

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ  
“КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ  
ІМЕНІ ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО”**

**М.І. БОБИР, А.Є. БАБЕНКО, Я.І. ЛАВРЕНКО, О.П. ХАЛІМОН**

**ДИНАМІКА ТА ДОВГОВІЧНІСТЬ  
ВИСОКОШВИДКІСНИХ ПРЕЦИЗІЙНИХ ЦЕНТРИФУГ**

**МОНОГРАФІЯ**

**КИЇВ – 2017**

Рецензенти:

д-р техн. наук, проф. М.К. Кучер

канд. техн. наук, ст.н.с. В.В. Савицький

рекомендовано до друку вченою радою Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського» (протокол № 11 від 04 грудня 2017 р.)

<b>Ш-</b>	<b>Бобир М.І. Динаміка та довговічність високошвидкісних прецизійних центрифуг: Монографія / М.І. Бобир, А.Є.Бабенко, Я.І.Лавренко, О.П.Халімон. – Нац.техн.ун-т України «КПІ імені Ігоря Сікорського». – Київ: А, 2017. – 171с.</b>
-----------	--

**ISBN**

Монографію присвячено визначенню і розрахунку динаміки центрифуги, як багатомасової системи з пружними елементами при врахуванні гіроскопічних ефектів, дисбалансів технологічного та конструктивного походження; встановленню необхідних умов стійкості руху центрифуги, яка дозволяє обґрунтовано формулювати вимоги до конструкції; визначенню параметрів коливального руху центрифуги з врахуванням статичного та динамічного дисбалансу; розрахунку довговічності центрифуги на основі моделі накопичення розсіяних мікропошкоджень.

**ISBN**

УДК 539.3

© М.І. Бобир, А.Є.Бабенко, Я.І.Лавренко

© О.П.Халімон, 2017

© НТУУ «КПІ імені Ігоря Сікорського»

© ТзОВ «Видавництво А», 2017

## ЗМІСТ

Вступ	5
1. Призначення та вимоги до центрифуг. Їх конструкції та їх конструктивні елементи	7
1.1. Центрифуги PICO 21 та Sorvall Legend XF	7
1.2. Умови роботи центрифуг	10
1.2.1. Динаміка центрифуг та визначення динамічних характеристик	13
1.2.2. Особливості динаміки швидко обертових роторів центрифуг	19
1.3. Визначення міцності, працездатності та ресурсу роторів центрифуг	19
1.3.1. Феноменологічні моделі та експериментальні методи визначення пошкоджуваності матеріалів	19
2. Визначення динамічних параметрів центрифуг	35
2.1. Розрахункові моделі	35
2.1.1. Рівняння Лагранжа	36
2.2. Моделювання руху для одномасової системи	38
2.2.1. Фізичні та геометричні параметри системи	38
2.2.2. Вплив гіроскопічного ефекту на власні частоти коливання	39
2.2.3. Вплив статичного дисбалансу	43
2.2.4. Вплив динамічного дисбалансу	45
2.2.5. Вплив статичного і динамічного дисбалансу	52
2.3. Механічні характеристики пружних опор	55
2.3.1. Пружні характеристики	55
2.3.2. Експериментальні дослідження руху центрифуги	60
2.4. Динаміка центрифуги на нелінійнопружній основі	63
2.5. Визначення власних частот коливань центрифуги з врахуванням гіроскопічних ефектів	68
2.6. Рівняння руху центрифуги як багатомасової системи з врахуванням гіроскопічних ефектів	72

2.7. Розрахункова модель трьохмасової центрифуги PICO21	95
2.7.1. Визначення власних частот центрифуги PICO21 з врахуванням гіроскопічного ефекту	95
2.7.2. Вплив статичного і динамічного дисбалансу на рух центрифуги PICO21 з врахуванням гіроскопічного ефекту	104
2.8. Стійкість руху центрифуг	113
3. Визначення напружено-деформованого стану чашки центрифуги	117
3.1. Моделювання динамічної поведінки ротору та чашок	117
3.1.1. Методики розрахунку центрифуги	119
3.2. Експериментальні характеристики руйнування елементів центрифуги	123
3.2.1. Випробувальний стенд (MTS 810)	124
3.2.2. Методика та програма проведення досліджень	125
3.3. Вплив технології виготовлення відповідальних конструктивних елементів на міцність	126
3.4. Напружено-деформований стан чашки лабораторної центрифуги під дією динамічного навантаження і концентрації напружень	132
3.5. Визначення ресурсу при змінних навантаженнях	138
Загальні висновки	156
Список літератури	158

## ВСТУП

Центрифуги складають достатньо широкий клас машин. В різноманітних областях народного господарства широко використовуються технологічні центрифуги. Під впливом відцентрових сил відбуваються процеси сепарації по густині в суспензіях та інших сумішах. Центрифуги використовуються в харчовій промисловості (сепаратори), в медицині, наприклад, при розподіленні крові на плазму та частинки, в атомній промисловості при розділенні ізотопів урану та ін.

Вивчення руху центрифуги відноситься до курсу теорії коливань та стійкості руху, а визначення довговічності до теорії термодинаміки.

**Коливання** - одне з найбільш поширених явищ у природі, фізиці, механіці. Коливання елементів конструкцій часто являються причиною багатьох аварій.

**Довговічність** — властивість об'єкта зберігати роботоспроможний стан (працездатний стан) або виконувати потрібні функції до настання граничного стану при встановленій системі технічного обслуговування і ремонту.

**Ресурс** — сумарний наробіток робочого часу об'єкта від початку його експлуатації чи поновлення після ремонту до переходу в граничний стан. Для деяких об'єктів застосовується ще призначений ресурс, після досягнення якого експлуатацію об'єкта належить припинити незалежно від його стану. Обидва показники визначають у годинах наробітку.

Основою методів розрахунку центрифуг є методи аналітичної механіки, теорії коливань та стійкості руху, теорії пружності та термодинаміки.

## Анотація

Монографія присвячена розв'язанню актуальної науково-практичної задачі розвитку методу розрахунку високошвидкісних прецизійних центрифуг з врахуванням їх динаміки та конструктивних особливостей.

Наукове та практичне значення отриманих результатів полягає у визначенні, по-перше, умов достатніх для забезпечення необхідної якості сепарації та, по-друге, забезпечення необхідного терміну експлуатації. Для виконання першої задачі розроблено метод визначення динамічних характеристик з врахуванням гіроскопічних ефектів на основі нової конструктивної моделі, яка враховує реальну конструкцію роторної системи, та враховує конструкцію пружних опор. Розглянуто вплив статичного і динамічного дисбалансу на коливання, і показано, що вони викликають вимушені коливання, а також визначені необхідні умови стійкості руху.

Для виконання другої задачі створено метод визначення довговічності центрифуги на основі моделі накопичення розсіяних мікропошкоджень, що дає можливість широкого використання для розрахунку елементів конструкцій при повторно-змінному навантаженні з урахуванням пошкоджуваності.

## РОЗДІЛ 1

### ДОСЛІДЖЕННЯ ДИНАМІКИ ЦЕНТРИФУГИ

#### **1. Призначення та вимоги до центрифуг. Їх конструкції та їх конструктивні елементи**

Центрифуги застосовуються для розділення сумішей, які складаються з речовин різної густини, на фракції в різних галузях промисловості, в медичних лабораторіях, сільському господарстві та інш.

Високошвидкісні прецизійні центрифуги повинні забезпечувати високу степінь сепарації суміші і безаварійність протягом терміну експлуатації. Вони мають швидкообертові елементи у вигляді роторів. Для забезпечення високого степеня сепарації необхідна висока швидкість обертання і стійкість руху. Ці вимоги можуть бути забезпечені лише при умові відповідних динамічних характеристик, знання яких дає можливість визначення стійких та нестійких зон руху центрифуги. До швидкообертючих елементів конструкцій різного призначення висувається вимога забезпечення необхідної довговічності, безаварійності та безпечності при експлуатації. Для додаткової безпеки використовується масивна захисна оболонка. Зменшення ваги можливо досягти з підвищенням точності прогнозування довговічності найбільш навантажених конструктивних елементів.

Сучасні відомі розрахунки динаміки центрифуг спрощені і ґрунтуються на моделях з одним тілом, яким є ротор, що обертається, в той час як реальні центрифуги практично є багатомасовою системою. На базі одномасової моделі не можливо отримати необхідну інформацію про спектр власних частот центрифуги і зони нестійкості руху.

Враховуючи сказане, створення методу визначення динамічних характеристик високошвидкісних прецизійних центрифуг є актуальною науково-технічною задачею.

При аналізі типових вимог до центрифуг доцільно розділити їх на наступні:

1. Забезпечення міцності конструктивних елементів і їх з'єднань при вибраних конструкційних матеріалах.

2. Забезпечення необхідних параметрів руху центрифуги.

3. Вимоги вилучення або безпечно проходження резонансних режимів. Центрифуга повинна працювати тільки в нерезонансних режимах, для цього всі власні частоти пружних коливань конструкції повинні бути вище або нижче робочої швидкості обертання при швидкому проходженні резонансних частот при розгоні в процесі виходу на встановлений режим та гальмуванні.

4. Вимоги до технологічності конструкцій, безпеки експлуатації комплексу центрифуги і персоналу від аварійних ситуацій. Всі ці вимоги обов'язково враховуються при проектуванні центрифуг.

### 1.1. Центрифуги PICO 21 та Sorvall Legend XF

#### Центрифуга PICO 21.

Центрифуга Pico 21 (Рис.1.1) є типовим представником сучасної центрифуги, яка поєднує в собі потужність, універсальність, зручність, безпеку, компактність і простоту використання. Центрифуги серії Pico сконструйовані таким чином, що прискорюють процес сепарації за допомогою високої швидкості, а також забезпечують зручність та безпеку.

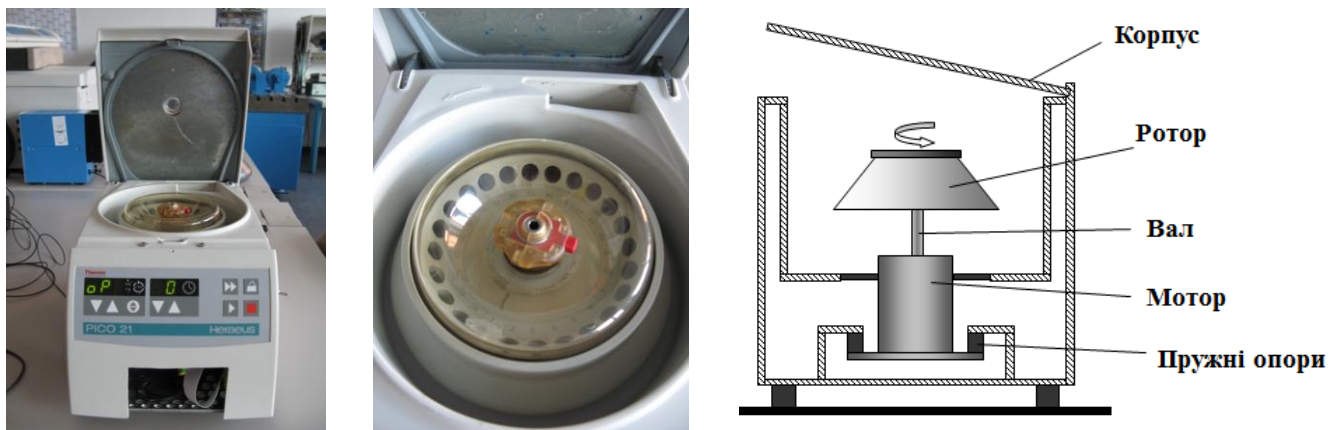


Рис.1.1. Лабораторна центрифуга Pico 21 та її ротор

Висока продуктивність центрифуги Pico забезпечує швидку і ефективну роботу, яка базується на малому часі розгону до робочих швидкостей і гальмуванні (близько 12 секунд), що дозволяє зменшити технологічний цикл обробки.

Центрифуги типу Pico гарантують безпечну роботу в лабораторії. В свою чергу безпека гарантується наявністю захисної оболонки і кришки. Захисна



оболонка виготовляється з досить великим запасом міцності, оскільки термін служби точно не встановлений.

Характеристики центрифуги Рісо 21 наведені в Табл.1.1.

Таблиця 1.1

Характеристики центрифуги Рісо 21

Час безперервної роботи, хв	99, з кроком 1 хв.
Габарити (ШхГхВ), мм	225x243x352
Максимальне значення прискорення, g	21100
Максимальний об'єм центрифуги, мл	24x2
Максимальна швидкість, об/хв	14800
Максимальний шум, дБ	56
Маса, кг	11
Таймер, хв	1...99
Живлення, В	220

**Центрифуга Sorvall Legend XF.**

Головним призначенням центрифуги Sorvall Legend XF є сепарація великої кількості зразків, що поєднується з простотою у використанні. Центрифуги серії Thermo Scientific Sorvall Legend XF (Рис.1.2) гарантують успішне виконання поставленої задачі, максимальну різносторонність у використанні, і виняткову енергетичну ефективність.

Лабораторні центрифуги серії XF застосовуються у широкому діапазоні сепарації сумішей, у тому числі на клітинному рівні, у біовиробництві, фармакології, мікробіології і багато інші.



Рис.1.2 Лабораторна центрифуга Sorvall Legend XF

Характеристики центрифуги Sorvall Legend XF наведені в Табл.1.2.

Таблиця 1.2

#### Характеристики центрифуги Sorvall Legend XF

Час безперервної роботи, хв	99, з кроком 1 хв.
Габарити (ШхГхВ), мм	67x56.5x79см
Маса, кг	152.5
Таймер, хв	1...99
Живлення, В	220

## 1.2. Умови роботи центрифуг

### 1.2.1. Динаміка центрифуг та визначення динамічних характеристик

Швидкий ріст робочих швидкостей механізмів і машин в останнє десятиріччя поставив перед механіками і технікою ряд наукових завдань. Одна з них - визначення динаміки роторів, що працюють за критичними швидкостями.

Центрифуги є одним з механізмів, основною частиною яких є тіло, яке обертається. Ротори та вали є головними елементами більшості енергетичних, електричних та транспортних машин, а також більшості приладів, де вони працюють для передачі крутного моменту або обертального руху.

Основними задачами, які виникають при проектуванні і розрахунку вказаних вище машин і механізмів, є визначення характеру їх руху та працездатності.

Під ротором розуміють симетричне тверде тіло (диск), насаджений на вал, що обертається в опорах. Диференціальні рівняння руху записуються для ротора (дису), а вал в цьому випадку розглядається як безмасова балка, що обертається та зберігає всі пружні властивості.

Ротор або диск розглядається як тверде тіло, на яке діє силою та моментом вал в точці закріплення диска на валу. Загальний рух ротора є сума поступального руху ротора разом з центром мас і обертання ротора навколо центру мас. При цьому обертання навколо рухомого центру мас описується як рух навколо нерухомої точки [1, 2, 3]. Це означає, що можна скористатися динамічними і кінематичними рівняннями Ейлера, і більш простими рівняннями руху симетричного ротора для описання обертання навколо нерухомої точки.

Вивчення закономірностей обертального руху твердого тіла, почалось лише в XVIII столітті та було обумовлене перш за все задачами астрономії.

Задача визначення руху приводить до необхідності розгляду задачі руху тіла з нерухомою точкою. Системне вивчення руху твердого тіла з нерухомою точкою було дано вперше Ейлером у відомій його праці «Рух твердого тіла з нерухомою точкою» (1765), динаміку твердого тіла також досліджували Ж.Л. Лагранж, С.В. Ковалевська, Н.Е. Жуковський, Д.К. Бобильов, В.А. Стеклов, О.О. Андронов, Г.В. Колосов та інші.

В теперішній час суттєві результати по динаміці твердого тіла отримані П.В. Харламовим, Є.І. Харламовою, Д.М. Клімовим, В.В. Румянцевим, В.Н. Кошляковим, В.Г. Деміним та іншими [4].

Дослідження динаміки твердого тіла з нерухомою точкою стимулювалося використанням гіроскопів. Перші вагомні дослідження динаміки зрівноваженого гіроскопу у кардановому підвісі належать Е.Л. Ніколаї [5]. Величезну роль в розробці гіроскопічних приладів відіграв радянський вчений та інженер Н.Н. Остряков. Внесок в розвиток теорії та практики гіроскопічної техніки належить таким вченим як А.Ю. Ішлінському, В.І. Кузнєцову, Н.В. Бутеніну, В.П. Демиденко, А.А. Лапіну, А.А. Одінцову, В.А. Павлову, Я.Н. Ройтенбергу, С.С. Тихмєневу, С.А. Чернікову та іншим [6, 7].

В основі теорії гіроскопів та гіроскопічних явищ лежить кінематика та динаміка твердого тіла, що обертається навколо нерухомої точки.

При аналітичному описі руху твердих тіл та гіроскопів використовують декартові координати. Використовується умовно нерухома або абсолютна система координат  $A\xi_0\eta_0\zeta_0$  з початком в деякій точці простору  $A$  (рис.1.3).

В тілі вибирається довільна точка  $O$  - полюс, яка є початком системи координат:  $O\xi\eta\zeta$  – поступально рухається разом з тілом, осі якої  $O\xi, O\eta$  та  $O\zeta$  паралельні відповідним осям опорної системи координат  $A\xi\eta\zeta$ ;  $Oxyz$  - системи координат, незмінно пов'язаної з тілом.

Обертальний рух можна описати, якщо в будь-який момент часу відоме розташування системи координат відносно системи координат [1, 2].

Положення довільної точки  $M(x, y, z)$  (рис.1.4), визначається радіус-вектором

$$\vec{\rho} = \vec{i} \cdot x + \vec{j} \cdot y + \vec{k} \cdot z, \quad (1.1)$$

де  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  – одиничні вектори (орти) осей .

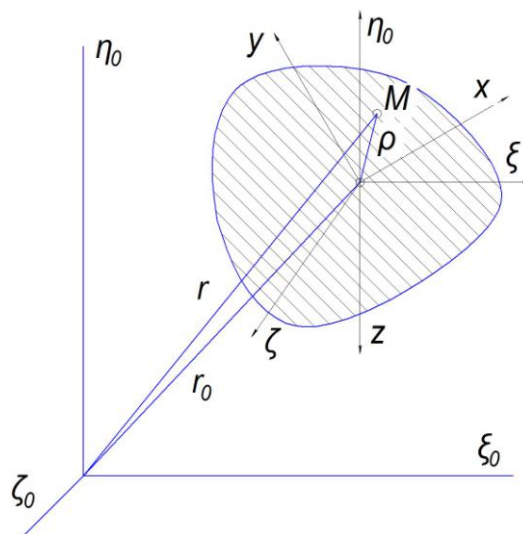


Рис.1.3 Тверде тіло

Так як незалежних параметрів, які визначають поворот системи, тільки три, то для визначення положення достатньо трьох кутів.

Поворот системи в матричній формі:

$$\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

або в більш компактній формі 
$$[\xi \ \eta \ \zeta]^T = \|a_{ik}\| \cdot [x \ y \ z]^T. \quad (1.3)$$

Всі дев'ять направляючих косинусів, які виражаються через тригонометричні функції кутів Ейлера або Крилова, знайшли застосування не тільки при вивченні обертового руху гіроскопів, але і всіх рухомих об'єктів (літаків, човнів, ракет та ін.).

Особливості руху ротора розглядалися багатьма дослідниками, такими як Лаваль, Позняк, Ньюкірк, Пановко, Кельзон та ін. [8, 9, 10, 11]. Необхідно відмітити їхні наступні експериментальні висновки.

Ротор Лавалья має жорсткі опори. Змінюючи діаметр валу, Лаваль експериментально прийшов до парадоксального висновку, що тільки зменшуючи діаметр валу «до діаметра пальця» можна створити працездатну турбіну [12].

Позняк, в свою чергу, приводить [8, 9] наступні дані: «Ньюкірк помітив, що вал, критична швидкість якого 1000 об/хв, при швидкості обертання 2500 об/хв та вище, починає рухатись в напрямку обертання з кутовою швидкістю, рівною критичній, тобто прецесіювати».

Особливий рух має симетричний ротор з жорсткими опорами, гнучким валом та малими зазорами в опорах. Зазори практично відсутні, так як найменший перекис веде до «заклинювання валу». Особливість руху таких роторів наступна: «Експлуатація роторів можлива практично до швидкостей, не більших, в середньому, подвоєної критичної швидкості ротора, так як за цією швидкістю існує зона інтенсивних автоколиваний, перехід через яку практично неможливий» [12]. Однак, це ознака нестійкості. Посилання на автоколивання пояснюється некоректністю теорії. Проходження зони автоколивання завжди можливе. Тракування нестійкості у вигляді автоколивання прийнята у всій існуючій літературі [9,12,13,14,15,17].

В дослідях Кельзона [12,16] показано, що жорсткий ротор на жорстких опорах з центральним диском не самозбурюється при переході через першу критичну швидкість, як це властиво всім іншим роторам, але самозбурюється

при проходженні другої критичної швидкості.

В першому наближенні центрифуга являє собою циліндр, який обертається навколо вертикальної вісі, і приводиться в рух електродвигуном, ротор якого, розташований на тій же самій вісі, а статор та корпус закріплені на пружних опорах. Опори сконструйовані таким чином, що дозволяють центрифугі повертатись відносно нерухомих осей, причому жорсткість при повороті відносно них однакова.

Рух центрифуги складається з обертального руху відносно власної вісі симетрії та обертання навколо нерухомих осей. Оскільки корпус закріплений на пружних опорах, то при малих переміщеннях пружні сили, які діють з боку опор, можна вважати слабо нелінійними з м'якою характеристикою.

Відмічено [23] зростання критичних швидкостей зі зростанням жорсткості опор. В [24] розроблена та показана на прикладі двоопорного ротору методика, яка дозволяє «проводити розрахунки критичних частот обертання ротору з врахуванням піддатливості опор, використовуючи результати одноразового розрахунку ротора, звільненого від опор».

Крім відомих двох критичних швидкостей, експериментально відзначено появу третьої критичної швидкості [12]. Особливість цієї критичної швидкості «виражається в різкому збільшенні реакцій і згинальних моментів» [25, 26] в зоні її появи. Причини виникнення вищих критичних швидкостей пов'язані з наявністю зазорів в опорах.

Зі збільшенням кутових швидкостей, пружні деформації осі ротора гіроскопа можуть помітно впливати на його рух. Одна з перших робіт, присвячена динаміці гіроскопа з пружною віссю, належить Магнусу [27,28]. Пізніше коливання вільного гіроскопа з пружним валом досліджувались Маундером та Уіппелом [29,30]. Стійкість руху гіроскопа з врахуванням пружних властивостей осі ротора розглядали В.В. Крементуло [31].

В механічній системі, що включає в себе тіла, які обертаються, виникають коливальні рухи. В залежності від конструкції, система має різні власні частоти. Рух механічної системи, у якій ротор розташований посередині підшипникових вузлів, розглянуто досить широко [18-22,32,33].

Найпростішими задачами про коливання валу з диском, площина якого здатна відхилятися від початкового положення, є задачі про двохопорний вал з розташованим на ньому диском. Особливістю коливань таких валів є те, що прогин перетину валу, де прикріплений диск, супроводжується поворотом перетину, тому відхилення центру валу супроводжується поворотом площини диску і, відповідно, прецесією. Прецесія викликає додаткові сили, що виникають в наслідок дії гіроскопічних моментів [18-22,33].

Центрифуга, як і гіроскоп, схематизується у вигляді симетричного абсолютно твердого тіла, насадженого на гнучкий вал, масою якого можна знехтувати. Точка опори  $O$  гіроскопа нерухома.

Рух твердого тіла вважається відомим, якщо в любий момент часу  $t$  відоме положення кожної точки тіла.

Одним з можливих підходів до вивчення питань динаміки твердого тіла є використання методу кінетостатики. В цьому випадку до сил, що діють на тіло, додаються сили інерції його частинок в результаті чого задача динаміки перетворюється в задачу статички, яка і вирішується відомими методами статички твердого тіла. Такий підхід можливий тоді, коли рух тіла задано, а визначаються ті чи інші прикладені до нього сили. При вирішенні задачі динаміки твердого тіла методом кінетостатики доцільно скласти сили інерції частин тіла за правилами статички в одну силу та одну пару. Головний момент сил інерції твердого тіла, який відіграє суттєву роль в теорії гіроскопічних явищ, називається гіроскопічним моментом. Головний вектор сил інерції вираховується завжди просто, складніше вираховується гіроскопічний момент.

Центрифугу з ротором, який обертається, є системою з багатьма степенями свободи. При складанні диференціальних рівнянь руху таких систем можна використати теорему про зміну моменту кількості руху.

Якщо швидкість обертання валу та моменти інерції, насаджених на нього дисків, відносно невеликі, то частоту власних коливань валу можна визначити за тими ж формулами, що і частоту коливань балки з вантажем.

В протилежному випадку вагомий вплив на характер коливань мають моменти

сил інерції, які виникають в наслідок кутових переміщень осей мас, що обертаються.

Рух диска, посаженого на невагомий вал, що обертається з кутовою швидкістю  $\omega$  розглянуто в [17,33-37]. В результаті пружних деформацій валу вісь обертання диска  $z_1$  створює з нерухомими координатними площинами  $zy$  та  $zx$  малі кути  $\vartheta_x$  та  $\vartheta_y$  (рис.1.4). Моменти інерції диска відносно пов'язаних з ним осей  $x_1$ ,  $y_1$ ,  $z_1$  позначимо:  $I_{z_1} = I_0$ ;  $I_{x_1} = I_{y_1} = I_1$ .

Для визначення моментів, що впливають на диск з боку валу, використано теорему, про зміну моменту кількості руху, яка дорівнює моменту зовнішніх сил.

Кутова швидкість обертання диска відносно осі  $z_1$  дорівнює  $\omega$ , відповідно момент кількості руху відносно цієї осі  $L_{z_1} = I_0 \cdot \omega$ .

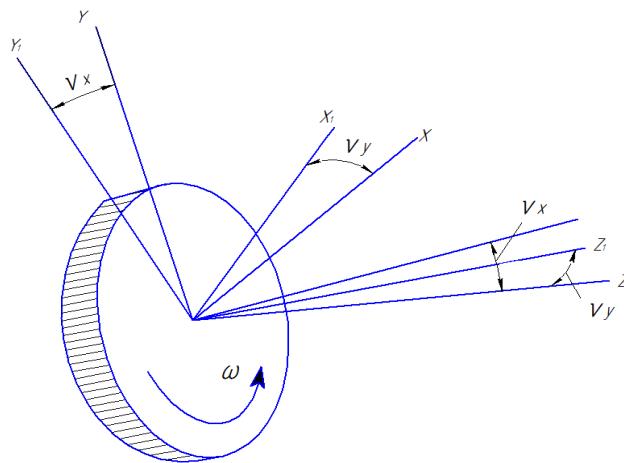


Рис.1.4 Кути Ейлера-Крилова

Для визначення положення тіла вибирають нерухому систему координат  $\xi, \eta, \zeta$  та рухому, пов'язану з ротором центрифуги  $x, y, z$ .

Розглядається ротор, що обертається навколо вісі симетрії  $x$  з кутовою швидкістю  $\omega$ . Рухома система координат  $x_1, y_1, z_1$  співпадає з головними осями інерції в нерухомій точці, якою являється пружна опора, де реакції пропорційні переміщенням, а моменти пропорційні кутам повороту.

При дослідженні резонансних випадків необхідно враховувати характер розсіювання енергії.



Як показують експериментальні дослідження [38-41], при пружних коливаннях механічних систем основна частина енергії розсіюється внаслідок неідеальної пружності матеріалів та мікрозміщень, в так званих нерухомих з'єднаннях (гвинтових, клепаних та ін.), які мають характерну петлеподібну залежність сили від переміщення (рис.1.5) при циклічній деформації.

При цьому, конструкцією приладу поглинається частина роботи зовнішніх сил, яка переходить в теплову енергію, а потім розсіюється. Відмінна особливість демпфування, що розглядається, в тому, що воно пропорційне не відносній швидкості, а амплітуді деформації. Детальні дослідження моменту пружного дебалансу наведені в роботі [38-41].

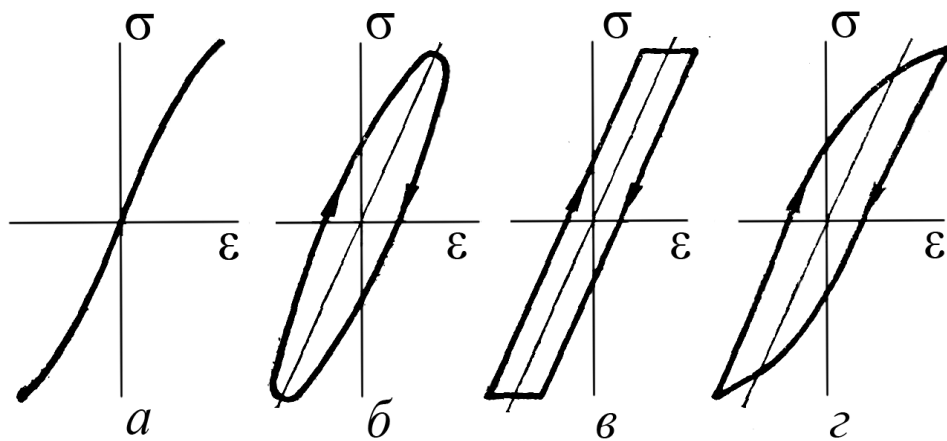


Рис.1.5. Криві циклічного деформування матеріалів: а – ідеально-пружного; б – в'язко-пружного; в – пружно-пластичного; г – реального.

Демпфірування є важливим засобом зниження вібрації роторів [39,40,42-47]. Першою роботою в цьому напрямку являється робота [48]. Активно розвиває цей напрямок Кельзон. В [44] відмічається: «Промислові турбомашини з налагодженими демпферами працюють стійко при будь-яких швидкостях обертання роторів».

Але особливість даної проблеми полягає в тому, що коефіцієнти демпфірування в опорах та в матеріалі вала невідомі. Це ускладнює аналіз та практичне рішення багатьох задач руху роторів та валів. Коефіцієнти демпфірування визначаються експериментально, що являється однією з причин експериментального випробування роторів.

При всьому різноманітті літератури по демпфіруванню на практиці коефіцієнт демпфірування пружно-в'язкої лінійної системи визначається (у випадку вимушених коливань з частотою  $\omega$ ) за однією з формул

$$b = \frac{c\psi}{2\pi\omega}, \quad b = \frac{c\delta}{\pi\omega}, \quad (1.7)$$

де  $\psi$  - коефіцієнт поглинання,  $\delta$  - логарифмічний декремент затухання,  $\psi = 2\delta$ ,  $c$  - жорсткість системи.

Перша з формул (1.7) приведена в роботі [49]. Параметр  $\psi$  (або  $\delta$ ) визначається експериментально. Потім за однією з формул (1.7) знаходиться  $b$ . Відзначимо, що даний алгоритм знаходження коефіцієнту демпфірування розроблений для лінійної пружно-в'язкої системи з одним ступенем вільності у відповідності з умовною пружно-в'язкою схемою Пановко [10, 11].

Але ротор це система з трьома степенями вільності. В загальному випадку для ротору необхідно одночасно знайти три коефіцієнти демпфірування (для опор та для валу). Крім того, демпфірування має місце при вільних коливаннях ротору внаслідок деформації валу. Тому постає задача знаходження формул, аналогічних (1.7), але для вільних коливань лінійної в'язко-пружної системи.

З практики експлуатації машин відомо, що вали, які обертаються, попадаючи в резонанс, стають динамічно нестійкими. Тому є необхідність визначення власних частот коливань роторних систем, щоб уникнути появи резонансу. Крім цього, необхідний розрахунок статичних та динамічних напружень, що виникають, для цілеспрямованого пояснення міцності машин.

Разом з пошкодженням обладнання при надкритичних швидкостях спостерігається велике відхилення ротору від осі обертання або тертя ротора по захисному кожуху в корпусі. Необхідно уникати нестабільності в лабораторних центрифугах, так як вона створює небезпеку для обслуговуючого персоналу та, при певних обставинах, для навколишніх будівель через кінетичну енергію. Сучасні лабораторні центрифуги працюють в межах швидкості обертання до 30 000 об./хв. в залежності від двигуна.

### **1.2.2. Особливості динаміки швидко обертових роторів центрифуг**

В широкому діапазоні кутових швидкостей обертання, ротор на опорах слід розглядати як динамічну коливальну систему в якій можуть виявлятися ефекти резонансних коливань з великими, іноді небезпечними, амплітудами. Явища резонансу виявляються найчастіше при співпадінні частоти обертання з однією з власних частот конструкції ротора.

При обертанні ротора з фіксованою кутовою швидкістю, для більшості машин під час розрахунку та проектування ставиться завдання відстроювання власних частот від кутової швидкості обертання. Якщо можливо, конструкцію виконують досить жорсткою, так, щоб нижня власна частота коливань була вище кутової швидкості обертання, і тоді гарантується робота в дорезонансному режимі. Але, для багатьох швидкохідних машин, необхідна висока жорсткість недосяжна, тоді допускають режим роботи зарезонансний або в проміжку між якими-небудь двома основними резонансними частотами. При цьому в режимах розгону та гальмування динамічно небезпечними стають перехідні режими проходження через резонанс, який потрібно проходити досить швидко.

## **1.3. Визначення міцності, працездатності та ресурсу роторів центрифуг**

### **1.3.1. Феноменологічні моделі та експериментальні методи визначення пошкоджуваності матеріалів**

В залежності від призначення та конкретних вимог до центрифуги оцінюються такі властивості, як запас міцності, надійність функціонування, зберігання точності та інше. Головною задачею конструювання є забезпечення надійності. У зв'язку з різними умовами функціонування, промисловість підтримує широкий діапазон роторів і адаптерів для лабораторних центрифуг.

Однією із актуальних проблем проектування центрифуги є проблема підвищення і прогнозування довговічності елементів конструкцій. Вимоги підвищення продуктивності при одночасному зменшенні їх ваги супроводжуються збільшенням динамічних навантажень та впливу вібрацій. Руїнування

конструктивних елементів роторів в лабораторних центрифугах створює потенційну небезпеку під час експлуатації.

До центрифуги висуваються вимоги, що за гарантований термін роботи повинна бути забезпечена безаварійність та безпечність. Ці вимоги забезпечуються тим, що центрифуга не повинна руйнуватись на протязі гарантованого терміну роботи і наявністю протиаварійної оболонки.

Наявність захисної оболонки центрифуги та запасом міцності призводить до збільшення ваги центрифуги. В деяких випадках вага центрифуг досягає 150 кг, з яких на захисну оболонку центрифуги припадає до 80 кг.

Зменшення загальної ваги центрифуги можна досягти за рахунок підвищення точності прогнозування терміну експлуатації механізму [50]. Для прогнозування ресурсу необхідно точне визначення їх напружено-деформованого стану і механічних властивостей матеріалу [51].

Оскільки елементи центрифуги працюють при змінних навантаженнях, необхідно враховувати циклічну міцність, оскільки ресурс обчислюється біля 40 000 циклів, деталі працюють при малоцикловій втомі.

На ряду з малоцикловою втомою можлива і наявність звичайної втоми, яка пов'язана з вібрацією. Отже постає питання дослідження динамічних характеристик.

В теперішній час прогнозування ресурсу до виникнення тріщин базується на уявленні про пошкоджуваність матеріалу.

Перші роботи з пошкоджуваності, - Л.М. Качанова і Ю.М. Работнова виділилися в окремий напрямок – механіку пошкоджених середовищ. Найбільший внесок у теорії пошкоджуваності внесли З.П. Бажант, А.Л. Гурсон, О.А. Іллюшин, Л.М. Качанов, Д. Крячинович, Д. Леметр, С. Мураками, В.В. Новожилов, Ю.М. Работнов, В.П. Тамуж, Б. Твергаард [52-59].

Основний внесок у розвиток сучасних теорій пластичності, здатних описати особливості пластичного деформування при складному навантаженні, внесли роботи С.Б. Батдорфа, Б. Будянського, И.Ф. Бесселінга, Д.К. Друкера, Д.Д. Івлева, О.А. Іллюшина, Ю.И. Кадашевича, Д. Коларова, В.С. Ленського, М.Я. Леонова,

Т.Х. Ліня, З. Мроза, В.В. Новожилова, Дж. Райса, К.М. Русинка, Дж.В. Хатчінсона, Р. Хілла, Ю.А. Чернякова, Н.Ю. Швайка, Ю.М. Шевченка.

Механіка пошкоджень вивчає механізми, що діють в матеріалі навантаженні, використовуючи методи оцінки деградації їх механічних властивостей. На мікрорівні це накопичення додаткових напружень поблизу дефектів або границь розділу та руйнування зв'язків. На мезорівні це ріст та об'єднання мікротріщин або мікропустот, які разом ініціюють одну тріщину. На макрорівні це ріст тріщини. Перші два рівні можуть вивчатися за допомогою змінних пошкоджуваності механіки суцільного середовища, які визначаються на мезорівні. Третій рівень вивчається механікою руйнування за допомогою змінних, які визначаються на макрорівні [60].

Особливістю процесу опору матеріалу малоциклового навантаженню є необхідність враховувати нестационарність циклів та діаграми деформування. В зонах підвищеної концентрації дійсних напружень відбувається більш інтенсивне накопичення та ріст мікродфектів та неоднорідностей структури, що призводить до передчасного утворення макротріщини та руйнування. Найбільш сильно викладений вище ефект проявляється для випадку складного навантаження по замкнених траєкторіях, при яких має місце значна зміна та нестационарність механічних характеристик матеріалу [61-72]. Цим обумовлюється введення параметрів, які описують накопичення пошкоджуваності в конструкційному матеріалі, до розрахунку ресурсу при малоцикловій втомі.

В цілому проблема малоциклової втоми машин та конструкцій вирішується згідно основним напрямкам та етапам, що приведені на рис.1.7. Використання параметрів пошкоджуваності в розрахунку ресурсу (на рис.1.6 показані пунктиром) дозволяє визначити граничні довговічності, накоплені пошкодження, залишковий ресурс, що підвищує точність названого розрахунку, наслідком чого слугує можливість зменшення запасу міцності та затрат матеріалу без значного впливу на надійність.

Розрізняють дві стадії руйнування: докритичну та закритичну. На першій, найбільш тривалій стадії, має місце пружно-пластичне деформування, яке сприяє

зародженню та збільшенню розмірів мікротріщини. На другій стадії виникає лавиноподібне руйнування, яке в більшості випадків, виражається в швидкому рості макротріщини.

Ключовими параметрами, для розв'язку задачі довговічності при складному малоцикловому навантаженні, є закон накопичення мікропошкоджень, який дозволяє оцінити залишковий ресурс та критерій зародження макротріщини, визначає строк експлуатації та граничні довговічність; живучість, яка визначає час життя конструкції із вже утвореною макротріщиною.



Рис.1.6. Схема вирішення проблеми малоциклової міцності елементів конструкцій [73].

Авторами [64-66,73-77] показано, що вплив пошкоджуваності на довговічність матеріалу при малоцикловій втомі настільки великий, що в загальному випадку

розрахунок ресурсу конструкційного матеріалу можна замінити розрахунком довговічності на стадії зародження макротріщини.

За параметр, що відображає процес накопичення пошкоджуваності в конструкційному матеріалі приймається функція  $D$ , яка обумовлює зміну суцільності, а отже несучої здатності матеріалу завдяки росту кількості та розмірів будь-яких мікродфектів в процесі термосилового навантаження, наслідком чого є утворення макротріщини [70,75,78-88]:

$$D = f(\varepsilon_{ip}, \sigma_i, T, t, N...), \quad (1.8)$$

де  $\varepsilon_{ip}$  та  $\sigma_i$  - інтенсивність пластичної деформації та напружень відповідно,  $T$  - температура,  $t$  - час,  $N$  - кількість циклів втомного навантаження.

В загальному випадку складного термосилового навантаження, завдяки неоднорідності розподілу структурних, механічних та силових компонент в конструкційному матеріалі, параметр пошкоджуваності виражається векторною (в залежності від напрямку в матеріалі) [89,90] або тензорною величинами [57,78,82,91,92].

$$D_{ij} = \begin{vmatrix} \frac{1}{1-D_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1-D_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{1-D_3} \end{vmatrix}. \quad (1.9)$$

Згідно гіпотези Я.Б.Фрідмана [93-95] процес руйнування матеріалу можна розглядати, як сукупність дії двох механізмів руйнування – відриву та зсуву, що охоплює в'язке, крихке та в'язкокрихке руйнування. Авторами [96,97] було показано, що у випадку зсуву також існує явище пошкоджуваності. Таким чином процес руйнування матеріалу при складному напруженому стані визначається, як сукупна дія відриву та зсуву. При цьому параметр пошкоджуваності можна виразити, як векторну суму [98]:

$$\vec{D} = \vec{D}_\sigma + \vec{D}_\tau, \quad (1.10)$$

де  $\vec{D}_\sigma$  - вектор пошкодженості в матеріальній точці в напрямку відриву, а  $\vec{D}_\tau$  - вектор пошкодженості в напрямку зсуву.

Для ізотропного конструкційного матеріалу в першому наближенні можна прийняти параметр пошкодженості  $D$  як скалярну величину [57,78,79,88,99].

У зв'язку із великою кількістю мікрodefektів та дуже малим їх розміром представляється фактично не можливим проведення прямих досліджень та базування теорій пошкодженості на прямих вимірах розмірів та кількості мікрodefektів. Тому широко використовується опис та дослідження пошкодженості за допомогою непрямих методів, що пов'язують параметр пошкодженості із зміною іншого макроскопічного механічного параметру [57,64,75,79,88,99] або імовірнісного підходу за допомогою статистичних функцій розподілу мікрodefektів в об'ємі [100-102].

Авторами [79,88,99] було запропоновано визначати параметр пошкодженості наступним чином

$$D = \left[ 1 - \frac{\tilde{\rho}}{\rho} \right]^{\frac{2}{3}}, \quad (1.11)$$

де  $\rho$  - початкова величина щільності,  $\tilde{\rho}$  - після деформування.

Авторами [97,103] запропоновано визначати пошкодженість через зміну питомого електричного опору матеріалу

$$D = 1 - \frac{\omega_i}{\omega_0} = 1 - \frac{F_i U_i l_0 I_0}{F_0 U_0 l_i I_i} \quad (1.12)$$

де  $\omega_i$  та  $\omega_0$  - питомий електроопір в поточний та початковий момент часу;  $F_i$ ,  $F_0$ ,  $U_i$ ,  $U_0$ ,  $l_i$ ,  $l_0$ ,  $I_i$ ,  $I_0$  - площа поперечного перетину, напруга, довжина зразка, сила електричного струму в поточний та початковий момент часу відповідно.

Як показано на рис.1.7. зміна густини матеріалу носить нелінійний характер та пов'язана з рівнем пластичної деформації.

У роботах [104,105] використовується цей метод для визначення пошкодженості як сукупність малих внутрішніх тріщин, в роботі [92] за



допомогою вищезазначеного методу визначається пошкодженість при багатоцикловій втомі.

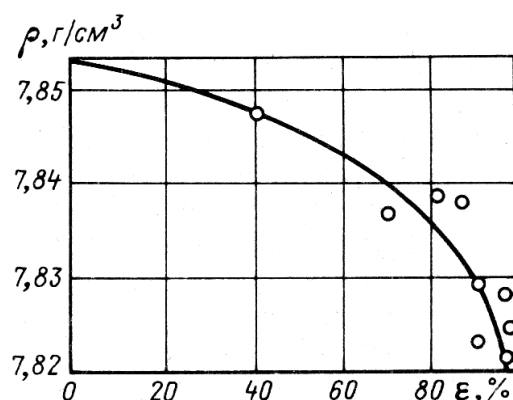


Рис. 1.7. Зміна густини від рівня пластичної деформації технічного заліза 0.07% для умов статичного розтягу при  $T=293\text{K}$  [94]

Для практичного розрахунку, як окремий випадок зміни об'єму, більш доцільним є врахування зміни площі робочого перерізу внаслідок розвитку мікродфектів. Такий вид опису пошкодженості було запропоновано Л.М.Качановим [73,74] та Ю.М.Работновим [53,83]. Підхід має на увазі введення феноменологічного параметра пошкодженості, який є відношенням несучої (ефективної) площі перетину без мікродфектів до загальної площі перетину [100, 106-109].

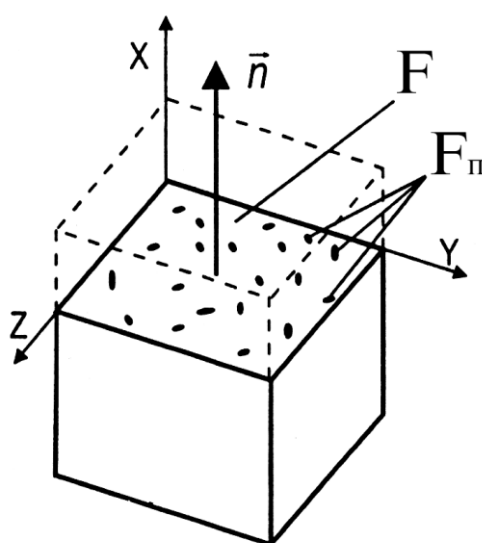


Рис 1.8. Схема пошкодженого елемента матеріалу:  $F$  - загальна площа перерізу,  $F_{II}$  - площа мікродфектів в матеріалі

Таким чином (рис.1.8) ефективна площа прийме вигляд

$$\tilde{F} = F - F_{II}, \quad (1.13)$$

де  $F$  - загальна площа перерізу,  $F_{II}$  - площа мікроефектів в матеріалі.

Змінна пошкоджуваності  $D$  може бути виражена [100,106-109]

$$D = \frac{F - \tilde{F}}{F}, \quad (1.14)$$

де  $F$  - загальна площа перерізу,  $F_{II}$  - площа мікроефектів в матеріалі,  $\tilde{F} = F - F_{II}$  - ефективна площа.

Багатьма дослідженнями [53,57,73,74,96,108-110] було показано, що розпушування матеріалу викликає зміну інших механічних характеристик матеріалу. Таким чином було запропоновано визначати змінну пошкоджуваності через модуль пружності (розвантаження) [108-110]

$$D = \frac{E - \tilde{E}}{E}, \quad (1.15)$$

де  $E$  та  $\tilde{E}$  - початкове та поточне значення модуля пружності першого роду відповідно. Або згідно залежності

$$D = 1 - \sqrt{\frac{\tilde{E}}{E}}. \quad (1.16)$$

Визначення параметру  $D$  в залежності від зміни пластичності матеріалу [51,76] може бути представлено

$$D = 1 - \left[ \frac{\tilde{\delta}}{\delta} \right]^{\frac{1}{m}}, \quad (1.17)$$

де  $\delta$  - початкове значення ширини петлі пластичного гістерезису,  $\tilde{\delta}$  - після деформування,  $m$  - параметр матеріалу.

Або завдяки варіації мікротвердості матеріалу в зоні пошкодження [51,76]

$$D = 1 - \frac{H}{H_0}, \quad (1.18)$$

де  $H$  та  $H_0$  - мікротвердість пошкодженого та непошкодженого матеріалу відповідно.

У роботах [75,83] визначення пошкоджуваності матеріалу визначалась як зміна об'єму деформованого матеріалу за рахунок його розпушування в процесі деформування у порівнянні з металом у вихідному стані. Результати експериментів дають

$$\Delta V = 1.05(e^{0.16\varepsilon} - 1). \quad (1.19)$$

В роботах [111,112] було відзначено, що однієї змінної пошкоджуваності недостатньо для повного опису стану ізотропно пошкодженого матеріалу. Було запропоновано описати пошкоджуваність в матеріалі за допомогою подвійних скалярних змінних пошкоджуваності. Згідно запропонованій теорії у якій розглядаються величини для визначення пошкоджуваності матеріалу.  $D_E, D_\nu, D_G, D_K$ , які визначаються через модуль Юнга  $E$ , коефіцієнт Пуассона  $\nu$ , модуль зсуву  $G$  та об'ємний модуль  $K$ :

$$D_\nu = 1 - \frac{\tilde{\nu}}{\nu}; \quad D_G = 1 - \frac{\tilde{G}}{G}; \quad D_K = 1 - \frac{\tilde{K}}{K}, \quad (1.20)$$

де величини з рискою означають пошкоджений стан, а величини без риски – початковий стан матеріалу. Таким чином ізотропна пошкоджуваність може бути охарактеризована двома скалярними змінними пошкоджуваності.

Закон циклічної пластичності в умовах стабілізації може бути записаний як відношення між амплітудним напруженням ( $\Delta\sigma$ ) та амплітудним значенням пластичної деформації ( $\Delta\varepsilon^{(p)}$ ):

$$\Delta\varepsilon^{(p)} = \left( \frac{\Delta\sigma}{K_p} \right)^M \quad \text{– непошкоджений матеріал;} \quad (1.21)$$

$$\Delta\varepsilon^{(p)} = \left( \frac{\Delta\sigma}{K_p(1-D)} \right)^M \quad \text{– пошкоджений матеріал.} \quad (1.22)$$

Розглядаючи експеримент при сталій амплітуді пластичних деформацій, позначивши  $\Delta\sigma^*$  – амплітуду напружень при стабілізації наприкінці циклічного зменшення або періоду зміцнення та перед початком процесу пошкодження:

$$\Delta\varepsilon_p = \left( \frac{\Delta\sigma^*}{K_p} \right)^M = \left( \frac{\Delta\sigma}{K_p(1-D)} \right)^M. \quad (1.23)$$

Звідки

$$D = 1 - \frac{\Delta\sigma}{\Delta\sigma^*}. \quad (1.24)$$

Особливо перспективним представляється використання механіки континуальної пошкоджуваності в задачах механіки тріщин та розрахунку довговічності елементів конструкцій. Однак таке фундаментальне питання механіки континуальної пошкоджуваності, як ідентифікація поняття пошкоджуваності та побудова адекватних еволюційних рівнянь для функції пошкодження на сьогодні залишається відкритим.

Нижче наведено таблицю (Табл.1.1) порівняння вищенаведених експериментальних методів визначення пошкоджуваності матеріалу для різних умов технологічного та експлуатаційного навантаження [60]:

Таблиця 1.1

Порівняльна таблиця експериментальних методів визначення пошкоджуваності

Метод	Рівняння	Крихке руйнування	В'язке руйнування	Повзучість	Малоциклова втома	Багатоциклова втома
Мікрографія	$D = \frac{\partial S_D}{\partial S}$	*	**	**	*	*
Щільність	$D = \left( 1 - \frac{\tilde{\rho}}{\rho} \right)^{2/3}$		**	*	*	
Модуль пружності	$D = 1 - \sqrt{\frac{\tilde{E}}{E}}$	**	***	***	***	
Ультразвукові хвилі	$D = 1 - \frac{\tilde{v}_L^2}{v_L^2}$	***	**	**	*	*
Амплітуда напружень	$D = 1 - \frac{\Delta\sigma}{\Delta\sigma^*}$		*	*	**	*

Мікротвердість	$D = 1 - \frac{H}{H_0}$	**	***	**	***	*
Електричний опір	$D = 1 - \frac{U}{\tilde{U}}$	*	**	**	*	*

Відповідно до концепції лінійного додавання пошкоджуваності Пальмгрена-Майнера-Робинсона [78] змінна пошкоджуваності записується наступним чином

$$D(t) = \sum_{i=1}^k \frac{\Delta t_i}{t_R(\sigma_i, \theta)} \Rightarrow D(t) = \int_0^t \frac{d\tau}{t_R(\sigma_i, \theta)} \quad (1.25)$$

або

$$D(n) = \sum_{i=1}^k \frac{\Delta n_i}{n_R(\sigma_i, \theta)} \Rightarrow D(n) = \int_0^n \frac{dn_i}{n_R(\sigma_i, \theta)}, \quad (1.26)$$

де  $\Delta n_i, \Delta t_i$  - тривалість ступеня навантаження при  $\sigma_i = const$ ;  $n_R(), t_R()$  - число циклів та час до руйнування при  $\sigma_i = const$ ;  $\sigma_i$  - напруження,  $\theta$  - температура,  $i$  - число ступенів навантаження. Однак експериментально встановлено, що в більшості практично важливих випадків навантаження лінійна гіпотеза складання пошкоджень призводить до великих кількісних похибок.

Вважається, що кількість циклів до руйнування є сума кількості циклів  $N_0$  для досягнення порогового значення мікропошкоджень  $\varepsilon_{pD}$  (значення пластичної деформації, при якому стає відчутна (з'являється) пошкоджуваність) та кількості циклів  $N_D$  під час яких ініціюється тріщина на макрорівні [60,76]:

$$N_R = N_0 + N_D. \quad (1.27)$$

Кількість циклів  $N_0$  знаходять за допомогою класичного пружного рівняння без будь-якого зв'язку з пошкоджуваністю, коли  $D = 0$ . В цьому випадку  $\varepsilon_0 = \varepsilon_{ny}$ , де  $\varepsilon_{ny}$  - пластична деформація, яка відповідає границі пропорційності  $\sigma_{ny}$ . В

загальному випадку зв'язок  $N_D$  з  $N_0$  має вигляд  $N_D = \left( N_0^a + B \right)^a$ , де  $a$  та  $B$  -

константи, що залежать від властивостей матеріалу [60,76,113]. При періодичному

навантаженні з постійною шириною петлі пластичного гістерезису  $\delta$  згідно [76] можна записати

$$N_0 = \frac{\varepsilon_{pD}}{2\delta} \quad \text{та} \quad N_D = \frac{4ESD_R}{K_p^2} \delta^{\frac{-(M+2)}{M}}, \quad (1.28)$$

де  $E$  - модуль пружності,  $\delta$  - ширина петлі пластичного гістерезису,  $D_R$  - критичне значення змінної пошкоджуваності,  $S$  - параметри матеріалу [57,60,79,104].

Циклічний зв'язок між  $\delta$  та  $\Delta\sigma$  визначається, як

$$\delta = \left[ \frac{\Delta\sigma}{K_p(1-D)} \right]^M, \quad (1.30)$$

де  $K_p$  та  $M$  - параметри матеріалу.

Кінетичне рівняння накопичення пошкоджуваності, аналогічно до випадку повзучості, в загальному вигляді можна записати наступним чином [78,82]

$$\frac{dD}{dN} = C \left[ \frac{\sigma}{(1+D^r)} \right]^{m_1} \frac{1}{(1-D)^{m_3}} D^{m_2}, \quad (1.31)$$

де  $C, m_1, m_2, m_3, r$  - коефіцієнти, що визначаються з простого експерименту.

У роботах Новожилова В.В. кінетичне рівняння для параметра пошкоджуваності записується у вигляді:

$$\frac{dD}{dL} = \lambda P, \quad (1.32)$$

де  $L$  - довжина дуги пластичного деформування,  $P$  - інтенсивність залишкових напружень.

Або

$$\frac{dD}{dL} = f(\varepsilon_i^{(p)}). \quad (1.33)$$

Однак, область застосування рівняння (1.33) обмежена, оскільки воно не враховує вплив історії деформування на швидкість росту пошкоджуваності. Для врахування впливу історії деформування запропоноване кінетичне рівняння пошкоджуваності у вигляді:

$$\frac{dD}{dL} = f \left[ \sqrt{\frac{2}{3}} \rho(P, O) \right], \quad (1.34)$$

де  $\rho(P, O)$  – відстань між точкою, яка відповідає недеформованому стану та точкою миттєвого деформованого стану. Або, враховуючи те, що відстань відраховується від початку координат асиметрія відносно  $O$  має значний вплив на довговічність:

$$\frac{dD}{dL} = f \left[ \sqrt{\frac{2}{3}} \rho(P, P_0) \right] \quad (1.35)$$

$P_0$  – деяка точка відліку відстаней між центрами поверхонь навантаження.

Результуюче рівняння для пошкоджуваності має вигляд:

$$dD = \lambda \left( \sqrt{\frac{2}{3}} \rho_{ij} \rho_{ij} \right)^n dL, \quad d\rho_{ij} = d\varepsilon_{ij} - \frac{\rho_{ij}}{L + L^*} dL, \quad (1.36)$$

де  $\lambda, n, L^*$  – функції напружено-деформованого стану.

У роботі [77] для оцінки поточної пошкоджуваності матеріалу в умовах активного деформування при складному напруженому стані запропонована формула:

$$D = D^* \cdot B^{3K_\sigma - 1}, \quad (1.37)$$

де  $D^*$  – пошкоджуваність матеріалу в умовах лінійного розтягу при еквівалентній деформації  $\varepsilon_i$ ,  $B$  – характеристика чутливості матеріалу до виду напруженого стану

у відношенні накопичення пошкоджень,  $K_\sigma = \frac{\sigma_0}{\sigma_i}$  – жорсткість напруженого стану

( $\sigma_0$  – середнє напруження,  $\sigma_i$  – інтенсивність напружень).

Визначення пошкоджуваності як внутрішньої змінної передбачає формулювання для неї відповідних еволюційних рівнянь, які можуть бути узагальнені диференціальним рівнянням у вигляді:

$$dD = f_t [\sigma(t), D(t), C] dt. \quad (1.38)$$

Для конкретизації функції  $f_t$  – найбільш часто використовується степенева функція напружень:

$$\frac{dD}{dt} = A\sigma^k. \quad (1.39)$$

Качановим для умов повзучості була запропонована степенева функція у вигляді:

$$\frac{dD}{dt} = A \left( \frac{\sigma}{1-D} \right)^k. \quad (1.40)$$

Для повзучості, Работновим і Шестериковим також були запропоновані степеневі функції:

$$\frac{dD}{dt} = A \left( \frac{\sigma}{1-D} \right)^k \frac{1}{\omega^{-\beta}}, \quad (1.41)$$

$$\frac{dD}{dt} = A \left( \frac{\sigma}{1-D^r} \right)^k. \quad (1.42)$$

У формулах (1.39-1.42)  $k, r, \beta, A$  – коефіцієнти, що знаходяться експериментально.

Критичне значення параметра пошкоджуваності є величиною, яка описує виникнення у матеріалі макротріщин, які можна виміряти. Коли пошкоджуваність досягає цієї величини можна стверджувати, що матеріал критично і не зворотно пошкоджений. Формула для критичної пошкоджуваності записується у вигляді:

$$D_R = \frac{D_{1R}}{f(K_\sigma)} \left( \frac{\sigma_R}{\sigma_i} (1-D) \right)^2 \leq 1, \quad (1.43)$$

$\sigma_R$  – напруження руйнування, визначене для розтягу і стиску,  $D_{1R}$  – критична величина пошкоджуваності для одновісного розтягу, яка визначається наступним чином:

$$D_{1R} = 1 - \frac{k_f^{\text{розтяг}} \left( \varepsilon_R^{(p)} \right)}{k_f^{\text{стиск}} \left( \varepsilon_R^{(p)} \right)}, \quad (1.44)$$

де  $\varepsilon_R^{(p)}$  – пластична деформація при руйнуванні,  $k_f^{\text{розтяг}}$  та  $k_f^{\text{стиск}}$  – коефіцієнти, що визначаються з експериментів. При цьому визначення параметрів моделі є складним процесом і пошкодженість визначається наближено.



