

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
"КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ ІМЕНІ ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО"**

**Завдання та методичні вказівки до виконання типового розрахунку з курсу вищої
математики на тему "Визначений та невластні інтеграли"**

для студентів Інституту енергозбереження та енергоменеджменту

Рекомендовано Вченою радою ІЕЕ

Київ

НТУУ "КПІ імені Ігоря Сікорського"

2017

Завдання та методичні вказівки до виконання типового розрахунку з курсу вищої математики на тему “Визначений та невласні інтеграли”

Уклали: В.Ф.Зражевська, В.В. Могильова. - К НТУУ “КПІ імені Ігоря Сікорського”, 2017. - 37 с.

Укладачі: **В.Ф. Зражевська**, канд.фіз-мат наук,доц

В.В. Могильова, канд.фіз-мат наук,доц

Відповідальний редактор: **М.Є. Дудкін**, докт.фіз-мат наук,проф.

Рецензент: **О.В.Капустян** , докт.фіз-мат наук,проф.

За редакцією укладачів

ЗМІСТ

Вступ	4
1. Визначений інтеграл	
1.1 Означення визначеного інтеграла, його властивості.	4
1.2. Застосування визначеного інтегралу.	6
1.2.1. Знаходження площі плоскої фігури.	6
1.2.2. Знаходження довжини дуги кривої.	10
1.2.3. Об'єми тіл з відомою площею паралельних перерізів.	11
1.2.4. Обчислення об'єму тіла обертання	13
1.2.5. Площа поверхні тіла обертання	15
2. Невласні інтеграли.	16
2.1. Невласні інтеграли I роду.	16
2.2. Невласний інтеграл II роду	18
3. Наближене обчислення визначених інтегралів	19
3.1. Формула прямокутників.	19
3.2. Формула трапецій.	21
3.3. Формула Сімпсона	22
4. Завдання для розрахункової роботи.	27
Список літератури	37

Вступ

Успішне оволодіння курсом вищої математики є основою успішного вивчення загальнотеоретичних та спеціальних дисциплін, сприяє розвитку логічного мислення, дозволяє інженеру формалізувати проблему і знайти оптимальний шлях для її розв'язання.

Запропоновані методичні вказівки мають на меті полегшити вивчення студентами розділу вищої математики, що стосується обчислення визначених та невласних інтегралів та їх застосувань. Методичні вказівки містять необхідні теоретичні відомості, розібрані приклади розв'язання типових задач, завдання для самостійної роботи для більш глибокого ознайомлення з темою.

Методичні вказівки можуть бути корисними студентам денної і заочної форм навчання, а також викладачам при складанні завдань для контрольних, самостійних робіт і типових розрахунків по темі “Визначений та невласні інтеграли та їх застосування”.

1. Визначений інтеграл

1.1 Означення визначеного інтеграла, його властивості. Нехай $f(x)$ визначена для всіх $x \in [a, b]$, $a < b$. Розіб'ємо $[a, b]$ довільним чином точками $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ так, що $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$. На кожному $[x_i, x_{i+1}]$ виберемо довільну точку ξ_i . Позначимо:

$\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, $\lambda = \max_{i=0, n-1} \Delta x_i$. Тоді число $I(x_i, \xi_i) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i$ називається *інтегральною сумою*

функції $f(x)$, що відповідає даному розбиттю відрізка $[a, b]$ і даному вибору точок ξ_i .

Означення. *Визначеним інтегралом* від $f(x)$ на $[a, b]$ - позначається $\int_a^b f(x) dx$ - називається границя інтегральних сум $I(x_i, \xi_i)$ при $\lambda \rightarrow 0$, що не залежить від вибору точок

ξ_i і способу розбиття $[a, b]$: $\int_a^b f(x) dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i$.

Якщо для функції існує визначений інтеграл на відрізку $[a, b]$, то функція називається *інтегрованою на цьому відрізку*. Число a називається нижньою межею інтегрування, а число b - верхньою.

Можна довести, що якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$, то для неї існує

визначений інтеграл $\int_a^b f(x) dx$.

Для обчислення визначеного інтегралу використовують *формулу Ньютона-Лейбніця*: якщо $f(x)$ неперервна на $[a, b]$ і має первісну $F(x)$, то $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$.

Геометричний зміст визначеного інтегралу: площа криволінійної трапеції, що обмежена неперервною кривою $f(x) \geq 0$ і прямим $x = a$, $x = b$, $y = 0$ дорівнює: $S = \int_a^b f(x)dx$.

Основні властивості визначеного інтегралу. Вважаємо $f(x)$, $f_i(x)$, $i = 1, \dots, n$ неперервними на $[a, b]$.

$$1. \int_a^a f(x)dx = 0.$$

$$2. \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

$$3. \int_a^b (k_1 f_1(x) + \dots + k_n f_n(x))dx = k_1 \int_a^b f_1(x)dx + \dots + k_n \int_a^b f_n(x)dx, \text{ де } k_i = \text{const}, i = 1, \dots, n.$$

$$4. \text{ Якщо } f(x) \geq 0 \text{ для будь-якого } x \in [a, b], \text{ то } \int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

$$5. \text{ Якщо для будь-якого } x \in [a, b] f(x) \leq \phi(x), \text{ то } \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b \phi(x)dx.$$

$$6. \text{ Для довільних } a, b, c: \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

$$7. \left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

$$8. m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a), \text{ де } M, m, \text{ відповідно, найбільше і найменше значення } f(x) \text{ на відрізку } [a, b].$$

$$9. \text{ Існує } c \in [a, b], \text{ що } \int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a).$$

При обчисленні визначеного інтегралу можуть бути корисними наступні теореми.

Теорема (про заміну змінної у визначеному інтегралі). Якщо $y = f(x)$ неперервна на $[a, b]$, функції $x = \varphi(t)$ і $x' = \varphi'(t)$ неперервні на $[\alpha, \beta]$, де $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Теорема (про інтегрування частинами у визначеному інтегралі). Якщо функції $u(x)$, $v(x)$ неперервні разом зі своїми першими похідними на $[a, b]$, то $\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du$.

1.2. Застосування визначеного інтегралу.

1.2.1. Знаходження площі плоскої фігури.

Прямокутні координати. Виходячи з геометричного змісту визначеного інтегралу і його властивостей, площа плоскої фігури, що обмежена лініями $y = f(x)$ і прямими $x = a$, $x = b$, $y = 0$ дорівнює:

$$S = \int_a^b f(x) dx, \quad (1)$$

для випадку, коли $f(x) \geq 0$ (Рис. 1) і

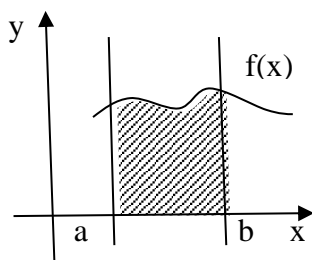


Рис. 1

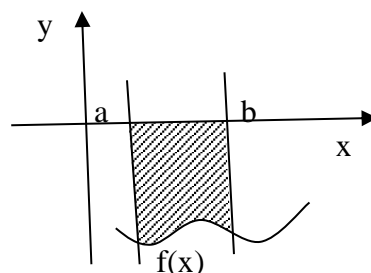


Рис. 2

$$S = -\int_a^b f(x) dx \quad (2)$$

для випадку, коли $f(x) \leq 0$ (Рис. 2).

У випадку, коли крива $y = f(x)$, що входить в границю криволінійної трапеції, задана параметрично: $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $t \in [\alpha, \beta]$, для знаходження площі в інтегралі (1) або (2) треба перейти до змінної t , застосувавши теорему про заміну змінної у визначеному інтегралі. Таким чином, в цьому випадку, знайти площу криволінійної трапеції можна за формулами:

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} y(t) x'(t) dt \quad (3)$$

(якщо крива розташована над віссю OX),

$$S = -\int_{\alpha}^{\beta} y(t) x'(t) dt \quad (4)$$

(якщо крива розташована під віссю OX) .

Полярні координати. Введемо полярну систему

координати (ρ, φ) , $\rho \geq 0$, $\varphi \in [0, 2\pi)$. Розглянемо криволінійний сектор, обмежений неперервною лінією

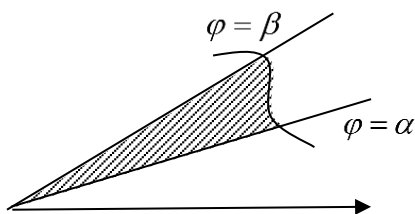


Рис. 3

$\rho = \rho(\varphi)$ і променями $\varphi = \alpha, \varphi = \beta, (\alpha < \beta)$ (Рис.3). Тоді площа криволінійного сектора знаходиться за формулою:

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi) d\varphi \quad (5)$$

Приклад. Знайти площу фігури, що обмежена лініями: $y = 2x - x^2, x = 3, y = 0$.

Розв'язання. Як видно з рисунка, фігури (Рис.4), на відрізку $[0,2]$ точки параболи

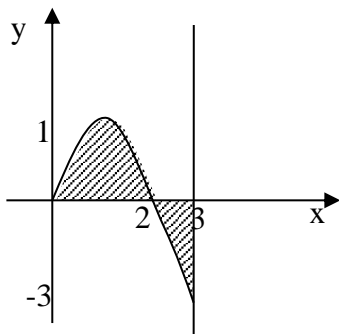


Рис. 4

розташовані вище осі абсцис, отже, для знаходження цієї частини площі користуємося формулою (1), на відрізку $[2,3]$ нижче осі абсцис, отже, для знаходження цієї частини площі користуємося формулою (2):

$$S = \int_0^2 (2x - x^2) dx - \int_2^3 (2x - x^2) dx = x^2 \Big|_0^2 - x^3/3 \Big|_0^2 - \left(x^2 \Big|_2^3 - x^3/3 \Big|_2^3 \right) = 8/3 \text{ (кв.од).}$$

Приклад. Знайти площу фігури, що обмежена лініями: $y = 1/x, y = x$.

