею рух півсфери починається лише при деякому куті α (див. рис.). Знайти коефіцієнт тертя.



(15) Твердий стержень довжиною l і масою M може обертатися навколо горизонтальної осі A , що проходить через його кінець (див. рис.). До тієї ж осі A підвішений математичний маятник такою ж довжиною l і масою m . Спочатку стержень має горизонтальне розміщення, а потім відпускається. У нижньому положенні відбувається абсолютно пружний удар, в результаті якого кулька і стержень деформуються, і частина кінетичної енергії переходить у потенціальну енергію деформації. Потім деформація зменшується, і потенціальна енергія, що запаслася, знову переходить у кінетичну. Знайти значення потенціальної енергії деформації U в момент, коли вона максимальна.



(20) На горизонтальній плиті лежить вантаж. Плита з крайнього нижнього положення починає рухатись вгору, здійснюючи по вертикалі гармонічні коливання з частотою ω_0 і амплітудою A . На яку висоту відносно початкового положення підскочить вантаж після відриву від поверхні плити?

Оцінки: “відмінно” – більше 30 балів, “добре” – 20 балів, “задовільно” – 15 балів.

Відсутність числової відповіді – мінус 5 балів.

Прізвище	Задачі			
Група	1	2	3	4
Оцінка				

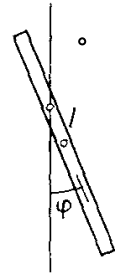
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
“КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ”
ФІЗИКО-ТЕХНІЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ

МЕХАНІКА

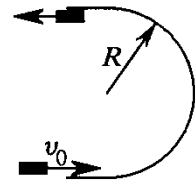
Січень 2004

Білет 2

(5) У якій точці слід підвісити однорідний стержень довжиною l (див. рис.), щоб частота його коливань як фізичного маятника була максимальною? Чому дорівнює ця частота?



(10) Брусок ковзає по гладкій горизонтальній поверхні зі швидкістю v_0 і по дотичній потрапляє в область, обмежену парканом у формі півкола (див. рис., вид зверху). Визначити час, через який брусок залишить область півкола. Радіус паркана R , коефіцієнт тертя ковзання бруска по поверхні паркана k . Тертям бруска по горизонтальній поверхні знехтувати, розмір бруска набагато менше R .



(15) Водометний катер стартує зі стану спокою. В одиницю часу двигун катера проганяє масу води μ , забираючи її зі сторони носової частини і викидаючи назад зі швидкістю u . Маса катера M , ширина його D , силу опору води вважати рівною $\mathbf{F} = -(A\eta d)\mathbf{v}$, де η – в'язкість води, що вважається відомою, A – постійний коефіцієнт. Знайти залежність швидкості катера від часу. Оцінити її на початку, відразу після старту.

(20) В релятивістському випадку відсутнє поняття центра мас (чому?), але існує термін “система центру мас”, в якій сума імпульсів частинок дорівнює нулю. Таку систему можна знайти завжди. Нехай задана енергія та імпульс системи частинок, як сума імпульсів та енергій окремих частинок в лабораторній системі. Знайти систему центра мас, та визначити в ній енергію та імпульс системи матеріальних частинок через їх значення в лабораторній системі.

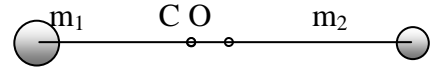
Оцінки: “відмінно” – більше 30 балів, “добре” – 20 балів, “задовільно” – 15 балів.
Відсутність числової відповіді – мінус 5 балів.

Прізвище	Задачі			
Група	1	2	3	4
Оцінка				

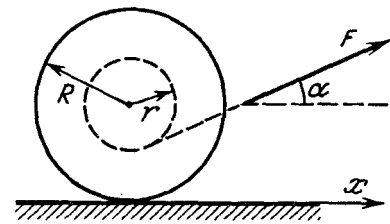
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
“КІЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ”
ФІЗИКО-ТЕХНІЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ

МЕХАНІКА
Січень 2004
Білет 3

(5) На кінцях тонкого стержня довжиною l закріплені вантажі масою m_1 і m_2 . Стержень коливається навколо горизонтальної осі, що проходить через його середину (див. рис.). Знайти період коливань стержня для випадків, коли: 1) стержень невагомий; 2) маса стержня дорівнює m_c .



(10) На горизонтальній шорсткій площині лежить катушка ниток масою m . Її момент інерції відносно власної осі $I = \gamma m R^2$, де γ – числовий коефіцієнт, R – зовнішній радіус катушки. Радіус намотаного шару дорівнює r . Катушку без ковзання почали тягнути за нитку постійною силою F , направленою під кутом α до горизонту (див. рис.). Знайти: 1) проекцію прискорення осі катушки на вісь x ; 2) роботу сили F за перші t секунд руху.



(15) Реактивний корабель масою M рухається за допомогою насоса, який забирає воду із річки і викидає її назад з корми корабля. Швидкість струменю води відносно корабля постійна і дорівнює u . Щосекундне викидання маси води також постійне і дорівнює μ . Знайти: 1) модуль швидкості корабля v як функцію часу; 2) коефіцієнт корисної дії системи η як функцію величини u і v . Дослідити вираз для коефіцієнта корисної дії на максимум. Силу тертя в насосі та опір води рухові корабля не враховувати.

(20) Релятивістська ракета викидає струмінь газу з нерелятивістською швидкістю u , постійною відносно ракети. Знайти залежність швидкості v ракети від її маси m , якщо у початковий момент маса ракети дорівнювала m_0 . (Виходити із загального рівняння руху тіл зі змінною масою, вважаючи, що ракета рухається з релятивістською швидкістю, маса її релятивістська, маса спокою є величина змінна, а зовнішні сили відсутні).

Оцінки: “відмінно” – більше 30 балів, “добре” – 20 балів, “задовільно” – 15 балів. Відсутність числової відповіді – мінус 5 балів.

Прізвище	Задачі			
Група	1	2	3	4
Оцінка				

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
“КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ”
ФІЗИКО-ТЕХНІЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ

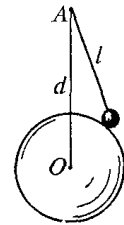
МЕХАНІКА

Січень 2005

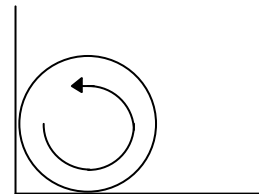
Білет 1

(5) При розпаді деякої частинки з’являються дві частинки з масами m_1 і m_2 . З досліду відомі абсолютні величини імпульсів \mathbf{P}_1 і \mathbf{P}_2 цих частинок, та кут θ між напрямками їх розльоту. Знайти масу частинки, що розпадається.

(10) Кулька, яка підвішена на нитці, лежить на поверхні гладкої сфери радіуса R . Точка підвісу знаходиться на вертикальному стержні, який жорстко зв’язаний із центром сфери. Відстань від точки підвісу до центру сфери дорівнює d . Знайти натяг нитки та реакцію сфери для нерухомої кульки. Визначити швидкість v , яку треба надати кульці в напрямку, перпендикулярному площині рисунку, таку, щоб реакція сфери дорівнювала нулю. Кульку вважати точковою. Нитка невагома та нерозтяжна.



(15) Суцільний однорідний циліндр радіуса R розкрутили навколо його осі до кутової швидкості ω_0 і поставили в кут. Коефіцієнт тертя між стінками кута і циліндром дорівнює k . Скільки обертів здійснить циліндр до повної зупинки?



(20) Водометний катер стартує зі стану спокою. В одиницю часу двигун катера проганяє масу води μ , забираючи її зі сторони носової частини і викидаючи назад зі швидкістю u . Маса катера M , ширина його D , силу опору води вважати рівною $F = -(A\eta d)v$, де η – в’язкість води, що вважається відомою, A – постійний коефіцієнт. Знайти залежність швидкості катера від часу. Оцінити її на початку, відразу після старту.

Оцінки: “відмінно” – не менше 30 балів, “добре” – 20 балів, “задовільно” – 14 балів. Відсутність числової відповіді – (-5) балів.

Прізвище	Задачі			
Група	1	2	3	4
Оцінка				

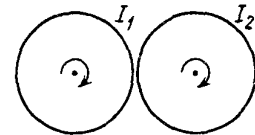
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
“КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ”
ФІЗИКО-ТЕХНІЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ

МЕХАНІКА
Січень 2005
Білет 2

(5) У системі відліку K два паралельних стержня мають однакову власну довжину l_0 , і рухаються в повздовжньому напрямку назустріч один одному з рівними швидкостями v , вимірними в цій системі відліку. Чому дорівнює довжина кожного стержня в системі відліку, пов’язаній з іншим стержнем?

(10) Снаряд у верхній точці траєкторії на висоті h розпадається на два однакові уламки. Через час t після розпаду один з уламків падає на землю під тим самим місцем, де стався вибух. На якій відстані від місця запуску снаряду впаде другий уламок, якщо перший впав на відстані s ? Опір повітря не враховувати.

(15) Двом дискам однакового радіуса надали одну і ту ж кутову швидкість ω_0 , а потім їх притулили одне до одного, і система набула нового стану руху. Осі дисків нерухомі, тертя у осях відсутнє. Моменти інерції дисків відносно їх осей обертання дорівнює I_1, I_2 . Знайти: а) приріст моменту імпульсу системи; б) зменшення її механічної енергії.



(20) Ракета починає рухатися у пиловій хмарі. Пилінки нерухомі і прилипають до ракети при ударі. Початкова швидкість ракети дорівнює нулю, швидкість газів відносно ракети дорівнює u , масою корпусу в порівнянні із стартовою масою можна знехтувати. Відомо також, що в будь-який момент польоту ракети маса витраченого пального дорівнює масі пилу, який налипає. Знайти швидкість, до якої можна розігнати ракету в такій хмарі.

Оцінки: “відмінно” – не менше 30 балів, “добре” – 20 балів, “задовільно” – 14 балів. Відсутність числової відповіді – (-5) балів.

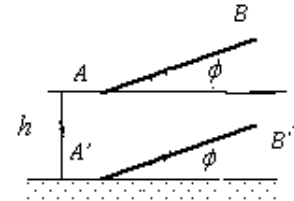
Прізвище	Задачі			
Група	1	2	3	4
Оцінка				

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
“КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ”
ФІЗИКО-ТЕХНІЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ

МЕХАНІКА
Січень 2005
Білет 3

(5) Маємо три інерціальні системи відліку K , K' , K'' . Система K' рухається рівномірно і прямолінійно зі швидкістю V_1 відносно системи K вздовж осі X . Система K'' рухається рівномірно відносно системи K' зі швидкістю V_2 паралельно осі Y . Виразити координати x'' , y'' , z'' і час t'' , які вимірюються в системі K'' через x , y , z , t системи K .

(10) Стержень довжини $2L$, нахилений до горизонту під кутом ϕ , падає без обертання з деякої висоти h на горизонтальний стіл і ударяється об поверхню стола. Удар вважати пружним. Знайти швидкість центра мас і кутову швидкість обертання відразу після удару.



(15) Нерелятивістська α -частинка, яка летить зі швидкістю v_0 , здійснює пружне зіткнення з нерухомим ядром і летить під кутом 90° до початкового напрямку руху. При якому співвідношенні мас α -частинки m і ядра M це можливо? Визначити швидкість α -частинки v і ядра u після зіткнення. Визначити також кут ϕ між напрямком швидкості ядра, що вилетіло і початковим напрямком руху α -частинки.

(20) Крапля дощу в момент $t=0$ починає падати в повітрі, що містить нерухомі пари води. За час падіння, за рахунок конденсації пари на краплі, маса краплі збільшується за законом $m = m_0 + \alpha t$. На краплю, що рухається, діє сила тертя $\mathbf{F} = -mk\mathbf{v}$. Знайти швидкість $\mathbf{v}(t)$ краплі.

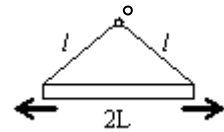
Оцінки: “відмінно” – не менше 30 балів, “добре” – 20 балів, “задовільно” – 14 балів. Відсутність числової відповіді – (-5) балів.

Прізвище	Задачі			
Група	1	2	3	4
Оцінка				

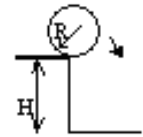
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
“КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ”
ФІЗИКО-ТЕХНІЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ

МЕХАНІКА
Січень 2006
Білет 1

(5) Фізичний маятник — однорідний стержень довжиною $2L$ і масою m , підвішений на двох невагомих нерозтяжних жорстких нитках довжиною l кожна, як показано на рисунку, коливається в площині рисунку. Знайти період його малих коливань навколо положення рівноваги.



(10) Човен масою m під парусом досяг швидкості v_0 . Як з часом буде зменшуватись швидкість руху човна у стоячій воді після спуску паруса, якщо опір води руху човна можна вважати пропорційним квадрату швидкості? Як довго буде рухатись човен? Який шлях пройде човен до повної зупинки?



(20) З краю стола, що має висоту H , падає без проковзування кільце радіусом R . На якій відстані від стола впаде кільце?

(20) Між двома посрібленими пластинками, розташованими на відстані $2L$, паралельно їм посередині розміщено металеву сіточку. На сіточку подають електричний додатній потенціал так, що утворюється однорідне електричне поле напруженістю E між кожною з пластин та сіточкою. Під час нагріву пластинок відбувається емісія електронів. Вважаючи, що електрони покидають пластини з нульовою початковою швидкістю, знайдіть у релятивістському випадку швидкостей частоту, з якою вони будуть коливатись навколо сіточки. Будь-якими зіткненнями знехтувати. Чи буде частота коливань зростати нескінченно при збільшенні напруженості поля?

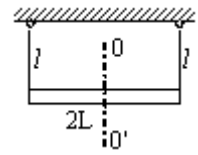
Оцінки: “відмінно” — більше 40 балів, “добре” — 30 ÷ 40 балів,
“задовільно” — 15 ÷ 25 балів.

Прізвище	Задачі			
Група	1	2	3	4
Оцінка				

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
“КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ”
ФІЗИКО-ТЕХНІЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ

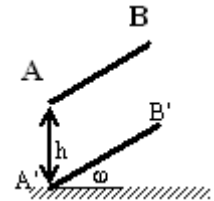
МЕХАНІКА
Січень 2006
Білет 2

(7) Фізичний маятник — однорідний стержень масою m , підвішений на двох невагомих нерозтяжних нитках довжиною l кожна, як показано на рисунку. Маятник здійснює обертальні коливання в горизонтальній площині навколо вертикальної осі OO' , яка проходить крізь його центр. Знайти період його малих коливань навколо положення рівноваги. Зміною висоти центру маси знехтувати.



(10) Човен масою m під парусом досяг швидкості v_0 . Як його швидкість буде залежить від пройденого шляху після спуску паруса, якщо опір води руху човна можна вважати пропорційним його швидкості? Який шлях пройде човен до повної зупинки? Як довго буде рухатись човен ?

(17) Стержень довжиною $2L$, нахилений до горизонту під кутом φ , падає без обертання з деякої висоти h на горизонтальний стіл і ударяється об поверхню стола. Удар вважати пружним. Знайти швидкість центра мас і кутову швидкість обертання відразу після удару.



(21) На лінійному прискорювачі у Стенфордї (США) електрони прискорюються від енергії спокою E_0 до енергії E у прямій трубі довжиною l_0 . Вважаючи, що прискорення електрона проходить уздовж труби рівномірно (тобто пропорційно довжині зростає його енергія), визначити, якою “здається” довжина труби самому електрону.

Оцінки: “відмінно” — більше 40 балів, “добре” — 27 ÷ 38 балів,
“задовільно” — 15 ÷ 25 балів.

Прізвище	Задачі			
Група	1	2	3	4
Оцінка				

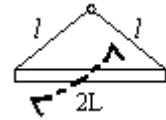
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
 “КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ”
 ФІЗИКО-ТЕХНІЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ

МЕХАНІКА

Січень 2006

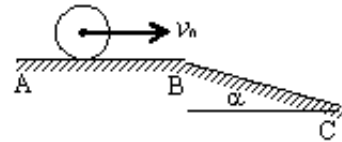
Білет 3

(5) Фізичний маятник — однорідний стержень довжиною $2L$ і масою m , підвішений на двох невагомих нерозтяжних нитках довжиною l кожна, як показано на рисунку, коливається в площині, перпендикулярній площині рисунку. Знайти період його малих коливань навколо положення рівноваги.

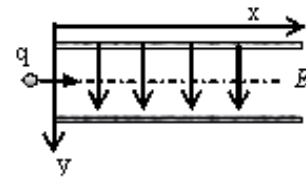


(10) Колобок, прагнучи похачувати олією із бочки, звалився туди і через деякий час t досягнув дна. Маса колобка m густина його в n разів більше густини олії, а сила опору рухові колобка в олії $\mathbf{F} = -\beta\mathbf{V}$, де β — стала величина. Оцінити висоту бочки H , якщо вона була залита до верху.

(17) По горизонтальній площині AB котиться без проковзування колода радіусом r зі швидкістю v_0 . Із площини AB колода перекочується на нахилену під кутом α площину BC . При яких значеннях кута α колода, перекочуючись на BC , не буде робити стрибка? Вважати коефіцієнт тертя у точці B достатнім, щоб не було проковзування.



(25) Релятивістська частинка масою m і зарядом q з початковим імпульсом $P_0 e_x$ залітає у поперечне електричне поле напруженістю $E e_y$. Поле утворюється конденсатором з пластинами довжиною L і відстанню між ними d . Частинка залітає в поле на однаковій відстані від кожної пластини конденсатора. Знайти залежність імпульсу частинки від часу, енергії частинки від часу. При яких умовах частинка впаде на пластинку конденсатора?



Оцінки: “відмінно” — більше 40 балів, “добре” — 30 ÷ 40 балів,
 “задовільно” — 15 ÷ 25 балів.

Прізвище	Задачі			
Група	1	2	3	4
Оцінка				

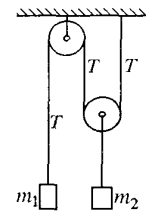
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
 “КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ”
 ФІЗИКО-ТЕХНІЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ

МЕХАНІКА

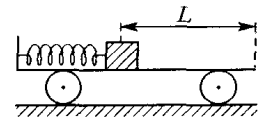
Січень 2007

Білет 1

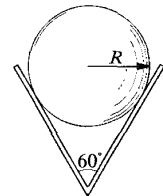
Знайти прискорення a_1 , a_2 мас m_1 , m_2 та натяг нитки T в системі, зображеній на рис. Масою блоків і нитки знехтувати.