Класична в КМП форма запису кінетичного рівняння накопичення пошкоджень має вигляд [114-116]:

$$\dot{D} = \frac{\partial F_D(Y, \varepsilon^{(p)}, D, \dots)}{\partial Y} \dot{\varepsilon}^{(p)} (1 - D), \quad (1.45)$$

де  $\varepsilon^{(p)}$  - пластична деформація,  $Y$  енергія пружної деформації одиниці об'єму вивільненої при постійному напруженні (обумовлений приростом пошкоджуваності у формі втрати жорсткості):

$$Y = \frac{1}{2} \frac{dW_e}{dD} \Big|_{\sigma=const} = \frac{1}{2} \frac{d[\sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^{(e)}]}{dD} \Big|_{\sigma=const} = \frac{1}{2} \frac{\sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^{(e)}}{dD} \Big|_{\sigma=const}. \quad (1.46)$$

Використовуючи те, що енергія пружної деформації може бути розділена на енергію формозміни та енергію об'ємного розширення,  $\sigma_0$  та  $\varepsilon_0$  гідростатична частина тензора напружень і деформацій, відповідно,  $s_{ij}$  девіаторна частина тензора напружень та еквівалентне напруження за Мізесом  $\sigma_{eq}$ , записано вираз для  $Y$  в наступному вигляді:

$$Y = \frac{\sigma_{eq}^2}{2E(1-D)^2} \left[ \frac{2}{3}(1+\nu) + 3(1-2\nu) \left( \frac{\sigma_0}{\sigma_{eq}} \right)^2 \right]. \quad (1.47)$$

Визначення потенціалу пошкоджуваності базується на різноманітних міркуваннях, але не на однозначних аналітичних виразах, так що кінцева форма запису цього потенціалу змінюється від автора до автора, наприклад:

$$F_D = \frac{Y^2}{2S(1-D)}, \quad (\text{Леметр}) \quad (1.48)$$

$$F_D = \frac{Y^2}{2S'(1-D)} \frac{(\varepsilon_{iR}^{(p)} - \varepsilon_i^{(p)})^{\alpha'-1}}{(\varepsilon_i^{(p)})^{2m}}, \quad (\text{Ванг}) \quad (1.49)$$

$$F_D = \frac{Y^2}{2S''(1-D)} \frac{(D_R - D)^{(\alpha''-1)/\alpha''}}{(\varepsilon_i^{(p)})^{2m+1}}, \quad (\text{Бонора}) \quad (1.50)$$

$$F_D = \frac{Y^2}{2S'''(1-D)} \frac{1}{(\varepsilon_i^{(p)})^{2m} D^{\alpha''m}}. \text{ (Чандракрас)} \quad (1.51)$$

У цих виразах,  $S, S', S'', S''', \alpha', \alpha'', \alpha'''$  сталі матеріалу та  $m$  - експонента закону степеневого закону опису кривої деформування:

$$\frac{\sigma_{eq}}{1-D} = A(\varepsilon_i^p)^m. \quad (1.52)$$

## РОЗДІЛ 2

### ВИЗНАЧЕННЯ ДИНАМІЧНИХ ПАРАМЕТРІВ ЦЕНТРИФУГ

В першу чергу необхідно розглянути параметри розрахунку типових центрифуг, які впливають на нестабільність функціонування центрифуг, та погіршують отримані результати роботи. Крім того, ротори створюють потенціальну небезпеку у випадку їх руйнування, оскільки швидкості їх обертання до 30 000 об/хв.

#### 2.1. Розрахункові моделі

Розглядається трьохмасова модель центрифуги. Центрифуга (рис.2.1) являє собою ротор 1, що обертається навколо вертикальної вісі 2, яка приводиться в рух електродвигуном, якор якого 3, сидить на тій самій вісі, а статор і корпус 4 закріплені на пружних опорах 5. Опори сконструйовані таким чином, що дозволяють центрифугі обертатися відносно нерухомих осей  $\xi, \eta$ , причому жорсткість при обертанні відносно них однакова.

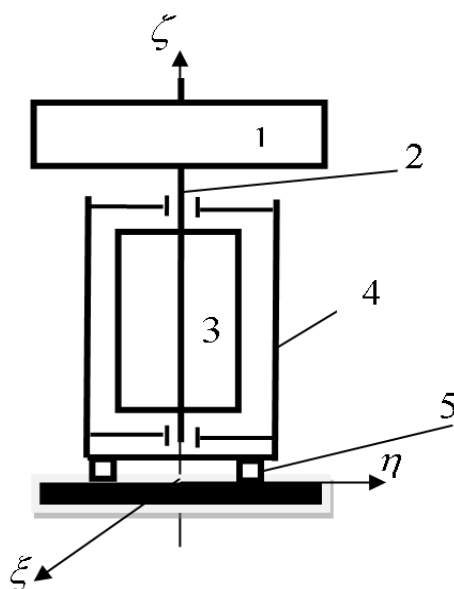


Рис.2.1. Схематичне зображення лабораторної центрифуги

Таким чином, при обертанні центрифуги обертаються тіла 1 і 3, а 4 не обертається. Пружними елементами опор центрифуги є гумові циліндри.

Лабораторну центрифугу можна привести до еквівалентної системи з трьох тіл (статора, якоря та ротора), одне з яких не обертається, тому центрифуга, як механічна система, має 14 степенів вільності.

Для визначення власних частот розроблена розрахункова схема, яка наведена на рис.2.2, яка максимально наближена до реальної центрифуги, що досліджується.

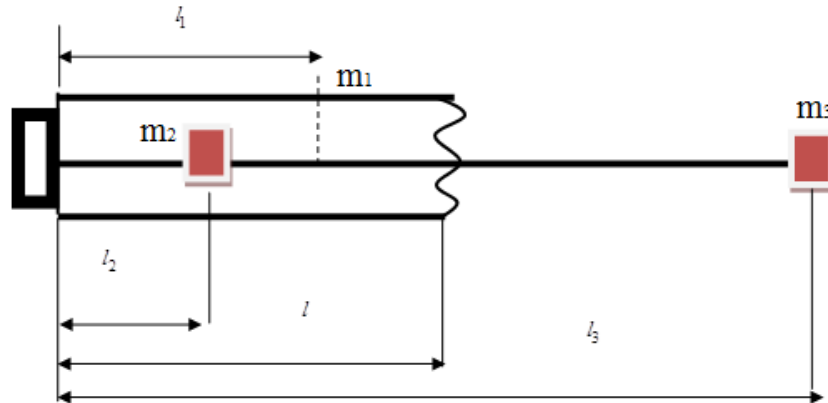


Рис.2.2. Розрахункова схема центрифуги

Із показаних в одній площині трьох мас обертаються лише дві (якір і ротор), тому для подальших розрахунків кутова швидкість статора дорівнює нулю.

### 2.1.1. Рівняння Лагранжа

Метод розрахунку може базуватись на рівняннях Лагранжа другого роду. Рівняння руху Лагранжа зручно тим, що рівняння руху записується в коваріантній формі, тобто структура рівняння не змінюється при переході до інших координат.

Будь-яка механічна система описується рівнянням Ньютона:

$$\ddot{\vec{x}} = \vec{X}(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) \quad (2.1)$$

і це сама загальна форма запису (форма Коші). Відомо, що якщо задані початкові умови  $\vec{x}(0)$  і  $\dot{\vec{x}}(0)$ , то розв'язок існує і є однозначним.

Рівняння Лагранжа в загальному випадку матиме вигляд:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i, \text{ де } i = 1, 2, \dots, n, \quad (2.2)$$

де  $L$  - функція Лагранжа,  $q_i$  - узагальнені координати,  $Q_i$  - узагальнені сили.

У загальному випадку на рівняння накладаються зв'язки, зменшуючи кількість незалежних координат:

$$Q_i(x_1, \dots, x_m, t) = 0, \text{ де } i = 1, 2, \dots, k. \quad (2.3)$$

Якщо у нас є  $k$  зв'язків, то тільки  $n = m - k$  координат є узагальненими. Вибираємо узагальнені координати  $q_1, \dots, q_n$  так, щоб їх зв'язок з первинними був точковим:

$$x_i = f_i(q_1, \dots, q_n, t), \text{ де } i = 1, 2, \dots, m. \quad (2.4)$$

Якщо сили, що діють на систему, є потенціальними, тобто існує функція  $U(x_1, \dots, x_m, t)$  така, що для кожної сили виконується

$$X_i = -\frac{\partial U}{\partial x_i}, \text{ де } i = 1, 2, \dots, m. \quad (2.5)$$

То можна перейти до наступного:

1. Вибираємо узагальнені координати  $q_1, \dots, q_n$ .
2. За допомогою рівняння перетворення координат (2.4) знаходимо потенціальну енергію, виражену через ці координати:

$$U(q_1, \dots, q_n, t). \quad (2.6)$$

3. З урахуванням перетворення узагальнених швидкостей

$$v_i = \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial f_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \quad (2.7)$$

знаходимо кінетичну енергію системи у вибраній системі координат

$$T(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t).$$

4. Складаємо лагранжіан системи  $L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) = T - U$ .
5. Записуємо рівняння руху системи у вигляді:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \text{ де } i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.8)$$

З (2.8) можна безпосередньо знайти перший інтеграл руху:

$$F_i(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) = C_i. \quad (2.9)$$

Сталі інтегрування  $C_i$  можна знайти з початкових умов.

Найпростіший випадок, коли дисипативні сили є лінійною функцією узагальнених швидкостей:

$$Q_i = -\sum_{j=1}^n \rho_{ij} \dot{q}_j = \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_i}. \quad (2.10)$$

Для лінійної функції можна побудувати функцію Релея, тоді дисипативні сили  $\Phi$  це частинні похідні по узагальнених швидкостях функції Релея:

$$\Phi = -\frac{1}{2} \sum_{j,s=1}^n \rho_{js} \dot{q}_j \dot{q}_s. \quad (2.11)$$

У цьому випадку рівняння Лагранжа прийме ще більш простий вид:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_i}, \text{ де } i = 1, 2, \dots, n, \quad (2.12)$$

тобто для повного опису системи з дисипацією потрібно задати дві функції:  $L$  і  $\Phi$ .

З метою вибору оптимального методу розрахунку руху центрифуги розглядаються наступні задачі: вплив гіроскопічного ефекту на власні частоти коливань, вплив статичного дисбалансу, вплив динамічного дисбалансу, вплив статичного і динамічного дисбалансу.

## 2.2. Моделювання руху для одномасової системи

### 2.2.1. Фізичні та геометричні параметри системи

Для чисельного розрахунку використовувались наступні параметри центрифуги (Табл.2.1):

Таблиця 2.1

Вихідні дані

Елемент	Маса, кг		Моменти інерції, кг · мм <sup>2</sup>				Дисбаланс			
							Статичний, мм		Динамічний, рад	
Ротор	$m_3$	0,507	$I_3$	882	$I_{z_3}$	1529	$e_1$	0,9	$\gamma_1$	0,0013
Анкер	$m_2$	0,6	$I_2$	93	$I_{z_2}$	425	$e_2$	0,8	$\gamma_2$	0,0015
Статор	$m_1$	2,4	$I_1$	18000	$I_{z_1}$	18000	$e_3$	1,1	$\gamma_3$	0,0012

### 2.2.2. Вплив гіроскопічного ефекту на власні частоти коливання

За розрахункову схему взято одномасову систему, якою є круглий диск, насаджений на невагомий консольний вал (Рис.2.3).

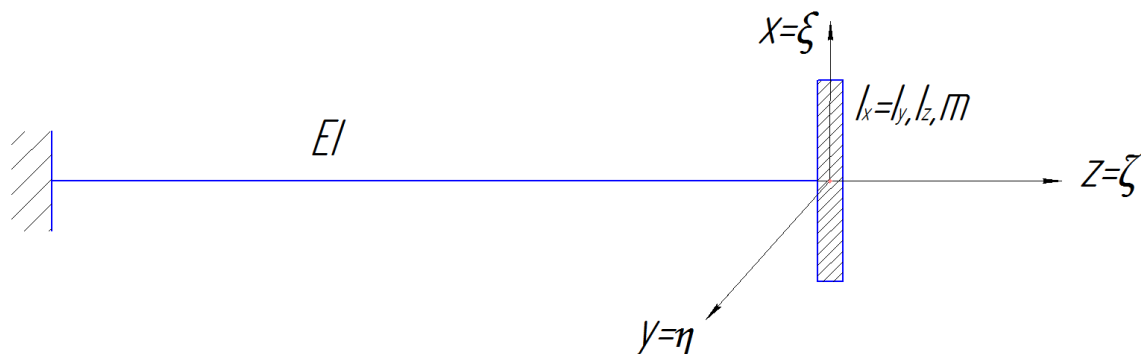


Рис.2.3. Розрахункова схема

Центрифуга обертається навколо власної осі з сталою кутовою швидкістю  $\omega$ . Зв'яжемо з центром мас диска дві системи координат – рухому  $(x, y, z)$ , яка зв'язана з диском і змінює своє положення разом з диском, і нерухому  $(\xi, \eta, \zeta)$ , яка не змінює свого положення, незважаючи на переміщення або поворот диска. У початковому стані рухома і нерухома системи координат співпадають (рис.2.3).

Система має 5 степенів вільності – 2 переміщення центру мас в напрямку осей  $\xi, \eta$  і 3 повороти диска відносно головних центральних осей, які зв'язані з осями  $\xi, \eta, \zeta$  відповідними кутами (рис.2.4).

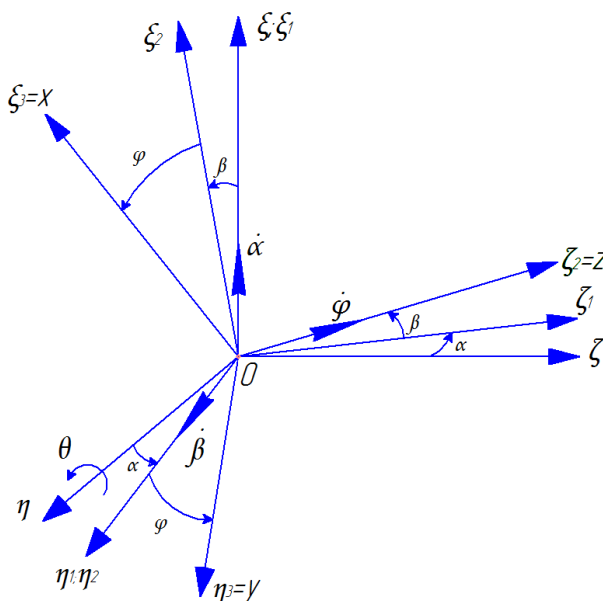


Рис.2.4. Кути повороту диска

Кінетична енергія такої системи буде складатися з півдобутку маси/моменту інерції диска на квадрат відповідної кутової швидкості обертання відносно головних осей диска

$$K = \frac{1}{2}m\dot{\xi}^2 + \frac{1}{2}m\dot{\eta}^2 + \frac{1}{2}I\omega_{\eta_2}^2 + \frac{1}{2}I\omega_{\xi_2}^2 + \frac{1}{2}I_z\omega_{\xi_2}^2. \quad (2.13)$$

Потенціальна енергія для лінійно-пружної системи:

$$\Pi = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k c_{ij} q_i q_j. \quad (2.14)$$

В даному випадку маємо:

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{1}{2}c_{11}\xi^2 + \frac{1}{2}c_{22}\theta^2 + \frac{1}{2}c_{33}\eta^2 + \frac{1}{2}c_{44}\alpha^2 + \frac{1}{2}c_{12}\xi \cdot \theta + \\ & + \frac{1}{2}c_{21}\theta \cdot \xi + \frac{1}{2}c_{34}\eta \cdot \alpha + \frac{1}{2}c_{43}\alpha \cdot \eta \end{aligned} \quad (2.15)$$

де  $c_{ij}$  - компоненти матриці жорсткості.

В зв'язку з тим, що матриця жорсткості визначає властивості валу в двох взаємно перпендикулярних площинах, то, при однаковому моменті інерції у цих площинах, приведені нижче коефіцієнти матриці жорсткості будуть рівними між собою  $c_{11} = c_{33}$ ,  $c_{22} = c_{44}$ ,  $c_{12} = c_{34}$ ,  $c_{21} = c_{43}$ . Враховуючи цей факт, а також симетрію матриці жорсткості  $c_{ij} = c_{ji}$ , вирази для енергій можна спростити:

$$K = \frac{1}{2}m(\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2) + \frac{1}{2}I(\omega_{\eta_2}^2 + \omega_{\xi_2}^2) + \frac{1}{2}I_z\omega_{\xi_2}^2, \quad (2.16)$$

$$\Pi = \frac{1}{2}c_{11}(\xi^2 + \eta^2) + \frac{1}{2}c_{22}(\alpha^2 + \theta^2) + c_{12}(\xi \cdot \theta + \eta \cdot \alpha). \quad (2.17)$$

Виражаємо кутові швидкості обертання через швидкості зміни кутів:

$$\begin{aligned} \omega_{\eta_2} &= \dot{\beta}, \\ \omega_{\xi_2} &= \dot{\alpha} \cdot \cos \beta, \\ \omega_{\xi_2} &= \dot{\phi} + \dot{\alpha} \cdot \sin \beta. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Тоді, вираз кінетичної і потенціальної енергій прийме вигляд:

$$K = \frac{1}{2}m(\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2) + \frac{1}{2}I\{\dot{\beta}^2 + [\dot{\alpha} \cdot \cos(\beta)]^2\} + \frac{1}{2}I_z[\dot{\phi} + \dot{\alpha} \cdot \sin \beta]^2, \quad (2.19)$$



$$П = \frac{1}{2}c_{11}(\xi^2 + \eta^2) + \frac{1}{2}c_{22}(\alpha^2 + \theta^2) + c_{12}(\xi \cdot \theta + \eta \cdot \alpha). \quad (2.20)$$

Враховуючи той факт, що кути – малі, прийнемо наступне наближення  $\cos \beta \approx 1$ ,  $\sin \beta \approx \beta$ .

Перепишемо вирази для енергій:

$$K = \frac{1}{2}m(\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2) + \frac{1}{2}I[\dot{\beta}^2 + \dot{\alpha}^2] + \frac{1}{2}I_z[\dot{\phi} + \dot{\alpha} \cdot \beta]^2, \quad (2.21)$$

$$П = \frac{1}{2}c_{11}(\xi^2 + \eta^2) + \frac{1}{2}c_{22}(\alpha^2 + \theta^2) + c_{12}(\xi \cdot \theta + \eta \cdot \alpha). \quad (2.22)$$

Запишемо вираз для енергій через координати в нерухомій системі координат  $\theta$ ,  $\alpha$  і  $\phi$

$$\dot{\theta} = \dot{\beta} \cdot \cos \alpha. \quad (2.23)$$

В силу малості кутів повороту, можемо прийняти  $\dot{\beta} \approx \dot{\theta}$ .

Після цього, остаточний вираз кінетичної енергії набуде вигляду

$$K = \frac{1}{2}m(\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2) + \frac{1}{2}I[\dot{\theta}^2 + \dot{\alpha}^2] + \frac{1}{2}I_z[\dot{\phi} + \dot{\alpha} \cdot \theta]^2. \quad (2.24)$$

Підставляємо отримані вирази для енергій у рівняння Лагранжа другого роду

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0. \quad (2.25)$$

Отримуємо наступну систему диференціальних рівнянь руху диска:

$$\begin{aligned} m\ddot{\xi} + c_{11}\xi + c_{12}\theta &= 0, \\ m\ddot{\eta} + c_{11}\eta + c_{12}\alpha &= 0, \\ I\ddot{\alpha} + c_{22}\alpha + I_z(\dot{\phi} + \dot{\alpha} \cdot \theta) \cdot \dot{\theta} + c_{12}\eta &= 0, \\ I\ddot{\theta} + c_{22}\theta - I_z(\dot{\phi} + \dot{\alpha} \cdot \theta) \cdot \dot{\alpha} + c_{12}\xi &= 0, \\ \frac{d}{dt}[I_z(\dot{\phi} + \dot{\alpha} \cdot \theta)] &= 0. \end{aligned} \quad (2.26)$$

З останнього рівняння видно, що

$$\dot{\phi} + \dot{\alpha} \cdot \theta = \text{const} = k. \quad (2.27)$$

Скориставшись цим, спростимо вираз для диференціальних рівнянь руху:

$$\begin{aligned}
m\ddot{\xi} + c_{11}\dot{\xi} + c_{12}\theta &= 0, \\
m\ddot{\eta} + c_{11}\dot{\eta} + c_{12}\alpha &= 0, \\
I\ddot{\alpha} + c_{22}\alpha + I_z \cdot k \cdot \dot{\theta} + c_{12}\eta &= 0, \\
I\ddot{\theta} + c_{22}\theta - I_z \cdot k \cdot \dot{\alpha} + c_{12}\xi &= 0.
\end{aligned} \tag{2.28}$$

Як видно з формули (2.27),  $k$  – має нелінійний доданок. У першому приближенні, в силу малості кута  $\theta$ , нехтуємо нелінійним доданком.

$$\text{Тоді} \quad k = \dot{\varphi} = \omega \tag{2.29}$$

де  $\omega$  - кутова швидкість обертання.

Тоді, система диференціальних рівнянь запишеться наступним чином:

$$\begin{aligned}
m\ddot{\xi} + c_{11}\dot{\xi} + c_{12}\theta &= 0, \\
m\ddot{\eta} + c_{11}\dot{\eta} + c_{12}\alpha &= 0, \\
I\ddot{\alpha} + c_{22}\alpha + I_z \cdot \omega \cdot \dot{\theta} + c_{12}\eta &= 0, \\
I\ddot{\theta} + c_{22}\theta - I_z \cdot \omega \cdot \dot{\alpha} + c_{12}\xi &= 0.
\end{aligned} \tag{2.30}$$

Нас цікавлять лише періодичні коливання системи. Тому, переміщення і кути повороту шукаємо у вигляді періодичних функцій:

$$\xi = A \sin pt, \quad \eta = A \cos pt, \quad \alpha = B \cos pt, \quad \theta = B \sin pt. \tag{2.31}$$

Підставляючи ці функції у систему рівнянь, будемо мати:

$$\begin{aligned}
(c_{11} - mp^2) \cdot A \sin pt + c_{12} \cdot B \sin pt &= 0, \\
(c_{11} - mp^2) \cdot A \cos pt + c_{12} \cdot B \cos pt &= 0, \\
(c_{22} - Ip^2) \cdot B \cos pt + I_z \omega p \cdot B \cos pt + c_{12} \cdot A \cos pt &= 0, \\
(c_{22} - Ip^2) \cdot B \sin pt + I_z \omega p \cdot B \sin pt + c_{12} \cdot A \sin pt &= 0.
\end{aligned} \tag{2.32}$$

або

$$\begin{aligned}
(mp^2 - c_{11}) \cdot A - c_{12} \cdot B &= 0, \\
(mp^2 - c_{11}) \cdot A - c_{12} \cdot B &= 0, \\
(Ip^2 - c_{22}) \cdot B - I_z \omega p \cdot B - c_{12} \cdot A &= 0, \\
(Ip^2 - c_{22}) \cdot B - I_z \omega p \cdot B - c_{12} \cdot A &= 0.
\end{aligned} \tag{2.33}$$

Маємо два нетривіальні рівняння для визначення власних частот:

$$\begin{aligned}
(mp^2 - c_{11}) \cdot A - c_{12} \cdot B &= 0, \\
(Ip^2 - c_{22}) \cdot B - I_z \omega p \cdot B - c_{12} \cdot A &= 0.
\end{aligned} \tag{2.34}$$

Дана система буде мати нетривіальний розв'язок лише тоді, коли її визначник буде рівним нулю:

$$\det \begin{vmatrix} mp^2 - c_{11} & -c_{12} \\ -c_{12} & Ip^2 - I_z \omega p - c_{22} \end{vmatrix} = 0. \quad (2.35)$$

Корені отриманого рівняння є власними частотами системи (Рис.2.5).

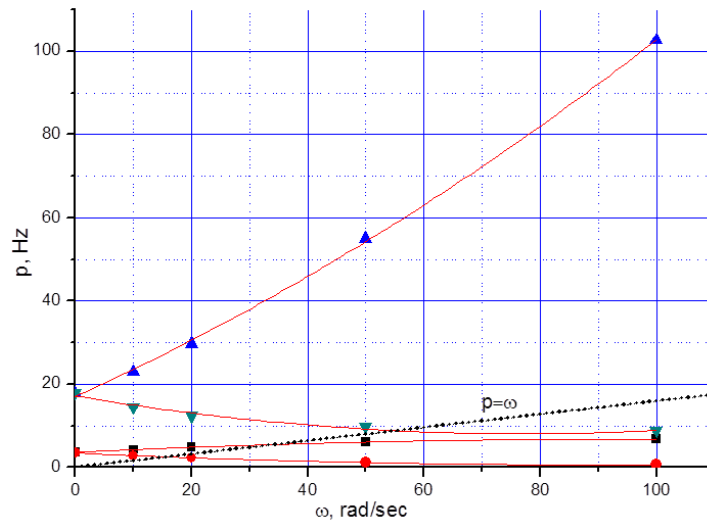


Рис.2.5. Залежність власних частот від кутової швидкості обертання для одномасової системи

Як бачимо, власні частоти залежать від напрямку прецесії, а також від кутової швидкості обертання.

### 2.2.3. Вплив статичного дисбалансу

Якщо має місце статичний дисбаланс диска, то положення центра ваги відносно нерухомої системи координат буде зміщено (Рис.2.6)

$$\begin{aligned} w_x &= \xi + e \cdot \cos(\varphi) = \xi + e \cdot \cos(\omega t), \\ w_y &= \eta + e \cdot \sin(\varphi) = \eta + e \cdot \sin(\omega t). \end{aligned} \quad (2.36)$$

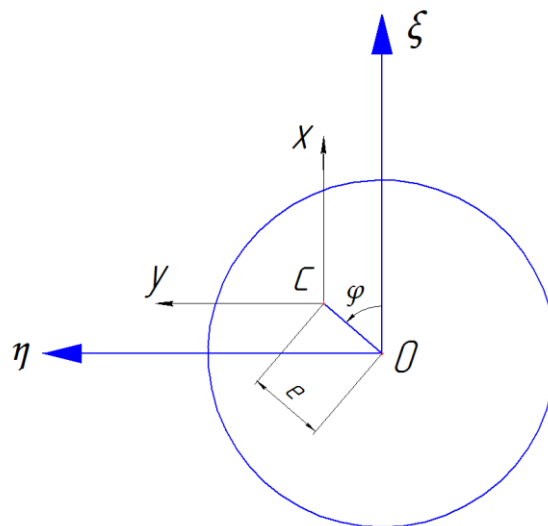


Рис.2.6 Відхилення центра мас на величину  $e$

А також, будуть змінені вирази для моментів інерції, відносно яких відбуваються повороти

$$\begin{aligned} I_{cz} &= I_z + m \cdot e^2, \\ I_{cy} &= I + m \cdot e^2 \sin^2 \omega t, \\ I_{cx} &= I + m \cdot e^2 \cos^2 \omega t. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Потенціальна енергія системи залежить від згину вала, тому, при зміні положення центра мас диску, зміни відбудуться лише у виразі для кінетичної енергії:

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2} m [\dot{\xi} - \omega \cdot e \cdot \sin(\omega t)]^2 + \frac{1}{2} m [\dot{\eta} + \omega \cdot e \cdot \cos(\omega t)]^2 + \\ &+ \frac{1}{2} I_{cy} \omega_{\eta_2}^2 + \frac{1}{2} I_{cx} \omega_{\xi_2}^2 + \frac{1}{2} I_{cz} \omega_{\zeta_2}^2. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Після підстановки цього виразу у рівняння Лагранжа другого роду і проведенні усіх послідовних дій, що були проведені вище, отримуємо наступну систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{aligned}
m[\ddot{\xi} - \omega^2 e \cdot \cos(\omega t)] + c_{11}\xi + c_{12}\theta &= 0, \\
m[\ddot{\eta} - \omega^2 e \cdot \sin(\omega t)] + c_{11}\eta + \frac{1}{2}c_{12}\alpha &= 0, \\
(I + m \cdot e^2 \cos^2 \omega t) \cdot \ddot{\alpha} + 2 \cdot (me^2 \cos \omega t \sin \omega t) \cdot \dot{\alpha} + & \\
+c_{22}\alpha + (I + m \cdot e^2) \cdot \omega \cdot \dot{\theta} + c_{12}\eta &= 0, \\
(I + m \cdot e^2 \sin^2 \omega t) \cdot \ddot{\theta} + 2 \cdot (me^2 \sin \omega t \cos \omega t) \cdot \dot{\theta} + & \\
+c_{22}\theta - (I + m \cdot e^2) \cdot \omega \cdot \dot{\alpha} + c_{12}\xi &= 0.
\end{aligned} \tag{2.39}$$

Неоднорідний розв'язок для виразу переміщень шукаємо у вигляді

$$\xi = K \cos \omega t; \quad \eta = L \sin \omega t. \tag{2.40}$$

Після підстановки виразів у систему, отримуємо наступні рівняння:

$$\begin{aligned}
m[-K\omega^2 \cos \omega t] + c_{11}[K \cos \omega t]^2 &= m\omega^2 e \cdot \cos \omega t, \\
m[-L\omega^2 \sin \omega t] + c_{11}[L \sin \omega t]^2 &= m\omega^2 e \cdot \sin \omega t.
\end{aligned} \tag{2.41}$$

Із цих рівнянь отримуємо:

$$K = L = \frac{m\omega^2 e}{m\omega^2 - c_{11}}. \tag{2.42}$$

Тоді, запис для переміщень набуде наступного вигляду:

$$\begin{aligned}
\xi &= A \sin pt + \frac{m\omega^2 e}{m\omega^2 - c_{11}} \cos \omega t, \\
\eta &= B \cos pt + \frac{m\omega^2 e}{m\omega^2 - c_{11}} \sin \omega t, \\
\alpha &= C \cos pt, \\
\theta &= D \sin pt.
\end{aligned} \tag{2.43}$$

Амплітудна величина переміщення центра мас диска залежить від кутової швидкості обертання валу.

#### 2.2.4. Вплив динамічного дисбалансу

Нехай ми маємо динамічний дисбаланс в загальному вигляді (Рис.2.7).

Площина  $X_1 Y_1 Z_1$  – додаткова площина, яка була введена для зручності і наглядності зображення дисбалансу.

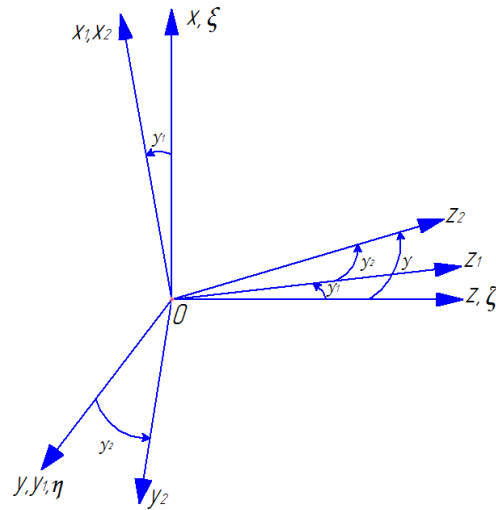


Рис. 2.7 Поворот головних центральних осей відносно нерухомих осей обертання

Ми можемо вибрати системи координат таким чином, щоб сумарний кут дисбалансу  $\gamma$  лежав в одній площині, наприклад в площині  $X_1OZ_1$  (Рис.2.8, Рис.2.9). Тоді, в початковий момент часу:

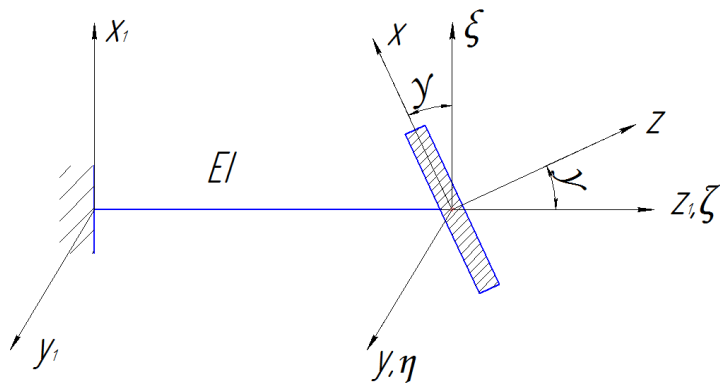


Рис.2.8 Динамічний дисбаланс в площині  $X_1Y_1Z_1$

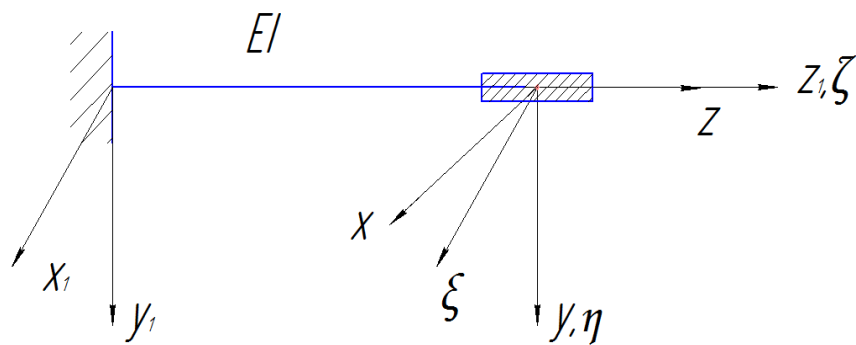


Рис.2.9 Відсутність динамічного дисбалансу в площині  $Y_1OZ_1$

Якщо ми виразимо кутові швидкості відносно рухомої системи координат  $(x, y, z)$  через кутові швидкості відносно нерухомої системи координат  $(\xi, \eta, \zeta)$ , як це було без дисбалансу, то будемо мати стандартні формули переходу:

$$\begin{aligned}\omega_{\eta_2} &= \dot{\beta}_{\Pi}, \\ \omega_{\xi_2} &= \dot{\alpha}_{\Pi} \cdot \cos \beta, \\ \omega_{\zeta_2} &= \dot{\varphi}_{\Pi} + \dot{\alpha}_{\Pi} \cdot \sin \beta,\end{aligned}\tag{2.44}$$

де індекс  $\Pi$  – повний кут повороту.

Без врахування динамічного дисбалансу, маємо

$$\begin{aligned}\alpha_{\Pi} &= \alpha, \\ \beta_{\Pi} &= \beta.\end{aligned}\tag{2.45}$$

Але, при наявності дисбалансу, кут повороту  $\alpha_{\Pi}$  буде складатися із двох кутів:  $\alpha$  - безпосередньо кута повороту і  $\varphi_{x_1}$  - кута початкового дисбалансу (Рис.2.10). Аналогічно для кута  $\beta_{\Pi}$ , який складається з  $\beta$  і  $\varphi_{y_1}$ .

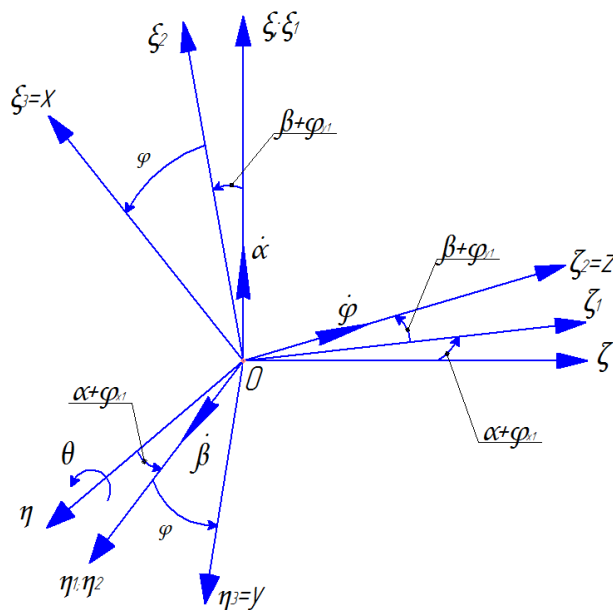


Рис.2.10 Кути повороту диска

Враховуючи той факт, що кути повороту – малі, ми можемо скласти величини цих кутів

$$\begin{aligned}\alpha_{\Pi} &= \alpha + \varphi_{x_1}, \\ \beta_{\Pi} &= \beta + \varphi_{y_1}.\end{aligned}\tag{2.46}$$

В початковий момент часу  $\varphi_{x_1} = \gamma, \varphi_{y_1} = 0$  (Рис.2.8, Рис.2.9). Але, при обертанні вала, дані кути дисбалансу будуть змінювати своє значення відносно нерухомої системи координат, в залежності від повороту вала. Так, наприклад, якщо вал зробить оборот на  $90^0$ , то кут  $\varphi_{x_1} = 0$ , а  $\varphi_{y_1} = \gamma$ . Таким чином кути  $\varphi_{x_1}, \varphi_{y_1}$  – періодичні функції з амплітудою  $\gamma$ , які виражаються:

$$\begin{aligned}\varphi_{x_1} &= \gamma \cdot \cos \omega t, \\ \varphi_{y_1} &= \gamma \cdot \sin \omega t,\end{aligned}\tag{2.47}$$

де  $\omega$  – кутова частота обертання вала.

Тоді

$$\begin{aligned}\alpha_{II} &= \alpha + \gamma \cdot \cos \omega t, \\ \beta_{II} &= \beta + \gamma \cdot \sin \omega t, \\ \varphi_{II} &= \varphi.\end{aligned}\tag{2.48}$$

Знайдемо кутову швидкість обертання  $\omega_z$  навколо головної осі інерції диска.

Залежності між кутовими швидкостями мають наступний вигляд:

$$\begin{aligned}\begin{Bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{Bmatrix} &= A_1 \cdot A_2 \cdot \begin{Bmatrix} \omega_\xi \\ \omega_\eta \\ \omega_\zeta \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \gamma_1 & 0 & -\sin \gamma_1 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \gamma_1 & 0 & \cos \gamma_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma_2 & \sin \gamma_2 \\ 0 & -\sin \gamma_2 & \cos \gamma_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{Bmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \cos \gamma_1 & \sin \gamma_1 \cdot \sin \gamma_2 & -\sin \gamma_1 \cdot \cos \gamma_2 \\ 0 & \cos \gamma_2 & \sin \gamma_2 \\ \sin \gamma_1 & -\sin \gamma_2 \cdot \cos \gamma_1 & \cos \gamma_1 \cdot \cos \gamma_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{Bmatrix}\end{aligned}\tag{2.49}$$

Вирази для кутових швидкостей запишуться:

$$\begin{aligned}\omega_x &= a_{13} \cdot \omega = -\sin \gamma_1 \cdot \cos \gamma_2 \cdot \omega, \\ \omega_y &= a_{23} \cdot \omega = \sin \gamma_2 \cdot \omega, \\ \omega_z &= a_{33} \cdot \omega = \cos \gamma_1 \cdot \cos \gamma_2 \cdot \omega.\end{aligned}\tag{2.50}$$

Якщо покласти кути дисбалансу малими величинами, то

$$\sin \gamma_1 \approx 0, \sin \gamma_2 \approx 0, \cos \gamma_1 \approx 1, \cos \gamma_2 \approx 1.\tag{2.51}$$

Тоді

$$\omega_x = 0, \omega_y = 0, \omega_z = \omega.\tag{2.52}$$



Тобто

$$\dot{\varphi} = \omega_z = \omega. \quad (2.53)$$

Тепер, після того як нами було знайдено усі необхідні формули для врахування динамічного дисбалансу, запишемо вирази потенціальної і кінетичної енергії системи.

Потенціальна енергія системи залежить від згину вала, тому, при нахилі головної центральної вісі, зміни відбудуться лише у виразі для кінетичної енергії. Запишемо вираз для кінетичної енергії, який ми отримали без врахування дисбалансу:

$$K = \frac{1}{2}m\dot{\xi}^2 + \frac{1}{2}m\dot{\eta}^2 + \frac{1}{2}I[\dot{\alpha}_{II}^2 + \dot{\theta}_{II}^2] + \frac{1}{2}I_{\zeta}\omega_{\zeta 2}^2, \quad (2.54)$$

де  $\alpha_{II} = \alpha$ ;  $\theta_{II} = \theta$ .

З врахуванням дисбалансу

$$\begin{aligned} \alpha_{II} &= \alpha + \gamma \cdot \cos \omega t, \\ \theta_{II} &= \theta + \gamma \cdot \sin \omega t. \end{aligned} \quad (2.55)$$

$$K = \frac{1}{2}m\dot{\xi}^2 + \frac{1}{2}m\dot{\eta}^2 + \frac{1}{2}I[\dot{\alpha} - \gamma \cdot \omega \cdot \sin \omega t]^2 + \frac{1}{2}I[\dot{\theta} + \gamma \cdot \omega \cdot \cos \omega t]^2 + \frac{1}{2}I_{\zeta}\omega_{\zeta 2}^2, \quad (2.56)$$

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{1}{2}c_{11}\xi^2 + \frac{1}{2}c_{22}\theta^2 + \frac{1}{2}c_{33}\eta^2 + \frac{1}{2}c_{44}\alpha^2 + \frac{1}{2}c_{12}\xi \cdot \theta + \\ &+ \frac{1}{2}c_{21}\theta \cdot \xi + \frac{1}{2}c_{34}\eta \cdot \alpha + \frac{1}{2}c_{43}\alpha \cdot \eta. \end{aligned} \quad (2.57)$$

Після підстановки цього виразу у рівняння Лагранжа другого роду, отримуємо наступну систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{aligned} m\ddot{\xi} + c_{11}\xi + c_{12}\theta &= 0, \\ m\ddot{\eta} + c_{11}\eta + c_{12}\alpha &= 0, \\ I[\ddot{\alpha} - \gamma \cdot \omega^2 \cdot \cos \omega t] + c_{22}\alpha + I_z(\dot{\varphi} + \dot{\alpha} \cdot \theta) \cdot \dot{\theta} + c_{12}\eta &= 0, \\ I[\ddot{\theta} - \gamma \cdot \omega^2 \cdot \sin \omega t] + c_{22}\theta - I_z(\dot{\varphi} + \dot{\alpha} \cdot \theta) \cdot \dot{\alpha} + c_{12}\xi &= 0, \\ \frac{d}{dt}[I_z(\dot{\varphi} + \dot{\alpha} \cdot \theta)] &= 0. \end{aligned} \quad (2.58)$$

Спростимо вираз

$$m\ddot{\xi} + c_{11}\dot{\xi} + c_{12}\theta = 0,$$

$$m\ddot{\eta} + c_{11}\dot{\eta} + c_{12}\alpha = 0,$$

$$I[\ddot{\alpha} - \gamma \cdot \omega^2 \cdot \cos \omega t] + c_{22}\alpha + I_z \cdot \omega \cdot \dot{\theta} + c_{12}\eta = 0, \quad (2.59)$$

$$I[\ddot{\theta} - \gamma \cdot \omega^2 \cdot \sin \omega t] + c_{22}\theta - I_z \cdot \omega \cdot \dot{\alpha} + c_{12}\xi = 0.$$

або

$$m\ddot{\xi} + c_{11}\dot{\xi} + c_{12}\theta = 0,$$

$$m\ddot{\eta} + c_{11}\dot{\eta} + c_{12}\alpha = 0,$$

$$I\ddot{\alpha} + c_{22}\alpha + I_z \cdot \omega \cdot \dot{\theta} + c_{12}\eta = I \cdot \gamma \cdot \omega^2 \cdot \cos \omega t, \quad (2.60)$$

$$I\ddot{\theta} + c_{22}\theta - I_z \cdot \omega \cdot \dot{\alpha} + c_{12}\xi = I \cdot \gamma \cdot \omega^2 \cdot \sin \omega t.$$

Нас цікавлять лише періодичні коливання системи. Тому, переміщення і кути повороту однорідного розв'язку шукаємо у вигляді:

$$\xi = A \sin pt, \quad \eta = A \cos pt, \quad \alpha = B \cos pt, \quad \theta = B \sin pt. \quad (2.61)$$

Неоднорідний розв'язок шукаємо у вигляді:

$$\xi = K \sin \omega t, \quad \eta = L \cos \omega t, \quad \alpha = M \cos \omega t, \quad \theta = N \sin \omega t. \quad (2.62)$$

Після підстановки виразів у систему, отримуємо наступні рівняння:

$$m[-K\omega^2 \sin \omega t] + c_{11}[K \sin \omega t] + c_{12}[N \sin \omega t] = 0,$$

$$m[-L\omega^2 \cos \omega t] + c_{11}[L \cos \omega t] + c_{12}[M \cos \omega t] = 0,$$

$$I[M\omega^2 \cos \omega t] + c_{22}[M \cos \omega t] + c_{12}[L \cos \omega t] + I_z \cdot \omega \cdot [N \cdot \omega \cdot \cos \omega t] = I\omega^2 \gamma \cdot \cos \omega t, \quad (2.63)$$

$$I[-N\omega^2 \sin \omega t] + c_{22}[N \sin \omega t] + c_{12}[K \sin \omega t] - I_z \cdot \omega \cdot [M \cdot \omega \cdot \cos \omega t] = I\omega^2 \gamma \cdot \sin \omega t.$$

З цих рівнянь отримуємо:

$$\begin{cases} K[c_{11} - m \cdot \omega^2] + N[c_{12}] = 0, \\ L[c_{11} - m \cdot \omega^2] + M[c_{12}] = 0, \\ M[c_{22} - I \cdot \omega^2] + L[c_{12}] + N[I_z \cdot \omega^2] = I\omega^2 \gamma, \\ N[c_{22} - I \cdot \omega^2] + K[c_{12}] + M[I_z \cdot \omega^2] = I\omega^2 \gamma. \end{cases} \quad (2.64)$$

Звідси маємо:

$$N = M = I\omega^2\gamma \frac{1}{a + I_z\omega^2}, \quad (2.65)$$

$$K = L = I\omega^2\gamma \cdot \frac{c_{12}}{(m \cdot \omega^2 - c_{11})(a + I_z\omega^2)}, \quad (2.66)$$

де  $a = c_{22} - I\omega^2 + \frac{c_{12}^2}{m \cdot \omega^2 - c_{11}}$ .

Тоді

$$\xi = I\omega^2\gamma \cdot \frac{c_{12}}{(m \cdot \omega^2 - c_{11})(a + I_z\omega^2)} \cdot \sin \omega t, \quad (2.67)$$

$$\eta = I\omega^2\gamma \cdot \frac{c_{12}}{(m \cdot \omega^2 - c_{11})(a + I_z\omega^2)} \cdot \cos \omega t, \quad (2.68)$$

$$\alpha = I\omega^2\gamma \frac{1}{a + I_z\omega^2} \cdot \cos \omega t, \quad (2.69)$$

$$\theta = I\omega^2\gamma \frac{1}{a + I_z\omega^2} \cdot \sin \omega t. \quad (2.70)$$

Повний розв'язок для переміщень і кутів повороту набуде наступного вигляду:

$$\begin{aligned} \xi &= A \sin pt + I\omega^2\gamma \cdot \frac{c_{12}}{(m \cdot \omega^2 - c_{11})(a + I_z\omega^2)} \cdot \sin \omega t, \\ \eta &= A \cos pt + I\omega^2\gamma \cdot \frac{c_{12}}{(m \cdot \omega^2 - c_{11})(a + I_z\omega^2)} \cdot \cos \omega t, \end{aligned} \quad (2.80)$$

$$\alpha = B \cos pt + I\omega^2\gamma \frac{1}{a + I_z\omega^2} \cdot \cos \omega t,$$

$$\theta = B \sin pt + I\omega^2\gamma \frac{1}{a + I_z\omega^2} \cdot \sin \omega t.$$

Амплітудна величина переміщень і кутів повороту залежить від кутової швидкості обертання валу.

$$\begin{aligned}
\xi &= A \sin pt + I \omega^2 \gamma \cdot \frac{c_{12}}{(m \cdot \omega^2 - c_{11})(a + I_z \omega^2)} \cdot \sin \omega t, \\
\eta &= A \cos pt + I \omega^2 \gamma \cdot \frac{c_{12}}{(m \cdot \omega^2 - c_{11})(a + I_z \omega^2)} \cdot \cos \omega t, \\
\alpha_{II} &= B \cos pt + I \omega^2 \gamma \frac{1}{a + I_z \omega^2} \cdot \cos \omega t + \gamma \cdot \cos \omega t, \\
\theta_{II} &= B \sin pt + I \omega^2 \gamma \frac{1}{a + I_z \omega^2} \cdot \sin \omega t + \gamma \cdot \sin \omega t.
\end{aligned} \tag{2.81}$$

### 2.2.5. Вплив статичного і динамічного дисбалансу

Якщо система має одночасно статичний і динамічний дисбаланс, то вираз для кінетичної і потенціальної енергії запишеться наступним чином:

$$\begin{aligned}
K &= \frac{1}{2} m [\dot{\xi} - \omega \cdot e \cdot \sin \omega t]^2 + \frac{1}{2} m [\dot{\eta} + \omega \cdot e \cdot \cos \omega t]^2 + \frac{1}{2} I [\dot{\alpha} - \gamma \cdot \omega \cdot \sin \omega t]^2 + \\
&+ \frac{1}{2} I [\dot{\theta} + \gamma \cdot \omega \cdot \cos \omega t]^2 + \frac{1}{2} I_{\zeta} \omega_{\zeta 2}^2,
\end{aligned} \tag{2.82}$$

$$\begin{aligned}
\Pi &= \frac{1}{2} c_{11} \xi^2 + \frac{1}{2} c_{22} \theta^2 + \frac{1}{2} c_{33} \eta^2 + \frac{1}{2} c_{44} \alpha^2 + \frac{1}{2} c_{12} \xi \cdot \theta + \\
&+ \frac{1}{2} c_{21} \theta \cdot \xi + \frac{1}{2} c_{34} \eta \cdot \alpha + \frac{1}{2} c_{43} \alpha \cdot \eta
\end{aligned} \tag{2.83}$$

Після підстановки цього виразу у рівняння Лагранжа другого роду, отримуємо наступну систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{aligned}
m[\ddot{\xi} - \omega^2 e \cdot \cos \omega t] + c_{11} \xi + c_{12} \theta &= 0, \\
m[\ddot{\eta} - \omega^2 e \cdot \sin \omega t] + c_{11} \eta + c_{12} \alpha &= 0, \\
I[\ddot{\alpha} - \gamma \cdot \omega^2 \cdot \cos \omega t] + c_{22} \alpha + I_z (\dot{\phi} + \dot{\alpha} \cdot \theta) \cdot \dot{\theta} + c_{12} \eta &= 0, \\
I[\ddot{\theta} - \gamma \cdot \omega^2 \cdot \sin \omega t] + c_{22} \beta - I_z (\dot{\phi} + \dot{\alpha} \cdot \theta) \cdot \dot{\alpha} + c_{12} \xi &= 0, \\
\frac{d}{dt} [I_z (\dot{\phi} + \dot{\alpha} \cdot \theta)] &= 0.
\end{aligned} \tag{2.84}$$

Спростимо вираз

$$\begin{aligned}
m[\ddot{\xi} - \omega^2 e \cdot \cos \omega t] + c_{11}\xi + c_{12}\theta &= 0, \\
m[\ddot{\eta} - \omega^2 e \cdot \sin \omega t] + c_{11}\eta + c_{12}\alpha &= 0, \\
I[\ddot{\alpha} - \gamma \cdot \omega^2 \cdot \cos \omega t] + c_{22}\alpha + I_z \cdot \omega \cdot \dot{\theta} + c_{12}\eta &= 0, \\
I[\ddot{\theta} - \gamma \cdot \omega^2 \cdot \sin \omega t] + c_{22}\theta - I_z \cdot \omega \cdot \dot{\alpha} + c_{12}\xi &= 0.
\end{aligned} \tag{2.85}$$

Або

$$\begin{aligned}
m\ddot{\xi} + c_{11}\xi + c_{12}\theta &= m\omega^2 e \cdot \cos \omega t, \\
m\ddot{\eta} + c_{11}\eta + c_{12}\alpha &= m\omega^2 e \cdot \sin \omega t, \\
I\ddot{\alpha} + c_{22}\alpha + I_z \cdot \omega \cdot \dot{\theta} + c_{12}\eta &= I\gamma\omega^2 \cdot \cos \omega t, \\
I\ddot{\theta} + c_{22}\theta - I_z \cdot \omega \cdot \dot{\alpha} + c_{12}\xi &= I\gamma\omega^2 \cdot \sin \omega t.
\end{aligned} \tag{2.86}$$

Нас цікавлять лише періодичні коливання системи. Тому, переміщення і кути повороту однорідного розв'язку шукаємо у вигляді:

$$\xi = A \sin pt, \quad \eta = A \cos pt, \quad \alpha = B \cos pt, \quad \theta = B \sin pt. \tag{2.87}$$

Неоднорідний розв'язок шукаємо у вигляді

$$\begin{aligned}
\xi &= K_1 \sin \omega t + K_2 \cos \omega t, \\
\eta &= L_1 \sin \omega t + L_2 \cos \omega t, \\
\alpha &= M_1 \sin \omega t + M_2 \cos \omega t, \\
\theta &= N_1 \sin \omega t + N_2 \cos \omega t.
\end{aligned} \tag{2.88}$$

Після підстановки виразів у систему, отримуємо наступні рівняння:

$$\begin{aligned}
m[-K_1\omega^2 \sin \omega t - K_2\omega^2 \cos \omega t] + c_{11}[K_1 \sin \omega t + K_2 \cos \omega t] + \\
+c_{12}[N_1 \sin \omega t + N_2 \cos \omega t] &= m\omega^2 e \cdot \cos \omega t, \\
m[-L_1\omega^2 \sin \omega t - L_2\omega^2 \cos \omega t] + c_{11}[L_1 \sin \omega t + L_2 \cos \omega t] + \\
+c_{12}[M_1 \sin \omega t + M_2 \cos \omega t] &= m\omega^2 e \cdot \sin \omega t, \\
I[-M_1\omega^2 \sin \omega t - M_2\omega^2 \cos \omega t] + c_{22}[M_1 \sin \omega t + M_2 \cos \omega t] + \\
+c_{12}[L_1 \sin \omega t + L_2 \cos \omega t] + I_z \cdot \omega \cdot [N_1 \cdot \omega \cdot \cos \omega t - N_2 \cdot \omega \cdot \sin \omega t] &= \\
= I\omega^2 \gamma \cdot \cos \omega t, \\
I[-N_1\omega^2 \sin \omega t - N_2\omega^2 \cos \omega t] + c_{22}[N_1 \sin \omega t + N_2 \cos \omega t] + \\
+c_{12}[K_1 \sin \omega t + K_2 \cos \omega t] - I_z \cdot \omega \cdot [M_1 \cdot \omega \cdot \cos \omega t - M_2 \cdot \omega \cdot \sin \omega t] &= \\
= I\omega^2 \gamma \cdot \sin \omega t.
\end{aligned} \tag{2.89}$$

З цих рівнянь отримуємо:

$$\begin{aligned}
K_1[c_{11} - m \cdot \omega^2] + N_1[c_{12}] &= 0, \\
K_2[c_{11} - m \cdot \omega^2] + N_2[c_{12}] &= m\omega^2 e, \\
L_1[c_{11} - m \cdot \omega^2] + M_1[c_{12}] &= m\omega^2 e, \\
L_2[c_{11} - m \cdot \omega^2] + M_2[c_{12}] &= 0, \\
M_1[c_{22} - I \cdot \omega^2] + L_1[c_{12}] + N_2[-I_z \cdot \omega^2] &= 0, \\
M_2[c_{22} - I \cdot \omega^2] + L_2[c_{12}] + N_1[I_z \cdot \omega^2] &= I\omega^2 \gamma, \\
N_1[c_{22} - I \cdot \omega^2] + K_1[c_{12}] + M_2[I_z \cdot \omega^2] &= I\omega^2 \gamma, \\
N_2[c_{22} - I \cdot \omega^2] + K_2[c_{12}] + M_1[-I_z \cdot \omega^2] &= 0.
\end{aligned} \tag{2.90}$$

Звідки отримуємо значення амплітудних коефіцієнтів.

Амплітудна величина переміщень і кутів повороту залежить від кутової швидкості обертання валу.

$$\begin{aligned}
\xi &= A \sin pt + K_1 \sin \omega t + K_2 \cos \omega t + e \cdot \cos \omega t, \\
\eta &= A \cos pt + L_1 \sin \omega t + L_2 \cos \omega t + e \cdot \sin \omega t, \\
\alpha_{II} &= B \cos pt + M_1 \sin \omega t + M_2 \cos \omega t + \gamma \cdot \cos \omega t, \\
\theta_{II} &= B \sin pt + N_1 \sin \omega t + N_2 \cos \omega t + \gamma \cdot \sin \omega t.
\end{aligned} \tag{2.91}$$

Значення коефіцієнтів:

$$\begin{aligned}
K_1 = L_2 &= \frac{I \cdot \omega^2 \cdot \gamma \cdot c_{12}}{c_{12}^2 - c_{11} \cdot c_{22} + I \cdot \omega^2 \cdot c_{11} - I_z \cdot \omega^2 \cdot c_{11} - I \cdot \omega^4 \cdot m + I_z \cdot \omega^4 \cdot m + \omega^2 \cdot c_{22} \cdot m} \\
K_2 = L_1 &= \frac{\omega^2 \cdot m \cdot e (I \cdot \omega^2 - c_{22} + I_z \cdot \omega^2)}{c_{12}^2 - c_{11} \cdot c_{22} + I \cdot \omega^2 \cdot c_{11} + I_z \cdot \omega^2 \cdot c_{11} - I \cdot \omega^4 \cdot m - I_z \cdot \omega^4 \cdot m + \omega^2 \cdot c_{22} \cdot m} \\
M_1 = N_2 &= \frac{\omega^2 \cdot m \cdot e \cdot c_{12}}{c_{12}^2 - c_{11} \cdot c_{22} + I \cdot \omega^2 \cdot c_{11} + I_z \cdot \omega^2 \cdot c_{11} - I \cdot \omega^4 \cdot m - I_z \cdot \omega^4 \cdot m + \omega^2 \cdot c_{22} \cdot m} \\
M_2 = N_1 &= \frac{I \cdot \omega^2 \cdot \gamma \cdot (m \cdot \omega^2 - c_{11})}{c_{12}^2 - c_{11} \cdot c_{22} + I \cdot \omega^2 \cdot c_{11} - I_z \cdot \omega^2 \cdot c_{11} - I \cdot \omega^4 \cdot m + I_z \cdot \omega^4 \cdot m + \omega^2 \cdot c_{22} \cdot m}
\end{aligned} \tag{2.92}$$

## 2.3. Механічні характеристики пружних опор

### 2.3.1. Пружні характеристики

Виявлені режими нестабільного функціонування центрифуги, які погіршують результати її роботи.

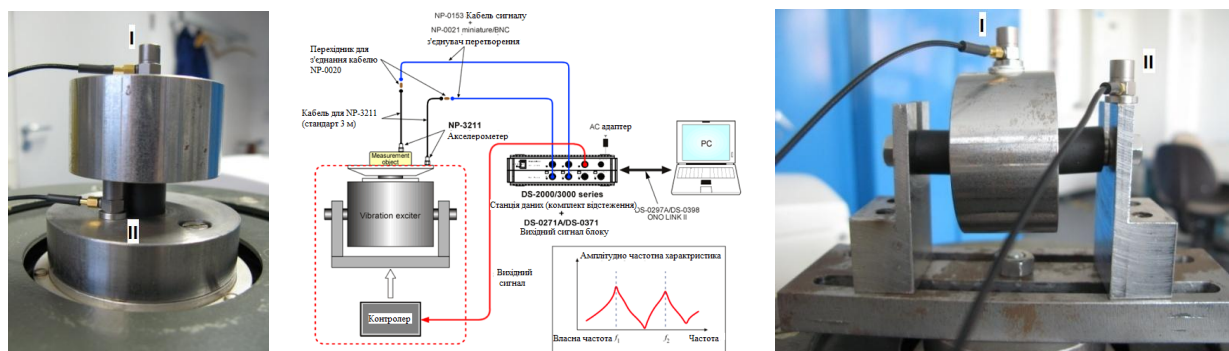
Динамічна поведінка центрифуги залежить від жорсткості та демпфування опор [117]. Від параметрів руху центрифуги залежить якість виконання необхідних робіт. Перехідні процеси можуть погіршувати вихідну продукцію. Ті ж самі процеси суттєво впливають на виникнення вібрацій, які викликають руйнування. Виходячи з цього, вивчення механічних характеристик центрифуги є актуальною задачею при проектуванні.

