

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
“КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
ІМЕНІ ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО”
ФІЗИКО-ТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
КАФЕДРА ФІЗИКИ ЕНЕРГЕТИЧНИХ СИСТЕМ

«На правах рукопису»

УДК 539

«До захисту допущено»

Завідувач кафедри

А.А. Халатов

(підпис) (ініціали, прізвище)

“ _____ ” _____ 2018 р.

Магістерська дисертація

на здобуття ступеня магістра

зі спеціальності 105 «Прикладна фізика та наноматеріали»

на тему «Квазірелятивістські ефекти в спектрі мас важких адронів»

Виконала: студентка 6 курсу групи ФФ-62м

Демська Ксенія Вадимівна

_____ (підпис)

Керівник: д-р ф.-м. н., проф., п. н. с. ІТФ ім. М.М. Боголюбова НАН України

Кобушкін Олександр Петрович

_____ (підпис)

Консультант: к. ф.-м. н., ст. н. с. ІТФ ім. М.М. Боголюбова НАН України

Борисюк Дмитро Леонідович

_____ (підпис)

Рецензент: д-р ф.-м. н., ст. н. с. ІТФ ім. М.М. Боголюбова НАН України

Мартинов Євген Сергійович

_____ (підпис)

Засвідчую, що у цій дипломній роботі немає запозичень з праць інших авторів без відповідних посилань.

Студент _____

РЕФЕРАТ

Пояснювальна записка дипломної роботи за обсягом становить 87 сторінки, містить 11 таблиць та 7 рисунки. Використано 62 джерел.

Темою роботи квазірелятивістські ефекти в спектрі мас важких адронів.

Об'єктом дослідження є баріонна система з одним та двома важкими кварками в рамках квазірелятивістського підходу.

Предметом дослідження спектр мас баріонів з одним та двома важкими кварками в рамках квазірелятивістського підходу.

Метою даної роботи є побудова квазірелятивістської моделі для опису важких баріонів та розрахунок їх спектру мас на основі даної моделі. Це реалізується за допомогою варіаційного метода Рітца.

Завдання роботи: розробка моделі згідно з обраною аналогією; вибір вигляду нерелятивістського потенціалу взаємодії кварків та обґрунтування його параметрів; формулювання способу врахування релятивістських ефектів та модифікація його до адронної системи; вибір класу пробних функцій для застосування варіаційного методу; розвиток математичного формалізму, необхідного для реалізації чисельних розрахунків; розрахунок спектру мас важких та двічі важких баріонів; передбачення мас частинок, що не спостерігались експериментально; дослідження впливу релятивістських ефектів на параметри та спектр мас.

Методи дослідження: гаусовий розклад, варіаційний метод Рітца, теорія збурень, чисельна мінімізація методом SLSQP.

В результаті дослідження були отримані наступні результати:

- 1) Побудовано квазірелятивістську модель для опису важких баріонів в рамках кваркової теорії, де в якості нерелятивістської міжкваркової взаємодії було обрано корнеллівський потенціал.

- 2) Було послідовно враховано всі релятивістські поправки порядку $(v/c)^2$ у вигляді гамільтоніану Брейта.
- 3) Розроблено математичний формалізм даної моделі.
- 4) Отримано параметри гамільтоніану.
- 5) Розраховано спектри мас важких та двічі важких баріонів в основному стані.
- 6) Зроблено передбачення мас для не підтверджених експериментально частинок.
- 7) Проаналізовано важливість врахованих поправок.

Наукова новизна полягає в послідовному врахуванні релятивістських поправок порядку $(v/c)^2$ до спектру мас баріонів.

Значимість результатів заключається в отриманні спектру мас важких та двічі важких баріонів в рамках квазірелятивістського підходу, відповідно, передбаченні мас для частинок, існування яких експериментально не підтверджено.

Результати роботи були апробовані доповідями та постером на міжнародній конференції в Осло International School "Relativistic Heavy Ion Collisions, Cosmology and Dark Matter, Cancer Therapy". Також результати доповідались на конференції молодих вчених інституту теоретичної фізики ім. М.М. Боголюбова.

Ключові слова: важкі баріони, двічі важкі баріони, кваркова модель, варіаційний метод Рітца, корнеллівський потенціал, гамільтоніан Брейта.

SUMMARY

The explanatory note of thesis contains 87 pages 11 tables and 7 figures with 62 names of bibliographic sources.

The theme of this work is the quasi-relativistic effects in the hadron spectroscopy.

Object of study is a single- and double-heavy baryon system within the quasi-relativistic framework.

The subject of the study is a mass spectrum of a single- and double-heavy baryon system within the quasi-relativistic framework.

The purpose of this work is the construction of a quasi-relativistic model for describing heavy baryons and calculating their mass spectra based on this model. This is done using the Ritz variational method.

The challenge is developing of the model according to the chosen analogy; selection of the nonrelativistic interquark potential and reasoning of its parameters; formulating the way to account the relativistic effects and modifying it to the considered system; choosing the class of trial functions for variational approach; developing of the formalism for numerical computation; calculation of the mass spectrum single and double heavy baryons; mass prediction to the non-observed particles; study of the influence of the relativistic effects on the parameters and mass spectra.