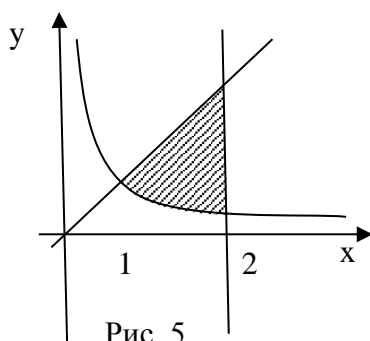


Рис. 5

Розв'язання. Область, площу якої шукаємо, розташована вище осі абсцис. Щоб знайти її площу, треба від площі криволінійної трапеції, що обмежена лініями $y = x, x = 1, x = 2, y = 0$, відняти площу криволінійної трапеції, що обмежена лініями $y = 1/x, x = 1, x = 2, y = 0$. Отже:

$$S = \int_1^2 x dx - \int_1^2 \frac{1}{x} dx = \frac{x^2}{2} \Big|_1^2 - \ln |x| \Big|_1^2 = \frac{3}{2} - \ln 2 \text{ (кв.од).}$$

Приклад. Знайти площу фігури, що обмежена першою аркою циклоїди $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$.

Розв'язання. Перша арка циклоїди відповідає зміні параметра t від 0 до 2π (Рис. 6).

За формулою (3), враховуючи, що $x' = a(1 - \cos t)$, отримуємо:

$$S = \int_0^{2\pi} a^2 (1 - \cos t)^2 dt = a^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2 \cos t + \cos^2 t) dt =$$

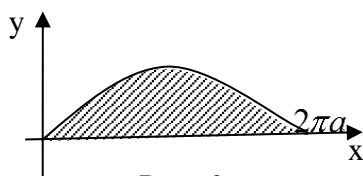


Рис. 6

$$= a^2 \left(t \Big|_0^{2\pi} - 2 \sin t \Big|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \frac{(1+2\cos t)}{2} dt \right) =$$

$$= a^2 \left(2\pi + \frac{1}{2} (t + \frac{1}{2} \sin 2t) \Big|_0^{2\pi} \right) = 3\pi a^2 \text{ (кв.од).}$$

Приклад. Знайти площу лемніскати Бернуллі: $(x^2 + y^2)^2 - a^2(x^2 - y^2) = 0$, $a > 0$.

Розв'язання. Врахуємо зв'язок між декартовою і полярною системою координат: $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$. Запишемо рівняння лемніскати Бернуллі в полярній системі координат:

$$(\rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi)^2 - a^2(\rho^2 \cos^2 \varphi - \rho^2 \sin^2 \varphi) = 0 \Rightarrow \rho^4 = a^2(\rho^2 \cos^2 \varphi - \rho^2 \sin^2 \varphi) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \rho^2 = a^2 \cos 2\varphi \Rightarrow \rho = a\sqrt{\cos 2\varphi}.$$

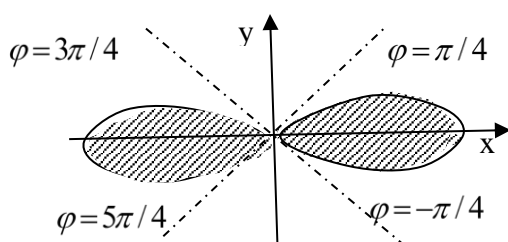


Рис. 7

Побудуємо графік лінії. Оскільки $\rho \geq 0$, то

$$\cos 2\varphi \geq 0 \Rightarrow -\frac{\pi}{2} + 2\pi k \leq 2\varphi \leq \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

$\varphi \in [0, 2\pi)$, отже, маємо дві області зміни φ :

$$-\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}, \quad \frac{3\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{5\pi}{4}. \quad \text{Враховуючи}$$

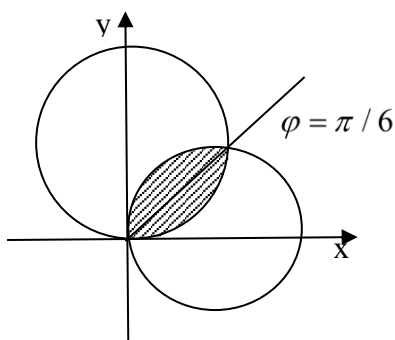
періодичність і парність функції $\cos 2\varphi$, достатньо знайти точки лінії для $\varphi \in [0, \pi/4]$: ($\varphi = 0, \rho = a$), ($\varphi = \pi/8, \rho = a/\sqrt[4]{2}$), ($\varphi = \pi/4, \rho = 0$). Графік лінії зображено на рис. 7 (системи декартової і полярної систем координат суміщені). Враховуючи симетричність області, достатньо знайти площу частини області, розташованої в першій чверті, і помножити на 4. Користуючись формулою (5), маємо:

$$S = 4 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} (a\sqrt{\cos 2\varphi})^2 d\varphi = 2a^2 \int_0^{\pi/4} \cos 2\varphi d\varphi = a^2 \sin 2\varphi \Big|_0^{\pi/4} = a^2 \text{ (кв.од).}$$

Приклад. Знайти площу плоскої фігури, що обмежена лініями: $x^2 + y^2 = x$, $x^2 + y^2 = \sqrt{3}y$.

Розв'язання. Побудуємо лінії, що обмежують область: $x^2 + y^2 = x \Rightarrow x^2 - x + y^2 = 0 \Rightarrow (x - 1/2)^2 + y^2 = 1/4$. Отже, перша лінія визначає коло з центром в точці $(1/2, 0)$, і радіусом $1/2$. Аналогічно, друге рівняння може бути записане у

вигляді $x^2 + (y - \sqrt{3}/2)^2 = \sqrt{3}/2$ і визначає коло з центром в точці $(0, \sqrt{3}/2)$, і радіусом $\sqrt{3}/2$. Область, площу якої треба знайти, зображено на рис. 8.



Перейдемо до полярної системи координат. Сумістимо декартову систему з полярною: полярну вісь сумістимо з додатнім напрямом осі ОХ, полярний полюс сумістимо з початком відліку декартової системи. Перепишемо рівняння кіл в полярних координатах:

$$x^2 + y^2 = x \Rightarrow \rho^2 = \rho \cos \varphi \Rightarrow \rho = \cos \varphi \quad \text{і} \quad x^2 + y^2 = \sqrt{3}y \Rightarrow \rho^2 = \sqrt{3}\rho \sin \varphi \Rightarrow \rho = \sqrt{3} \sin \varphi.$$

Знайдемо промінь, на якому лежать точки перетину кіл:

$$\begin{cases} \rho = \cos \varphi \\ \rho = \sqrt{3} \sin \varphi \end{cases} \Rightarrow \cos \varphi = \sqrt{3} \sin \varphi \Rightarrow \operatorname{tg} \varphi = 1/\sqrt{3} \Rightarrow \varphi = \pi/6.$$

Шукаємо площу нашої фігури як суму площ:

$$\begin{aligned} S = S_1 + S_2 &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/6} (\sqrt{3} \sin \varphi)^2 d\varphi + \frac{1}{2} \int_{\pi/6}^{\pi/2} (\cos \varphi)^2 d\varphi = \frac{3}{2} \int_0^{\pi/6} \frac{1 - \cos 2\varphi}{2} d\varphi + \frac{1}{2} \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{1 + \cos 2\varphi}{2} d\varphi = \\ &= \frac{3}{4} \left(\varphi \Big|_0^{\pi/6} - \frac{1}{2} \sin 2\varphi \Big|_0^{\pi/6} \right) + \frac{1}{4} \left(\varphi \Big|_{\pi/6}^{\pi/2} + \frac{1}{2} \sin 2\varphi \Big|_{\pi/6}^{\pi/2} \right) = \frac{5\pi}{24} - \frac{\sqrt{3}}{4} \text{ (кв.од.)}. \end{aligned}$$

Приклад. Знайти площу плоскої фігури, що обмежена лініями: $\rho = 2 \sin 2\varphi$, $\rho = 1$, ($\rho \geq 1$).

Розв'язання. Як і в попередньому прикладі, сумістимо полярну і декартову системи координат. Лінія $\rho = 2 \sin 2\varphi$ - двопелюсткова "роза". Знаходимо інтервали зміни φ : $\rho \geq 0 \Rightarrow 2 \sin 2\varphi \geq 0 \Rightarrow 2\pi k \leq 2\varphi \leq \pi + 2\pi k, k \in Z$. $\varphi \in [0, 2\pi)$, отже при $k = 0$ маємо перший інтервал: $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$, при $k = 1$ маємо другий інтервал: $\pi \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{2}$. Враховуючи періодичність $\sin 2\varphi$, знаходимо точки на кривій для інтервалу $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$: ($\varphi = 0, \rho = 0$), ($\varphi = \pi/4, \rho = 2$), ($\varphi = \pi/2, \rho = 0$). Графік лінії зображено на рис. 9.

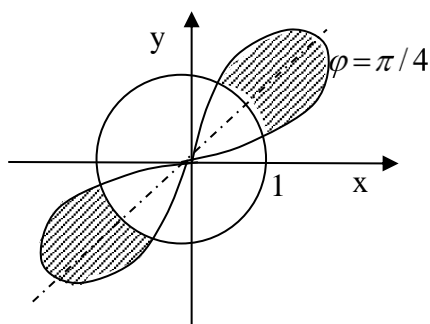


Рис. 9

Для побудови лінії $\rho = 1$ можна, наприклад, перейти в декартову систему координат: $\rho = 1 \Rightarrow \rho^2 = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 = 1$. Тобто рівняння $\rho = 1$ визначає коло з центром в $(0,0)$ і радіусом 1. Враховуючи, що $\rho \geq 1$ зображуємо штриховкою область, площу якої треба знайти (Рис.9). Враховуючи симетричність області, достатньо знайти площу четвертої частини, і помножити на 4. Знайдемо значення променів, що обмежують розглянуту частину області. Користуючись формулою (5), маємо:

$$S = S_1 - S_2 = \frac{1}{2} \int_{\pi/12}^{\pi/4} (2 \sin 2\varphi)^2 d\varphi - \frac{1}{2} \int_{\pi/12}^{\pi/4} 1^2 d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/6} \frac{1 - \cos 4\varphi}{2} d\varphi - \frac{1}{2} \varphi \Big|_{\pi/12}^{\pi/4} =$$

$$= \varphi \Big|_{\pi/12}^{\pi/4} - \frac{1}{4} \sin 4\varphi \Big|_{\pi/12}^{\pi/4} - \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{8} \text{ (кв.од.)}.$$

1.2.2. Знаходження довжини дуги кривої.