Необхідно визначити характеристики лабораторної центрифуги з врахуванням її конструктивних особливостей, які полягають в тому, що центрифуга, на відміну від типових розрахункових схем, є багатомасовою системою.

Ця система закріплена на пружних опорах, що відповідає реальній конструкції. Для визначення жорсткості пружних опор була використана методика збурення вимушених коливань за допомогою вібростенду, який дозволяє визначити динамічні характеристики опор при розтягуванні та зсуві. На пружній опорі, яка змонтована на вібростенді, знаходиться маса  $m = 0,5 \text{ кг}$  (Рис.2.11) [117,118]. За допомогою багатоканальної станції DS-0271A, яка входить до станції DS-2000 (Рис.2.11, б), яка в свою чергу передає вихідний розгорнутий сигнал до датчика коливань I, вимірюється прискорення маси  $\ddot{x}(t)$ .

По знайденому прискоренню визначається сила  $F = m \cdot \ddot{x}(t)$ . Пристрій DS-2000 дозволяє визначити пікові значення амплітуди коливань в залежності від об'єкту дослідження. У місці закріплення опори за допомогою датчика II вимірюють прискорення  $\ddot{y}(t)$ . Інтегруючи обидва прискорення і поділивши на  $(2\pi f)^2$ , отримаємо переміщення  $x(t)$  і  $y(t)$ . Більш точні вимірювання можливі, якщо датчик збурення буде мати роз'єм для підключення зовнішнього вхідного сигналу.

Синхронне вимірювання проводиться за рахунок сигналу від DS-0271A. Частота змушуючої сили позначається  $f$ .



а) Стенд для повздовжнього навантаження

б) Схема стенду

в) Стенд для поперечного навантаження

Рис. 2.11. Стенд для визначення жорсткості та демпфірування

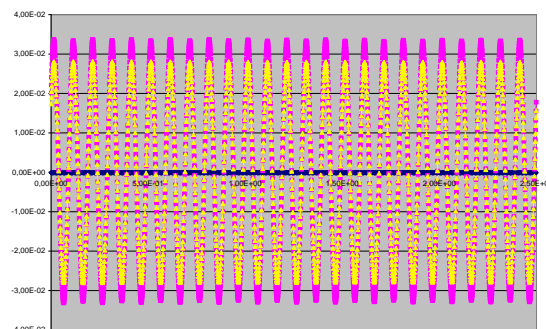
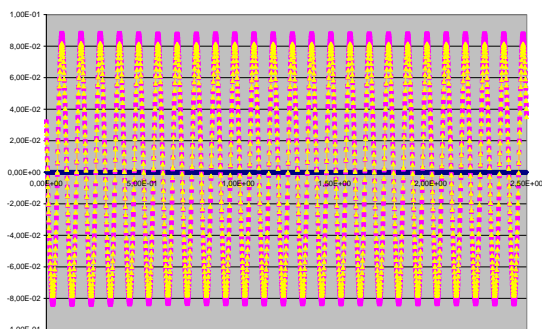
Типові залежності віброприскорень, які фіксувались за допомогою датчиків змонтованих на масі I та у місці закріплення опори на вібростенді II, в залежності від часу наведені на Рис.2.12.

Частота

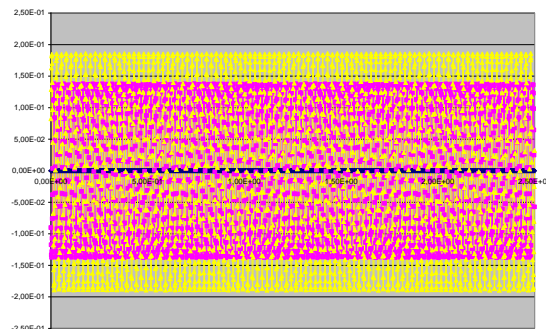
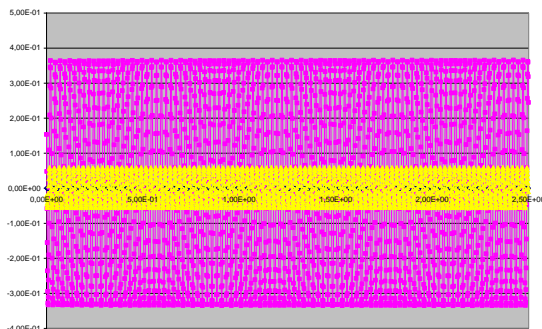
Повздовжні коливання

Поперечні коливання

10 Hz



40 Hz





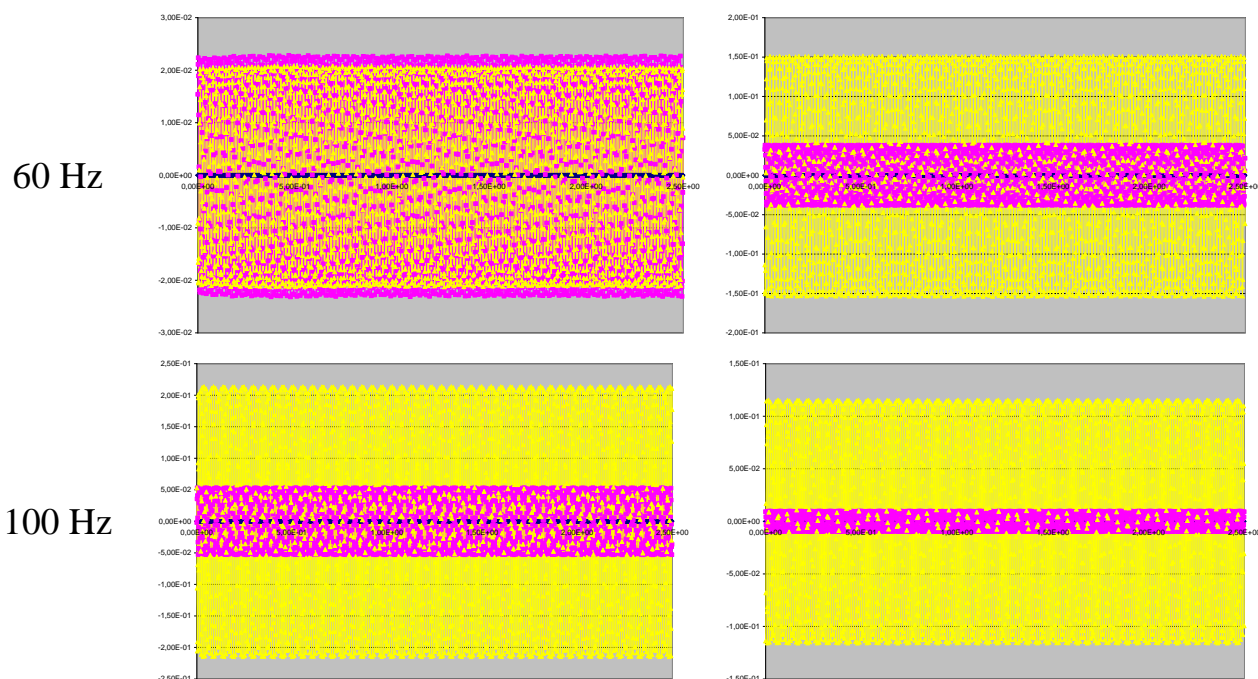


Рис.2.12. Результати експериментальних досліджень

Різниця  $z(t) = x(t) - y(t)$  показує величину деформації опори під дією навантаження. Використовуючи знайдені деформацію  $z(t)$  і силу  $F(t)$  визначається жорсткість та коефіцієнт демпфування.

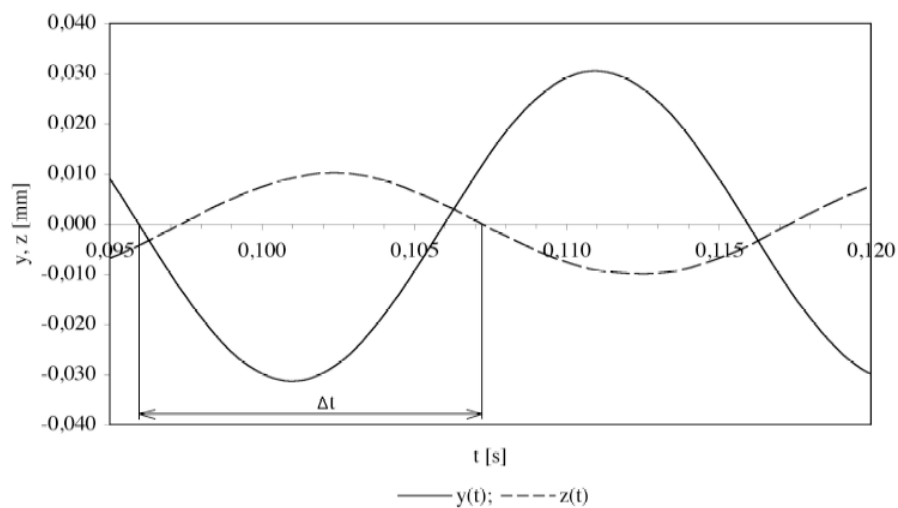


Рис.2.13. Визначення жорсткості та демпфування

Коефіцієнти жорсткості  $K$  та демпфування  $C$  визначаються з коефіцієнту наростання коливань та з кута зсуву фаз. Для цього розглядаємо диференціальне рівняння системи маса-опора:

$$m \cdot \ddot{z}(t) + c \cdot \dot{z}(t) + k \cdot z(t) = -m \cdot g - m \cdot \ddot{y}(t) \quad (2.93)$$

Вирішення цього рівняння складається з гомогенного та часткового розв'язку, причому цікавить тут тільки частковий розв'язок, оскільки гомогенний розв'язок затухає через деякий час. Для часткового розв'язку матимемо:

$$z(t) = \tilde{z}(\sin(2\pi ft - \alpha)) \quad (2.94)$$

з  $\Omega = 2\pi f$ , тоді система буде вібрувати з

$$y(t) = \tilde{y}(\sin(\Omega t)). \quad (2.95)$$

Підставляючи (2.94) та змушуючу силу (2.95) у диференціальне рівняння (2.93) з коефіцієнту наростання коливань  $V = \frac{\tilde{z}}{\tilde{y}}$  та кутом зсуву фаз  $\alpha$ :

$$V = \frac{\eta^2}{(1 - \eta^2) \cos(\alpha) + 2D \sin(\alpha)}, \quad (2.96)$$

$$\tan(\alpha) = \frac{2D\eta}{1 - \eta^2} \quad (2.97)$$

з постійною затухання  $D = \frac{\delta}{\omega_0}$ ,  $\eta = \frac{\Omega}{\omega_0}$ , кутова частота  $\omega_0^2 = \frac{K}{m}$  та постійною

затухання  $\delta = \frac{C}{(2m)}$ . З рівнянь (2.93), (2.96) та (2.97) отримуємо наступні рівняння

для жорсткості  $K$  та коефіцієнту демпфування  $C$ :

$$K = \frac{m\Omega^2(V + \cos(\alpha))}{V}, \quad (2.98)$$

$$C = 2m\omega_0 \frac{1 - \eta^2}{2\eta} \tan(\alpha). \quad (2.99)$$

Результати експериментального визначення жорсткості та демпфірування наведені нижче на Рис.2.14.

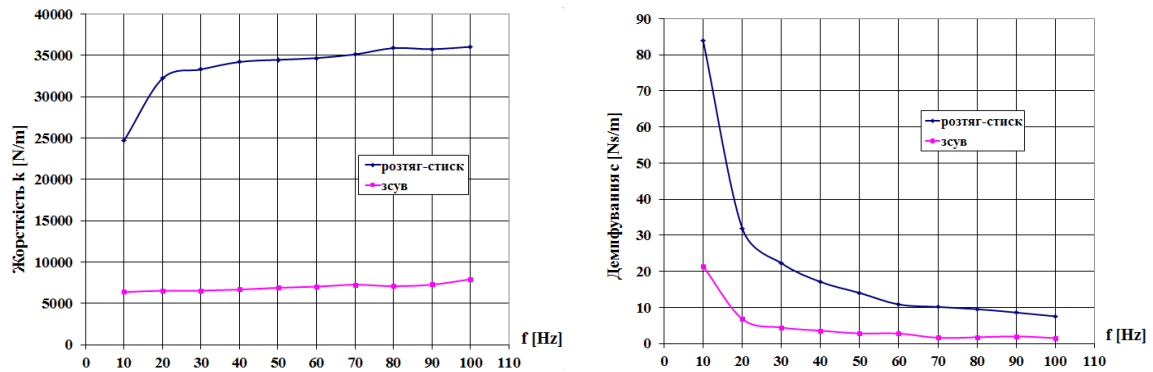


Рис.2.14. Залежності жорсткості та демпфірування від частоти

Пружна опора піддавалася циклічному деформуванню у вигляді розтягу-стиску за допомогою експериментального обладнання MTS 810 (рис.2.15) з амплітудами 1 мм та 0,5 мм при жорсткому режимі навантаження.

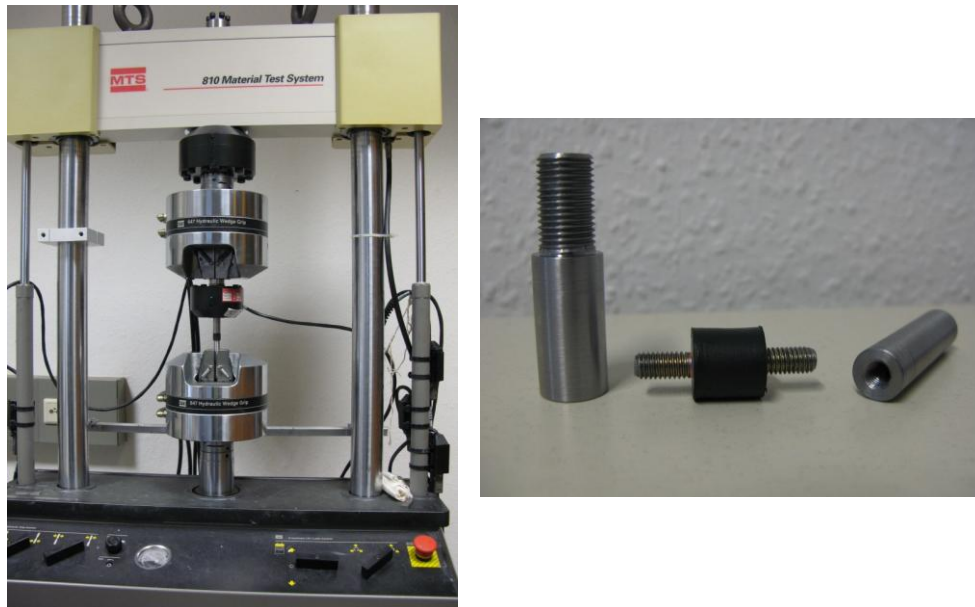


Рис.2.15 Стенд MTS 810 та зразки опор

На Рис.2.15 показаний випробувальний стенд MTS 810, на якому проводились випробування. Верхній захват нерухомий. За допомогою датчика вимірювалось переміщення нижнього захвату. Для вимірювання сили використовувалась месдоза до якої кріпиться верхній захват. Результати дослідів наведені на Рис.2.16.

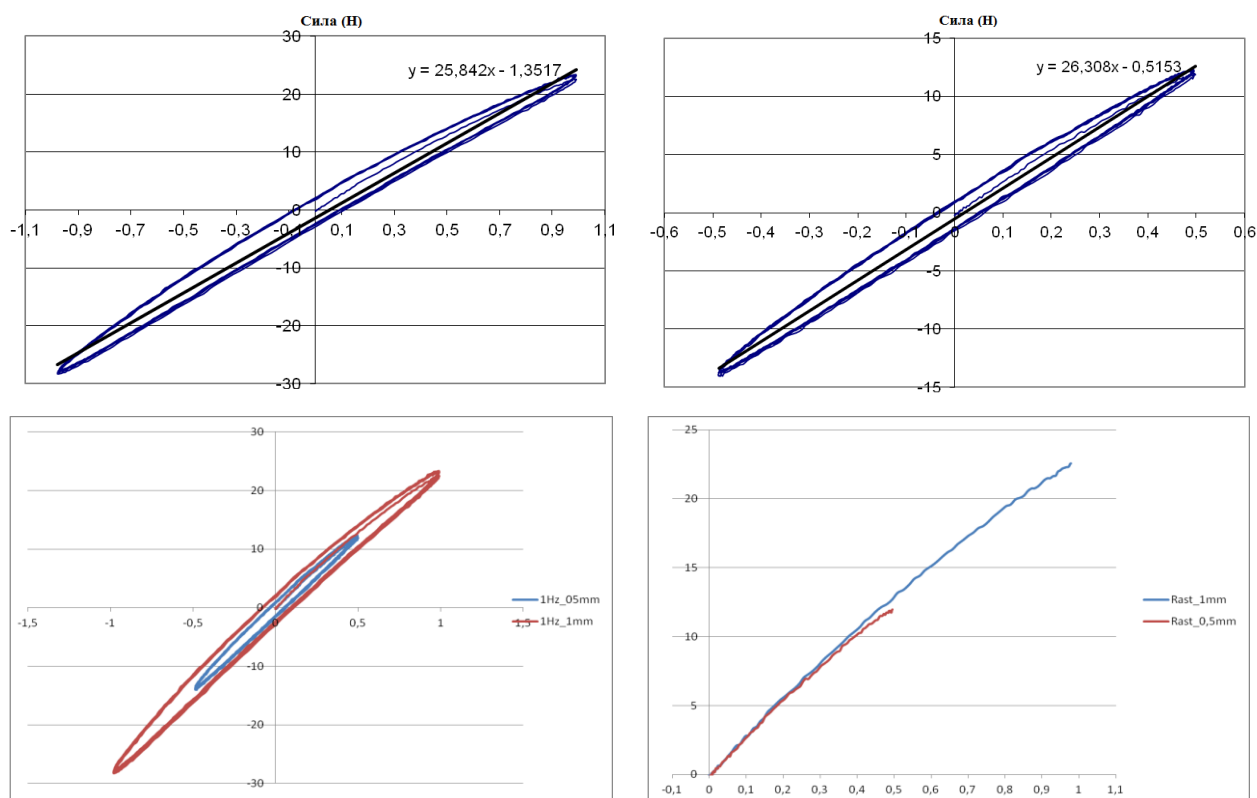


Рис.2.16. Пружні зміщення опори при розтягу-стиску

Результати експерименту показали, що пружні опори у першому наближенні можна вважати лінійно-пружними.

### 2.3.2. Експериментальні дані руху центрифуги

Динамічна поведінка центрифуги залежить не тільки від опор, а і від деформації пружних елементів, якими є вал та підшипники. Тому дослідження руху лабораторної центрифуги PICO 21 в цілому є необхідним.

Переміщення вимірювались за допомогою двох лазерів Triangulation Displacement Sensors Opto NCDT 2220 (micro - epsilon) ILD 2220 – 100, промені яких направлялись на бічну поверхню ротора лабораторної центрифуги під кутом  $90^\circ$ . Сигнали вимірювались за допомогою підсилювача типу NP-3414 вбудованого в лазери (Рис.2.17). Пристрій DS-2000 отримує цей сигнал, а DS-0227 аналізує його. Результати обробки отриманих даних та траєкторія руху тіла, що обертається, відображаються на екрані ПК. Визначались горизонтальні переміщення верхньої точки валу центрифуги при обертанні ротора на різних швидкостях обертання.

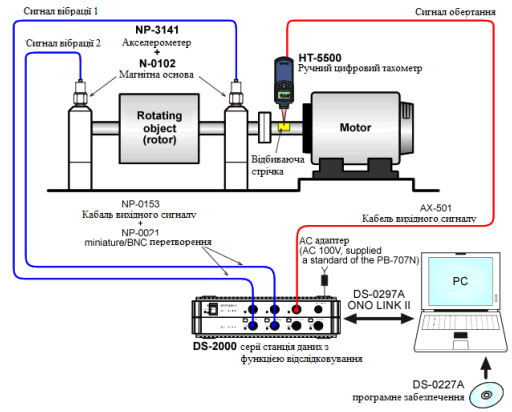
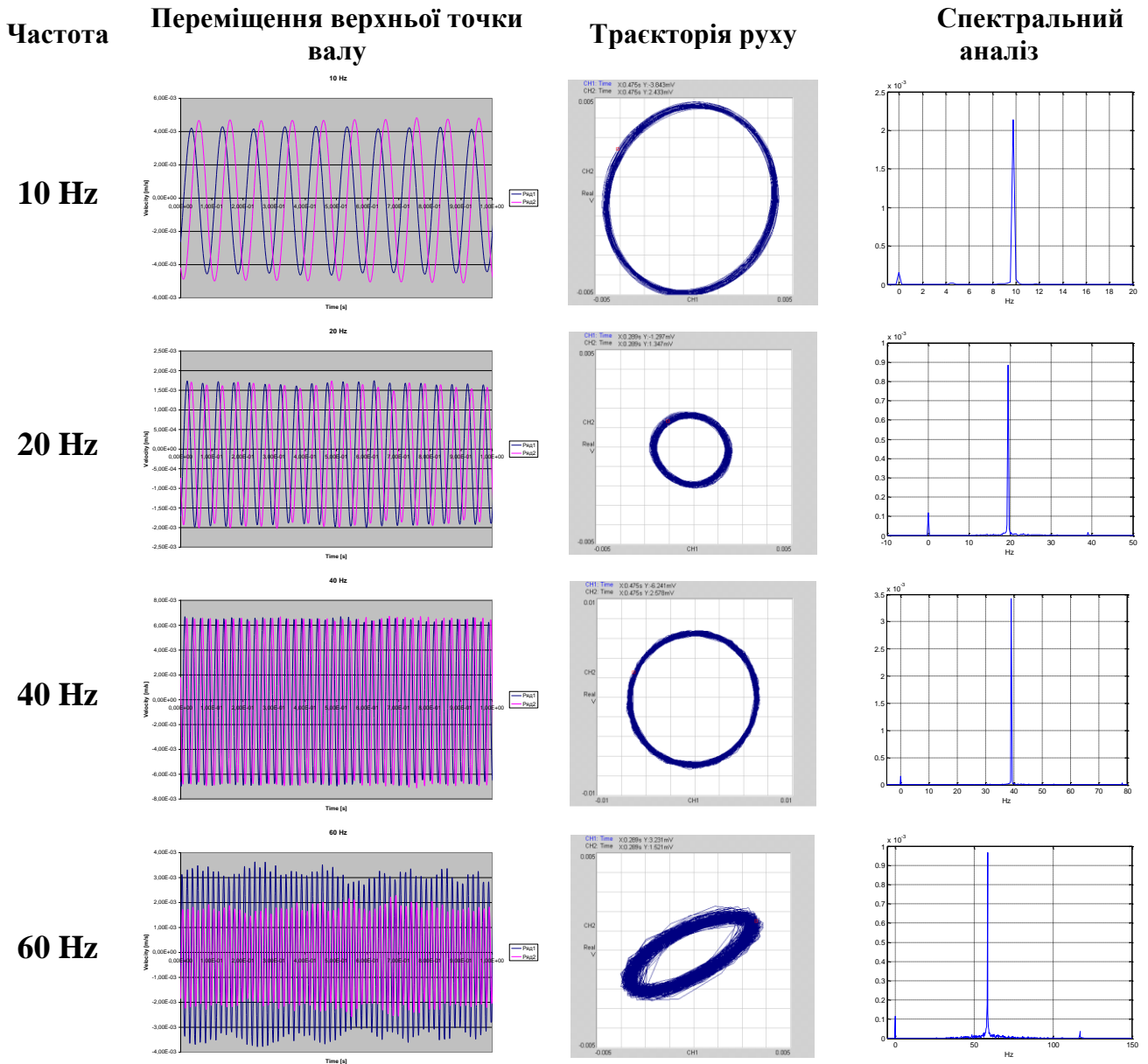
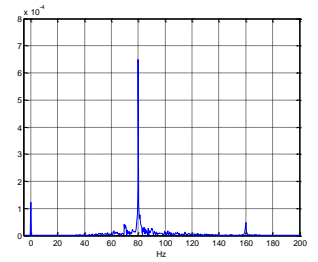
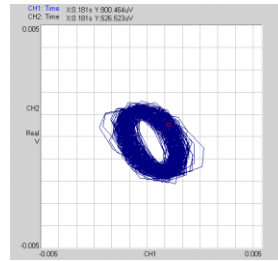
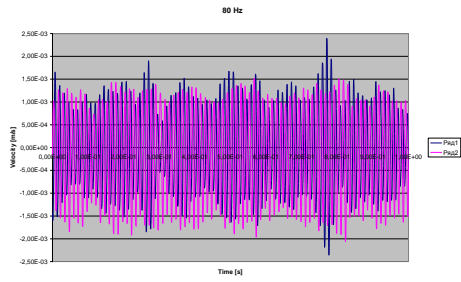


Рис.2.17. Стенд та його схематичне зображення для експериментального визначення залежності власних частот від частоти обертання

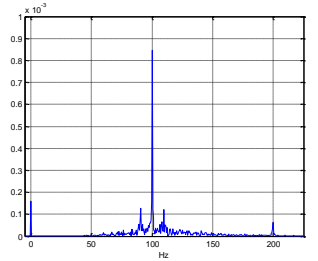
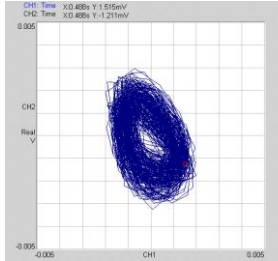
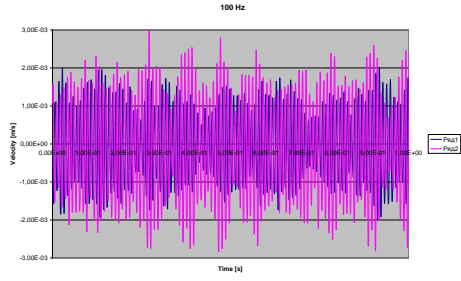
Переміщення та траєкторія руху, яку описує верхня точка валу з закріпленим ротором, графічно зображені на Рис.2.18.



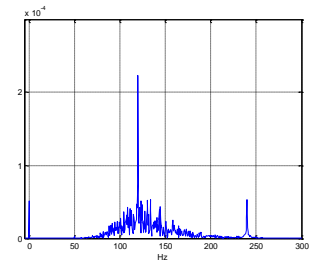
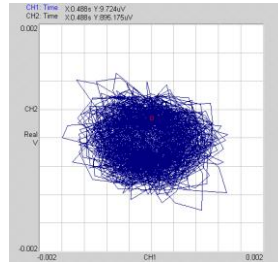
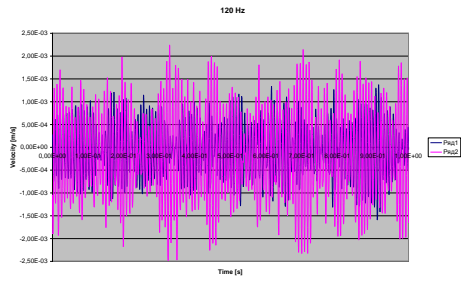
### 80 Hz



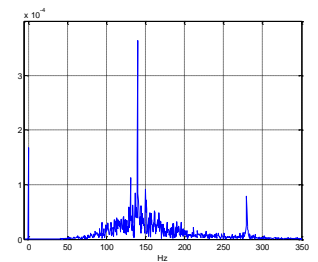
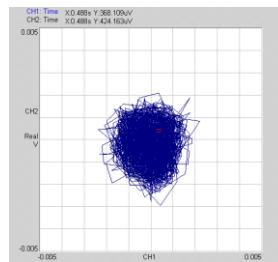
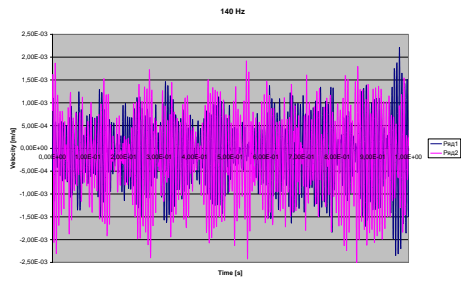
### 100 Hz



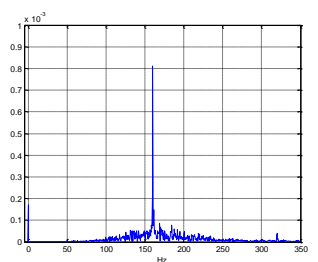
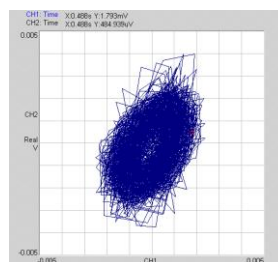
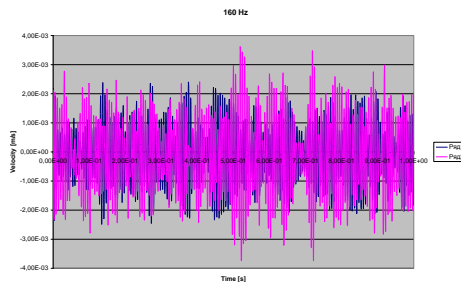
### 120 Hz



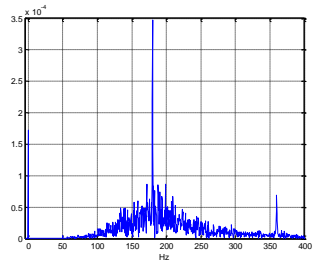
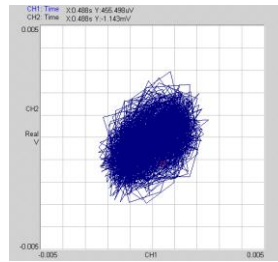
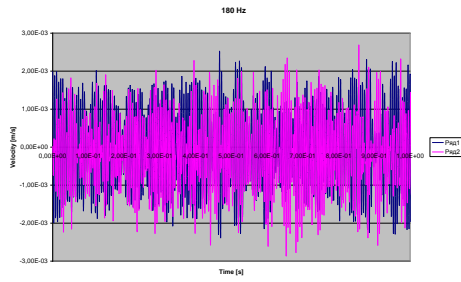
### 140 Hz



### 160 Hz



### 180 Hz



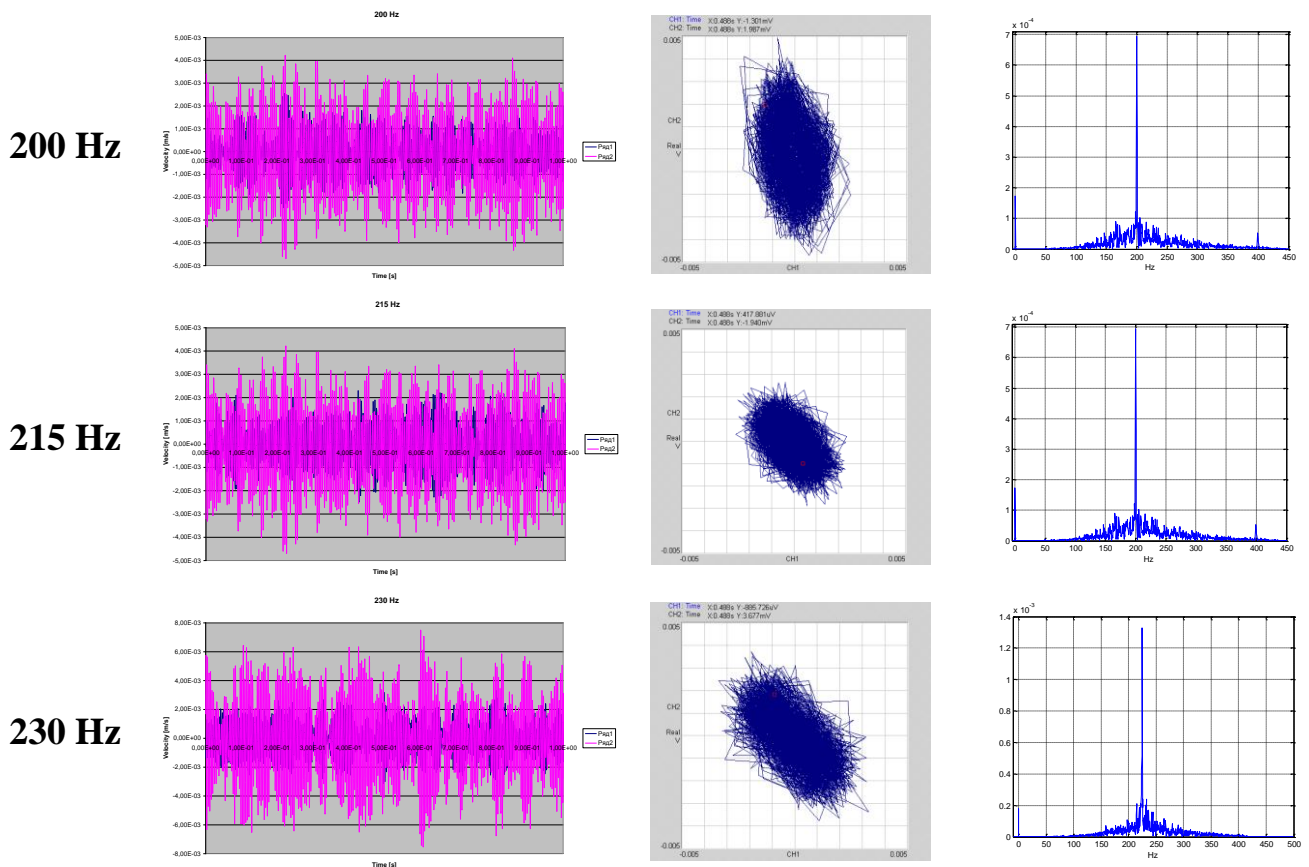


Рис.2.18. Переміщення та траєкторія руху верхньої точки валу

Спектральний аналіз коливань ротора дав можливість визначити власні частоти та показав, що збуджується не тільки основна частота, а і, на більш високих частотах, збуджується друга частота, яка відповідає подвоєній першій.

#### 2.4. Динаміка центрифуги на нелінійно-пружній основі

Для визначення довговічності конструкції необхідне визначення сил, які діють на неї. Сили, які діють на центрифугу, виникають в результаті її обертального руху та коливань. В силу цих причин необхідне вивчення руху центрифуги та її динаміки [118].

Рух центрифуги складається з обертального руху відносно власної вісі симетрії та обертання навколо вісей  $\xi, \eta$ .

Пружним елементом опор центрифуги є резинові циліндри. У зв'язку з цим при малих переміщеннях пружні сили, які діють з боку опор, можна вважати слабо нелінійними з м'якою характеристикою. Центрифуга в силу конструкції та

зроблених вище припущень являє собою тверде тіло з нерухомою точкою. Для описання її руху використаний один з варіантів кутів Ейлера-Крилова (Рис.2.19).

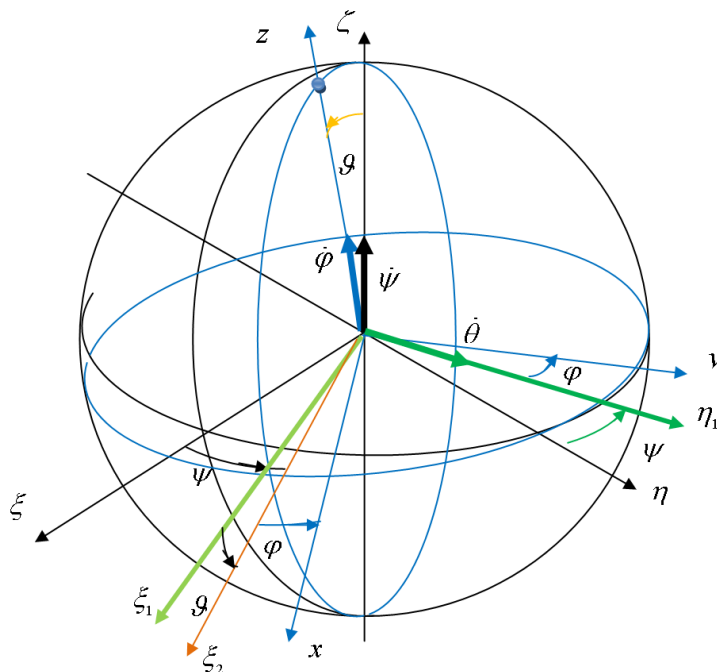


Рис.2.19. Кути Ейлера-Крилова

Для вирішення задачі використовуємо рівняння Лагранжа другого роду  $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$ , де  $L$  - функція Лагранжа,  $L = T - \Pi$ , де  $T$  - кінетична енергія,  $\Pi$  - потенціальна енергія [117,119,120]. Головними осями центрифуги є вісі  $x, y, z$ , причому  $J_x = J_y = J$  та дорівнюють сумі моментів інерції всіх деталей, які обертаються відносно цих вісей.

Кутові швидкості обертання

$$\begin{aligned}\omega_z &= \dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta, \\ \omega_x &= -\dot{\psi} \cos \varphi \sin \theta + \dot{\theta} \sin \varphi, \\ \omega_y &= \dot{\psi} \sin \varphi \sin \theta + \dot{\theta} \cos \varphi.\end{aligned}\tag{2.30}$$

Відповідно швидкостям знаходиться і кінетична енергія

$$T = \frac{1}{2} \left[ J_z (\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta)^2 + J (\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta) \right].\tag{2.31}$$

Потенціальна енергія системи складається з потенціальної енергії деформації опори. Вважається, що момент на опорі пропорційний синусу кута відхилення від



нерухомої вертикальної вісі  $M = C \sin \theta$ . Опора вважається абсолютно пружною, тому потенціальна енергія деформації рівна

$$\Pi = C \int_0^\theta \sin \alpha d\alpha = C(1 - \cos \theta). \quad (2.32)$$

Функція Лагранжа має вид

$$L = \frac{1}{2} \left[ J_z (\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta)^2 + J (\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta) \right] - C(1 - \cos \theta), \quad (2.33)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad q_1 = \psi, \quad q_2 = \theta, \quad q_3 = \phi. \quad (2.34)$$

Знаходимо похідні

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = J_z (\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta) \cos \theta + J \dot{\psi} \sin^2 \theta, \quad \frac{\partial L}{\partial \psi} = 0, \quad (2.35)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = J \dot{\theta}, \quad \frac{\partial L}{\partial \theta} = -J_z (\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta) \dot{\psi} \sin \theta + J \dot{\psi}^2 \sin \theta \cos \theta + C \sin \theta, \quad (2.36)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = J_z (\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta), \quad \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0. \quad (2.37)$$

З отриманих співвідношень слідує, що координати  $\psi$  та  $\phi$  - циклічні, так як із рівняння Лагранжа випливає

$$(\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta) = C_1, \quad J_z (\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta) \cos \theta + J \dot{\psi} \sin^2 \theta = C_2. \quad (2.38)$$

Використовуючи закон збереження енергії  $E = K + P$  у відповідності з яким маємо

$$E = \frac{1}{2} \left[ J_z (\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta)^2 + J (\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta) \right] + C(1 - \cos \theta). \quad (2.39)$$

Використовуючи закон збереження енергії [1,2], та циклічні координати [117], знаходимо швидкість  $\dot{\theta}$

$$J \dot{\theta}^2 = 2 \left[ E - C(1 - \cos \theta) \right] - J_z C_1^2 - J \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta, \quad (2.40)$$

$$J_z C_1 \cos \theta + J \dot{\psi} \sin^2 \theta = C_2, \quad (2.41)$$

$$\dot{\psi} \sin \theta = \frac{C_2 - J_z C_1 \cos \theta}{J \sin \theta}, \quad J \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta = \frac{(C_2 - J_z C_1 \cos \theta)^2}{J \sin^2 \theta}, \quad (2.42)$$

$$J \dot{\theta}^2 = 2 \left[ E - C(1 - \cos \theta) \right] - J_z C_1^2 - \frac{(C_2 - J_z C_1 \cos \theta)^2}{J \sin^2 \theta}, \quad (2.43)$$

$$J^2 \sin^2 \theta \dot{\theta}^2 = 2 \left[ E - C(1 - \cos \theta) \right] J \sin^2 \theta - J_z C_1^2 J \sin^2 \theta - (C_2 - J_z C_1 \cos \theta)^2, \quad (2.44)$$

$$\left(\frac{d}{dt}\cos\theta\right)^2 = \frac{1}{J^2}\left\{2J[E - C(1 - \cos\theta)]\sin^2\theta - J_z C_1^2 J \sin^2\theta - (C_2 - J_z C_1 \cos\theta)^2\right\}. \quad (2.45)$$

З отриманого виразу слідує, що права частина рівна нулю при  $\theta = 0$  тобто, точка  $\theta = 0$  являється коренем рівняння, якщо права частина рівна нулю. Другий корінь рівняння, очевидно, рівний куту при якому вся енергія переходить в потенціальну енергію. Очевидно, що потенціальна енергія максимальна при  $\theta = \pi / 2$  і рівна  $C$ .

Використовуючи перетворення  $y = \cos\theta$ , отримаємо диференціальне рівняння

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \frac{1}{J^2}\left\{2J[E - C(1 - y)](1 - y^2) - J_z C_1^2 J(1 - y^2) - (C_2 - J_z C_1 y)^2\right\}. \quad (2.46)$$

Права частина рівняння представляє собою кубічний поліном. Задача, що розглядається має розв'язок при умові, що права частина позитивна. Кубічний поліном має в загальному випадку три корені. В даному випадку один корінь рівний 1, другий корінь повинен знаходитись на інтервалі  $0 < y < 1$ . Так як при  $y \rightarrow -\infty$  права частина наближається до нескінченності, то залежність правої частини від  $y$  має вид показаний на Рис.2.20.

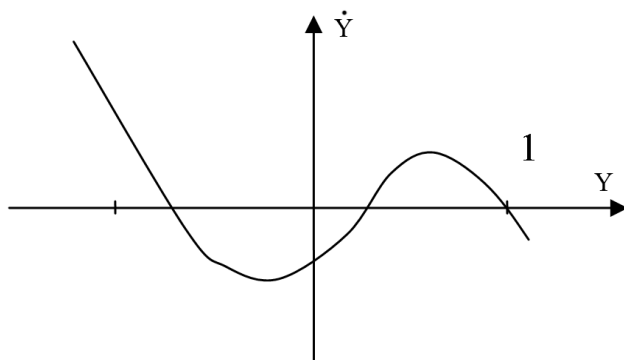


Рис.2.20. Графічне зображення розв'язку

Після приведення подібних членів поліном приймає вид

$$\begin{aligned} \dot{y}^2 = \frac{1}{J^2} \left[ \left( 2JE - 2JC - JJ_z C_1^2 - C_2^2 \right) + (2JC + 2C_2 I_z C_1) y + \right. \\ \left. + \left( -2JE + 2JC + JJ_z C_1^2 + J_z^2 C_1^2 \right) y^2 - 2JCy^3 \right], \end{aligned} \quad (2.47)$$

Розв'язки диференціальних рівнянь такого типу є еліптичні функції [3].

Якщо визначити коефіцієнти в правій частині наступним чином

$$A_4 = 2JE - 2JC - JJ_z C_1^2 - C_2^2, \quad 4A_3 = 2JC + 2C_2 C_1 J_z, \quad (2.48)$$

$$6A_2 = -2EJ + 2JC + JJ_z C_1^2 - C_1^2 J_z^2, \quad 4A_1 = -2JC. \quad (2.49)$$

Результат можна представити у вигляді

$$4A_1 Y^3 + 6A_2 Y^2 + 4A_3 Y + A_4 = \dot{Y}^2. \quad (2.50)$$

Якщо використати перетворення

$$g_2 = 3A_2^2 - 4A_1 A_3, \quad g_3 = 2A_1 A_2 A_3 - A_2^3 - A_1^2 A_4, \quad \dot{z} = \dot{Y}/A_1 \quad (2.51)$$

то отримане рівняння приводиться до стандартної форми Вейерштрасса

$$\dot{z}^2 = 4z^3 - g_2 z - g_3. \quad (2.52)$$

Розв'язком цього рівняння являється еліптична функція Вейерштрасса  $\wp(t)$  [119,120].

Для подальшого аналізу руху може знадобитись область визначення коефіцієнтів. За визначенням  $A_1 < 0$  і  $A_3 > 0$ . Так як при  $y = 0$  маємо  $\dot{y}^2 = (2JE - 2JC - JJ_z C_1^2 - C_2^2)/J^2$ , то  $(2JE - 2JC - JJ_z C_1^2 - C_2^2) \geq 0$  тому  $A_4 \geq 0$ . Аналіз співвідношення між  $A_4$  та  $6A_2$  показує, що  $A_2 < 0$ . Таким чином  $A_1 < 0$ ,  $A_2 < 0$ ,  $A_3 > 0$ ,  $A_4 > 0$ .

Розглянемо наближене вирішення, яке має місце для лінійно-пружної опори при малих кутах коливань центрифуги. В цьому випадку замінюємо  $\sin \theta \rightarrow \theta$ ,  $\cos \theta \rightarrow 1 - \frac{1}{2}\theta^2$  і отримуємо рівняння

$$\left[ \frac{d}{dt}(\theta^2) \right]^2 = \frac{4}{J^2} \left[ (2JE - J_z C_1^2 J) \theta^2 - \left( JC + \frac{1}{4} J_z^2 C_1^2 \right) \theta^4 \right], \quad (2.53)$$

Розв'язок цього рівняння

$$\theta = \sqrt{\frac{a}{b}} \sin \left[ \frac{1}{2} \sqrt{b} (t - \theta_0) \right], \quad (2.54)$$

$$\text{де } a = \frac{4}{J^2} (2JE - J_z C_1^2 J), \quad b = \frac{4}{J^2} \left( JC + \frac{1}{4} J_z^2 C_1^2 \right). \quad (2.55)$$

Після визначення  $\theta$ , використовуючи співвідношення

$$\dot{\psi} = \frac{C_2 - J_z C_1 \cos \theta}{J \sin^2 \theta}, \quad \dot{\phi} = C_1 - \dot{\psi} \cos \theta, \quad (2.56)$$

знаходимо  $\dot{\psi}, \dot{\phi}$  і інтегруючи їх знаходимо  $\psi, \phi$ . Постійні  $C_1, C_2$  знаходяться з початкових умов.

## 2.5. Визначення власних частот коливань лабораторної центрифуги з врахуванням гіроскопічних ефектів

Всі механічні системи, які включають в себе тіла, що обертаються, в тому чи іншому вигляді, здійснюють коливальні рухи. В залежності від конструкції система може мати різну кількість степенів вільності та різну кількість власних частот.

Відомо, що сили інерції твердого тіла, що обертається навколо нерухомої осі, є повністю зрівноважені у тому випадку, якщо центр ваги тіла лежить на осі обертання і якщо вісь обертання є головною віссю інерції тіла. При невиконанні першої з цих умов говорять про статичну незрівноваженість тіла - вона може бути виявлена і на необертальному роторі; невиконання другої умови називається динамічною незрівноваженістю - вона проявляє себе тільки при обертанні тіла.

Припустимо, що диск насаджений на вал без ексцентриситету (тобто так, що його центр ваги лежить в точності на осі валу). Припустимо також, що площина диска не цілком перпендикулярна до осі валу.

Позначимо перпендикуляр до площини диска, проведений через його центр ваги, буквою  $z$ ; вісь  $z$  створює з віссю валу кут  $\theta$ .

Найпростішими задачами про коливання валу з диском, площина якого здатна відхилятися від початкового положення, є задачі про двохопорний вал з розташованим на ньому диском. Особливістю коливань таких валів є те, що прогин перетину валу, де прикріплений диск, супроводжується поворотом перетину, тому відхилення центру валу супроводжується поворотом площини диску і, відповідно, одночасно відбувається прецесія центру валу та кутова прецесія диску. Кутова прецесія диску викликає додаткові сили внаслідок гіроскопічної дії диску [121].

В силу цих причин необхідне вивчення руху центрифуги та її динаміка.

В основі теорії гіроскопів та гіроскопічних явищ лежить кінематика та динаміка твердого тіла, що обертається навколо нерухомої точки.

При аналітичному описуванні руху твердих тіл та гіроскопів вводять як Декартові системи координат так і кути Ейлера-Крилова. Вибір їх у кінематиці довільний та визначається тільки характером, що відбувається відносно них руху. Введемо умовно нерухому або абсолютну систему координат  $\xi\eta\zeta$  з початком в деякій точці простору.

Для переходу від осей  $\xi, \eta, \zeta$  до осей  $x, y, z$ , зв'язаних з тілом, використовується наступна матриця:

$$\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad (2.57)$$

або у більш компактній формі

$$[\xi \ \eta \ \zeta]^T = \|a_{ik}\| \cdot [x \ y \ z]^T, \quad (2.58)$$

де символ  $T$  означає операцію транспонування матриці, та дев'ять направляючих косинусів.

Направляючі косинуси можна визначити за допомогою застосування основної формули сферичної тригонометрії або матричним методом [119,120].

Для вирішення задачі використовуємо рівняння Лагранжа другого роду

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad \text{де } L - \text{ функція Лагранжа, } L = T - \Pi, \quad \text{де } T - \text{ кінетична енергія, } \Pi -$$

потенціальна енергія. Головними осями центрифуги являються осі  $x, y, z$ , причому  $J_x = J_y = J$  та рівні сумі моментів інерції всіх деталей, що обертаються відносно цих осей.

За допомогою матриці перетворення визначаємо кутові швидкості обертання

$$\begin{aligned} \omega_z &= \dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta, \\ \omega_x &= -\dot{\psi} \cos \varphi \sin \theta + \dot{\theta} \sin \varphi, \\ \omega_y &= \dot{\psi} \sin \varphi \sin \theta + \dot{\theta} \cos \varphi. \end{aligned} \quad (2.59)$$

Відповідно швидкостям визначається і кінетична енергія

$$T = \frac{1}{2} \left[ I_x \cdot \left( \dot{\psi} \cdot \sin \theta + \dot{\phi} \right)^2 + I_y \cdot \left( \dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \cdot \cos^2 \theta \right) \right]. \quad (2.60)$$

Потенціальна енергія системи запишеться наступним чином

$$П = \frac{1}{2} C_3 \cdot (\psi^2 + \theta^2), \quad (2.61)$$

де  $C_3$  – жорсткість при згині.

З врахуванням малості кутів та приймаючи  $\sin \theta = \theta$ ,  $\cos \theta = 1$  вирази матимуть вигляд:

$$K = \frac{1}{2} \left[ I_x \cdot \left( \dot{\psi} \cdot \theta + \dot{\phi} \right)^2 + I_y \cdot \left( \dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \right) \right]. \quad (2.62)$$

Знаходимо похідні від функції Лагранжа

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = I_x \cdot \left( \dot{\psi} \cdot \theta + \dot{\phi} \right) \cdot \theta + I_y \cdot \dot{\psi}, \quad \frac{\partial L}{\partial \psi} = -C_{3Г} \cdot \psi, \quad (2.63)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = I_y \cdot \dot{\theta}, \quad \frac{\partial L}{\partial \theta} = I_x \cdot \left( \dot{\psi} \cdot \theta + \dot{\phi} \right) \cdot \dot{\psi} - C_{3Г} \cdot \theta, \quad (2.64)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = I_x \cdot \left( \dot{\psi} \cdot \theta + \dot{\phi} \right), \quad \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0. \quad (2.65)$$

З отриманих співвідношень випливає, що координати  $\psi$  та  $\phi$  - циклічні, так як з рівняння Лагранжа випливає  $\left( \dot{\psi} \cdot \theta + \dot{\phi} \right) = D$ .

Отримаємо систему рівнянь:

$$I_y \cdot \ddot{\psi} + I_x \cdot D \cdot \dot{\theta} + C_3 \cdot \psi = 0, \quad (2.66)$$

$$I_y \cdot \ddot{\theta} - I_x \cdot D \cdot \dot{\psi} + C_3 \cdot \theta = 0. \quad (2.67)$$

Записавши  $\psi = A \cdot \cos(p \cdot t)$  та  $\theta = B \cdot \cos(p \cdot t)$ , де А і В - амплітуди, та підставляючи у систему рівнянь, отримаємо:

$$\begin{aligned} -I_y \cdot A \cdot p^2 \cdot \cos(p \cdot t) + I_x \cdot D \cdot B \cdot p \cdot \cos(p \cdot t) + C_3 \cdot A \cdot \cos(p \cdot t) &= 0, \\ -I_y \cdot B \cdot p^2 \cdot \sin(p \cdot t) + I_x \cdot D \cdot A \cdot p \cdot \sin(p \cdot t) + C_3 \cdot B \cdot \sin(p \cdot t) &= 0. \end{aligned} \quad (2.68)$$

Спростивши обидва рівняння матимемо:

$$\begin{aligned} I_y \cdot A \cdot p^2 - I_x \cdot D \cdot B \cdot p - C_3 \cdot A &= 0, \\ I_y \cdot B \cdot p^2 - I_x \cdot D \cdot A \cdot p - C_3 \cdot B &= 0. \end{aligned} \quad (2.69)$$

Розв'язавши дані рівняння, отримаємо:

$$p' = \frac{I_x \cdot D \cdot B}{2 \cdot I_y \cdot A} \cdot \left[ 1 \pm \sqrt{1 + \frac{4 \cdot A^2 \cdot C_3 \cdot I_y}{I_x^2 \cdot D^2}} \right], \quad (2.70)$$

$$p'' = \frac{I_x \cdot D \cdot A}{2 \cdot I_y \cdot B} \cdot \left[ 1 \pm \sqrt{1 + \frac{4 \cdot B^2 \cdot C_3 \cdot I_y}{I_x^2 \cdot D^2}} \right]. \quad (2.71)$$

Отримані результати перевірялись шляхом проведення досліджень лабораторної центрифуги РІСО 21.

Траєкторія руху крайньої верхньої точки валу, на який насаджений ротор, описана наступним виразом  $\arccos(\cos(A \cdot \cos pt) \cdot \cos(B \cdot \sin pt))$ , графічно зображена у полярних координатах на Рис.2.21.

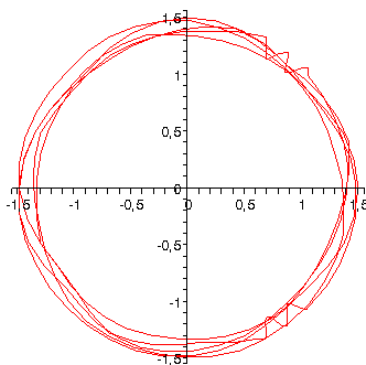
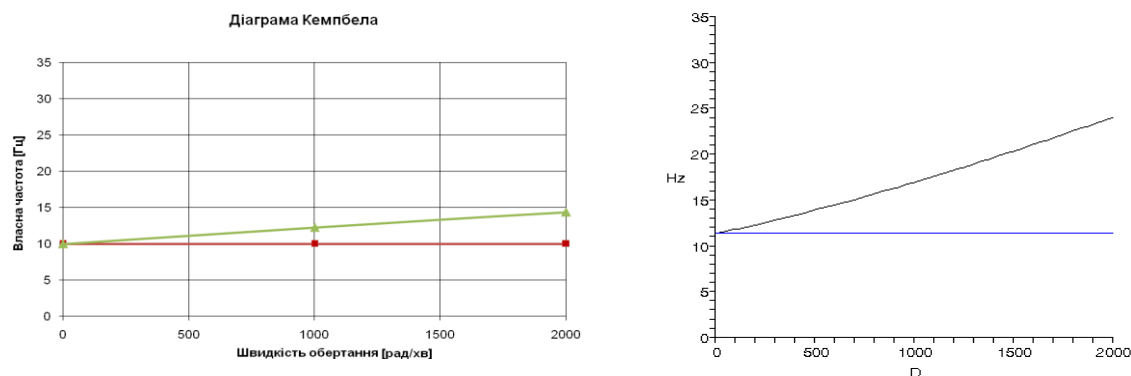


Рис.2.21. Траєкторія руху верхньої точки валу

Експериментально динамічні характеристики центрифуги визначались наступним чином: за допомогою двох лазерів LMS LASER VIBROMETER Optical Sensor визначались горизонтальні переміщення верхньої точки валу центрифуги при обертанні ротору на різних швидкостях обертання. Отримані дані оброблялись за

допомогою спеціального програмного пакету LMS TestLab. Результати розрахунків та експериментальних досліджень наведені на Рис.2.22.



**Результат дослідження:**

$$P1=10,0 \text{ Гц}$$

$$P2=10,0 \text{ Гц}$$

**Числовий результат:**

$$P1=11,36 \text{ Гц}$$

$$P2=11,35 \text{ Гц}$$

Рис.2.22. Результати розрахунків та експериментальних досліджень

## 2.6. Рівняння руху центрифуги як багатомасової системи з врахуванням гіроскопічних ефектів

### Використання принципу Даламбера

Центрифуги, ротор яких розміщений на гнучкому валу і має велику швидкість обертання, відносяться до класу машин, при проектуванні і розрахунку яких необхідно враховувати гіроскопічні ефекти.

Центрифуги зазвичай мають змінний комплект роторів з різними масами та моментами інерції, діапазон їх робочих швидкостей досить широкий (до 75000 об/хв), тому вказані фактори впливають на коливання. Загальна теорія коливань вертикальних роторів розглянута в роботах [5,19,36].

Збільшення кутової швидкості може помітно впливати на пружні деформації осі ротора гіроскопа. Одна з перших робіт, присвячена динаміці гіроскопа з пружною віссю, належить Магнусу [27,28]. Пізніше коливання вільного гіроскопа з пружним валом досліджувались Маундером та Уіппелом [29,30]. Стійкість руху гіроскопа з врахуванням пружних властивостей осі ротора розглядалися В.В. Крементуло [31].



Найпростішими задачами про коливання валу з диском, площина якого здатна відхилятися від початкового положення, є задачі про двохопорний вал з розташованим на ньому диском. Рух механічної системи, у якій ротор розташований посередині підшипникових вузлів, розглянуто досить широко [12,23]. Особливістю коливань таких валів є те, що прогин перетину валу, де прикріплений диск, супроводжується поворотом перетину, тому відхилення центру валу супроводжується поворотом площини диску і, відповідно, одночасно відбувається прецесія центру валу та кутова прецесія диску. Кутова прецесія диску викликає додаткові сили внаслідок гіроскопічних ефектів [7,11, 13].

Одним з можливих підходів до вивчення питань динаміки твердого тіла та теорії гіроскопів є використання методу кінетостатики. В цьому випадку, до сил, що діють на тіло, ми приєднуємо сили інерції його частинок та цим перетворюємо задачу динаміки в задачу статичної, яку і вирішуємо відомими методами статичної твердого тіла. Особливо такий підхід можливий тоді, коли рух тіла задано, а визначаються ті чи інші прикладені до нього сили. При вивченні гіроскопічних ефектів використання методу кінетостатики часто дає досить просте рішення задачі. При вирішенні задачі динаміки твердого тіла методом кінетостатики є доцільним звести усі сили інерції частин тіла до головної сили та головного моменту. Головний момент сил інерції твердого тіла відіграє основну роль в теорії гіроскопічних явищ і називається гіроскопічним моментом.