Investigation methods: Gaussian expansion, Ritz variational approach, perturbation theory, numerical minimization with the SLSQP.

The research gave us the following results:

- 1) The quasi-relativistic model of heavy baryons was constructed. The Cornell potential was chosen as nonrelativistic interquark potential.
- 2) Mathematical formalism of chosen model was developed.
- 3) All relativistic corrections of the order $(v/c)^2$ in the form of the Breit Hamiltonian were consistently taken into account.

- 4) Parameters of the hamiltonian were obtained.
- 5) Mass spectra of single- and double-heavy baryons in the ground state was calculated.
- 6) The importance of the quasi-relativistic corrections was analyzed.

Scientific novelty follows the accurate consideration of the relativistic corrections of order $(v/c)^2$ to the single- and double-heavy baryon spectrum.

The significance of the results follows the predicting masses of the non-observed single- and double-heavy baryons in the quasi-relativistic model.

Results of the work were presented on the International School "Relativistic Heavy Ion Collisions, Cosmology and Dark Matter, Cancer Therapy" (plenary talks and poster session), and on the young scientists conference "PROBLEMS OF THEORETICAL PHYSICS" Bogolyubov Institute for Theoretical Physics of the National Academy of Sciences of Ukraine.

Key words: single-heavy baryons, double-heavy baryons, quark model, Ritz variational method, Cornell potential, Breit Hamiltonian.

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ, СИМВОЛІВ, ОДИНИЦЬ, СКОРОЧЕНЬ І ТЕРМІНІВ	10
ВСТУП	12
1. ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ	13
1.1. Експериментальні дослідження важких баріонів	13
1.1.1. Експериментальні установки для дослідження важких баріонів	13
1.1.2. Відкриття та дослідження важких баріонів	14
1.1.3. Двічі важкі баріони. Можлива стабільність та експеримент	19
1.2. Теоретичне дослідження важких баріонів	22
1.2.1. КХД на ґратці	23
1.2.2. Феноменологічні підходи	25
1.2.3. Підходи з урахуванням релятивізму	29
1.3. Висновки до розділу 1	30
2. РОЗРОБКА ФОРМАЛІЗМУ МОДЕЛІ	32
2.1. Аналогія важких баріонів з атомними системами	32
2.1.1. Баріон з одним важким кварком як аналог атома гелію	32
2.1.2. Двічі важкий баріон як аналог іонізованої молекули водню	33
2.2. Систематика важких баріонів в основному стані	34
2.3. Введення координат Якобі	37
2.4. Варіаційний метод Рітца	39
2.5. Гамільтоніан системи	40
2.5.1. Нерелятивістський гамільтоніан	40
2.5.2. Релятивістська частина — гамільтоніан Брейта	44
2.5.3. Гамільтоніан та оператор кутового моменту	46

2.6.	Хвильова функція в загальному вигляді	48
2.7.	Пробна функція	48
2.8.	Усереднення гамільтоніана	50
2.8.1.	Усереднення кінетичної енергії	51
2.8.2.	Усереднення кулонівської частини корнеллівського потенціалу	52
2.8.3.	Усереднення потенціалу конфаймента	54
2.8.4.	Усереднення контактних термів	57
2.8.5.	Усереднення терму H_{mv}	58
2.8.6.	Усереднення терму H_{ret}	62
2.9.	Висновки до розділу 2	67
3.	РЕЗУЛЬТАТИ РОЗРАХУНКІВ	68
3.1.	Оптимізація	68
3.1.1.	Аналіз функції для оптимізації	68
3.1.2.	Порівняння методів оптимізації	71
3.1.3.	Вибір гіперпараметрів моделі	72
3.2.	Спектри мас та їх аналіз	74
3.2.1.	Спектр мас експериментально досліджених баріонів	74
3.2.2.	Спектр мас двічі важких баріонів	75
3.2.3.	Вплив релятивістських поправок на спектри мас	76
3.3.	Висновки до розділу 3	78
	ВИСНОВКИ	81
	ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ	82

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ, СИМВОЛІВ, ОДИНИЦЬ,
СКОРОЧЕНЬ І ТЕРМІНІВ

Латинські позначення:

A, B — параметри лінійно-зростаючого потенціалу;

j — квантове число повного моменту імпульса;

\mathbf{j} — оператор повного моменту;

\hat{H} — оператор Гамільтона;

l — орбітальне квантове число;

\mathbf{l} — оператор орбітального моменту;

M — сумарна маса кварків;

N — нормувальний коефіцієнт;

$P_l(\cos\theta)$ — поліноми Лежандра;

Q — важкий кварк;

q — легкий кварк;

$\mathbf{R}, \mathbf{r}, \boldsymbol{\rho}$ — координати Якобі;

$\mathbf{P}, \mathbf{p}, \mathbf{q}$ — імпульси, що відповідають координатам Якобі;

s — спінове квантове число;

\mathbf{s} — оператор спіну;

T — кінетична енергія;

V — потенціал;

Y_{lm} — сферична функція.

Грецькі позначення:

α_k, β_k — варіаційні параметри;

α_s — параметр потенціалу кулонівського типу;

$\Gamma(z)$ — гамма-функція;

δ_{ij} — символ Кронекера.