Плоска крива. Прямокутні координати. Розглянемо дугу неперервної плоскої кривої АВ, задану рівнянням: $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$. Довжина дуги кривої, в разі якщо похідна $f'(x)$ неперервна на $[a, b]$, знаходиться за формулою:

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx. \quad (6)$$

Якщо крива задана в параметричній формі: $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $t \in [\alpha, \beta]$, де функції

$x(t), y(t)$ неперервні разом зі своїми похідними $x'(t), y'(t)$ на $[\alpha, \beta]$, то для знаходження довжини дуги кривої використовується формула:

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt. \quad (7)$$

Довжину дуги кривої, що задана рівнянням в полярних координатах: $\rho = \rho(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha, \beta]$, за умови неперервності $\rho(\varphi)$ і $\rho'(\varphi)$ на $[\alpha, \beta]$, знаходимо за формулою:

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(\rho(\varphi))^2 + (\rho'(\varphi))^2} d\varphi. \quad (8)$$

Приклад. Знайти довжину дуги кривої, що задана рівнянням $y = \ln(\cos x)$, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{6}$.

Розв'язання. Для $x \in [0, \pi/6]$ функція $y = \ln(\cos x)$ неперервна разом зі своєю похідною: $y' = -\frac{\sin x}{\cos x}$. Тоді за формулою (6):

$$l = \int_0^{\pi/6} \sqrt{1 + \left(-\frac{\sin x}{\cos x}\right)^2} dx = \int_0^{\pi/6} \sqrt{\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}} dx = \int_0^{\pi/6} \frac{1}{|\cos x|} dx = \left| \text{оскільки } \cos x > 0 \text{ для } x \in [0, \pi/6] \right| =$$

$$= \int_0^{\pi/6} \frac{1}{\cos x} dx = \int_0^{\pi/6} \frac{\cos x}{\cos^2 x} dx = \int_0^{\pi/6} \frac{d \sin x}{1 - \sin^2 x} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} \right| \Big|_0^{\pi/6} = \frac{1}{2} \ln 3 \text{ (од.)}.$$

Приклад. Знайти довжину дуги астрои́ди, заданої параметричним рівнянням:

$$\begin{cases} x = 8\cos^3 t \\ y = 8\sin^3 t \end{cases}, \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{6}.$$

Розв'язання. Для $t \in [0, \pi/6]$ функції $x = 8\cos^3 t$ і $y = 8\sin^3 t$ неперервні разом зі своїми похідними: $x' = -24\cos^2 t \sin t$, $y' = 24\sin^2 t \cos t$. За формулою (6):

$$\begin{aligned} l &= \int_0^{\pi/6} \sqrt{1 + \left(-\frac{\sin x}{\cos x}\right)^2} dx = \int_0^{\pi/6} \sqrt{24^2 \cos^4 t \sin^2 t + 24^2 \sin^4 t \cos^2 t} dt = 24 \int_0^{\pi/6} |\cos t| |\sin t| \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t} dt = \\ &= \left| \text{оскільки } \cos t > 0 \text{ і } \sin t > 0 \text{ для } t \in [0, \pi/6] \right| = 24 \int_0^{\pi/6} \cos t \sin t dt = 24 \int_0^{\pi/6} \sin t d \sin t = \\ &= 24 \frac{\sin^2 t}{2} \Big|_0^{\pi/6} = 3 \text{ (од.)}. \end{aligned}$$

Приклад. Знайти довжину дуги кривої, що задана рівнянням в полярних координатах:
 $\rho = 2(1 - \cos \varphi)$, $\varphi \in [-\pi, -\pi/2]$.

Розв'язання. Для $\varphi \in [-\pi, -\pi/2]$ функції $\rho = 2(1 - \cos \varphi)$, і $\rho' = 2 \sin \varphi$ неперервні.

Шукаємо довжину дуги кривої за формулою (8):

$$\begin{aligned} l &= \int_{-\pi}^{-\pi/2} \sqrt{(2(1 - \cos \varphi))^2 + (2 \sin \varphi)^2} d\varphi = 2 \int_{-\pi}^{-\pi/2} \sqrt{1 - 2 \cos \varphi + \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi} d\varphi = \\ &= 2 \int_{-\pi}^{-\pi/2} \sqrt{2(1 - \cos \varphi)} d\varphi = 2 \int_{-\pi}^{-\pi/2} \sqrt{4 \sin^2 \frac{\varphi}{2}} d\varphi = 2 \int_{-\pi}^{-\pi/2} \left| 2 \sin \frac{\varphi}{2} \right| d\varphi = \\ &= \left| \text{оскільки } \sin \frac{\varphi}{2} < 0 \text{ для } \frac{\varphi}{2} \in [-\pi/2, -\pi/4] \right| = 4 \int_{-\pi}^{-\pi/2} \left(-\sin \frac{\varphi}{2} \right) d\varphi = 8 \cos \frac{\varphi}{2} \Big|_{-\pi}^{-\pi/2} = 4\sqrt{2} \text{ (од.)}. \end{aligned}$$

1.2.3. Об'єми тіл з відомою площею паралельних перерізів.

Розглянемо деяке тіло, аргумент точок якого змінюється від a до b і відома площа будь-якого перерізу цього тіла площиною, яка перпендикулярна до осі Ox (рис.10). Ця площа залежить від розташування січної площини і буде функцією аргументу x : $S = S(x)$.

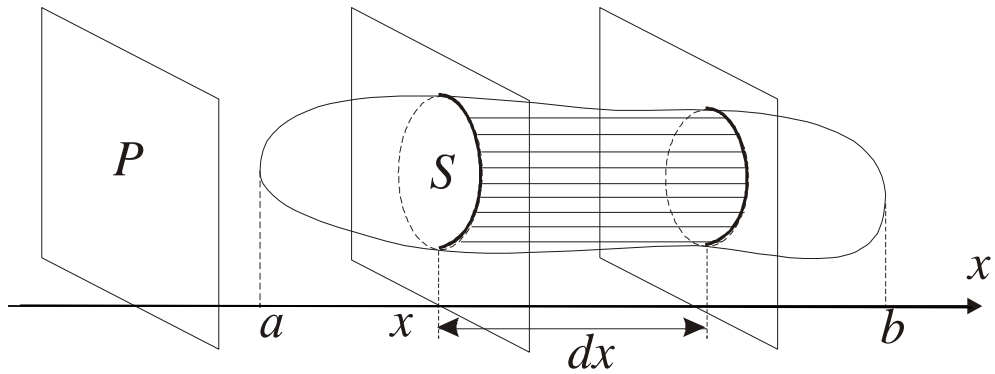


Рис.10

Нехай $S(x)$ – відома неперервна функція від x . Знайдемо об'єм заданого тіла.

Розіб'ємо відрізок $[a; b]$ $x_0 = a; x = x_1; x = x_2, \dots, x_n = b$. Через точки x_i проведемо площини перпендикулярні осі Ox , які розіб'ють тіло на елементарні тіла з об'ємами ΔV_i . У кожному проміжку $x_{i-1} \leq x \leq x_i$ візьмемо довільну точку ξ_i ($i = \overline{1, n}$) і будемо вважати, що для всіх x з проміжку $[x_{i-1}; x_i]$ площа перетину однакова і дорівнює $S(\xi_i)$. Тоді проміжкам $[x_{i-1}; x_i]$ будуть відповідати циліндричні тіла об'єм яких мало відрізняються від ΔV_i . Об'єм елементарного циліндра з площею основи $S(\xi_i)$ та висотою Δx_i

$$\text{дорівнюватиме } S(\xi_i)\Delta x_i. \text{ Тоді маємо } V = \sum_{i=1}^n \Delta V_i \approx \sum_{i=1}^n S(\xi_i)\Delta x_i.$$

Розглядаючи останню суму як інтегральну і переходячи до границі при $\max \Delta x_i \rightarrow 0$, будемо мати:

$$V = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n S(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b S(x)dx. \quad (9)$$

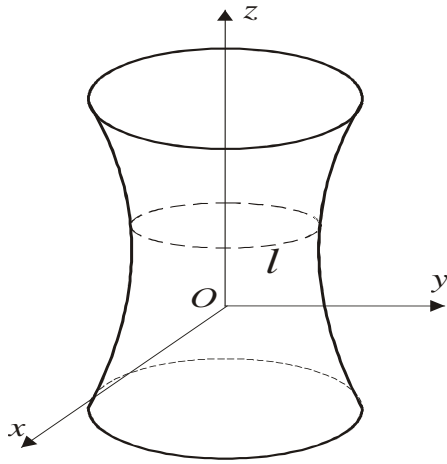
Приклад. Знайдемо об'єм тіла, що обмежене площинами $z = 0$ та $z = 4$ та

однопорожневим гіперболоїдом, який задано рівнянням: $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{36} - \frac{z^2}{16} = 1$.

Розв'язання.

Розглянемо однопорожневий гіперболоїд (Рис.11). Проведемо площину $z = l$ У перерізі матимемо еліпс:

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{36} = 1 + \frac{l^2}{16}.$$



Перейдемо до канонічного рівняння еліпса:

$$\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} = 1,$$

$$\text{де } a_1 = \frac{3\sqrt{16+l^2}}{4}, \quad b_1 = \frac{6\sqrt{16+l^2}}{4},$$

Рис.11

Площа еліпса обчислюється за формулою $S = \pi ab$. І використовуючи формулу (9) отримуємо

$$\begin{aligned} V &= \int_0^h \pi a_1 b_1 dl = \pi \int_0^h \frac{3\sqrt{16+l^2}}{4} \cdot \frac{6\sqrt{16+l^2}}{4} dl = \pi \frac{18}{16} \int_0^h (16+l^2) dl = \\ &= \pi \frac{9}{8} \left(16l \Big|_0^h + \frac{l^3}{3} \Big|_0^h \right) = \pi \frac{9}{8} \left(16 \cdot (4-0) + \frac{(4-0)^3}{3} \right) = 96\pi \text{ (кв.од.)}. \end{aligned}$$

1.2.4.Обчислення об'єму тіла обертання

Нехай на проміжку $[a; b]$ задана неперервна функція $y = f(x)$. Визначити об'єм тіла, що утворилось при обертанні криволінійної трапеції навколо осі Ox . Воно має назву **тіла обертання**. (Рис.12)

Як ми вже знаємо об'єм тіла обчислюється за формулою $V = \int_a^b S(x) dx$.