В результаті пружних деформацій вала вісь обертання диска  $z_1$  утворює з нерухомими координатними площинами  $zy$  та  $zx$  малі кути  $\vartheta_x$  та  $\vartheta_y$  (рис.2.23).

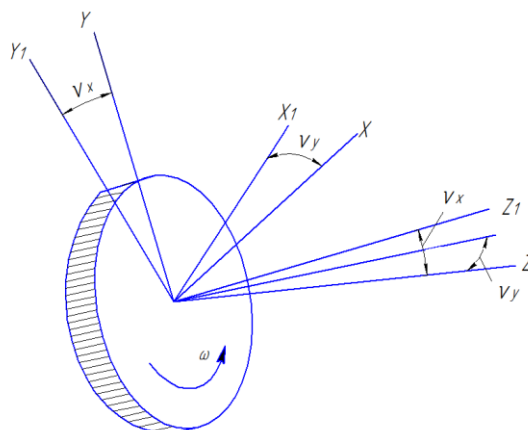


Рис.2.23. Обертання диску насадженого на невагомий вал

Моменти інерції диска, відносно пов'язаних з ним осей  $x_1$ ,  $y_1$ ,  $z_1$ , позначимо:

$$I_{Z1} = I_0; I_{X1} = I_{Y1} = I_1.$$

Лабораторну центрифугу типу Рісо 21 (Рис.2.24) можна звести до еквівалентної системи з трьох тіл (статора, якоря та ротора), одне з яких не обертається, тому виведемо систему рівнянь для лабораторної центрифуги Рісо 21, яка має сумарно 14 степенів вільності для всіх її елементів.

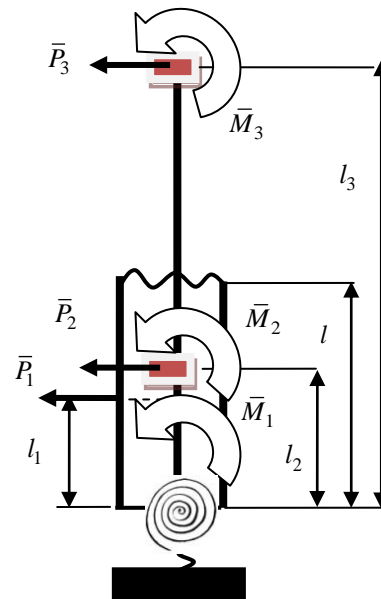
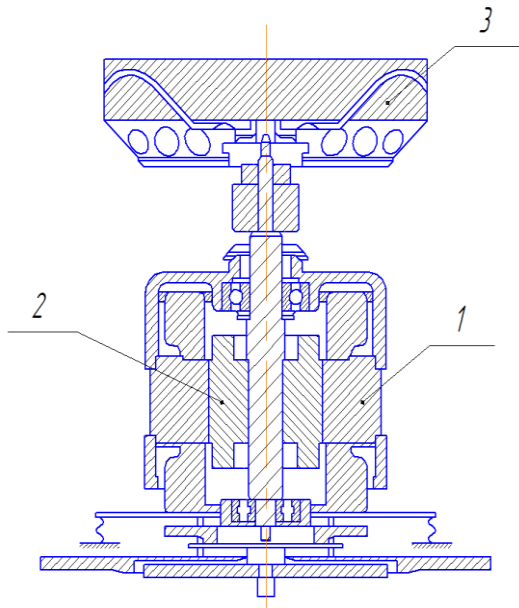


Рис.2.24. Ескіз центрифуги Рісо 21    Рис.2.25. Розрахункова схема центрифуги

Для визначення власних частот розроблена розрахункова схема, яка наведена на Рис.2.25, яка максимально наближена до реальної центрифуги, що досліджується. На наведеній схемі  $\bar{P}_1$ ,  $\bar{P}_2$ ,  $\bar{P}_3$ ,  $\bar{M}_1$ ,  $\bar{M}_2$ ,  $\bar{M}_3$  – сили та моменти інерції статора, якоря та ротора відповідно.

Із показаних в одній площині трьох мас обертаються лише дві (якір і ротор), тому для подальших розрахунків кутова швидкість статора дорівнює нулю.

Розглянемо коливання без врахування дисипативних сил, скориставшись методом Д'аламбера [122], записавши переміщення та кут повороту кожного тіла як лінійну функцію від прикладених на систему сил та моментів. Вплив цих сил/моментів виражається за допомогою коефіцієнтів жорсткості  $\delta_{ij}$ .

$$W = -P_1 \cdot \delta_{11} - P_2 \cdot \delta_{12} - P_3 \cdot \delta_{13} - M_1 \cdot \delta_{14} - M_2 \cdot \delta_{15} - M_3 \cdot \delta_{16} \quad (2.72)$$

Великий вплив на динаміку роторної системи має жорсткість. Для обрахунку власних частот центрифуги необхідно враховувати пружні опори, характеристики яких визначались експериментально. Позначимо  $\delta_{ij}$  - переміщення/поворот диску під дією одиничної сили/моменту. Розрахунок коефіцієнтів проводився аналітично та наведений нижче.

Одиничні переміщення будуть являти собою суму 2-х переміщень: переміщення тіла, як абсолютно твердого за рахунок пружних опор ( $w_0$ ,  $\theta_0$  - переміщення та кут повороту у заземленні) та деформації валу центрифуги ( $w|_x$ ). Кути повороту, аналогічно переміщенням, вираховуються з тих самих міркувань.

За методом початкових параметрів [119] визначаються переміщення:

Для статора:

$$\begin{aligned} \delta_{11} &= w_0(\bar{P}_1) + \theta_0(\bar{P}_1)l_1 = \frac{1}{C_Q} + \frac{l_1}{C_M}l_1, & \delta_{12} &= w_0(\bar{P}_1) + \theta_0(\bar{P}_1)l_2 = \frac{1}{C_Q} + \frac{l_1}{C_M}l_2, \\ \delta_{13} &= w_0(\bar{P}_1) + \theta_0(\bar{P}_1)l_3 = \frac{1}{C_Q} + \frac{l_1}{C_M}l_3, & \delta_{14} &= \delta_{15} = \delta_{16} = \delta_{44} = \delta_{45} = \delta_{46} = \frac{1}{C_M} \end{aligned} \quad (2.73)$$

де  $C_M$  і  $C_Q$  – жорсткості опор для кута повороту і прогину відповідно.

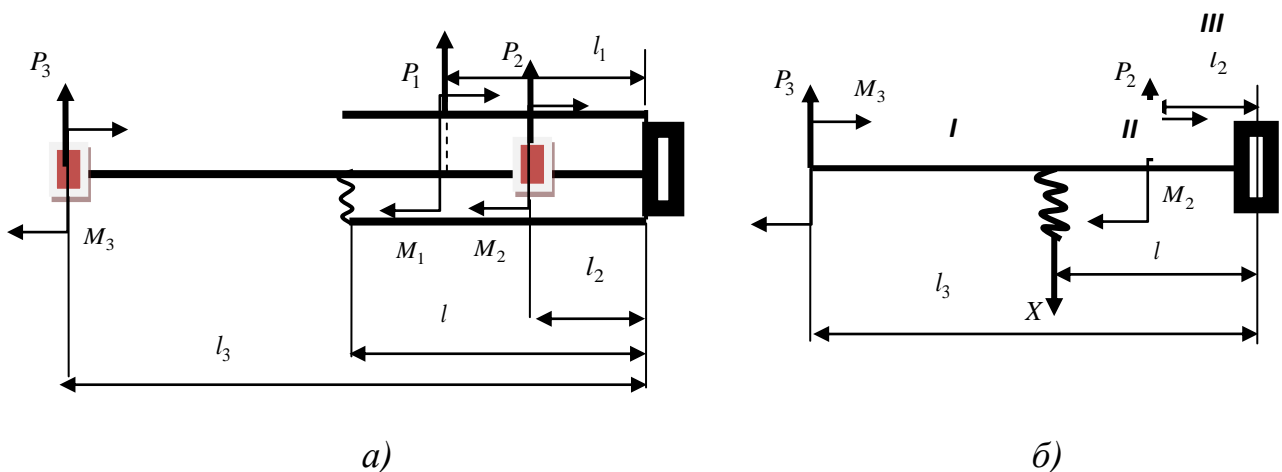


Рис.2.26. Розрахункова схема: а- центрифуга, б- для визначення деформації валу

Для визначення переміщень/повороту якоря і ротора необхідно знайти реакцію у підшипнику. Для цього ми розв'язуємо статично невизначену систему (див. схему Рис.2.27 та Рис.2.28) :

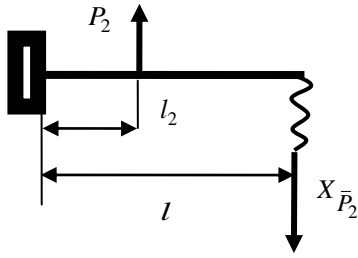


Рис.2.27. Розрахункова схема від  
одиничної сили для анкера

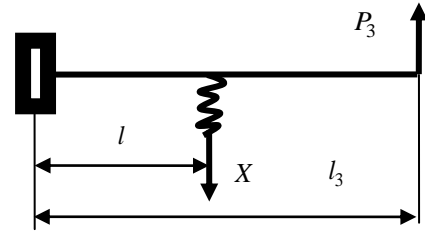


Рис.2.28. Розрахункова схема від  
одиничної сили для ротора

Запишемо переміщення валу у підшипнику від зовнішніх одиничних сил :

$$w(\bar{P}_2)_{x=l} = \frac{1}{EI} \left[ \frac{l_2 l^2}{2} - \frac{l^3}{6} + \frac{(l-l_2)^3}{6} \right] = \frac{1}{EI} \left[ \frac{3l_2 l^2 - l^3 + (l-l_2)^3}{6} \right] = \quad (2.74)$$

$$= \frac{1}{6EI} (3l_2 l^2 - l^3 + l^3 - 3l^2 l_2 + 3l l_2^2 - l_2^3) = \frac{1}{6EI} (3l l_2^2 - l_2^3),$$

З іншого боку теж саме переміщення від реакції :

$$w(X_{\bar{P}_2})_{x=l} = \frac{X}{C_{\Pi}} + \frac{Xl^3}{3EI} = X \left( \frac{1}{C_{\Pi}} + \frac{l^3}{3EI} \right), \quad (2.75)$$

$$X \left( \frac{1}{C_{\Pi}} + \frac{l^3}{3EI} \right) = \frac{1}{6EI} (3l l_2^2 - l_2^3), \quad X(\bar{P}_2) = \frac{(3l-l_2)l_2^2}{\left( \frac{6EI}{C_{\Pi}} + 2l^3 \right)}, \quad (2.76)$$

Після знайденого значення реакції підшипника знаходимо початкові зусилля у защемленому кінці :

$$M_0 = l_2 - l \frac{(3l-l_2)l_2^2}{\left( \frac{6EI}{C_{\Pi}} + 2l^3 \right)}, \quad Q_0 = -1 + \frac{(3l-l_2)l_2^2}{\left( \frac{6EI}{C_{\Pi}} + 2l^3 \right)}, \quad w|_{x=l_2} = \frac{1}{EI} \left[ \frac{M_0 l_2^2}{2} + \frac{Q_0 l_2^3}{6} \right] \quad (2.77)$$

Запишемо переміщення якоря від прогину валу:

$$w|_{x=l_2} = \frac{1}{EI} \left\{ \frac{l_2^2}{2} \left[ l_2 - l \frac{(3l-l_2)l_2^2}{\left( \frac{6EI}{C_{\Pi}} + 2l^3 \right)} \right] + \frac{l_2^3}{6} \left[ -1 + \frac{(3l-l_2)l_2^2}{\left( \frac{6EI}{C_{\Pi}} + 2l^3 \right)} \right] \right\} \quad (2.78)$$

Остаточне переміщення якоря:

$$\delta_{22} = w_0(\bar{P}_2) + \theta_0(\bar{P}_2)l_2 + w|_{x=l_2}, \quad (2.79)$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{C_Q} + \frac{l_2}{C_M}l_2 + \frac{1}{EI} \left\{ \frac{l_2^2}{2} \left[ l_2 - l \frac{(3l-l_2)l_2^2}{\left(\frac{6EI}{C_{\Pi}} + 2l^3\right)} \right] + \frac{l_2^3}{6} \left[ -1 + \frac{(3l-l_2)l_2^2}{\left(\frac{6EI}{C_{\Pi}} + 2l^3\right)} \right] \right\}, \quad (2.80)$$

де  $C_{\Pi}$  – жорсткість підшипника

Аналогічні розрахунки проводяться і від дії одиничного моменту. Далі розраховуємо, по аналогії, усі інші коефіцієнти:

$$X(\bar{P}_3) = \frac{(3l_3-l)l^2}{\left(\frac{6EI}{C_{\Pi}} + 2l^3\right)}, \quad \delta_{23} = \frac{1}{C_Q} + \frac{l_3}{C_M}l_2 + \frac{1}{EI} \frac{l_2^2}{6} \left\{ (3l_3-l_2) - \frac{(3l-l_2)(3l_3-l)l^2}{\left(\frac{6EI}{C_{\Pi}} + 2l^3\right)} \right\} \quad (2.81)$$

$$\delta_{24} = \frac{l_2}{C_M}, \quad \delta_{34} = \frac{l_3}{C_M} \quad (2.82)$$

$$X(M_2) = \frac{(2l-l_2)l_2}{\left(\frac{2EI}{C_{\Pi}} + 2l^3\right)}, \quad \delta_{25} = \frac{l_2}{C_M} + \frac{1}{EI} \frac{l_2^2}{6} \left\{ 3 - \frac{(3l-l_2)(2l_2-l_2^2)}{\left(\frac{2EI}{C_{\Pi}} + \frac{2l^3}{3}\right)} \right\} \quad (2.83)$$

$$X(M_3) = \frac{l^2}{\left(\frac{2EI}{C_{\Pi}} + \frac{2l^3}{3}\right)}, \quad \delta_{26} = \frac{l_2}{C_M} + \frac{1}{EI} \frac{l_2^2}{6} \left\{ 3 - \frac{(3l-l_2)l^2}{\left(\frac{2EI}{C_{\Pi}} + \frac{2l^3}{3}\right)} \right\} \quad (2.84)$$

$$\delta_{33} = \frac{1}{C_Q} + \frac{l_3}{C_M}l_3 + \frac{1}{3EI_2}(l_3-S)^3 + \frac{1}{3EI} \left( (l_3-l)^3 - (l_3-S)^3 \right) + \frac{1}{EI} \left( \frac{l_3^3 - (l_3-l)^3}{3} - X(\bar{P}_3) \frac{l^2(3l_3-l)}{6} \right), \quad (2.85)$$

де  $S$  – це відстань до зміни жорсткості валу, так як вал має ділянки переходу з різними діаметрами, а  $X$  – реакція у підшипнику за рахунок одиничної сили  $P_3$

$$\delta_{35} = \frac{l_3}{C_M} + \frac{1}{EI} \frac{l_2}{6} \left\{ 3(2l_3 - l_2) - (3l_3 - l) l^2 \frac{(2l - l_2)}{\left( \frac{2EI}{C_{\Pi}} + \frac{2l^3}{3} \right)} \right\} \quad (2.86)$$

$$\delta_{36} = \frac{l_3}{C_M} + \frac{1}{2EI_2} (l_3 - S)^2 + \frac{1}{2EI} (2l_3 - S) S - \frac{S}{EI} \frac{l^2}{\left( \frac{2EI}{C_{\Pi}} + \frac{2l^3}{3} \right)} \left( \frac{S^3}{3} + l_3 l - \frac{S(l_3 - l)}{2} \right), \quad (2.87)$$

$$\delta_{55} = \frac{1}{C_M} + \frac{1}{EI} \frac{l_2}{2} \left\{ 2 - \frac{(2l - l_2)^2 l_2}{\left( \frac{2EI}{C_{\Pi}} + \frac{2l^3}{3} \right)} \right\} \quad (2.88)$$

$$\delta_{66} = \frac{1}{C_M} + \frac{1}{EI_2} (l_3 - S) + \frac{1}{EI} S - \frac{l^4}{2EI \left( \frac{2EI}{C_{\Pi}} + \frac{2l^3}{3} \right)} \quad (2.89)$$

В результаті отримано всі необхідні коефіцієнти.

Записуємо вирази для сил і моментів кожного тіла, що знаходиться на валу.

Сили, що діють на елементи системи [119,120]:

$$P_{SX} = m_S \cdot \frac{d^2 x_1}{dt^2}; \quad P_{AX} = m_A \cdot \frac{d^2 x_2}{dt^2}; \quad P_{RX} = m_R \cdot \frac{d^2 x_3}{dt^2}; \quad (2.90)$$

$$P_{SY} = m_S \cdot \frac{d^2 y_1}{dt^2}; \quad P_{AY} = m_A \cdot \frac{d^2 y_2}{dt^2}; \quad P_{RY} = m_R \cdot \frac{d^2 y_3}{dt^2} \quad (2.91)$$

Для визначення моментів, що впливають на маси з боку вала, використаємо формулу, згідно якої похідна за часом від моменту кількості руху дорівнює моменту зовнішніх сил. Кутова швидкість обертання якоря і ротора відносно осі  $z_1$  дорівнює  $\omega$ , відповідно моменти кількості руху відносно цієї осі  $L_{AZ1} = I_{A0} \cdot \omega$ ,  $L_{RZ1} = I_{R0} \cdot \omega$ ,  $L_{SZ1} = 0$ .

Кутова швидкість обертання відносно пов'язаної з масами осі  $x_i$  дорівнює  $d\vartheta_{x_i}/dt$ , а моменти кількості руху відповідно:

$$L_{AX1} = I_A \cdot \frac{d\vartheta_{x2}}{dt}, L_{RX1} = I_R \cdot \frac{d\vartheta_{x3}}{dt}, L_{SX1} = I_S \cdot \frac{d\vartheta_{x1}}{dt}. \quad (2.92)$$

Кутова швидкість обертання відносно осі  $y_i$  дорівнює  $\frac{d\vartheta_{y_i}}{dt}$  та відповідно :

$$L_{AY1} = I_A \cdot \frac{d\vartheta_{y2}}{dt}, L_{RY1} = I_R \cdot \frac{d\vartheta_{y3}}{dt}, L_{SY1} = I_S \cdot \frac{d\vartheta_{y1}}{dt}. \quad (2.93)$$

Моменти кількості руху відносно нерухомих осей  $x$ ,  $y$  знайдемо, спроектувавши на ці осі моменти  $L_{X1}$ ,  $L_{Y1}$ ,  $L_{Z1}$ :

$$L_{AX} = L_{AX1} + L_{AZ1} \cdot \vartheta_{y2} = I_A \cdot \frac{d\vartheta_{x2}}{dt} + I_{A0} \cdot \omega \cdot \vartheta_{y2}, \quad (2.94)$$

$$L_{AY} = L_{AY1} - L_{AZ1} \cdot \vartheta_{x2} = I_A \cdot \frac{d\vartheta_{y2}}{dt} - I_{A0} \cdot \omega \cdot \vartheta_{x2},$$

$$L_{RX} = L_{RX1} + L_{RZ1} \cdot \vartheta_{y3} = I_R \cdot \frac{d\vartheta_{x3}}{dt} + I_{R0} \cdot \omega \cdot \vartheta_{y3}, \quad (2.95)$$

$$L_{RY} = L_{RY1} - L_{RZ1} \cdot \vartheta_{x3} = I_R \cdot \frac{d\vartheta_{y3}}{dt} - I_{R0} \cdot \omega \cdot \vartheta_{x3},$$

$$L_{SX} = L_{SX1} + L_{SZ1} \cdot \vartheta_{y1} = I_S \cdot \frac{d\vartheta_{x1}}{dt}, \quad (2.96)$$

$$L_{SY} = L_{SY1} - L_{SZ1} \cdot \vartheta_{x1} = I_S \cdot \frac{d\vartheta_{y1}}{dt}.$$

Моменти сил, що прикладені до мас відносно осей  $x$  та  $y$  знайдемо за формулами:

$$M_{AX} = \frac{d}{dt} L_{AX} = I_A \frac{d^2 \vartheta_{x2}}{dt^2} + I_{A0} \omega \frac{d\vartheta_{y2}}{dt}; M_{AY} = \frac{d}{dt} L_{AY} = I_A \frac{d^2 \vartheta_{y2}}{dt^2} - I_{A0} \omega \frac{d\vartheta_{x2}}{dt}; \quad (2.97)$$

$$M_{RX} = \frac{d}{dt} L_{RX} = I_R \frac{d^2 \vartheta_{x3}}{dt^2} + I_{R0} \omega \frac{d\vartheta_{y3}}{dt}; M_{RY} = \frac{d}{dt} L_{RY} = I_R \frac{d^2 \vartheta_{y3}}{dt^2} - I_{R0} \omega \frac{d\vartheta_{x3}}{dt}; \quad (2.98)$$

$$M_{SX} = \frac{d}{dt} L_{SX} = I_S \frac{d^2 \vartheta_{x1}}{dt^2}; M_{SY} = \frac{d}{dt} L_{SY} = I_S \frac{d^2 \vartheta_{y1}}{dt^2}. \quad (2.99)$$

Використовуючи позначення, визначаємо переміщення диску  $x$ ,  $y$ ,  $\vartheta_x$  та  $\vartheta_y$  за формулою (2.72) через діючі сили (2.90), (2.91) і моменти (2.97), (2.98), (2.99):





$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{Y_2} = & -m_S \cdot \frac{d^2 x_1}{dt^2} \cdot \delta_{15} - m_A \cdot \frac{d^2 x_2}{dt^2} \cdot \delta_{25} - m_R \cdot \frac{d^2 x_3}{dt^2} \cdot \delta_{35} - I_S \cdot \frac{d^2 \mathcal{G}_{Y_1}}{dt^2} \cdot \delta_{45} - \\ & - \left( I_A \cdot \frac{d^2 \mathcal{G}_{Y_2}}{dt^2} - I_{A0} \cdot \omega \cdot \frac{d \mathcal{G}_{X_2}}{dt} \right) \cdot \delta_{55} - \left( I_R \cdot \frac{d^2 \mathcal{G}_{Y_3}}{dt^2} - I_{R0} \cdot \omega \cdot \frac{d \mathcal{G}_{X_3}}{dt} \right) \cdot \delta_{56} \end{aligned} \quad (2.108)$$

$$\begin{aligned} -\mathcal{G}_{X_2} = & -m_S \cdot \frac{d^2 y_1}{dt^2} \cdot \delta_{15} - m_A \cdot \frac{d^2 y_2}{dt^2} \cdot \delta_{25} - m_R \cdot \frac{d^2 y_3}{dt^2} \cdot \delta_{35} + I_S \cdot \frac{d^2 \mathcal{G}_{X_1}}{dt^2} \cdot \delta_{45} + \\ & + \left( I_A \cdot \frac{d^2 \mathcal{G}_{X_2}}{dt^2} + I_{A0} \cdot \omega \cdot \frac{d \mathcal{G}_{Y_2}}{dt} \right) \cdot \delta_{55} + \left( I_R \cdot \frac{d^2 \mathcal{G}_{X_3}}{dt^2} + I_{R0} \cdot \omega \cdot \frac{d \mathcal{G}_{Y_3}}{dt} \right) \cdot \delta_{56} \end{aligned} \quad (2.109)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{Y_3} = & -m_S \cdot \frac{d^2 x_1}{dt^2} \cdot \delta_{16} - m_A \cdot \frac{d^2 x_2}{dt^2} \cdot \delta_{26} - m_R \cdot \frac{d^2 x_3}{dt^2} \cdot \delta_{36} - I_S \cdot \frac{d^2 \mathcal{G}_{Y_1}}{dt^2} \cdot \delta_{46} - \\ & - \left( I_A \cdot \frac{d^2 \mathcal{G}_{Y_2}}{dt^2} - I_{A0} \cdot \omega \cdot \frac{d \mathcal{G}_{X_2}}{dt} \right) \cdot \delta_{56} - \left( I_R \cdot \frac{d^2 \mathcal{G}_{Y_3}}{dt^2} - I_{R0} \cdot \omega \cdot \frac{d \mathcal{G}_{X_3}}{dt} \right) \cdot \delta_{66} \end{aligned} \quad (2.110)$$

$$\begin{aligned} -\mathcal{G}_{X_3} = & -m_S \cdot \frac{d^2 y_1}{dt^2} \cdot \delta_{16} - m_A \cdot \frac{d^2 y_2}{dt^2} \cdot \delta_{26} - m_R \cdot \frac{d^2 y_3}{dt^2} \cdot \delta_{36} + I_S \cdot \frac{d^2 \mathcal{G}_{X_1}}{dt^2} \cdot \delta_{46} + \\ & + \left( I_A \cdot \frac{d^2 \mathcal{G}_{X_2}}{dt^2} + I_{A0} \cdot \omega \cdot \frac{d \mathcal{G}_{Y_2}}{dt} \right) \cdot \delta_{56} + \left( I_R \cdot \frac{d^2 \mathcal{G}_{X_3}}{dt^2} + I_{R0} \cdot \omega \cdot \frac{d \mathcal{G}_{Y_3}}{dt} \right) \cdot \delta_{66} \end{aligned} \quad (2.111)$$

Для прямого обертання система має розв'язок у вигляді:

$$\begin{aligned} x_1 = A_1 \cos pt; \quad y_1 = A_1 \sin pt; \quad \mathcal{G}_{Y_1} = \mathcal{G}_1 \cos pt; \quad \mathcal{G}_{X_1} = -\mathcal{G}_1 \sin pt; \\ x_2 = A_2 \cos pt; \quad y_2 = A_2 \sin pt; \quad \mathcal{G}_{Y_2} = \mathcal{G}_2 \cos pt; \quad \mathcal{G}_{X_2} = -\mathcal{G}_2 \sin pt; \\ x_3 = A_3 \cos pt; \quad y_3 = A_3 \sin pt; \quad \mathcal{G}_{Y_3} = \mathcal{G}_3 \cos pt; \quad \mathcal{G}_{X_3} = -\mathcal{G}_3 \sin pt. \end{aligned} \quad (2.112)$$

Для оберненого обертання розв'язок у вигляді:

$$\begin{aligned} x_1 = A_1 \cos pt; \quad y_1 = -A_1 \sin pt; \quad \mathcal{G}_{Y_1} = \mathcal{G}_1 \cos pt; \quad \mathcal{G}_{X_1} = \mathcal{G}_1 \sin pt; \\ x_2 = A_2 \cos pt; \quad y_2 = -A_2 \sin pt; \quad \mathcal{G}_{Y_2} = \mathcal{G}_2 \cos pt; \quad \mathcal{G}_{X_2} = \mathcal{G}_2 \sin pt; \\ x_3 = A_3 \cos pt; \quad y_3 = -A_3 \sin pt; \quad \mathcal{G}_{Y_3} = \mathcal{G}_3 \cos pt; \quad \mathcal{G}_{X_3} = \mathcal{G}_3 \sin pt. \end{aligned} \quad (2.113)$$

Обидва розв'язки відповідають обертальному руху зігнутої осі вала з кутовою швидкістю  $p$ , причому в першому випадку зігнута вісь обертається в тому ж напрямку, що і сам вал (пряме обертання зігнутої осі), а в другому випадку – в бік, протилежний обертання вала (протилежне обертання зігнутої осі).

Величини  $A$  та  $\mathcal{G}$  представляють собою прогин та кут нахилу дотичної до зігнутої осі валу в точці закріплення диску.

Підставляючи у вище наведену систему рівнянь значення  $x, y, \mathcal{G}_X$  та  $\mathcal{G}_Y$  з формул для прямого та оберненого обертання, отримаємо визначник системи

$$\begin{vmatrix} -1+p^2m_S\delta_{11} & p^2m_A\delta_{12} & p^2m_R\delta_{13} & p^2I_S\delta_{14} & (p^2I_A \pm p\omega I_{A0})\delta_{15} & (p^2I_R \pm p\omega I_{R0})\delta_{16} \\ p^2m_S\delta_{12} & -1+p^2m_A\delta_{22} & p^2m_R\delta_{23} & p^2I_S\delta_{24} & (p^2I_A \pm p\omega I_{A0})\delta_{25} & (p^2I_R \pm p\omega I_{R0})\delta_{26} \\ p^2m_S\delta_{13} & p^2m_A\delta_{23} & -1+p^2m_R\delta_{33} & p^2I_S\delta_{34} & (p^2I_A \pm p\omega I_{A0})\delta_{35} & (p^2I_R \pm p\omega I_{R0})\delta_{36} \\ p^2m_S\delta_{14} & p^2m_A\delta_{24} & p^2m_R\delta_{34} & -1+p^2I_S\delta_{44} & (p^2I_A \pm p\omega I_{A0})\delta_{45} & (p^2I_R \pm p\omega I_{R0})\delta_{46} \\ p^2m_S\delta_{15} & p^2m_A\delta_{25} & p^2m_R\delta_{35} & p^2I_S\delta_{45} & -1+(p^2I_A \pm p\omega I_{A0})\delta_{55} & (p^2I_R \pm p\omega I_{R0})\delta_{56} \\ p^2m_S\delta_{16} & p^2m_A\delta_{26} & p^2m_R\delta_{36} & p^2I_S\delta_{46} & (p^2I_A \pm p\omega I_{A0})\delta_{56} & -1+(p^2I_R \pm p\omega I_{R0})\delta_{66} \end{vmatrix} = 0 \quad (2.114)$$

де «+» відповідає оберненій, а «-» - прямій прецесії.

Прирівнявши до нуля визначник цієї системи рівнянь, отримаємо рівняння для визначення частот. Отже, розв'язавши рівняння для визначення частот, отримаємо залежності власних частот від частоти обертання валу  $p$ . В залежності від напрямку обертання валу, власні частоти можуть як збільшуватися (пряме обертання) так і зменшуватися (обернене обертання). Із збільшенням частоти  $p$  - різниця частот між прямим і оберненим обертанням збільшується. Таким чином, для кожного ступеня вільності, ми маємо дві резонансні частоти замість однієї.

Результати отримані експериментально та за допомогою числового методу наведеного в роботі, співставлені та наведені нижче (Рис.2.29).

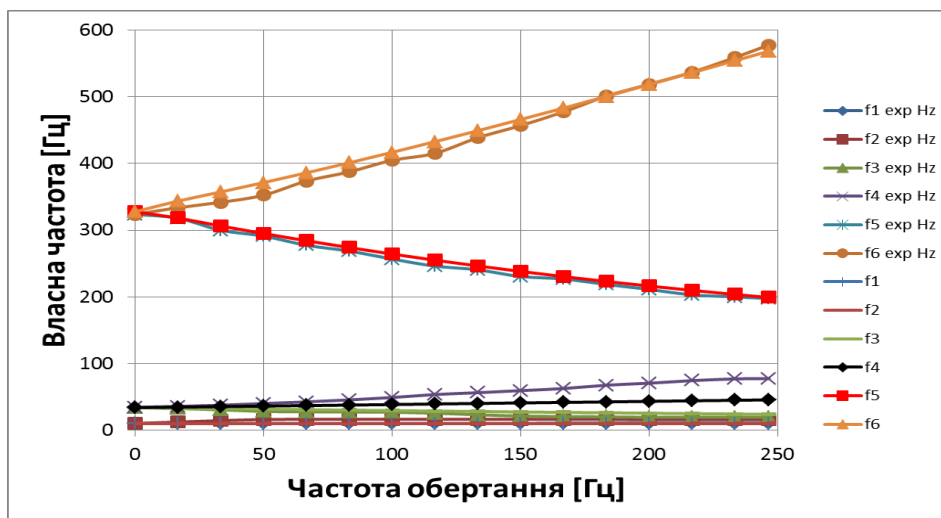


Рис.2.29. Зображення кореляції результатів числового та експериментального визначення залежності власних частот від частоти обертання

## Використання рівняння Лагранжа другого роду

Аналіз попередніх робіт показав, що центрифуги розглядаються як одномасова система, але одержані рівняння для одномасової системи не відповідають дійсності. Аналіз конструкції і експериментальні дослідження показали, що вони є багатомасовою системою. Реальні центрифуги складаються з декількох тіл, тому описати систему через рівняння руху одного тіла неможливо. У зв'язку з цим існує необхідність розгляду системи з декількома тілами, що обертаються. Описати рух багатомасової системи можна за допомогою рівняння Лагранжа другого роду.

Більшість існуючих робіт даного напрямку відрізняються фрагментарністю, носять індивідуальний не системний характер. Рівняння руху одержуються для конкретних центрифуг і потім виконується їх аналіз. Відсутність єдиного узагальненого підходу до аналізу центрифуг довільного виду обмежує можливість виявлення їх загальних властивостей та закономірностей. Відзначимо, що дослідження руху лабораторних центрифуг як системи, що складається з двохопорного валу з розташованим на ньому диском, розглядаються в роботах [5,12,13,17].

Найпростішими задачами про коливання валу з диском, площина якого здатна відхилятися від початкового положення, є задачі про двохопорний вал з розташованим на ньому диском. В залежності від місця розташування диску на розрахунковій схемі залежить і система рівнянь, яка описує рух центрифуги. Рух системи, у якій ротор розташований посередині підшипникових вузлів, досліджено досить широко [5,12]. У зв'язку з вище сказаним, існує актуальна необхідність розробки узагальнених підходів та методів аналітичного дослідження динаміки механічних систем.

Метою роботи є дослідження руху лабораторної центрифуги за допомогою аналізу системи рівнянь руху, одержаних за допомогою рівнянь Лагранжа другого роду.

Лабораторну центрифугу можна звести до еквівалентної системи з трьох тіл (статора, якоря та ротора), одне з яких (статор) не обертається навколо осі симетрії.

Положення центрифуги можна описати наступними параметрами  $\xi_i, \eta_i, \psi_i, \theta_i, \varphi$ , де  $\xi_i, \eta_i$  – переміщення центру мас кожного тіла,  $\psi_i, \theta_i$  – кути повороту відносно головних осей валу,  $\varphi$  – кут повороту відносно осі обертання,  $i=1,2,3$  – тіла в системі, що досліджується.

Виведемо систему рівнянь для досліджуваного механізму, який має 14 степенів вільності [122,123]. Розрахункові схеми для кожного тіла наведені нижче (рис.2.30).

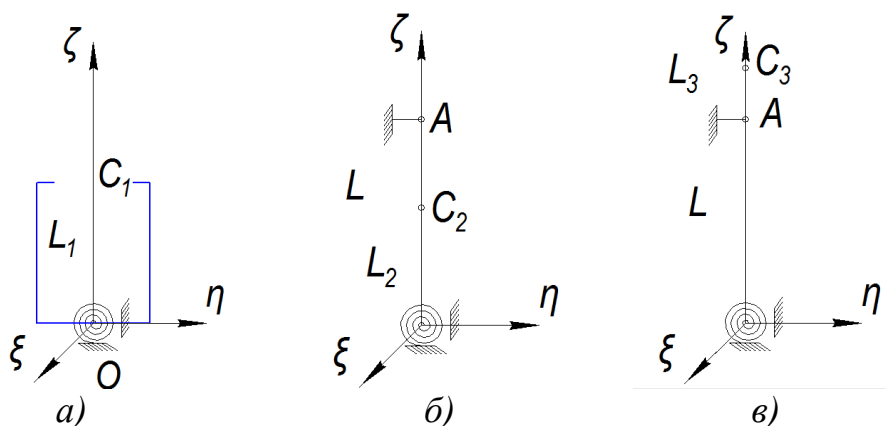


Рис.2.30. Розрахункові схеми: а- статор, б- якорь, в- ротор

Для визначення руху системи розроблена розрахункова схема (Рис.2.26), яка максимально наближена до реальної центрифуги, що досліджується. На наведеній схемі  $P_1, P_2, P_3, M_1, M_2, M_3$  – сили та моменти, які прикладені в точках розташування центрів ваги ротора двигуна (якоря) та ротора центрифуги, відповідно.

Із показаних в одній площині трьох мас обертаються лише дві (ротор двигуна і ротор центрифуги), тому при подальших розрахунках кутова швидкість статора дорівнює нулю.

Потенціальна енергія системи складається з потенціальної енергії деформації валу, пружних опор, на яких закріплений корпус, та потенціальної енергії деформації підшипників, які розглядаються як пружний елемент, тобто:

$$\Pi = \Pi_p + \Pi_{val1} + \Pi_{val2} \quad (2.115)$$

Потенціальна енергія валу складається з суми потенціальних енергій кожної ділянки валу за рахунок згину валу:

$$\Pi_1 = \frac{1}{2EI_1} \int_0^{b_1} (M_3 + P_3 \cdot x)^2 dx = \frac{3M_3^2 b_1}{6EI_1} + \frac{3M_3 P_3 b_1^2}{6EI_1} + \frac{P_3^2 b_1^3}{6EI_1} \quad (2.116)$$

$$\begin{aligned} \Pi_2 &= \frac{1}{2EI_1} \int_{b_1}^{b_2} (M_3 + P_3 \cdot x - X \cdot (x - b_1))^2 dx = \\ &= \frac{(b_2^3 - b_1^3) P_3^2}{6EI_1} + \frac{(-3b_1^2 + 3b_2^2) M_3 P_3}{6EI_1} + \frac{(3b_1 b_2^2 - 2b_2^3 - b_1^3) X \cdot P_3}{6EI_1} + \\ &+ \frac{(3b_2 - 3b_1) M_3^2}{6EI_1} + \frac{(-3b_1^2 + 6b_1 b_2 - 3b_2^2) X M_3}{6EI_1} + \frac{(b_2^3 - 3b_1 b_2^2 + 3b_2 b_1^2 - b_1^3) X^2}{6EI_1} \end{aligned} \quad (2.117)$$

$$\begin{aligned} \Pi_3 &= \frac{1}{2EI_1} \int_{b_2}^{b_3} (M_3 + P_3 \cdot x - X \cdot (x - b_1) + M_2 + P_2 \cdot (x - b_2))^2 dx = \\ &= \frac{(3b_3 b_2^2 - 3b_3^2 b_2 + b_3^3 - b_2^3) P_2^2}{6EI_1} + \frac{\left[ (2b_3^3 + b_2^3 - 3b_3^2 b_2) P_3 + (3b_2^2 - 6b_3 b_2 + 3b_3^2) M_2 + \right. \\ &+ \left. (3b_2^2 - 6b_3 b_2 + 3b_3^2) M_3 + (3b_3^2 b_2 + 3b_1 b_3^2 - 6b_1 b_3 b_2 - 2b_3^3 + 3b_1 b_2^2 - b_2^3) X \right] P_2 + \\ &+ \frac{\left[ (-3b_2^2 + 3b_3^2) M_2 + (-3b_2^2 + 3b_3^2) M_3 + (-2b_3^3 + 2b_2^3 - 3b_1 b_2^2 + 3b_1 b_3^2) X \right] P_3 + \\ &+ \frac{(3b_3 - 3b_2) M_2^2}{6EI_1} + \frac{\left[ (-6b_2 + 6b_3) M_3 + (3b_2^2 - 6b_1 b_2 - 3b_3^2 + 6b_1 b_3) X \right] M_2}{6EI_1} + \\ &+ \frac{(b_3^3 - b_2^3) P_3^2}{6EI_1} + \frac{(3b_3 - 3b_2) M_3^2}{6EI_1} + \frac{(3b_2^2 - 6b_1 b_2 - 3b_3^2 + 6b_1 b_3) X M_3}{6EI_1} + \\ &+ \frac{(-b_2^3 - 3b_2 b_1^2 - 3b_1 b_3^2 + 3b_1 b_2^2 + b_3^3 + 3b_1^2 b_3) X^2}{6EI_1} \end{aligned} \quad (2.118)$$

Потенціальна енергія підшипника, як пружної опори, обчислюється:

$$\Pi_P = \frac{X^2}{2 \cdot C_{II}}. \quad (2.119)$$

Реакція  $X$  може бути знайдена за теоремою Менабреа [3,4].

Остаточно отримаємо:

$$X = \frac{(3b_3^2 - 6b_1b_3 + 3b_1^2)M_3 + (6b_1b_2 - 3b_2^2 + 3b_3^2 - 6b_1b_3)M_2}{2 \cdot K} + \quad (2.120)$$

$$+ \frac{(b_1^3 - 3b_3^2b_1 + 2b_3^3)P_3 + (-3b_3^2b_1 + 6b_1b_2b_3 - 3b_2^2b_1 + 2b_3^3 + b_2^3 - 3b_3^2b_2)P_2}{2 \cdot K}.$$

Отримане значення  $X$  підставляється у потенціальну енергію підшипника, виражену через прикладені сили і моменти.

З рівнянь рівноваги виражаємо силу та момент в опорі

$$M_0 = M_3 + P_3L_3 + M_2 + P_2L_2 + M_1 + P_1L_1 \quad (2.121)$$

$$Q_0 = -P_3 - P_2 - P_1 \quad (2.122)$$

Лінійне та кутове переміщення в опорі визначається:

$$\eta_0 = \frac{Q_0}{C_Q}, \text{ а } \theta_0 = \frac{M_0}{C_M}, \text{ де } C_M \text{ і } C_Q \text{ – жорсткості опор при повороті і переміщенні,}$$

відповідно.

Потенціальна енергія опори матиме вигляд

$$\Pi_O = \frac{1}{2} Q_0 \eta_0 + \frac{1}{2} M_0 \theta_0 = \frac{Q_0^2}{2C_Q} + \frac{M_0^2}{2C_M} \quad (2.123)$$

Тоді потенціальна енергія валу  $\Pi_{val} = \sum_{i=1}^3 \Pi_i$  (2.124)

Потенціальна енергія системи  $\Pi = \Pi_{val} + \Pi_O + \Pi_P$  (2.125)

Підставляючи вище отримані вирази, отримаємо потенціальну енергію системи:

$$\Pi = M_3^2 \cdot \left( \frac{3b_1}{6EI_1} + \frac{(3b_2 - 3b_1)}{6EI_1} + \frac{(3b_3 - 3b_2)}{6EI_1} \right) +$$

$$+ \left( \frac{1}{8} \cdot \frac{(3 \cdot b_3^2 - 6 \cdot b_1 \cdot b_3 + 3 \cdot b_1^2)^2}{(K^2 \cdot C_{\Pi})} + \frac{3b_1^2}{6EI_1} + \frac{(-3b_1^2 + 3b_2^2)}{6EI_1} + \frac{(-3b_2^2 + 3b_3^2)}{6EI_1} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{4} \cdot \frac{(-6 \cdot b_1 \cdot b_3 + 3 \cdot b_1^2 + 3 \cdot b_3^2 - 6 \cdot b_1 \cdot b_3) \cdot (2 \cdot b_3^3 - 3 \cdot b_1 \cdot b_3^2 + b_1^3)}{(K^2 \cdot C_{\Pi})} \right) \cdot P_3 M_3 +$$

$$+ P_3^2 \cdot \left( \frac{b_1^3}{6EI_1} + \frac{(b_2^3 - b_1^3)}{6EI_1} + \frac{(b_3^3 - b_2^3)}{6EI_1} + \frac{1}{8} \cdot \frac{(2 \cdot b_3^3 - 3 \cdot b_1 \cdot b_3^2 + b_1^3)^2}{(K^2 \cdot C_{\Pi})} \right) + \quad (2.126)$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{(3b_2^2 - 6b_1b_2 - 3b_3^2 + 6b_1b_3)}{6EI_1} XM_2 + \\
& + \left( \frac{(-3b_1^2 + 6b_1b_2 - 3b_2^2)}{6EI_1} + \frac{(3b_2^2 - 6b_1b_2 - 3b_3^2 + 6b_1b_3)}{6EI_1} \right) \cdot XM_3 + \\
& + \left( \frac{(b_2^3 - 3b_1b_2^2 + 3b_2b_1^2 - b_1^3)}{6EI_1} + \frac{(-b_2^3 - 3b_2b_1^2 - 3b_1b_3^2 + 3b_1b_2^2 + b_3^3 + 3b_1^2b_3)}{6EI_1} \right) \cdot X^2 + \\
& + \left( \frac{(3b_3 - 3b_2)}{6EI_1} + \frac{1}{4} \cdot \frac{(6 \cdot b_1 \cdot b_2 - 3 \cdot b_2^2 + 3 \cdot b_3^2 - 6 \cdot b_1 \cdot b_3)^2}{(K^2 \cdot C_{II})} \right) \cdot M_2^2 + \\
& + \left( \frac{1}{8} \cdot \frac{(6 \cdot b_2 \cdot b_3 \cdot b_1 + 2 \cdot b_3^3 - 3 \cdot b_2^2 \cdot b_1 - 3 \cdot b_3^2 \cdot b_1 + b_2^3 - 3 \cdot b_2 \cdot b_3^2)^2}{(K^2 \cdot C_{II})} + \right. \\
& \left. + \frac{(3b_3b_2^2 - 3b_3^2b_2 + b_3^3 - b_2^3)}{6EI_1} \right) \cdot P_2^2 + \left( \frac{(2b_3^3 + b_2^3 - 3b_3^2b_2)}{6EI_1} + \right. \\
& \left. + \frac{1}{4} \cdot \frac{(6 \cdot b_2 \cdot b_3 \cdot b_1 + 2 \cdot b_3^3 - 3 \cdot b_2^2 \cdot b_1 - 3 \cdot b_3^2 \cdot b_1 + b_2^3 - 3 \cdot b_2 \cdot b_3^2)(2 \cdot b_3^3 - 3 \cdot b_1 \cdot b_3^2 + b_1^3)}{(K^2 \cdot C_{II})} \right) \cdot P_3P_2 + \\
& + \left( \frac{(3b_2^2 - 6b_3b_2 + 3b_3^2)}{6EI_1} + \frac{1}{4} \cdot \frac{(6 \cdot b_2 \cdot b_3 \cdot b_1 + 2 \cdot b_3^3 - 3 \cdot b_2^2 \cdot b_1 - 3 \cdot b_3^2 \cdot b_1 + b_2^3 - 3 \cdot b_2 \cdot b_3^2)}{(K^2 \cdot C_{II})} \times \right. \\
& \left. \times (6 \cdot b_1 \cdot b_2 - 3 \cdot b_2^2 + 3 \cdot b_3^2 - 6 \cdot b_1 \cdot b_3) \right) \cdot M_2P_2 + \\
& + \left( \frac{(3b_2^2 - 6b_3b_2 + 3b_3^2)}{6EI_1} + \frac{1}{4} \cdot \frac{(6 \cdot b_2 \cdot b_3 \cdot b_1 + 2 \cdot b_3^3 - 3 \cdot b_2^2 \cdot b_1 - 3 \cdot b_3^2 \cdot b_1 + b_2^3 - 3 \cdot b_2 \cdot b_3^2)}{(K^2 \cdot C_{II})} \times \right. \\
& \left. \times (3 \cdot b_3^2 - 6 \cdot b_1 \cdot b_3 + 3 \cdot b_1^2) \right) \cdot M_3P_2 + \\
& + \left( \frac{(-6b_2 + 6b_3)}{6EI_1} + \frac{1}{4} \cdot \frac{(6 \cdot b_1 \cdot b_2 - 3 \cdot b_2^2 + 3 \cdot b_3^2 - 6 \cdot b_1 \cdot b_3) \cdot (3 \cdot b_3^2 - 6 \cdot b_1 \cdot b_3 + 3 \cdot b_1^2)}{(K^2 \cdot C_{II})} \right) \cdot M_2M_3 + \\
& + \left( \frac{(3b_3^2b_2 + 3b_1b_3^2 - 6b_1b_3b_2 - 2b_3^3 + 3b_1b_2^2 - b_2^3)}{6EI_1} + \right) \cdot XP_2 + \\
& + \left( \frac{(3b_1b_2^2 - 2b_2^3 - b_1^3)}{6EI_1} + \frac{(-2b_3^3 + 2b_2^3 - 3b_1b_2^2 + 3b_1b_3^2)}{6EI_1} \right) \cdot XP_3 +
\end{aligned}$$

$$+ \left( \frac{(-3b_2^2 + 3b_3^2)}{6EI_1} + \frac{1}{4} \cdot \frac{(6 \cdot b_2 \cdot b_1 - 3 \cdot b_2^2 + 3 \cdot b_3^2 - 6 \cdot b_1 \cdot b_3) \cdot (2 \cdot b_3^3 - 3 \cdot b_1 \cdot b_3^2 + b_1^3)}{(K^2 \cdot C_{II})} \right) \cdot P_3 M_2$$

Вираз для потенціальної енергії через зовнішні сили матиме вигляд

$$\Pi = \frac{1}{2} \cdot (P_1, P_2, \dots, P_6) \|\delta_{ij}\| (P_1 \ P_2 \ \dots \ P_6)^T. \quad (2.127)$$

Для чисельного розрахунку використовувались параметри лабораторної центрифуги, які наведені у п.2.2.1.

Спростивши та згрупувавши члени при  $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3, \bar{M}_1, \bar{M}_2, \bar{M}_3$  та підставляючи довжини та жорсткості, отримаємо:

$$\begin{aligned} \Pi = & 0,00003644122459P_2^2 + 0,00003452119679M_2P_2 + 0,00003405918930M_3P_2 + \\ & + 0,0001284593280P_3M_2 + 0,00004366099383P_3^2 + 0,0001314498422M_3P_3 + \\ & + 0,0005888039632M_3^2 + 0,0005444108767M_2^2 + 0,00007756542997P_3P_1 + (2.128) \\ & + 0,00003697389423P_1^2 + 0,00004823522006M_3P_1 + 0,001071893779M_3M_1 + \\ & + 0,0001286272535P_3M_1 + 0,001061990566M_3M_2 + 0,00004823522006P_1M_1 + \\ & + 0,00004823522006M_2P_1 + 0,001071893779M_2M_1 + 0,00003430060093P_2M_1 + \\ & + 0,0005359468895M_1^2 + 0,00007332073060P_2P_1 + 0,00007588797397P_3P_2 \end{aligned}$$

Користуючись одержаним виразом для потенціальної енергії формуємо матрицю піддатливості [6]:

$$\delta_{ij} = \begin{bmatrix} 7.394778845 & 4.823522006 & 7.332073059 & 4.823522006 & 7.756542995 & 4.823522006 \\ 4.823522006 & 107.193778999 & 3.430060091 & 107.193778999 & 12.862725349 & 107.193778999 \\ 7.3320730599 & 3.430060091 & 7.288244917 & 3.452119679 & 7.588797395 & 3.405918929 \\ 4.823522006 & 107.193778999 & 3.452119679 & 108.882175339 & 12.845932800 & 106.1990566 \\ 7.756542995 & 12.862725349 & 7.588797395 & 12.845932800 & 8.732198765 & 13.144984220 \\ 4.823522006 & 107.193778999 & 3.405918929 & 106.1990566 & 13.144984220 & 117.760792639 \end{bmatrix} \cdot 10^{-5}$$

У якості параметрів, які визначають положення системи, вибираються переміщення, тому необхідно виразити потенціальну енергію через переміщення.

Обертаючи вирази для переміщень

$$(\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_6) = \|\delta_{ij}\| (P_1 \ P_2 \ \dots \ P_6)^T, \quad (2.129)$$

отримаємо вирази для сил, які виражаються через переміщення

$$(P_1, P_2, \dots, P_6) = \|\delta_{ij}\|^{-1} (\Delta_1 \ \Delta_2 \ \dots \ \Delta_6)^T. \quad (2.130)$$



Підставляючи вхідні значення, отримаємо вирази сил виражених через переміщення, які приймуть вигляд (2.132):

$$\begin{aligned}
 P_1 &= 2.46650323058199584 \cdot 10^8 (\xi_1 + \eta_1) - 3.99534296177572106 \cdot 10^6 (\psi_1 + \theta_1) - \\
 &- 2.16524188848188698 \cdot 10^8 (\xi_2 + \eta_2) + 2.86077985157029238 \cdot 10^6 (\psi_2 + \theta_2) - \\
 &- 3.01122022080636360 \cdot 10^7 (\xi_3 + \eta_3) + 5.77536878491423560 \cdot 10^5 (\psi_3 + \theta_3) \\
 M_1 &= -3.99534296177823702 \cdot 10^6 (\xi_1 + \eta_1) + 2.63472010161050305 \cdot 10^5 (\psi_1 + \theta_1) + \\
 &+ 5.22931441159042530 \cdot 10^6 (\xi_2 + \eta_2) - 1.25613852706632316 \cdot 10^5 (\psi_2 + \theta_2) - \\
 &- 1.23459839000073937 \cdot 10^6 (\xi_3 + \eta_3) + 23678.9497972274876 (\psi_3 + \theta_3) \\
 P_2 &= -2.16524188848226636 \cdot 10^8 (\xi_1 + \eta_1) + 5.22931441158880014 \cdot 10^6 (\psi_1 + \theta_1) + \\
 &+ 2.16202652747254848 \cdot 10^8 (\xi_2 + \eta_2) - 2.67714356996323030 \cdot 10^6 (\psi_2 + \theta_2) + \\
 &+ 3.21536096883397724 \cdot 10^5 (\xi_3 + \eta_3) + 2.34348439624087565 \cdot 10^5 (\psi_3 + \theta_3) \\
 M_2 &= 2.86077985157055594 \cdot 10^6 (\xi_1 + \eta_1) - 1.25613852706608684 \cdot 10^5 (\psi_1 + \theta_1) - \\
 &- 2.67714356996304450 \cdot 10^6 (\xi_2 + \eta_2) + 96732.3703999549034 (\psi_2 + \theta_2) - \\
 &- 1.83636281569839485 \cdot 10^5 (\xi_3 + \eta_3) + 7851.33698327812908 (\psi_3 + \theta_3) \\
 P_3 &= -3.01122022080257610 \cdot 10^7 (\xi_1 + \eta_1) - 1.23459839000163298 \cdot 10^6 (\psi_1 + \theta_1) + \\
 &+ 3.21536096845479915 \cdot 10^5 (\xi_2 + \eta_2) - 1.83636281569389947 \cdot 10^5 (\psi_2 + \theta_2) + \\
 &+ 2.97906661133220158 \cdot 10^7 (\xi_3 + \eta_3) - 8.11885318178503658 \cdot 10^5 (\psi_3 + \theta_3) \\
 M_3 &= 5.77536878490345902 \cdot 10^5 (\xi_1 + \eta_1) + 23678.9497972498358 (\psi_1 + \theta_1) + \\
 &+ 2.34348439625119442 \cdot 10^5 (\xi_2 + \eta_2) + 7851.3369832656553 (\psi_2 + \theta_2) - \\
 &- 8.11885318178457441 \cdot 10^5 (\xi_3 + \eta_3) + 32407.641815033657 (\psi_3 + \theta_3)
 \end{aligned}$$

Власні частоти системи визначаються за допомогою рівняння Лагранжа другого роду, тому необхідно записати вираз для потенціальної енергії через переміщення у нерухомій системі координат.

Потенціальна енергія системи виражається через переміщення у наступному вигляді

$$\Pi = \frac{1}{2} \sum C_{ij} u_i u_j, \text{ де } \|C_{ij}\| = \|\delta_{ij}\|^{-1} - \text{матриця жорсткості.} \quad (2.133)$$

Положення системи описується кутами поворотів системи координат  $x, y, z$  пов'язаній з тілом відносно нерухомої системи координат  $\xi, \eta, \zeta$ . У нерухомій системі координат  $O\xi\eta\zeta$  вісь  $\zeta$  співпадає з віссю валу. Обертання ротору навколо осі характеризується кутом  $\varphi$  (Рис.2.31).

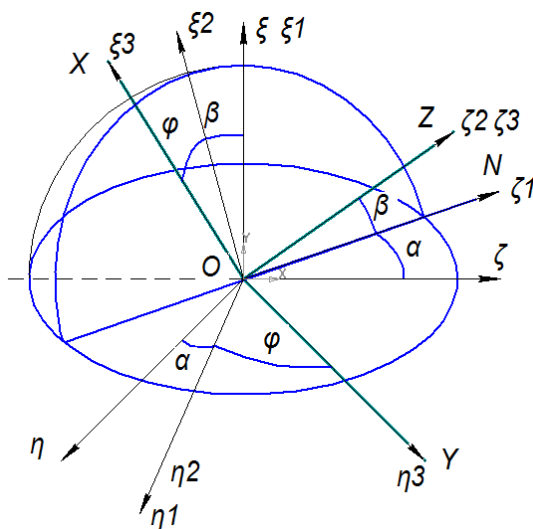


Рис.2.31. Кути Ейлера-Крилова, які визначають положення тіла

Кінетична енергія системи дорівнює сумі кінетичних енергій тіл, з яких система складається, тобто:

$$T = T_1 + T_2 + T_3, \quad (2.134)$$

де  $T_1$  – кінетична енергія статора та корпусу центрифуги,  $T_2$  – кінетична енергія ротору двигуна (якір),  $T_3$  – кінетична енергія ротору.

Для абсолютно твердого тіла кінетична енергія дорівнює сумі кінетичних енергій за рахунок руху мас, зосереджених у центрах інерції, та обертального руху. Головними осями тіла є осі  $\xi_2, \eta_2, \zeta_2$ , де  $\zeta_2$  співпадає з віссю  $z$ .

$$T_1 = \frac{1}{2} \dot{U}_{C1}^2 \cdot m_S + \frac{1}{2} I_{AS} \cdot (\omega_{\xi_2 S}^2 + \omega_{\eta_2 S}^2) \quad (2.135)$$

$$T_2 = \frac{1}{2} \dot{U}_{C2}^2 \cdot m_A + \frac{1}{2} I_{AA} \cdot (\omega_{\xi_2 A}^2 + \omega_{\eta_2 A}^2) + \frac{1}{2} I_{PA} \cdot \omega_{\zeta_2 A}^2 \quad (2.136)$$

$$T_3 = \frac{1}{2} \dot{U}_{C3}^2 \cdot m_R + \frac{1}{2} I_{AR} \cdot (\omega_{\xi_2 R}^2 + \omega_{\eta_2 R}^2) + \frac{1}{2} I_{PR} \cdot \omega_{\zeta_2 R}^2 \quad (2.137)$$

У зв'язку з тим, що напрямки взаємно ортогональні, то квадрати швидкостей центру інерції визначаються:

$$\dot{U}_{C1}^2 = \dot{\xi}_1^2 + \dot{\eta}_1^2, \dot{U}_{C2}^2 = \dot{\xi}_2^2 + \dot{\eta}_2^2, \dot{U}_{C3}^2 = \dot{\xi}_3^2 + \dot{\eta}_3^2 \quad (2.138)$$

Оскільки кінетична енергія тіла дорівнює сумі кінетичної енергії поступального та обертового руху, то необхідно визначити кінетичну енергію обертового руху.