На візку масою M , що знаходиться в стані спокою, закріплена пружина пружністю k у стисненому стані, дотикаючись до вантажу масою m , що знаходиться в стані спокою. Пружина стиснена на відстані x_0 від положення рівноваги, а відстань від вантажу до правого відкритого краю візка дорівнює L (довжина пружини у вільному стані менше L). Пружину звільняють, і вона виштовхує вантаж з візка. Якою буде швидкість v вантажу, коли він зісковзне з візка. Коефіцієнт тертя вантажу по візку дорівнює α , а тертям візка по поверхні знехтувати



Визначити прискорення a центра кульки, що скочується без ковзання по похилому жолобу, який має кут α до горизонту. Форма поперечного зрізу жолоба зображена на рис.



Розглянути рух поїзда під дією сили тяжіння при відсутності тертя і опору повітря в гіпотетичному тунелі довжиною $L = 6400$ км., який прорито вздовж однією із хорд земної кулі. Вплив обертання Землі не враховувати. Як буде направлена лінія висуку в поїзді, що рухається? Який час буде показувати маятниковий годинник у поїзді, коли він досягне протилежного кінця хорди? На поверхні Землі годинник йшов вірно. Землю вважати однорідною кулею радіуса $R = 6400$ км

Оцінки: “відмінно” – не менше 30 балів, “добре” – 20 балів, “задовільно” – 14 балів. Відсутність числової відповіді – (-5) балів.

Прізвище	Задачі			
Група	1	2	3	4
Оцінка				

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
“КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ”
ФІЗИКО-ТЕХНІЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ

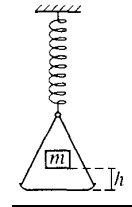
МЕХАНІКА

Січень 2007

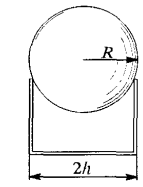
Білет 2

Невелика кулька рухається вгору по гладкій поверхні нерухомої сфери радіуса R . На початку руху швидкість кульки v_0 направлена під кутом φ_0 до горизонтальної поверхні. На якій висоті кулька відірветься від поверхні сфери? Вважати, що $v_0^2 > Rg$.

На чашу ваги, підвішену на пружині, падає з висоти h вантаж масою m і залишається на чаші, не підстрибуючи відносно неї. Чаша починає коливатися. Коефіцієнт пружності пружини дорівнює k . Визначити амплітуду A коливань. Масами чаші та пружини в порівнянні з масою вантажу знехтувати.



Визначити прискорення a центра кульки, що скочується без ковзання по похилому жолобу, який має кут α до горизонту. Форма поперечного зрізу жолоба зображена на рис.



Сферично-симетрична планета у системи τ -Кита має масу, радіус (6400 км.) то довжину доби таку саму, як на Земці. Маятниковий годинник перевозять на експресі з постійною швидкістю вздовж меридіан цієї планети з полюса на екватор за час $T_0 = 6$ годин. На скільки і в який бік буде відрізнятись час на годиннику після перевезення порівняно із годинником, що залишився на полюсі?

Оцінки: “відмінно” – не менше 30 балів, “добре” – 20 балів, “задовільно” – 14 балів. Відсутність числової відповіді – (-5) балів.

Прізвище	Задачі			
Група	1	2	3	4
Оцінка				

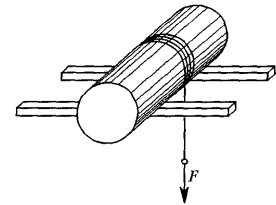
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
“КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ”
ФІЗИКО-ТЕХНІЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ

МЕХАНІКА
Січень 2007
Білет 3

Через нерухомий блок перекинута нитка, на кінцівках якої закріплені два тягарця масами m_1 , m_2 ($m_1 > m_2$). Виходячи із означення центра мас системи (ЦМС) як точки з масою всієї системи, знайти прискорення ЦМС тягарців.

Із південного та північного полюсів Землі одночасно стартують 2 ракети з однаковою початковою швидкістю v_0 у горизонтальному напрямку, протилежному один одному. При цьому їх еліптичні орбіти лежать в одній площині. Чому дорівнює максимальне віддалення ракет однієї від одної?

На двох паралельних горизонтальних брусках лежить суцільний циліндр радіусом R і масою m , на якому намотана вірвовка. До спущеного донизу кінця вірвовки прикладена вертикальна сила F , що дорівнює половині ваги циліндра. Знайти горизонтальне прискорення циліндра та мінімальне значення коефіцієнта тертя між циліндром та брусками, при якому буде здійснюватись кочення без проковзування. Вісь циліндра перпендикулярна до брусків. Центр його маси та сила F лежать у вертикальній площині, що проходить посередині між брусками.



Однорідна тверда напівсфера масою M і радіусом R лежить на горизонтальній поверхні. Визначити період малих коливань напівсфери біля положення рівноваги у випадках: а) в місці контакту поверхні повністю відсутнє тертя; б) якщо поверхня а) гладка; б) в місці контакту повністю відсутнє проковзування.

Оцінки: “відмінно” – не менше 30 балів, “добре” – 20 балів, “задовільно” – 14 балів. Відсутність числової відповіді – (-5) балів.

Прізвище	Задачі				
Група	1	2	3	4	5
Оцінка					

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
“КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ”
ФІЗИКО-ТЕХНІЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ

МЕХАНІКА
Січень 2008
Білет 1

Напишіть рівняння руху довільної точки на гусениці англійського танку часів 1-ої Світової війни, якщо він рухається з постійним прискоренням a . Накресліть траєкторію точки в координатах $ХОУ$. Гусениці танку зображені на рисунку, на якому також приведені необхідні розміри. При зміні напрямку руху точки на гусениці округленнями знехтувати.

Сторож на заводі шампанських вин. Пояснив пропажу ящиків шампанського перед Новим Роком тим, що їх вкрали прибульці з зірки τ -Кита. Як доказ він продемонстрував факс, у якому тау-китяни дякували за гарне шампанське, яке вони випили за годину після відльоту з Землі біля рідної планети. Чи може таке бути насправді, якщо земляни та тау-китяни користуються однаковими мірами часу? Розрахуйте швидкість інопланетного корабля. Дайте відповідь на питання і проведіть аналогічні розрахунки, якщо б сторож послався на марсіан. Відстань між Сонцем та зіркою τ -Кита 11.4 світлових років, а максимальна відстань між Землею та Марсом 2.5 астрономічні одиниці ($1 \text{ a.o.} = 1.5 \cdot 10^{11} \text{ м.}$)

Тонкий стержень довжини L і масою M , який знаходиться на гладкій горизонтальній поверхні, вільно обертається без тертя з кутової швидкістю ω_0 навколо нерухомої вертикальної осі, що проходить скрізь один з його кінців. Стержень зіштовхується пружно з кулею маси m і після удару зупиняється. Точка удару знаходиться на відстані x_0 від осі обертання стержня. Знайти співвідношення між масами M , m і відстанню x_0 , а також швидкість кулі після удару та максимально можливу швидкість, яку може отримати куля.

Уявимо, що Земля – це плоский диск радіуса R_3 , який обертається із постійною кутової швидкістю ω_3 навколо власної осі. На відстані $R_3/3$ від полюса з висоти h вздовж радіуса плоскої Землі здійснили постріл. Куля має початкову швидкість v_0 . Знайти відхилення кулі від початкового напрямку її руху. Вирішити задачу в системі відліку «Земля», а також в нерухомій системі відліку. Відповіді порівняти. Вважати, що прискорення вільного падіння вертикально напрямлено до Землі та дорівнює g_3 .

Уявить собі, що на екваторі крізь земляну кулю прорили колодязь, у який без початкової швидкості кидають продовговату циліндричну бочку масою m . Колодязь має вигляд труби, з діаметром трохи більшим за діаметр бочки. Знайти час повернення такої бочки у початкове положення, якщо коефіцієнт тертя бочки о стінки колодязя – k , Земля – однорідна куля густиною ρ та радіусом R_3 . Як зміниться цей час, якщо колодязь вирити вздовж осі обертання Землі?

Прізвище	Задачі				
Група	1	2	3	4	5
Оцінка					

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
“КІЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ”
ФІЗИКО-ТЕХНІЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ

МЕХАНІКА
Січень 2008
Білет 2

Напишіть рівняння руху довільної точки на гусениці танку, якщо він рухається з постійною швидкістю v_0 . Накресліть траєкторію точки в координатах $ХОУ$. Гусениці танку зображені на рисунку, на якому також приведені розміри.

Космонавти навколомісячної станції вирішили відсвяткувати Новий Рік одночасно, відкривши пляшки із шампанським. У цей час між Землею та Місяцем пролітало два інопланетних космічних корабля. На першому, який прямував від Землі до Місяця зі швидкістю $v_1 = 0.8$ с, помітили, що пляшку біля Місяця відкоркували на 2 сек. раніше, ніж біля Землі. На другому, який летів у протилежному напрямку зі швидкістю $v_2 = 0.6$ с, побачили, що шампанське першими відкрили навколоземні космонавти, випередивши своїх колег на 1 секунду. Визначити с точністю до $\tau = 0.1$ с, хто з космонавтів першим почав святкувати Новий Рік.

Гімнаст надає з висоти $H = 20$ м. на пружну сітку. У скільки разів максимальна сила F_{\max} , що діє на гімнаста з боку сітки, більше його початкової ваги mg . Прогин сітки під дією початкової ваги гімнаста $\Delta = 1$ м?

Для улюбленців розваг почав діяти новий атракціон. Людину поміщають у бочку, жорстко закріплюють, а потім пускають у яр, який має вигляд напівциліндра радіуса R . Вважаючи відсутнім проковзування, знайти час повернення бочки в початкове положення, якщо бочка з людиною – це циліндр радіуса r , власним моментом інерції I та масою m . Знайти час повернення бочки в разі ожеледиці, при повній відсутності тертя поверхню в яру.

Уявимо, що Земля – продовгуватий циліндр радіуса R_3 , який обертається навколо власної осі з постійної кутової швидкістю ω_3 . На екваторі цієї Землі здійснюють постріл на схід, а потім на південь. Знайти час, через який куля впаде на Землю в обох випадках. Постріл здійснюється паралельно поверхні Землі з висоти $h \ll R_3$. Початкова швидкість кулі – v_0 . Вважати, що прискорення вільного падіння направлено до осі обертання землі та дорівнює g_3 .

Прізвище	Задачі			
Група	1	2	3	4
Оцінка				

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
“КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ”
ФІЗИКО-ТЕХНІЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ

МЕХАНІКА
Січень 2009
Білет 1

1. З полюсу Землі стартує ракета з початковою швидкістю v_0 в напрямку дотичної до поверхні Землі, причому v_0 більше першої космічної швидкості, але менше другої. Знайти максимальну відстань r_{\max} , на яку віддалиться ракета від центру Землі.

2. Система являє собою горизонтальний стержень, уздовж якого може рухатись муфточка масою m . Муфточка прикріплена пружиною жорсткості k до одного кінця стержня. Система розкручується до кутової швидкості ω навколо осі, яка проходить скрізь точку кріплення пружини. Пружину розтягують до довжини $2R_0$ де R_0 – довжина не розтягнутої пружини, і відпускають. Знайти залежність від положення муфточки r моменту сил, необхідних для підтримки постійної кутової швидкості.

3. Згасаючі коливання матеріальної точки масою m здійснюються в площині XOY за законом: $x(t) = a_0 e^{-\delta t} (\cos \omega t + \frac{\delta}{\omega} \sin \omega t)$; $y(t) = a_0 e^{-\delta t} (\sin \omega t - \frac{\delta}{\omega} \cos \omega t)$. Знайти: 1) шлях, який пройде точка до повної зупинки; 2) логарифмічний декремент згасання, при якому цей шлях мінімальний; 3) залежність енергії точки від часу.

4. Знайти відстань R між компонентами подвійної зірки, якщо їх спільна маса $M_1 + M_2$ дорівнює подвійній масі Сонця M_0 , а зірки рухаються по коловим орбітам навколо їх центру мас з періодом $T = 2T_0$, де T_0 – час земного року. Відстань від Сонця до Землі R_0 , орбіту Землі вважати коловою.

Оцінки: “відмінно” – не менше 30 балів, “добре” – 20 балів, “задовільно” – 14 балів. Відсутність числової відповіді – (-5) балів.

Прізвище	Задачі			
Група	1	2	3	4
Оцінка				

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
“КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ”
ФІЗИКО-ТЕХНІЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ

МЕХАНІКА
Січень 2009
Білет 2

1. Яку роботу повинен здійснити двигун космічного літального апарату масою m , щоб перевести його з орбіти висотою h_1 над поверхнею Землі до орбіти висотою $h_2 < h_1$ майже вдвічі. Радіус Землі R_3 відомий.

2. Однорідний стержень масою m і довжиною L здійснює малі коливання в вертикальній площині навколо горизонтальної осі, яка проходить скрізь одну з його точок на відстані s від його центру мас. До верхнього кінця стержня прикріплено пружину жорсткості $k = \frac{mg}{2L}$. Знайти відстань s , при якій частота коливань буде найбільшою. Чому вона дорівнює? Тертям знехтувати.

3. Матеріальна точка бере участь одночасно в двох коливаннях вздовж осі OX :
 $x_1 = a\sqrt{3}/2 \cos(2\omega t + \pi/6)$, $x_2 = a/2 \cos(2\omega t - \pi/3)$, а також вздовж осі OY : $y = b \cos \omega t$.
Знайти рівняння її траєкторії в декартових координатах

4. Густина тонкого диска радіуса R розподілена за законом $\rho(r) = \rho_0 \left(1 - \frac{ar}{R}\right)$, де $0 < a < 1$, $\rho_0 - \text{const.}$, r – відстань від центру диска. При якому значенні a момент інерції диска відносно осі, перпендикулярної до площини диска, і яка проходить скрізь його центр, дорівнює: $\frac{mR^2}{3}$; $\frac{mR^2}{2}$?

Оцінки: “відмінно” – не менше 30 балів, “добре” – 20 балів, “задовільно” – 14 балів. Відсутність числової відповіді – (-5) балів.

Прізвище	Задачі			
Група ФФ-91	1	2	3	4
Оцінка				

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
“КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ”
ФІЗИКО-ТЕХНІЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ

ФІЗИКА 1. МЕХАНІКА

Січень 2010

Білет 1

1. Точка масою m рухається у центральному полі, де її швидкість $V = \frac{a}{r}$, $a = \text{const}$. Знайти залежність сили F , що діє на частинку, від відстані r до центру поля. Те ж саме знайти для залежності швидкості у вигляді $V = ar^{-1/2}$. (5)

2. Невеличка муфта масою m надіта на тонкий стрижень довжиною L . Стрижень обертається в горизонтальній площині з постійною кутовою швидкістю навколо вісі, яка проходить через його край. Вісь і муфта сполучені пружиною жорсткості k і довжини a ($a < L$) в ненапруженому стані. Визначити рівноважне положення муфти на стрижні, період її малих коливань і область існування таких коливань. (5)

3. Куля масою m летить зі швидкістю v_0 в нижній кінець стрижня масою m і довжини L , закріпленого вертикально за допомогою горизонтальної вісі і двох пружин жорсткості k . Визначити амплітуду малих кутових коливань стрижня, якщо куля застрягла в ньому. (8)

4. На шорсткуватому столі стоїть паличка, яка починає падати з вертикального положення в полі тяжіння. Коли кут нахилу палички досягає φ ($\varphi = 45^\circ$), її нижній кінець починає ковзати. Знайти коефіцієнт тертя. (12)

Оцінки: “відмінно” – не менше 25 балів, “добре” – 20 балів, “задовільно” – 14 балів. Відсутність числової відповіді – (-5) балів.

Прізвище	Задачі			
Група ФФ-91	1	2	3	4
Оцінка				

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
“КІЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ”
ФІЗИКО-ТЕХНІЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ

ФІЗИКА 1. МЕХАНІКА

Січень 2010

Білет 2

1. Частинка масою m рухається по коловій орбіті радіусом r_0 у полі центральних сил, потенціал якого дорівнює $U = -km/r^n$. Показати, що якщо $n < 2$, то рух по коловій орбіті є стійким положенням рівноваги. (5)

2. Довга штанга з круглим перетином обертається в горизонтальній площині в полі тяжіння з кутової швидкістю ω . На штанзі на відстані r_0 від вісі обертання закріплена невеличка муфта. Коефіцієнт тертя муфти по штанзі дорівнює k . В деякий момент часу муфту звільнили і надали їй швидкість відносно штанги v_0 , спрямовану від вісі обертання. Після цього муфта починає рухатись з уповільненням, і на відстані r_1 від вісі штанги її швидкість досягає мінімуму, а потім починає знову зростати. При яких значеннях k такий рух є можливим? Яка мінімальна швидкість муфти? (5)

3. Дві кульки однакового радіусу, маси яких є m_1, m_2 , з'єднані легкою пружиною довжиною L_0 і жорсткістю k . Система знаходиться на абсолютно гладкому столі. В деякий момент часу пружину розтягнули на відстань $a \ll L_0$ і відпустили. Знайти період малих коливань та зніму відстані між кульками від часу. (8)

4. Однорідний стрижень довжиною L і масою M підвішений на шарнірі і дотикається своїм кінцем до кулі масою m і радіусом r . Куля знаходиться у стані спокою на площині. Лінія сполучення точки дотику і центру кулі горизонтальна і разом зі стрижнем знаходиться в одній вертикальній площині. Стрижень відхиляють в цій площині на кут ϕ і відпускають. Визначити, як будуть рухатись стрижень і куля після удару, якщо удар абсолютно пружний. Через який час після удару рух кулі буде чистим коченням? Чому дорівнює швидкість цього кочення? Коефіцієнт тертя між кулею і площиною є k . Тертям кочення знехтувати. (12)

Оцінки: “відмінно” – не менше 25 балів, “добре” – 20 балів, “задовільно” – 14 балів. Відсутність числової відповіді – (-5) балів.