ϵ_{ijk} — символ Леві-Чевіті.

Індекси:

conf — конфайнмент;

Coul — Кулон;

ssc — spin-spin contact;

mv — mass violation;

D — Darwin;

ret — retardation.

Кириличні скорочення:

ВАК — Великий адронний колайдер;

КЕД — квантова електродинаміка;

КХД — квантова хромодинаміка.

Латинські скорочення:

ALICE — A Large Ion Collider Experiment;

ATLAS — A Toroidal LHC ApparatuS;

CMS — Compact Muon Solenoid;

HQET — Heavy Quark Effective Theory;

LHCb — Large Hadron Collider beauty.

Інші позначення:

$|\dots\rangle$ — кет-вектор;

$\langle\dots|$ — бра-вектор;

$\langle\dots|\dots\rangle$ — коефіцієнт Клебша-Гордана;

$\langle\dots\rangle$ — усереднення.

ВСТУП

На даному етапі розвитку науки значна увага приділяється питанням побудови матерії, з якої складається Всесвіт, що на фундаментальному рівні прийнято розглядати в рамках так званої Стандартної моделі, яка описує електромагнітну, слабку та сильну взаємодію всіх елементарних частинок.

В даній роботі будуть досліджуватись адрони — частинки, що складаються з кварків та глюонів. Їх зазвичай поділяють на наступні класи: мезони, що складаються з кварк-антикваркової пари; баріони, що складаються з трьох кварків; екзотичні частинки, до складу яких входять чотири і більше кварків. Мезони були добре дослідженні експериментально та теоретично в наслідок того, що вони є двочастинковими системами, і рівняння для її опису можуть бути наближено вирішені. Баріони є тричастковими системами, тому існує велика кількість моделей для опису їх властивостей, які зазвичай вирішуються числовими методами або за допомогою сильних наближень, те ж стосується екзотичних частинок. Тому, найбільш актуальною задачею фізики високих густин енергії є дослідження властивостей баріонів та екзотичних частинок, особливо тих, до складу яких входять важкі кварки. Таким чином, в даній роботі формулюється модель, на основі варіаційного методу Рітца, що не має обмежень по кількості кварків в адроні.

Історично, як атомна спектроскопія так і мезонна спектроскопія вказує на те, що значний вплив на спектр мас мають релятивістські ефекти, особливо якщо до складу системи входять легкі об'єкти (в даному випадку легкі кварки), однак, в спектроскопії важких адронів цими ефектами часто нехують. Фундаментальна теорія є відразу релятивістською, але вона є занадто складною, і не дозволяє досліджувати такі складні системи.

В досліджуваних нами адронах присутні легкі кварки, тому доцільно послідовно врахувати релятивістські поправки та дослідити їх вплив на спектри мас частинок та параметри моделі.

РОЗДІЛ 1

ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ

1.1 Експериментальні дослідження важких баріонів

1.1.1 Експериментальні установки для дослідження важких баріонів

На данному етапі розвитку фізики частинок та фізики високих енергій важливим є експериментальне дослідження спектрів мас важких частинок, тому що експериментальних даних для легких мезонів і баріонів вдосталь. В багатьох лабораторіях в усьому світі ставляться експерименти по розсіянню пучків на високих енергіях, в яких народжуються важкі частинки.

В останні роки спектроскопія важких баріонів привернула до себе значний інтерес завдяки великій кількості досліджень таких експериментальних установок, як ВАК в ЦЕРНі, Теватрон в Fermilab, Cornell Electron Storage Ring (CESR) в Корнелльському університеті та інші. Вони зібрали величезну кількість даних в області досліджень важких частинок. Багато з них працюють над відкриттям нових адронів, механізмів їх утворення, розпадів та переходів, а також, в загальному, забезпеченням більш точних даних [1].

Зазначимо деякі з основних експериментальних установок, які активно працюють в області фізики важких частинок, та основні напрямки їх досліджень.

TEVATRON, кільцевий $\bar{p}p$ колайдер:

- основні та збуджені стани b -адронів;
- електрослабка взаємодія [2];
- розпади кварконію;
- адронні розпади на чармоній та B_c -мезон [3].

CLEO-с, e^+e^- колайдер:

- властивості чармонію, його розпади [4];
- визначення форм-факторів D та D_s розпадів;
- пошук нових частинок та нової фізики за межами Стандартної моделі;
CMS та ALICE, $\bar{p}p$ колайдер:
- пошук бозона Хіггса;
- вивчення топ-кварка [5];
- народження кварконію в зіткненнях важких іонів;
- дослідження властивостей матерії, якій властива сильна взаємодія.
ATLAS та LHCb, $\bar{p}p$ колайдер:
- вивчення КХД на надвисоких енергіях (TeV);
- вивчення важких адронів;
- D - \bar{D} -осциляції;
- вивчення важких адронів, включаючи кварконій та збуджені стани
 B_c -мезонів;
- фізика b -адронів, включаючи порушення CP симетрії, рідкісні розпади [6].
КЕКВ, e^+e^- колайдер:
- порушення CP симетрії;
- народження адронів;
- розпади c -адронів [7].