Кінетична енергія визначається:

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{1}{2} \dot{U}_{C1}^2 \cdot m_S + \frac{1}{2} I_{AS} \cdot (\dot{\alpha}_1^2 \cos^2 \beta_1 + \dot{\beta}_1^2) = \\ &= \frac{1}{2} [\dot{\xi}_1^2 + \dot{\eta}_1^2] \cdot m_S + \frac{1}{2} I_{AS} \cdot (\dot{\alpha}_1^2 \cos^2 \beta_1 + \dot{\beta}_1^2) \end{aligned} \quad (2.139)$$

$$T_2 = \frac{1}{2} \dot{U}_{C2}^2 \cdot m_A + \frac{1}{2} I_{AA} \cdot (\dot{\alpha}_2^2 \cos^2 \beta_2 + \dot{\beta}_2^2) + \frac{1}{2} I_{PA} \cdot (\dot{\varphi} + \dot{\alpha}_2 \sin \beta_2)^2 \quad (2.140)$$

$$T_3 = \frac{1}{2} \dot{U}_{C3}^2 \cdot m_R + \frac{1}{2} I_{AR} \cdot (\dot{\alpha}_3^2 \cos^2 \beta_3 + \dot{\beta}_3^2) + \frac{1}{2} I_{PR} \cdot (\dot{\varphi} + \dot{\alpha}_3 \sin \beta_3)^2 \quad (2.141)$$

Для переходу від осей  $\xi, \eta, \zeta$  до осей  $x, y, z$  використовується матриця повороту осей координат:

$$\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (2.142)$$

або у більш компактній формі  $[\xi \ \eta \ \zeta]^T = \|a_{ik}\| \cdot [x \ y \ z]^T$ , де символ  $T$  означає операцію транспонування матриці, та  $a_{ik}$  – дев'ять направляючих косинусів.

Направляючі косинуси можна визначити за допомогою застосування основної формули сферичної тригонометрії або матричним методом [119,120].

Матричний метод полягає у використанні матриць перетворення послідовно для кожного повороту та у майбутньому виключенні проміжних матриць.

В результаті матимемо  $[\xi \ \eta \ \zeta]^T = B \cdot [x \ y \ z]^T$ , де матриця перетворення

$$B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & -\sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} = \quad (2.143)$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \beta & \sin \alpha \sin \beta & -\cos \alpha \sin \beta \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \beta & -\sin \alpha \cos \beta & \cos \alpha \cos \beta \end{bmatrix}.$$

Обернена матриця переходу

$$B^T = \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ \sin \alpha \sin \beta & \cos \alpha & -\sin \alpha \cos \beta \\ -\cos \alpha \sin \beta & \sin \alpha & \cos \alpha \cos \beta \end{bmatrix} \quad (2.144)$$

За допомогою матриці перетворення вираховуємо кутові швидкості обертання в нерухомій системі координат

$$\begin{aligned} \omega_\xi &= \dot{\alpha} + \dot{\varphi} \sin \beta, \\ \omega_\eta &= -\dot{\varphi} \cos \beta \sin \alpha + \dot{\beta} \cos \alpha, \\ \omega_\zeta &= \dot{\varphi} \cos \beta \cos \alpha + \dot{\beta} \sin \alpha. \end{aligned} \quad (2.145)$$

в той час  $\omega_\xi = \dot{\psi}$ ,  $\omega_\eta = \dot{\theta}$ ,  $\omega_\zeta = \dot{\gamma}$ , та системі пов'язаній з тілом

$$\begin{aligned} \omega_x &= \dot{\alpha} \cos \varphi \sin \beta + \dot{\beta} \sin \varphi, \\ \omega_y &= -\dot{\alpha} \sin \varphi \cos \beta + \dot{\beta} \cos \varphi, \\ \omega_z &= \dot{\varphi} + \dot{\alpha} \sin \beta. \end{aligned} \quad (2.146)$$

Вирази кутових швидкостей в головній площині

$$\begin{aligned} \omega_{\xi 2} &= \dot{\alpha} \cos \beta, \\ \omega_{\eta 2} &= \dot{\beta}, \\ \omega_{\zeta 2} &= \dot{\varphi} + \dot{\alpha} \sin \beta, \end{aligned} \quad (2.147)$$

Виражаємо кути у головній площині  $\dot{\alpha}$ ,  $\dot{\beta}$ ,  $\dot{\varphi}$  через кути у нерухомій системі координат  $\dot{\psi}$ ,  $\dot{\theta}$ ,  $\dot{\omega}$  (Рис.2.32). Оскільки осі обертання співпадають, то  $\dot{\alpha} = \dot{\psi}$ , а відповідно  $\alpha = \psi$ .

Вектор  $\vec{B} = \dot{\beta}$  проектуємо на осі  $\eta$  та  $\zeta$ . Проекції матимуть вид  $\dot{\beta} \cos \alpha$  та  $\dot{\beta} \sin \alpha$  відповідно. Тобто, у першому наближенні  $\dot{\theta} = \dot{\beta}$ , а отже  $\theta = \beta$ . Враховуючи, що кути повороту є малими, то синус кута замінюємо кутом, косинус – одиницею, а добуток кутів відкидаємо і лінеарізуємо задачу.

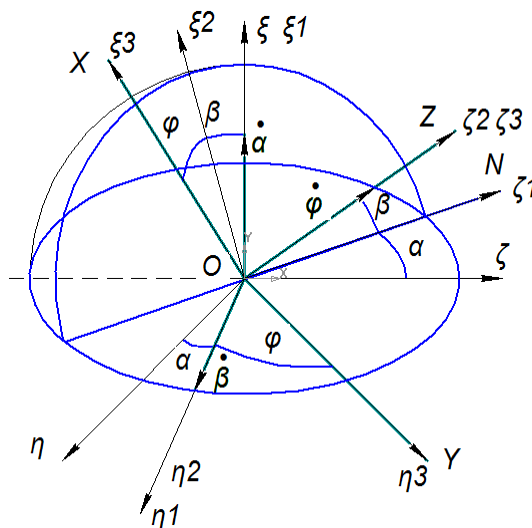


Рис.2.32. Кутові швидкості тіла

Підставляючи вище наведені викладки, отримаємо вирази для кінетичної енергії у наступному вигляді:

$$T_{1S} = \frac{1}{2} [\dot{\xi}_1^2 + \dot{\eta}_1^2] \cdot m_S + \frac{1}{2} I_{AS} \cdot (\dot{\psi}_1^2 + \dot{\theta}_1^2) \quad (2.148)$$

$$T_{2A} = \frac{1}{2} [\dot{\xi}_2^2 + \dot{\eta}_2^2] \cdot m_A + \frac{1}{2} I_{AA} \cdot (\dot{\psi}_2^2 + \dot{\theta}_2^2) + \frac{1}{2} I_{PA} \cdot (\dot{\gamma} + \dot{\psi}_2 \theta_2)^2 \quad (2.149)$$

$$T_{3R} = \frac{1}{2} [\dot{\xi}_3^2 + \dot{\eta}_3^2] \cdot m_R + \frac{1}{2} I_{AR} \cdot (\dot{\psi}_3^2 + \dot{\theta}_3^2) + \frac{1}{2} I_{PR} \cdot (\dot{\gamma} + \dot{\psi}_3 \theta_3)^2 \quad (2.150)$$

Загальна кінетична енергія системи запишеться у вигляді:

$$T = \frac{1}{2} [\dot{\xi}_1^2 + \dot{\eta}_1^2] \cdot m_S + \frac{1}{2} I_{AS} \cdot (\dot{\psi}_1^2 + \dot{\theta}_1^2) + \frac{1}{2} [\dot{\xi}_2^2 + \dot{\eta}_2^2] \cdot m_A + \frac{1}{2} I_{AA} \cdot (\dot{\psi}_2^2 + \dot{\theta}_2^2) + \\ + \frac{1}{2} I_{PA} \cdot \dot{\gamma}^2 + \frac{1}{2} [\dot{\xi}_3^2 + \dot{\eta}_3^2] \cdot m_R + \frac{1}{2} I_{AR} \cdot (\dot{\psi}_3^2 + \dot{\theta}_3^2) + \frac{1}{2} I_{PR} \cdot \dot{\gamma}^2 \quad (2.151)$$

Потенціальна енергія системи запишеться

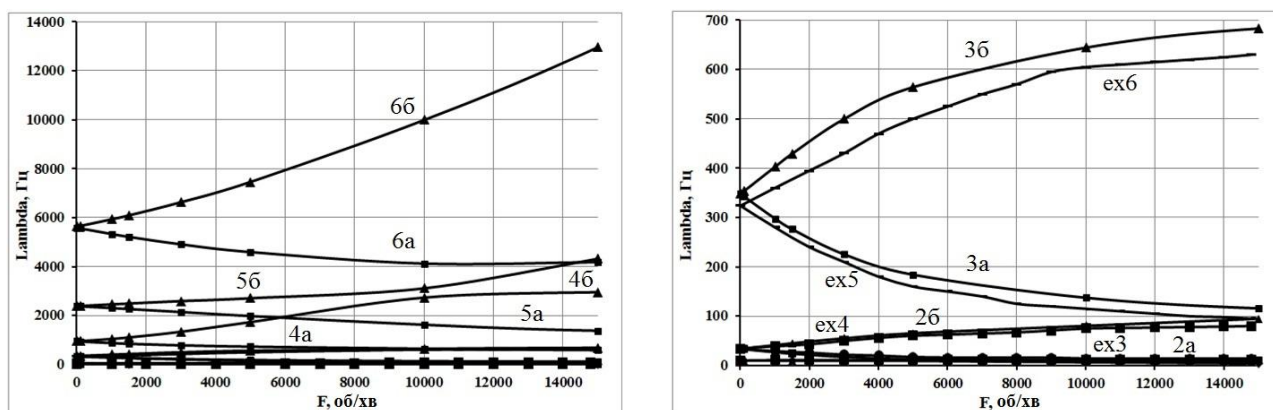
$$\begin{aligned} \Pi = & 5,229315675 \cdot 10^6 \cdot \psi_1 \xi_1 + 16203,81435 \cdot \psi_3^2 + 3,215336585 \cdot 10^5 \cdot \xi_2 \xi_3 + \\ & + 1,489532418 \cdot 10^7 \cdot \xi_3^2 + 1,317360102 \cdot 10^5 \cdot \psi_1^2 + 5,775363391 \cdot 10^5 \cdot \xi_1 \psi_3 - \\ & - 2,677144261 \cdot 10^6 \cdot \xi_2 \psi_2 - 3,011218201 \cdot 10^7 \cdot \xi_1 \xi_3 + 2,860780407 \cdot 10^6 \cdot \xi_1 \psi_2 + \\ & + 7851,333057 \cdot \psi_2 \psi_3 - 8,118848369 \cdot 10^5 \cdot \xi_3 \psi_3 + 1,081013434 \cdot 10^8 \cdot \xi_2^2 + \\ & + 48366,19082 \cdot \psi_2^2 - 1,256138793 \cdot 10^5 \cdot \psi_1 \psi_2 + 23678,93149 \cdot \psi_1 \psi_3 - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -2,165242205 \cdot 10^8 \cdot \xi_1 \xi_2 - 1,836361448 \cdot 10^5 \cdot \psi_2 \xi_3 + 23678,93149 \cdot \theta_1 \theta_3 + \\
 & -7851,333057 \cdot \theta_2 \theta_3 - 1,836361448 \cdot 10^5 \cdot \theta_2 \eta_3 + 1,081013434 \cdot 10^8 \cdot \eta_2^2 + \\
 & + 48366,19082 \cdot \theta_2^2 - 2,677144261 \cdot 10^6 \cdot \eta_2 \theta_2 + 3,215336585 \cdot 10^5 \cdot \eta_2 \eta_3 + \\
 & + 2,343484975 \cdot 10^5 \cdot \eta_2 \theta_3 + 1,2333251673 \cdot 10^8 \cdot \eta_1^2 - 3,995344907 \cdot 10^6 \cdot \eta_1 \theta_1 - \\
 & - 1,234597708 \cdot 10^6 \cdot \theta_1 \eta_3 + 5,775363391 \cdot 10^5 \cdot \eta_1 \theta_3 + 1,317360102 \cdot 10^5 \cdot \theta_1^2 + \\
 & + 5,229315675 \cdot 10^6 \cdot \theta_1 \eta_2 - 1,256138793 \cdot 10^5 \cdot \theta_1 \theta_2 + 2,343484975 \cdot 10^5 \cdot \xi_2 \psi_3 - \\
 & - 1,234597708 \cdot 10^6 \cdot \psi_1 \xi_3 + 1,489532418 \cdot 10^7 \cdot \eta_3^2 - 8,118848369 \cdot 10^5 \cdot \eta_3 \theta_3 + \\
 & + 16203,81435 \cdot \theta_3^2 + 1,233251673 \cdot 10^8 \cdot \xi_1^2 - 3,995344907 \cdot 10^6 \cdot \xi_1 \psi_1
 \end{aligned}
 \tag{2.152}$$

Використовуючи рівняння Лагранжа другого роду  $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$ , де  $L$  -

функція Лагранжа,  $L = T - \Pi$ , де  $T$  - кінетична енергія,  $\Pi$  - потенціальна енергія, одержуємо рівняння руху. Так як нас цікавлять коливання, то задаємо переміщення у вигляді гармонічних функцій та отримуємо однорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь. З умови того, що її детермінант дорівнює нулю, знаходимо власні частоти і їх залежність від швидкості обертання ротору, тобто гіроскопічних ефектів.

Результати розрахунків з різним діапазоном частот наведені нижче (Рис.2.33).



а) б)  
 Рис.2.33. Результати визначення залежності власних частот від частоти обертання

На рис.2.33. приведені залежності власних частот від кутової швидкості обертання з різним діапазоном частот, виражені в герцах. На рис.2.33. а) приведені

всі залежності, але оскільки на нижніх частотах криві зливаються, то на рис.2.33. б) додатково показані залежності на нижніх частотах. На рис.2.33. приведені власні частоти для шести ступенів свободи, на яких проявляється вплив гіроскопічного ефекту, у вигляді кривих 1а, 2а, 3а, 4а, 5а, 6а – розрахункові дані при оберненій прецесії: 1б, 2б, 3б, 4б, 5б, 6б – розрахункові дані при прямій прецесії, а ех1, ех2, ех3, ех4, ех5, ех6 – експериментальні дані.

Перевірка методики визначення власних частот проводилася експериментально. Для цього вимірювалися коливання вала.

Центрифуга розганялась до різних робочих швидкостей, знімалися віброграми коливань, а потім за допомогою статистичної обробки визначались резонансні частоти, які співпадають з власними частотами. За результатами дослідження були побудовані криві ех1, ех2, ех3, ех4, ех5, ех6 на рис.2.33. б).

З отриманих даних видно, що похибка на низьких частотах має незначну величину і лежить у межах 5%. Із збільшенням частоти обертання похибка збільшується, і, залежно від частоти обертання, змінюється до 20%.

Для перших трьох власних частот, без врахування гіроскопічних ефектів, маємо наступні значення (Табл.2.4):

Таблиця 2.4

Порівняльні значення перших трьох власних частот

$p_i$	Експериментальне значення, Гц	Розрахункове значення, Гц	Відносна похибка, %
$p_1$	10	9,8	2
$p_2$	34,375	33,774	1,7
$p_3$	323,75	327,71	1,2

## 2.7. Розрахункова модель трьохмасової центрифуги PICO21.

### 2.7.1. Визначення власних частот центрифуги PICO21 з врахуванням гіроскопічного ефекту.

У сучасному машинобудуванні постійно ростуть швидкості обертання валів більшості машин - двигунів внутрішнього згорання, електродвигунів, електричних

генераторів, парових, газових турбін, гіроскопів і гідромоторів, центрифуг, веретен, молотарок, відцентрових насосів і компресорів, високопродуктивних автоматів та ін. Швидкість обертання деяких з них досягає 20 000 ... 50 000 об/хв. і більше (електродвигуни підвищеної частоти і турбомашини будуються для швидкостей, що перевищують 100 000 об / хв.; центрифуги, призначені для отримання біологічних емульсій, роблять до 600 000 об/хв.; швидкості обертання окремих деталей текстильного машинобудування доходять до 1 000 000 об/хв.). Отже, при відхиленні центру мас від осі обертання ланки або нерівномірному розташуванні мас уздовж цієї осі виникають значні сили інерції, які, безперервно змінюючись за величиною і напрямком, викликають додаткові динамічні навантаження в системі, тобто – дисбаланс системи [15,16,17,19-22,124-127].

Основною причиною відхилень центру мас або нахилу головних осей інерції є неточне виготовлення деталі або неточне складання. Ці фактори змінюють коливальні характеристики системи.

Метою досліджень є визначення впливу статичної і динамічної незбалансованості системи на амплітуди коливань переміщень і кутів повороту.

Розглянемо модель вимушених коливань, обумовлених дисбалансом.

В результаті наявності зміщення центру ваги  $e$  (Рис.2.6) та кутів нахилу головних осей інерції  $\gamma_1, \gamma_2$  (Рис.2.7) до нерухомої системи координат  $\xi, \eta, \zeta$ , маємо статичний та динамічний дисбаланс центрифуги. Моменти інерції диска відносно пов'язаних з ним осей  $x_1, y_1, z_1$  позначимо:  $I_{z1} = I_0$ ;  $I_{x1} = I_{y1} = I_1$ .

Для визначення власних частот розроблена розрахункова схема (Рис.2.2) [121], яка максимально наближена до реальної центрифуги, що досліджується.

Власні частоти цієї системи, без врахування дисипативних сил, та з врахуванням гіроскопічних ефектів були знайдені в роботі [122]. Знайдемо власні частоти при наявності дисбалансів. Складаємо диференціальні рівняння руху системи за допомогою рівняння Лагранжа другого роду.

Модель центрифуги було побудовано у розділі 2.1. Вирази потенціальної і кінетичної енергій набудуть наступного вигляду:



$$\begin{aligned}
\Pi = & \frac{1}{2}c_{11}(\xi_1^2 + \eta_1^2) + \frac{1}{2}c_{22}(\xi_2^2 + \eta_2^2) + \frac{1}{2}c_{33}(\xi_3^2 + \eta_3^2) + \frac{1}{2}c_{44}(\alpha_1^2 + \theta_1^2) + \\
& + \frac{1}{2}c_{55}(\alpha_2^2 + \theta_2^2) + \frac{1}{2}c_{66}(\alpha_3^2 + \theta_3^2) + c_{12}(\xi_1 \cdot \xi_2 + \eta_1 \cdot \eta_2) + c_{13}(\xi_1 \cdot \xi_3 + \eta_1 \cdot \eta_3) + \\
& + c_{14}(\xi_1 \cdot \theta_1 + \eta_1 \cdot \alpha_1) + c_{15}(\xi_1 \cdot \theta_2 + \eta_1 \cdot \alpha_2) + c_{16}(\xi_1 \cdot \theta_3 + \eta_1 \cdot \alpha_3) + c_{23}(\xi_2 \cdot \xi_3 + \eta_2 \cdot \eta_3) + \\
& + c_{24}(\xi_2 \cdot \theta_1 + \eta_2 \cdot \alpha_1) + c_{25}(\xi_2 \cdot \theta_2 + \eta_2 \cdot \alpha_2) + c_{26}(\xi_2 \cdot \theta_3 + \eta_2 \cdot \alpha_3) + \\
& + c_{34}(\xi_3 \cdot \theta_1 + \eta_3 \cdot \alpha_1) + c_{35}(\xi_3 \cdot \theta_2 + \eta_3 \cdot \alpha_2) + c_{36}(\xi_3 \cdot \theta_3 + \eta_3 \cdot \alpha_3) + \\
& + c_{45}(\alpha_1 \cdot \alpha_2 + \theta_1 \cdot \theta_2) + c_{46}(\alpha_1 \cdot \alpha_3 + \theta_1 \cdot \theta_3) + c_{56}(\alpha_2 \cdot \alpha_3 + \theta_2 \cdot \theta_3)
\end{aligned} \tag{2.153}$$

$$\begin{aligned}
K = & \frac{1}{2}m_1(\dot{\xi}_1^2 + \dot{\eta}_1^2) + \frac{1}{2}m_2(\dot{\xi}_2^2 + \dot{\eta}_2^2) + \frac{1}{2}m_3(\dot{\xi}_3^2 + \dot{\eta}_3^2) + \frac{1}{2}I_1[\dot{\theta}_1^2 + \dot{\alpha}_1^2] + \\
& + \frac{1}{2}I_2[\dot{\theta}_2^2 + \dot{\alpha}_2^2] + \frac{1}{2}I_3[\dot{\theta}_3^2 + \dot{\alpha}_3^2] + \frac{1}{2}I_{z_2}[\dot{\varphi} + \dot{\alpha}_2 \cdot \theta_2]^2 + \frac{1}{2}I_{z_3}[\dot{\varphi} + \dot{\alpha}_3 \cdot \theta_3]^2
\end{aligned} \tag{2.154}$$

Підставляємо отримані вирази для енергій у рівняння Лагранжа другого роду

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \tag{2.155}$$

Отримуємо наступну систему диференціальних рівнянь (2.156) руху диска:

$$\begin{aligned}
m_1 \ddot{\xi}_1 + c_{11} \xi_1 + c_{12} \xi_2 + c_{13} \xi_3 + c_{14} \theta_1 + c_{15} \theta_2 + c_{16} \theta_3 &= 0 \\
m_2 \ddot{\xi}_2 + c_{12} \xi_1 + c_{22} \xi_2 + c_{23} \xi_3 + c_{24} \theta_1 + c_{25} \theta_2 + c_{26} \theta_3 &= 0 \\
m_3 \ddot{\xi}_3 + c_{13} \xi_1 + c_{23} \xi_2 + c_{33} \xi_3 + c_{34} \theta_1 + c_{35} \theta_2 + c_{36} \theta_3 &= 0 \\
m_1 \ddot{\eta}_1 + c_{11} \eta_1 + c_{12} \eta_2 + c_{13} \eta_3 + c_{14} \alpha_1 + c_{15} \alpha_2 + c_{16} \alpha_3 &= 0 \\
m_2 \ddot{\eta}_2 + c_{12} \eta_1 + c_{22} \eta_2 + c_{23} \eta_3 + c_{24} \alpha_1 + c_{25} \alpha_2 + c_{26} \alpha_3 &= 0 \\
m_3 \ddot{\eta}_3 + c_{13} \eta_1 + c_{23} \eta_2 + c_{33} \eta_3 + c_{34} \alpha_1 + c_{35} \alpha_2 + c_{36} \alpha_3 &= 0 \\
I_1 \ddot{\alpha}_1 + c_{14} \eta_1 + c_{24} \eta_2 + c_{34} \eta_3 + c_{44} \alpha_1 + c_{45} \alpha_2 + c_{46} \alpha_3 &= 0 \\
I_2 \ddot{\alpha}_2 + c_{15} \eta_1 + c_{25} \eta_2 + c_{35} \eta_3 + c_{45} \alpha_1 + c_{55} \alpha_2 + c_{56} \alpha_3 + I_{z_2} (\dot{\varphi} + \dot{\alpha}_2 \cdot \theta_2) \cdot \dot{\theta}_2 &= 0 \\
I_3 \ddot{\alpha}_3 + c_{16} \eta_1 + c_{26} \eta_2 + c_{36} \eta_3 + c_{46} \alpha_1 + c_{56} \alpha_2 + c_{66} \alpha_3 + I_{z_3} (\dot{\varphi} + \dot{\alpha}_3 \cdot \theta_3) \cdot \dot{\theta}_3 &= 0 \\
I_1 \ddot{\theta}_1 + c_{14} \xi_1 + c_{24} \xi_2 + c_{34} \xi_3 + c_{44} \theta_1 + c_{45} \theta_2 + c_{46} \theta_3 &= 0 \\
I_2 \ddot{\theta}_2 + c_{15} \xi_1 + c_{25} \xi_2 + c_{35} \xi_3 + c_{45} \theta_1 + c_{55} \theta_2 + c_{56} \theta_3 - I_{z_2} (\dot{\varphi} + \dot{\alpha}_2 \cdot \theta_2) \cdot \dot{\alpha}_2 &= 0 \\
I_3 \ddot{\theta}_3 + c_{16} \xi_1 + c_{26} \xi_2 + c_{36} \xi_3 + c_{46} \theta_1 + c_{56} \theta_2 + c_{66} \theta_3 - I_{z_3} (\dot{\varphi} + \dot{\alpha}_3 \cdot \theta_3) \cdot \dot{\alpha}_3 &= 0 \\
\frac{d}{dt} [I_{z_2} (\dot{\varphi} + \dot{\alpha}_2 \cdot \theta_2)] &= 0 \\
\frac{d}{dt} [I_{z_2} (\dot{\varphi} + \dot{\alpha}_2 \cdot \theta_2)] &= 0 \\
\frac{d}{dt} [I_{z_3} (\dot{\varphi} + \dot{\alpha}_3 \cdot \theta_3)] &= 0
\end{aligned}$$

З останнього рівняння видно, що

$$\dot{\varphi} + \dot{\alpha}_2 \cdot \theta_2 = \text{const} = k_1, \quad \dot{\varphi} + \dot{\alpha}_3 \cdot \theta_3 = \text{const} = k_2 \quad (2.157)$$

Як видно з формули,  $k_i$  – має нелінійний доданок. У першому приближенні, в силу малості кута  $\theta$ , нехтуємо нелінійним доданком.

Тоді

$$k_i = \dot{\varphi} = \omega \quad (2.158)$$

де  $\omega$  - кутова швидкість обертання.

Тоді, система диференціальних рівнянь запишеться наступним чином (2.159):

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{\xi}_1 + c_{11} \dot{\xi}_1 + c_{12} \dot{\xi}_2 + c_{13} \dot{\xi}_3 + c_{14} \theta_1 + c_{15} \theta_2 + c_{16} \theta_3 &= 0 \\ m_2 \ddot{\xi}_2 + c_{12} \dot{\xi}_1 + c_{22} \dot{\xi}_2 + c_{23} \dot{\xi}_3 + c_{24} \theta_1 + c_{25} \theta_2 + c_{26} \theta_3 &= 0 \\ m_3 \ddot{\xi}_3 + c_{13} \dot{\xi}_1 + c_{23} \dot{\xi}_2 + c_{33} \dot{\xi}_3 + c_{34} \theta_1 + c_{35} \theta_2 + c_{36} \theta_3 &= 0 \\ m_1 \ddot{\eta}_1 + c_{11} \dot{\eta}_1 + c_{12} \dot{\eta}_2 + c_{13} \dot{\eta}_3 + c_{14} \alpha_1 + c_{15} \alpha_2 + c_{16} \alpha_3 &= 0 \\ m_2 \ddot{\eta}_2 + c_{12} \dot{\eta}_1 + c_{22} \dot{\eta}_2 + c_{23} \dot{\eta}_3 + c_{24} \alpha_1 + c_{25} \alpha_2 + c_{26} \alpha_3 &= 0 \\ m_3 \ddot{\eta}_3 + c_{13} \dot{\eta}_1 + c_{23} \dot{\eta}_2 + c_{33} \dot{\eta}_3 + c_{34} \alpha_1 + c_{35} \alpha_2 + c_{36} \alpha_3 &= 0 \\ I_1 \ddot{\alpha}_1 + c_{14} \dot{\eta}_1 + c_{24} \dot{\eta}_2 + c_{34} \dot{\eta}_3 + c_{44} \alpha_1 + c_{45} \alpha_2 + c_{46} \alpha_3 &= 0 \\ I_2 \ddot{\alpha}_2 + c_{15} \dot{\eta}_1 + c_{25} \dot{\eta}_2 + c_{35} \dot{\eta}_3 + c_{45} \alpha_1 + c_{55} \alpha_2 + c_{56} \alpha_3 + I_{z_2} \cdot \omega \cdot \dot{\theta}_2 &= 0 \\ I_3 \ddot{\alpha}_3 + c_{16} \dot{\eta}_1 + c_{26} \dot{\eta}_2 + c_{36} \dot{\eta}_3 + c_{46} \alpha_1 + c_{56} \alpha_2 + c_{66} \alpha_3 + I_{z_3} \cdot \omega \cdot \dot{\theta}_3 &= 0 \\ I_1 \ddot{\theta}_1 + c_{14} \dot{\xi}_1 + c_{24} \dot{\xi}_2 + c_{34} \dot{\xi}_3 + c_{44} \theta_1 + c_{45} \theta_2 + c_{46} \theta_3 &= 0 \\ I_2 \ddot{\theta}_2 + c_{15} \dot{\xi}_1 + c_{25} \dot{\xi}_2 + c_{35} \dot{\xi}_3 + c_{45} \theta_1 + c_{55} \theta_2 + c_{56} \theta_3 - I_{z_2} \cdot \omega \cdot \dot{\alpha}_2 &= 0 \\ I_3 \ddot{\theta}_3 + c_{16} \dot{\xi}_1 + c_{26} \dot{\xi}_2 + c_{36} \dot{\xi}_3 + c_{46} \theta_1 + c_{56} \theta_2 + c_{66} \theta_3 - I_{z_3} \cdot \omega \cdot \dot{\alpha}_3 &= 0 \end{aligned}$$

Нас цікавлять лише періодичні коливання системи. Тому, переміщення і кути повороту шукаємо у вигляді періодичних функцій:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= A_1 \sin pt; \quad \eta_1 = A_1 \cos pt; \quad \alpha_1 = B_1 \cos pt; \quad \theta_1 = B_1 \sin pt \\ \xi_2 &= A_2 \sin pt; \quad \eta_2 = A_2 \cos pt; \quad \alpha_2 = B_2 \cos pt; \quad \theta_2 = B_2 \sin pt \\ \xi_3 &= A_3 \sin pt; \quad \eta_3 = A_3 \cos pt; \quad \alpha_3 = B_3 \cos pt; \quad \theta_3 = B_3 \sin pt \end{aligned} \quad (2.160)$$

Підставляючи ці функції у систему рівнянь, отримаємо (2.161):

$$\begin{aligned} (c_{11} - m_1 p^2) \cdot A_1 \sin pt + c_{12} A_2 \sin pt + c_{13} A_3 \sin pt + c_{14} B_1 \sin pt + \\ + c_{15} B_2 \sin pt + c_{16} B_3 \sin pt &= 0 \\ (c_{22} - m_2 p^2) \cdot A_2 \sin pt + c_{12} A_1 \sin pt + c_{23} A_3 \sin pt + c_{24} B_1 \sin pt + \\ + c_{25} B_2 \sin pt + c_{26} B_3 \sin pt &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (c_{33} - m_3 p^2) \cdot A_3 \sin pt + c_{13} A_1 \sin pt + c_{23} A_2 \sin pt + c_{34} B_1 \sin pt + \\
& + c_{35} B_2 \sin pt + c_{36} B_3 \sin pt = 0 \\
& (c_{11} - m_1 p^2) \cdot A_1 \cos pt + c_{12} A_2 \cos pt + c_{13} A_3 \cos pt + c_{14} B_1 \cos pt + \\
& + c_{15} B_2 \cos pt + c_{16} B_3 \cos pt = 0 \\
& (c_{22} - m_2 p^2) \cdot A_2 \cos pt + c_{12} A_1 \cos pt + c_{23} A_3 \cos pt + c_{24} B_1 \cos pt + \\
& + c_{25} B_2 \cos pt + c_{26} B_3 \cos pt = 0 \\
& (c_{33} - m_3 p^2) \cdot A_3 \cos pt + c_{13} A_1 \cos pt + c_{23} A_2 \cos pt + c_{34} B_1 \cos pt + \\
& + c_{35} B_2 \cos pt + c_{36} B_3 \cos pt = 0 \\
& (c_{44} - I_1 p^2) \cdot B_1 \cos pt + c_{14} A_1 \cos pt + c_{24} A_2 \cos pt + c_{34} A_3 \cos pt + \\
& + c_{45} B_2 \cos pt + c_{46} B_3 \cos pt = 0 \\
& (c_{55} - I_2 p^2) \cdot B_2 \cos pt + c_{15} A_1 \cos pt + c_{25} A_2 \cos pt + c_{35} A_3 \cos pt + \\
& + c_{45} B_1 \cos pt + c_{56} B_3 \cos pt + I_{z_2} \cdot \omega \cdot p \cdot B_2 \cos pt = 0 \\
& (c_{66} - I_3 p^2) \cdot B_3 \cos pt + c_{16} A_1 \cos pt + c_{26} A_2 \cos pt + c_{36} A_3 \cos pt + \\
& + c_{46} B_1 \cos pt + c_{56} B_2 \cos pt + I_{z_3} \cdot \omega \cdot p \cdot B_3 \cos pt = 0 \\
& (c_{44} - I_1 p^2) \cdot B_1 \sin pt + c_{14} A_1 \sin pt + c_{24} A_2 \sin pt + c_{34} A_3 \sin pt + \\
& + c_{45} B_2 \sin pt + c_{46} B_3 \sin pt = 0 \\
& (c_{55} - I_2 p^2) \cdot B_2 \sin pt + c_{15} A_1 \sin pt + c_{25} A_2 \sin pt + c_{35} A_3 \sin pt + \\
& + c_{45} B_1 \sin pt + c_{56} B_3 \sin pt + I_{z_2} \cdot \omega \cdot p \cdot B_2 \sin pt = 0 \\
& (c_{66} - I_3 p^2) \cdot B_3 \sin pt + c_{16} A_1 \sin pt + c_{26} A_2 \sin pt + c_{36} A_3 \sin pt + \\
& + c_{46} B_1 \sin pt + c_{56} B_2 \sin pt + I_{z_3} \cdot \omega \cdot p \cdot B_3 \sin pt = 0
\end{aligned}$$

або (2.162)

$$\begin{aligned}
& (c_{11} - m_1 p^2) \cdot A_1 + c_{12} A_2 + c_{13} A_3 + c_{14} B_1 + c_{15} B_2 + c_{16} B_3 = 0 \\
& (c_{22} - m_2 p^2) \cdot A_2 + c_{12} A_1 + c_{23} A_3 + c_{24} B_1 + c_{25} B_2 + c_{26} B_3 = 0 \\
& (c_{33} - m_3 p^2) \cdot A_3 + c_{13} A_1 + c_{23} A_2 + c_{34} B_1 + c_{35} B_2 + c_{36} B_3 = 0 \\
& (c_{11} - m_1 p^2) \cdot A_1 + c_{12} A_2 + c_{13} A_3 + c_{14} B_1 + c_{15} B_2 + c_{16} B_3 = 0 \\
& (c_{22} - m_2 p^2) \cdot A_2 + c_{12} A_1 + c_{23} A_3 + c_{24} B_1 + c_{25} B_2 + c_{26} B_3 = 0 \\
& (c_{33} - m_3 p^2) \cdot A_3 + c_{13} A_1 + c_{23} A_2 + c_{34} B_1 + c_{35} B_2 + c_{36} B_3 = 0 \\
& (c_{44} - I_1 p^2) \cdot B_1 + c_{14} A_1 + c_{24} A_2 + c_{34} A_3 + c_{45} B_2 + c_{46} B_3 = 0
\end{aligned}$$

$$(c_{55} - I_2 p^2 + I_{z_2} \cdot \omega \cdot p) \cdot B_2 + c_{15} A_1 + c_{25} A_2 + c_{35} A_3 + c_{45} B_1 + c_{56} B_3 = 0$$

$$(c_{66} - I_3 p^2 + I_{z_3} \cdot \omega \cdot p) \cdot B_3 + c_{16} A_1 + c_{26} A_2 + c_{36} A_3 + c_{46} B_1 + c_{56} B_2 = 0$$

$$(c_{44} - I_1 p^2) \cdot B_1 + c_{14} A_1 + c_{24} A_2 + c_{34} A_3 + c_{45} B_2 + c_{46} B_3 = 0$$

$$(c_{55} - I_2 p^2 + I_{z_2} \cdot \omega \cdot p) \cdot B_2 + c_{15} A_1 + c_{25} A_2 + c_{35} A_3 + c_{45} B_1 + c_{56} B_3 = 0$$

$$(c_{66} - I_3 p^2 + I_{z_3} \cdot \omega \cdot p) \cdot B_3 + c_{16} A_1 + c_{26} A_2 + c_{36} A_3 + c_{46} B_1 + c_{56} B_2 = 0$$

Маємо два наступні рівняння для визначення власних частот (2.163):

$$(c_{11} - m_1 p^2) \cdot A_1 + c_{12} A_2 + c_{13} A_3 + c_{14} B_1 + c_{15} B_2 + c_{16} B_3 = 0$$

$$c_{12} A_1 + (c_{22} - m_2 p^2) \cdot A_2 + c_{23} A_3 + c_{24} B_1 + c_{25} B_2 + c_{26} B_3 = 0$$

$$c_{13} A_1 + c_{23} A_2 + (c_{33} - m_3 p^2) \cdot A_3 + c_{34} B_1 + c_{35} B_2 + c_{36} B_3 = 0$$

$$c_{14} A_1 + c_{24} A_2 + c_{34} A_3 + (c_{44} - I_1 p^2) \cdot B_1 + c_{45} B_2 + c_{46} B_3 = 0$$

$$c_{15} A_1 + c_{25} A_2 + c_{35} A_3 + c_{45} B_1 + (c_{55} - I_2 p^2 + I_{z_2} \cdot \omega \cdot p) \cdot B_2 + c_{56} B_3 = 0$$

$$c_{16} A_1 + c_{26} A_2 + c_{36} A_3 + c_{46} B_1 + c_{56} B_2 + (c_{66} - I_3 p^2 + I_{z_3} \cdot \omega \cdot p) \cdot B_3 = 0$$

Дана система буде мати нетривіальний розв'язок лише тоді, коли її визначник дорівнює нулю (2.164)

$$\det \begin{vmatrix} c_{11} - m_1 p^2 & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ c_{12} & c_{22} - m_2 p^2 & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} - m_3 p^2 & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ c_{14} & c_{24} & c_{34} & c_{44} - I_1 p^2 & c_{45} & c_{46} \\ c_{15} & c_{25} & c_{35} & c_{45} & c_{55} - I_2 p^2 + I_{z_2} \cdot \omega \cdot p & c_{56} \\ c_{16} & c_{26} & c_{36} & c_{46} & c_{56} & c_{66} - I_3 p^2 + I_{z_3} \cdot \omega \cdot p \end{vmatrix} = 0.$$

Корені, отриманого таким чином рівняння, є власними частотами системи.

Коефіцієнти жорсткості шукаємо як обернену матрицю від коефіцієнтів піддатливості:

$$[c_{ij}] = [\delta_{ij}]^{-1} \quad (2.165)$$

Матриця піддатливості має наступні значення:

$$[c_{ij}] = \begin{bmatrix} 2.41 \cdot 10^8 & -2.19 \cdot 10^8 & -2.18 \cdot 10^7 & -4.20 \cdot 10^6 & 2.77 \cdot 10^6 & 2.15 \cdot 10^5 \\ -2.19 \cdot 10^8 & 2.14 \cdot 10^8 & 5.34 \cdot 10^6 & 5.09 \cdot 10^6 & -2.73 \cdot 10^6 & 17149.27 \\ -2.18 \cdot 10^7 & 5.34 \cdot 10^6 & 1.65 \cdot 10^7 & -8.97 \cdot 10^5 & -41499.05 & -2.32 \cdot 10^5 \\ -4.20 \cdot 10^6 & 5.09 \cdot 10^6 & -8.97 \cdot 10^5 & 2.54 \cdot 10^5 & -1.29 \cdot 10^5 & 8827.78 \\ 2.77 \cdot 10^6 & -2.73 \cdot 10^6 & -41499.05 & -1.29 \cdot 10^5 & 95208.02 & 1663.02 \\ 2.15 \cdot 10^5 & 17149.27 & -2.32 \cdot 10^5 & 8827.78 & 1663.02 & 7166.74 \end{bmatrix} \quad (2.166)$$

Після підстановки і розв'язку рівняння, отримуємо 6 значень власних частот для трьохмасової системи із врахуванням гіроскопічного ефекту. Власні частоти залежать від кутової частоти обертання. Значення для деяких частот обертання занесені у Табл.2.5.

Таблиця 2.5

Залежність власних частот від швидкості обертання

Кутова частота обертання, $\omega$ , рад/с	1-ша власна частота, $p_1$ , рад/с	2-га власна частота, $p_2$ , рад/с	3-тя власна частота, $p_3$ , рад/с	4-та власна частота, $p_4$ , рад/с	5-та власна частота, $p_5$ , рад/с	6-та власна частота, $p_6$ , рад/с
0	61,59425	212,2085	2059,098	6682,813	15472,44	35329,82
10	61,59594	212,6021	2066,561	6683,692	15474,03	35335,6
-10	61,59256	211,8152	2051,666	6681,939	15470,86	35324,04
20	61,59763	212,9958	2074,055	6684,576	15475,61	35341,38
-20	61,59086	211,422	2044,264	6681,068	15469,27	35318,26
50	61,60266	214,1783	2096,721	6687,256	15480,37	35358,75
-50	61,58573	210,2438	2022,245	6678,484	15464,5	35300,94
100	61,61096	216,1525	2135,111	6691,815	15488,29	35387,73
-100	61,57709	208,2848	1986,167	6674,265	15456,56	35272,12

Якщо зробити апроксимацію цих точок, то, для кожної власної частоти, ми отримаємо залежність (Рис.2.34 - 2.39):

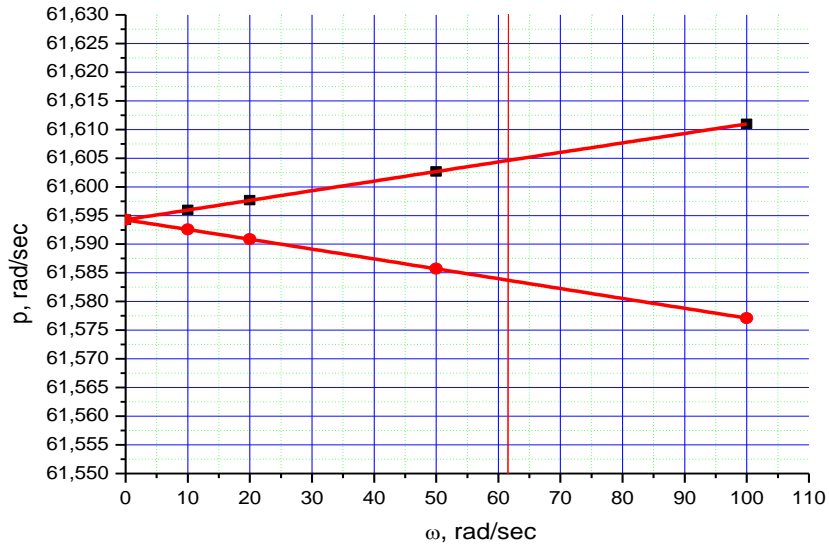


Рис.2.34. Діаграма Кемпбела для 1-ої власної частоти

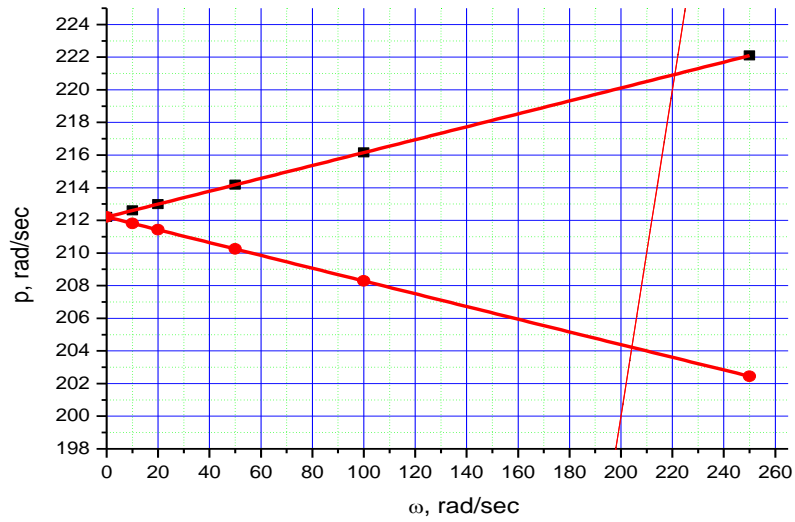


Рис.2.35. Діаграма Кемпбела для 2-ої власної частоти

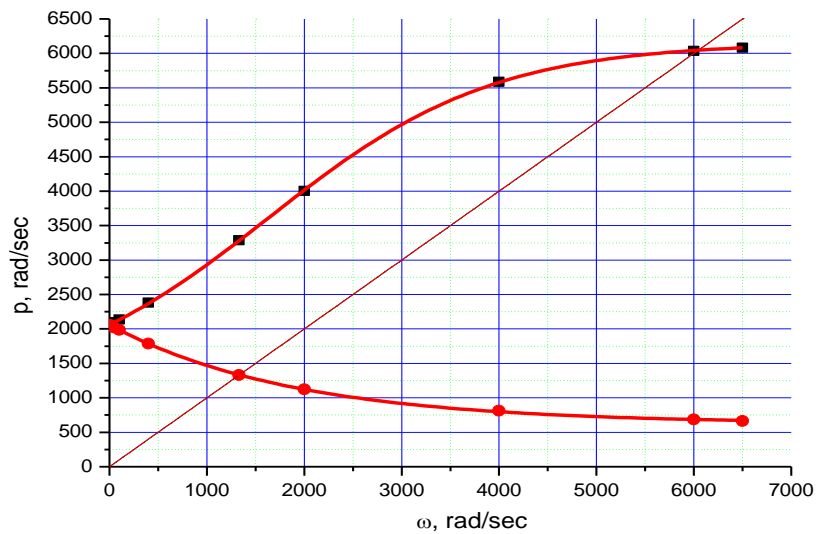


Рис.2.36. Діаграма Кемпбела для 3-ої власної частоти

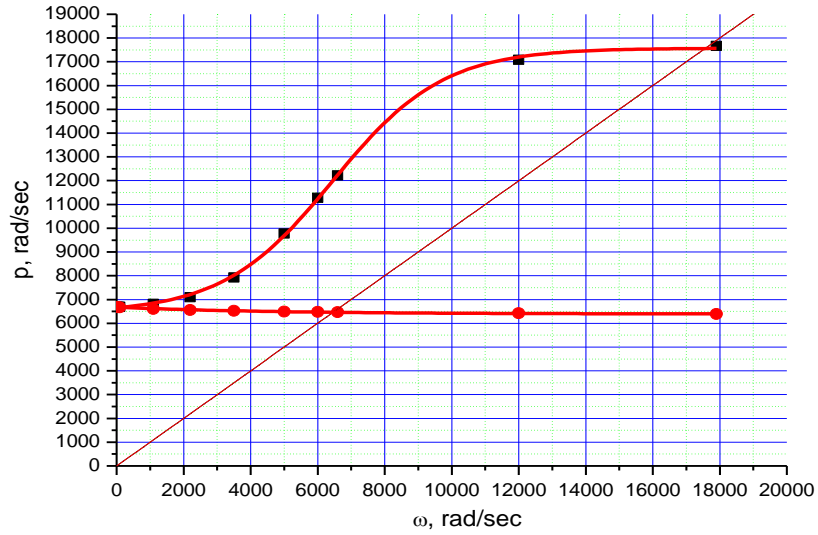


Рис.2.37. Діаграма Кемпбела для 4-ої власної частоти

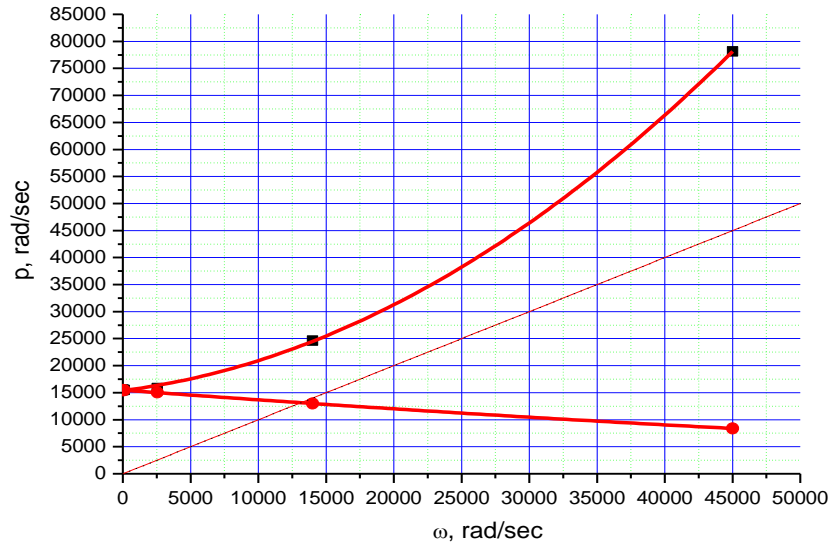


Рис.2.38. Діаграма Кемпбела для 5-ої власної частоти

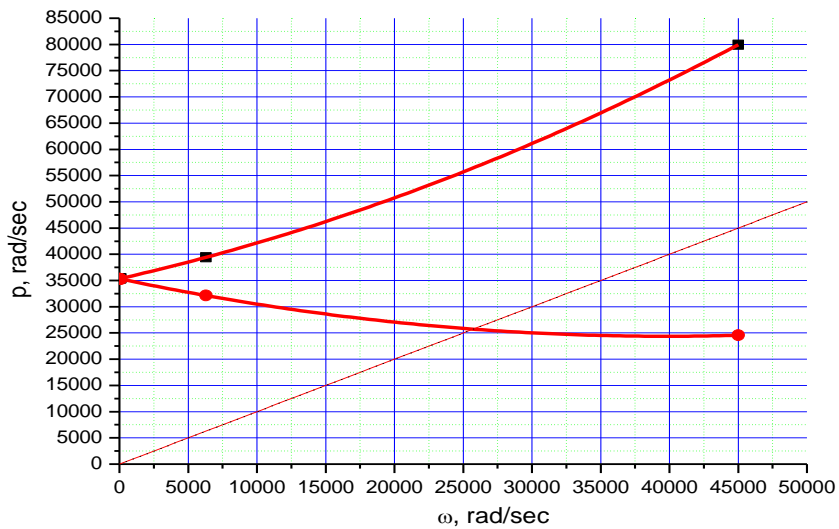


Рис.2.39. Діаграма Кемпбела для 6-ої власної частоти

На Рис.2.34-2.39 наведені діаграми Кемпбелла [121,123], а також пряма, напрямлена під кутом  $45^\circ$ , точки перетину якої відповідають резонансним частотам. Як видно з графіків, власні частоти залежать від напрямку прецесії і кутової частоти обертання; якщо провести лінію  $p = \omega$ , то у точках перетину її з графіком, ми отримуємо істинні значення власних частот; в даному випадку ми маємо 10 резонансних частот, замість 6, які нам дає стандартний розв'язок.

Точки, в яких відбувається резонанс, зазначені в Табл.2.6.

Таблиця 2.6

Власні частоти із врахуванням та без врахування гіроскопічного ефекту

Власна частота	Значення власної частоти без врахування гіроскопічного ефекту, Гц	Значення власної частоти із врахуванням гіроскопічного ефекту,	
		Пряма прецесія, $p = \omega > 0$ (Гц)	Обернена прецесія, $p = \omega < 0$ (Гц)
1-ша, $p_1$	9,8030	9,8046	9,8013
2-га, $p_2$	33,7740	35,1640	32,5029
3-тя, $p_3$	327,715	961,222	211,623
4-та, $p_4$	1063,602	2808,251	1029,815
5-та, $p_5$	2462,51	--	2092,85
6-та, $p_6$	5622,91	--	4220,46

### 2.7.2. Вплив статичного і динамічного дисбалансу на рух центрифуги РІСО21 з врахуванням гіроскопічного ефекту.

Для тримасової системи вираз для моменту інерції кожного тіла буде викладений з врахуванням впливу статичного дисбалансу (вплив динамічного дисбалансу на вираз моменту інерції, як це було показано на прикладі одно масової системи, – незначний, тому ми ним нехтуємо):

$$I_{\zeta_i} = I_{z_i} + m_i \cdot e_i^2 \quad (2.167)$$

Вираз для кінетичної і потенціальної енергії:

$$T = \frac{1}{2} m_1 [\dot{\xi}_1^2 + \dot{\eta}_1^2] + \frac{1}{2} I_1 [\dot{\theta}_1^2 + \dot{\alpha}_1^2] + \frac{1}{2} I_{\zeta_2} [\dot{\varphi} + \dot{\alpha}_2 \cdot \theta_2]^2 + \frac{1}{2} I_{\zeta_3} [\dot{\varphi} + \dot{\alpha}_3 \cdot \theta_3]^2 + \\ + \frac{1}{2} m_2 \left[ (\dot{\xi}_2 - \omega \cdot e_2 \cdot \sin \omega t)^2 + (\dot{\eta}_2 + \omega \cdot e_2 \cdot \cos \omega t)^2 \right] + \frac{1}{2} m_3 \left[ (\dot{\xi}_3 - \omega \cdot e_3 \cdot \sin \omega t)^2 + \right.$$



$$\begin{aligned}
& +(\dot{\eta}_3 + \omega \cdot e_3 \cdot \cos \omega t)^2 \Big] + \frac{1}{2} I_2 \left[ (\dot{\theta}_2 + \omega \cdot \gamma_2 \cdot \cos \omega t)^2 + (\dot{\alpha}_2 - \gamma_2 \cdot \omega \cdot \sin \omega t)^2 \right] + \\
& + \frac{1}{2} I_3 \left[ (\dot{\theta}_3 + \omega \cdot \gamma_3 \cdot \cos \omega t)^2 + (\dot{\alpha}_3 - \gamma_3 \cdot \omega \cdot \sin \omega t)^2 \right]
\end{aligned} \tag{2.168}$$

$$\begin{aligned}
\Pi = & \frac{1}{2} c_{11} (\xi_1^2 + \eta_1^2) + \frac{1}{2} c_{22} (\xi_2^2 + \eta_2^2) + \frac{1}{2} c_{33} (\xi_3^2 + \eta_3^2) + \frac{1}{2} c_{44} (\alpha_1^2 + \theta_1^2) + \\
& + \frac{1}{2} c_{55} (\alpha_2^2 + \theta_2^2) + \frac{1}{2} c_{66} (\alpha_3^2 + \theta_3^2) + c_{12} (\xi_1 \cdot \xi_2 + \eta_1 \cdot \eta_2) + c_{13} (\xi_1 \cdot \xi_3 + \eta_1 \cdot \eta_3) + \\
& + c_{14} (\xi_1 \cdot \theta_1 + \eta_1 \cdot \alpha_1) + c_{15} (\xi_1 \cdot \theta_2 + \eta_1 \cdot \alpha_2) + c_{16} (\xi_1 \cdot \theta_3 + \eta_1 \cdot \alpha_3) + \\
& + c_{23} (\xi_2 \cdot \xi_3 + \eta_2 \cdot \eta_3) + c_{24} (\xi_2 \cdot \theta_1 + \eta_2 \cdot \alpha_1) + c_{25} (\xi_2 \cdot \theta_2 + \eta_2 \cdot \alpha_2) + \\
& + c_{26} (\xi_2 \cdot \theta_3 + \eta_2 \cdot \alpha_3) + c_{34} (\xi_3 \cdot \theta_1 + \eta_3 \cdot \alpha_1) + c_{35} (\xi_3 \cdot \theta_2 + \eta_3 \cdot \alpha_2) + \\
& + c_{36} (\xi_3 \cdot \theta_3 + \eta_3 \cdot \alpha_3) + c_{45} (\alpha_1 \cdot \alpha_2 + \theta_1 \cdot \theta_2) + c_{46} (\alpha_1 \cdot \alpha_3 + \theta_1 \cdot \theta_3) + \\
& + c_{56} (\alpha_2 \cdot \alpha_3 + \theta_2 \cdot \theta_3)
\end{aligned} \tag{2.169}$$

Після підстановки цього виразу у рівняння Лагранжа другого роду, отримуємо наступну систему диференціальних рівнянь (2.170):

$$\begin{aligned}
m_1 \ddot{\xi}_1 + c_{11} \xi_1 + c_{12} \xi_2 + c_{13} \xi_3 + c_{14} \theta_1 + c_{15} \theta_2 + c_{16} \theta_3 &= 0 \\
m_2 [\ddot{\xi}_2 - \omega^2 e_2 \cdot \cos \omega t] + c_{12} \xi_1 + c_{22} \xi_2 + c_{23} \xi_3 + c_{24} \theta_1 + c_{25} \theta_2 + c_{26} \theta_3 &= 0 \\
m_3 [\ddot{\xi}_3 - \omega^2 e_3 \cdot \cos \omega t] + c_{13} \xi_1 + c_{23} \xi_2 + c_{33} \xi_3 + c_{34} \theta_1 + c_{35} \theta_2 + c_{36} \theta_3 &= 0 \\
m_1 \ddot{\eta}_1 + c_{11} \eta_1 + c_{12} \eta_2 + c_{13} \eta_3 + c_{14} \alpha_1 + c_{15} \alpha_2 + c_{16} \alpha_3 &= 0 \\
m_2 [\ddot{\eta}_2 - \omega^2 e_2 \cdot \sin \omega t] + c_{12} \eta_1 + c_{22} \eta_2 + c_{23} \eta_3 + c_{24} \alpha_1 + c_{25} \alpha_2 + c_{26} \alpha_3 &= 0 \\
m_3 [\ddot{\eta}_3 - \omega^2 e_3 \cdot \sin \omega t] + c_{13} \eta_1 + c_{23} \eta_2 + c_{33} \eta_3 + c_{34} \alpha_1 + c_{35} \alpha_2 + c_{36} \alpha_3 &= 0 \\
I_1 \ddot{\alpha}_1 + c_{14} \eta_1 + c_{24} \eta_2 + c_{34} \eta_3 + c_{44} \alpha_1 + c_{45} \alpha_2 + c_{46} \alpha_3 &= 0 \\
I_2 [\ddot{\alpha}_2 - \omega^2 \gamma_2 \cdot \cos \omega t] + c_{15} \eta_1 + c_{25} \eta_2 + c_{35} \eta_3 + c_{45} \alpha_1 + c_{55} \alpha_2 + c_{56} \alpha_3 + \\
+ I_{\zeta_2} (\dot{\phi} + \dot{\alpha}_2 \cdot \theta_2) \cdot \dot{\theta}_2 &= 0 \\
I_3 [\ddot{\alpha}_3 - \omega^2 \gamma_3 \cdot \cos \omega t] + c_{16} \eta_1 + c_{26} \eta_2 + c_{36} \eta_3 + c_{46} \alpha_1 + c_{56} \alpha_2 + c_{66} \alpha_3 + \\
+ I_{\zeta_3} (\dot{\phi} + \dot{\alpha}_3 \cdot \theta_3) \cdot \dot{\theta}_3 &= 0 \\
I_1 \ddot{\theta}_1 + c_{14} \xi_1 + c_{24} \xi_2 + c_{34} \xi_3 + c_{44} \theta_1 + c_{45} \theta_2 + c_{46} \theta_3 &= 0 \\
I_2 [\ddot{\theta}_2 - \omega^2 \gamma_2 \cdot \sin \omega t] + c_{15} \xi_1 + c_{25} \xi_2 + c_{35} \xi_3 + c_{45} \theta_1 + c_{55} \theta_2 + c_{56} \theta_3 - \\
- I_{\zeta_2} (\dot{\phi} + \dot{\alpha}_2 \cdot \theta_2) \cdot \dot{\alpha}_2 &= 0 \\
I_3 [\ddot{\theta}_3 - \omega^2 \gamma_3 \cdot \sin \omega t] + c_{16} \xi_1 + c_{26} \xi_2 + c_{36} \xi_3 + c_{46} \theta_1 + c_{56} \theta_2 + c_{66} \theta_3 - \\
- I_{\zeta_3} (\dot{\phi} + \dot{\alpha}_3 \cdot \theta_3) \cdot \dot{\alpha}_3 &= 0
\end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt} [I_{\zeta_2} (\dot{\phi} + \dot{\alpha}_2 \cdot \theta_2)] = 0$$

$$\frac{d}{dt}[I_{\zeta_3}(\dot{\varphi}_3 + \dot{\alpha}_3 \cdot \theta_3)] = 0$$

Спростивши вирази, отримаємо (2.171)