Прізвище	Задачі			
Група ФЕ-91	1	2	3	4
Оцінка				

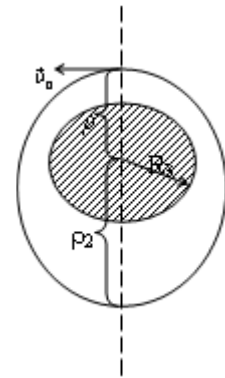
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
“КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ”
ФІЗИКО-ТЕХНІЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ

ФІЗИКА 1. МЕХАНІКА

Січень 2010

Білет 3

1. Супутник піднято ракетою-носієм вертикально до максимальної висоти $R = 1.5R_3$ (де R_3 – радіус Землі), і R вимірюється від центру Землі. У верхній точці підйому ракета надала супутнику горизонтальну швидкість, яка дорівнює першій космічній швидкості v_1 , і яка вивела його на еліптичну орбіту. Яке максимальне і мінімальне віддалення супутника від центру Землі? (5)



2. Капітан невеличкого судну, потрапивши у штиль вирішив підняти якір масою m на верх дуже високої щогли. Маса судна без маси якоря дорівнює M , радіус Землі R . Судно починає рухатись. Чому? В якому напрямку, з якою швидкістю? (5)

3. Однорідний тонкий стрижень масою M і довжиною L висить на шарнірі без тертя. У нижній частині він сполучається зі стінкою за допомогою пружини жорсткістю k . Який період малих коливань стрижня? (7)

4. Гладкий однорідний стрижень АВ масою M і довжиною L вільно обертається із кутовою швидкістю ω_0 в горизонтальній площині навколо нерухомої вертикальної вісі, яка проходить скрізь його кінець А. Із точки А починає ковзати вздовж стрижня невеличка муфта масою m . Знайти швидкість v' муфти в той момент, коли вона досягає кінця стрижня В. (8)

Оцінки: “відмінно” – не менше 20 балів, “добре” – 15 балів, “задовільно” – 13 балів. Відсутність числової відповіді – (-5) балів.

Прізвище	Задачі			
Група ФЕ-91	1	2	3	4
Оцінка				

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
“КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ”
ФІЗИКО-ТЕХНІЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ

ФІЗИКА 1. МЕХАНІКА

Січень 2010

Білет 4

1. Супутник Землі, який обертається за кутової орбітою радіуса $R = R_3$ (R_3 – радіус Землі), перейшов на еліптичну орбіту з великої віссю $2a = 4R_3$. Знайти, в скільки разів зросте час обертання супутника? Тертям атмосфери знехтувати.(5)

2. Циліндричну горизонтальну штангу довжини L обертають навколо вертикальної вісі, яка проходить крізь її кінець, з постійною кутовою швидкістю ω в полі тяжіння. На штангу надіта невеличка муфта масою m , яка може ковзати уздовж штанги. Знайти роботу, необхідну для пересування муфти вздовж всієї штанги з постійною швидкістю v відносно неї до вісі обертання, якщо коефіцієнт тертя між штангою та муфтою дорівнює k .(5)

3. Знайти частоту малих коливань стрижня масою m і довжини L , прикріпленого верхнім кінцем до шарніру, а нижнім до середини не розтягнутої горизонтальної пружини жорсткістю k , кінці якої закріплені.(7)

4. На суцільний циліндр масою m_1 і радіусу R намотана невагома нитка. Циліндр рухається без ковзання по горизонтальній площині. Нитка перекинута через невагомий блок, і до її кінця прив'язаний важок масою m_2 . Визначити прискорення центру мас циліндру, прискорення важка та натяг нитки.(8)

Оцінки: “відмінно” – не менше 20 балів, “добре” – 15 балів, “задовільно” – 13 балів. Відсутність числової відповіді – (-5) балів.

Прізвище	Задачі			
Група ФФ-01	1	2	3	4
Оцінка				

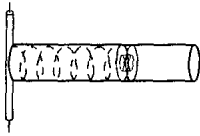
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
 “КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ”
 ФІЗИКО-ТЕХНІЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ

ФІЗИКА 1 МЕХАНІКА

Січень 2011

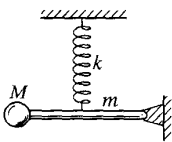
Білет 1

Тонка труба жорстко прикріплена до вертикального стрижня під прямим кутом. У середині труби знаходиться циліндрична шайба, яка сполучена із кінцем труби біля стрижня пружиною. Стрижень обертається разом із трубою навколо власної подовжньої осі з постійною кутовою швидкістю ω . Під час обертання труби шайба здійснює малі коливання. Діаметр шайби можна вважати рівним діаметру труби. Знайти, при якій кутовій швидкості обертання ω сила, з якою шайба діє на стінку труби, буде максимальною. Тертям між пружиною, шайбою та стінками труби знехтувати. Кругова частота малих коливань шайби при $\omega = 0$ дорівнює Ω . Вважати амплітуду незалежною від Ω . (6)



Штучний супутник обертається навколо Землі по еліптичній орбіті зі швидкістю $v_1 = 8$ км/с в перигелії і $v_2 = 7$ км/с в афелії. Знайти довжину великої осі $2a$ еліптичної орбіти супутника. Радіус Землі $R_3 = 6400$ км (7)

Твердий стрижень масою m , до одного із кінців якого прикріплена точкова маса M , може обертатись навколо горизонтальної осі, яка проходить через інший кінець стрижня. Стрижень утримується спіральною пружиною жорсткості k , прикріпленої до його середини. Знайти подовження пружини x_0 порівняно із довжиною недеформованої пружини в положенні рівноваги, якщо в цьому положенні стрижень є горизонтальним. Обчислити період малих коливань системи навколо положення рівноваги. (5)



Однорідний стрижень круглого перетину радіусом R , масою m_2 і довжиною l лежить на гладкій горизонтальній поверхні. Кулька радіусом R і масою m_1 , рухаючись зі швидкістю v перпендикулярно до стрижня, пружно ударяє його кінець на відстані R від його торця. Вважаючи, що $R \ll l$, знайти: кутову швидкість стрижня та швидкість його центру мас і швидкість кульки після удару, а також залежність частини переданої енергії від співвідношення мас $a = m_1/m_2$. (12)

Оцінки: “відмінно” – не менше 25 балів, “добре” – 18 балів, “задовільно” – 12 балів. Відсутність числової відповіді – (-5) балів.

Прізвище	Задачі			
Група ФФ-01	1	2	3	4
Оцінка				

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
“КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ”
ФІЗИКО-ТЕХНІЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ

ФІЗИКА 1 МЕХАНІКА

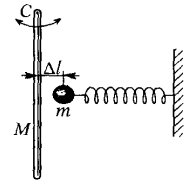
Січень 2011

Білет 2

Довга гладка штанга обертається в горизонтальній площині з кутовою швидкістю ω навколо осі, яка проходить крізь один із її кінців. На штанзі знаходиться муфта масою m , яка прикріплена до осі обертання за допомогою пружини, пружна сила якої є $F = k[x - x_0/x_0]^2$, де k – стала, а x_0 – довжина пружини у вільному стані. Знайти період малих коливань біля положення рівноваги. (6)

Космічний корабель, що знаходиться на коловій орбіті, добавкою тангенціальної швидкості переводять на гіперболічну орбіту зі швидкістю на нескінченності V_∞ . При якій початкової (колової) швидкості ця добавка є мінімальною. Знайти цю добавку. (7)

Однорідний тонкий стрижень масою M лежить на горизонтальній поверхні і може обертатись навколо вертикальної осі C , яка проходить через його кінець. Центр стрижня торкається маленької кульки масою m , яка насаджена на нерозтяжну невагому пружину. Інший кінець пружини закріплено. Пружину із кулькою стискають на малу відстань Δl , після чого кулька не пружно ударяє в центр стрижня і злипається з ним. Знайти амплітуду коливань кульки, яка злипла з стрижнем, вважаючи її коливання малими. Тертям кульки і стрижня по поверхні та розмірами кульки знехтувати. (5)



Однорідний стрижень масою m і довжиною $2l$, який поставлений вертикально на гладку горизонтальну поверхню, починає падати з нульовою початковою швидкістю. Знайти швидкість центру мас і тиск стрижня на поверхню в той момент, коли кут між стрижнем і вертикаллю складає $\alpha = \pi/3$. (12)

Оцінки: “відмінно” – не менше 25 балів, “добре” – 18 балів, “задовільно” – 12 балів. Відсутність числової відповіді – (-5) балів.

Прізвище	Задачі			
Група ФЕ-01	1	2	3	4
Оцінка				

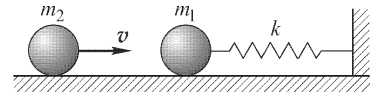
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
“КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ”
ФІЗИКО-ТЕХНІЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ

ФІЗИКА 1 МЕХАНІКА

Січень 2011

Білет 3

1.(5) На гладкій поверхні лежить вантаж масою m_1 , прикріплений до пружини жорсткості k , інший кінець якої закріплений на вертикальній стінці. На вантаж налітає зі швидкістю V_0 інший вантаж масою m_2 .



Знайти максимальне стиснення пружини після не пружного зіткнення вантажів.

2. (7) Вздовж горизонтально розміщеного стержня без тертя може рухатися муфточка маси m . Стержень може вільно обертатись навколо вертикальної вісі, що проходить скрізь одного з його кінців. До цього кінця прикріплена пружина жорсткості k , що тримає муфточку. Після того як систему розкрутили до кутової швидкості ω , муфту відпустили і вона почала рухатись. Знайти, який момент сил залежно від відстані муфти R до осі обертання треба прикласти для підтримання сталої кутової швидкості. Довжина не розтягнутої пружини L .

3. (6) Супутник, що обертається круговою орбітою радіуса $2R$, за рахунок роботи двигунів отримує додатковий радіальний імпульс швидкості, рівний початковому імпульсу при його русі по коловій орбіті. На яку мінімальну відстань він наблизиться до центру Землі після цього і яку при цьому буде мати швидкість? Опором повітря нехтувати.

4. (7) Дві частинки рухаються одна за однією на відстані L в лабораторній системі відліку. В перший момент часу перша частинка розпадається, а через деякий проміжок часу і друга. Відомо, що у власній системі відліку між розпадами пройшов час Δt_0 . Знайти, з якою швидкістю рухались частинки відносно лабораторній системи відліку, якщо в цій системі виявилось, що вони розпались одночасно.

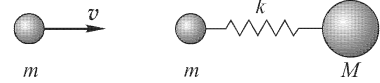
Оцінки: “відмінно” – не менше 30 балів, “добре” – 20 балів, “задовільно” – 14 балів. Відсутність числової відповіді – (-5) балів.

Прізвище	Задачі			
Група ФЕ-01	1	2	3	4
Оцінка				

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
“КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ”
ФІЗИКО-ТЕХНІЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ

ФІЗИКА 1 МЕХАНІКА
Січень 2011
Білет 4

1. (5) Кулька масою m з'єднана пружино жорсткості k з кулею масою M . На кульку m налітає кулька теж масою m зі швидкістю V_0 . Знайти енергію коливань системи кульок $m - M$ після пружного зіткнення кульок масою m .



2. (5) На екваторі, на рейках, які розміщені зі сходу на захід, стоїть гармата маси M . Гармата стріляє вертикально вгору снарядом маси m . Яку швидкість буде мати гармата після пострілу, якщо довжина ствола L , а снаряд у стволі рухається зі сталим прискоренням a .

3. (7) Супутник запускають на колову орбіту у два етапи: спочатку на поверхні Землі йому надають горизонтальну швидкість V_0 та виводять на еліптичну орбіту таким чином, що точка запуску є перигеєм, а апогей є точкою колової орбіти. В апогей спрацьовує двигун та надає швидкості ΔV достатньої величини для руху по коловій орбіти. Знайти швидкість при запуску V_0 та ΔV , які необхідні для запуску на колову орбіту радіусом $R = 2R_3$.

4. (8) Певна частинка розпалась на дві з відомими масами спокою m_1 і m_2 . Відомі імпульси p_1 , p_2 частинок після розпаду та кут між напрямками розльоту θ . Знайти масу частинки, що розпалась. Розглядати релятивістський випадок.

Оцінки: “відмінно” – не менше 30 балів, “добре” – 20 балів, “задовільно” – 14 балів. Відсутність числової відповіді – (-5) балів.

Прізвище	Задачі			
Група ФФ-11	1	2	3	4
Оцінка				

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
“КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ”
ФІЗИКО-ТЕХНІЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ

МЕХАНІКА
Січень 2012
Білет 1

Частинка масою m рухається у полі центральної сили із потенціалом $V = K r^3$ ($K > 0$). Знайти кінетичну енергію і момент імпульсу при русі її по коловій орбіті радіуса R . Чому дорівнює період такого колового руху? (5)

Тонкий стержень довжиною L обертається навколо одного із власних кінців, описуючі кутовий конус.(конічний фізичний маятник). Знайти період руху T в залежності від кута φ між віссю і вертикальним напрямком. (6)

Однорідний стержень масою M і довжиною L може рухатись у вертикальній площині навколо горизонтальної осі, яка проходить скрізь точку на відстані a вище його центру мас. До верхнього кінця стержня прикріплена нерозтяжна пружина жорсткістю k , другий кінець якої закріплено. У нижній незакріпленій кінець стержня пружно ударяє перпендикулярно стержню невелика кулька масою m , яка відбивається від нього зі швидкістю v' . Знайти кутову амплітуду α відхилення і період малих коливань стержня. (9)

Шайбі, що лежить на льоду, дотичним ударом в точку O на бічній поверхні надають імпульс P . Скільки обертів зробить шайба, і яку відстань вона пройде до зупинки? Сила тертя $F = -\alpha S V$ пропорційна швидкості і площі контакту S шайби із льодом. (10)

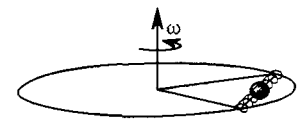
Оцінки: “відмінно” – не менше 30 балів, “добре” – 20 балів, “задовільно” – 14 балів. Відсутність числової відповіді – (-5) балів.

Прізвище	Задачі			
Група ФФ-11	1	2	3	4
Оцінка				

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
“КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ”
ФІЗИКО-ТЕХНІЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ

МЕХАНІКА
Січень 2012
Білет 2

Рівнобедрений трикутник, створений трьома тонкими стержнями, обертається з постійною кутовою швидкістю ω в горизонтальній площині, яка співпадає з площиною трикутника, навколо вертикальної осі, що проходить скрізь вершину трикутника. На стержень в основі трикутника насаджена маленька кулька масою m , яка зв'язана із сусідніми вершинами трикутника двома однаковими пружинами жорсткості k , знайти частоту Ω малих коливань кульки вздовж стержня. Тертям знехтувати. (5)



На супутник, який рухається по коловій орбіті, діє слабка гальмова сила $F = -\alpha V^2$. Знайти залежність швидкості супутника від часу. За який час радіус орбіти зменшиться на 2%, якщо за місяць швидкість супутника змінюється на 1%. (6)

Однорідний стержень масою M і довжиною $2L$ може рухатись у вертикальній площині навколо горизонтальної осі, яка проходить скрізь точку на відстані a нижче його центру мас. Нижній кінець стержня прикріплено до середини нерозтяжної пружини жорсткістю k , кінці якої закріплено. У верхній незакріпленій кінець стержня пружно ударяє перпендикулярно стержню невелика кулька масою m , яка летить зі швидкістю v . Знайти кутову амплітуду α відхилення і період малих коливань стержня. (9)

Однорідна тонка квадратна пластинка зі стороною a , маса якої m , може без тертя обертатись у вертикальній площині довкола одній із своїх вершин. З деякого моменту часу на протилежну вершину пластинки починає діяти постійна сила F уздовж осі y , де $F > mg/2$. Знайти кутову швидкість пластинки як функцію її кута обороту з початкового положення. (10)

Оцінки: “відмінно” – не менше 30 балів, “добре” – 20 балів, “задовільно” – 14 балів. Відсутність числової відповіді – (-5) балів.

Прізвище	Задачі			
Група ФФ-21	1	2	3	4
Оцінка				

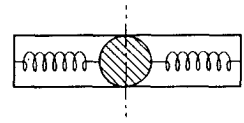
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
“КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ”
ФІЗИКО-ТЕХНІЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ

МЕХАНІКА

Січень 2013

Білет 1

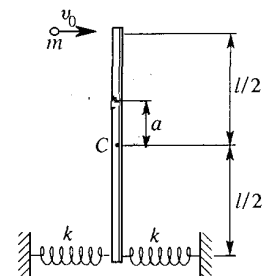
1. В абсолютно гладкій трубці на двох однакових пружинах жорсткості k закріплена куля масою m . Куля коливається з амплітудою l_0 . Трубку починають повільно розкручувати відносно вісі, перпендикулярної до трубки яка проходить через положення рівноваги кулі. Знайти залежність періоду T і амплітуди коливань l кулі від кутової швидкості обертання трубки ω (5).



2. Частинка рухається у центральному полі із потенціальною енергією $U = -\alpha/r^4$ ($\alpha > 0$). Вважати, що на відстані r_0 від центру поля швидкість частинки є v_0 і направлена перпендикулярно до r_0 . Знайти межі руху частинки. Знайти силу, що діє на частинку. (5)

3. Більярдна куля котиться без ковзання по горизонтальній площині зі швидкістю v і пружно зіштовхується з такою ж кулею, яка знаходиться у стані спокою. Лінія центрів при зіткненні направлена вздовж напрямку руху. Вважати, що при зіткненні куль відсутня передача обертального руху. Знайти швидкість куль після того, як їх рух перейде і чисте кочення, час ковзання і долю початкової кінетичної енергії, яка перейшла у теплоту, нехтуючи тертям під час кочення. Коефіцієнт тертя при ковзанні вважати рівним k . (10)

4. Однорідний стержень масою m і довжиною l може рухатись у вертикальній площині навколо горизонтальної осі, яка проходить скрізь точку на відстані a і вища його центру мас. До нижнього кінця стержня прикріплено дві абсолютно однакові нерозтяжні пружини жорсткістю k кожна, другий кінець яких закріплено. Конструкція знаходиться у полі тяжіння. У верхній кінець стержня пружно ударяє кулька масою m , яка летить зі швидкістю v . Знайти кутову амплітуду α відхилення і період малих коливань стержня. (10).



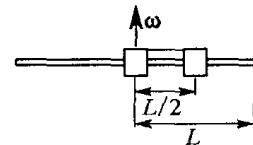
Оцінки: “відмінно” – не менше 30 балів, “добре” – 20 балів, “задовільно” – 14 балів. Відсутність числової відповіді – (-5) балів.