1.1.2 Відкриття та дослідження важких баріонів

З моменту припущення в BNL (Brookhaven National Laboratory) [8] і подальшого підтвердження в Фермілаб [9] існування c -баріонів, інтерес до спектроскопії важких баріонів почав зростати. Стало очевидним, що баріони, які містять або b кварки, можуть грати важливу роль в нашому розумінні КХД. На початку 1990-х в ЦЕРНі було відкрито перший b -баріон Λ_b [10]. З

тих пір було ідентифіковано багато нових адронів, що містять один важкий c або b кварки. У той час, як маси таких частинок зазвичай вимірюються безпосередньо в процесі відкриття, інші квантові числа, такі, як спіні та парність, виявляються більш невловимими. Для важких баріонів, ані спінове квантове число, ані парність не були виміряні напряму. Ці властивості можуть бути вилучені лише шляхом вивчення кутових розподілів розпадів частинок, але це можливо лише для найбільш легких адронів та тих, які частіше спостерігаються при розпадах. Крім того, для збуджених важких баріонів набір даних, як правило, на один порядок менший, ніж для важких мезонів.

1.1.2.1 c -баріони

Що стосується експериментальних досліджень баріонів, що містять один важкий кварк, всі дев'ять основних станів з $J^P = 1/2^+$ та всі дев'ять основних станів з $J^P = 3/2^+$ вже було знайдено. Також спостерігались багато станів зі збудженням за орбітальним квантовим числом. Результати експериментальних досліджень таких адронів представлено в таблиці 1.1.

Спін та парність кожного з баріонів у збудженому стані визначалась на основі порівняння виміряних мас та природних ширин з передбаченнями теоретичних моделей.

Про перше спостереження c -баріону Λ_c^+ було повідомлено через два роки після відкриття J/ψ частинки [11]. Зараз це найбільш відомий c -баріон, який має велику кількість мод розпаду. Серед них, $\Lambda_c^+ \rightarrow p\bar{K}\pi$, $p\bar{K}\pi\pi$ та $\Lambda\pi^+\pi$, $\Lambda\pi^+\pi\pi$ є основними. Найбільш точне значення маси було отримано колаборацією ВаВар [12].

Стани $\Sigma_c(2455)$ та $\Sigma_c^*(2520)$ спостерігались в великій кількості експериментів. Одні з найбільш ранніх публікацій були зроблені колаборацією CLEO.

Таблиця 1.1

Деякі експериментальні дані про c -баріони

	$I(J^P)$	Маса, MeV	Час життя, с (або ширина, MeV)
Λ_c^+	$0(\frac{1}{2}^+)$	$2286,46 \pm 0,14$	$(200 \pm 6) \cdot 10^{-15}$ с
Λ_c^+	$0(\frac{1}{2}^-)$	$2592,25 \pm 0,28$	$2,59 \pm 0,30 \pm 0,47$ MeV
Λ_c^+	$0(\frac{3}{2}^-)$	$2628,11 \pm 0,19$	$< 0,97$ MeV
Λ_c^+	$0(\frac{5}{2}^+)$	$2881,53 \pm 0,35$	$15,8 \pm 1,1$ MeV
Σ_c^{++}	$1(\frac{1}{2}^+)$	$2453,97 \pm 0,14$	$1,89_{-0,18}^{+0,09}$ MeV
Σ_c^+	$1(\frac{1}{2}^+)$	$2452,9 \pm 0,4$	$< 4,6$ MeV
Σ_c^0	$1(\frac{1}{2}^+)$	$2453,75 \pm 0,14$	$1,83_{-0,19}^{+0,11}$ MeV
Σ_c^{++}	$1(\frac{3}{2}^+)$	$2518,41_{-0,19}^{+0,21}$	$14,78_{-0,40}^{+0,30}$ MeV
Σ_c^+	$1(\frac{3}{2}^+)$	$2517,5 \pm 2,3$	< 17 MeV
Σ_c^0	$1(\frac{3}{2}^+)$	$2518,48 \pm 0,20$	$15,3_{-0,5}^{+0,4}$ MeV
Ξ_c^+	$\frac{1}{2}(\frac{1}{2}^+)$	$2467,93_{-0,40}^{+0,28}$	$(442 \pm 26) \cdot 10^{-15}$ с
Ξ_c^0	$\frac{1}{2}(\frac{1}{2}^+)$	$2470,85_{-0,40}^{+0,28}$	$(112_{-10}^{+13}) \cdot 10^{-15}$ с
$\Xi_c'^+$	$\frac{1}{2}(\frac{1}{2}^+)$	$2575,7 \pm 3,0$	
$\Xi_c'^0$	$\frac{1}{2}(\frac{1}{2}^+)$	$2577,9 \pm 2,9$	
Ξ_c^+	$\frac{1}{2}(\frac{3}{2}^+)$	$2645,9 \pm 0,5$	$2,6 \pm 0,2 \pm 0,4$ MeV
Ξ_c^0	$\frac{1}{2}(\frac{3}{2}^+)$	$2645,9 \pm 0,5$	$< 5,5$ MeV
Ξ_c^+	$\frac{1}{2}(\frac{1}{2}^-)$	$2789,1 \pm 3,2$	< 15 MeV
Ξ_c^0	$\frac{1}{2}(\frac{1}{2}^-)$	$2791,9 \pm 3,3$	< 12 MeV
Ξ_c^+	$\frac{1}{2}(\frac{3}{2}^-)$	$2816,6 \pm 0,9$	$< 3,5$ MeV
Ξ_c^0	$\frac{1}{2}(\frac{3}{2}^-)$	$2819,6 \pm 1,2$	$< 6,5$ MeV
Ω_c^0	$0(\frac{1}{2}^+)$	$2695,2 \pm 1,7$	$(69 \pm 12) \cdot 10^{-15}$ с
Ω_c^0	$0(\frac{3}{2}^+)$	$2765,9 \pm 2,0$	