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{\xi}_1 + c_{11} \dot{\xi}_1 + c_{12} \dot{\xi}_2 + c_{13} \dot{\xi}_3 + c_{14} \dot{\theta}_1 + c_{15} \dot{\theta}_2 + c_{16} \dot{\theta}_3 &= 0 \\ m_2 \ddot{\xi}_2 + c_{12} \dot{\xi}_1 + c_{22} \dot{\xi}_2 + c_{23} \dot{\xi}_3 + c_{24} \dot{\theta}_1 + c_{25} \dot{\theta}_2 + c_{26} \dot{\theta}_3 &= m_2 \omega^2 e_2 \cdot \cos \omega t \\ m_3 \ddot{\xi}_3 + c_{13} \dot{\xi}_1 + c_{23} \dot{\xi}_2 + c_{33} \dot{\xi}_3 + c_{34} \dot{\theta}_1 + c_{35} \dot{\theta}_2 + c_{36} \dot{\theta}_3 &= m_3 \omega^2 e_3 \cdot \cos \omega t \\ m_1 \ddot{\eta}_1 + c_{11} \dot{\eta}_1 + c_{12} \dot{\eta}_2 + c_{13} \dot{\eta}_3 + c_{14} \dot{\alpha}_1 + c_{15} \dot{\alpha}_2 + c_{16} \dot{\alpha}_3 &= 0 \\ m_2 \ddot{\eta}_2 + c_{12} \dot{\eta}_1 + c_{22} \dot{\eta}_2 + c_{23} \dot{\eta}_3 + c_{24} \dot{\alpha}_1 + c_{25} \dot{\alpha}_2 + c_{26} \dot{\alpha}_3 &= m_2 \omega^2 e_2 \cdot \sin \omega t \\ m_3 \ddot{\eta}_3 + c_{13} \dot{\eta}_1 + c_{23} \dot{\eta}_2 + c_{33} \dot{\eta}_3 + c_{34} \dot{\alpha}_1 + c_{35} \dot{\alpha}_2 + c_{36} \dot{\alpha}_3 &= m_3 \omega^2 e_3 \cdot \sin \omega t \\ I_1 \ddot{\alpha}_1 + c_{14} \dot{\eta}_1 + c_{24} \dot{\eta}_2 + c_{34} \dot{\eta}_3 + c_{44} \dot{\alpha}_1 + c_{45} \dot{\alpha}_2 + c_{46} \dot{\alpha}_3 &= 0 \\ I_2 \ddot{\alpha}_2 + c_{15} \dot{\eta}_1 + c_{25} \dot{\eta}_2 + c_{35} \dot{\eta}_3 + c_{45} \dot{\alpha}_1 + c_{55} \dot{\alpha}_2 + c_{56} \dot{\alpha}_3 + I_{\zeta_2} \omega \cdot \dot{\theta}_2 &= I_2 \omega^2 \gamma_2 \cdot \cos \omega t \\ I_3 \ddot{\alpha}_3 + c_{16} \dot{\eta}_1 + c_{26} \dot{\eta}_2 + c_{36} \dot{\eta}_3 + c_{46} \dot{\alpha}_1 + c_{56} \dot{\alpha}_2 + c_{66} \dot{\alpha}_3 + I_{\zeta_3} \omega \cdot \dot{\theta}_3 &= I_3 \omega^2 \gamma_3 \cdot \cos \omega t \\ I_1 \ddot{\theta}_1 + c_{14} \dot{\xi}_1 + c_{24} \dot{\xi}_2 + c_{34} \dot{\xi}_3 + c_{44} \dot{\theta}_1 + c_{45} \dot{\theta}_2 + c_{46} \dot{\theta}_3 &= 0 \\ I_2 \ddot{\theta}_2 + c_{15} \dot{\xi}_1 + c_{25} \dot{\xi}_2 + c_{35} \dot{\xi}_3 + c_{45} \dot{\theta}_1 + c_{55} \dot{\theta}_2 + c_{56} \dot{\theta}_3 - I_{\zeta_2} \omega \cdot \dot{\alpha}_2 &= I_2 \omega^2 \gamma_2 \cdot \sin \omega t \\ I_3 \ddot{\theta}_3 + c_{16} \dot{\xi}_1 + c_{26} \dot{\xi}_2 + c_{36} \dot{\xi}_3 + c_{46} \dot{\theta}_1 + c_{56} \dot{\theta}_2 + c_{66} \dot{\theta}_3 - I_{\zeta_3} \omega \cdot \dot{\alpha}_3 &= I_3 \omega^2 \gamma_3 \cdot \sin \omega t \end{aligned}$$

Нас цікавлять лише періодичні коливання системи. Тому, переміщення і кути повороту однорідного розв'язку знаходимо у вигляді:

$$\xi_i = A_i \sin pt; \quad \eta_i = A_i \cos pt; \quad \alpha_i = B_i \cos pt; \quad \theta_i = B_i \sin pt. \quad (2.172)$$

Неоднорідний розв'язок знаходимо у вигляді:

$$\begin{aligned} \xi_i &= K_{i1} \sin \omega t + K_{i2} \cos \omega t \\ \eta_i &= L_{i1} \sin \omega t + L_{i2} \cos \omega t \\ \alpha_i &= M_{i1} \sin \omega t + M_{i2} \cos \omega t \\ \theta_i &= N_{i1} \sin \omega t + N_{i2} \cos \omega t \end{aligned} \quad (2.173)$$

Після підстановки виразів у систему, отримуємо наступні рівняння:

$$\begin{aligned} m_1[-K_{11} \omega^2 \sin \omega t - K_{12} \omega^2 \cos \omega t] + c_{11}[K_{11} \sin \omega t + K_{12} \cos \omega t] + \\ + c_{12}[K_{21} \sin \omega t + K_{22} \cos \omega t] + c_{13}[K_{31} \sin \omega t + K_{32} \cos \omega t] + \\ + c_{14}[N_{11} \sin \omega t + N_{12} \cos \omega t] + c_{15}[N_{21} \sin \omega t + N_{22} \cos \omega t] + \\ + c_{16}[N_{31} \sin \omega t + N_{32} \cos \omega t] = 0 \end{aligned} \quad (2.174)$$

$$\begin{aligned} m_2[-K_{21} \omega^2 \sin \omega t - K_{22} \omega^2 \cos \omega t] + c_{12}[K_{11} \sin \omega t + K_{12} \cos \omega t] + \\ + c_{22}[K_{21} \sin \omega t + K_{22} \cos \omega t] + c_{23}[K_{31} \sin \omega t + K_{32} \cos \omega t] + \\ + c_{24}[N_{11} \sin \omega t + N_{12} \cos \omega t] + c_{25}[N_{21} \sin \omega t + N_{22} \cos \omega t] + \end{aligned} \quad (2.175)$$

$$\begin{aligned}
&+c_{26}[N_{31}\sin\omega t + N_{32}\cos\omega t] = m_2\omega^2 e_2 \cdot \cos\omega t \\
&m_3[-K_{31}\omega^2\sin\omega t - K_{32}\omega^2\cos\omega t] + c_{13}[K_{11}\sin\omega t + K_{12}\cos\omega t] + \\
&+c_{23}[K_{21}\sin\omega t + K_{22}\cos\omega t] + c_{33}[K_{31}\sin\omega t + K_{32}\cos\omega t] + \\
&+c_{34}[N_{11}\sin\omega t + N_{12}\cos\omega t] + c_{35}[N_{21}\sin\omega t + N_{22}\cos\omega t] + \\
&+c_{36}[N_{31}\sin\omega t + N_{32}\cos\omega t] = m_3\omega^2 e_3 \cdot \cos\omega t
\end{aligned} \tag{2.176}$$

$$\begin{aligned}
&m_1[-L_{11}\omega^2\sin\omega t - L_{12}\omega^2\cos\omega t] + c_{11}[L_{11}\sin\omega t + L_{12}\cos\omega t] + \\
&+c_{12}[L_{21}\sin\omega t + L_{22}\cos\omega t] + c_{13}[L_{31}\sin\omega t + L_{32}\cos\omega t] + \\
&+c_{14}[M_{11}\sin\omega t + M_{12}\cos\omega t] + c_{15}[M_{21}\sin\omega t + M_{22}\cos\omega t] + \\
&+c_{16}[M_{31}\sin\omega t + M_{32}\cos\omega t] = 0
\end{aligned} \tag{2.177}$$

$$\begin{aligned}
&m_2[-L_{21}\omega^2\sin\omega t - L_{22}\omega^2\cos\omega t] + c_{12}[L_{11}\sin\omega t + L_{12}\cos\omega t] + \\
&+c_{22}[L_{21}\sin\omega t + L_{22}\cos\omega t] + c_{23}[L_{31}\sin\omega t + L_{32}\cos\omega t] + \\
&+c_{24}[M_{11}\sin\omega t + M_{12}\cos\omega t] + c_{25}[M_{21}\sin\omega t + M_{22}\cos\omega t] + \\
&+c_{26}[M_{31}\sin\omega t + M_{32}\cos\omega t] = m_2\omega^2 e_2 \cdot \cos\omega t
\end{aligned} \tag{2.178}$$

$$\begin{aligned}
&m_3[-L_{31}\omega^2\sin\omega t - L_{32}\omega^2\cos\omega t] + c_{13}[L_{11}\sin\omega t + L_{12}\cos\omega t] + \\
&+c_{23}[L_{21}\sin\omega t + L_{22}\cos\omega t] + c_{33}[L_{31}\sin\omega t + L_{32}\cos\omega t] + \\
&+c_{34}[M_{11}\sin\omega t + M_{12}\cos\omega t] + c_{35}[M_{21}\sin\omega t + M_{22}\cos\omega t] + \\
&+c_{36}[M_{31}\sin\omega t + M_{32}\cos\omega t] = m_3\omega^2 e_3 \cdot \cos\omega t
\end{aligned} \tag{2.179}$$

$$\begin{aligned}
&I_1[-M_{11}\omega^2\sin\omega t - M_{12}\omega^2\cos\omega t] + c_{14}[L_{11}\sin\omega t + L_{12}\cos\omega t] + \\
&+c_{24}[L_{21}\sin\omega t + L_{22}\cos\omega t] + c_{34}[L_{31}\sin\omega t + L_{32}\cos\omega t] + \\
&+c_{44}[M_{11}\sin\omega t + M_{12}\cos\omega t] + c_{45}[M_{21}\sin\omega t + M_{22}\cos\omega t] + \\
&+c_{46}[M_{31}\sin\omega t + M_{32}\cos\omega t] = 0
\end{aligned} \tag{2.180}$$

$$\begin{aligned}
&I_2[-M_{21}\omega^2\sin\omega t - M_{22}\omega^2\cos\omega t] + c_{15}[L_{11}\sin\omega t + L_{12}\cos\omega t] + \\
&+c_{25}[L_{21}\sin\omega t + L_{22}\cos\omega t] + c_{35}[L_{31}\sin\omega t + L_{32}\cos\omega t] + \\
&+c_{45}[M_{11}\sin\omega t + M_{12}\cos\omega t] + c_{55}[M_{21}\sin\omega t + M_{22}\cos\omega t] + \\
&+c_{56}[M_{31}\sin\omega t + M_{32}\cos\omega t] + I_{\zeta_2} \cdot \omega \cdot [N_{21} \cdot \omega \cdot \cos\omega t - N_{22} \cdot \omega \cdot \sin\omega t] = \\
&= I_2\omega^2 \gamma_2 \cdot \cos\omega t
\end{aligned} \tag{2.181}$$

$$\begin{aligned}
&I_3[-M_{31}\omega^2\sin\omega t - M_{32}\omega^2\cos\omega t] + c_{16}[L_{11}\sin\omega t + L_{12}\cos\omega t] + \\
&+c_{26}[L_{21}\sin\omega t + L_{22}\cos\omega t] + c_{36}[L_{31}\sin\omega t + L_{32}\cos\omega t] + \\
&+c_{46}[M_{11}\sin\omega t + M_{12}\cos\omega t] + c_{56}[M_{21}\sin\omega t + M_{22}\cos\omega t] + \\
&+c_{66}[M_{31}\sin\omega t + M_{32}\cos\omega t] + I_{\zeta_3} \cdot \omega \cdot [N_{31} \cdot \omega \cdot \cos\omega t - N_{32} \cdot \omega \cdot \sin\omega t] = \\
&= I_3\omega^2 \gamma_3 \cdot \cos\omega t
\end{aligned} \tag{2.182}$$

$$\begin{aligned}
& I_1[-N_{11}\omega^2 \sin \omega t - N_{12}\omega^2 \cos \omega t] + c_{14}[K_{11} \sin \omega t + K_{12} \cos \omega t] + \\
& + c_{24}[K_{21} \sin \omega t + K_{22} \cos \omega t] + c_{34}[K_{31} \sin \omega t + K_{32} \cos \omega t] + \\
& + c_{44}[N_{11} \sin \omega t + N_{12} \cos \omega t] + c_{45}[N_{21} \sin \omega t + N_{22} \cos \omega t] + \\
& + c_{46}[N_{31} \sin \omega t + N_{32} \cos \omega t] = 0
\end{aligned} \tag{2.183}$$

$$\begin{aligned}
& I_2[-N_{21}\omega^2 \sin \omega t - N_{22}\omega^2 \cos \omega t] + c_{15}[K_{11} \sin \omega t + K_{12} \cos \omega t] + \\
& + c_{25}[K_{21} \sin \omega t + K_{22} \cos \omega t] + c_{35}[K_{31} \sin \omega t + K_{32} \cos \omega t] + \\
& + c_{45}[N_{11} \sin \omega t + N_{12} \cos \omega t] + c_{55}[N_{21} \sin \omega t + N_{22} \cos \omega t] + \\
& + c_{56}[N_{31} \sin \omega t + N_{32} \cos \omega t] + I_{\zeta_2} \cdot \omega \cdot [M_{21} \cdot \omega \cdot \cos \omega t - M_{22} \cdot \omega \cdot \sin \omega t] = \\
& = I_2 \omega^2 \gamma_2 \cdot \cos \omega t
\end{aligned} \tag{2.184}$$

$$\begin{aligned}
& I_3[-N_{31}\omega^2 \sin \omega t - N_{32}\omega^2 \cos \omega t] + c_{16}[K_{11} \sin \omega t + K_{12} \cos \omega t] + \\
& + c_{26}[K_{21} \sin \omega t + K_{22} \cos \omega t] + c_{36}[K_{31} \sin \omega t + K_{32} \cos \omega t] + \\
& + c_{46}[N_{11} \sin \omega t + M_{12} \cos \omega t] + c_{56}[N_{21} \sin \omega t + N_{22} \cos \omega t] + \\
& + c_{66}[N_{31} \sin \omega t + N_{32} \cos \omega t] + I_{\zeta_3} \cdot \omega \cdot [M_{31} \cdot \omega \cdot \cos \omega t - M_{32} \cdot \omega \cdot \sin \omega t] = \\
& = I_3 \omega^2 \gamma_3 \cdot \cos \omega t
\end{aligned} \tag{2.185}$$

З цих рівнянь отримуємо (2.186):

$$\begin{aligned}
& K_{11}[c_{11} - m_1 \omega^2] + K_{21}[c_{12}] + K_{31}[c_{13}] + N_{11}[c_{14}] + N_{21}[c_{15}] + N_{31}[c_{16}] = 0 \\
& K_{12}[c_{11} - m_1 \omega^2] + K_{22}[c_{12}] + K_{32}[c_{13}] + N_{12}[c_{14}] + N_{22}[c_{15}] + N_{32}[c_{16}] = 0 \\
& K_{21}[c_{22} - m_2 \omega^2] + K_{11}[c_{12}] + K_{31}[c_{23}] + N_{11}[c_{24}] + N_{21}[c_{25}] + N_{31}[c_{26}] = 0 \\
& K_{22}[c_{22} - m_2 \omega^2] + K_{12}[c_{12}] + K_{32}[c_{23}] + N_{12}[c_{24}] + N_{22}[c_{25}] + N_{32}[c_{26}] = m_2 \omega^2 e_2 \\
& K_{31}[c_{33} - m_3 \omega^2] + K_{11}[c_{13}] + K_{21}[c_{23}] + N_{11}[c_{34}] + N_{21}[c_{35}] + N_{31}[c_{36}] = 0 \\
& K_{32}[c_{33} - m_3 \omega^2] + K_{12}[c_{13}] + K_{22}[c_{23}] + N_{12}[c_{34}] + N_{22}[c_{35}] + N_{32}[c_{36}] = m_3 \omega^2 e_3 \\
& L_{11}[c_{11} - m_1 \omega^2] + L_{21}[c_{12}] + L_{31}[c_{13}] + M_{11}[c_{14}] + M_{21}[c_{15}] + M_{31}[c_{16}] = 0 \\
& L_{12}[c_{11} - m_1 \omega^2] + L_{22}[c_{12}] + L_{32}[c_{13}] + M_{12}[c_{14}] + M_{22}[c_{15}] + M_{32}[c_{16}] = 0 \\
& L_{21}[c_{22} - m_2 \omega^2] + c_{12}[L_{11}] + L_{31}[c_{23}] + M_{11}[c_{24}] + M_{21}[c_{25}] + M_{31}[c_{26}] = 0 \\
& L_{22}[c_{22} - m_2 \omega^2] + L_{12}[c_{12}] + L_{32}[c_{23}] + M_{12}[c_{24}] + M_{22}[c_{25}] + M_{32}[c_{26}] = m_2 \omega^2 e_2 \\
& L_{31}[c_{33} - m_3 \omega^2 \sin \omega t] + L_{11}[c_{13}] + L_{21}[c_{23}] + M_{11}[c_{34}] + M_{21}[c_{35}] + M_{31}[c_{36}] = 0 \\
& L_{32}[c_{33} - m_3 \omega^2] + L_{12}[c_{13}] + L_{22}[c_{23}] + M_{12}[c_{34}] + M_{22}[c_{35}] + M_{32}[c_{36}] = m_3 \omega^2 e_3 \\
& M_{11}[c_{44} - I_1 \omega^2] + L_{11}[c_{14}] + L_{21}[c_{24}] + L_{31}[c_{34}] + M_{21}[c_{45}] + M_{31}[c_{46}] = 0 \\
& M_{12}[c_{44} - I_1 \omega^2] + L_{12}[c_{14}] + L_{22}[c_{24}] + L_{32}[c_{34}] + M_{22}[c_{45}] + M_{32}[c_{46}] = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& M_{21}[c_{55} - I_2\omega^2] + L_{11}[c_{15}] + L_{21}[c_{25}] + L_{31}[c_{35}] + M_{11}[c_{45}] + M_{31}[c_{56}] + \\
& + N_{22}[-I_{\zeta_2}\omega^2] = 0 \\
& M_{22}[c_{55} - I_2\omega^2] + L_{12}[c_{15}] + L_{22}[c_{25}] + L_{32}[c_{35}] + M_{12}[c_{45}] + M_{32}[c_{56}] + \\
& + N_{21}[I_{\zeta_2}\omega^2] = I_2\omega^2\gamma_2 \\
& M_{31}[c_{66} - I_3\omega^2] + L_{11}[c_{16}] + L_{21}[c_{26}] + L_{31}[c_{36}] + M_{11}[c_{46}] + M_{21}[c_{56}] + \\
& + N_{32}[-I_{\zeta_3}\omega^2] = 0 \\
& M_{32}[c_{66} - I_3\omega^2] + L_{12}[c_{16}] + L_{22}[c_{26}] + L_{32}[c_{36}] + M_{12}[c_{46}] + M_{22}[c_{56}] + \\
& + N_{31}[I_{\zeta_3}\omega^2] = I_3\omega^2\gamma_3 \\
& N_{11}[c_{44} - I_1\omega^2] + K_{11}[c_{14}] + K_{21}[c_{24}] + K_{31}[c_{34}] + N_{21}[c_{45}] + N_{31}[c_{46}] = 0 \\
& N_{12}[c_{44} - I_1\omega^2] + K_{12}[c_{14}] + K_{22}[c_{24}] + K_{32}[c_{34}] + N_{22}[c_{45}] + N_{32}[c_{46}] = 0 \\
& N_{21}[c_{55} - I_2\omega^2] + K_{11}[c_{15}] + K_{21}[c_{25}] + K_{31}[c_{35}] + N_{11}[c_{45}] + N_{31}[c_{56}] + M_{22}[-I_{\zeta_2}\omega^2] = 0 \\
& N_{22}[c_{55} - I_2\omega^2] + K_{12}[c_{15}] + K_{22}[c_{25}] + K_{32}[c_{35}] + N_{12}[c_{45}] + N_{32}[c_{56}] + M_{21}[I_{\zeta_2}\omega^2] = \\
& = I_2\omega^2\gamma_2 \\
& N_{31}[c_{66} - I_3\omega^2] + K_{11}[c_{16}] + K_{21}[c_{26}] + K_{31}[c_{36}] + N_{11}[c_{46}] + N_{21}[c_{56}] + M_{32}[-I_{\zeta_3}\omega^2] = 0 \\
& N_{32}[c_{66} - I_3\omega^2] + K_{12}[c_{16}] + K_{22}[c_{26}] + K_{32}[c_{36}] + N_{12}[c_{46}] + N_{22}[c_{56}] + M_{31}[I_{\zeta_3}\omega^2] = \\
& = I_3\omega^2\gamma_3
\end{aligned}$$

Отримаємо наступну систему рівнянь:

$$[D_{ij}]\{A\} = \{P\}, \quad (2.187)$$

$$\text{де } \{A\} = \{K_1 \ K_2 \ K_3 \ L_1 \ L_2 \ L_3 \ M_1 \ M_2 \ M_3 \ N_1 \ N_2 \ N_3\}^T,$$

Звідси отримуємо значення амплітудних коефіцієнтів. Ці значення є функціями від кутової швидкості обертання. Проілюструємо на прикладі зміни кута повороту ротора  $N_3 = \sqrt{N_{31}^2 + N_{32}^2}$ . Якщо зобразити графічно залежність амплітудної величини  $N_3$  від кутової швидкості обертання  $\omega$ , то у точках  $\omega = p$ , коли кутова швидкість обертання збігається з власною частотою обертання, ми отримаємо розрив 2-го роду (Рис.2.40– Рис.2.45).

$$[D_{ij}] = \begin{bmatrix} c_{11} - m_1 \omega^2 & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ c_{12} & c_{22} - m_2 \omega^2 & c_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} - m_3 \omega^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ 0 & 0 & 0 & c_{11} - m_1 \omega^2 & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{12} & c_{22} - m_2 \omega^2 & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{13} & c_{23} & c_{33} - m_3 \omega^2 & c_{34} & c_{35} & c_{36} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{14} & c_{24} & c_{34} & c_{44} - I_1 \omega^2 & c_{45} & c_{46} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{15} & c_{25} & c_{35} & c_{45} & c_{55} - I_2 \omega^2 & c_{56} & 0 & -I_{\zeta_2} \omega^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{16} & c_{26} & c_{36} & c_{46} & c_{56} & c_{66} - I_3 \omega^2 & 0 & 0 & 0 & -I_{\zeta_3} \omega^2 \\ c_{14} & c_{24} & c_{34} & 0 & 0 & 0 & 0 & -I_{\zeta_2} \omega^2 & 0 & c_{44} - I_1 \omega^2 & c_{45} & c_{46} & 0 \\ c_{15} & c_{25} & c_{35} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{46} & c_{55} - I_2 \omega^2 & c_{56} & 0 \\ c_{16} & c_{26} & c_{36} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -I_{\zeta_3} \omega^2 & c_{46} & c_{56} & c_{66} - I_3 \omega^2 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\{P\} = \left\{ 0 \quad m_2 \omega^2 e_2 \quad m_3 \omega^2 e_3 \quad 0 \quad m_2 \omega^2 e_2 \quad m_3 \omega^2 e_3 \quad 0 \quad I_2 \omega^2 \gamma_2 \quad I_3 \omega^2 \gamma_3 \quad 0 \quad I_2 \omega^2 \gamma_2 \quad I_3 \omega^2 \gamma_3 \right\}^T.$$

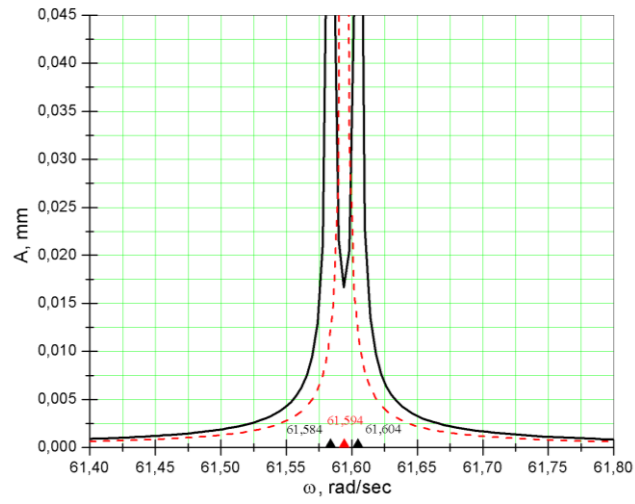


Рис.2.40. АЧХ для 1-ої власної частоти

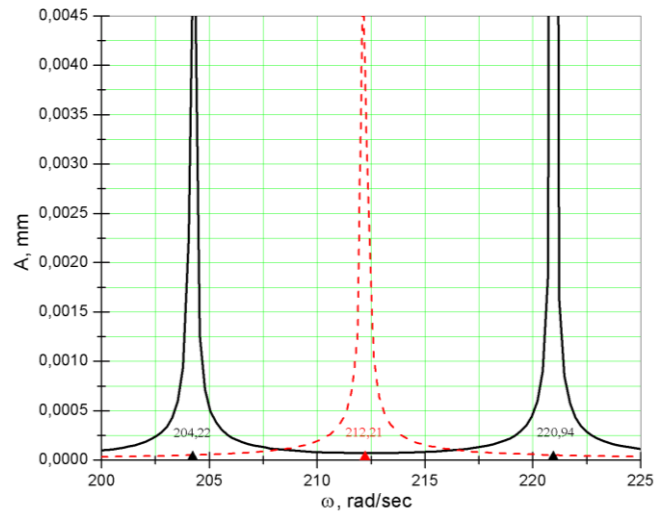


Рис.2.41. АЧХ для 2-ої власної частоти

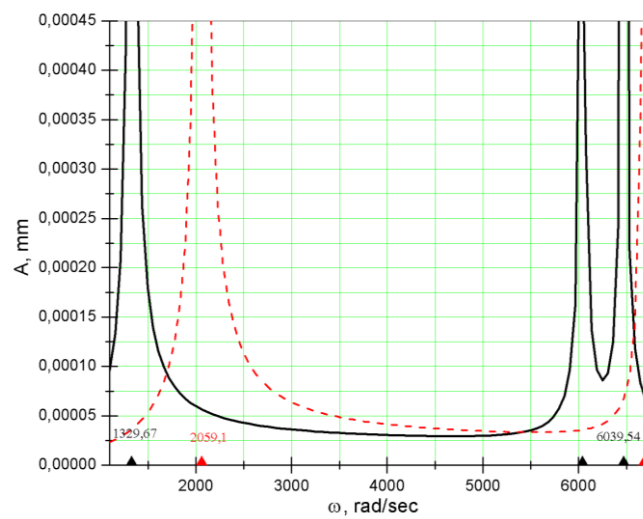


Рис.2.42. АЧХ для 3-ої власної частоти

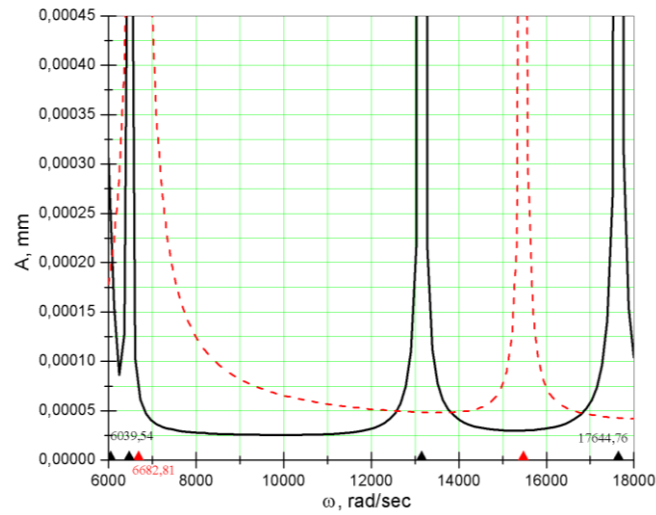


Рис.2.43. АЧХ для 4-ої власної частоти

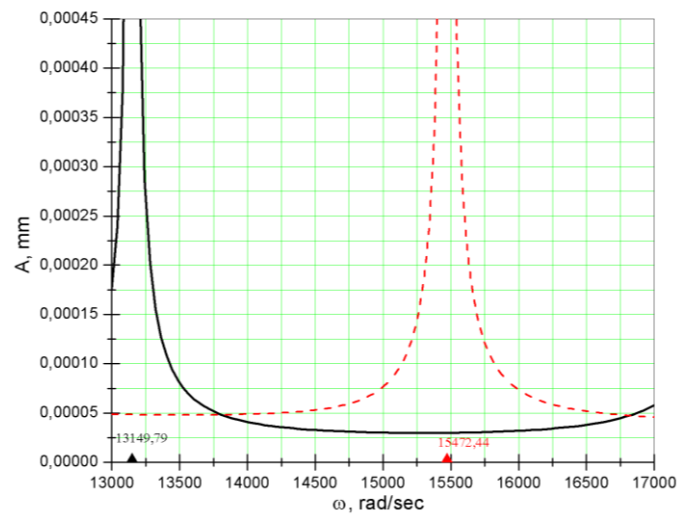


Рис.2.44. АЧХ для 5-ої власної частоти

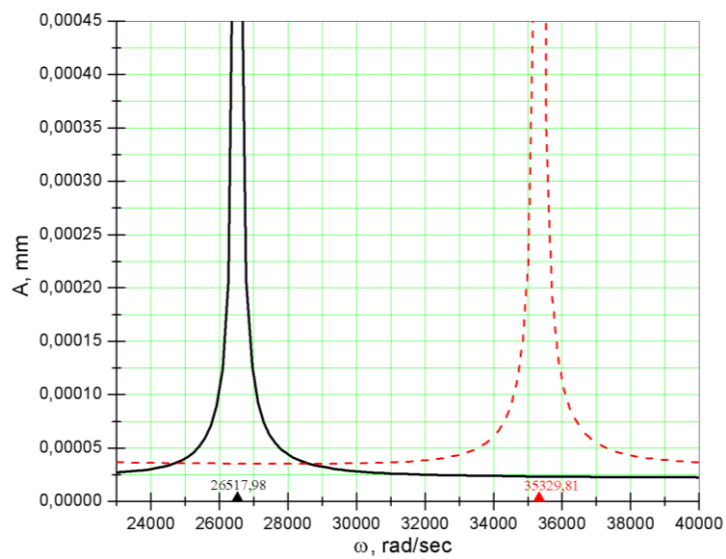


Рис.2.45. АЧХ для 6-ої власної частоти



Як видно з рисунків, - для перших чотирьох власних частот, резонанси наступають при прямій і оберненій прецесії, а для двох останніх – лише при оберненій. Власні частоти, значення яких дають стандартні методики обрахунку зображені пунктиром, а значення істинних частот, при яких настає резонанс – суцільними лініями.

На Рис.2.40-2.45 – наведена амплітудно-частотна характеристика на прикладі кута повороту ротора. Визначаючи залежності амплітудних величин при дисбалансі, отримуємо функцію, яка має критичні точки у місцях, де збігаються значення власних частот і частоти обертання валу.

## 2.8. Стійкість руху центрифуги

Якість сепарації залежить від стійкості руху. У теперішній час все більшого розповсюдження набувають центрифуги, ротори яких мають рухомі елементи [11,14,18,21]. Від параметрів руху центрифуги з такими елементами залежить якість виконання необхідних робіт. Наявність рухомих елементів суттєво впливає на перехідні процеси та виникнення вібрацій, які, в свою чергу, впливають на якість продукції та ефективність технологічного процесу і можуть викликати руйнування. Виходячи з цього, визначення необхідних умов стійкості руху центрифуги є актуальною задачею проектування.

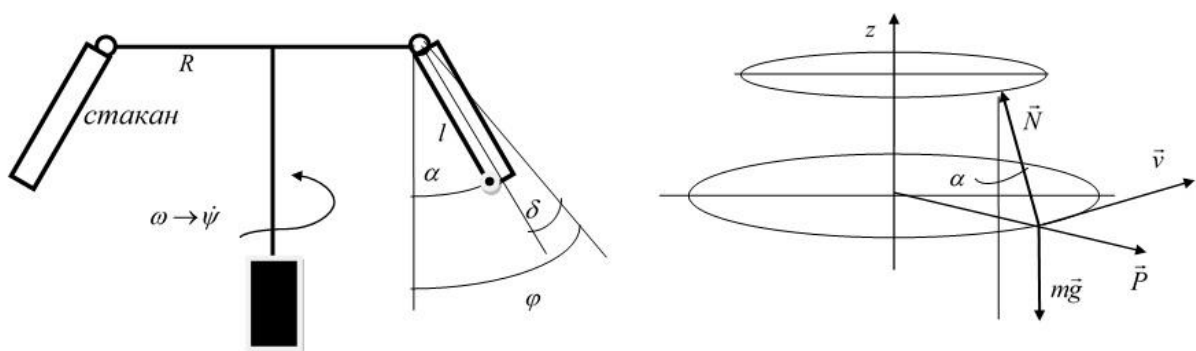


Рис.2.46. Схематичне зображення чашок ротора центрифуги

На рисунку (Рис.2.46) показані  $\vec{v}$  – швидкість колова,  $\vec{P}$  – центробіжна сила,  $\vec{N}$  – осьова сила стержня. Вважається, що кут  $\alpha$  відповідає сталому режиму, а кутова швидкість обертання центрифуги в сталому режимі дорівнює  $\omega$ .

Використовуємо рівняння Лагранжа другого роду

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = Q_{\varphi}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} - \frac{\partial L}{\partial \psi} = Q_{\psi}, \quad (2.188)$$

де  $Q_{\psi}$ ,  $Q_{\varphi}$  – узагальнені сили,  $L = T - \Pi$  – функція Лагранжа,  $T$  – кінетична енергія,  $\Pi$  – потенціальна енергія.

Функція Лагранжа дорівнює

$$L = m(R + l \sin \varphi)^2 \dot{\psi}^2 + \frac{1}{2} J_z \dot{\psi}^2 + J_x \dot{\varphi}^2 - 2mgl(1 - \cos \varphi), \quad (2.189)$$

де  $2mgl(1 - \cos \alpha)$  – потенціальна енергія системи визначається потенціальною енергією стаканів,  $m$  – маса стакану,  $l$  – відстань від осей обертання (осей цапф) до центру тяжіння,  $\alpha$  – кут відхилення осі стакану від вертикальної осі,  $m(R + l \sin \varphi)^2 \dot{\psi}^2$  – кінетична енергія руху за рахунок обертання відносно осі центрифуги,  $\frac{1}{2} J_z \dot{\psi}^2$  – кінетична енергія обертання пластини для кріплення стаканів з валом двигуна,  $J_x \dot{\varphi}^2$  – кінетична енергія обертового руху відносно осі кріплення двох стаканів  $x$  (осі цапф) з кутовою швидкістю  $\dot{\varphi}$ , де  $J_x$  – момент інерції стакану відносно осі цапфи. В несталому русі  $\varphi = \alpha + \varepsilon$ , кутова швидкість обертання стакану навколо осі центрифуги при сталому режимі  $\omega$ , а при несталому  $\dot{\psi} = \omega + \gamma$ .

Вважаємо, що узагальнена сила гальмування при обертанні навколо осі кріплення стакану (момент)  $Q_{\varphi} = -\chi \dot{\varphi}$ , узагальнена сила гальмування при обертанні навколо осі центрифуги (момент) складається з рушійного моменту  $M_1$ , який вважаємо сталим, та гальмуючого моменту пропорційного швидкості обертання  $-\nu \dot{\psi}$ ,  $Q_{\psi} = M_1 - \nu \dot{\psi}$ .

При сталому режимі руху  $\dot{\psi} = \omega$ ,  $\dot{\varphi} = \alpha$ ,  $Q_{\psi} = M_1 - \nu \omega = 0$ ,  $Q_{\varphi} = 0$ , тоді при сталому режимі з рівнянь Лагранжа другого роду отримуємо

$$\frac{d}{dt} \left[ 2m(R + l \sin \varphi)^2 \dot{\psi} + J_z \dot{\psi} \right] = (M_1 - \nu \dot{\psi}), \quad (2.190)$$

$$2J_x \ddot{\varphi} - 2m\dot{\psi}^2 (R + l \sin \varphi) l \cos \varphi + 2mgl \sin \varphi = -2\chi \dot{\varphi}. \quad (2.191)$$

$$\omega^2 = \frac{g \sin \alpha}{(R + l \sin \alpha) \cos \alpha}. \quad (2.192)$$

Сепарація найбільш ефективно відбувається при максимальній відцентровій силі при  $\alpha = \pi / 2$ .

Стійкість визначаємо за лінійним наближенням. Для цього диференціальні рівняння руху розкладаємо в ряд та утримуємо тільки лінійні члени

$$\frac{d}{dt} \left[ 2m(R + l \sin \varphi)^2 \dot{\psi} + J_z \dot{\psi} \right] = (M_1 - v\dot{\psi}), \quad (2.193)$$

$$2J_x \ddot{\varphi} - 2m\dot{\psi}^2 (R + l \sin \varphi) l \cos \varphi + 2mgl \sin \varphi = -2\chi \dot{\varphi}. \quad (2.194)$$

$$\left[ 2m(R + l \sin \varphi)^2 \ddot{\psi} + 4ml(R + l \sin \varphi) \dot{\psi} \dot{\varphi} \cos \varphi + J_{zk} \ddot{\psi} \right] = M_1 - k\dot{\psi}, \quad (2.195)$$

$$J_x \ddot{\varphi} - m\dot{\psi}^2 (R + l \sin \varphi) l \cos \varphi + mgl \sin \varphi = -\chi \dot{\varphi}. \quad (2.196)$$

$$\varphi = (\alpha + \varepsilon), \quad \dot{\psi} = (\omega + \gamma), \quad (2.197)$$

$$\left[ 2m(R + l \sin \varphi)^2 \ddot{\psi} + 4ml(R + l \sin \varphi) \dot{\psi} \dot{\varphi} \cos \varphi + J_{zk} \ddot{\psi} \right] = M_1 - k\dot{\psi}, \quad (2.198)$$

$$J_x \ddot{\varphi} - m\dot{\psi}^2 (R + l \sin \varphi) l \cos \varphi + mgl \sin \varphi = -\chi \dot{\varphi}. \quad (2.199)$$

$$J_x (\ddot{\alpha} + \ddot{\varepsilon}) - ml(R + l \sin(\alpha + \varepsilon))(\omega + \gamma)^2 \cos(\alpha + \varepsilon) + mgl \sin(\alpha + \varepsilon) = -\chi(\dot{\alpha} + \dot{\varepsilon}), \quad (2.200)$$

$$\left[ 2m(R + l \sin(\alpha + \varepsilon))^2 (\dot{\omega} + \dot{\gamma}) + 4ml(R + l \sin(\alpha + \varepsilon))(\omega + \gamma) \times \right. \\ \left. \times (\dot{\alpha} + \dot{\varepsilon}) \cos(\alpha + \varepsilon) + J_{zk} (\dot{\omega} + \dot{\gamma}) \right] = M_1 - k(\omega + \gamma), \quad (2.201)$$

$$4m(R + l \sin \alpha) l \cos \alpha \cdot \omega \dot{\varepsilon} + v\gamma + (2(R + l \sin \alpha)^2 + J_z) \dot{\gamma} = 0, \quad (2.202)$$

$$J_x \ddot{\varepsilon} + (m(R + l \sin \alpha)^2 \sin \alpha \cdot \omega^2 - ml \cos^2 \alpha \cdot \omega^2 + mgl \cos \alpha) \varepsilon - \\ - 2m(R + l \sin \alpha) \omega \gamma \cos \alpha + \chi \dot{\varepsilon} = 0. \quad (2.203)$$

Характеристичне рівняння при  $\alpha = \pi / 2$

$$(-J_z J_x - 2R^2 J_x - 2l^2 J_x - 4Rl J_x) \lambda^3 + (-4Rl \chi - 2l^2 \chi - J_z \chi - 2R^2 \chi - v J_x) \lambda^2 + \\ + (-2R^3 m \omega^2 - 6R^2 ml \omega^2 - J_z m \omega^2 R - 2l^3 m \omega^2 - J_z ml \omega^2 - 6Rl^2 m \omega^2 - v \chi) \lambda - \\ - vml \omega^2 - vm \omega^2 R = 0. \quad (2.204)$$

Його корені

$$\lambda_1 = -\frac{\nu}{J_Z + 2R^2 + 2l^2 + 4Rl}, \quad (2.205)$$

$$\lambda_2 = -\frac{1}{2} \frac{\chi - \sqrt{\chi^2 - 4J_X m \omega^2 R - 4J_X m l \omega^2}}{J_X}, \quad (2.206)$$

$$\lambda_3 = -\frac{1}{2} \frac{\chi + \sqrt{\chi^2 - 4J_X m \omega^2 R - 4J_X m l \omega^2}}{J_X}. \quad (2.207)$$

Процес сепарації буде стійким, якщо корені мають від'ємну дійсну частину, більш того, при цьому він буде асимптотично стійким. Одержані розв'язки показують, що рух буде стійким тільки при наявності сил опору.

### РОЗДІЛ 3

## ВИЗНАЧЕННЯ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ ЧАШКИ ЦЕНТРИФУГИ

До високооберткових елементів конструкцій різного призначення висувається ряд вимог, головна з яких полягає у забезпеченні необхідної довговічності. Друга вимога, - за гарантований термін роботи повинна бути забезпечена безаварійність та безпечність. Це забезпечується тим, що відповідальні елементи даних конструкцій не повинні руйнуватись протягом гарантованого терміну роботи, а безпечність додатково гарантується наявністю захисної оболонки. В розділі розглянуто основні проблеми по забезпеченню надійної роботи високооберткових елементів конструкцій на прикладі лабораторних центрифуг.

В розділі, також, проведено моделювання роботи лабораторної центрифуги за допомогою програмного пакету RecurDyn. Вивчено механічні властивості матеріалу, досліджено мікро- та макроструктури чашки, визначено її хімічний склад. Проведено чисельне моделювання напружено-деформованого стану найбільш навантаженого елемента – чашки, виготовленої з алюмінієвого сплаву 7075-T73. Розроблено метод визначення довговічності.

### **3.1. Моделювання динамічної поведінки ротору та чашок центрифуги**

При виборі методу визначення довговічності необхідно визначити напружено-деформований стан (НДС) лабораторної центрифуги під час робочого навантаження. Оскільки більшість програм, які працюють з методом кінцевих елементів (МКЕ), можуть вирішувати лише задачу у статичній постановці, то було вирішено використати RecurDyn, яка за документацією дозволяє знаходити НДС в динамічних задачах [128].

Для проведення дослідження був вибраний конструктивний елемент «чашка». Досвід експлуатації показав, що її руйнування відбувається у місці контакту самої чашки та ротора, а на великих обертах відривається дно чашки від обичайки.

Кріплення чашки на роторі лабораторної центрифуги виконане на цапфах (рис.3.1). Ротор центрифуги обертається зі швидкістю 4700 об/хв.

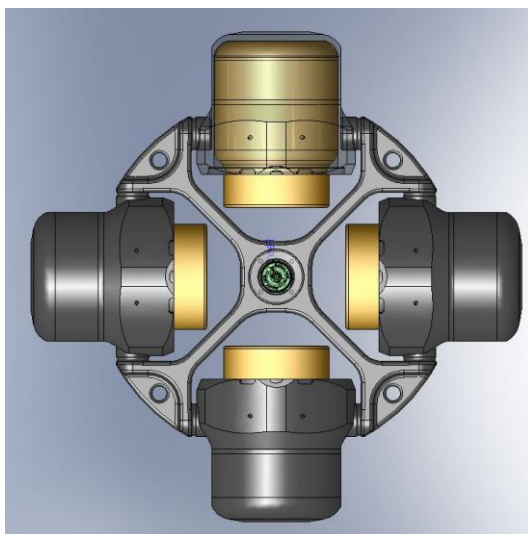
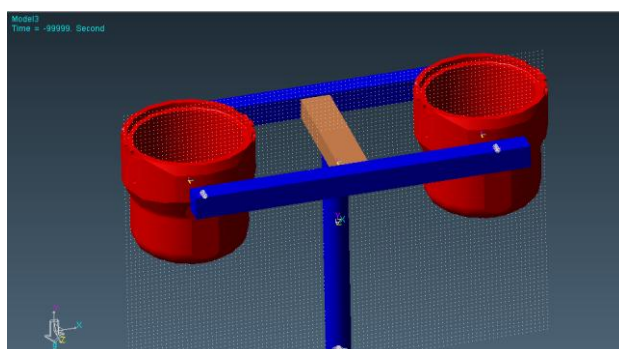
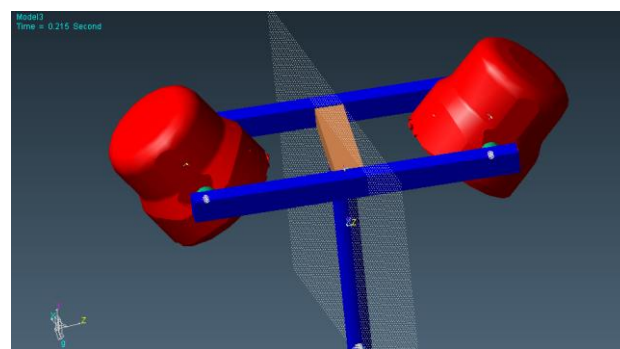


Рис.3.1 Загальний вигляд ротора з чашками

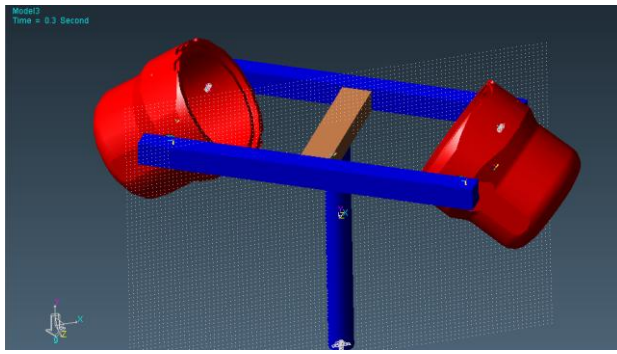
Досліджувався ротор у вигляді хрестовини з чашками, у які, в свою чергу, вкладаються форми для мензурок з сумішами речовин різної густини. Конструктивним елементом, руйнування якого являє небезпеку, є чашка. Чашка, що кріпиться на цапфах, змінює своє положення при розгоні і гальмуванні. Ряд можливих положень чашки, в залежності від швидкості обертання, показаний на рис.3.2.



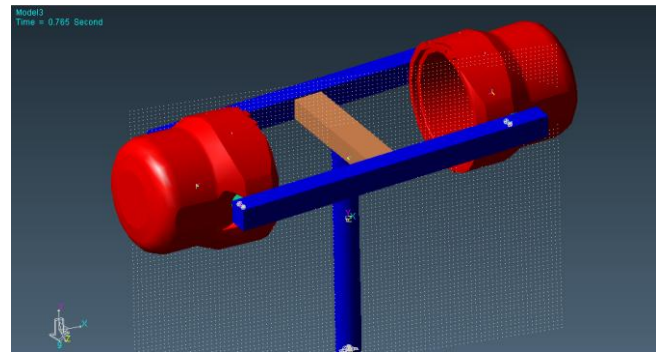
а)



б)



в)



г)

Рис.3.2. Положення чашок під час руху

а)  $t = 0$  сек; б)  $t = 0,215$  сек; в)  $t = 0,3$  сек; г)  $t = 0,765$  сек;

Для визначення напружено-деформованого стану використовувалося числове моделювання з допомогою пакетів RecurDyn та Ansys.

### 3.1.1. Методики розрахунку центрифуги

Як тестові задачі для визначення можливостей пакетів RecurDyn та Ansys було використано ряд задач, які мають аналітичний розв’язок.

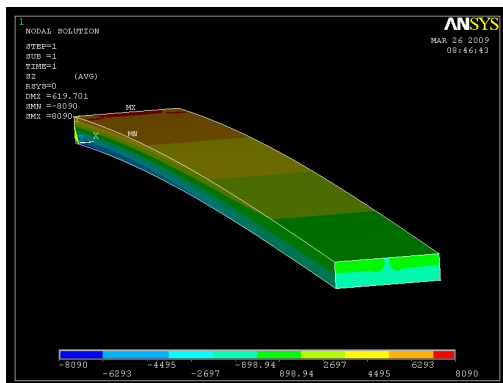
Тест 1. Навантаження прямокутного стержня зосередженою силою, прикладеною до вільного кінця. Сила діє у вертикальній площині і направлена вниз. Розміри стержня та величина прикладеної сили наведені в Табл.3.1.

Вхідні дані

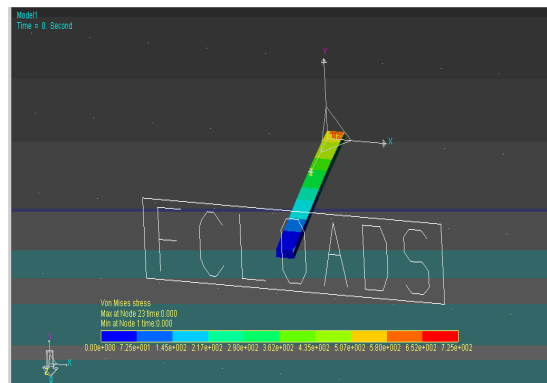
Таблиця 3.1

Сила	<i>кН</i>	10
Поперечний перетин	<i>мм x мм</i>	40 x 10
Довжина	<i>мм</i>	500

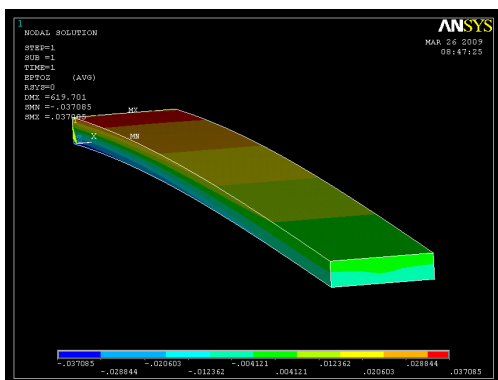
Результати проведених розрахунків наведені на рис.3.3.



а) Інтенсивність напружень  
Ansys Simulation

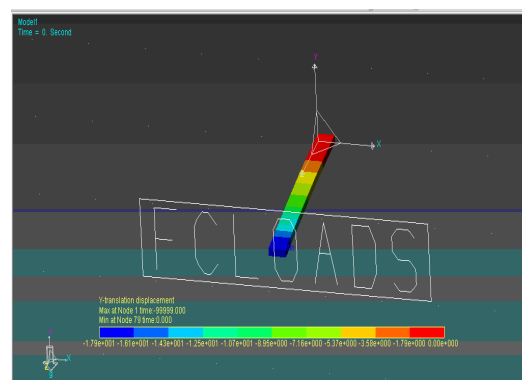


б) Інтенсивність напружень  
RecurDyn Simulation



в) Інтенсивність деформацій

Ansys Simulation



г) Інтенсивність деформацій

RecurDyn Simulation

Рис.3.3 Результати розрахунків інтенсивності напружень та деформацій

Результати розрахунків напружень та деформацій наведені в Табл.3.2.

Таблиця 3.2

Порівняльний аналіз максимальних інтенсивностей напружень та деформацій

№	Ansys		Похибка, %		Analitical solution	
	$\sigma$ (МПа)	$\varepsilon$ (%)	$\sigma$	$\varepsilon$	$\sigma$ (МПа)	$\varepsilon$ (%)
1	8.09	0.0017	4,6	0.02	8,5	0.0019
№	RecurDyn		Похибка, %		Analitical solution	
	$\sigma$ (МПа)	$\varepsilon$ (%)	$\sigma$	$\varepsilon$	$\sigma$ (МПа)	$\varepsilon$ (%)
1	7.53	0.0011	11	0.08	8,5	0.0019

Як видно, результати, які отримані за допомогою пакету Ansys, дають більш точний результат ніж результати, які отримані за допомогою програмного пакету RecurDyn.

Тест 2. Розрахунок диску, що обертається із швидкістю 1050 рад/хв. Дані, які використані для побудови моделі в Ansys, наведені в Табл.3.3. Потім модель була імпортована в RecurDyn.

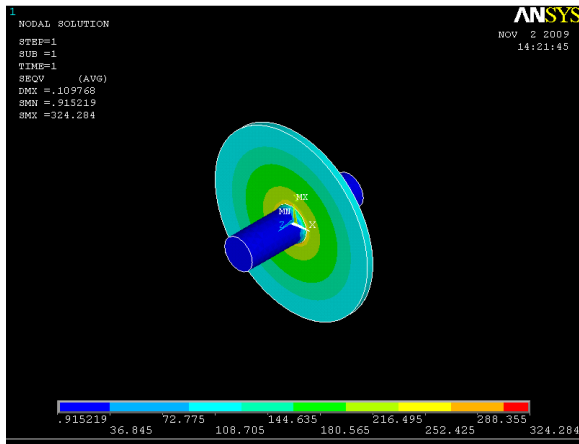
Вхідні дані

Таблиця 3.3

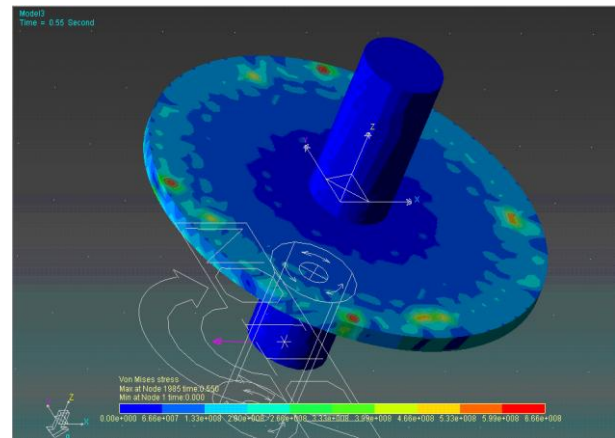
№	$R$ , мм	$L$ , мм
Диск	250	20
Вал	50	400



Для визначення напружено-деформованого стану створеної моделі навантаження в RecurDyn, необхідно задати функцію обертання у наступному виді  $2 \cdot \pi \cdot ((1050/60) \cdot \text{TIME}) \cdot \text{TIME}$ .



Ansyes Simulation



RecurDyn Simulation

Рис.3.4 Результати розрахунків інтенсивності напружень в диску

Результати розрахунків інтенсивності напружень наведені в Табл.3.4.

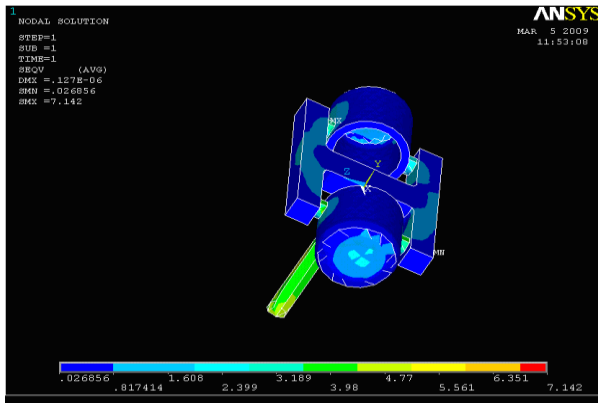
Таблиця 3.4

Порівняльний аналіз максимальних інтенсивностей напружень

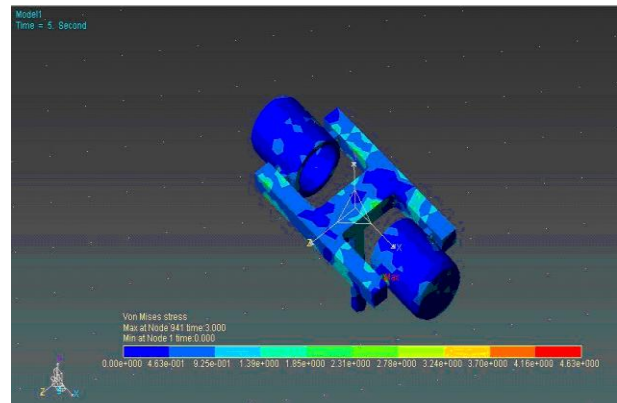
№	Ansyes	Похибка	RecurDyn	Похибка	Analytical solution
1	$\sigma$ (МПа)	%	$\sigma$ (МПа)	%	$\sigma$ (МПа)
2	324,3	30	666,0	67	223,1

Як видно з розрахунків, пакет Ansyes знову дає більш точні розрахунки, ніж RecurDyn.

Тест 3. Моделювання руху ротора. В зв'язку з необхідністю визначення напружено-деформованого стану (НДС) лабораторної центрифуги, була проведена тестова задача на спрощеній моделі центрифуги. Швидкість обертання ротора 4600 рад/хв. Для розрахунку в RecurDyn необхідно задати функцію обертання  $2 \cdot \pi \cdot ((4600/60) \cdot \text{TIME}) \cdot \text{TIME}$ .



Ansys Simulation



RecurDyn Simulation

Рис.3.5 Результати розрахунків інтенсивності напружень

Результати розрахунків інтенсивності напружень наведені в Табл.3.5.

Таблиця 3.5

Порівняльний аналіз максимальних інтенсивностей напружень

№	Ansys	RecurDyn
	$\sigma$ (МПа)	$\sigma$ (МПа)
1	7,142	4,63

Як видно з результатів визначення НДС спрощеної моделі ротора центрифуги (рис.3.5), максимальні напруження мають місце у точках контакту чашок ротора та цапф, на яких вони кріпляться.

Тест 4. Розрахунок напружено-деформованого стану ротора. Проведено моделювання руху ротора, наближеного до реального. Швидкість обертання ротора 4600 рад/хв. Модель ротора була побудована у програмі RecurDyn. Рух моделі задавався у виді функції  $2 \cdot \pi \cdot ((4600/60) \cdot \text{TIME}) \cdot \text{TIME}$ .

Моделювався рух ротора протягом однієї секунди. Після розрахунків під час відтворення руху було помічено нестійкість положення чашок Рис.3.6.

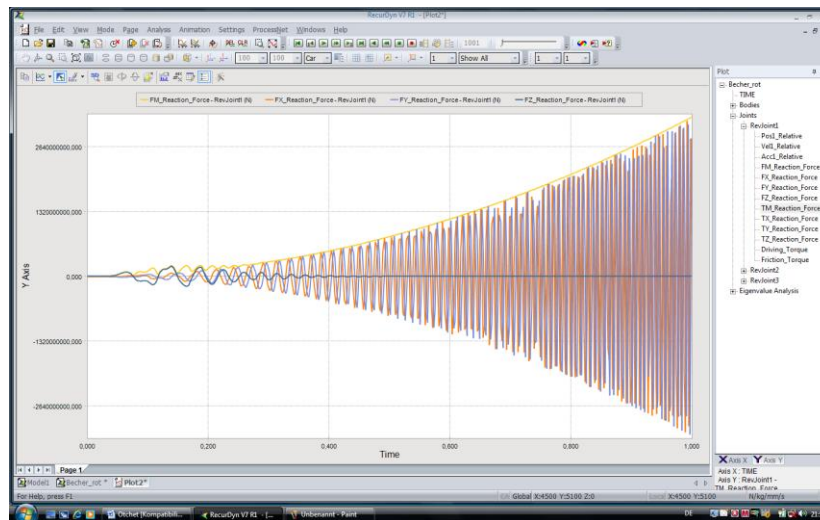


Рис.3.6 Залежність зусиль від часу

У зв'язку з тим, що точність розв'язку тестових задач за допомогою моделювання пакету Ansys суттєво вища ніж RecurDyn, то, у подальшому, використано програмний пакет Ansys.