Прізвище	Задачі			
Група ФФ-21	1	2	3	4
Оцінка				

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
“КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ”
ФІЗИКО-ТЕХНІЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ

МЕХАНІКА
Січень 2013
Білет 2

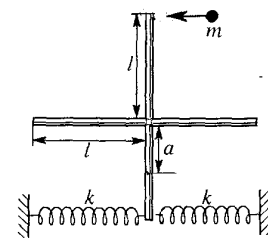
1. Дві однакові невеличкі муфти мають вільно ковзати по гладкої штанзі, яка обертається із постійною швидкістю ω в горизонтальній площині. Муфти зв’язані легкою нерозтяжною ниткою. Кінець штанги знаходиться на відстані L від осі обертання. В початковий момент одна муфта знаходилась на осі обертання, а друга на відстані $L/2$ від неї. Чому дорівнює швидкість відносно землі тої муфти, яка перша досягне кінця штанзи? (5)



2. Частинка рухається в центральному полі з потенціальної енергією $U = -\alpha/r^2$ ($\alpha > 0$). Вважати, що на відстані r_0 від центру поля швидкість частинки є v_0 і направлена перпендикулярно до r_0 . Знайти межі руху частинки. Знайти силу, що діє на частинку. (5)

3. З жорсткуватої похилої площини з кутом α до горизонту скочуються без ковзання два циліндри, які мають однакову масу m і однаковий радіус. Один з них суцільний, другий – порожній, тонкостінний. Коефіцієнт тертя між ними дорівнює k . Як слід розташувати порожній циліндр – попереду суцільного, або за ним, щоб циліндри скочувались разом? Знайти прискорення циліндрів a і силу взаємодії N між ними (10).

4. Два тонких однорідних стержні довжиною $2l$ і масою m , кожний жорстко сполучні під кутом 90° в формі хреста. Конструкція знаходиться в полі тяжіння і може обертатись навколо горизонтальної осі, яка проходить крізь точку на відстані a одного із стержнів і нижча центру мас хреста. До нижнього кінця цього ж стержня прикріплені дві абсолютно однакові нерозтяжні пружини жорсткістю k кожна, другий кінець яких закріплено. У верхній кінець стержня пружно ударяє кулька масою m , яка відбивається від нього зі швидкістю v . Знайти кутову амплітуду α відхилення і період малих коливань стержня. (10).



Оцінки: “відмінно” – не менше 30 балів, “добре” – 20 балів, “задовільно” – 14 балів. Відсутність числової відповіді – (-5) балів.

Прізвище	Задачі			
Група ФЕ-21	1	2	3	4
Оцінка				

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
“КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ”
ФІЗИКО-ТЕХНІЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ

ЗАГАЛЬНА ФІЗИКА 1. МЕХАНІКА

Січень 2013

Варіант 1

1. На внутрішній поверхні воронки, з кутом 2α при вершині, на висоті h від вершини знаходиться маленьке тіло. Воронка починає обертатись з кутовою швидкістю ω . Знайти мінімальне та максимальне значення коефіцієнта тертя між тілом та поверхнею воронки за якого тіло буде нерухомо відносно воронки.

2. Гімнаст запускає обруч радіуса R зі швидкістю v_0 одночасно закрутивши його з кутовою швидкістю ω_0 . Яким має бути мінімальне значення кутової швидкості щоби після проковзування обруч міг повернутись назад. Яка буде кінцева швидкість обруча якщо його запустити зі швидкістю більшою ніж ω_{\min} ?

3. На горизонтальному стержні знаходиться кільце масою m , що може рухатись вздовж нього без тертя. Воно прикріплено до пружини жорсткості k інший кінець якої прикріплений до кінця стержня O . Стержень розкручують навколо t . O до кутової швидкості ω після чого кільце відпускають і воно починає виконувати гармонічні коливання. Знайти частоту цих коливань.

4. У космічних променях знайдено протон що мав колосальну енергію 10^{20} еВ. Припустивши що він з'явився на границі нашої Галактики вже зі значною енергією 100 ГеВ (вважати відстань до Землі 10^5 світлових років) оцінити скільки часу він летів до Землі по «власним часам».

Прізвище	Задачі			
Група ФЕ-21	1	2	3	4
Оцінка				

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
“КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ”
ФІЗИКО-ТЕХНІЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ

ЗАГАЛЬНА ФІЗИКА 1. МЕХАНІКА

Січень 2013

Варіант 2

1. Людина знаходиться на поверхні диску радіусу R , що обертається з кутовою швидкістю ω . Вона намагається йти зі сталою швидкістю v вздовж краю платформи, за якого мінімального коефіцієнту тертя це буде можливо. Як зміниться відповідь якщо людина піде до центру диску?

2. Дві кулі однакового радіуса R і масами m та M пружного зіштовхуються. При цьому куля масою m до удару котилась без проковзування зі швидкістю v , а друга куля перебувала в спокої. Знайти за якого відношення мас m/M після удару та проковзування куля масою m в кінцевому підсумку зупиниться.

3. Кулька, що підвішена на пружин, виконує гармонічні коливання. Знайти кругову частоту ω та амплітуду цих коливань, якщо відомо що в той момент коли зміщення кульки дорівнювало x_1 , її швидкість була v_1 , а коли зміщення стало x_2 , швидкість стала v_2 .

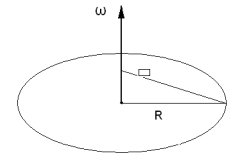
4. На лінійному прискорювачі електрони прискорюють від енергії спокою 0.5 MeV до енергії 40 GeV у прямій трубі довжиною $l=3 \text{ км}$. Вважаючи, що прискорення електрону вздовж труби відбувається рівномірно (тобто пропорційно до довжини росте його повна енергія) визначити який шлях проходить електрон у власній системі відліку.

Прізвище	Задачі			
Група ФФ-31	1	2	3	4
Оцінка				

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
“КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ”
ФІЗИКО-ТЕХНІЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ

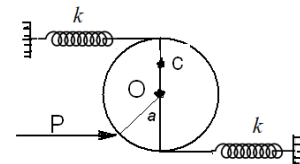
ФІЗИКА 1. МЕХАНІКА
Січень 2014
Білет 1

1. На диску радіуса R закріплена похила площина із гладкою поверхнею. Довжина основи площини – це радіус диска. Кут нахилу площини дорівнює α . Диск обертається зі сталою кутовою швидкістю ω . Вздовж похилої площини від осі обертання рухається тіло масою m без початкової швидкості. Знайти в системі відліку, пов'язаною з похилою площиною, силу Коріоліса, яка діє на тіло в момент досягнення ним кінця площини, а також величину бічного зміщення, вважаючи кут зміщення малим. (8)

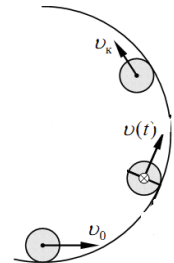


2. Частинка рухається у центральному полі із потенціальною енергією $U = \alpha/r$ ($\alpha > 0$). Вважати, що на відстані r_0 від центру поля швидкість частинки є v_0 і направлена перпендикулярно до r_0 . Знайти межі руху частинки. Знайти силу, що діє на частинку. (7)

3. Суцільний однорідний диск масою m і радіуса r в вертикальній площині закріплений в точці C вище центру мас O на відстані l від нього. Нижня і верхня точки диску сполучені з легкими пружинами жорсткістю k кожна. В положенні рівноваги диску пружини не розтягнені. Конструкція знаходиться у полі тяжіння. В деякий момент часу диску надали імпульс P , направлений перпендикулярно до вертикального діаметру. Точка його прикладання знаходиться нижче центру мас O , а напрямком складає кут α до центру диска. Знайти кутову амплітуду відхилення і період малих коливань диску. (10)



4. Циліндрична шайба радіуса r торкається борта гладкої горизонтальної площини, яка має форму круга радіуса R . Шайба має швидкість v_0 , яка направлена вздовж борту. Коефіцієнт тертя між шайбою і бортом дорівнює μ . Знайти модуль швидкості шайби після закінчення ковзання між бортом і шайбою, інтервал часу ковзання і кутову швидкість після закінчення ковзання. (10)



Оцінки: “відмінно” – не менше 30 балів, “добре” – 25 балів, “задовільно” – 20 балів.
Відсутність числової відповіді – (-5) балів.

Прізвище	Задачі			
Група ФФ-31	1	2	3	4
Оцінка				

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
“КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ”
ФІЗИКО-ТЕХНІЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ

ФІЗИКА 1. МЕХАНІКА

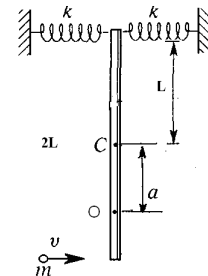
Січень 2014

Білет 2

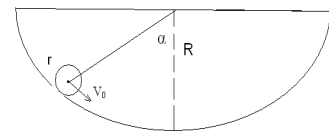
1. По внутрішній поверхні конусної воронки з кутом 2α при вершині рухається мале тіло масою m . Коефіцієнт тертя між тілом і воронкою дорівнює k . Воронка рівномірно обертається навколо вертикальної осі, яка проходить крізь її вершину. Знайти в системі відліку, пов'язаною з воронкою, при якій кутовій швидкості ω тіло покине воронку? Знайти силу Коріоліса, яка діє на тіло в цей момент. Довжина воронки дорівнює L . (8)

2. Частинка рухається в центральному полі з потенціальної енергією $U = \alpha/r^4$, ($\alpha > 0$). Вважати, що на відстані r_0 від центру поля швидкість частинки є v_0 і направлена перпендикулярно до r_0 . Знайти межі руху частинки. Знайти силу, що діє на частинку. (7)

3. Однорідний стержень масою M і довжиною $2L$ може рухатись у вертикальній площині навколо горизонтальної осі, яка проходить крізь точку O на відстані a і нижче його центру мас C . До верхнього кінця стержня прикріплено дві абсолютно однакові нерозтяжні пружини жорсткістю k кожна, другий кінець яких закріплено. В положенні рівноваги стержня пружини не розтягнені. Конструкція знаходиться у полі тяжіння. У нижній кінець стержня пружно ударяє кулька масою m , яка летить зі швидкістю v . Знайти кутову амплітуду α відхилення і період малих коливань стержня (10)



4. Циліндр радіуса r знаходиться всередині увігнутої закріпленої циліндричної поверхні радіусу $R > 10r$. Циліндр відводять на кут α відносно його положення рівноваги, надають початкову швидкість v_0 , і він починає рухатись без ковзання. Після проходження положення рівноваги циліндр рухається вгору по внутрішній поверхні циліндру R . При якій величині коефіцієнту тертя k циліндр почне ковзати після підняття на висоту, яка відповідає куту β від положення рівноваги. Тертям кочення знехтувати. (10)



Оцінки: “відмінно” – не менше 30 балів, “добре” – 25 балів, “задовільно” – 20 балів. Відсутність числової відповіді – (-5) балів.

Прізвище	Задачі			
Група ФФ-32	1	2	3	4
Оцінка				

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
“КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ”
ФІЗИКО-ТЕХНІЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ

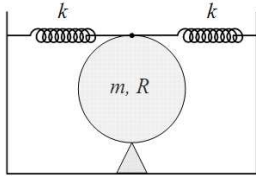
ФІЗИКА 1. МЕХАНІКА

Січень 2014

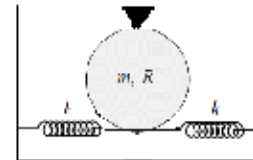
Білет 3

1 Яку мінімальну роботу треба здійснити двигуну космічного апарату масою m , щоб перевести його з орбіти висотою h_1 над поверхнею Землі до орбіти висотою h_2 . Радіус Землі R . (5)

2 З вершини гладкої сфери радіуса R починає ковзати невеличке тіло масою m . Сфера обертається зі сталою кутовою швидкістю ω навколо вертикальної осі, яка проходить крізь її центр. Знайти в системі відліку, пов'язану зі сферою, відцентрову силу інерції в момент відриву тіла від сфери. (8)



3 Суцільний однорідний циліндр масою m і радіуса R в першому випадку шарнірно закріплений у нижній точці, а другий раз у – верхній, і здійснює малі коливання під дією двох горизонтальних однакових легких пружин жорсткістю k кожна. Пружини сполучені в першому випадку – у верхній точці циліндру, а другий раз – у нижній, і не розтягнені в положенні рівноваги циліндра. Знайти відношення частот коливань. (7)



4 Суцільний однорідний циліндр масою m і радіуса r скочується без ковзання по увігнутій закріпленій циліндричній поверхні радіуса R . В початковому положенні його швидкість дорівнює нулю, центр мас знаходиться на висоті H вище крайнього нижнього положення (положення рівноваги). Знайти кутове прискорення циліндра і силу реакції опори в положенні, коли його центр мас опустився на висоту $h < H$. (10)

Оцінки: “відмінно” – не менше 30 балів, “добре” – 20 балів, “задовільно” – 15 балів. Відсутність числової відповіді – (-5) балів.

Прізвище	Задачі			
Група ФФ-32	1	2	3	4
Оцінка				

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
“КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ”
ФІЗИКО-ТЕХНІЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ

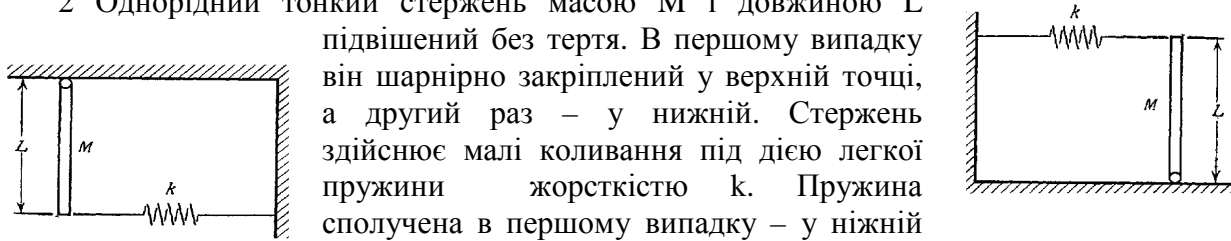
ФІЗИКА 1. МЕХАНІКА

Січень 2014

Білет 4

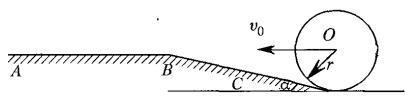
1 Яку швидкість на поверхні Землі треба надати штучному супутникові, щоб вивести його на еліптичну орбіту з відстанню від центру: в перигеї $r_1 = 31/30 R$, в апогеї $r_2 = 33/30 R$, де R – радіус Землі. (5)

2 Однорідний тонкий стержень масою M і довжиною L підвішений без тертя. В першому випадку він шарнірно закріплений у верхній точці, а другий раз – у нижній. Стержень здійснює малі коливання під дією легкої пружини жорсткістю k . Пружина сполучена в першому випадку – у нижній точці стержня, а другий раз – у верхній, і не розтягнена в положенні рівноваги стержня. Знайти відношення частот коливань. (7).



3 З вершини гладкої сфери радіуса R починає ковзати невеличке тіло масою m . Сфера обертається зі сталою кутовою швидкістю ω навколо вертикальної осі, яка проходить крізь її центр. Знайти в системі відліку, пов'язаною зі сферою, силу Коріоліса в момент відриву тіла від сфери. (8)

4 Біля основи похилої площини з кутом α до горизонту, висота якої дорівнює h , знаходиться суцільний однорідний циліндр радіуса r . Циліндру надають початкову швидкість v_0 , і він без ковзання починає заковзуватися на похилу площину. В точці В на висоті h похила площина переходить у горизонтальну площину. Яким має бути коефіцієнт тертя ковзання, щоб циліндр плавно, без стрибка, перейшов на горизонтальну площину? Тертям кочення знехтувати. (10)



Оцінки: “відмінно” – не менше 30 балів, “добре” – 20 балів, “задовільно” – 15 балів.
Відсутність числової відповіді – (-5) балів.

<i>Прізвище</i>	<i>Задачі</i>			
<i>Група ФЕ-31</i>	1	2	3	4
<i>Оцінка</i>				

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
“КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ”
ФІЗИКО-ТЕХНІЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ

МЕХАНІКА
Січень 2014
Білет 1

1. Мотоцикліст, повертаючи по колу радіуса R відхилився від вертикалі на кут α . Знайти швидкість, з якою рухався мотоцикліст, якщо його центр мас знаходився на висоті h від поверхні.

2. Однорідний циліндр радіуса R розкрутили до кутової швидкості ω та поставили у основи похилої площини з кутом нахилу α . Визначити час, за який циліндр досягне максимальної висоти, вкочуючись по похилій лощини.

3. На горизонтальному стержні знаходиться кільце масою m , що може рухатись вздовж нього без тертя. Воно прикріплено до пружини жорсткості k , інший кінець якої прикріплений до кінця стержня O . Стержень розкручують навколо точки O до кутової швидкості ω , після чого кільце відпускають і воно починає виконувати гармонічні коливання. Знайти частоту цих коливань.

4. Знайти, який радіус має бути у планети, щоб у тіла прискорення вільного падіння на екваторі дорівнювало б нулю. Вважати, що всі інші параметри планети мають таке ж значення, як у Землі. (маса планети, кутова швидкість обертання).

Оцінки: “відмінно” – не менше 30 балів, “добре” – 20 балів, “задовільно” – 14 балів. Відсутність числової відповіді – (-5) балів.

<i>Прізвище</i>	<i>Задачі</i>			
<i>Група ФЕ-31</i>	1	2	3	4
<i>Оцінка</i>				

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
“КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ”
ФІЗИКО-ТЕХНІЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ

МЕХАНІКА
Січень 2014
Білет 2

1. Кулька масою m підвішена на пружині жорсткості k та довжиною l . Кулька з пружиною починають обертатись в горизонтальній площині з кутовою швидкістю ω . На який кут при цьому відхилиться пружина від вертикалі?

2. Дві кулі однакового радіуса R і масами m та M пружно зіштовхуються. При цьому куля масою m до удару котилась без про ковзання зі швидкістю v , а інша куля перебувала у стані спокою. Знайти, за якого відношення мас m/M після удару та проковзування куля масою m в кінцевому підсумку зупиниться.

3. Кулька, що підвішена на пружини, виконує гармонічні коливання. Знайти кругову частоту ω та амплітуду цих коливань, якщо відомо, що в той момент, коли зміщення кульки дорівнювало x_1 , її швидкість була v_1 , а коли зміщення стало x_2 , швидкість стала v_2 .