Частинки Σ_c^+ та Σ_c^{*+} спостерігались у розпаді $\Lambda_c^+ \pi^0$ [13], а стани Σ_c^{*++} та Σ_c^{*0} — в розпадах на $\Lambda_c^+ \pi^\pm$ [14]. З кутового розподілу розпаду $B^- \rightarrow$

$\Sigma_c(2455)^0 \bar{p}$ було визначено спін $\Sigma_c(2455)^0$ баріону, який виявився рівним $1/2$, у той час як квантові числа $J^P = 3/2^+$ баріону $\Sigma_c^*(2520)$ було визначено за допомогою кваркової моделі.

Частинка Ξ_c^+ була вперше спостережена в ЦЕРНі, в прискорювачі SPS у нуклонних зіткненнях Σ^- [15] в реакції $\Sigma^- + Be \rightarrow (\Lambda K^- \pi^+ \pi^+) + X$, а її ізоспіновий партнер Σ_c^0 — колаборацією CLEO в розпаді $\Xi^- \pi^+$ [16]. Обидва стани вивчались в різноманітних механізмах народження та модах розпаду.

У ізоспінового дублеті Σ_c^+ та Σ_c^0 , пари легких кварків [su] та [sd] відповідно, знаходяться у стані зі спіном $S = 0$. Але повинен існувати другий дублет, для якого пара легких кварків знаходиться у стані з $S = 1$. Ця пара частинок позначаються $\Xi_c^{(0,+)'}$. Ці стани були відкриті колаборацією CLEO. На першому кроці, два Ξ_c баріони в основному стані були отримані за допомогою декількох мод розпаду. Ці Ξ_c баріони в основному стані спостерігались разом з низькоенергетичними фотонами. Інваріантні маси $\Xi_c^+ \gamma$ та $\Xi_c^0 \gamma$ давали сигнали, які інтерпретувались як відсутні партнери $\Xi_c'^{(0,+)}$ баріонів основного стану $\Xi_c^{0,+}$. Виміряні різниці мас $M(\Xi_c'^+) - M(\Xi_c^+)$ та $M(\Xi_c'^0) - M(\Xi_c^0)$ склали $107,8 \pm 1,7 \pm 2,5$ та $107,0 \pm 1,4 \pm 2,5$ MeV/c² відповідно.

В наступні роки були спостережені і інші Ξ_c частинки. Так, $\Xi_c(2790)$ та $\Xi_c(2815)$ були спостережені колаборацією CLEO, $\Xi_c(2980)$ та $\Xi_c(3080)$ — колаборацією BELLE (BaBar підтвердила цю знахідку).

Відкриття частинки Ω_c було дуже важливим, адже це був останній зі знайдених стабільних баріонів, що містить один c -кварк. Першим засвідченням цього відкриття було повідомлення [17], яке згодом підтвердилось багатьма експериментами. Час життя Ω_c був виміряний колаборацією WA89 в ЦЕРНі, а також колабораціями FOCUS та SELEX в Фермілаб. В експерименті SELEX використовувались пучки Σ^- , π^- та p потужністю 600 GeV/c, а в експериментах WA89 та FOCUS використовувався процес фотонародження. В усіх трьох експериментах було отримано 75 Ω_c^0 в розпадах $\Omega^- \pi^- \pi^+ \pi^+$ та $\Omega^- \pi^+$.

Збуджений стан Ω_c^* було отримано колаборацією ВаВаг. Він був спостережений в процесі $e^+e^- \rightarrow \Omega_c^* X$. Стан Ω_c^* спостерігався в радіоактивному розпаді до основного стану Ω_c .

1.1.2.2 b -баріони

Баріонів, що містять один важкий b -кварк на даний час відкрито не так багато, як c -баріонів, адже вони мають вищий енергетичний поріг народження. Результати експериментальних досліджень таких адронів представлено в таблиці 1.2.