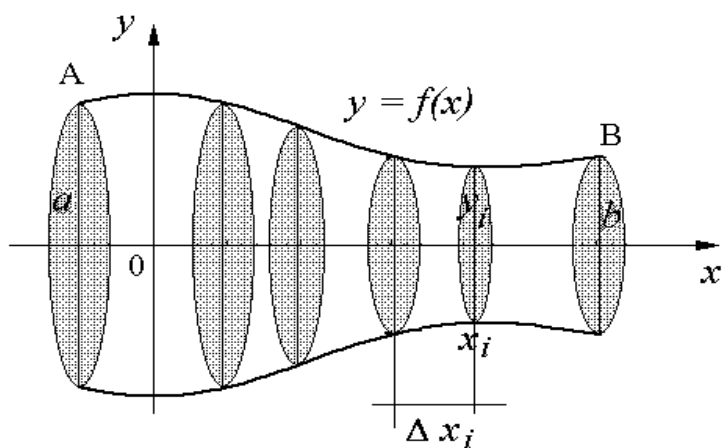


Рис.12

Площа перетину тіла обертання площиною $x = l$ - це коло радіуса $R = f(l)$. Тому площа $S(x) = \pi R^2 = \pi f^2(x)$. Звідки отримуємо

$$V_x = \pi \int_a^b f^2(x) dx. \quad (10)$$

Якщо функція $y = f(x)$ має обернену $x = \varphi(y)$, то об'єм тіла, що отримано шляхом обертання навколо осі Oy криволінійної трапеції, яка обмежена лініями $x = \varphi(y)$; $x = 0$; $y = c$; $y = d$, аналогічним чином, знаходиться за формулою

$$V_y = \pi \int_c^d \varphi^2(y) dy. \quad (11)$$

Приклад. Знайти об'єм тіла, утвореного при обертанні фігури, що обмежена графіком функцій $y = (x - 1)^2$; $x = 0$; $x = 2$; $y = 0$ навколо осі Ox .

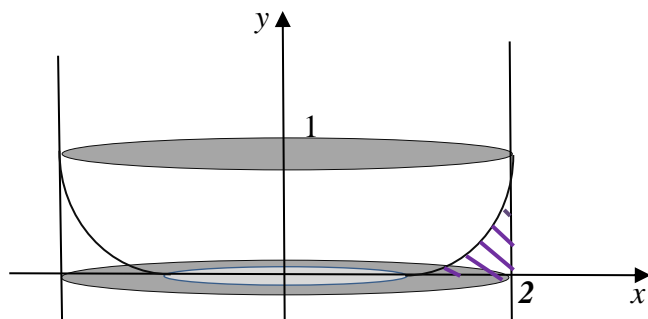


Рис.13

Розв'язання. Як видно з рисунка(Рис.13) об'єм тіла дорівнює різниці двох об'ємів V_1 і V_2 .

V_1 -це об'єм циліндра утвореного при обертанні відрізка прямої $x = 2; (0 \leq y \leq 1)$ навколо осі Oy , радіус циліндра $R = 2$, а висота $H = 1$. Отже $V_1 = \pi R^2 H = 4\pi$ (куб. од.) .

V_2 – об'єм тіла утворений при обертанні навколо осі ординат кривої $y = (x - 1)^2; 1 \leq x \leq 2$. Обчислимо V_2 :

$$V_2 = \pi \int_a^b f^2(x) dx = \pi \int_0^1 ((x - 1)^2)^2 dx = \pi \int_0^4 (x - 1)^4 d(x - 1) = \\ = \pi \frac{(x-1)^5}{5} \Big|_0^1 = \pi \left(\frac{(1-1)^5}{5} - \frac{(0-1)^5}{5} \right) = \frac{\pi}{5} \text{ (куб. од.) .}$$

А тому $V = V_1 - V_2 = 4\pi - \frac{\pi}{5} = \frac{19\pi}{5}$ (куб. од.) .

1.2.5. Площа поверхні тіла обертання

Площа поверхні тіла обертання (Рис.12) обчислюється за формулою

$$P_{ox} = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx \quad (12)$$

Якщо крива, що обертається навколо осі Ox , задана параметрично $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, t \in [\alpha, \beta]$, то

формула набуває вигляду

$$P_{Ox} = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} y(t) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt. \quad (13)$$

Площа поверхні тіла, утвореного обертанням кривої $\rho = \rho(\varphi); \varphi \in [\alpha; \beta]$ навколо полярної осі обчислюється за формулою

$$P = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} \rho(\varphi) \sin \varphi \sqrt{\rho^2(\varphi) + (\rho'(\varphi))^2} d\varphi \quad (14)$$

Якщо у співвідношенні для P_{Ox} формально замінити x на y , то одержимо площу поверхні тіла, що отримано шляхом обертання навколо осі Oy криволінійної трапеції, яка обмежена лініями $x = \varphi(y)$ (де $\varphi(y)$ – функція обернена до $f(x)$), $x = 0$; $y = c$; $y = d$, тобто:

$$P_{Oy} = 2\pi \int_a^b \varphi(y) \sqrt{1 + (\varphi'(y))^2} dy \quad (15)$$

Приклад. Знайти площу поверхні утвореної при обертанні астроїди $\begin{cases} x = a \cos^3 t \\ y = a \sin^3 t \end{cases}; 0 \leq t \leq$

2π навколо осі Ox

Розв'язання. Осі Ox та Oy є осями симетрії тому тіло яке утворюється обертанні всієї астроїди і її верхньої половини є одним і тим самим тілом. Крім того частина утворена від'ємними значеннями x дорівнює частині, що утворена $x \geq 0$.

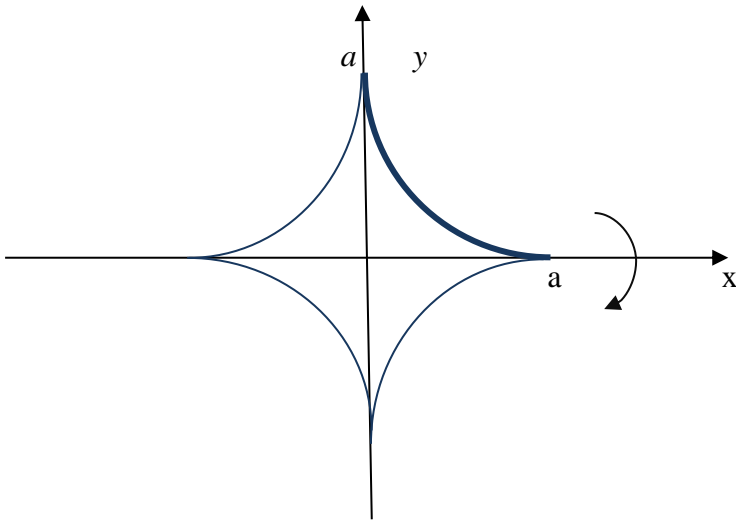


Рис.14

Тому знайдемо площу поверхні тіла, що утворюється при обертанні однієї четвертої астрои́ди ($x \geq 0; y \geq 0$) і подвоїмо її. Знайдемо межі інтегрування: $x = 0$, отже $a \cos^3 t = 0$ звідки $\cos t = 0$, а тому $t = \pi/2$. Аналогічно знаходимо друге значення, коли $x = a$, то $t = 0$.

$$\begin{aligned}
 P &= 2P_1 = |P = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} x(t) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt| = \\
 &= 4\pi \int_0^{\pi/2} (a \sin^3 t \sqrt{(3a \cos^2 t (-\sin t))^2 + (3a \sin^2 t \cos t)^2}) dt = \\
 &= 12\pi a^2 \int_0^{\pi/2} \sin^3 t \sqrt{\cos^4 t \sin^2 t + \sin^4 t \cos^2 t} dt = 12\pi a^2 \int_0^{\pi/2} \sin^3 t \cos t dt = \\
 &= 12\pi a^2 \int_0^{\pi/2} \sin^4 t ds \sin t = 12\pi a^2 \frac{\sin^5 t}{5} \Big|_0^{\pi/2} = \frac{12}{5} \pi a^2 (\text{кв. од.})
 \end{aligned}$$

2. Невласні інтеграли.

2.1. Невласні інтеграли I роду.

Означення: Нехай $f(x)$ визначена і неперервна для всіх $x \in [a; +\infty)$. Тоді якщо для всіх $A > a$ існує визначений інтеграл $\int_a^A f(x) dx$ і при зміні A він буде неперервною функцією

A . Границя

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A f(x) dx \tag{16}$$

називається **невласним інтегралом I роду** і позначається $\int_a^{+\infty} f(x)dx$.

Отже, з означення випливає: $\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_a^A f(x)dx$.

Якщо границя існує і скінченна, то кажуть, що невластний інтеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ є **збіжним**.

Якщо ж границя (1) не існує або нескінченна, то кажуть, що невластний інтеграл **розбігається**.

Аналогічно визначається невластний інтеграл на інтервалі $(-\infty; b]$: $\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{B \rightarrow -\infty} \int_B^b f(x)dx$,

і на інтервалі $(-\infty, \infty)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^c f(x)dx + \int_c^{+\infty} f(x)dx = \lim_{B \rightarrow -\infty} \int_B^c f(x)dx + \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_c^A f(x)dx, \quad (17)$$

де c - довільне число. Інтеграл (2) буде збіжним, лише коли збігаються обидва інтеграли.

З означення невластного інтегралу I роду випливає метод його знаходження.