4. Невеличкий шматочок космічного сміття обертається по коловій орбіті радіуса R і в певний момент часу пружно стикається зі значно більшим шматком, який рухається по такій самій орбіті, але в протилежному напрямку. Знайти, під яким кутом має відбитись шматочок, щоб покинути назавжди орбіту Землі.

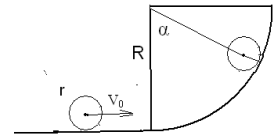
Оцінки: “відмінно” – не менше 30 балів, “добре” – 20 балів, “задовільно” – 14 балів. Відсутність числової відповіді – (-5) балів.

Прізвище	Задачі			
Група ФФ-41	1	2	3	4
Оцінка				

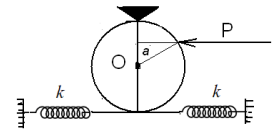
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
“КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ”
ФІЗИКО-ТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ

ФІЗИКА 1. МЕХАНІКА
Грудень 2014
Білет 1

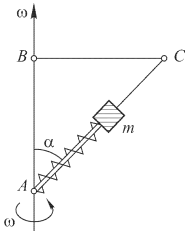
1. Однорідний суцільний циліндр масою m і радіуса r котиться без ковзання по гладкій горизонтальній поверхні зі швидкістю v_0 і починає заковуватись вгору по закріпленій увігнутій циліндричній поверхні радіуса $R > r$. При якій величині коефіцієнту тертя k циліндр почне ковзати після підняття на висоту, яка відповідає куту α від крайнього нижнього положення (від початку поверхні). Тертям кочення знехтувати. (10)



2. Суцільний однорідний диск масою M і радіуса R в вертикальній площині шарнірно закріплений у верхній точці. Нижня точка диску сполучена з двома легкими пружинами жорсткістю k кожна. В положенні рівноваги диску пружини не розтягнені. Конструкція знаходиться у полі тяжіння. В деякий момент часу диску надали імпульс P , направлений перпендикулярно до вертикального діаметру. Точка його прикладання знаходиться вище центру мас O , а напрямок складає кут α з радіусом диска. Знайти кутову амплітуду відхилення, частоту і період малих коливань диску. (10)



3. Частинка масою m рухається у центральному полі із потенціальною енергією $U(r) = -\alpha r^{-1} - \beta r^{-2}$. Знайти межі руху частинки, якщо її повна енергія дорівнює E , а момент імпульсу відносно центру поля є M . Знайти силу, що діє на частинку. Чи є її рух фінітним? У разі позитивної відповіді знайти його параметри. Знайти радіус її колової орбіти у випадку $E = (U_{\text{ефф}})_{\text{min}}$ (8)



4. Жорсткі стержні утворюють рівнобедрений прямокутний трикутник, який обертається з постійною кутовою швидкістю ω навколо вертикального катета AB . На стержень AC надіта і ковзає без тертя муфта маси m . Муфта пов'язана пружиною жорсткості k з вершиною A трикутника, що має в не розтягнутому стані довжину L . Визначити, при якому значенні ω муфта буде в рівновазі при недеформованій пружині? (7)

Оцінки: “відмінно” – не менше 30 балів, “добре” – 25 балів, “задовільно” – 20 балів. Відсутність числової відповіді – (-5) балів.

Прізвище	Задачі			
Група ФФ-41	1	2	3	4
Оцінка				

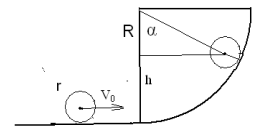
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
“КІЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ”
ФІЗИКО-ТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ

ФІЗИКА 1. МЕХАНІКА

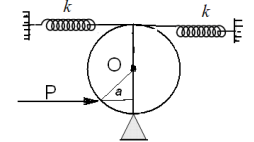
Грудень 2014

Білет 2

1. Однорідна суцільна куля масою m і радіуса r котиться без ковзання по гладкій горизонтальній поверхні зі швидкістю v_0 і починає заковуватись вгору по закріпленій увігнутій циліндричній поверхні радіуса $R > r$. На якій висоті h її центру вище крайнього нижнього положення (від початку поверхні) куля почне ковзати, якщо коефіцієнт тертя дорівнює k ? Тертям кочення знехтувати (10)

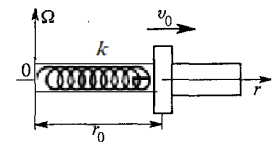


2. Суцільний однорідний диск масою M і радіуса R в вертикальній площині шарнірно закріплений у нижній точці. Верхня точка диску сполучена з двома легкими пружинами жорсткістю k кожна. В положенні рівноваги диску пружини не розтягнені. Конструкція знаходиться у полі тяжіння. В деякий момент часу диску надали імпульс P , направлений перпендикулярно до вертикального діаметру. Точка його прикладання знаходиться нижче центру мас O , а напрямок складає кут α з радіусом диска. Знайти кутову амплітуду відхилення, частоту і період малих коливань диску.(10)



3. Частинка масою m рухається у центральному полі із потенціальною енергією $U(r) = \alpha r^2 + \beta r^{-2}$. Знайти межі руху частинки, якщо її повна енергія дорівнює E , а момент імпульсу відносно центру поля є M . Знайти силу, що діє на частинку. Чи є її рух фінітним? У разі позитивної відповіді знайти його параметри. Знайти радіус її колової орбіти у випадку $E = (U_{\text{ефф}})_{\text{min}}$ (8)

4. На горизонтально розташований стержень надіта невелика муфта, яка сполучена з початком стержня пружиною жорсткості k . У не розтягнутому стані довжина пружини r_0 . Муфта може переміщатися уздовж стержня. Стержень обертається навколо вертикальної осі з кутовою швидкістю Ω . У початковий момент часу муфта знаходиться на відстані r_0 від осі обертання і має швидкість v_0 , спрямовану від осі обертання. Далі виявилось, що швидкість муфти росте лінійно з видаленням від осі обертання $v = v_0 r r_0^{-1}$. При якому коефіцієнті тертя μ між муфтою і стержнем це можливо? Силою тяжіння нехтувати. (7)



Оцінки: “відмінно” – не менше 30 балів, “добре” 25 0 балів, “задовільно” – 20 балів. Відсутність числової відповіді – (-5) балів.

Прізвище	Задачі			
Група ФФ-42	1	2	3	4
Оцінка				

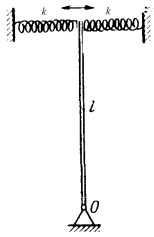
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
“КІЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ”
ФІЗИКО-ТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ

ФІЗИКА 1. МЕХАНІКА

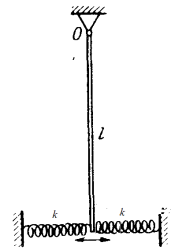
Грудень 2014

Білет 3

1. Порожнистий циліндр радіусу R і маси M , усередині якого знаходиться суцільний циліндр радіусу $r < R$ і маси m , скачується без ковзання з похилої площини, що утворює кут α з горизонтом. Внутрішній циліндр котиться по поверхні зовнішнього також без ковзання. Початкові швидкості обох циліндрів дорівнюють нулю. Визначити прискорення системи. (10)

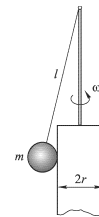


2. Однорідний тонкий стержень масою M і довжиною L в першому випадку шарнірно закріплений у верхній точці, а другій раз – у нижній, і здійснює малі коливання під дією двох горизонтальних однакових легких пружин жорсткістю k кожна. Пружини сполучені в першому випадку – у нижній точці стержня, а другій раз – у верхній, і не розтягнені в положенні рівноваги стержня. Знайти відношення частот коливань. (7)



3. Частинка масою m рухається у центральному полі із потенціальною енергією $U(r) = \alpha r^{-1} + \beta r^{-2}$. Знайти межі руху частинки, якщо її повна енергія дорівнює E , а момент імпульсу відносно центру поля є M . Знайти силу, що діє на частинку. Чи є її рух фінітним? У разі позитивної відповіді знайти його параметри. Знайти радіус її колової орбіти у випадку $E = (U_{\text{ефф}})_{\text{min}}$ (8)

4. Кулька радіусу R висить на нитці довжиною L і торкається вертикального циліндра радіусом r , встановленого на осі відцентрової машини. При якій кутовій швидкості ω обертання відцентрової машини кулька перестане давити на стінку циліндра? (5)



Оцінки: “відмінно” – не менше 25 балів, “добре” – 20 балів, “задовільно” – 15 балів. Відсутність числової відповіді – (-5) балів.

Прізвище	Задачі			
Група ФФ-42	1	2	3	4
Оцінка				

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
“КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ”
ФІЗИКО-ТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ

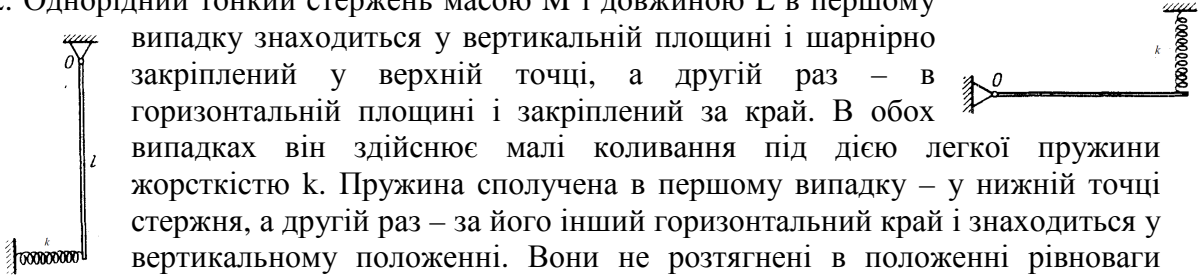
ФІЗИКА 1. МЕХАНІКА

Грудень 2014

Білет 4

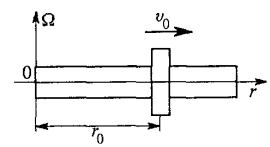
1. Осі суцільного і тонкостінного циліндрів сполучені невагомою штангою. Циліндри скачуються без ковзання по похилій площині з кутом α при основі. Радіуси циліндрів однакові і рівні R , при цьому маса суцільного дорівнює m_1 , а тонкостінного m_2 . При якому куті α циліндри скачуватимуться без ковзання? (10)

2. Однорідний тонкий стержень масою M і довжиною L в першому випадку знаходиться у вертикальній площині і шарнірно закріплений у верхній точці, а другий раз – в горизонтальній площині і закріплений за край. В обох випадках він здійснює малі коливання під дією легкої пружини жорсткістю k . Пружина сполучена в першому випадку – у нижній точці стержня, а другий раз – за його інший горизонтальний край і знаходиться у вертикальному положенні. Вони не розтягнені в положенні рівноваги стержня. Знайти відношення частот коливань. (7)



3. Частинка масою m рухається у центральному полі із потенціальною енергією $U(r) = -\alpha r^2 - \beta r^{-2}$. Знайти межі руху частинки, якщо її повна енергія дорівнює E , а момент імпульсу відносно центру поля є M . Знайти силу, що діє на частинку. Чи є її рух фінітним? У разі позитивної відповіді знайти його параметри. Знайти радіус її колової орбіти у випадку $E = (U_{\text{ефф}})_{\text{min}}$ (8)

4. На горизонтально розташований стержень надіта невелика муфта, яка може переміщатися уздовж стержня. Стержень обертається навколо вертикальної осі з кутовою швидкістю Ω . У початковий момент часу муфта знаходиться на відстані r_0 від осі обертання і має швидкість v_0 , спрямовану від осі обертання. Далі виявилось, що швидкість муфти росте лінійно з видаленням від осі обертання $v = v_0 r_0^{-1}$. При якому коефіцієнті тертя k між муфтою і стержнем це можливо? Силою тяжіння нехтувати. (5)



Оцінки: “відмінно” – не менше 30 балів, “добре” – 20 балів, “задовільно” – 15 балів. Відсутність числової відповіді – (-5) балів.

Прізвище	Задачі			
Група ФЕ-42	1	2	3	4
Оцінка				

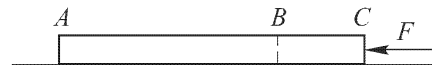
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
“КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ”
ФІЗИКО-ТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ

МЕХАНІКА
Грудень 2014
Білет 1

1. (6) Супутник Землі, обертається по круговій орбіті радіуса $R = 2R_3$. Він переходить на еліптичну орбіту з великою піввіссю $8R_3$. Знайти період обертання на новій орбіті.

2. (10) Тонке кільце масою m та радіусом R скочується з краю стола. Знайти яка буде кутова швидкість кільця після відриву від столу.

3. (10) На горизонтальній поверхні з коефіцієнтом тертя μ розміщено два бруска масами $m_1 = 0.15$ кг та $m_2 = 0.02$ кг. Правий брусок штовхають з деякою силою F таким чином, що обидва бруска рухаються з прискоренням $a = 2.5$ м/с². Знайти з якою силою правий брусок давить на лівий, якщо $AB = 2BC$



4. (14) На платформі стоїть великий бак з водою масою m_0 . Рівень води в баку H . Знизу баку є маленький отвір перерізом S через який витікає вода (зі швидкістю $u = \sqrt{2gH}$). Знайти з яким прискоренням буде рухатись платформа, якщо в початковий момент часу вона не рухалась.

Оцінки: “відмінно” – не менше 30 балів, “добре” – 20 балів, “задовільно” – 14 балів. Відсутність числової відповіді – (-5) балів.

Прізвище	Задачі			
Група ФЕ-42	1	2	3	4
Оцінка				

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
“КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ”
ФІЗИКО-ТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ

МЕХАНІКА
Грудень 2014
Білет 2

1. (10) Горизонтально розміщена паличка маси m підвішена за обидва кінці на нерозтяжних вертикальних нитках. Знайти силу натягу однієї з ниток в той момент коли другу з ниток перерізають.

2. (8) Матеріальна частинка рухається в площині XOY таким чином, що її координати залежать від часу за законом: $x = \alpha_1 + \beta_1 t + \gamma_1 t^2$; $y = \alpha_2 + \beta_2 t + \gamma_2 t^2$, де $\alpha_{1,2}$, $\beta_{1,2}$, $\gamma_{1,2}$ – певні сталі. Знайти прискорення точки та кут між напрямком швидкості і прискорення в момент часу τ

3. (8) При русі тіла в середовищі використовують поняття приєднаної маси – маси речовини що рухається зі швидкістю тіла. Уявимо що в хмарі пилу з густиною ρ рухається ракета з площею перерізу S таким чином що всі частинки налипають на ракету. Знайти як буде змінюватись швидкість ракети якщо початкова швидкість V_0 , а маса m_0 .

4. (14) На тіло масою $m = 1$ кг, яке знаходиться на горизонтальній поверхні з коефіцієнтом тертя $k = 0.8$, в момент часу $t = 0$ починає діяти сила, напрямлена під кутом $\alpha = 30^\circ$ до горизонту, пропорційна часу $F = At$, де $A = 10$ н/с. Визначити швидкість тіла через час $t = 5$ с.

Оцінки: “відмінно” – не менше 30 балів, “добре” – 20 балів, “задовільно” – 14 балів. Відсутність числової відповіді – (-5) балів.

Прізвище	Задачі			
Група ФФ-51	1	2	3	4
Оцінка				

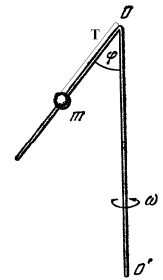
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
“КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ”
ФІЗИКО-ТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ

МЕХАНІКА

Січень 2016

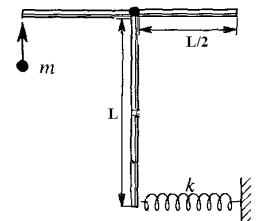
Білет 1

Невагомий стержень OO' , зігнений під кутом φ , обертається з постійною кутовою швидкістю ω відносно осі OO' . На відігнутий кінець стержня надіта намистинка маси m . Намистинка прикріплена до точки O невагомою і нерозтяжною ниткою. При якій кутовій швидкості намистинка буде знаходитись у стані спокою на відстані R від точки O , якщо натяг нитки дорівнює T ? При якій величині ω нитка обірветься? Вважаючи, що намистинка рухається від точки O , знайти, яку швидкість має намистинка на відстані R при відомому натязі нитки і відомій кутовій швидкості. На цій відстані знайти роботу сили натягу і відцентрової сили. (2+2+2)



Точці масою m , що знаходиться на відстані r від центру поля $U = \alpha r^3/3$, надали швидкість v_0 , яка складає кут $\pm\pi/2$ із напрямком до центру поля. При якому значенні v_0 матеріальна точка буде рухатись по колу? Знайти силу, що діє на точку. (3+1)

Два тонких однорідних стержня довжиною L і масою m кожний жорстко сполучні під кутом 90° у формі літери Т. Конструкція знаходиться в полі тяжіння і може обертатись навколо горизонтальної осі, яка проходить крізь середину верхнього і верхній кінець вертикального стержнів. До нижнього кінця вертикального стержня прикріплена нерозтяжна невагома пружина жорсткістю k , другий кінець якої закріплено. Знизу вверх летить куля масою m зі швидкістю v , яка потрапляє у кінець горизонтального стержня. Взаємодія абсолютно пружна. Внаслідок взаємодії система починає здійснювати малі коливання біля положення рівноваги. Знайти кутову амплітуду α відхилення і період малих коливань системи. (6+6)



Куля масою m і радіусом r котиться по горизонтальній поверхні зі швидкістю v_0 без ковзання. Вісь обертання горизонтальна. Куля абсолютно пружно і миттєво вдаряється об вертикальну стінку, яка має прямий кут із горизонтальною поверхнею. Після взаємодії куля починає рухатись горизонтально з ковзанням. Коефіцієнт тертя ковзання дорівнює μ . Знайти швидкість кулі після взаємодії, час ковзання, відстань, яку пуля пройшла під час ковзання, а також відносну втрату енергії під час ковзання. (2+2+2+2)

Оцінки: “відмінно” – не менше 28 балів, “добре” – 23 балів, “задовільно” – 18 балів. Відсутність числової відповіді – (-5) балів.