Таблиця 1.2

Деякі експериментальні дані про b -баріони

	$I(J^P)$	Маса, MeV	Час життя, с (або ширина, MeV)
Λ_b^0	$0(\frac{1}{2}^+)$	$5619,51 \pm 0,23$	$(1,466 \pm 0,01) \cdot 10^{-12}$ с
Λ_b^0	$0(\frac{1}{2}^-)$	$5912,11 \pm 0,13 \pm 0,23$	$< 0,66$ MeV
Λ_b^0	$0(\frac{3}{2}^-)$	$5919,81 \pm 0,23$	$< 0,63$ MeV
Σ_b^+	$1(\frac{1}{2}^+)$	$5811,3^{+0,9}_{-0,8} \pm 1,7$	$9,7^{+3,8+1,2}_{-2,8-1,1}$ MeV
Σ_b^-	$1(\frac{1}{2}^+)$	$5815,5^{+0,6}_{-0,5} \pm 1,7$	$4,9^{+3,1}_{-2,1} \pm 1,1$ MeV
Σ_b^{*+}	$1(\frac{3}{2}^+)$	$5832,1 \pm 0,7^{+1,7}_{-1,8}$	$11,5^{+2,7+1,0}_{-2,2-1,5}$ MeV
Σ_b^{*-}	$1(\frac{3}{2}^+)$	$5835,1 \pm 0,6^{+1,7}_{-1,8}$	$7,5^{+2,2+0,9}_{-1,8-1,4}$ MeV
Ξ_b^-	$\frac{1}{2}(\frac{1}{2}^+)$	$5794,4 \pm 1,2$	$(1,560 \pm 0,040) \cdot 10^{-12}$ с
Ξ_b^0	$\frac{1}{2}(\frac{1}{2}^+)$	$5791,8 \pm 0,5$	$(1,464 \pm 0,031) \cdot 10^{-12}$ с
$\Xi_b'^-$	$\frac{1}{2}(\frac{1}{2}^+)$	$5935,02 \pm 0,02 \pm 0,05$	$< 0,08$ MeV
Ξ_b^0	$\frac{1}{2}(\frac{3}{2}^+)$	$5948,9 \pm 0,8 \pm 1,2$	$2,1 \pm 1,7$ MeV
Ξ_b^{*-}	$\frac{1}{2}(\frac{3}{2}^+)$	$5955,33 \pm 0,12 \pm 0,05$	$1,65 \pm 0,31 \pm 0,10$ MeV
Ω_b^-	$0(\frac{1}{2}^+)$	$6048,0 \pm 1,9$	$(1,57^{+0,23}_{-0,20}) \cdot 10^{-12}$ с

Частинка Λ_b вперше спостерігалась в ЦЕРНі в колайдері ISR (Intersecting Storage Rings) [18], пізніше знахідка була підтверджена декількома колабораціями.

Σ_b баріон з $J^p = 1/2^+$ та найнижчий збуджений стан Σ_b^* з $J^p = 3/2^+$ були спостережені в Фермілаб колаборацією CDF в модах розпаду $\Lambda_b^0 \pi^+$ та $\Lambda_b^0 \pi^-$ [19]. Їх ширина була визначена з розпадів $\Lambda_b^0 \rightarrow \Lambda_c^+ \pi^-$ та $\Lambda_c^+ \rightarrow K^- \pi^+$.

Наступним відкритим b -баріоном був Ξ_b^- , який містить b , s та d кварки, тобто кварки з негативним зарядом з кожного покоління. Непрямий доказ існування цього стану було отримано в експериментах ЦЕРНу в колайдері LEP, але не було повідомлено про значення якихось вимірених величин. Перше пряме спостереження цього b -баріону відбулось в Фермілаб [20] шляхом реконструкції розпадів $\Xi_b^- \rightarrow J/\psi \Xi^-$, $J/\psi \rightarrow \mu^+ \mu^-$ та $\Xi^- \rightarrow \Lambda \pi^- \rightarrow p \pi^- \pi^-$. Колаборація CDF виміряла значення маси цієї частинки більш точно.

Баріон Ω_b^- було отримано колаборацією DØ [21]. Вона була отримана з реконструкції розпадів $\Omega_b^- \rightarrow J/\psi \Omega^-$, $J/\psi \rightarrow \mu^+ \mu^-$, $\Omega^- \rightarrow \Lambda K^-$, $\Lambda \rightarrow p \pi^-$.

1.1.3 Двічі важкі баріони. Можлива стабільність та експеримент

З точки зору КХД, в баріонах, що містять два важких кварки (b або s , які зазвичай позначаються як Q) та один легкий кварк (u , d або s , які позначаються як q) немає нічого екзотичного [22].

Важкі кварки розпадаються тільки завдяки слабкій взаємодії з характерним часом життя за порядком величини більшим за типовий для КХД часовий масштаб. Тому з точки зору сильної взаємодії баріони типу QQq є стабільними, так само, як і протони, нейтрони або гіперони. Саме тому баріони, що містять два важких кварки мають існувати.

Незважаючи на це, їх отримання та дослідження є надзвичайно складною задачею для експериментатора. Необхідно початку сформулювати дві

пари вигляду $Q\bar{Q}$, які повинні переорганзуватися таким чином, щоб утворити дікварки вигляду QQ та $\bar{Q}\bar{Q}$ з більшою ймовірністю, ніж більш сприятливі конфігурації двох $Q\bar{Q}$ кольорових синглетів. Потім дікварк QQ повинен захопити легкий кварк q з метою творити QQq баріон.