Приклад . Обчислити невластний інтеграл або встановити розбіжність:

$$1) \int_3^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 6x - 7}.$$

За означенням

$$\begin{aligned} \int_3^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 6x + 5} &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_3^A \frac{dx}{(x+3)^2 - 4} = \frac{1}{4} \lim_{A \rightarrow +\infty} \ln \left| \frac{x+3-2}{x+3+2} \right| \Big|_3^A = \frac{1}{4} \lim_{A \rightarrow +\infty} \ln \left| \frac{A+1}{A+5} \right| - \frac{1}{4} \ln \frac{1}{2} = \\ &= \frac{1}{4} \lim_{A \rightarrow +\infty} \ln \left| 1 + \frac{-4}{A+5} \right| - \frac{1}{4} \ln \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \ln 2. \end{aligned}$$

$$2) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{9+x^2}.$$

За означенням

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} &= \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2} + \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{B \rightarrow -\infty} \int_B^0 \frac{dx}{9+x^2} + \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A \frac{dx}{9+x^2} = \frac{1}{3} \left(\lim_{B \rightarrow -\infty} \arctg x/3 \Big|_B^0 + \right. \\ \lim_{A \rightarrow +\infty} \arctg x/3 \Big|_0^A &= \left. = \frac{1}{3} \left(\lim_{B \rightarrow -\infty} (\arctg 0 - \arctg B) + \lim_{A \rightarrow +\infty} (\arctg A - \arctg 0) \right) = -\frac{1}{3} \lim_{B \rightarrow -\infty} \arctg B + \right. \\ &+ \frac{1}{3} \lim_{A \rightarrow +\infty} \arctg A = \left. = -\left(-\frac{\pi}{6}\right) + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}. \right. \end{aligned}$$

$$3) \int_2^{\infty} \frac{dx}{x(3 \ln x - 4)} .$$

За означенням

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{3 \ln x + 4}} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_2^A \frac{dx}{x\sqrt{3 \ln x + 4}} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_2^A \frac{d \ln x}{\sqrt{3 \ln x + 4}} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{1}{3} \sqrt{3 \ln x + 4} \Big|_2^A = \frac{1}{3} \lim_{A \rightarrow +\infty} \sqrt{3 \ln A + 4} - \frac{1}{3} \sqrt{3 \ln 2 + 4} = \infty, \text{ оскільки при } A \rightarrow +\infty \ln A \rightarrow +\infty. \text{ Отже, невластний інтеграл є розбіжним.}$$

2.2. Невластний інтеграл II роду

Означення. Нехай $f(x)$ неперервна на проміжку $(a, b]$ і має нескінченний розрив при

$x = a$. Границя $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx$ називається **невластним інтегралом II роду** і позначається

$\int_a^b f(x) dx$. Отже, за означенням,

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx . \quad (18)$$

Якщо границя в правій частині (3) існує і скінченна, то невластний інтеграл II роду називається **збіжним**, в іншому випадку – **розбіжним**.

Аналогічно, якщо функція $f(x)$ має нескінченний розрив при $x = b$, невластний інтеграл визначається як

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx . \quad (19)$$

Якщо ж $f(x)$ має розрив у внутрішній точці $c \in (a, b)$, то невластний інтеграл визначається як

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x) dx + \lim_{\eta \rightarrow +0} \int_{c+\eta}^b f(x) dx . \quad (20)$$

Причому, невластний інтеграл вважається збіжним, якщо обидві границі в правій частині скінченні.

Приклад . Обчислити невластний інтеграл II роду або встановити його розбіжність:

$$1. \int_0^1 \frac{x^3 + 2x + 1}{\sqrt{x}} dx .$$

При $x = 0$ підінтегральна функція має нескінченний розрив. За означенням (3)

$$\int_0^1 \frac{x^3 + 2x + 1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{0+\varepsilon}^1 \left(x^{\frac{5}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}} \right) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left(\frac{2}{7} x^{\frac{7}{2}} + \frac{4}{3} x^{\frac{3}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}} \right) \Big|_{\varepsilon}^1 =$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left(\frac{2}{7} + \frac{4}{3} + 2 - \frac{2}{7} \varepsilon^{\frac{7}{2}} - \frac{4}{3} \varepsilon^{\frac{3}{2}} - 2\varepsilon^{\frac{1}{2}} \right) = \frac{76}{21}. \text{ Інтеграл є збіжним.}$$

$$2. \int_{1.5}^2 \frac{dx}{x^2 - 3x + 2}.$$

Підінтегральна функція $\frac{1}{x^2 - 3x + 2} = \frac{1}{(x-1)(x-2)}$ має нескінченний розрив на проміжку

[1.5; 2] в точці $x = 2$. Отже, за (4) маємо:

$$\begin{aligned} \int_{1.5}^2 \frac{dx}{x^2 - 3x + 2} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{1.5}^{2-\varepsilon} \frac{1}{(x-1)(x-2)} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{1.5}^{2-\varepsilon} \left(-\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} \right) dx = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left(\ln \left| \frac{x-2}{x-1} \right| \right) \Big|_{1.5}^{2-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left(\ln \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} - \ln 1 \right) = -\infty \text{ (врахували, що } \ln(+0) \rightarrow -\infty \text{)}. \text{ Таким чином,} \end{aligned}$$

інтеграл розбіжний.

$$3. \int_{-1}^2 \frac{e^x dx}{\sqrt[3]{e^x - 1}}.$$

Функція $\frac{e^x}{\sqrt[3]{e^x - 1}}$ має на $[-1, 2]$ нескінченний розрив в точці $x = 0$. Тому за (5):

$$\begin{aligned} \int_{-1}^2 \frac{e^x dx}{\sqrt[3]{e^x - 1}} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{-1}^{0-\varepsilon} \frac{e^x dx}{\sqrt[3]{e^x - 1}} + \lim_{\eta \rightarrow +0} \int_{0+\eta}^2 \frac{e^x dx}{\sqrt[3]{e^x - 1}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left(\frac{3}{2} \sqrt[3]{(e^x - 1)^2} \Big|_{-1}^{0-\varepsilon} \right) + \\ &+ \lim_{\eta \rightarrow +0} \left(\frac{3}{2} \sqrt[3]{(e^x - 1)^2} \Big|_{0+\eta}^2 \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left(\frac{3}{2} \sqrt[3]{(e^{-\varepsilon} - 1)^2} \right) - \lim_{\eta \rightarrow +0} \left(\frac{3}{2} \sqrt[3]{(e^\eta - 1)^2} \right) + \frac{3}{2} \sqrt[3]{(e^2 - 1)^2} - \frac{3}{2} \sqrt[3]{(e^{-1} - 1)^2} = \\ &\frac{3}{2} \sqrt[3]{(e^2 - 1)^2} - \frac{3}{2} \sqrt[3]{(e^{-1} - 1)^2}. \text{ Інтеграл є збіжним.} \end{aligned}$$

3. Наближене обчислення визначених інтегралів

Найкращім способом обчислення визначеного інтеграла є формула Ньютона-Лейбніца. Але що робити, якщо невизначений інтеграл - «інтеграл, що не береться», тобто його первісну не можна представити у вигляді скінченної суми елементарних функцій. В таких випадках зручно використовувати формули для наближеного обчислення визначених інтегралів, які базуються на чисельних методах обчислення визначеного інтеграла.

3.1. Формула прямокутників. Найпростіший спосіб наближеного обчислення визначеного інтеграла впливає з його означення як границі інтегральної суми. Нехай треба обчислити визначений інтеграл від неперервної на відрізку $[a, b]$ функції $y = f(x)$.

Поділимо відрізок $[a; b]$ на рівні частини точками x_i :

$$x_i = a + i \frac{b-a}{n} \quad (i = \overline{1, n}).$$

Тоді

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i)$$

де $x_i = 0,5(x_{i-1} + x_i)$ – середина i -го інтервалу, а знак \approx означає наближену рівність.

Одержаний вираз називається **формулою прямокутників**. У випадку, який зображено на рис. 15, площа криволінійної трапеції, що обмежена кривою $y = f(x)$ та прямими $x = a$, $x = b$ та $y = 0$, наближено дорівнює сумі площ прямокутників.

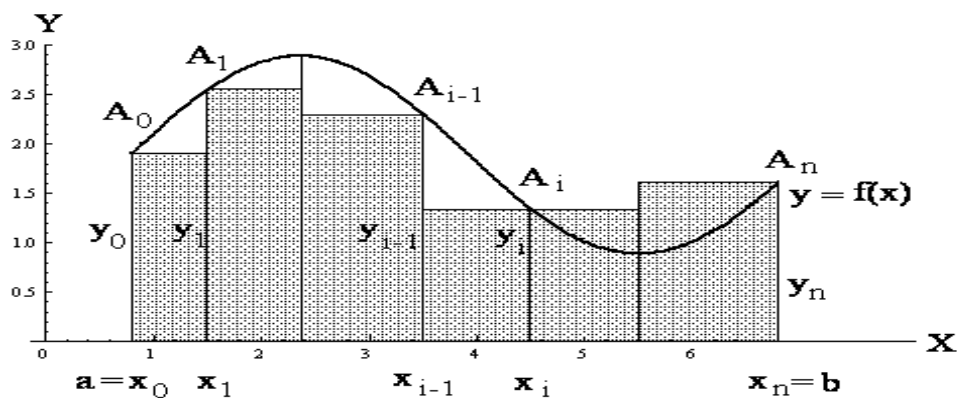


Рис. 15.

Оскільки для функції $y = f(x)$, неперервної на $[a; b]$, визначається границя при $n \rightarrow \infty$ і

$\Delta x_i = \frac{b-a}{n} \rightarrow 0$, то можна стверджувати, що помилка при обчисленні інтеграла буде тим

меншою, чим більше n . **Абсолютна похибка** Δ при цьому підраховується за формулою:

$$\Delta = \left| \int_a^b f(x) dx - S_n \right|,$$

де

$$S_n = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i^*).$$

Відносна похибка визначається як відношення абсолютної похибки до обчисленого значення і надається у відсотках.