Прізвище	Задачі			
Група ФФ-51	1	2	3	4
Оцінка				

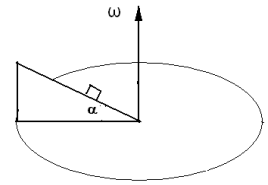
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
“КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ”
ФІЗИКО-ТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ

МЕХАНІКА

Січень 2016

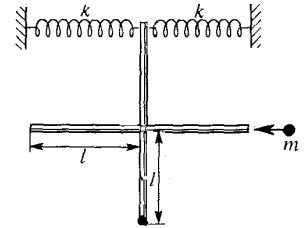
Білет 2

На горизонтальному диску закріплена похила площина довжиною S . Кут нахилу площини дорівнює α . Диск обертається зі сталою кутовою швидкістю ω . Уздовж похилої площини від осі обертання вгору рухається тіло масою m без початкової швидкості. Коефіцієнт тертя дорівнює k . Знайти в системі відліку, пов'язану з похилою площиною, при якій величині ω це можливо. Знайти силу Коріоліса, яка діє на тіло в момент досягнення ним кінця площини. (3+2)

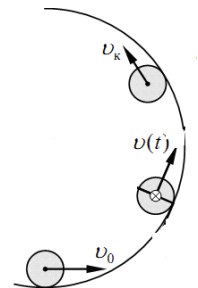


Точці масою m , що знаходиться на відстані r від центру поля $U = \alpha r^2/2$, надали швидкість v_0 , яка складає кут $\pm\pi/2$ із напрямком до центру поля. При якому значенні v_0 матеріальна точка буде рухатись по колу? Знайти силу, що діє на точку. (3+1)

Два тонких однорідних стержня довжиною $2l$ і масою m кожний жорстко сполучені під кутом 90° у формі хреста. Конструкція знаходиться в полі тяжіння і може обертатись навколо горизонтальної осі, яка проходить крізь нижню точку вертикального стержня. До верхнього кінця цього ж стержня прикріплені дві абсолютно однакові нерозтяжні невагомні пружини жорсткістю k кожна, другий кінець яких закріплено. У торець іншого стержня абсолютно пружно ударяє кулька масою m , яка відбивається від нього зі швидкістю v . В наслідок взаємодії система починає здійснювати малі коливання біля положення рівноваги. Знайти кутову амплітуду α відхилення і період малих коливань системи. (6+6)



Кулі радіусом r надали початковий поступальний рух із швидкістю v_0 вздовж борту гладкої горизонтальної площини, яка має форму круга радіуса R , і вона при русі починає торкатися борта. Коефіцієнт тертя між кулею і бортом дорівнює μ . Знайти модуль лінійної швидкості кулі після закінчення ковзання між бортом і кулею, інтервал часу ковзання, залежність лінійної та кутової швидкостей від часу при русі з ковзанням. (2+2+2+4).



Оцінки: “відмінно” – не менше 28 балів, “добре” – 23 балів, “задовільно” – 18 балів.
Відсутність числової відповіді – (-5) балів.

Прізвище	Задачі			
Група ФФ-52	1	2	3	4
Оцінка				

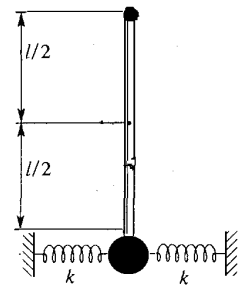
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
“КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ”
ФІЗИКО-ТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ

МЕХАНІКА
Січень 2016
Білет 3

Літак «провалюється» у повітряну яму, яка має у найнижчій точці радіус кривизни R . Пасажир іде по салону від кабіни пілотів із швидкістю u відносно літака, і під час проходження найнижчої точки знаходиться у середині салону. Знайти відносну зміну ваги пасажирів. Швидкість літака v . Що зміниться, якщо пасажир буде йти в протилежному напрямку під час тієї ж події. (2.5+2.5).

Точці масою m , що знаходиться на відстані r від центру поля $U = \alpha r^4/4$, надали швидкість v_0 , яка складає кут $\pm \pi/2$ із напрямком до центру поля. При якому значенні v_0 , матеріальна точка буде рухатись по колу? Знайти силу, що діє на точку. (3+1).

Однорідний стержень масою m і довжиною l підвішений у полі тяжіння за верхній кінець. До його нижнього кінця прикріплена куля масою m з того ж матеріалу. До кулі прикріплені дві невагомні і нерозтяжні пружини жорсткості k кожна, другі кінці яких закріплені. Система може здійснювати малий коливання біля положення рівноваги. Знайти період цих коливань. Як зміниться період коливань, якщо точку закріплення пересунути вниз таким чином, щоб вона опинилась на відстані a від центру мас системи (5+5).



Суцільному однорідному циліндру масою m і радіуса R надали обертальний рух навколо власної осі з кутової швидкістю ω . Потім його положили на бічну поверхню на горизонтальну площину і відпустили. На яку відстань переміститься циліндр під час руху з ковзанням? Коефіцієнт тертя між поверхнею і циліндром дорівнює μ . Знайти час ковзання і втрату енергії. (4+2+2+2).

цінки: “відмінно” – не менше 280 балів, “добре” – 23 балів, “задовільно” – 18 балів.
Відсутність числової відповіді – (-5) балів.

Прізвище	Задачі			
Група ФФ-52	1	2	3	4
Оцінка				

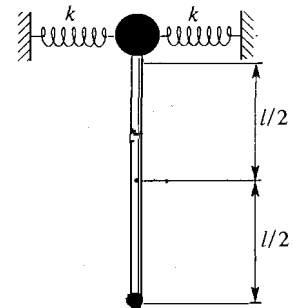
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
“КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ”
ФІЗИКО-ТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ

МЕХАНІКА
Січень 2016
Білет 4

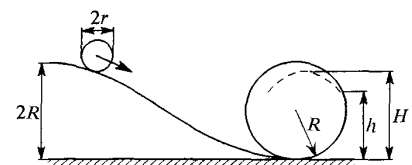
Літак рухається вгору по дузі радіусом R , облітаючи гірській хребет. Стюардеса йде по салону під час знаходження літака на вершині дуги до кабіни пілотів із швидкістю u відносно літака, і під час проходження найвищої точки знаходиться у середині салону. Швидкість літака v . В якому випадку легше підстрибнути: якщо рухатись в напрямку до кабіни пілотів чи в протилежному напрямку? Знайти відносну зміну маси в обох випадках. (2.5+2.5).

Точці масою m , що знаходиться на відстані r від центру поля $U = \alpha r$, надали швидкість v_0 , яка складає кут $\pm \pi/2$ з напрямком до центру поля. При якому значенні v_0 , матеріальна точка буде рухатись по колу? Знайти силу, що діє на точку. (3+1).

Однорідний стержень масою m і довжиною l закріплений в осі у полі тяжіння за нижній кінець. До його верхнього кінця прикріплена куля масою m з того ж матеріалу. До кулі прикріплені дві невагомні і нерозтяжні пружини жорсткості k кожна, другі кінці яких закріплені. Система може здійснювати малі коливання біля положення рівноваги. Знайти період цих коливань. Як зміниться період коливань, якщо точку закріплення пересунути вгору таким чином, щоб вона опинилась на відстані a від центру мас системи. (5+5).



З висоти $2R$ по жолобу без ковзання скотилась більярдна куля, радіус r якої набагато менше радіуса R петлі жолоба. На якій висоті h куля відірветься від жолоба? На яку висоту H вона підніметься після відриву? (4+6).



Оцінки: “відмінно” – не менше 28 балів, “добре” – 23 балів, “задовільно” – 18 балів. Відсутність числової відповіді – (-5) балів.

Прізвище	Задачі			
Група ФЕ-52	1	2	3	4
Оцінка				

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
“КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ”
ФІЗИКО-ТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ

МЕХАНІКА
Січень 2016
Білет 1

1. Виразити кінетичну і потенціальну енергію супутника деякої планети, що рухається по коловій орбіті радіуса R , через момент імпульсу L . Маса супутника m .

2. Одна мурашка може розвинути силу до 1 мН. Скільки необхідно мурашок щоб зрушити з місця паличку масою 0.01 г. Коефіцієнт тертя між паличкою та поверхнею 0.98. Вважати що мурашки рівномірно розміщуються вздовж палички та всі тягнуть в один бік

3. Паличка масою M та довжиною l підвішена верхнім кінцем. В нижній кінець влучає кулька масою m яка летить зі швидкістю u . На який кут відхиляється паличка після не пружного удару.

4. На протилежних кінцях каруселі радіуса R , що обертається зі сталим кутовим прискоренням β , знаходяться стрілок та мішень. Стрілок намагається влучити в мішень, забувши про обертання каруселі. Яким має бути кутове прискорення каруселі, щоб куля все одно потрапила в мішень? Швидкість кулі V_0 , а кутова швидкість каруселі в момент пострілу ω_0 .

Оцінки: “відмінно” – не менше 30 балів, “добре” – 20 балів, “задовільно” – 14 балів. Відсутність числової відповіді – (-5) балів.

Прізвище	Задачі			
Група ФЕ-52	1	2	3	4
Оцінка				

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
“КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ”
ФІЗИКО-ТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ

МЕХАНІКА

Січень 2016

Білет 2

1. Чому дорівнює момент імпульсу (відносно центру орбіти) супутника Землі масою m , який рухається по коловій орбіті радіуса R ?

2. Дошка масою M лежить на двох циліндрах масою m . До дошки приклали силу F . Яке буде прискорення дошки якщо циліндри рухаються без проковзування?

3. На баржу уздовж неї з берега закидається вантаж масою m з горизонтальною складовою швидкості V_0 . Знайти кінцеву швидкість V баржі з вантажем і відстань l , пройдену вантажем вздовж поверхні баржі, якщо маса баржі M , а коефіцієнт тертя між вантажем і поверхнею баржі дорівнює k . Опір води не враховувати.

4. Людина знаходиться на поверхні диску радіусу R , що обертається з кутовою швидкістю ω . Вона намагається йти зі сталою швидкістю v вздовж краю платформи. За якого мінімального коефіцієнту тертя це буде можливо. Як зміниться відповідь якщо людина піде до центру диску?.

Оцінки: “відмінно” – не менше 30 балів, “добре” – 20 балів, “задовільно” – 14 балів.
Відсутність числової відповіді – (-5) балів

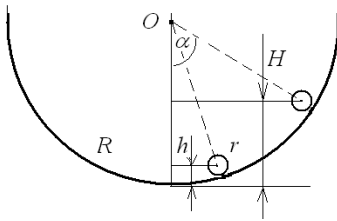
Прізвище	Задачі			
Група ФФ-61	1	2	3	4
Оцінка				

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
“КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ”
ФІЗИКО-ТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ

ЗАГАЛЬНА ФІЗИКА. МЕХАНІКА

Січень 2017

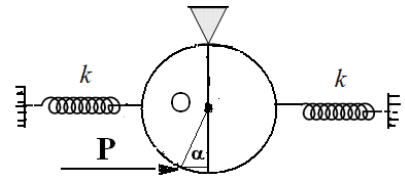
Білет 1



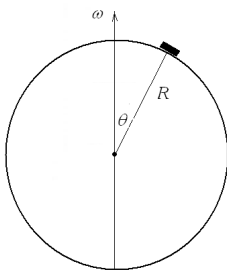
1. Суцільний однорідний циліндр масою m і радіусом r зачухується вгору без ковзання по увігнутій закріпленій циліндричній поверхні радіусом $R \gg r$. В початковому положенні його лінійна швидкість дорівнює v_0 , направлена вгору уздовж поверхні радіусом R , центр мас знаходиться на висоті h відносно найнижчого рівня (положення рівноваги).

Знайти кутове прискорення циліндра і силу реакції опори в положенні, коли його центр мас підніметься на висоту $H > h$. (5+5).

2. Суцільний однорідний диск масою M і радіусом R в вертикальній площині шарнірно закріплений у верхній точці. Середні точки диску сполучені з двома легкими пружинами жорсткістю k кожна. В положенні рівноваги диску пружини не розтягнені. Конструкція знаходиться у полі тяжіння. В деякий момент часу диску надали імпульс P , направлений вздовж хорди перпендикулярно діаметру. Точка його прикладання знаходиться нижче центру мас O , а напрямок складає кут α . Знайти кутову амплітуду відхилення, частоту і період малих коливань диску. (5+5).



3. Знайти закон руху частинки $x = x(t)$ масою m в полі $U(x) = -ax^4$ у випадку, коли її повна енергія дорівнює нулю. Знайти силу, що діє на частинку. Вважати, що початкове положення частинки характеризується величиною x_0 . (4+1).



4. На сфері радіусом R невеличке тіло масою m знаходиться у стані спокою. Сфера обертається зі сталою кутовою швидкістю ω навколо вертикальної осі, що проходить крізь її центр. Кут між напрямом знаходження тіла і віссю складає θ . Знайти в системі відліку, пов'язану зі сферою, при якому коефіцієнті тертя k між тілом та сферою це можливо. (5).

Оцінки: “відмінно” – не менше 28 балів, “добре” – 23 балів, “задовільно” – 18 балів.
Відсутність числової відповіді – (-5) балів.

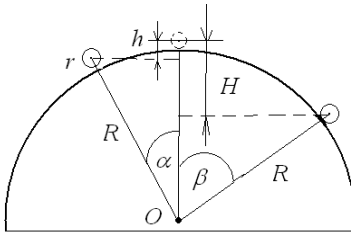
Прізвище	Задачі			
Група ФФ-61	1	2	3	4
Оцінка				

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
 “КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ”
 ФІЗИКО-ТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ

ЗАГАЛЬНА ФІЗИКА. МЕХАНІКА

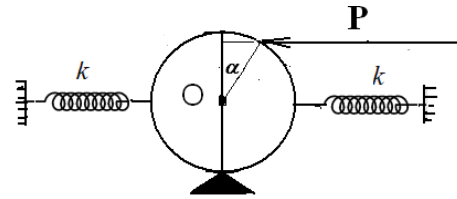
Січень 2017

Білет 2

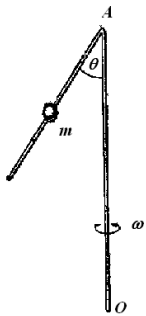


1. Суцільна однорідна куля масою m і радіусом r заковчується вгору без ковзання по опуклій закріпленій циліндричній поверхні радіусом $R \gg r$. В початковому положенні її швидкість дорівнює v_0 , направлена вздовж поверхні радіусом R , центр мас опущений на відстань h відносно найвищого рівня. Знайти кутове прискорення кулі і силу реакції опори в положенні, коли після проходження найвищої точки центр мас кулі опуститься на висоту $H > h$. (5+5).

2. Суцільний однорідний диск масою M і радіусом R в вертикальній площині шарнірно закріпленій у нижній точці. Середні точки диску сполучені з двома легкими пружинами жорсткістю k кожна. В положенні рівноваги диску пружини не розтягнені. Конструкція знаходиться у полі тяжіння. В деякий момент часу диску надали імпульс P , направлений уздовж хорди перпендикулярно діаметру. Точка його прикладання знаходиться вище центра мас O , а напрямком складає кут α . Знайти кутову амплітуду відхилення, частоту і період малих коливань диску. (5+5).



3. Знайти закон руху частинки $x = x(t)$ масою m в полі $U(x) = -bx^6$ у випадку, коли її повна енергія дорівнює нулю. Знайти силу, що діє на частинку. Вважати, що початкове положення частинки характеризується величиною x_0 . (4+1).



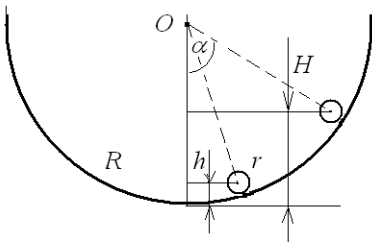
4. Бусинка масою m рухається вздовж стержня від його вершини. Стержень зігнений під кутом θ і обертається з постійною кутовою швидкістю ω . При яком коефіцієнті тертя μ між бусинкою та стержнем бусинка буде рухатись рівномірно і опуститься на висоту h відносно вершини стержня. (5).

Оцінки: “відмінно” – не менше 28 балів, “добре” – 23 балів, “задовільно” – 18 балів. Відсутність числової відповіді – (-5) балів

Прізвище	Задачі			
Група ФФ-62	1	2	3	4
Оцінка				

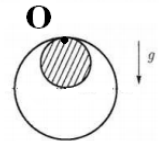
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
“КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ”
ФІЗИКО-ТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ

ЗАГАЛЬНА ФІЗИКА. МЕХАНІКА
Січень 2017
Білет 3

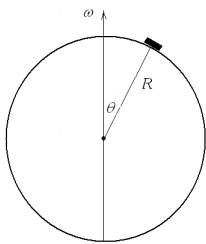


1. Суцільний однорідний циліндр масою m і радіусом r заковтується вгору без ковзання по увігнутій закріпленій циліндричній поверхні радіусу $R \gg r$. В початковому положенні його лінійна швидкість дорівнює v_0 , направлена вгору вздовж поверхні радіусу R , центр мас знаходиться на висоті h відносно найнижчого рівня (положення рівноваги). Знайти кутове прискорення циліндра і силу реакції опори в положенні, коли його центр мас підніметься на висоту $H > h$. (5+5).

2. Обруч масою m і радіусом r приварений до іншого обруча з такою ж масою і радіусом $2r$. Конструкція висить на гвіздку O . Знайти період малих коливань. (5).



3. Знайти закон руху частинки $x = x(t)$ масою m в полі $U(x) = -ax^4$ у випадку, коли її повна енергія дорівнює нулю. Знайти силу, що діє на частинку. Вважати, що початкове положення частинки характеризується величиною x_0 . (4+1).



4. На сфері радіуса R знаходиться у стані спокою невеличке тіло масою m . Сфера обертається зі сталою кутовою швидкістю ω навколо вертикальної осі, що проходить крізь її центр. Кут між напрямом знаходження тіла і віссю складає θ . Знайти в системі відліку, пов'язану зі сферою, при якому коефіцієнті тертя k між тілом та сферою це можливо. (5).

Оцінки: “відмінно” – не менше 23 балів, “добре” – 19 балів, “задовільно” – 15 балів. Відсутність числової відповіді – (-5) балів.

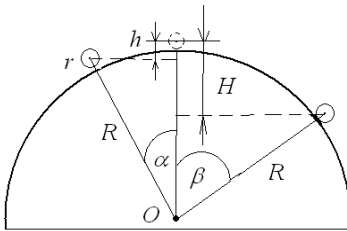
Прізвище	Задачі			
Група ФФ-62	1	2	3	4
Оцінка				

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
“КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ”
ФІЗИКО-ТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ

ЗАГАЛЬНА ФІЗИКА. МЕХАНІКА

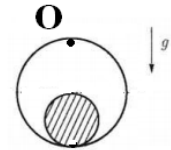
Січень 2017

Білет 4

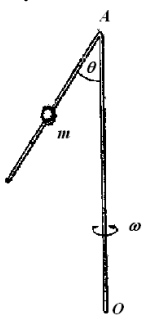


1. Суцільна однорідна куля масою m і радіуса r заковчується вгору без ковзання по опуклій закріпленій циліндричній поверхні радіусу $R \gg r$. В початковому положенні її швидкість дорівнює v_0 , направлена вздовж поверхні радіусу R , центр мас опущений на відстань h відносно найвищого рівня. Знайти кутове прискорення кулі і силу реакції опори в положенні, коли після проходження найвищої точки центр мас кулі опуститься на висоту $H > h$. (5+5).