На перший погляд здається, що такого роду процес скоріш за все буде дуже рідкісним. Однак є експериментальні докази того, що вони трапляються досить часто. Ці докази базуються на рясному народженні двічі важких мезонів $B_c = (\bar{b}c)$ в експериментах на Теватроні та БАК, які вказують на те, що спонтанне народження пар $\bar{b}b$ та $\bar{c}c$, які є близькими одна до одної в просторі та за значенням швидкості, можуть об'єднатися щоб сформувати двічі важкий адрон, і це відбувається з порівняно великою ймовірністю. Це є обнадійливою ознакою перспектив отримання та спостереження баріонів вигляду bbq , ccq та bcq . ATLAS та CMS, а особливо LHCb ймовірно мають найбільші шанси спостерігати ці стани.

Серед двічі важких баріонів, двічі b -баріон bbq має найбільш унікальну та ефектну моду розпаду з двома J/ψ мезонами в кінцевому стані та відсутністю фону. Ця мода має проміжний розпад двох b -кварків за схемою:

$$b \rightarrow \bar{c}cs \rightarrow J/\psi s \quad (1.1)$$

та дає:

$$(bbq) \rightarrow J/\psi J/\psi(ssq) \rightarrow J/\psi J/\psi \Xi \quad (1.2)$$

Однак, ця унікальна особливість пригнічується через дуже низьку частоту. Це одночасно проблема та можливість для LHCb та інших експериментів в яки народжується велика кількість віжких кварків [23, 24].

Експериментальне дослідження двічі важких баріонів буде чудовим способом перевірки різних теоретичних підходів, що були запропоновані для

роботи з непертурбативними аспектами КХД спектрів, таких як КХД на ґратці, кваркові моделі, методу великих N_c та інших.

Крім того, що вони є цікавими самі по собі, експериментальне виявлення двічі важких QQq баріонів може забезпечити важливі обмеження щодо можливості існування гіпотетичних екзотичних адронів, таких як двічі важкі тетракварки $QQ\bar{q}\bar{q}$, тому що є суттєва паралель між цими двома типами адронів. В обох типах систем є легкий кольоровий триплет (кварковий або антикварковий), прив'язаний до важкого кварка.

В останні роки є можливість точно передбачити маси важких баріонів, що містять b -кварк: $\Sigma_b(bqq)$, $\Xi_b(bsq)$ та $\Omega_b(bss)$ [25–27]. Ці передбачення використовуються в якості введення B , B_s , D та D_s мезонів, разом з масами відповідних c -баріонів $\Sigma_c(cqq)$, $\Xi_c(csq)$ та $\Omega_c(css)$.

Аналогічні підходи до мас $QQ\bar{q}\bar{q}$ за допомогою співвідношення:

$$m(cc\bar{u}\bar{d}) = m(\Xi_{ccu}) + m(\Lambda_c) - \frac{1}{4}[m(D^*) - m(D)] \quad (1.3)$$

Далі, якщо маси ccq баріонів відомі, можна одразу обчислити маси $cc\bar{u}\bar{d}$ тетракварка і подивитися, чи знаходиться вона вище або нижче порогу для двох D мезонів. Абсолютно аналогічні міркування можуть бути застосовані до bbq баріону та $bb\bar{u}\bar{d}$ тетракварка, щоб побачити, чи знаходиться він вище або нижче порогу для двох B мезонів. Так як b -кварк набагато важчий за c -кварк, $bb\bar{u}\bar{d}$ тетракварк має априорі кращі шанси знаходитись нижче порогу для двох B мезонів. Якщо він нижче порогу, він може розпадатись тільки за рахунок слабкої взаємодії та буде стабільний до тих пір, поки сильна взаємодія не буде порушена. Відкриття таких стабільних екзотичних адронів буде справді чудовою знахідкою.

Важливим відкриттям для фізики високих густин енергії було спостереження та статистичне підтвердження двічі важкого баріону $\Xi_{cc}^{++} \left(\frac{1}{2}^+\right)$, повну

доповідь цього можна знайти в статті колаборації LHCb [28]. Цю частинку спостерігали у протон-протонних зіткненнях за енергії центру мас 13 TeV (та підтверджено додатковими даними за 8 TeV) та відтворили з її слабого розпаду:

$$\Xi_{cc}^{++} \rightarrow \Lambda_c^+ K^- \pi^+ \pi^+. \quad (1.4)$$

Різниця між масами Ξ_{cc}^{++} та Λ_c^+ 1334.94 ± 0.72 (stat) ± 0.27 (syst) MeV, та маса баріону Ξ_{cc}^{++} була визначена 3621.40 ± 0.72 (stat) ± 0.27 (syst) ± 0.14 MeV, де остання похибка за рахунок похибки маси Λ_c^+ .

Це відкриття є важливим для фізики елементарних частинок та фізики високих густин енергії, адже існування двічі важких баріонів повністю слідує з загальноприйнятої теорії — стандартної моделі, але з експериментальної точки зору такі частинки не спостерігались. Таким чином ця подія стимулювала багатьох вчених до вивчення важких адронів, тенденція до нових підходів та більш точного аналізу вже існуючих.

1.2 Теоретичне дослідження важких баріонів

КХД — це теорія, яка описує сильну взаємодію між кварками. Разом з електрослабкою теорією, КХД становить загальноприйнятий на даний час теоретичний фундамент фізики елементарних частинок. Характерними рисами КХД є асимптотична свобода і конфайнмент. Властивість асимптотичної свободи [29] дозволяє інтерпретувати експерименти з глибокого непружного розсіяння [30] в рамках наближення, в якому складові адрону вважаються точковими, що допускає застосування теорії збурень на малих відстанях. Однак, математичної моделі, яка б описувала поведінку кварків на великих відстанях (явище конфайнменту), досі не побудовано. Крім того, передбаче-

ння низькоенергетичних властивостей матерії, що сильно взаємодіє, досі є складною теоретичною задачею.