## 3.2. Експериментальні характеристики руйнування елементів центрифуги

### 3.2.1. Випробувальний стенд (MTS 810)

В інституті механіки Університету Отто-фон-Геріке (м. Магдебург, Німеччина) було проведено ряд експериментальних досліджень конструкційних матеріалів на установці MTS 810, загальний вигляд приведено на рис.3.7.



Рис. 3.7 Загальний вид випробувального стенду MTS 810

Випробувальна установка складається з сервогідравлічного приводу, персонального комп'ютера з програмним забезпеченням TestWare (рис.3.8),

контролерів FlexTest SE. Максимальне навантаження 100кН забезпечується гідростанцією SilentFlow 505.07, вимірювання поздовжньої деформації виконувалось датчиком MTS 634.11 Axial Extensometer (рис.3.9 (а)), поперечної датчиком MTS 632.18 Diameter Extensometer (рис.3.9 (б)).

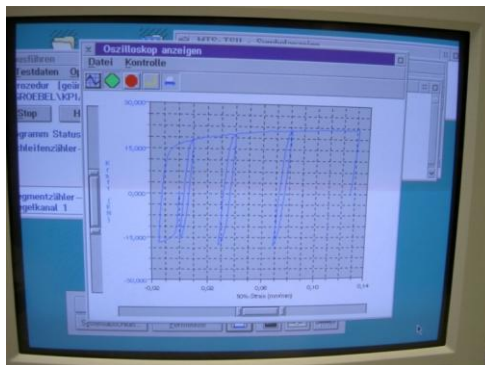


Рис.3.8 Інтерфейс програмного забезпечення



а)



б)

Рис.3.9 Датчик виміру поздовжньої а) та поперечної б) деформації

Зразок (рис.3.10) затискається в пневматичних захватах, після чого на нього встановлюються датчики поздовжньої та поперечної деформації. Після цього за допомогою програмного забезпечення задаються параметри експерименту та величини, які будуть реєструватися під час експерименту. Данні експерименту можна зберегти в форматі \*.txt.

### 3.2.2. Методика та програма проведення досліджень

Для перевірки узагальнюючої феноменологічної моделі пошкоджуваності та критерію руйнування, що наведені в другому розділі, були проведені експериментальні дослідження на квазістатичний розтяг-стиск, а також малоцикловий розтяг-стиск.

В якості матеріалу, що досліджувався був вибраний алюмінієвий сплав, фізико-механічні властивості якого наведено в п.3.3.

Експериментальні дослідження на малоцикловий розтяг-стиск проводились на експериментальній установці MTS 810 з використанням зразків, креслення яких наведено на рис.3.10.

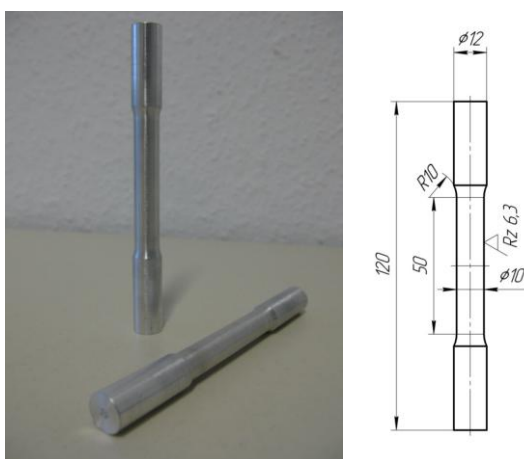


Рис.3.10 Зразок для випробувальної установки MTS 810

Випробування на знакозмінну малоциклову втому проводились на випробувальній установці MTS 810 в жорсткому режимі.

Основними задачами статистичної обробки результатів експериментальних досліджень є визначення середнього значення параметра дослідження та оцінка точності його розрахунку. Так як механічні характеристики вивчають при використанні обмеженої кількості зразків, то відповідні числові характеристики відрізняються від так званих генеральних характеристик, які можуть бути знайдені по результатам досліджень нескінченно великої кількості зразків. Обмежену сукупність зразків або результатів досліджень називають вибіркою. На практиці значення характеристик оцінюють з більшою або меншою ступінню точності по

вибірковим (емпіричним) характеристикам; при цьому часто приймають нормальний закон розподілу похибок.

### **3.3. Вплив технології виготовлення відповідальних конструктивних елементів на міцність**

Майже всі конструктивні елементи сучасних машин та механізмів працюють при змінних навантаженнях. Повторно-змінні навантаження викликають появу циклічних напружень, які причиняють виникнення пошкоджень і руйнування в наслідок втоми особливо при виникненні резонансних або інших перехідних режимів. Крім того небезпечні напруження і границя втоми суттєво залежать від конструктивних і технологічних факторів [129]. Найбільш впливовими конструктивними факторами фактично є концентрація напружень і розміри деталі, які визначаються призначенням деталі. До технологічних факторів можна віднести структуру матеріалу, яка залежить від технології її виготовлення [130].

В даному пункті досліджується макроструктура деталі і її вплив на характеристики міцності [131].

Конструктивні елементи роторів в лабораторних центрифугах створюють потенційну небезпеку в разі руйнування ротора під час експлуатації. Виробники центрифуг повинні експериментально підтверджувати, що протиаварійна оболонка центрифуги у випадку максимально можливої небезпечної аварії гарантує перебування всіх механічних компонентів і матеріалів зразків у центрифугі. Досвід експлуатації показав, що руйнується чашка, тому існує необхідність дослідження міцності чашки і вивчення впливу технології її виготовлення.

В роботі вивчено вплив технології на міцність чашки, так як вона є найбільш напруженим елементом, що працює при змінних навантаженнях внаслідок дії робочих навантажень.

Для прогнозування терміну служби конструктивних елементів необхідне визначення механічних властивостей матеріалу, з якого виготовлений конструктивний елемент, та його напружено-деформований стан.

Задача визначення напружено-деформованого стану (НДС) вирішувалась

числовими методами. Розрахунок напружено-деформованого стану проведений в межах спільної роботи НТУУ «КПІ» та Інституту механіки Отто-фон-Геріке Університету, Магдебург (Німеччина) за допомогою програмного пакету Ansys [128,132].

Міцність і довговічність чашки залежить від властивостей матеріалу на які впливає технологія виготовлення чашки.

Останніми роками в зарубіжній і вітчизняній практиці все більш широке застосування знаходять сплави Al-Zn-Mg-Cu. Типовий хімічний склад яких представлений у Табл.3.6.

Таблиця 3.6

## Дані хімічного складу матеріалу

№ п/п	Марка сплаву	Хімічний склад, %									
		Легуючі компоненти				Домішки					
		Al	Cu	Mg	Zn	Mn	Cr	Ti	Fe	Si	Інші
1	7075	Основа	1,2-2,0	2,1-2,9	5,1-6,1	≤0,3	0,18-0,4	≤0,2	≤0,7	≤0,5	≤0,15
2	B95	Основа	1,4-2,0	1,8-2,8	5,0-7,0	0,2-0,6	0,1-0,25	-	≤0,5	≤0,5	≤0,15
3	(1)	Основа	1,62	2,6	6,0	0,01	0,23	0,06	0,15	0,06	-

(1) – матеріал, що випробовувався.

Чашка виготовляється шляхом штамповки від технології якої залежить структура деталі і її механічні властивості.

В деяких випадках макроструктура визначається положенням роз'єму штампів і відповідно формою поковки (Рис.3.11).

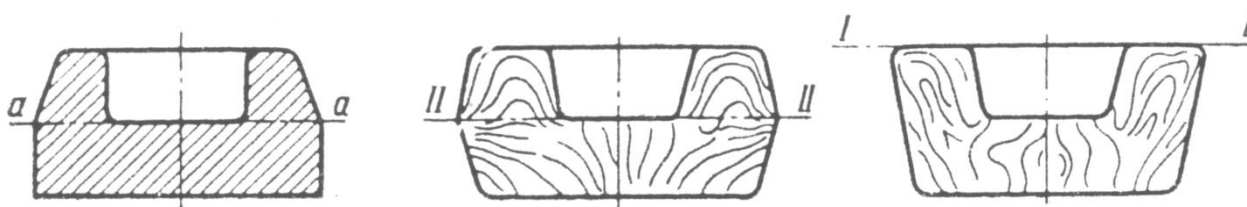


Рис.3.11. Вибір положення роз'єму штампів по умові роботи деталі

Для того, щоб визначити як впливає технологія штампування на напрям волокон заготовки, був проведений мікро- та макроаналіз зразків, що вирізались з заготовки. В залежності від способу навантаження до макроструктури і відповідно

до технології штампування можуть бути поставлені відповідні вимоги. Наприклад, якщо деталь машини працює на зріз по лінії а-а, то волокно повинне бути перпендикулярне лінії зрізу. Положення лінії роз'єму II-II в даному випадку є не задовільним, і тому, нехтуючи деякими недоліками, пов'язаними з положенням роз'єму I-I, все ж таки слід вибрати цей останній варіант [129].

Схема вирізки елементів заготовки для дослідження мікро- та макроструктури зразків, наведена на рис.3.12.



Рис.3.12 Схема розрізання чашки на елементи для випробування механічних властивостей матеріалу і дослідження макро- і мікроструктури:

1, 3, 5 – зразки для випробування механічних властивостей;  
2, 4 – зразки для дослідження мікро- та макроструктури.

На шліфі (рис.3.13) видно напрям волокон. Отриманий зразок можна розділити на три характерні зони: 1, 2 і 3. У зоні 3 під пуансоном волокна мають первинний напрям і, отже, не дивлячись на те, що ця частина матеріалу піддавалася безпосередній дії пуансона, вона не деформувалася і не зміцнювалася.

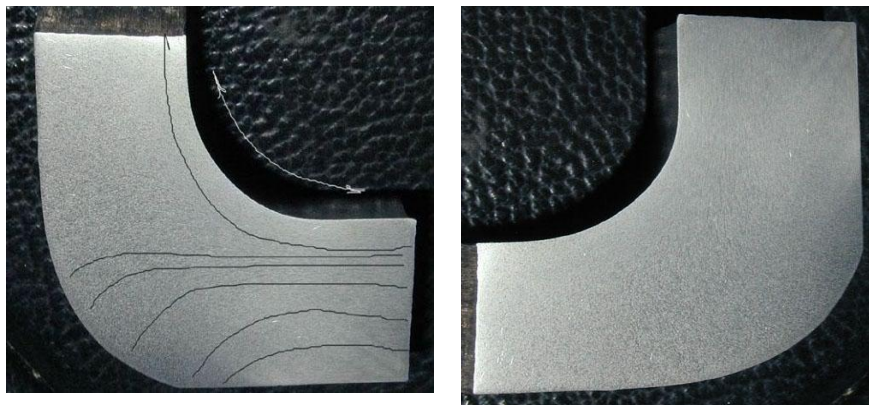


Рис.3.13 Макроструктура зразків 2, 4.



У зоні 2 спостерігається максимальна деформація матеріалу [130]. Остання зона 1 оточує зону 2 і займає простір між порожниною і стінками матриці.

Деформації в цій зоні менше, ніж в зоні 2 і відповідно менше зміцнення.

Фотографії мікроструктури представлені на рис.3.14.

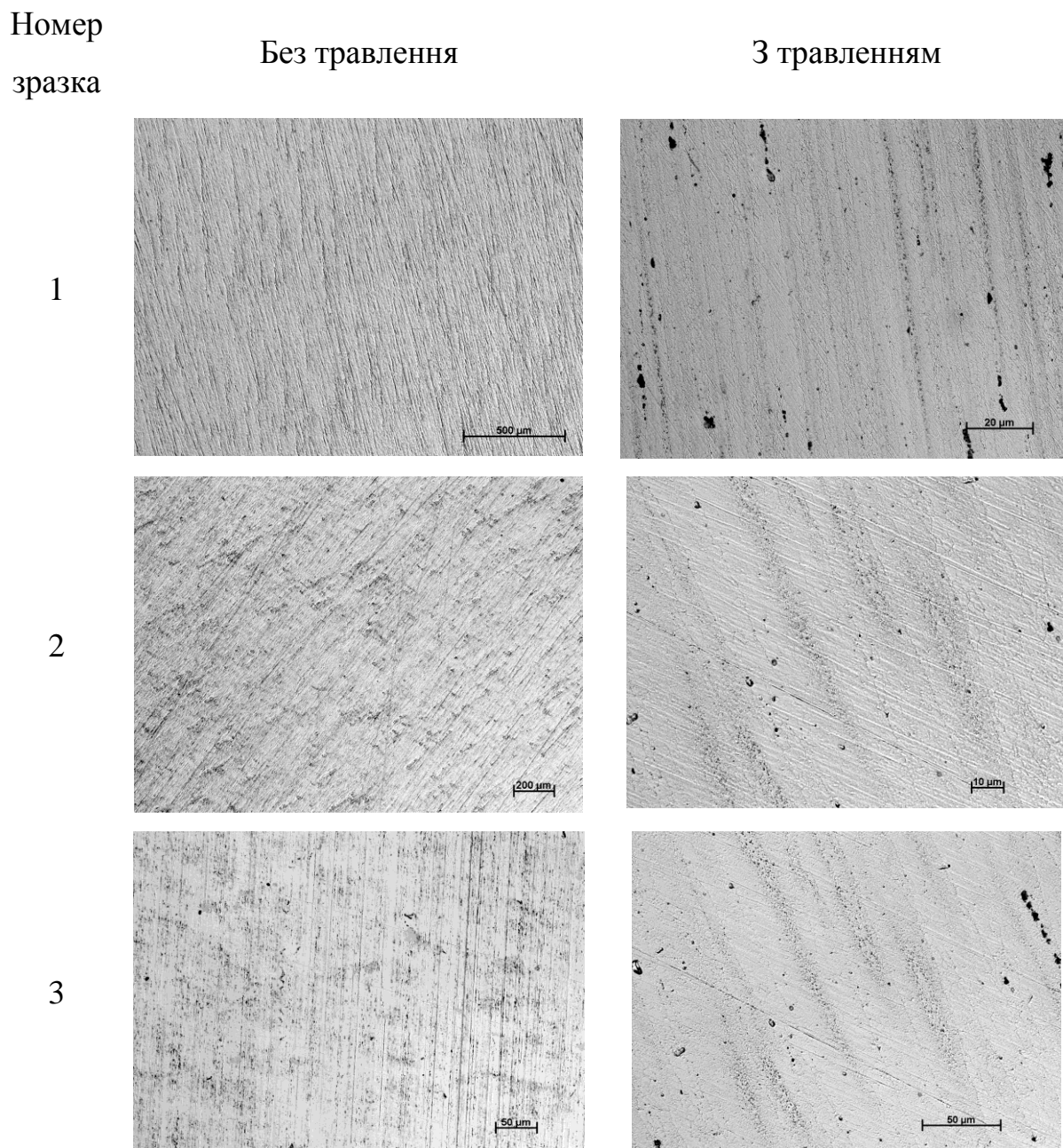


Рис.3.14 Мікроструктура зразків 1, 2, 3 (згідно рис.3.12).

Механічні властивості зразків визначали шляхом їх розтягування із швидкістю 10 мм/хв. Випробування проводились згідно ГОСТ 1497-84. Характер деформації

вивчали по точках діаграми згідно методиці [133], а характер руйнування – по макро- і мікробудові зламів.

На фрактограмах, наведених на Рис.3.15, показані злами зразків.

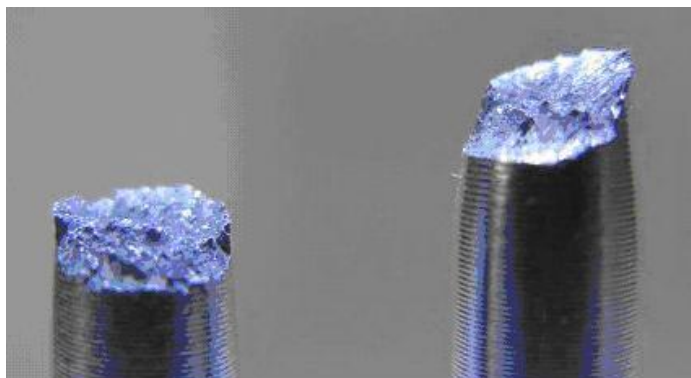


Рис.3.15 Вид руйнування зразків із сплаву 7075

Дослідження поверхні шийки при розриві дозволило виявити послідовність процесу руйнування. В процесі розтягування у момент утворення шийки на поверхні зразка в цій зоні з'являються і швидко розвиваються мікротріщини, направлені до осі зразка під кутом  $30...45^\circ$ .

Надалі мікротріщини, зливаються в крупніші тріщини, сприяють появі явно виражених розвинених тріщин. Руйнування настає від швидкого розвитку обмеженого числа магістральних тріщин, що концентруються в площинах найбільших дотичних напружень, при незначному звуженні шийки і сам розрив має вид зколу, направленою під кутом біля  $45^\circ$  до осі зразка.

Залежно від величини і кількості магістральних тріщин, що з'явилися по периметру шийки до моменту розриву, руйнування може відбутися переважно по одній площині або по гелікоїдальній поверхні, розташованій під кутом до осі зразка (рис.3.15).

Для прогнозування строку служби конструктивних елементів необхідно визначити механічні властивості матеріалу, з якого виготовлений конструктивний елемент та їх напружено-деформований стан.

Міцність матеріалу залежить від відповідності його хімічного складу. В зв'язку з цим був проведений хімічний аналіз матеріалу в металургійному відділі на державному підприємстві «Авіаційний науково-технічний комплекс ім. Антонова»

(ДП АНТК ім. Антонова) [132]. У п.3.3 встановлено, що хімічний склад з якого виготовлена чашка лабораторної центрифуги відповідає алюмінієвому сплаву марки 7075-T73. Механічні властивості визначались за допомогою експериментального обладнання MTS 810 Material Test System, Отто-фон-Геріке Університету Магдебурга (Рис.3.7) [131,132].

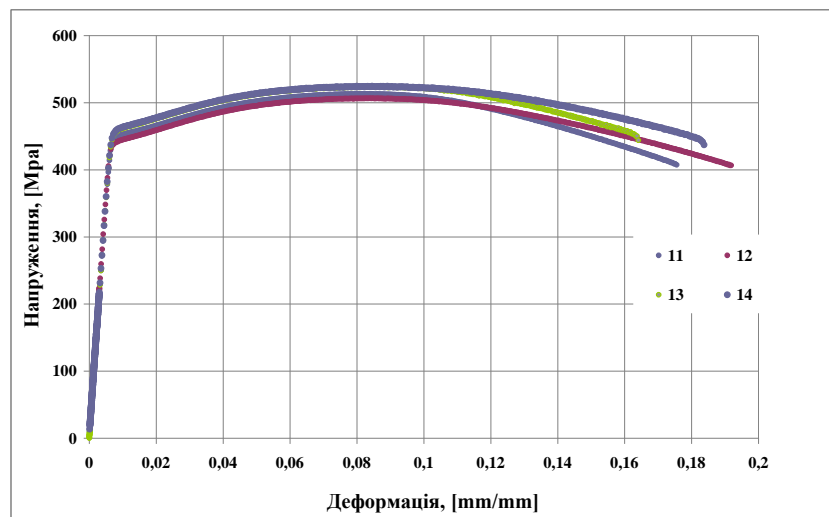


Рис.3.16 Діаграма деформування для алюмінієвого сплаву 7075-T73

Результати експериментальних досліджень (Рис.3.16) показали, що матеріал має невелику залишкову деформацію, тому для визначення напружень в зразку можна використовувати початкову площу. Результати визначення механічних властивостей зразків наведені в Табл.3.7.

Таблиця 3.7

#### Механічні властивості зразків

№ зразка	$\sigma_{0,2}$ , МПа	$\sigma_{max}$ , МПа	$\epsilon$ , %
1-1	447	513	17,6
1-2	436	506	19,2
1-3	453	524	16,4
1-4	455	524	18,4
3-1	447	517	11,7
5-2	461	533	13,8

### **3.4. Напружено-деформований стан чашки лабораторної центрифуги під дією динамічного навантаження і концентрації напружень**

У зв'язку з різними умовами функціонування, промисловість використовує широкий діапазон роторів і адаптерів для лабораторних центрифуг (п.2.3.2).

В усіх конструкціях виникають сили викликані робочими процесами, які, також, залежать від конструкційних факторів. Тому необхідна розробка нових методик та уточнення існуючих методик розрахунку і моделювання коливань систем і їх напружено-деформованого стану, оскільки вони є необхідними при розрахунках на міцність та працездатність.

Однією із актуальних проблем сучасного машинобудування є проблема підвищення довговічності елементів конструкцій. Вимоги підвищення продуктивності машин, при одночасному зменшенні їх ваги, супроводжуються збільшенням динамічних навантажень та впливу вібрацій, які виникають.

Внаслідок напружень, що виникають в результаті коливань можливе руйнування деталей сучасних машин та механізмів, особливо при виникненні резонансних та нестійких станів. Нестійкі стани, в свою чергу, погіршують функціональні можливості конструкцій.

Під час експлуатації було встановлено, що руйнування об'єктів відбувається з появою вібрацій з великими амплітудами при переході через резонанс в процесі розгону або гальмування. Навантаження, які виникають при роботі центрифуги, мають циклічний характер. Цикл складається з трьох ділянок: ріст навантаження та напружень при розгоні до робочої швидкості, витримка та спадання навантаження до зупинки центрифуги. Руйнування конструктивних елементів роторів в лабораторних центрифугах створює потенційну небезпеку під час експлуатації.

До подібних конструкцій висувається ряд вимог, одна з яких полягає в тому, що за гарантований термін роботи повинна бути забезпечена безаварійність та безпечність. Для забезпечення надійності конструкцій виробники лабораторних центрифуг виготовляють захисну оболонку центрифуги з запасом міцності, що призводить до збільшення ваги як протиаварійної оболонки, так і загальної ваги центрифуги. В деяких випадках вага центрифуг досягає 150кг.

Тому зменшення загальної ваги центрифуги можна досягти за рахунок зменшення ваги протиаварійної оболонки. Це можливо з підвищенням точності прогнозування терміну експлуатації механізму [131,133]. Для того, щоб прогнозувати ресурс конструктивних елементів, необхідно більш точно визначити їх напружено-деформований стан і механічні властивості матеріалу конструкції [131, 132,133]. Як було зазначено, одним із конструктивних елементів нових центрифуг є ротор у вигляді хрестовини, до якого кріпляться чотири чашки, в які, у свою чергу, вкладаються форми для різної кількості мензурок (рис.3.17). Під час роботи таких роторів існує можливість дисбалансу системи, що створює небезпеку руйнування.



Рис.3.17. Лабораторна центрифуга та ротор

В попередніх дослідженнях [128,131,132,133] встановлено, що руйнування чашок відбувається у місці кріплення самої чашки до ротора (рис.3.18), а також на великих обертах шляхом відривання дна чашки.

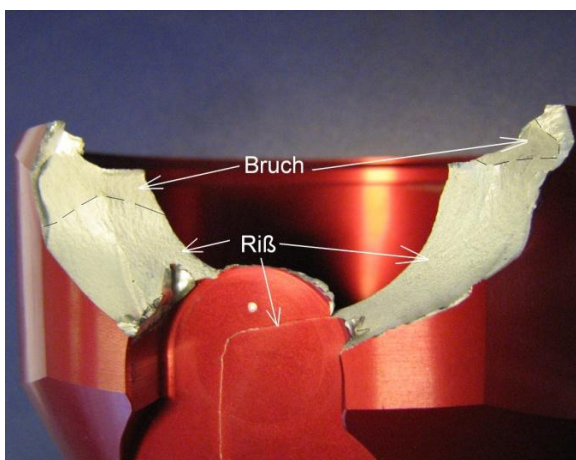


Рис.3.18 Зображення місця руйнування чашки

У роботі встановлено, що однією з причин, яка сприяє руйнуванню у вигляді відриву дна чашки від обичайки є невдалий вибір технології виготовлення заготовки, внаслідок якої має місце структура волокон, яка не співпадає з напрямом дії максимальних розтягувальних напружень [131].

Працездатність конструкції може бути визначена як експериментальним шляхом, так і розрахунковим. Натурні випробування із запуском та зупинкою роботи центрифуги мають високу вартість, тому, для того щоб спрогнозувати ресурс конструкції, було проведене моделювання напружено-деформованого стану центрифуги при різних видах навантажень. Для того, щоб спрогнозувати ресурс конструкції, необхідне визначення напружено-деформованого стану (НДС) [133]. Задача НДС вирішувалась числовими методами, широко розповсюдженим ліцензованим програмним пакетом Ansys [134]. Для використання програмного пакету Ansys необхідно знати механічні властивості матеріалу.

Проведене чисельне моделювання з різними видами навантажень. Перш за все були визначенні максимальні напруження та деформації, які виникали у чашці під дією відцентрової сили з врахуванням робочої швидкості обертання ротора лабораторної центрифуги. Дані, які використовувались для розрахунку, наведені у Табл.3.8.

Вхідні дані

Таблиця 3.8

№	Площа дна чашки $A$ , (мм <sup>2</sup> )	Радіус центру ваги чашки $R$ , (м)	Радіус центру ваги вантажу, (м)	Маса вантажу $m$ , (кг)	Маса чашки $m$ , (кг)	Кількість обертів $n$ , (хв <sup>-1</sup> )
1	4185,4	0,1357	0,192	0,8	0,82	4700

Креслення чашки лабораторної центрифуги наведені на рис.3.19.

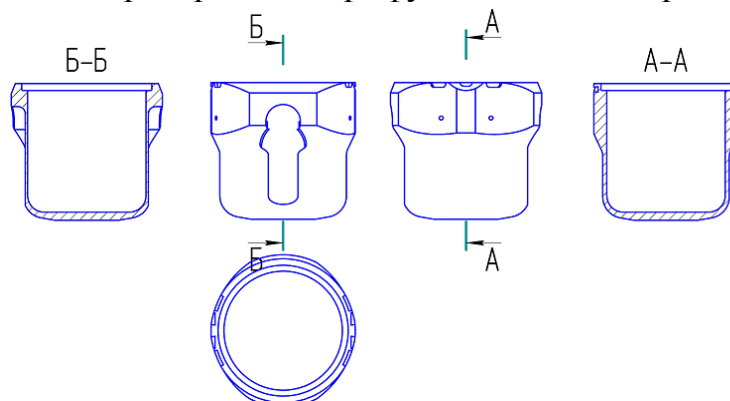


Рис.3.19 Ескіз чашки ротору лабораторної центрифуги

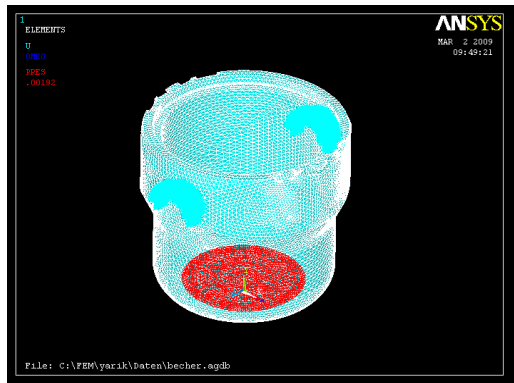


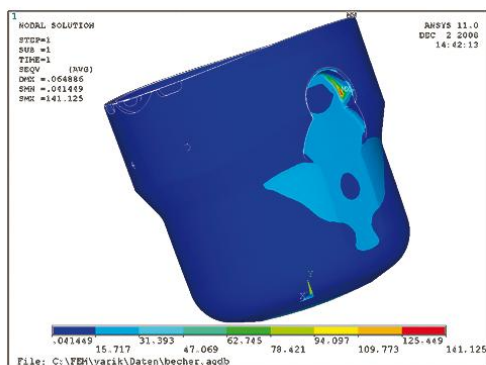
Рис.3.20 Умови закріплення та навантаження чашки

Так як максимальна маса вантажу може досягати 0,8 кг, то було вираховано максимальний тиск 8,89 МПа, який діє на дно чашки, та максимальну силу, яку створює вантаж під час обертання - 37,2 кН. Розрахунки наведені нижче.

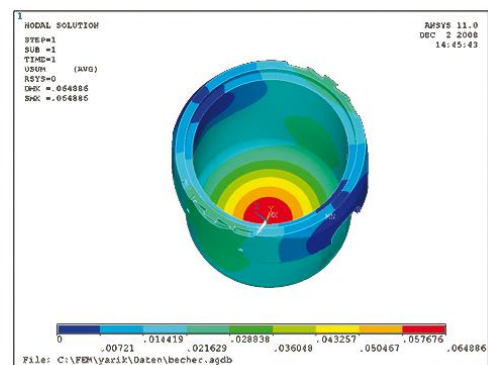
1. Чашка без вантажу:

Центр мас чашки (м)  $R = 0,1357m$

Маса чашки (кг)  $m = 0,82kg$



а)



б)

Рис.3.21. Розподіл напружень та деформацій по конструкції чашки

2. Чашка з вантажем **37,2 KN**

Відстань до дна чашки (м)  $R = 0,192m$

Вантаж (кг)  $m' = 0,80kg$

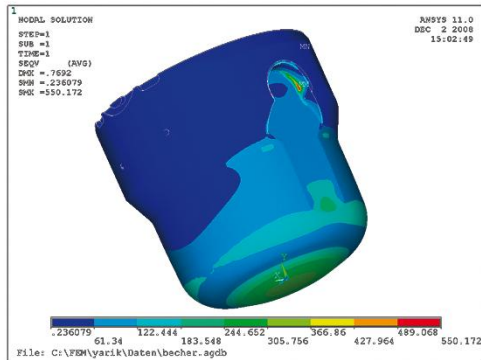
Число обертів ( $\text{min}^{-1}$ )  $n = 4700$

$$\omega = \frac{n \cdot \pi}{30} = \frac{4700 \cdot \pi}{30} = 492,2 \frac{r}{s} \quad (3.1)$$

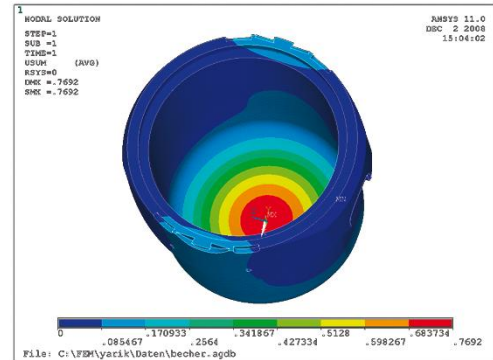
Сила, що діє на дно чашки, вираховується

$$F = m \cdot r \cdot \omega^2 = 0,8 \cdot 0,192 \cdot (492,2)^2 = 37211,3 N \quad (3.2)$$

Тиск, який діє на дно чашки  $P = \frac{F}{A} = \frac{37211,3 N}{4185,4 mm^2} = 8,891 MPa$  (3.3)



в)



г)

Рис.3.21 Розподіл напружень а), в), д) та деформацій б), г), е) по конструкції чашки

Моделювання НДС показало кореляцію результатів між випробуваннями чашки лабораторної центрифуги шляхом навантаження дна чашки за допомогою штока, що емітує робочий режим. Результати розрахунків за допомогою пакету Ansys наведені у Табл.3.9 та на рис.3.21.

Таблиця 3.9

Результати розрахунків за допомогою пакету Ansys

№	Сила (Н)	Напруження (МПа)	Деформація (мм)
1	8,2	141,1	0,06
2	37211,3	550,2	0,77

Отримані напруження є основою для моделювання кінетики накопичення розсіяних пошкоджень та граничного стану матеріалу чашки.

В теперішній час існуючі методи не дозволяють визначити точно термін життєздатності конструкції, тому є необхідність використовувати протиаварійні оболонки, міцність яких і, відповідно, їх вага береться з великим запасом. В зв'язку



з цим збільшуються динамічні навантаження, а відповідно, і вплив вібрацій на машини, механізми та їх частини.

Метою роботи є підвищення точності прогнозування терміну експлуатації машини і, відповідно, більш точного вибору параметрів протиаварійної оболонки з метою полегшення їх ваги. Для того, щоб прогнозувати термін служби конструктивних елементів, необхідно більш точно визначити їх напружено-деформований стан і механічні властивості матеріалу конструкції (п.3.3).

Для визначення впливу концентрації напружень використаний параметр, який називається теоретичним коефіцієнтом концентрації напружень. Він характеризує відношення найбільшого напруження біля концентратора та номінального значення, яке може бути розраховане по відношенню зусилля до площі перетину [73,74,135-137]:

$$\alpha_{\sigma} = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_n}, \quad (3.4)$$

де  $\sigma_{\max}$  – максимальне напруження біля концентратора;  $\sigma_n$  – номінальне напруження.

Коефіцієнт  $\alpha_{\sigma}$  використовується для якісної оцінки концентрації напружень.

Для оцінки концентрації в умовах пружно-пластичного деформування, яке насправді має місце в зоні концентратора, використовують коефіцієнти концентрації інтенсивності напружень –  $K_{\sigma}$  та деформацій –  $K_{\varepsilon}$ . Врахування параметру пошкоджуваності дає змогу уточнювати значення коефіцієнтів  $K_{\sigma}$ ;  $K_{\varepsilon}$ , і таким чином більш достовірно оцінювати НДС даного конструктивного елемента.

Тоді загальні формули для розрахунку коефіцієнтів  $K_{\sigma}$ ;  $K_{\varepsilon}$  з урахуванням пошкоджуваності матеріалу, беручи до уваги [135-137], матимуть вигляд:

Для  $\bar{\sigma}_n \leq 1$ :

$$K_{\varepsilon} = \alpha_{\sigma}^{\frac{2}{1+M}} \bar{\sigma}_n^{\frac{1-M}{1+M}} F^{\frac{1}{1+M}} = \frac{\alpha_{\sigma}^{\frac{2}{1+M}} \bar{\sigma}_n^{\frac{1-M}{1+M}}}{(\alpha_{\sigma} \bar{\sigma}_n)^{n(1-M)} \left[ 1 - \left( \bar{\sigma}_n - \frac{1}{\alpha_{\sigma}} \right) \right]^{\frac{1}{1+M}}}, \quad (3.5)$$

$$K_{\sigma} = \alpha_{\sigma}^{\frac{2M}{1+M}} F^{\frac{M}{1+M}} = \frac{\alpha_{\sigma}^{\frac{2M}{1+M}}}{\bar{\sigma}_n^{\frac{1-M}{1+M}} (\alpha_{\sigma} \bar{\sigma}_n)^{Mn(1-M)} \left[ 1 - \left( \bar{\sigma}_n \frac{1}{\alpha_{\sigma}} \right) \right]^{1/(1+M)}}, \quad (3.6)$$

де  $\alpha_{\sigma}$  – теоретичний коефіцієнт концентрації напружень;  $\bar{\sigma}_n$  – відносне номінальне напруження, яке розраховувалось згідно [73,74,135-137]:  $\bar{\sigma} = \frac{\sigma}{\sigma_{nc}}$ ,  $\sigma$  – поточне напруження;  $\sigma_{nc}$  – границя пропорційності матеріалу;  $n$  – параметр, що дорівнює 0,5;  $M$  – параметр зміцнення матеріалу за ефективною діаграмою розтягу.

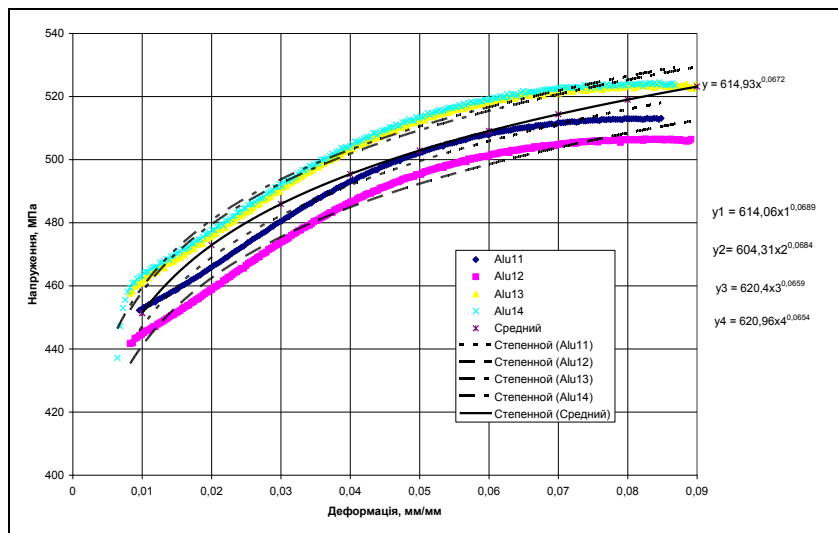


Рис.3.22 Ефективна діаграма розтягу

З діаграми (Рис.3.22) отримано значення параметру  $m = 0,0672$ . Оскільки за розрахунками  $\sigma_n = 116,18$  МПа, то теоретичним коефіцієнтом концентрації напружень  $\alpha_{\sigma} = 4,74$ . Використовуючи формули (3.5) та (3.6), підраховуємо  $K_{\sigma} = 3,926$  і  $K_{\epsilon} = 5,217$ . В подальшому результати розрахунків використовувались для визначення ресурсу роторів при різних режимах навантаження.

Вирахувано максимальне напруження в конструкції з врахуванням коефіцієнту концентрації інтенсивності напружень  $K_{\sigma} = 3,926$ :  $\sigma_{\max} = \sigma_{\text{ном}} \cdot K_{\sigma} = 456,12$  МПа.

### 3.5. Визначення ресурсу при змінних навантаженнях

Центрифуги великих швидкостей (до 15000 об./хв.) часто розробляються як

універсальні пристрої з широким діапазоном різних роторів. Центрифуги використовуються для розділу сумішей різної питомої ваги. Великі ротори з масами до 20 кг використовуються, наприклад, в лабораторіях, в банках крові та плазми.

Для забезпечення надійності конструкцій виробники лабораторних центрифуг виготовляють захисну оболонку центрифуги з досить великим запасом міцності, що призводить до збільшення ваги, як протиаварійної оболонки так і загальної ваги центрифуги.

Зменшення ваги центрифуги можна досягти за рахунок зменшення ваги протиаварійної оболонки, але це вимагає підвищення точності прогнозування терміну експлуатації конструкцій в цілому.

На сьогодні не існує загального методу надійного прогнозування ресурсу експлуатації відповідальних та високонавантажених елементів конструкцій різних галузей машинобудування, як на стадії зародження макротріщини так і на стадії живучості. Сучасні експериментально-теоретичні методи прогнозування базуються на основі двох концепцій: безпечної роботи без макродефектів та регламентованого руйнування [138-140].

Сучасні високоефективні засоби діагностики експлуатаційного навантаження дозволяють експлуатацію відповідальних елементів конструкцій без макродефектів які являються недопустимими, особливо в тих галузях машинобудівного комплексу, де руйнування призводить до тяжких катастрофічних наслідків.

Прогнозування стадії зародження макротріщини, яка складає приблизно 70 ÷ 90% загального ресурсу (з урахуванням живучості) в матеріалі в залежності від термосилових параметрів на сьогодні є однією з найбільш важливих і перспективних напрямків в механіці твердого деформівного тіла. Експлуатація конструкції супроводжується деградацією механічних характеристик конструкційних матеріалів та виникненням об'ємних розсіяних пошкоджень.

Конкретизація параметрів пошкоджуваності та їх врахування в системі визначальних рівнянь дає можливість суттєво підвищити достовірність розрахунку напружено-деформованого стану (НДС), прогнозування граничних станів та ресурсних характеристик відповідальних елементів конструкцій з урахуванням

особливостей експлуатаційних режимів [133]. Це дозволяє, в свою чергу, розробити достовірні терміни проведення регламентних робіт з використанням методів неруйнівного контролю в зонах найбільш вірогідного виникнення макротріщини.

Працездатність конструкції може бути визначена як експериментальним так і розрахунковим шляхом. Натурні випробування із запуском та зупинкою роботи центрифуги потребують значних затрат часу та мають високу вартість, тому для прогнозування ресурсу конструкції було проведено моделювання НДС центрифуги при різних видах навантажень та проведено комплекс експериментальних досліджень.

Одним з найбільш навантажених конструктивних елементів центрифуги є чашка, яка обертається (рис.3.17). Під час роботи в таких роторах існує можливість дисбалансу системи, що створює небезпеку руйнування.

Для прогнозування ресурсу конструктивних елементів визначені механічні властивості матеріалу (п.3.3), з якого виготовлений конструктивний елемент та їх НДС (п.3.4).

На сьогодні основним матеріалом для виготовлення чашок є алюмінієві сплави. Для проведення експериментальних досліджень зразків алюмінієвого сплаву В95 необхідно визначити рівні напружень, які мають місце в конструктивному елементі під час експлуатації. Задача визначення НДС вирішувалась числовими методами [132,133]. За допомогою програмного пакету ANSYS (п.3.4), були виконані динамічні розрахунки та визначені три рівня напружень (470 МПа, 490 МПа та 500 МПа), які виникають в небезпечних точках чашок лабораторних центрифуг.

При одночасній дії декількох механізмів накопичення пошкоджень при записі функцій пошкоджуваності в літературі використовується принцип суперпозиції. В той же час не враховується їх взаємодія. Саме цьому серед багатьох застосувань поняття пошкоджуваності в області руйнування досить важливою є проблема взаємодії втоми та повзучості, яку необхідно розглядати як одну з феноменологічних моделей, яка дозволяє розраховувати ресурс експлуатації різних елементів конструкцій при експлуатаційних навантаженнях. В роботі досліджується

взаємний вплив малоциклової втоми та повзучості, що відповідає основним параметрам експлуатаційного навантаження центрифуги.

Базуючись на континуальній механіці пошкоджуваності та термодинаміці необоротних процесів використано кінетичне рівняння пошкодження для умов усталеної повзучості [141-1143]:

$$\dot{D} = \frac{Y}{S} \dot{\varepsilon}_i^{(p)} H(\varepsilon_i^{(p)} - \varepsilon_{iD}^{(p)}), \quad (3.10)$$

$$Y = \rho \frac{\partial \psi}{\partial D} = -\frac{\sigma_{eq}^2 R_v}{2E(1-D)^2}, \quad (3.11)$$

де  $Y$  - швидкість вивільнення пружної енергії деформації,  $S$  - параметр матеріалу,  $\varepsilon_i^{(p)}$  - інтенсивність пластичної деформації,  $\varepsilon_{iD}^{(p)}$  - гранична величина інтенсивності пластичної деформації, до якої не відбувається пошкоджуваності,  $H$  - функція Хевісайда,  $E$  - модуль пружності,  $\sigma_{eq}$  - еквівалентне напруження,  $R_v$  - функція виду складного напруженого стану.

Швидкість накопиченої пластичної деформації визначається за законом Нортона для ідеальної пластичності:

$$\dot{\varepsilon}_i^{(p)} = \frac{\dot{\lambda}}{1-D} = \left[ \frac{\sigma_{eq}}{A(1-D)} \right]^n, \quad (3.12)$$

де  $A$  та  $n$  - параметри матеріалу,  $\sigma_{eq}$  - еквівалентне напруження,  $\dot{\lambda}$  - множник пластичності.

Експлуатаційне навантаження обертових частин центрифуги описано у вигляді стаціонарного циклу програмного навантаження  $\bar{\gamma}_\sigma + \tilde{\gamma}_\sigma = 1$ , де  $\bar{\gamma}_\sigma = \bar{t}_y / t_y$ ,  $\tilde{\gamma}_\sigma = \tilde{t}_y / t_y$  - відносні тривалості навантаження зразків матеріалу при максимальному навантаженні циклу  $\sigma_{max}$  та навантаженні – розвантаженні, відповідно (рис.3.23). Час стаціонарного знакопостійного програмного циклу навантаження, з середнім напруженням циклу  $\sigma_m = \sigma_{max} / 2$ , складав  $t_y = 130$ сек. Час витримки при максимальному навантаженні циклу  $\sigma_{max}$  рівний  $\bar{t}_y = 120$ сек, а сумарний час навантаження та розвантаження  $\tilde{t}_y = 10$ сек.

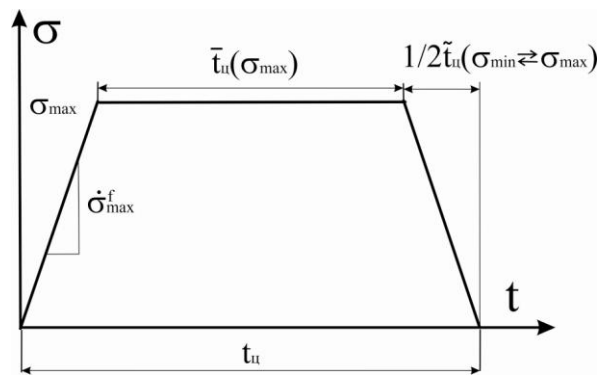


Рис.3.23 Схема експлуатаційного навантаження центрифуги

Для описання процесу накопичення пошкоджень був використаний принцип суперпозиції на основі лінійного додавання (як перше наближення) у вигляді:

$$\frac{N_R}{N_{RF}} + \frac{t_R}{t_{RC}} = 1, \quad (3.13)$$

де  $N_R$ ,  $N_{RF}$  - кількість циклів до руйнування (на стадії зародження макротріщини) при заданому програмному навантаженні ( $\bar{\gamma}_u + \tilde{\gamma}_u = 1$ ) та пилоподібному ( $\tilde{\gamma}_u = 1$ ) циклах стаціонарного малоциклового навантаження, відповідно;  $t_R$ ,  $t_{RC}$  - час до руйнування з кількістю циклів  $N_R$  при програмному навантаженні ( $t_R \approx \bar{t}_u \cdot N_R$ ) та при чистій ізотермічній повзучості для того ж значення максимального навантаження циклу  $\sigma_{max}$ , відповідно.

При використанні скалярного параметру пошкоджуваності в кінетичних рівняннях пошкоджуваності для умов малоциклової втоми та циклічної повзучості швидкість накопичення пошкоджень визначена через накопичену деформацію без розподілу на деформацію повзучості та деформацію пластичності (умова циклічної в'язко - пластичності). Для описання процесів програмного малоциклового навантаження, коли спостерігається інтенсивне накопичення односторонніх накопичених деформацій, умовно розділені закономірності накопичення пошкоджуваності при витримці ( $\sigma_{max}$ ) та навантаженні-розвантаженні ( $\sigma_{max} \square \sigma_{min}$ ).

На ділянці повзучості швидкість накопичених деформацій  $\dot{\epsilon}^{(c)}$  визначалась згідно степеневому закону Нортона для повзучості з врахуванням скалярного параметру пошкоджуваності  $D$ :

$$\dot{\varepsilon}^{(c)} = \left[ \frac{\sigma}{A(1-D)} \right]^n. \quad (3.14)$$

Базуючись на основних положеннях термодинаміки незворотних процесів, для умов одновісного напруженого стану, кінетичне рівняння пошкоджуваності Леметра записано:

$$dD = \left( \frac{\sigma}{B} \right)^{n+2} (1-D)^{-(n+2)} dt \text{ або } \int_0^D (1-D)^{-(n+2)} dD = \left( \frac{\sigma}{B} \right)^{n+2} \int_{t^*}^t dt, \quad (3.15)$$

де:  $B = (2E \cdot A^n \cdot K \cdot C)^{\frac{1}{n+2}}$ ;  $E$  - модуль пружності;  $K, C$  - постійні матеріалу;  $t^* = 0$  - час циклу, за завершенням якого починає розвиватись процес накопичення пошкоджень.

Після інтегрування (3.15) отримано:

$$D = 1 - \left[ 1 - (n+3) \left( \frac{\sigma}{B} \right)^{n+2} \bar{t} \right]^{\frac{1}{n+3}}. \quad (3.16)$$

Критичне значення скалярного параметру пошкоджуваності  $D_R$  для умов складного напруженого стану можна визначити з умов подібності питомих енергій деформування для складного та одновісного напружених станів:

$$D_R = D_{1R} \frac{\sigma_B^2}{\tilde{\sigma}^2} \leq 1, \quad (3.17)$$

де  $\tilde{\sigma}$  - ефективне напруження,  $\sigma_B$  - границя міцності,  $D_{1R}$  - граничне значення параметру пошкоджуваності при лінійному напруженому стані.

З рівняння (3.16) визначено час до руйнування для умов ізотермічної повзучості (на стадії зародження макротріщини) при умові, що  $D = D_{1R} = 1$  та  $\bar{t} = t_R$ :

$$t_R = \frac{1}{n+3} \left( \frac{\sigma}{B} \right)^{-(n+2)}. \quad (3.18)$$

Довговічність в умовах знакопостійної циклічної повзучості (пилоподібний цикл навантаження)  $N_{RF}$  умовно складається з двох складових: кількості циклів експлуатаційного навантаження  $N_D$ , в період якого йде накопичення розсіяних пошкоджень та стадії живучості  $N_S$  ( $N_{RF} = N_D + N_S$ ). В роботі розглянуто тільки

складова ресурсу  $N_D$ , яка складає до 80% загального ресурсу. Прийнято, що накопичення пошкоджень починається в матеріалі при досягненні напруження в циклі  $\sigma_{\max}$  значення границі витривалості  $\sigma_{-1}$  для даного матеріалу [ $\sigma_{\max} \geq \sigma_{-1}$  ( $\varepsilon_{\max}^{(p)} \geq \varepsilon_{-1}^{(p)}$ )], з початковими умовами  $t=0 \rightarrow D=0$ . Для циклічно стабілізуючого стану матеріалу та знакопостійного циклу малоциклового навантаження, згідно термодинамічного підходу, кінетичне рівняння пошкоджуваності має вигляд [144,145]:

$$\dot{D} = \frac{\sigma_{\max}^2}{2EL(1-D)^2} \dot{\varepsilon}^{(p)}, \quad (3.19)$$

де  $\dot{\varepsilon}^{(p)}$  - швидкість пластичної деформації,  $L$  - параметр матеріалу.

При цьому накопичена пластична деформація за цикл визначається:

$$\frac{\delta \varepsilon^{(p)}}{\delta N} = \int_{1 \text{ цикл}} \dot{\varepsilon}^{(p)} dt = \Delta \varepsilon^{(p)}. \quad (3.20)$$

Тоді пошкоджуваність матеріалу, накопичена за цикл навантаження з врахуванням залежностей (3.19) та (3.20) може бути записана:

$$\frac{\delta D}{\delta N} = \int_{1 \text{ цикл}} \dot{D} dt = \frac{\sigma_{\max}^2}{2EL(1-D)^2} \Delta \varepsilon^{(p)}. \quad (3.21)$$

Зв'язок між  $\Delta \varepsilon^{(p)}$  та  $\sigma_{\max}$  задовільно описується степеневою залежністю. З врахуванням параметру пошкоджуваності маємо:

$$\Delta \varepsilon^{(p)} = \left[ \frac{\sigma_{\max}}{C(1-D)} \right]^m, \quad (3.22)$$

де  $C$  та  $m$  - параметри матеріалу. Тоді після інтегрування рівняння (3.20) з врахуванням (3.22) при умові що  $D = D_{1R}$ :

$$D_{1R} = \int_0^{N_D} \frac{\delta D}{\delta N} dN = \frac{C^2}{2EL} (\Delta \varepsilon^{(p)})^{(m+2)/m} N_D \quad \text{або} \quad (3.23)$$

$$N_D = \frac{2ELD_{1R}}{C^2 (\Delta \varepsilon^{(p)})^{(m+2)/m}}. \quad (3.24)$$



З рівняння (3.23) витікає, що підставляючи в нього поточне значення пошкоджуваності  $D$  та  $N$ , а також порівнюючи їх з граничними значеннями  $D_{1R}$  та  $N_D$ , визначено остаточний ресурс до виникнення макротріщини:

$$D = D_{1R} \frac{N}{N_D}. \quad (3.25)$$

На основі принципу суперпозиції при програмному знакопостійному малоцикловому навантаженні кінетичне рівняння пошкоджуваності в умовах складного напруженого стану матиме вид:

$$\dot{D} = \left[ \frac{\sigma_{eq}^2(t) R_v}{2EL(1-D)^2} \right]^m \left[ \frac{\sigma_{eq}(t)}{A(1-D)} \right]^n \text{ при } \sigma_{eq}(t) \geq \sigma_{-1}, \quad (3.26)$$

де в якості еквівалентного напруження  $\sigma_{eq}(t)$  прийнято вираз типу Писаренко-Лебєдєва [114,115,142]  $[\sigma_{eq}(t) = \chi\sigma_i(t) + (1-\chi)\sigma_1(t)]$ , де  $\chi = \sigma_T^{(+)} / \sigma_T^{(-)}$  - параметр, що визначає вклад в деформування деформації зсуву;  $\sigma_T^{(+)}, \sigma_T^{(-)}$  - границі текучості матеріалу при розтягуванні та стисканні, відповідно;  $\sigma_i$  - інтенсивність напруження;  $\sigma_1$  - максимальне (з врахуванням знаку) головне напруження.

Після розділення змінних в залежності (3.26) та інтегруванні, отримано:

$$\int_0^{D_R} (1-D)^{2m+n} dD = \int_0^t \left[ \frac{\sigma_{eq}^2(t) R_v}{2EL} \right]^m \left[ \frac{\sigma_{eq}(t)}{A} \right]^n dt \text{ або} \quad (3.27)$$

$$D = 1 - \left[ 1 - (2m+n+1) \int_0^t \left[ \frac{\sigma_{eq}^2(t) R_v}{2EL} \right]^m \left[ \frac{\sigma_{eq}(t)}{A} \right]^n dt \right]^{\frac{1}{2m+n+1}}. \quad (3.28)$$

З рівняння (3.28) визначається час до руйнування (на стадії зародження макротріщини), якщо прирівняти  $D = D_R$ , а  $t = t_R$ :

$$\int_0^{t_R} \left[ \frac{\sigma_{eq}^{2m+n}(t) R_v^m}{(2EL)^m A^n} \right] dt = \frac{1 - (1 - D_R)^{2m+n+1}}{2m+n+1}. \quad (3.29)$$

Для умов ізотермічної повзучості при  $\sigma_{eq}(t) = \sigma_{eq\max}$  з (3.29) отримаємо

$$t_{RC} = \frac{1 - (1 - D_R)^{2m+n+1}}{2m+n+1} \frac{(2EL)^m (A)^n}{\sigma_{eq\max}^{2m+n} R_v^m}. \quad (3.30)$$

З рівняння (3.26) при програмному пульсуючому малоцикловому навантаженні з витримкою  $\sigma_{eq}(t) = \sigma_{eq\max}$  отримано:

$$\frac{\delta D}{\delta N} = \left[ \frac{R_v}{2EL(1-D)^2} \right]^m \left[ \frac{1}{A(1-D)} \right]^n \left[ 2 \int_0^{\sigma_{eq\max}} \sigma_{eq}^{2m+n} \frac{d\sigma_{eq}}{\dot{\sigma}_{eq}} + \int_0^{\bar{t}} \sigma_{eq\max}^{2m+n} dt \right], \quad (3.31)$$

де  $\dot{\sigma}_{eq} = d\sigma_{eq}/dt$  - швидкість зміни еквівалентного напруження в циклі при навантаженні (розвантаженні).

Розділив змінні та інтегруючи, отримано рівняння:

$$\int_0^{D_R} (1-D)^{2m+n} \delta D = \left[ \frac{R_v}{2EL} \right]^m \left[ \frac{1}{A} \right]^n \left[ \frac{2}{2m+n+1} \frac{\sigma_{eq\max}^{2m+n+1}}{\dot{\sigma}_{eq}} + \sigma_{eq\max}^{2m+n} \bar{t}_y \right] N_R \quad (3.32)$$

$$N_R = \frac{1 - (1 - D_R)^{2m+n+1}}{2m+n+1} \frac{(2EL)^m (A)^m}{\sigma_{eq\max}^{2m+n} R_v^m} \left[ \frac{2}{2m+n+1} \frac{\sigma_{eq\max}}{\dot{\sigma}_{eq}} + \bar{t} \right]^{-1} \quad (3.33)$$

Для алюмінієвого сплаву, що досліджується, параметри феноменологічної моделі малоциклової втоми при програмному навантаженні приведені в Табл.3.10.

Таблиця 3.10

Параметри моделі

$E, \text{МПа}$	$L, \text{МПа}$	$A, \text{МПа} \cdot \text{час}^{1/n}$	$n$	$m$	$B, \text{МПа} \cdot \text{час}^{1/n+2}$	$C, \text{МПа}$
70175	1,53	646	14,7	19,2	621,2	587,8

З рівняння (3.33) витікає вираз для довговічності  $N_{RF}$  матеріалу в умовах пилоподібного циклу ( $\bar{t} = 0, \tilde{\gamma}_y = 1$ ) малоциклового навантаження:

$$N_{RF} = \frac{\left[ 1 - (1 - D_R)^{2m+n+1} \right] (2EL)^m (A)^n \dot{\sigma}_{eq}}{\sigma_{eq\max}^{2m+n+1} R_v^m}. \quad (3.34)$$

Експериментальні дослідження проведені на циліндричних зразках на малоциклово втому при пилоподібному циклі навантаження, випробування в умовах ізотермічної повзучості та при програмному малоцикловому навантаженні. Для випробувань використовувалась сервогідравлічна випробувальна установка типу MTS 810, за допомогою якої проводились три етапи досліджень. На першому етапі випробування циліндричних зразків проводились на малоциклово втому при пилоподібному віднульовому циклі навантаження (навантаження зразка до

необхідного рівня напружень відбувалось за 5 секунд і розвантаження 5 секунд). На другому етапі - випробування в умовах ізотермічної повзучості до руйнування. Третій етап випробувань - це дослідження зразків при програмному навантаженні (навантаження зразка за 5 секунд, витримка при сталому навантаженні 120 секунд і розвантаження 5 секунд). На усіх етапах циклічного навантаження виконувалось вимірювання деградації модуля пружності. Методика вимірювання модуля пружності описана в роботах [114,145].

Для визначення параметра накопичення пошкоджень при випробуваннях на повзучість використовувався принцип еквівалентності деформації до закону Нортона на другій стадії повзучості. Це нам дозволило не розвантажувати зразок та визначати пошкоджуваність під час випробувань:

$$\dot{\varepsilon}^{(p)*} = \left( \frac{\sigma}{A} \right)^n. \quad (3.35)$$

Припустимо, що процес пошкоджуваності починається в кінці другої стадії повзучості. Протягом третьої стадії маємо рівняння (3.13) з якого отримаємо:

$$D = 1 - \left( \frac{\dot{\varepsilon}^{(p)*}}{\dot{\varepsilon}^{(p)}} \right)^{1/n}, \quad (3.36)$$

$\dot{\varepsilon}^{(p)*}$  - мінімальна швидкість деформації повзучості.

Приклад визначення кінетики накопичення пошкоджень для алюмінієвого сплаву при кімнатній температурі в залежності від величини деформації на ведено на рис.3.24.