2. Обруч масою m і радіусом r приварений до іншого обруча з такою ж масою і радіусом $2r$. Конструкція висить на гвіздку O . Знайти період малих коливань. (5).



3. Знайти закон руху частинки $x = x(t)$ масою m в полі $U(x) = -bx^6$ у випадку, коли її повна енергія дорівнює нулю. Знайти силу, що діє на частинку. Вважати, що початкове положення частинки характеризується величиною x_0 . (4+1)



4. Бусинка масою m рухається вздовж стержня від його вершини. Стержень зігнений під кутом θ і обертається з постійною кутовою швидкістю ω . При яком коефіцієнті тертя μ між бусинкою та стержнем бусинка буде рухатись рівномірно і опуститься на висоту h відносно вершини стержня. (5).

Оцінки: “відмінно” – не менше 23 балів, “добре” –19 балів, “задовільно” – 15 балів. Відсутність числової відповіді – (-5) балів.

<i>Прізвище</i>	<i>Задачі</i>			
<i>Група Фе-62</i>	1	2	3	4
<i>Оцінка</i>				

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
“КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ”
ФІЗИКО-ТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ

ЗАГАЛЬНА ФІЗИКА. МЕХАНІКА

Січень 2017

Білет 1

1. (4) Вирозити потенціалну і кінетичну енергію супутника деякої планети, що рухається по коловій орбіті радіуса R , через момент імпульсу L . Маса супутника m .

2. (5) Одна мурашка може розвинути силу до 1 мН. Скільки необхідно мурашок, щоб зрушити з місця паличку масою 0.01 г. Коефіцієнт тертя між паличкою то поверхнею 0.98. Вважати, що мурашки рівномірно розміщуються вздовж палички та всі тягнуть в одному напрямку.

3. (5) Паличка масою M та довжиною l підвішена верхнім кінцем. До нижнього кінця влучає кулька масою m , яка летит з швидкістю u . На який кут відхилиться паличка після не пружного удару.

4. (6) На протилежних кінцях каруселі радіуса R , що обертається зі сталим кутовим прискоренням β , знаходиться стрілок та мішень. Стрілок вистрілює просто у напрямку мішені, забувши про обертання каруселі. Яким має буди прискорення каруселі, щоб куля все ж таки потрапила у мішень? Швидкість кулі V_0 , а кутова швидкість каруселі в момент пострілу ω_0 .

Оцінки: “відмінно” – не менше 23 балів, “добре” –19 балів, “задовільно” – 15 балів. Відсутність числової відповіді – (-5) балів.

Прізвище	Задачі			
Група Фе-62	1	2	3	4
Оцінка				

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
“КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ”
ФІЗИКО-ТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ

ЗАГАЛЬНА ФІЗИКА. МЕХАНІКА

Січень 2017

Білет 2

1. (5) Чому дорівнює момент імпульсу (відносно центру орбіти) супутника Землі масою m , який рухається по коловій орбіті радіуса R ? Вважати відомим g на поверхні Землі, та її радіус R_3 .

2. (5) Дошка масою M лежить на двох циліндрах масою m і радіуса R . До дошки приклали силу F . Яке буде прискорення дошки, якщо циліндри рухаються без ковзання?

3. (5) На баржу уздовж її корпусу закидається вантаж масою m з горизонтальної складової швидкості V_0 . Знайти кінцеву швидкість V баржі з вантажем і відстань l , пройдену вантажем вздовж поверхні баржі, якщо маса баржі M , а коефіцієнт тертя між вантажем і поверхнею баржі дорівнює k . Опір води не враховувати.

4. (5) Людина знаходиться на поверхні диску радіуса R , що обертається з кутової швидкістю ω . Вона намагається йти зі сталою швидкістю v вздовж краю платформи. За якого мінімального коефіцієнту тертя це можливе? Як зміниться відповідь, якщо людина піде до центру диску?

Оцінки: “відмінно” – не менше 23 балів, “добре” – 19 балів, “задовільно” – 15 балів. Відсутність числової відповіді – (-5) балів.

ДОДАТОК 2

НЕОБХІДНІ ВІДОМОСТІ З МАТЕМАТИКИ

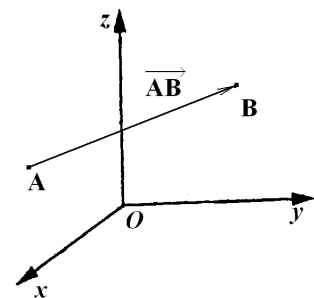
1 Вектори, дії з векторами

Рух усіх матеріальних тіл відбувається в просторі і в часі. Всі тіла мають власні розміри і займають певне місце у просторі. З часом розміри і взаємне розташування тіл можуть змінюватись. Для опису руху в певних умовах використовують *модель матеріальної точки (частинки)*. *Матеріальна точка – це тіло, розмірами якого можна нехтувати порівняно з тими відстанями, на які тіло може переміщуватись під час свого руху.* Положення точки у просторі може бути визначене тільки по відношенню до яких-небудь протяжних тіл – так званих тіл відліку, або систем відліку. В свою чергу, положення точок у просторі відносно системи відліку характеризують їх координатами за допомогою введення системи координат. *Система координат – це правила відліку відстаней, кутів та інших величин, що уможливають визначення положення матеріальної точки в просторі відносно тіла відліку.* Тіло відліку, система координат і годинник складають систему відліку. Для механічного опису руху тіло відліку будують у вигляді трьох взаємно перпендикулярних стержнів (відрізків), що перетинаються в точці O . На кожному стержні задають одиницю масштабу і додатний напрямок, перетворивши їх таким чином в координатні осі x , y , z . Тоді говорять, що в просторі задана система координат. В механіці Ньютона користуються або одним годинником, що супроводжує рухоме тіло, або сукупністю годинників, розставлених досить часто і нерухомих відносно тіла відліку. Показання часу нерухомих годинників та рухомих вважаються однаковими. Класична механіка Ньютона, отже, постулює абсолютний час. Це означає, *що*

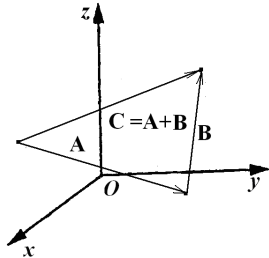
ньютонівський час можна розглядати як одновимірну Евклідову пряму, кожна точка якої відповідає деякому моменту часу.

Задамо у просторі декартову прямокутну систему координат. Кожній довільній точці P простору можна поставити у відповідність три числа x, y, z – координати цієї точки відносно вибраної системи координат. Нехай в кожній точці P простору задано значення функції $\varphi(P) = \varphi(x, y, z)$. Величину $\varphi(x, y, z)$ називають **скалярною величиною** або **просто скаляром**, якщо її значення в довільній точці не залежить від вибору системи координат. До скалярних величин у фізиці відносять щільність, тиск, температуру, час, масу, тощо. Якщо кожній точці простору поставлено у відповідність значення скалярної величини, то таку відповідність називають скалярним полем. Скалярне поле – це деяка скалярна функція точок простору.

Скалярна величина – це величина, що характеризується тільки одним числом. Для опису деяких фізичних об'єктів необхідно використати декілька величин, значення яких залежать від вибору системи координат. Сукупність таких величин називають тензором. Окремим випадком тензора є вектор. Просте визначення вектора можна сформулювати так: **вектор** є спрямований відрізок, частина прямої лінії, яка сполучає дві точки в просторі – точку початку вектора і точку його кінця. Отже, геометричний вектор – це спрямований відрізок. Вектор характеризують його величиною – довжиною, напрямом в просторі і певним законом перетворення під час переходу від однієї системи координат до іншої. Довжина вектора в деякому масштабі є значення тієї фізичної величини, яку він представляє. На рисунку зображено вектор, початком якого є точка А, кінцем – точка В.

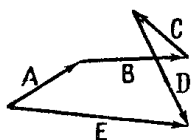
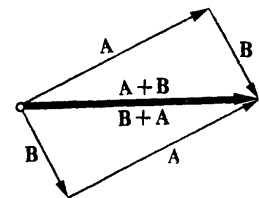


Вектор позначений символом \overline{AB} , стрілка показує напрям вектора. Часто вектор позначають однією буквою із стрілкою або буквою з жирним шрифтом \mathbf{A} . Довжину AB вектора \overline{AB} називають його модулем і позначають $AB = |\overline{AB}| = |\mathbf{A}|$.



Вектор, початок і кінець якого співпадають, називають нульовим вектором, напрям його не визначений. Два вектори вважають рівними один одному, якщо вони паралельні, однаково спрямовані і мають однакову довжину: $\mathbf{A} = \mathbf{B}$, $|\mathbf{A}| = |\mathbf{B}|$. Будь-який вектор можна переносити паралельно самому собі оскільки при цьому не змінюється його довжина і напрям. **Колінеарні вектори – це ті, які за допомогою паралельного перенесення можна розташувати на одній прямій. Компланарні вектори – ті, які паралельним перенесенням можуть бути розташовані в одній площині.**

Для дії з векторами використовують правила векторної алгебри. Сумою векторів \mathbf{A} і \mathbf{B} називають вектор \mathbf{C} , $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$, початок якого співпадає з початком вектора \mathbf{A} , а кінець – з кінцем вектора \mathbf{B} , до того ж кінець \mathbf{A} поєднаний з початком \mathbf{B} . Це правило трикутників. На рисунку показані три вектори \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} , де вектор \mathbf{C} дорівнює сумі векторів \mathbf{A} , \mathbf{B} : $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$. Використовують також правило паралелограма: сума векторів дорівнює діагоналі паралелограма, сторони якого утворені векторами, які додаються.



Суму декількох векторів знаходять, послідовно застосовуючи кілька разів правило трикутників. Результуючий вектор – це вектор, проведений з початку першого складового вектора в кінець останнього (вектор \mathbf{E} на рис.).

Правило додавань векторів має такі ж властивості, що і правило додавань дійсних чисел:

а) $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$ – комутативність;

б) $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C})$ – асоціативність;

в) $\mathbf{A} + \mathbf{0} = \mathbf{A}$;

г) $\lambda(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \lambda\mathbf{A} + \lambda\mathbf{B}$; якщо $\lambda > 0$, напрям вектора не змінюється; якщо $\lambda < 0$ – змінюється на протилежне;

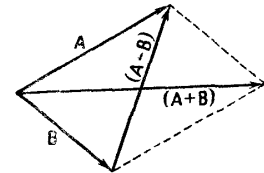
д) $0 \cdot \mathbf{A} = \mathbf{0}$, напрям вектора не визначений;

е) $\mathbf{A} + \mathbf{A}' = \mathbf{0}$, існування протилежного вектора $\mathbf{A}' = -\mathbf{A}$. Вектор $(-\mathbf{A})$ – вектор довжиною \mathbf{A} і протилежного напрямку.

Множення вектора на скаляр має властивості:

а) $(\alpha + \beta)\mathbf{A} = \alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{A}$;

б) $\alpha(\beta\mathbf{A}) = (\alpha\beta)\mathbf{A}$.



Віднімання векторів зводиться до додавання $\mathbf{C} = \mathbf{A} + (-\mathbf{B})$.

У декартовій прямокутній системі координат вводять три вектори, початок яких співпадає з початком координат, модулі дорівнюють одиниці, $|\mathbf{i}| = |\mathbf{j}| = |\mathbf{k}| = 1$, і спрямовані вони уздовж осей координат x , y , z відповідно. Ці вектори називають **одичними ортами**, які утворюють ортонормований базис тривимірного простору. Положення будь-якої точки в такому просторі можна охарактеризувати її радіус-вектором, початок якого співпадає з початком координат, а кінець – з положенням точки в просторі. Радіус-вектор точки в системі координат з ортонормованим базисом можна представити у вигляді суми трьох векторів:

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

де окремі доданки $x\mathbf{i}$, $y\mathbf{j}$, $z\mathbf{k}$ називають компонентами вектора, а числа x , y , z – координатами вектора. Саме співвідношення – це розкладання вектора за одичними ортами системи координат. Будь-який вектор може

бути представлений у вигляді розкладання за ортами:

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}$$

Тут a_x, a_y, a_z – координати вектора, $\mathbf{a}_x = a_x \mathbf{i}$, $\mathbf{a}_y = a_y \mathbf{j}$, $\mathbf{a}_z = a_z \mathbf{k}$ – компоненти вектора. Числа a_x, a_y, a_z розглядають як проєкції вектора \mathbf{a} на напрями $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, що задаються ортами. Модуль (довжина) вектора \mathbf{a} в цьому випадку записуються так:

$$a = |\mathbf{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Кожному вектору може бути поставлений у відповідність його одиничний вектор, що має той же напрям і модуль якого дорівнює одиниці за правилом:

$$\mathbf{a} = n\mathbf{a}, \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}$$

Сума двох векторів, кожний з яких записаний через свої координати, має вигляд:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}) + (b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} + b_z \mathbf{k}) = (a_x + b_x) \mathbf{i} + (a_y + b_y) \mathbf{j} + (a_z + b_z) \mathbf{k}$$

Аналогічним чином додають декілька заданих в координатному вигляді векторів.

Скалярним добутком двох векторів ($\mathbf{a}\mathbf{b}$) називають число (скаляр), рівне добутку модулів векторів на косинус кута між ними:

$$(\mathbf{a}\mathbf{b}) = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cos(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}) = ab \cos(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}})$$

Добуток $a \cos(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}) = a \cos \varphi$ називають проєкцією вектора \mathbf{a} на вектор \mathbf{b} .

Якщо кут між векторами $\varphi < \pi/2$, то $\cos \varphi > 0$, якщо $\varphi > \pi/2 \rightarrow \cos \varphi < 0$.

Проєкцію вектора \mathbf{a} на який-небудь орт обчислюють як добуток довжини вектора на косинус кута між вектором і ортом:

$$a_i = a \cos(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{i}})$$

Очевидно, що

$$a_x = (\mathbf{a}\mathbf{i}) = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{i}| \cos(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{i}}) = |\mathbf{a}| \cos(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{i}})$$

Аналогічні співвідношення можна написати для компонентів a_y, a_z .

Модуль суми двох векторів в декартовій системі координат може бути записаний з урахуванням скалярного добутку цих векторів:

$$|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = \sqrt{(\mathbf{a} + \mathbf{b})(\mathbf{a} + \mathbf{b})} = \sqrt{(\mathbf{a} + \mathbf{b})^2} = \sqrt{a^2 + b^2 + 2(\mathbf{a}\mathbf{b})}$$

Модуль вектора також можна записати через скалярний добуток:

$$a = |\mathbf{a}| = \sqrt{(\mathbf{a}\mathbf{a})}$$

Скалярний добуток має такі властивості:

- а) $(\mathbf{a}\mathbf{b}) = (\mathbf{b}\mathbf{a})$;
- б) $(\mathbf{a}, \mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a}\mathbf{b}) + (\mathbf{a}\mathbf{c})$;
- в) $(\mathbf{a}, \lambda\mathbf{b}) = \lambda(\mathbf{a}\mathbf{b})$ для будь-якого довільного числа λ .

Якщо вектор $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$, їх скалярний добуток дорівнює нулю. Звідси витікає, що:

$$(\mathbf{i}\mathbf{j}) = (\mathbf{i}\mathbf{k}) = (\mathbf{j}\mathbf{k}) = 0; \mathbf{i}^2 = (\mathbf{i}\mathbf{i}) = \mathbf{j}^2 = (\mathbf{j}\mathbf{j}) = \mathbf{k}^2 = (\mathbf{k}\mathbf{k}) = 1$$

Два вектори, задані в координатній формі, однакові тоді, коли однакові їх відповідні координати:

$$\mathbf{a} = \mathbf{b} \Leftrightarrow a_x = b_x, a_y = b_y, a_z = b_z$$

Для двох векторів $\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}$; $\mathbf{b} = b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k}$ їх скалярний добуток, з урахуванням скалярного добутку ортів, має вигляд:

$$(\mathbf{a}\mathbf{b}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = \sum_i a_i b_i$$

Тобто, скалярний добуток двох векторів, заданих в координатній формі, дорівнює сумі добутків однойменних координат цих векторів. Кут між двома векторами можна виразити через їх координати:

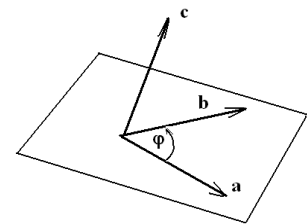
$$\cos(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}) = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$$

Векторним добутком двох векторів \mathbf{a} і \mathbf{b} називають вектор $\mathbf{c} = [\mathbf{a}\mathbf{b}]$, який відповідає таким умовам:

а) модуль вектора \mathbf{c} дорівнює добутку модулів векторів \mathbf{a} , \mathbf{b} і синуса кута між ними $|\mathbf{c}| = |[\mathbf{a}\mathbf{b}]| = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \sin(\widehat{\mathbf{a}\mathbf{b}})$;

б) вектор \mathbf{c} перпендикулярний площині, в якій розташовані вектори \mathbf{a} і \mathbf{b} , тобто $\mathbf{c} \perp \mathbf{a}$, $\mathbf{c} \perp \mathbf{b}$;

в) напрям вектора \mathbf{c} співпадає з напрямом правого гвинта при його повороті від вектора \mathbf{a} до \mathbf{b} на кут менший π . Іншими словами, вектор \mathbf{c} спрямований в той бік, звідки поворот від \mathbf{a} до \mathbf{b} на найкоротший кут видно проти годинникової стрілки. Кут між векторами відлічується від першого співмножника до другого і кут завжди менше або рівний π , завдяки чому $\sin \varphi \geq 0$.