3.2.Формула трапецій. Розглянемо інший спосіб наближеного обчислення визначеного інтеграла, який призводить до формули трапецій. Як і в попередньому випадку відрізок $[a, b]$ ділиться на n рівних частин точками x_i . Значення функції в точках x_i , тобто ординати $y_i = f(x_i)$, будемо з'єднувати прямими лініями (рис. 16).

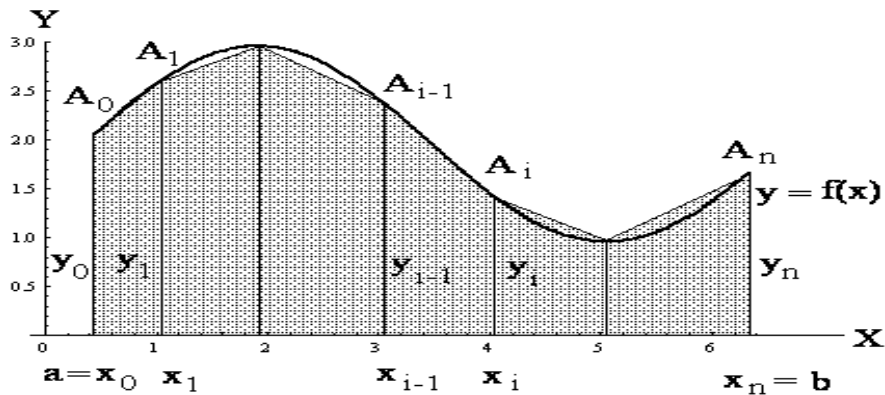


Рис. 16.

Кожна частина площі ΔS_i під кривою $f(x)$ буде наближено дорівнювати площі трапеції з середньою лінією

$$\frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2}$$

і висотою $\Delta x_i = \frac{b-a}{n}$. Вся площа криволінійної трапеції дорівнює $\sum_{i=1}^n \Delta S_i$ і

наближено дорівнювати сумі площ усіх трапецій. Таким чином одержуємо:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &\approx \frac{b-a}{n} \left(\frac{f(x_0) + f(x_1)}{2} + \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} + \dots + \frac{f(x_{n-1}) + f(x_n)}{2} \right) = \\ &= \frac{b-a}{2n} \left(f(x_0) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n) \right). \end{aligned}$$

Це і є **формула трапецій**. Формула, як і в попередньому випадку, буде тим точнішою, чим більше число n .

Якщо функція $f(x)$ має неперервну обмежену похідну $f'(x)$, таку, що задовольняє нерівність $|f'(x)| \leq M_1$ (де M_1 – додатне число), то формул прямокутників і трапецій абсолютну похибку можна визначити нерівністю

$$\Delta \leq \frac{M_1(b-a)^2}{4n}.$$

Для функцій, що мають обмежену другу похідну $|f''(x)| \leq M_2$, (M_2 – додатне число), абсолютна похибка має наступну оцінку:

$$\Delta \leq \frac{M_2(b-a)^2}{12n^2}.$$

3.3.Формула Сімпсона. Поділимо відрізок $[a, b]$ на парне число частин $n = 2k$.

(рис. 17). Площу криволінійної трапеції, що відповідає першим двом відрізкам $[x_0, x_1]$ та $[x_1, x_2]$, яка обмежується лініями $x = x_0, x = x_2, y = 0$ та $y = f(x)$, замінимо на площу, яка обмежена замість лінії $y = f(x)$ -параболою, що проведена через точки $A_0(x_0, y_0)$, $A_1(x_1, y_1)$ та $A_2(x_2, y_2)$, з віссю симетрії, яка паралельна осі Oy .

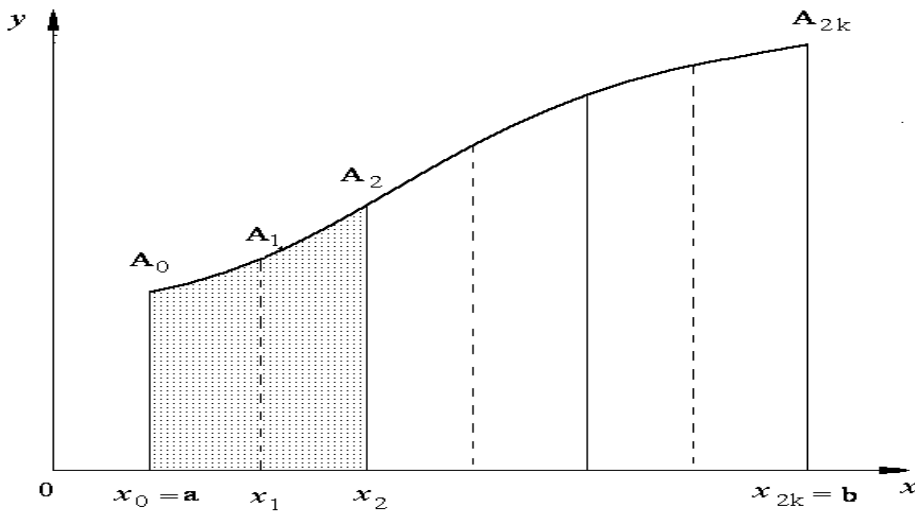


Рис. 17.

Тепер будемо розглядати площу елементарної криволінійної трапеції, яка зверху обмежена параболою $y = ax^2 + bx + c$. Аналогічні параболи будемо і для всіх інших пар відрізків. Наближене значення інтеграла дорівнює сумі площ під цими параболами. Площа криволінійної трапеції, яка обмежена зверху параболою, буде:

$$S = \frac{h}{3}(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)).$$

де h – довжина відрізка $[x_0, x_1]$, а $[-h, +h]$.- проміжок інтегрування (рис. 18)

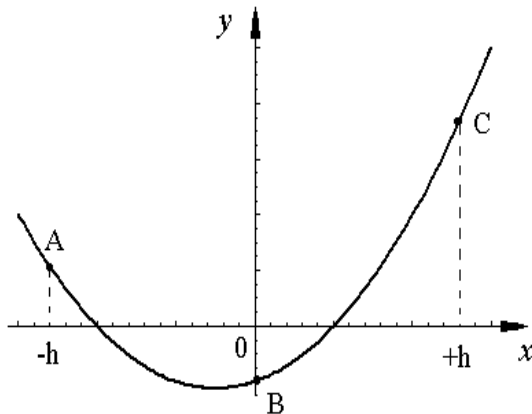


Рис. 18.

Наступні співвідношення надають зв'язок між коефіцієнти параболі a , b , c та значення функції $y = f(x)$ в точках с абсцисами x_0 , x_1 та x_2 :

$$x_0 = -h: y_0 = f(x_0) = ah^2 - bh + c;$$

$$x_1 = 0: y_1 = f(x_1) = c;$$

$$x_2 = h: y_2 = f(x_2) = ah^2 + bh + c$$

Якщо відомі коефіцієнти a , b , c , то площу криволінійної трапеції, що обмежена параболою, знаходимо за формулою:

$$S = \int_{-h}^h (ax^2 + bx + c) dx = \left(a \frac{x^3}{3} + b \frac{x^2}{2} + cx \right) \Big|_{-h}^h = \frac{h}{3} (2ah^2 + 6c).$$

З урахуванням значень функції у точках с абсцисами x_0 , x_1 та x_2 випливає, що $2ah^2 + 6c = f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)$. Отже, $S = \frac{h}{3} (f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2))$.

За формулою для знаходження площі елементарних криволінійних трапецій, що обмежені параболою, при умові $h = \Delta x = \frac{b-a}{2k}$, отримуємо наступні рівності:

$$\int_{a=x_0}^{x_2} f(x) dx = \frac{\Delta x}{3} (f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)),$$

$$\int_{x_2}^{x_4} f(x) dx = \frac{\Delta x}{3} (f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)),$$

.....

$$\int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}=b} f(x) dx = \frac{\Delta x}{3} (f(x_{2k-2}) + 4f(x_{2k-1}) + f(x_{2k})).$$

Складемо ліві та праві частини цих рівностей, отримаємо:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{\Delta x}{3} (f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \dots + 2f(x_{2k-2}) + 4f(x_{2k-1}) + f(x_{2k}))$$

або

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6k} [f(x_0) + f(x_{2k}) + 2\sum_{i=2}^n f(x_{2i-2}) + 4\sum_{i=1}^n f(x_{2i-1})].$$

Отримана формула є **формулою Сімпсона**, або **формулою парабол**.

Абсолютна похибка формули оцінюється нерівністю :

$$\Delta \leq \frac{(b-a)^5}{180n^4} M_3,$$

де M_3 – найбільше значення $|y^{(4)}|$ в інтервалі $[a, b]$.

Таким чином, з трьох формул (формули прямокутників, формули трапецій, формули Сімпсона) формула Сімпсона при тому ж самому n ($n = 2k \rightarrow \infty$) дає найкраще наближення до шуканого інтеграла.

Приклад. Обчислити інтеграл $\int_0^4 x^2 dx$,

- застосувавши безпосереднє інтегрування
- застосувавши формулами прямокутників ($n = 10$)
- застосувавши формулами трапецій ($n = 10$)
- застосувавши формулами Сімпсона ($n = 10$)
- знайти абсолютні та відносні похибки трьох останніх обчислень.

Розв'язання.

- Знайдемо визначений інтеграл за формулою Ньютона-Лейбніца:

$$\int_0^4 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^4 = \frac{64}{3} \approx 21,33.$$

- Наближені методи.

Для застосування формул наближеного числення маємо:

$$y_i = f(x_i) = x_i^2, \quad h = \frac{b-a}{n} = \frac{4-0}{10} = 0,4.$$

Складемо таблицю значень функції для кожної межі інтервалу розбиття:

x_i	0	0,4	0,8	1,2	1,6	2	2,4	2,8	3,2	3,6	4
y_i	0	0,16	0,64	1,44	2,56	4	5,76	7,84	10,24	12,96	16

Формула прямокутників.