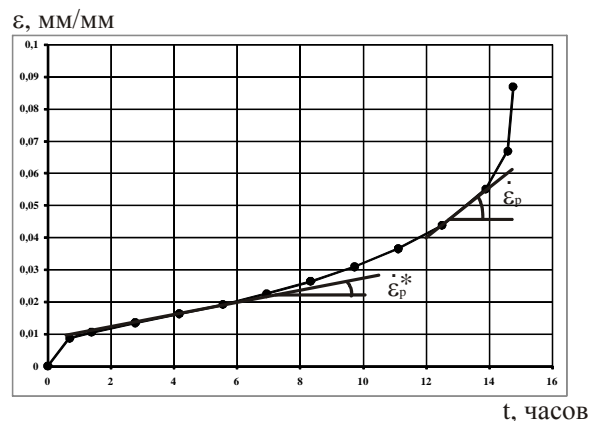


Рис.3.24 Визначення пошкоджуваності при повзучості

Використавши рівняння (3.36) отримані криві накопичення пошкоджень в залежності від часу для трьох рівнів навантаження (рис.3.25).

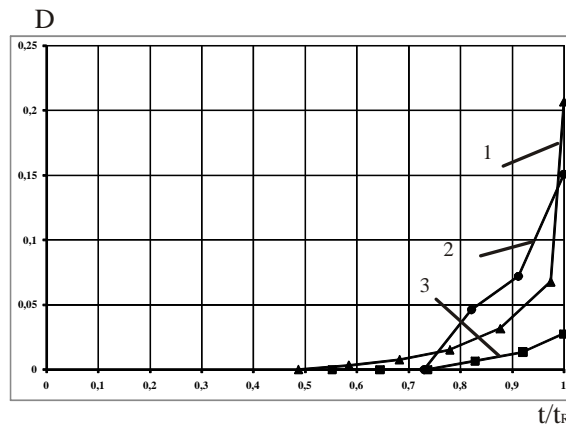


Рис.3.25 Залежність пошкоджуваності від часу для різних рівнів навантаження

(1-  $\sigma = 500$  МПа, 2-  $\sigma = 490$  МПа, 3-  $\sigma = 470$  МПа)

З графіків видно, що чим вище рівень напружень, тим вище рівень пошкоджуваності.

Пошкоджуваність  $D$  за кількістю циклів  $N$  може бути визначена при постійній амплітуді напружень  $\Delta\sigma$ , при цьому визначається амплітуда деформації в стабілізованому циклі  $\Delta\varepsilon_{\text{стаб.}}$ . При подальшому циклуванні розмах деформації  $\Delta\varepsilon$  починає змінюватись в зв'язку з пошкоджуваністю матеріалу.

Пошкоджуваність визначається при постійному рівні напружень за формулою:

$$D = 1 - \frac{\Delta\varepsilon_{\text{стаб.}}}{\Delta\varepsilon} \quad (3.37)$$

З результатів експериментів наведених на рис.3.26 видно, що чим вище рівень навантаження, тим більше пластична деформація і вона постійно збільшується аж до руйнування.

Використовуючи рівняння (3.37) отримуємо криві пошкоджуваності для трьох рівней навантаження (Рис.3.27)

Витримки зменшують кількість циклів до руйнування у порівнянні з пилоподібним циклом для одного і того ж рівня напружень. Під час проведення

випробувань фіксувалось зусилля та деформація, після цього визначався модуль пружності для кожного рівня напружень при втомі та втомі з витримками.

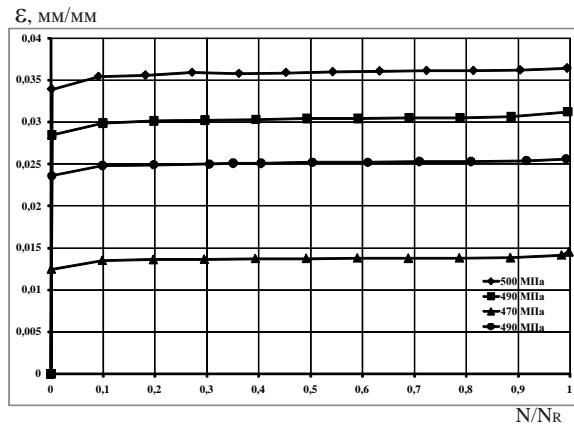


Рис.3.26 Залежність пластичної деформації від кількості циклів для різних рівней напружень при малоцикловій втомі

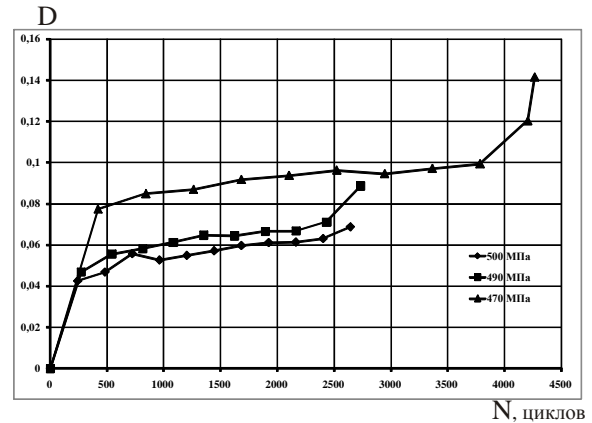
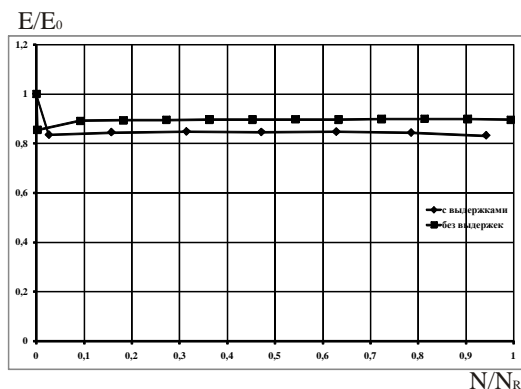


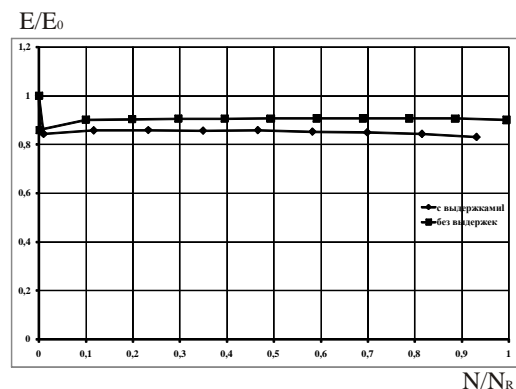
Рис.3.27 Кінетика накопичення пошкоджень при малоцикловій втомі алюмінієвого сплава

Для усіх рівней навантаження при повзучості спостерігалось суттєве накопичення незворотної деформації, при цьому існує також накопичення незворотної деформації при втомі. Для усіх рівней навантаження накопичення незворотної деформації проходило швидше при повзучості, чим при циклічному навантаженні з витримками.

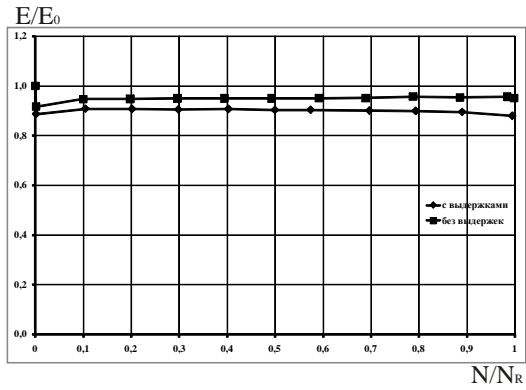
Порівняння зміни модуля пружності (рис.3.28 а-в) при малоцикловій втомі та втомі з витримками показує, що накопичення пошкоджень починається раніше і проходить більш інтенсивно при малоцикловому навантаженні з витримками.



а)



б)



в)

Рис.3.28 Зміна модуля пружності: а) 500 МПа; б) 490 МПа; в) 470 МПа

Побудова кривих втоми проводилась за стандартною методикою згідно ГОСТ [146,147]. На діаграмах наводяться криві втоми зразків алюмінієвого сплаву В95 для ймовірності руйнування  $P = 0,5; 0,10; 0,01$ .

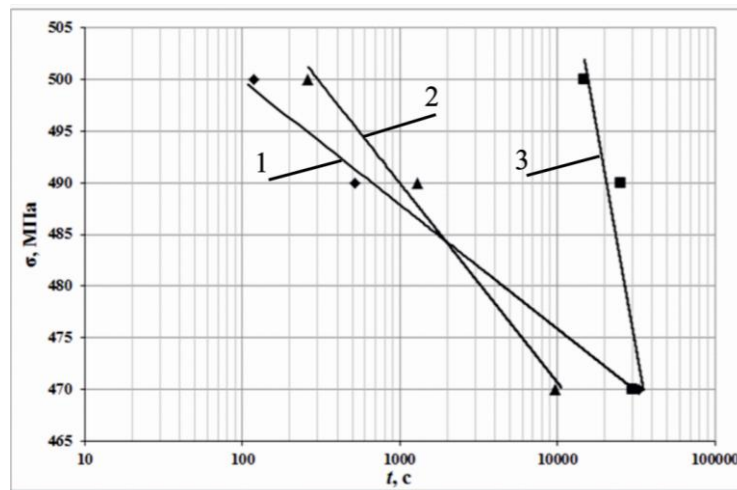


Рис.3.29 Криві довговічності алюмінієвого сплаву марки В95 (7075) при різних режимах навантаження: 1- повзучість; 2- циклічна повзучість; 3- малоциклова втома

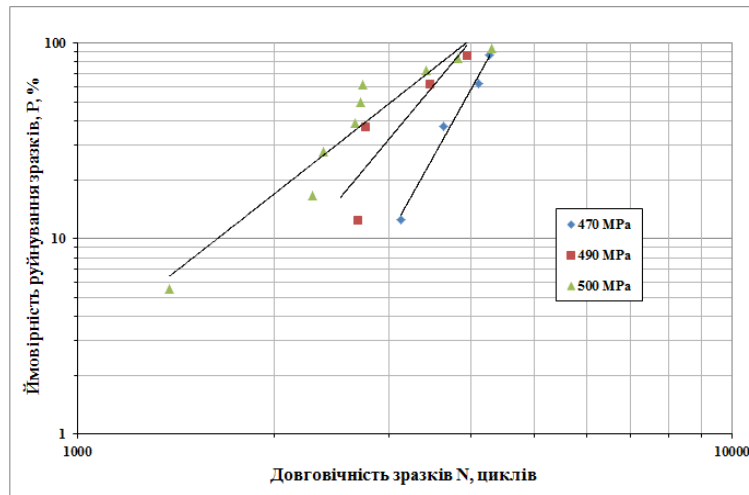


Рис.3.30 Залежність ймовірності руйнування від довговічності при малоцикловій втомі

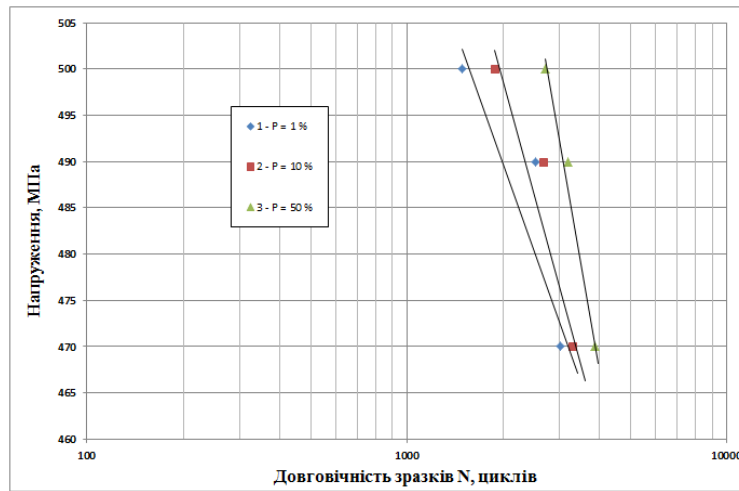


Рис.3.31 Криві втоми сплаву В95 при різній ймовірності руйнування при малоцикловій втомі

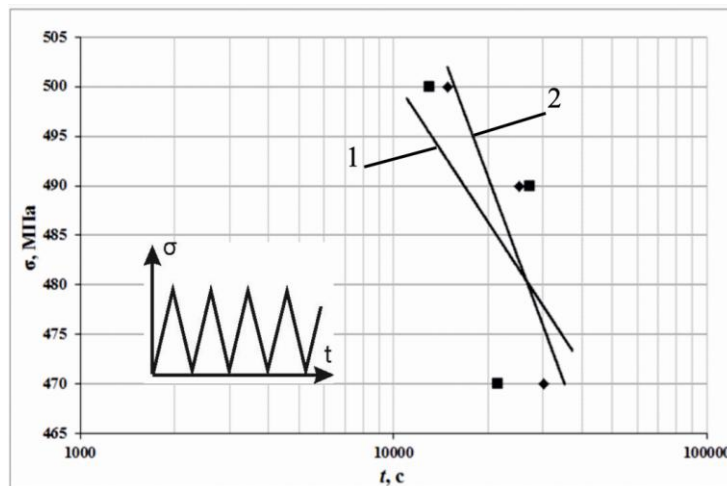


Рис.3.32 Розрахункові (1) та експериментальні (2) криві малоциклової втоми алюмінієвого сплаву марки В95 (7075) при програмі навантаження  $\tilde{\gamma}_\sigma = 1$

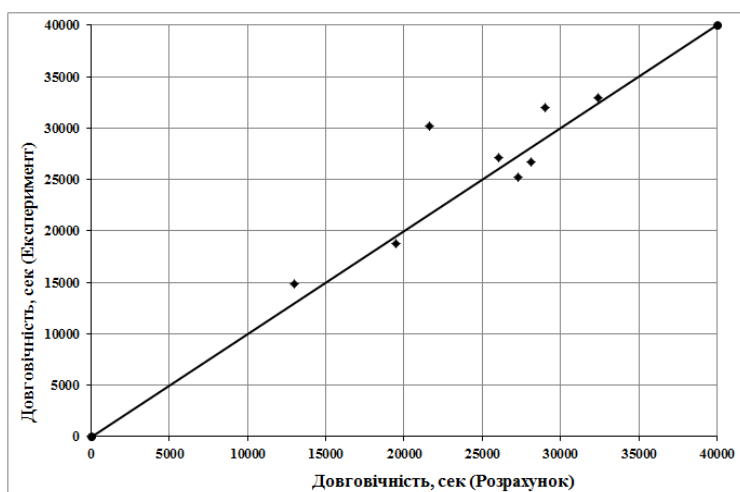


Рис.3.33 Порівняння експериментальної та розрахункової довговічності до руйнування при малоцикловій втомі

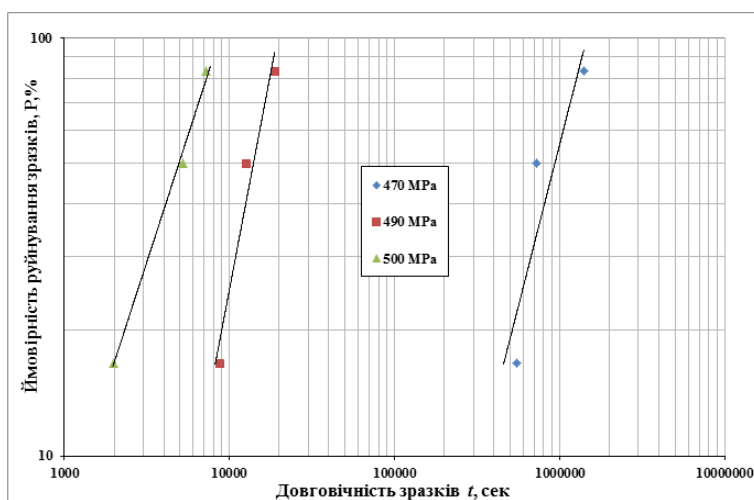


Рис.3.34 Залежність ймовірності руйнування від довговічності при повзучості

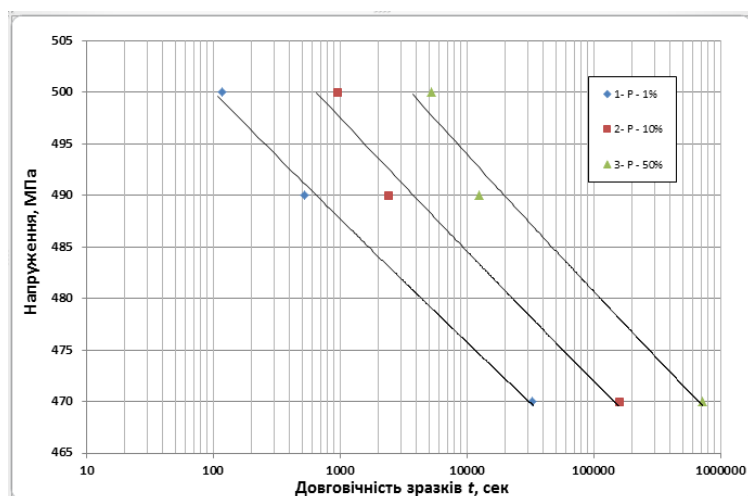


Рис.3.35 Криві втоми сплаву В95 при різних ймовірності руйнування при повзучості



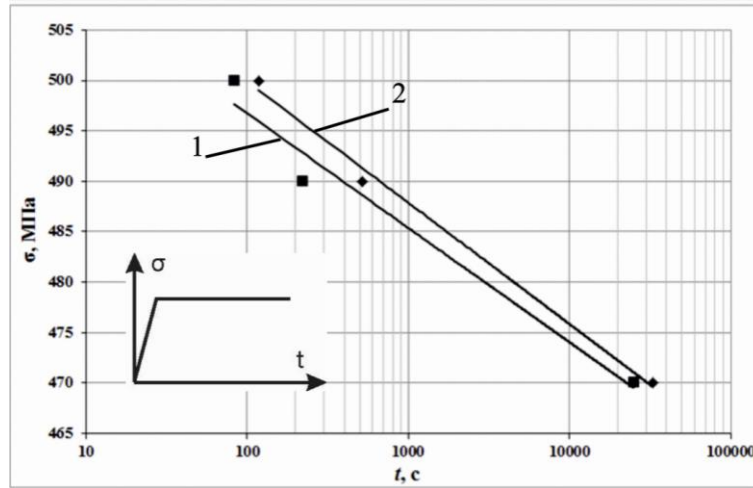


Рис.3.36 Розрахункові (1) та експериментальні (2) криві повзучості алюмінієвого сплаву марки В95 (7075) при програмі навантаження  $\bar{\gamma}_\sigma = 1$

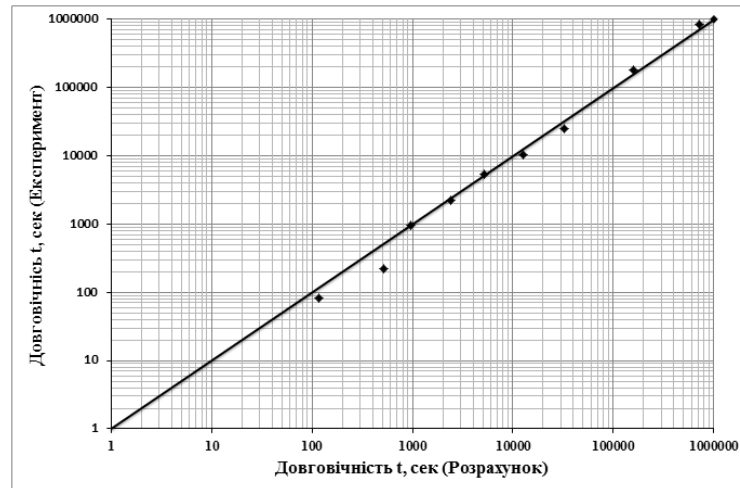


Рис.3.37 Порівняння розрахункової і експериментальної довговічності до руйнування при повзучості

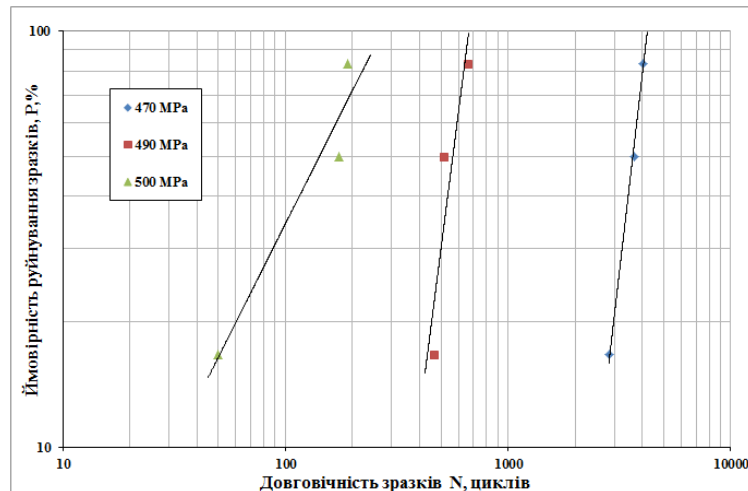


Рис.3.38 Залежність ймовірності руйнування від довговічності при циклічній повзучості

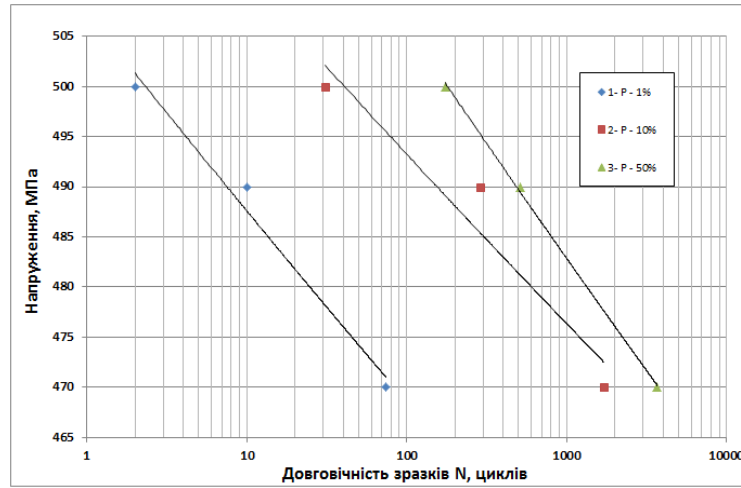


Рис.3.39 Криві втоми сплаву В95 при різній ймовірності руйнування при циклічній повзучості

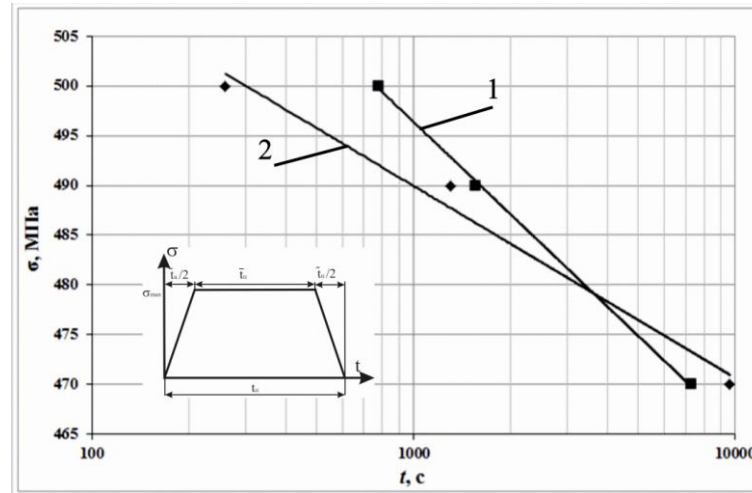


Рис.3.40 Розрахункові (1) та експериментальні (2) криві циклічної повзучості алюмінієвого сплаву марки В95 (7075) програмі навантаження  $\tilde{\gamma}_\sigma + \bar{\gamma}_\sigma = 1$

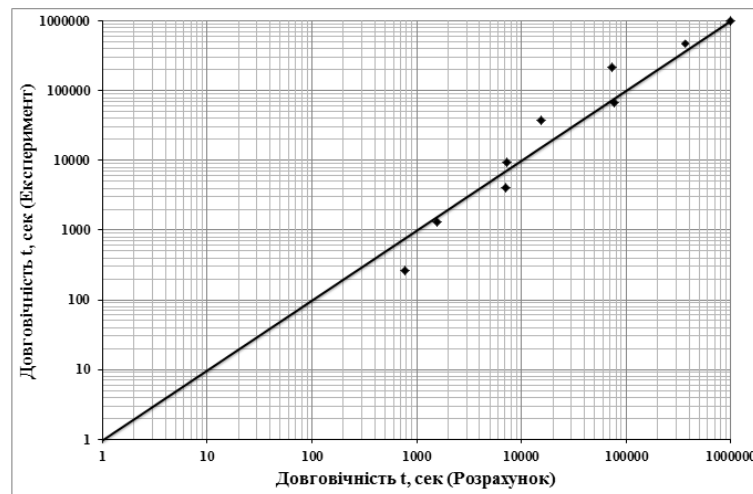


Рис.3.41 Порівняння розрахункової і експериментальної довговічності до руйнування при циклічній повзучості

На рис.3.33,3.37,3.41 наведене порівняння кривих малоциклової втоми, отриманих експериментальним шляхом та розрахованих згідно рівнянь (3.30), (3.33) та (3.34) для різних програм навантаження. Максимальна розбіжність між розрахунковими та експериментальними значеннями кількості циклів до руйнування при малоцикловій втомі склало 1,39 рази (рис.3.33). Довговічність, при повзучості, отримана розрахунковим шляхом в 2,36 рази менша від довговічності отриманої експериментальним шляхом (рис.3.37). Якщо розглядати програмне навантаження (рис.3.41), то розбіжність у відповідних значеннях складає 3 рази. Наведені дані дають змогу зробити висновок про задовільну кореляцію експериментальних та теоретичних розрахунків.

## ЗАГАЛЬНІ ВИСНОВКИ

1. Розроблено метод розрахунку високошвидкісних прецизійних центрифуг, як багатомасових систем, з врахуванням впливу факторів конструктивного, технологічного та експлуатаційного характеру, в тому числі дисбалансів, які виникають в результаті неточності виготовлення та завантаження ротора центрифуги.

2. Досліджено динаміку руху центрифуги та розвинено метод визначення її динамічних характеристик з врахуванням деформативності її елементів, гіроскопічних ефектів та вперше експериментально виявлено існування резонансних частот на подвоєній власній частоті, які вище першої. Відхилення між розрахунковими та експериментальними даними на трьох нижніх власних частотах центрифуги не перевищує 2 %, 1,7 % та 1,2 % відповідно.

3. Результати експериментальних досліджень динаміки центрифуги підтвердили, що розроблений метод дає достатню для практики точність визначення необхідних умов та зон стійкості руху центрифуг, які необхідні для якісної сепарації сумішей. Для центрифуги типу Pico 21, зони стійкої роботи мають місце при швидкостях обертання в межах 62 – 200 рад/с, 210 – 215 рад/с, 230 – 800 рад/с.

4. Встановлено вплив конструктивно-технологічних факторів на міцність чашки лабораторної центрифуги, що дало можливість визначити, що однією з причин, яка сприяє руйнуванню чашки ротору центрифуги є невдалий вибір технології виготовлення заготовки, що призводить до відриву дна від обичайки. У всіх випадках моделювання НДС максимальні напруження, в результаті концентрації напружень, діють в місці контакту цапфи ротора та чашок і призводять до руйнування чашки.

5. В системі визначальних рівнянь малоциклової втоми вибрано модель, що враховує параметр пошкоджуваності, який дозволяє прогнозувати довговічність на стадії до зародження макротріщини при програмному навантаженні, яке складається з малоциклового навантаження та повзучості.

6. Створено метод визначення довговічності центрифуги на основі вибраної моделі, що описує закономірності накопичення пошкоджень в матеріалі, для умов програмного малоциклового навантаження, що дає можливість зменшити вагу захисної оболонки центрифуги.

### Список використаних джерел

1. Николаи Е.Л. Теория гироскопов / Е.Л. Николаи. – Л.: Гостехиздат. Ленингр. отд-ние, 1948. – 172 с.
2. Лурье А.И. Аналитическая механика / А.И. Лурье. – М.: ГИФМЛ, 1961. – 824 с.
3. Ишлинский А.Ю. Механика гироскопических систем / А.Ю.Ишлинский. – М.: Изд-во АН СССР, 1963. – 482 с.
4. Харламов С.А. О движении гироскопа в кардановом подвесе при наличии момента вокруг оси собственного вращения/ С.А. Харламов // – 1961. – 139, №2. – С. 327–330.
5. Николаи Е.Л. К теории гибкого вала / Труды Ленинград. индустр. ин-та, №6, 1937. (Работа находится в собрании трудов Николаи Е.Л. Труды по механике) – М.: Гос. изд. техн.-теор. лит., 1955. – С. 419–435.
6. Булгаков Б.В. Прикладная теория гироскопов / Б.В. Булгаков. – Изд. 3-е. – М.: Изд-во Моск. Ун-та, 1976. – 400 с.
7. Ишлинский А.Ю. Лекции по теории гироскопов / Ишлинский А.Ю., Борзов В.И., Степаненко Н.П. – Изд-во МГУ, 1983. – 243 с.
8. Позняк Э.А. Влияние сил сопротивления на устойчивость вращающихся валов / Э.А. Позняк // Проблемы прочности в машиностроении. – 1958. – №1. – С. 3.
9. Позняк Э.Л. Вибрации в технике. Справочник в 6 т. / [ред. Диментберг Ф.М., Колесников К.С]. – М.: Машиностроение, 1980. – Э.Л.Позняк Колебания роторов – Т.3: Колебания машин, конструкций и их элементов. 1980. – С. 130–189.
10. Пановко Я.Г. Внутреннее трение при колебаниях упругих систем / Я.Г. Пановко. – М.: Гос. изд. физ.-мат. литературы, 1960. – 193 с.
11. Пановко Я.Г. Устойчивость и колебания упругих систем / Я.Г.Пановко, И.И. Губанова. – М.: Наука, 1987. – 352 с.
12. Кельзон Ф.С. Динамика роторов в упругих опорах / Кельзон Ф.С.,

Циманский Ю.П., Яковлев В.И. – М.: Наука, 1982. – 279 с.

13. Марцинковский В.А. О динамике роторов гидромашин / В.А.Марцинковский, М.А. Рудис // Теория механизмов и машин. – 1984. – №98, 99. – С. 18–27.

14. Симоновский В.И. Устойчивость и нелинейные колебания роторов центробежных машин / В.И. Симоновский. – Харьков: Вища шк., 1986. – 120 с.

15. Симоновский В.И. О влиянии дисбаланса на устойчивость ротора центробежной машины / В.И. Симоновский // Проблемы машиностроения и надежности машин, 1990. – №6. – С. 35–38.

16. Кельзон Ф.С. Экспериментальное исследование автоколебаний высокооборотных роторов / Ф.С. Кельзон, В.И. Яковлев // Изв. АН СССР, Машиноведение, 1974. – №25. – С. 21–28.

17. Диментберг Ф.М. Изгибные колебания вращающихся валов / Ф.М.Диментберг. – М.: АН СССР, 1959. – 248 с.

18. Павловский М.А. Теория гироскопов: учеб. [учебник для вузов]/ М.А. Павловский. – Киев: Вища школа, 1986. – 303 с.

19. Филимонихин Г.Б. Уравновешивание автобалансиrom ротора в упруго-вязко закрепленном корпусе с неподвижной точкой / Г.Б. Филимонихин, В.В.Гончаров // Известия Томского политехнического университета / ТПУ. – 2014. – Т.324, №2 : Математика и механика. Физика. – С. 71–77.

20. Филимонихин Г.Б. Стенд відцентрової соковижималки з автобалансиrom та дослідження на ньому ефективності роботи автобалансира/ Г.Б.Филимонихин, В.В. Гончаров// Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Серія: Нові рішення у сучасних технологіях. – 2013. – №70. – С. 22–27.

21. Филимонихин Г.Б. Устойчивость основных движений системы ротор – корпус на податливых опорах – автобалансиr: получение характеристического уравнения / Г.Б. Філімоніхін, В.В. Гончаров // Вісник Національного технічного університету "ХПІ". Збірник наукових праць: Нові рішення в сучасних технологіях. – Харків: НТУ "ХПІ". – 2012. – №34. – С. 3–9.

22. Філімоніхін Г.Б. Зрівноваження і віброзахист роторів авто балансирами

з твердыми коригувальними вантажами / Г.Б. Філімоніхін. – Кіровоград: КНТУ, 2004. – 352 с.

23. Олимпиев В.И. Влияние зазоров в опорах скольжения на устойчивость ротора / В.И. Олимпиев, Д.В. Елькин // Проблемы машиностроения и надежности машин, 2002. – №4. – С.19–26.

24. Вернигор В.Н. О расчете критических частот вращения роторов авиационных двигателей / В.Н. Вернигор, А.Е. Матвеев // Проблемы машиностроения и надежности машин, 2003. – №1. – С.19–22.

25. Зейтман М.Ф. О применении упругих опор в гибких роторах / М.Ф.Зейтман // Машиноведение, 1967. – № 1. – С. 57–67.

26. Зейтман М.Ф. Изгибные колебания вертикальных роторов в гравитационном поле / М.Ф. Зейтман, М.Я. Кушуль // Машиноведение, 1968. – №5. – С. 7–34.

27. Die Schwingungen des Kreisels mit der Massen elastisch gekoppelt ist. Proc. of the conference on vibration at Göttingen and Kassel, 6-8 October 1938, VDI – Magnus K. – Verlag, 1939.

28. Untersuchungen zur Verminderung störender Rüttelschwingungen an Kreiseleräten. Z. angew. Math. und Mech., - Magnus K. – 1940, Bd. 20, Heft 3.

29. Маундер Л. Собственные частоты колебаний свободного гироскопа с упругим валом, установленного в кардановом подвесе. / Л. Маундер; сб. перев. и обз. иностр. период. лит. // Механика. – 1961. – №5 (69).

30. Уиппел А.П.Р. Колебания свободного гироскопа с неоднородно упругой осью / А.П.Р. Уиппел, Л. Маундер; сб. перев. и обз. иностр. период. лит. // Механика. – 1964. – №6 (88).

31. Крементуло В.В. Применение второго метода Ляпунова к изучению устойчивости движения гироскопа с учетом упругих свойств оси ротора / В.В.Крементуло. – ПММ, 1961. – Т.25, №3. – 579 с.

32. Нестеренко В.П. Автоматическая балансировка роторов приборов и машин со многими степенями свободы/ В.П. Нестеренко.–Томск, ТГУ, 1985.–84 с.

33. Диментберг Ф.М. Колебания машин / Диментберг Ф.М., Шаталов К.Т.,



Гусаров А.А. – М.: Машиностроение, 1964. – 308 с.

34. Биргер И.А. Расчет на прочность деталей машин / Биргер И.А., Шор Б.Ф., Иосилевич Г.Б.; 4-е изд., перераб. и доп.– М.: Машиностроение, 1993.–702 с.

35. Gasch R. Acceleration of unbalanced flexible rotor through the critical speeds / R. Gasch, R. Markert , H. Pfutzner // Journal of Sound and Vibration. – 1979. – Vol.63, №3. – P. 393–409.

36. Кельзон А.С. Динамика вертикальной центрифуги / А.С. Кельзон, А.Р. Исаюк – Саевская // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 1993. – №5. – С. 27–34.

37. Кушуль М.Я. Движение гироскопа с гибкой осью под действием силы тяжести и упругих связей при малых углах нутации и устойчивости его вертикального вращения/ М.Я. Кушуль. – ПММ, 1968. – Т.32. – вып.4.

38. Павловский М.А. Виброустойчивость giroприборов / М.А.Павловский, В.Е. Петренко. – К.: Вища шк., Из-во при Киев. ун-те, 1982. – 172 с.

39. Писаренко Г.С. Колебания упругих систем с учётом рассеяния энергии / Г.С.Писаренко. – К: АН УССР, 1955. – 216 с.

40. Писаренко Г.С. Рассеяние энергии при механических колебаниях / Г.С.Писаренко. – К: Изд-во АНССР, 1962. – 436 с.

41. Сорокин Е.С. Внутреннее и внешнее сопротивление при колебаниях твердых тел / Е.С. Сорокин. – М.: ЦНИИСК, 1957. – № 3. – 66 с.

42. Сергеев С.И. Демпфирование механических колебаний / С.И. Сергеев. – М.: Физматгиз, 1959. – 408 с.

43. Сорокин Е.С. К теории внутреннего трения при колебаниях упругих тел / Е.С. Сорокин. – М.: Изд-во Акад. строительства и архитектуры СССР, 1960. – 131 с.

44. Сергеев С.И. Демпфирование колебаний ненагруженных роторов с опорами скольжения / С.И. Сергеев // Изв. АНССР, ОТН, Механика и машиностроение. – 1962. – №4. – С. 118–119.

45. Писаренко Г.С. Методы определения характеристик демпфирования колебаний упругих тел / Писаренко Г.С., Матвеев В.В., Яковлев А.П. – К:

«Наукова думка», 1976. – 85 с.

46. Савоненко В.И. Влияние жесткости опор на динамические свойства гибкого ротора / В.И. Савоненко // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 1990. – №2. – С. 36–37.

47. Николаев Д.К. Динамика ротора газотурбинного двигателя с гидродинамическими демпферами в опорах / Д.К. Николаев, В.Б. Балякин // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 1999. – №6. – С. 28–39.

48. Сергеев С.И. Демпферные опоры турбомашин / С.И. Сергеев // Научно – технический бюллетень. Кислород. – 1949. – №3. – С. 1–11.

49. Фролов К.Ф. Вибрации в технике. Справочник в 6 т. / [Под ред. академика РАН Фролов К.Ф.]. – М.: Машиностроение, 1995. – Т.6: Защита от вибрации и ударов. Часть вторая. Демпфирование колебаний. – 1995. – С.132–174.

50. Фролов К.В. Проблемы прочности, долговечности и надежности продукции машиностроения. Испытания при малоцикловом нагружении. Методические указания / К.В. Фролов. – М.: АН СССР, Институт машиноведения им. А.А.Благонравова, 1986. – 88 с.

51. Бидерман В.Л. Теория механических колебаний: учеб. [Учебник для вузов.] / В.Л. Бидерман. – М.: Высш. Школа, 1980. – 408 с., ил.

52. Качанов Л.М. О времени разрушения в условиях ползучести / Л.М.Качанов // Изв. АН СССР. ОТН. – 1958. – №8. – С. 26–32.

53. Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций / Ю.Н. Работнов. – М.: Наука, 1968. – 752 с.

54. Murakami S. Notion of Continuum Damage Mechanics and its Application to Anisotropic Creep Damage Theory / S. Murakami // Transactions of the ASME. Journal of Engineering Materials and Technology. – 1983. – Vol.105. – P. 99–105.

55. Murakami S. Experimental Evaluation of Creep Constitutive Equations for Type 304 Stainless Steel Under Non-Steady Multiaxial States of Stress / S. Murakami, N. Ohno, H. Tagami // Transactions of the ASME. Journal of Engineering Materials and Technology. – 1986. – Vol.108 – P. 119–126.

56. Ильюшин А.А. О связи между напряжениями и малыми деформациями

в механике сплошных сред / А.А. Ильюшин // Прикладная математика и механика. – 1954. – Т.18., №6. – С. 641–666.

57. Леметр Ж. Континуальная модель повреждения, используемая для расчета разрушения пластических материалов / Ж. Леметр // Теоретические основы. – 1985. – Т.107., №1. – С. 90–97.

58. Новожилов В.В. О пластическом разрыхлении / В.В. Новожилов // Прикладная математика и механика. – 1965. – Т.29., Вып. 4 – С. 681–689.

59. Новожилов В.В. О перспективах построения критерия прочности при сложном нагружении / В.В. Новожилов, О.Г. Рибаккина // Доклад на IV совещании по механическим вопросам усталости. Москва, 1966. – 18 с.

60. Lemaitre J. A Course on Damage Mechanics / J. Lemaitre. – Second ed., Springer, 1996. – 228 p.

61. Беналал А. Определяющие уравнения упруговязкопластичности для непропорционального циклического нагружения / А. Беналал, Д. Марки // Теоретические основы инженерных расчетов. – 1988. – №3. – С. 68–84.

62. Заховайко А.А. Долговечность сталей при малоцикловом нагружении по криволинейным траекториям / А.А. Заховайко, Н.С. Можаровский // Проблемы прочности. – 1984. – №2. – С. 34–37.

63. Красовский А.Я. Физические основы прочности / А.Я. Красовский – К.: Наукова думка, 1977. – 140 с.

64. Лебедев А.А. Комплексная оценка повреждаемости материала при пластическом деформировании / А.А. Лебедев, Н.Г. Чаусов, И.О. Богинич, С.А. Недосека // Проблемы прочности. – 1996. – №5. – С. 23–30.

65. Маньковский В.А. Критерии кратковременной, длительной и усталостной прочности конструкционных материалов при сложном напряженном состоянии / В.А. Маньковский, В.Т. Сапунов, А.А. Бурдейный // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. – 2001. – Т.64., №4 – С. 53–57.

66. Охаси Й. Пластическое деформирование нержавеющей стали типа 316 под действием несинфазных циклов по деформации / Й. Охаси, Е. Танака, М.Оока // Теоретические основы. – 1985. – №4. – С. 61–73.

67. Соси Д. Модели разрушения при многоосной усталости / Д. Соси // Теоретические основы инженерных расчетов. – 1988. – №3. – С. 9–20.
68. Itoh T. Nonproportional Low Cycle Fatigue Criterion for Type 304 Stainless Steel / T. Itoh, M. Sakane, M. Ohnami, D. Socie // Transactions of ASME. Journal of Engineering Materials and Technology. – 1995. – Vol.177. – P. 285–292.
69. Itoh T. Design criteria for proportional and non-proportional low cycle fatigue / T.Itoh, M. Sakane, T. Hata // Proceedings 7 ICBMFF. – 2004. – P. 135–140.
70. McDowell D.L. An Experimental Study of the Structure of Constitutive Equations for Nonproportional Cyclic Plasticity / D.L. McDowell // Trans. ASME. Journal of Engineering Materials and Technology. – 1985. – №4. – P. 307–315.
71. Niitsu Y. Inelastic Constitutive Equation on the Basis of Distribution Function of Yield Stress / Y. Niitsu, K. Ikegami // JSME international journal., Ser I. – 1989. – Vol.32., №1 – С. 73–80.
72. Nitta A. Fracture mechanism and life assesment under high-strain biaxial cyclic loading of tзpe 304 stainless steel / A. Nitta, T. Ogata, K. Kuwabara // Fatigue Fract. Engng Mater. Struct. – 1989. – Vol.12., №2. – P. 77–92.
73. Махутов Н.А. Прочность конструкций при малоцикловом нагружении / Махутов Н.А., Воробьев А.З., Гаденин М.М. – М.: Наука, 1983. – 272 с.
74. Махутов Н.А. Прочность конструкций при малоцикловом нагружении / Н.А. Махутов, А.Н. Романов. – М.: Наука, 1983. – 172 с.
75. Лебедев А.А. Модель накопления поврежденности в металлических материалах при сложном напряженном состоянии / А.А. Лебедев, Н.Г. Чаусов, И.О. Богинич // Проблемы прочности. – 1997. – №3. – С. 55–63.
76. Бобырь Н.И. Долговечность конструкционных материалов при сложном малоцикловом нагружении / Н.И. Бобырь, О.Н. Мукоида // Проблемы прочности. – 1991. – №3. – С. 3–9.
77. Бобырь Н.И. Обобщенная модель повреждаемости конструкционных материалов при сложном малоцикловом нагружении / Н.И. Бобырь // Проблемы прочности. – 2000. – №5. – С. 112–121.
78. Голуб В.П. Нелинейная механика континуальной поврежденности и ее

приложение к задачам ползучести и усталости / В.П. Голуб // Прикладная механика. – 2000. – Т.36., №3. – С. 34–66.

79. Lemetr J. Damage mechanics / J. Lemetr. – The Bath Press, Great Britian, 1990. – 556 p.

80. Бондарь В.С. Упругопластическое поведение и разрушение материала при ортогональном циклическом нагружении / В.С. Бондарь, И.А. Титарев // Современные проблем прочности, пластичности и устойчивости. Тверь. ТГУ, 2001. – С. 21–30.

81. Бондарь В.С. Исследование малоциклового прочности оболочек вращения при сложном теплосиловом нагружении / В.С. Бондарь, В.Б. Горохов, В.М. Санников// Прикладные проблемы прочности и пластичности. Механика деформируемых систем. – 1979. – №12. – С. 120–126.

82. Голуб В.П. Определяющие уравнения в нелинейной механике поврежденности / В.П. Голуб // Прикладная механика. – 1993. – Т.29, №10. – С.37–49.

83. Работнов Ю.Н. Введение в механику разрушения / Ю.Н. Работнов – М.: Наука, 1987. – 80 с.

84. Романов А.Н. Критерии усталостного разрушения с учетом работы остаточных микронапряжений / А.Н. Романов // Прикладная механика. – 1977. – Т.13., №2. – С. 69–79.

85. Романов А.Н. Разрушение при малоцикловом нагружении / А.Н. Романов. – М.: Наука, 1988. – 279 с.

86.Бородій М.В. До розробки деформаційного критерію малоциклової втоми / М.В. Бородій // Проблеми міцності. – 2001. – №3. – С. 28–37.

87. Бородій М.В. Ефективність використання коефіцієнтів непропорційності циклу при визначенні деформаційного зміцнення / М.В.Бородій // Проблеми міцності. – 2001. – №6. – С. 84–95.

88. Lemetr J. A Course on Damage Mechanics / J. Lemetr. – Springer Verlag., Germany, 1992. – 210 p.

89. Шевченко Ю.Н. Физические уравнения термо-вязкопластичности /

Ю.Н.Шевченко, Р.Г. Терехов – К.: Наукова думка, 1982. – 240 с.

90. Lacy T. Gradient concepts for evolution of damage / T. Lacy, D. McDowell, R.Talreja // *Mechanics of materials*. – 1999. – Vol. 31. – P. 831–860.

91. Lemaitre J. A Non Linear Model of Creep-Fatigue Damage Accumulation and Interaction / Lemaitre J. // *Proceedings of I.T.A.M. Symposium on Mechanics of Visco-elastic Media and Bodies*, Gothenburg, Sweden Springer – Verlag, 1974.

92. Lemaitre J. A three-dimensional ductile damage model applied to deep-drawing forming limits / J. Lemaitre // *ICM 4 Stockholm 2*. – 1983. – P. 1047–1053.

93. Трощенко В.Т. Деформирование металлов при малоцикловом нагружении / В.Т. Трощенко – К.: Наукова думка, 1981. – 344 с.

94. Трощенко В.Т. Сопротивление материалов деформированию и разрушению / В.Т. Трощенко, А.Я. Красовский.– К.: Наукова думка, 1993. – 299 с.

95. Трощенко В.Т. Механическое поведение материалов при различных видах нагружения / [Трощенко В.Т., Лебедев А.А., Стрижало В.А. и др.] – К.: Наукова Думка, 2000. – 316 с.

96. Яхно Б.О. Розрахунок довговічності матеріалів для умов складного малоциклового навантаження з урахуванням пошкоджуваності / Б.О. Яхно, М.І.Бобир // *Вісник Сумського державного університету*. – 2003. – №12 (58). – С.184–189.

97. Бобир М.І. Вплив пружно-пластичного деформування на фізико-механічні характеристики матеріалів / М.І. Бобир, А.П. Грабовський, О.В. Тимошенко, О.П.Халімон // *ДНТУ. Прогрессивные технологии и системы машиностроения. Международный сборник научных трудов*. – №32. – 2006. – С.9–13.

98. Чижик А.А. Разрушение вследствие ползучести и механизмы микроразрушения / А.А. Чижик, Ю.К. Петреня // *Доклады академии наук СССР*. – 1987. – Т.297., №6. – С. 1331–1333.

99. Lemetr J. Damage measurements / J. Lemetr, J. Dugaily // *Eng. Fract. Mech.* – 1987. – Vol. 28., №5/6. – P. 643–661.

100. Игнатович С.Р. Стахостическая модель повреждаемости материалов /

С.Р.Игнатович // Проблемы прочности. – 1990. – №6. – С. 3–9.

101. Ігнатович С.Р. Моніторинг утоми конструкційних алюмінієвих сплавів / С.Р. Ігнатович, М.В. Карусневич, О.М. Карусневич, С.В. Хижняк, С.А.Якушенко // Вістник НАУ. – 2004. – №1. – С. 88–91.

102. Ігнатович С.Р. Критерії об'єднання розсіяних ушкоджень при багатоосередковому руйнуванні / С.Р. Ігнатович, О.Г. Кучер, О.В. Башта // Матеріали III міжнародної науково-технічної конференції АВІА – 2001.– С.21–27.

103. Грабовський А.П. Пошкоджуваність в конструкційних матеріалах при їх деформуванні / А.П. Грабовський, Т.Б. Пономаренко, О.В. Тимошенко // Вестник НТУУ “КПИ”. Машиностроение. – 2002. – №43. – С. 13–15.

104. Касаткин Б.С. Экспериментальные методы исследования деформаций и напряжений. / Б.С. Касаткин, А.Б. Кудрин, Л.М. Лобанов. – К.: Наукова думка, 1981. – 584 с.

105. Mkaddem A. Comparison between Gurson and Lemaitre damage models in wiping die bending processes / A. Mkaddem, R. Hambli, A. Potiron // Int J Adv Manuf Technol. – 2004. – №23. – P. 451–461.

106. Рыбакина О.Г. Экспериментальное исследование пластического разрыхления материалов при однократном и многократном статическом нагружении / О.Г. Рыбакина, Я.С. Сидорян // Механика твердого тела. – 1966. – №.1. – С. 120–124.

107. Чжоу С. Расчет вязкого разрушения около надреза на основе континуальной механики / С. Чжоу, К. Сы. // Теоретические основы инженерных расчетов. – 1990. – №3. – С. 112–123.

108. Jahed. H. Low cycle fatigue life predictions using energy-life curves / H.Jahed, A.Varvani-Farahani // Proceedings 7 ICBMFF. – 2004. – P. 147–152.

109. Jiany Y. A fatigue criterion for general multiaxial loading / Y. Jiany // Fract. Mater. Struct. – 2000. – Vol. 23 – P. 1007–1018.

110. Яхно Б.О. Про критерії граничного стану металічних матеріалів при складному малоцикловому навантаженні із врахуванням пошкоджуваності / Б.О.Яхно // Наукові вісті НТУУ “КПИ”. – 2003. – №6. – С. 93–98.

111. Tang C.Y. Characterization of isotropic damage using double scalar variables / C.Y. Tang, W. Shen, L.H. Peng, T.C. Lee // *International Journal of Damage Mechanics*. – 2002. – №11. – P. 3–25.

112. Hansen N.R. A thermodynamically consistent framework for theories of elastoplasticity coupled with damage / N.R. Hansen, H.L. Schreyer // *Int. J. Solids Structures*. – 1994. – Vol.31, No.3 – P. 359–389.

113. Махутов Н.А. Уравнения состояния при малоцикловом нагружении / [Н.А.Махутов, М.М. Гаденин, Д.А. Гохфельд, А.П. Гусенков и др.] – М.: Наука, 1981. – 248 с.

114. Грабовський А.П. Дослідження кінетики пошкоджуваності в конструкційних матеріалах при складному напруженому стані/ А.П. Грабовський, О.В. Тимошенко, О.М. Масло, О.П. Халімон // *Вестник НТУУ КПИ. Машиностроение*. – 2003. – № 44. – С. 43–47.

115. Alteibach H. Creep-damage predictions in thin-walled structures by use of isotropic and anisotropic damage models / H. Alteibach, C. Huong, K. Naumenko // *Journal of Strain Analysis*. – 2002. – Vol.37., №3. – P. 265–275.

116. Borodii M.V. Hardening and lifetime prediction under biaxial low cycle fatigue / M.V. Borodii, V.A. Strizhalo // *Proceedings 7 ICBMFF*. – 2004. – P. 279–284.

117. Бабенко А.Є. Експериментальне дослідження механічних характеристик опор та руху центрифуги PICO21 / А.Є. Бабенко, Я.І. Лавренко // *Вісник Національного технічного університету України “Київський політехнічний інститут”, серія “Машинобудування”*. – 2013. – №69. – С. 84–88.

118. Бабенко А.Е. Динамика центрифуги на нелінійно упругом основанні / А.Е.Бабенко, Я.И. Лавренко, Й. Штракельян // *Вісник Національного технічного університету України “Київський політехнічний інститут”, серія “Машинобудування”*. – 2011. – №63. – С. 268–272.

119. Lurie A.I. *Analytical Mechanics* / A.I. Lurie. – Springer, Berlin, 2002. – 864 p.

120. Арнольд В.И. Математические методы классической механики / В.И.Арнольд. – М.: «Наука», 1974. – 432 с.



121. Бабенко А.Є. Визначення власних частот коливань лабораторної центрифуги з врахуванням гіроскопічних ефектів / А.Є. Бабенко, Я.І. Лавренко // Вісник Національного технічного університету України “Київський політехнічний інститут”, серія “Машинобудування”. – 2011. – №61, Т1. – С. 91–94.

122. Бабенко А.Є. Дослідження руху лабораторної центрифуги як багато масової системи / А.Є. Бабенко, Я.І. Лавренко, Й. Штракельян // Вісник Національного технічного університету України “Київський політехнічний інститут”, серія “Машинобудування”. – 2013. – №68. – С. 186–194.

123. Бабенко А.Є. Вплив гіроскопічних ефектів на коливання валу центрифуги / А.Є. Бабенко, Я.І. Лавренко, М.М. Куренков // Вісник Національного технічного університету України “Київський політехнічний інститут”, серія “Машинобудування”. – 2012. – №65. – С. 166–174.

124. Fischer J. Stability Analyses of High Speed lab centrifuges considering internal damping in rotor shafts / J. Fischer, J. Strackeljan // Technische Mechanik, Band 26, Heft 2. – 2006. – P. 131–147.

125. Fischer J. FEM-Simulation and stability analyses of high speed rotor systems / J. Fischer, J. Strackeljan // 7th IFToMM-Conference on Rotor Dynamics, Vienna, Austria. – 2006.

126. Fischer J. Some considerations of modelling internal friction in rotor shaft connections / J. Fischer, J. Strackeljan // Proceedings of 12th World Congress in Mechanism and Machine Science IFToMM. – 2007.

127. Бабенко А.Е. Колебания центрифуги с учетом статического и динамического дисбаланса / А.Е. Бабенко, Я.И. Лавренко, Н.Н. Куренков // XV Международная научно-техническая конференция «Прогрессивная техника, технология и инженерное образование»: материалы конференции, 23 – 27 июня 2014г. – Киев, 2014. – С. 18.

128. Лавренко Я.І. До питання про визначення ресурсу конструктивних елементів при змінних навантаженнях / Я.І. Лавренко // Вісник Національного технічного університету України “Київський політехнічний інститут”, серія “Машинобудування”. – 2009. – №56. – С. 88–92.

129. Охрименко Я.М. Технология кузнечно-штамповочного производства: учеб. [Учебник для вузов. Изд. 2-е, перераб. и доп.] / Я.М. Охрименко. – М.: «Машиностроение», 1976. – 560 с. с ил.

130. Унксов Е.П. Современное состояние кузнечно-штамповочного производства / Е.П. Унксов. – М.: «Машгиз», 1961. – 435 с.

131. Бабенко А.Є. Вплив технології виготовлення чашки лабораторної центрифуги на її міцність / А.Є. Бабенко, Я.І. Лавренко // Вісник Національного технічного університету України “Київський політехнічний інститут”, серія “Машинобудування”, 2010. – №58. – С. 111–115.

132. Бабенко А.Є. Оцінка міцності чашки лабораторної центрифуги та впливу конструктивно технологічних факторів / А.Є. Бабенко, Я.І. Лавренко // Вісник Національного технічного університету України “Київський політехнічний інститут”, серія “Машинобудування”, 2012. – №64. – С. 255–263.

133. Бабенко А.Є. Визначення напружено-деформованого стану чашки лабораторної центрифуги під дією динамічного навантаження / А.Є. Бабенко, Я.І.Лавренко // Всеукраїнський щомісячний науково-технічний і виробничий журнал, серія Машинознавство. – Львів, 2011. – №7–8. – С. 7–10.

134. Справочное пособие. Ansys для инженеров / [Чигаев А.В., Кравчук А.С., Смалюк А.Ф.]; под ред. В.Г. Малинина.– М.: Машиностроение, 2004.– 512 с.

135. Нейбер Г. Концентрация напряжений / Г. Нейбер – М.-Л.: ОГИЗ Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1947. – 204 с.

136. Писаренко Г.С. Сопротивление материалов / Под ред. Акад. АН УССР Писаренко Г.С. – 5-е изд., перераб. И доп. – К.: Вища шк. Головное изд-во, 1986. – 775 с.

137. Ширшов А.А. Концентрация напряжений за пределами упругости / А.А.Ширшов // Вестник машиностроения. – 2002. – №4. – С. 45–49.

138. Бобирь М.І. Визначення ресурсу роторів лабораторних центрифуг / М.І.Бобирь, А.Є. Бабенко, Я.І. Лавренко, О.П. Халімон // Вісник Тернопільського національного технічного університету ім. І.Пулюя. – Тернопіль, 2013. – №3 (71). – С. 28–36.

139. Бобырь Н.И. Динамика и долговечность лабораторной центрифуги / Н.И. Бобырь, А.Е. Бабенко, Я.И. Лавренко, А.П. Халимон // Научно-теоретический и практический журнал Современный научный вестник. Серия Технические науки. Современные информационные технологии. – 2014. – №19 (215). – С. 72–83.

140. Бабенко А.Є. Прогнозування довговічності елементів роторів лабораторних центрифуг / А.Є. Бабенко, Я.І. Лавренко, О.П. Халімон // Одинадцятий міжнародний симпозіум українських інженерів – механіків у Львові: Тези доповідей, 15 – 17 травня 2013р. – Львів, 2013р. – С. 60–61.

141. Strackeljan J. Bauteillebensdauer beim zyklischen Kriechen mit der Berücksichtigung von Schädigungsprozessen / J. Strackeljan, M. Bobyr, O. Khalimon // 10. Magdeburger Maschinenbau – Tage. 27. – 29. September 2011.

142. Штракельян Й. Прогнозирование долговечности элементов конструкций при циклической ползучести с учетом поврежденности / Й.Штракельян, Н.И. Бобырь, А.П. Халимон // Вестник НТУУ „КПИ”. Машиностроение. – №61. – 2011. – С. 66–75.

143. Lemaitre J., Desmorat R. Engineering Damage Mechanics / J. Lemaitre, R. Desmorat. – Springer, 2005. – 380 p.

144. Dyson B.F. Creep damage accumulation / B.F. Dyson, D. M-. R. Taplin // Grain Bound. Inst. Met. Spring Resident. Conf., London. – 1976. – Ser.3. – E/23–E/28.

145. Бобир М.І. Кінетика розсіяного руйнування металевих конструкційних матеріалів при пружно-пластичному деформуванні / М.І. Бобир, А.П.Грабовський, О.В. Тимошенко, О.П. Халімон, О.М. Масло // Проблеми міцності. – 2007. – №3. – С. 23–34.

146. Ультрацентрифуги и роторы препаративные. Общие технические требования и методы испытаний: ГОСТ 28785-90. – [Чинний від 01.01.92]. – М.: Межгосударственный стандарт, 2005. – 8 с.

147. Методы механических испытаний металлов. Методы испытаний на усталость: ГОСТ 25.502-79. - [Чинний від 01.01.81]. – М.: Межгосударственный стандарт, 1991. – 36 с.