Векторний добуток має такі властивості:

- а) $[\mathbf{a}\mathbf{b}] = -[\mathbf{b}\mathbf{a}]$;
- б) $[\mathbf{a}, \mathbf{b} + \mathbf{c}] = [\mathbf{a}\mathbf{b}] + [\mathbf{a}\mathbf{c}]$;
- в) $[\lambda\mathbf{a}\mathbf{b}] = \lambda[\mathbf{a}\mathbf{b}]$;
- г) $[\mathbf{a}\mathbf{a}] = 0$, $\mathbf{a}[\mathbf{a}\mathbf{b}] = \mathbf{b}[\mathbf{a}\mathbf{b}] = 0$;
- д) $[\mathbf{a}\mathbf{b}] = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$

Наведені вище властивості векторного добутку дають можливість довести, що:

$$[\mathbf{i}\mathbf{i}] = [\mathbf{j}\mathbf{j}] = [\mathbf{k}\mathbf{k}] = 0; [\mathbf{i}\mathbf{j}] = \mathbf{k}, [\mathbf{j}\mathbf{k}] = \mathbf{i}, [\mathbf{k}\mathbf{i}] = \mathbf{j}$$

Векторний добуток векторів, заданих в координатній формі, можна записати таким чином:

$$\begin{aligned} \mathbf{c} = [\mathbf{a}\mathbf{b}] &= [a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}, b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k}] = \\ &= (a_y b_z - a_z b_y)\mathbf{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\mathbf{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\mathbf{k} \end{aligned}$$

Цю формулу можна записати в іншій формі у вигляді визначника:

$$[\mathbf{ab}] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

Змішаний векторно-скалярний добуток $\mathbf{a}[\mathbf{bc}] = \mathbf{b}[\mathbf{ca}] = \mathbf{c}[\mathbf{ab}]$ не змінює своєї величини при циклічній перестановці векторів.

Добутки, що містять більше двох векторів, перетворюються таким чином:

а) $[\mathbf{a}[\mathbf{bc}]] = \mathbf{b}(\mathbf{ac}) - \mathbf{c}(\mathbf{ab})$ – правило «бац» мінус «цаб»;

б) $[[\mathbf{ab}] \times [\mathbf{cd}]] = (\mathbf{acd})\mathbf{b} - (\mathbf{bcd})\mathbf{a} = (\mathbf{abd})\mathbf{c} - (\mathbf{abc})\mathbf{d}$;

в) $[\mathbf{ab}]^2 = \mathbf{a}^2\mathbf{b}^2 - (\mathbf{ab})^2$

2 Диференціювання скалярних і векторних функцій

Нехай деяка функція $f(x)$ визначена на проміжку X . У деякій точці x_0 з проміжку X , $x_0 \in X$ (точка x_0 належить проміжку X) надамо незалежній змінній x приріст Δx з цього ж проміжку. Функція $f(x)$ в цій точці отримає приріст

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

Похідною функції в точці, $f'(x_0)$, називають межу відношення приросту цієї функції до відповідного приросту її аргументу при даному її значенні або в цій точці $x = x_0$:

$$\frac{df(x_0)}{dx} = f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

якщо така межа існує. Так визначають похідну за незалежною змінною x .

При даному значенні $x = x_0$ похідна – це певне число. Якщо похідна існує в усьому проміжку X , тобто при кожному значенні змінної x в цьому проміжку, то вона є функцією від x .

Наведемо приклади обчислення похідних функцій, які часто зустрічаються у фізиці.

Функція	Похідна	Функція	Похідна
x^a	ax^{a-1}	$\operatorname{ctg} x$	$-1/\sin^2 x$
e^x	e^x	$\sec x$	$\sin x/\cos^2 x$
a^x	$a^x \ln(a)$	$\operatorname{cosec} x$	$-\cos x/\sin^2 x$
$\ln(x)$	$1/x$	$\operatorname{sh}(x)$	$\operatorname{ch}(x)$
$\log_a(x)$	$1/x \ln(a)$	$\operatorname{ch}(x)$	$\operatorname{sh}(x)$
$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{th}(x)$	$1/\operatorname{ch}^2(x)$
$\cos x$	$-\sin x$	$\operatorname{cth}(x)$	$-1/\operatorname{sh}^2(x)$
$\operatorname{tg} x$	$1/\cos^2 x$	$\operatorname{arsh}(x)$	$1/\sqrt{1+x^2}$
$\operatorname{arcsin}(x)$	$1/\sqrt{1-x^2}$	$\operatorname{arch}(x)$	$1/\sqrt{x^2-1}$
$\operatorname{arccos} x$	$-1/\sqrt{1-x^2}$	$\operatorname{arth}(x)$	$1/1-x^2$
$\operatorname{arctg} x$	$1/1+x^2$	x^x	$x^x \ln(x+1)$

Вказані в таблиці **гіперболічні функції** визначають таким чином:

$$\operatorname{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\operatorname{th}(x) = \frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)}, \quad \operatorname{cth}(x) = \frac{1}{\operatorname{th}(x)}$$

Обернені гіперболічні функції мають вигляд:

$$\operatorname{arsh}(x) = \ln \left[1 + \sqrt{x^2 + 1} \right], \quad \operatorname{arch}(x) = \ln \left[1 + \sqrt{x^2 - 1} \right]$$

$$\operatorname{arth}(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}, \quad \operatorname{arch}(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1}$$

Наведемо основні правила обчислення похідних скалярних функцій скалярного аргументу:

$$\left[u(x) \pm v(x) \right]' = u'(x) \pm v'(x); \quad \left[cu(x) \right]' = cu'(x);$$

$$\left[u(x) \cdot v(x) \right]' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x);$$

$$\left[\frac{u(x)}{v(x)} \right]' = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)}$$

Похідна складної функції:

$$\frac{d}{dx} f(u(x)) = \frac{df}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Розглянемо обчислення похідної від векторної функції скалярного аргументу. У фізиці часто доводиться мати справу з векторними функціями часу. Нехай, наприклад, деякий вектор \mathbf{a} змінюється згідно із законом $\mathbf{a} = \mathbf{a}(t)$. Це означає, що проєкції вектора на координатні осі є функціями часу:

$$\mathbf{a}(t) = a_x(t)\mathbf{i} + a_y(t)\mathbf{j} + a_z(t)\mathbf{k}$$

Швидкість зміни вектора з часом задається похідною $\frac{d\mathbf{a}}{dt}$:

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \frac{da_x}{dt}\mathbf{i} + \frac{da_y}{dt}\mathbf{j} + \frac{da_z}{dt}\mathbf{k},$$

якщо координатні осі з часом не змінюють орієнтації в просторі. Обчислення похідних від векторних функцій виконується за тими ж правилами, що і для скалярних функцій, викладених вище. Здебільше прийнято похідну за часом позначати точкою над функцією, від якої беруть похідну $\left(\dot{\mathbf{S}} = \frac{d\mathbf{S}}{dt} \right)$:

$$\frac{d}{dt} [\mathbf{u}(t) \pm \mathbf{v}(t)] = \dot{\mathbf{u}}(t) \pm \dot{\mathbf{v}}(t); \quad \frac{d}{dt} [c\mathbf{u}(t)] = c\dot{\mathbf{u}}(t);$$

$$\frac{d}{dt} [\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}(t)] = \dot{\mathbf{u}}(t) \cdot \mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(t) \cdot \dot{\mathbf{v}}(t)$$

$$\frac{d}{dt} [f(t) \cdot \mathbf{v}(t)] = \dot{f}(t) \cdot \mathbf{v}(t) + f(t) \cdot \dot{\mathbf{v}}(t);$$

$$\frac{d}{dt} [\mathbf{u}(t) \mathbf{v}(t)] = [\dot{\mathbf{u}}(t) \mathbf{v}(t)] + [\mathbf{u}(t) \dot{\mathbf{v}}(t)];$$

$$\frac{d}{dt} \mathbf{v}(f(t)) = \frac{d}{df} \mathbf{v}(f) \cdot \frac{d}{dt} f(t) = \frac{d}{df} \mathbf{v}(f) \cdot \dot{f}(t)$$

3. Інтегрування елементарних функцій

Функцію $F(x)$ на цьому проміжку X називають **первісною функцією** $f(x)$ або інтегралом від $f(x)$, якщо на усьому проміжку X функція $f(x)$ є похідної функції $F(x)$ або $f(x)dx$ є для $F(x)$ диференціалом:

$$F'(x) = f(x);$$

$$dF(x) = f(x)dx$$

Розшук для функції усіх її первісних називають інтегруванням. Для існування первісної функції $f(x)$ на інтервалі X досить, щоб $f(x)$ була безперервною на цьому інтервалі.

Функцію $F(x) + C$, де $F(x)$ – первісна функції $f(x)$, а C – довільна постійна називають **невизначеним інтегралом функції $f(x)$** і позначають

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

Тут добуток $f(x)dx$ називають підінтегральним виразом, а функцію $f(x)$ – підінтегральною функцією. Ця формула не визначає інтеграл однозначно. Кожному значенню постійної C відповідає певне значення інтеграла, тому інтеграл і називають невизначеним.

Невизначені інтеграли від деяких елементарних функцій приведені в таблиці.

$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C, m \neq -1$	$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right + C$
$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$	$\int \frac{dx}{\cos x} = \ln \left \operatorname{tg} \frac{(x + \pi)}{2} \right + C$

$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$
$\int e^x dx = e^x + C$	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$
$\int \sin x dx = -\cos x + C$	$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$
$\int \cos x dx = \sin x$	$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{x-a}{x+a} \right + C$
$\int \operatorname{tg} x dx = -\ln \cos x + C$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \operatorname{arcsin} \frac{x}{a} + C$
$\int \operatorname{ctg} x dx = \ln \sin x + C$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right + C$

Нехай безперервна функція $f(x)$ задана на сегменті $[a, b]$.

Визначеним інтегралом від функції $f(x)$ назвемо скінченну границю сум виду:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(x_{k+1} - x_k) = \int_a^b f(x) dx$$

у якій $x_i \leq \xi_i \leq x_{i+1}$; x_1, x_2, \dots, x_{n-1} – точки розбиття сегменту $[a, b]$, що розташовані в порядку зростання, $\lambda = \max(x_{k+1} - x_k)$, $0 \leq k \leq n-1$.

Визначений інтеграл, що задається цією границею, називають інтегралом Римана. Числа a, b називають межами інтегрування: a – нижньою, b – верхньою. Згідно з основною теоремою інтегрального числення, для розрахунку визначеного інтеграла використовують формулу:

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Визначений інтеграл є різниця між значеннями первісної функції $F(x)$ на верхній межі інтегрування і на її нижній межі. Визначений інтеграл є числом, на відмінність від невизначеного, який є функцією.

Деякі властивості визначених інтегралів:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx; \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx;$$

$$\int_a^b [u(x) \pm v(x)]dx = \int_a^b u(x)dx \pm \int_a^b v(x)dx; \int_a^b [cu(x)]dx = c \int_a^b u(x)dx$$

Якщо $a = b$ то $\int_a^b f(x)dx = 0$. Якщо для підінтегральної функції виконується

рівність $\int_a^b f(x)dx = 0$, то функція $f(x)$ на сегменті $[a, b]$ дорівнює нулю.

Інтегрування підстановкою (спосіб заміни змінної).

Нехай обчислюється інтеграл

$$\int f(x)dx$$

В деяких випадках вдається вибрати змінну x як функцію нової змінної виду $x = \varphi(t)$. В такому разі підінтегральний вираз набуває вигляду

$$\int f(x)dx = \int f\left(\varphi(t) \cdot \frac{d\varphi(t)}{dt}\right)dt = \int g(t)dt$$

де отримана функція $g(t)$ більш зручна для інтегрування, ніж функція $f(x)$. Якщо в останньому виразі виконати підстановку $t = \omega(x)$, де $\omega(x)$ – обернена до $\varphi(t)$ функція, то повернемося до початкового підінтегрального виразу $f(x)dx$, в якому після обчислення інтегралу необхідно визначити $t = \omega(x)$.

Для обчислення визначеного інтегралу

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{t_a}^{t_b} f\left(\varphi(t) \cdot \frac{d\varphi(t)}{dt}\right)dt = \int_{t_a}^{t_b} g(t)dt$$

необхідно задати нові межі інтегрування, які знаходять із рішення алгебраїчного рівняння

$$a = \varphi(t_a), \quad b = \varphi(t_b)$$

Розглянемо приклад. Нехай необхідно обчислити інтеграл

$$\int (ax + b)^m dx$$

Припустимо $ax + b = t$. Диференціюючи це співвідношення, отримуємо:

$$adx = dt, \quad dx = \frac{dt}{a}$$

Після підстановки в інтеграл маємо:

$$\int (ax + b)^m dx = \frac{1}{a} \int t^m dt = \frac{1}{a} \cdot \frac{t^{m+1}}{m+1} = \frac{1}{a} \cdot \frac{(ax + b)^{m+1}}{m+1} + C$$

4. Прості диференціальні рівняння і методи їх розв'язування

Розв'язування деяких задач механіки зводяться до розв'язування диференціальних рівнянь. З усіх видів диференціальних рівнянь найчастіше в цьому випадку зустрічаються *прості диференціальні рівняння зі змінними, що розділяються*.

Рівняння, що містить незалежні змінні, шукані функції цих змінних і похідні цих функцій, називають диференціальним рівнянням. Якщо невідомі функції, що входять в рівняння, містять тільки одну незалежну змінну, його називають *звичайним диференціальним рівнянням*.

Якщо x – незалежна змінна, а y – шукана функція цієї змінної, то загальний вигляд звичайного диференціального рівняння такий

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

де $y', y'', \dots, y^{(n)}$ – похідні відповідного порядку. Найвищий порядок похідної в цьому виразі називають *порядком* диференціального рівняння.

Диференціальне рівняння першого порядку записують таким чином:

$$F(x, y, y') = 0$$

Для рівняння, розв'язуваного відносно похідної y' його можна переписати у вигляді:

$$y' = f(x, y)$$

Функцію $y = \varphi(x)$, яка диференціюється та задовольняє цьому рівнянню, тобто таку, що перетворює його в тотожність при підстановці в нього значень $y = \varphi(x)$ і $y' = \varphi'(x)$, називають **розв'язуванням** цього рівняння. Знаходження розв'язування диференціального рівняння називають його інтегруванням.

Розглянемо рівняння виду

$$y' = \frac{dy}{dx} = f_1(x)f_2(y)$$

Рівняння такого виду називають рівнянням зі змінними, що розділяються.

Нехай $f_1(x)$, $f_2(y)$ – безперервні функції на сегменті $[a, b]$, до того ж $f_2(y) \neq 0$ на цьому сегменті. Тоді рівняння можна привести до виду:

$$\frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)dx$$

Це перетворення означає, що ми розділили змінні x , y один від одного: перенесли в ліву частину рівності під диференціал dy функцію змінної y , в правій частині залишили функцію змінної x . Після розділення змінних обидві частини рівняння можна проінтегрувати з урахуванням початкових умов:

$$\int_{y_0}^y \frac{dy}{f_2(y)} = \int_{x_0}^x \frac{dx}{f_1(x)}$$

Остання рівність є розв'язуванням початкового диференціального рівняння. Після інтегрування необхідно виразити невідому y як функцію x

5. Задачі

1. Знайти скалярний добуток векторів:

$$\begin{cases} \mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 7\mathbf{k} \\ \mathbf{b} = 2\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 2\mathbf{k} \end{cases} \quad (0)$$

2. При якому значенні m вектори перпендикулярні?

$$\text{а) } \begin{cases} \mathbf{a} = m\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k} \\ \mathbf{b} = 3\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k} \end{cases} \quad (m = 4) \quad \text{б) } \begin{cases} \mathbf{a} = m\mathbf{i} + \mathbf{j} \\ \mathbf{b} = 3\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k} \end{cases} \quad (m = 1)$$

3. Знайти кут між векторами:

$$\text{а) } \begin{cases} \mathbf{a} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k} \\ \mathbf{b} = 6\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k} \end{cases} \quad (\cos(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}) = 2/7) \quad \text{б) } \begin{cases} \mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 5\mathbf{k} \\ \mathbf{b} = 4\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 3\mathbf{k} \end{cases} \quad (\cos(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}) = 17/50)$$

4. Знайти орт напрямку вектора $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$.

5. Знайти векторний добуток:

$$\text{а) } \begin{cases} \mathbf{a} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k} \\ \mathbf{b} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k} \end{cases} \quad (-7\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}) \quad \text{б) } \begin{cases} \mathbf{a} = 2\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + \mathbf{k} \\ \mathbf{b} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k} \end{cases} \quad (-17\mathbf{i} + 7\mathbf{j} - \mathbf{k})$$

6. Нехай задані два вектори:

$$\begin{cases} \mathbf{a} + \mathbf{b} = 11\mathbf{i} - \mathbf{j} + 5\mathbf{k} \\ \mathbf{a} - \mathbf{b} = -5\mathbf{i} + 11\mathbf{j} + 9\mathbf{k} \end{cases}$$

Знайти: \mathbf{a} , \mathbf{b} та кут векторів $(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{a} + \mathbf{b}})$ $(\cos(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{a} + \mathbf{b}})) = 0.53$

7. Задано два вектори:

$$\begin{cases} \mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 5\mathbf{k} \\ \mathbf{b} = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k} \end{cases}$$

Знайти: довжини векторів; скалярний добуток; направляючі косинуси кожного вектора; суму і різницю векторів; векторний добуток.

8. Задано вектор:

$$\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$$

Знайти: його модуль; довжину його проекції $|\mathbf{A}|$ на площині (x, y) .

Побудувати вектор \mathbf{B} , який знаходиться у площині (x, y) і перпендикулярний векторові \mathbf{A} ; побудувати одиничний вектор $\mathbf{B}^* = \frac{\mathbf{B}}{|\mathbf{B}|}$.

9. Розв'язати диференціальне рівняння:

$$\frac{dy}{dx} = (ax + b)^m (c^2 - y^2)$$

Відомо, що при $x = 0$ $y = 0$; $m \neq -1$; a, b, c – додатні постійні.

Розв'язування.

Розділимо змінні:

$$(ax + b)^m dx = \frac{dy}{c^2 - y^2}$$

Проінтегруємо обидві частини рівняння, використовуючи таблицю інтегралів, а також початкові умови:

$$\int_0^x (ax + b)^m dx = \int_0^y \frac{dy}{c^2 - y^2}$$

Після інтегрування отримане співвідношення розв'язуємо відносно функції $y = y(x)$. Отримуємо відповідь:

$$y = c \cdot th \left\{ \frac{cb^{m+1}}{a(m+1)} \left[\left(1 + \frac{ax}{b} \right)^{m+1} - 1 \right] \right\}$$