За формулою прямокутників, якщо приймати за висоту прямокутника значення функції в лівій точці відрізка $[x_{i-1}; x_i]$, отримаємо:

$$\int_0^4 x^2 dx \approx 0,4(0 + 0,16 + 0,64 + 1,44 + 2,56 + 4 + 5,76 + 7,84 + 10,24 + 12,96) = 18,24.$$

За формулою прямокутників, якщо приймати за висоту прямокутника значення функції в правій точці відрізка $[x_{i-1}; x_i]$, отримаємо

$$\int_0^4 x^2 dx \approx 0,4(0,16 + 0,64 + 1,44 + 2,56 + 4 + 5,76 + 7,84 + 10,24 + 12,96 + 16) = 24,64.$$

Формула трапецій

$$\int_0^4 x^2 dx \approx 0,4 \left(\frac{0+16}{2} + 0,16 + 0,64 + 1,44 + 2,56 + 4 + 5,76 + 7,84 + 10,24 + 12,96 \right) = 21,44.$$

Формула парабол дає наступний результат:

$$\int_0^4 x^2 dx \approx \frac{0,4}{3} (0 + 16 + 4(0,16 + 1,44 + 4 + 7,84 + 12,96) + 2(0,64 + 2,56 + 5,76 + 10,24)) = 21,33.$$

- Похибки .

При обчисленні інтеграла за формулою прямокутників абсолютна похибка (за лівою межею) становить:

$$\Delta = |18,24 - 21,33| = 3,09,$$

а відносна – дорівнює:

$$\delta = \frac{3,09}{21,33} \cdot 100\% = 14,49\%.$$

При обчисленні інтеграла за формулою прямокутників абсолютна та відносна похибки (за правою межею) становлять:

$$\Delta = |24,64 - 21,33| = 3,31 \text{ та } \delta = \frac{3,31}{21,33} \cdot 100\% = 15,52\%.$$

При обчисленні інтеграла за формулою трапецій маємо:

$$\Delta = |21,44 - 21,33| = 0,11 \text{ та } \delta = \frac{0,11}{21,33} \cdot 100\% = 0,52\%.$$

При обчисленні інтеграла за формулою парабол отримуємо:

$$\Delta = |21,33 - 21,33| = 0 \text{ та } \delta = 0\%.$$

4.Завдання для розрахункової роботи.

Варіант 1.

1. Знайти площу плоскої фігури , обмежену лініями
 - a) $y = (x - 2)^3; y = 4x - 8$
 - b) $\begin{cases} x = 4(t - \sin t) \\ y = 4(1 - \cos t) \end{cases}, y = 0$; перша арка
 - c) $\rho = 4\sin 3\varphi; \rho = 2; (\rho \geq 2)$
2. Знайти довжину дуги кривої
 - a) $y = \ln x; \sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{15}$
 - b) $\begin{cases} x = 3(2\cos t - \cos 2t) \\ y = 3(2\sin t - \sin 2t) \end{cases}; 0 \leq t \leq \pi$
3. Знайти об'єм тіла , утвореного при обертанні фігури обмеженої графіками функцій $y = 2x - x^2; y = 2 - x$ навколо осі Ox .
4. Обчислити або довести розбіжність

$$\int_0^{\infty} x \sin x dx$$

Варіант 2.

1. Знайти площу плоскої фігури , обмежену лініями
 - a) $y = \sqrt{e^x - 1}; y = 0; x = \ln 2$
 - b) $\begin{cases} x = 8\sqrt{2}\cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases}$
 - c) $\rho = \cos \varphi; \rho = 4\cos \varphi;$
2. Знайти довжину дуги кривої
 - a) $y = e^x + 6; \ln \sqrt{8} \leq x \leq \ln \sqrt{15}$
 - b) $\begin{cases} x = e^t(\cos t + \sin t) \\ y = e^t(\cos t - \sin t) \end{cases}; 0 \leq t \leq \pi$
3. Знайти об'єм тіла , утвореного при обертанні фігури обмеженої графіками функцій $y = x^3; y = x$ навколо осі Oy .
4. Обчислити або довести розбіжність

$$\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$$

Варіант 3.

1. Знайти площу плоскої фігури, обмежену лініями

a) $y = \cos^5 x \cdot \sin 2x; y = 0; (0 \leq x \leq \frac{\pi}{2})$

b) $\begin{cases} x = \sqrt{2} \cos t \\ y = 4\sqrt{2} \sin t \end{cases}; x \geq 0$

c) $\rho = 4 \cos 4\varphi$

2. Знайти довжину дуги кривої

a) $y = 2 + \arcsin \sqrt{x} + \sqrt{x - x^2}; 1/4 \leq x \leq 1$

b) $\begin{cases} x = (t^2 - 2) \sin t + 2t \cos t \\ y = (2 - t^2) + 2t \sin t \end{cases}; 0 \leq t \leq \pi$

3. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1; z = 0; z = 2$$

4. Обчислити або довести розбіжність

$$\int_e^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$$

Варіант 4.

1. Знайти площу плоскої фігури, обмежену лініями

a) $y = \frac{x}{1+\sqrt{x}}; y = 0; x = 1$

b) $\begin{cases} x = 3 \cos t \\ y = 3 \sin t \end{cases}; x \leq 0; y \geq 0$

c) $\rho = 3 - \cos \varphi$

2. Знайти довжину дуги кривої

a) $y = \sqrt{1 - x^2} + \arcsin x; 0 \leq x \leq 7/9$

b) $\begin{cases} x = 4(\cos t + t \sin t) \\ y = 4(\sin t - t \cos t) \end{cases}; 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$

3. Знайти об'єм тіла, утвореного при обертанні фігури обмеженої графіками функцій

$$y = \sqrt[3]{y - 2}; x = 1; y = 1 \text{ навколо осі } Ox$$

4. Обчислити або довести розбіжність

$$\int_0^1 x \ln x dx$$

Варіант 5.

1. Знайти площу плоскої фігури, обмежену лініями

a) $y = \frac{1}{x}; y = x; x = 2$

b) $\begin{cases} x = 2\cos^3 t \\ y = 3\sin^3 t \end{cases}; x \geq 0; y \geq 0$

c) $\rho = \frac{1}{2} + \cos\varphi$

2. Знайти довжину дуги кривої

a) $y = \ln \cos x; 0 \leq x \leq \pi/6$

b) $\begin{cases} x = 4(t - \sin t) \\ y = 4(1 - \cos t) \end{cases}; \pi/2 \leq t \leq 3\pi/2$

3. Знайти об'єм тіла, утвореного при обертанні фігури обмеженої графіками функцій $y = x^2 - 2x + 1; x = 2; y = 0$ навколо осі Oy

4. Обчислити або довести розбіжність

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2(x+1)}$$

Варіант 6.

1. Знайти площу плоскої фігури, обмежену лініями

a) $y = 2x - x^2 + 3; y = x^2 - 4x + 3$

b) $\begin{cases} x = 8(t - \sin t) \\ y = 8(1 - \cos t) \end{cases}; y = 0; x = 8\pi; (x \leq 8\pi)$

c) $\rho = \cos\varphi + \sin\varphi$

2. Знайти довжину дуги кривої

a) $y = \sqrt{x - x^2} - \arccos\sqrt{x} + 5$

b) $\begin{cases} x = 4\cos^3 t \\ y = 4\sin^3 t \end{cases}; \pi/6 \leq t \leq \pi/4$

3. Знайти об'єм тіла, утвореного при обертанні фігури обмеженої графіками функцій $y = -x^2 + 5x - 6; y = 0$ навколо осі Ox

4. Обчислити або довести розбіжність

$$\int_2^{\infty} \frac{\ln x}{x} dx$$

Варіант 7.

1. Знайти площу плоскої фігури, обмежену лініями

a) $x = 4 - y^2; x = y^2 - 2y$

b) $\begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 2\sin t \end{cases}; x \leq 0; y \geq 0$

c) $\rho = \sin\varphi; \rho = 2\sin\varphi$

2. Знайти довжину дуги кривої

a) $y = 1 - \ln\cos x; 0 \leq x \leq \pi/6$

b) $\begin{cases} x = 3(\cos t + t\sin t) \\ y = 3(\sin t - t\cos t) \end{cases}; 0 \leq t \leq \pi/3$

3. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями

$$z = x^2 + 4y^2; z = 2$$

4. Обчислити або довести розбіжність

$$\int_{-1}^1 \frac{x-1}{\sqrt[3]{x^5}} dx$$

Варіант 8.

1. Знайти площу плоскої фігури, обмежену лініями

a) $y = (x-1)^2; y^2 = x-1$

b) $\begin{cases} x = 4\sqrt{2}\cos^3 t \\ y = \sqrt{2}\sin^3 t \end{cases}; x \geq 0; y \geq 0$

c) $\rho = 3 + 2\sin\varphi$

2. Знайти довжину дуги кривої

a) $y = \ln(x^2 - 1); 2 \leq x \leq 3$

b) $\begin{cases} x = 3,5(2\cos t - \cos 2t) \\ y = 3,5(2\sin t - \sin 2t) \end{cases}; 0 \leq t \leq \pi/2$

3. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{36} = -1; z = 12$$

4. Обчислити або довести розбіжність

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 2}$$

Варіант 9.

1. Знайти площу плоскої фігури, обмежену лініями

a) $y = 1 - x^2; y = 4x - 2x^2$

b) $\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 3\sin t \end{cases}; x \geq 0; y \geq 0$

c) $\rho = 5 + 2\cos\varphi$

2. Знайти довжину дуги кривої

a) $y = \ln 7 - \ln x; \sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{8}$

b) $\begin{cases} x = (t^2 - 2)\sin t + 2t\cos t \\ y = (2 - t^2)\cos t + 2t\sin t \end{cases}; 0 \leq t \leq 2\pi$

3. Знайти об'єм тіла, утвореного при обертанні фігури обмеженої графіками функцій $y = xe^x; y = 0; x = 1$ навколо осі Ox

4. Обчислити або довести розбіжність

$$\int_4^{\infty} \frac{dx}{(5x-1)\ln(5x-1)}$$

Варіант 10.

1. Знайти площу плоскої фігури, обмежену лініями

a) $y = 2x - x^2; y = 2 - x; x = 0$

b) $\begin{cases} x = 2(t - \sin t) \\ y = 3(1 - \cos t) \end{cases}; y = 0; \text{(перша арка)}$

c) $\rho = 1 - 3\sin\varphi$

2. Знайти довжину дуги кривої

a) $y = e^x + e; \ln\sqrt{3} \leq x \leq \ln\sqrt{15}$

b) $\begin{cases} x = e^t(\cos t - \sin t) \\ y = e^t(\cos t + \sin t) \end{cases}; \pi/6 \leq t \leq \pi/4$

3. Знайти об'єм тіла, утвореного при обертанні фігури обмеженої графіками функцій $y = \ln x; x = 2; y = 0$ навколо осі Oy

4. Обчислити або довести розбіжність

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+x^4} dx$$

Варіант 11.

1. Знайти площу плоскої фігури, обмежену лініями

a) $x = \sqrt[3]{y-2}; x = 1; y = 1$

b) $\begin{cases} x = 2\cos^3 t \\ y = 3\sin^3 t \end{cases}; x \geq 0; y \leq 0$

c) $\rho = \cos\varphi; \rho = \sin\varphi$

2. Знайти довжину дуги кривої

a) $y = \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{-x} + 3; 0 \leq x \leq 2$

b) $\begin{cases} x = \frac{1}{2}\cos t - \frac{1}{4}\cos 2t \\ y = \frac{1}{2}\sin t - \frac{1}{4}\sin 2t \end{cases}; \pi/2 \leq t \leq 2\pi/3$

3. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1; z = 0; z = 2$$

4. Обчислити або довести розбіжність

$$\int_3^{\infty} \frac{dx}{(3x-2)^3 \sqrt{\ln(3x-2)}}$$

Варіант 12.

1. Знайти площу плоскої фігури, обмежену лініями

a) $y^2 = x - 2; y = 0; y = x^3; y = 1$

b) $\begin{cases} x = 4\cos t \\ y = 3\sin t \end{cases}; x \leq 0; y \geq 0$

c) $\rho = \frac{1}{2} - \cos\varphi$

2. Знайти довжину дуги кривої

a) $y = \arccos\sqrt{x} - \sqrt{x-x^2} + 4; 0 \leq x \leq 1/2$

b) $\begin{cases} x = 6\cos^3 t \\ y = 6\sin^3 t \end{cases}; 0 \leq t \leq \pi/2$

3. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями

$$x^2 + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{9} = -1; z = 5$$

4. Обчислити або довести розбіжність

$$\int_{-1}^1 \frac{3x^2 + 4x + 5}{\sqrt[5]{x^3}} dx$$

Варіант 13.

- Знайти площу плоскої фігури, обмежену лініями
 - $y = 2x - x^2; y = 4x - 2x^2$
 - $\begin{cases} x = 2(t - \sin t) \\ y = 2(1 - \cos t) \end{cases}; y = 0; \text{ (перша арка)}$
 - $\rho = 6\cos 3\varphi; \rho = 3; (\rho \geq 3)$
- Знайти довжину дуги кривої
 - $y = \ln \frac{5}{2x}; \sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{8}$
 - $\begin{cases} x = 2(2\cos t - \cos 2t) \\ y = 2(2\sin t - \sin 2t) \end{cases}; 0 \leq t \leq \pi/3$
- Знайти об'єм тіла, утвореного при обертанні фігури обмеженої графіками функцій $y = e^{1-x}; y = 0; x = 0; x = 1$ навколо осі Ox
- Обчислити або довести розбіжність

$$\int_0^2 \frac{dx}{x^2 - 4x + 3}$$

Варіант 14.

- Знайти площу плоскої фігури, обмежену лініями
 - $y = \arccos x; y = \arcsin x; x = 0$
 - $\begin{cases} x = 2\cos^3 t \\ y = 2\sin^3 t \end{cases}; x \geq 0; y \leq 0$
 - $\rho = \frac{1}{2} + \sin \varphi$
- Знайти довжину дуги кривої
 - $y = \frac{x^2}{4} - \frac{\ln x}{2}; 1 \leq x \leq 2$
 - $\begin{cases} x = 2\cos^3 t \\ y = 2\sin^3 t \end{cases}; 0 \leq t \leq \pi/6$
- Знайти об'єм тіла, утвореного при обертанні фігури обмеженої графіками функцій $y = (x - 1)^2; y = 1$ навколо осі Oy
- Обчислити або довести розбіжність

$$\int_0^3 \frac{dx}{x^2 - 5x + 4}$$

Варіант 15.

1. Знайти площу плоскої фігури, обмежену лініями

a) $y = 2 - \sqrt{4 - x^2}; y = 2$

b) $\begin{cases} x = 4\cos t \\ y = 6\sin t \end{cases}; x \leq 0; y \leq 0$

c) $\rho = \sin 6\varphi$

2. Знайти довжину дуги кривої

a) $y = 2 - e^x; \ln\sqrt{3} \leq x \leq \ln\sqrt{8}$

b) $\begin{cases} x = 2(\sin t - t\cos t) \\ y = 2(\cos t + t\sin t) \end{cases}; 0 \leq t \leq \pi/3$

3. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями

$$x^2 + \frac{y^2}{4} - z^2 = -1; z = 5$$

4. Обчислити або довести розбіжність

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{x^2 + 9} dx$$

Варіант 16.

1. Знайти площу плоскої фігури, обмежену лініями

a) $x = 2 + \sqrt{4 - y^2}; x = 2$

b) $\begin{cases} x = 10(t - \sin t) \\ y = 10(1 - \cos t) \end{cases};$ перша арка

c) $\rho = 6\sin 3\varphi; \rho = 3; (\rho \geq 3)$

2. Знайти довжину дуги кривої

a) $y = 1 - \ln \sin x; \pi/3 \leq x \leq \pi/2$

b) $\begin{cases} x = 3(t - \sin t) \\ y = 3(1 - \cos t) \end{cases}; \pi/2 \leq t \leq \pi$

3. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями

$$x^2 + \frac{y^2}{4} - z^2 = 1; z = 0; z = 3$$

4. Обчислити або довести розбіжність

$$\int_0^{\infty} (x^2 - 3x + 4)e^{-2x} dx$$

Варіант 17.

1. Знайти площу плоскої фігури, обмежену лініями

a) $y = \sqrt{4 - x^2}; y = 0; x = 0; x = 1$

b) $\begin{cases} x = \sqrt{2}\cos t \\ y = \sqrt{2}\sin t \end{cases}; y \geq 0$

c) $\rho = 2\cos\varphi; \rho = 2\sqrt{3}\sin\varphi$

2. Знайти довжину дуги кривої

a) $y = \ln\cos x + 2; 0 \leq x \leq \pi/6$

b) $\begin{cases} x = 10\cos^3 t \\ y = 10\sin^3 t \end{cases}; 0 \leq t \leq \pi/2$

3. Знайти об'єм тіла, утвореного при обертанні фігури обмеженої графіками функцій

$y = x^2 + 1; y = x; x = 0; x = 1$ навколо осі Oy

4. Обчислити або довести розбіжність

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{(x^2 - 1)^2}$$

Варіант 18.

1. Знайти площу плоскої фігури, обмежену лініями

a) $y = \cos^5 x \sin 2x; y = 0; (0 \leq x \leq \pi/2)$

b) $\begin{cases} x = 2(t - \sin y) \\ y = 2(1 - \cos t) \end{cases}$; перша арка

c) $\rho = 2\cos\theta$

2. Знайти довжину дуги кривої

a) $y = \arccos\sqrt{x} - \sqrt{x - x^2} + 4; 0 \leq x \leq 1/2$

b) $\begin{cases} x = 4(\cos t + t\sin t) \\ y = 4(\sin t - t\cos t) \end{cases}; 0 \leq t \leq \pi/2$

3. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями

$$x^2 + \frac{y^2}{16} - z^2 = 1; z = 0; z = 3$$

4. Обчислити або довести розбіжність

$$\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$$

Варіант 19.

1. Знайти площу плоскої фігури, обмежену лініями

a) $x = \arccos y; x = 0; y = 0$

b) $\begin{cases} x = 6\cos^3 t \\ y = 4\sin^3 t \end{cases}; x \geq 0; y \leq 0$

c) $\rho = 1 + \sqrt{2}\cos\varphi$

2. Знайти довжину дуги кривої

a) $y = \ln \frac{5}{2x}; \sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{8}$

b) $\begin{cases} x = e^t(\cos t + \sin t) \\ y = e^t(\cos t - \sin t) \end{cases}; \pi/2 \leq t \leq \pi$

3. Знайти об'єм тіла, утвореного при обертанні фігури обмеженої графіками функцій $y = 2x - x^2; y = 2 - x; x = 0$ навколо осі Ox

4. Обчислити або довести розбіжність

$$\int_e^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$$

Варіант 20.

1. Знайти площу плоскої фігури, обмежену лініями

a) $y = x^2 \cos x; y = 0; (0 \leq x \leq \pi/2)$

b) $\begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 6\sin t \end{cases}; x \geq 0; y \leq 0$

c) $\rho = 2\sin\varphi; \rho = 5\sin\varphi$

2. Знайти довжину дуги кривої

a) $y = \ln(1 - x^2); 0 \leq x \leq 1/4$

b) $\begin{cases} x = 5(t - \sin t) \\ y = 5(1 - \cos t) \end{cases}; 0 \leq t \leq 2\pi$

3. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} - \frac{z^2}{9} = 1; z = 0; z = 3$$

4. Обчислити або довести розбіжність

$$\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{\ln^3 x}}$$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Владіміров В.М., Пучков О.А., Шмигевський М.В. Збірник завдань з вищої математики. Ч.2.-Київ: Політехніка, 2002.-108 с.
2. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: навчальний посібник.-Київ: А.С.К.-2005.-648с.ISBN 966-539-320-0
3. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление. Т.2.- М .Наука, 1970.-576 с.
4. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике. Полный курс (9-е изд.). М:Высшее образование .- 2009.-606 с.
5. О.М. Станжицький, В.В. Плахотник, В.С. Малярець та інші. Вища математика. Базовий підручник для студентів вищих навчальних закладів. Вид. Фоліо, Харків, 2014-640 стр.