Багато з нещодавно відкритих адронів мають несподівані властивості, тому необхідно розуміти адронні спектри з метою відокремлення фізики електростабкої взаємодії від ефектів, що обумовлені сильною взаємодією. Крім того, КХД повинна узгоджуватись з непертурбативними ефектами, які зустрічаються на високих енергіях, як наприклад, ті, що досліджуються в ВАК. Розуміння спонтанного порушення електростабкої симетрії також потребує непертурбативних підходів на енергіях порядку TeV , аналогічно до тих, що були корисними для адронної спектроскопії на енергіях порядку GeV . Масштаби КХД — близько 200 MeV , або близько 1 fm (відстань), на яких не може бути застосована теорія збурень. Таким чином, необхідні якісь альтернативні підходи, які включають такі феноменологічні моделі, як bag-моделі [31], правила сум в КХД [32], HQETs [33], різноманітні варіанти потенціальних моделей [34], [35], [36] та ін.

1.2.1 КХД на ґратці

КХД на ґратці є основним, непертурбативним методом, що використовується при розрахунку адронних спектрів. Він формулюється на дискретній евклідовій просторово-часовій сітці. КХД на ґратці є досить універсальним методом, який має дві суттєві переваги. По-перше, дискретна просторово-часова ґратка виступає в якості непертурбативної регуляризованої системи. Вибір кінцевих значень кроку ґратка a дозволяє позбавитись ультрафіолетової розбіжності. Більш того, перенормовані фізичні величини прямують до кінцевих значень при $a \rightarrow 0$. В принципі, застосовуючи регуляризацію, можна виконати всі стандартні розрахунки в рамках теорії збурень, однак ці розрахунки набагато складніші і не мають переваг над тими, що виконуються

в неперервному просторі. По-друге, КХД на гратці може бути змодельовано за допомогою комп'ютерних методів, аналогічних до тих, що застосовуються до систем статистичної механіки [37].

КХД на гратці дозволяє відтворити значення спектрів мезонів та баріонів, що були виміряні експериментально. Також даний підхід дозволяє:

- досліджувати топологічну структуру КХД вакууму як механізму, що відповідає за явища конфайнменту та спонтанного порушення кіральної симетрії [38];
- розрахунок таких адронних характеристик, як хвильові функції, константи розпаду, форм-фактори для розпадів за рахунок слабкої, електромагнітної взаємодії та ін., а також структурні функції для глибоко непружного розсіяння;
- аналізувати поведінку КХД при високих температурах, а також торкнутися питань природи фазового переходу, температури фазового переходу, рівняння стану та колективних збуджень в околі температури фазового переходу.

Однак існують практичні обмеження в доступній обчислювальній потужності при розрахунку спектрів мас важких мезонів та баріонів. Даний теоретичний підхід намагається описати важкий кварконій за допомогою розрахунків та (або) апроксимацій на основі КХД з метою отримання спектру мас важкого кварконію. Це більш складна задача, ніж отримання мас легких мезонних станів, тому що в розрахунки входить додатковий масштаб, що відповідає масі важкого кварка m_Q . Якщо припустити, що m_Q набагато більше за інші масштаби в системі, очікується, що взаємна швидкість руху важких кварків та антикварків є досить малою: $v/c \ll 1$. Таким чином, система стає нерелятивістською, а, отже, очікується, що розщеплення між станами з однаковими квантовими числами буде $\sim mv^2$, у той час як надтонке розщеплення $\sim mv^4$, за аналогією до зв'язних станів в КЕД (де $v \sim \alpha$). Якщо $v^2 \sim 0,1$, як очікується для основного стану ботомію, розрахунки за

допомогою КХД на гратці потребують точності, значно вищої за 10%, щоб виявити усереднені за спіном значення мас, та вищої за 1%, щоб побачити структуру тонкого розщеплення. Більш того, всі масштаби розбиття повинні бути враховані в рамках однієї й тієї ж ґратки, що потребує великої кількості її вузлів. Отже, розрахунок спектру важкого кварконію за допомогою КХД на гратці потребує величезних обчислювальних потужностей. Ця проблема в деяких випадках може бути частово вирішена за допомогою введення анізотропних ґраток [39].

1.2.2 Феноменологічні підходи

За допомогою феноменологічних підходів намагаються змоделювати особливості КХД, що відносяться до важкого кварконію, з метою отримати конкретні результати, які можуть бути підтверджені або спростовані експериментом, а також зорієнтувати напрямок експериментальних досліджень. Деякі з таких феноменологічних підходів вивчення властивостей адронів, пов'язаних з його кварк-глюонними ступенями свободи, будуть обговорені нижче.

1.2.2.1 Ваg-моделі

Незважаючи на інтенсивні пошуки за останні 70 років, кварки у вільному стані не спостерігалися. Ще до формулювання КХД було зрозуміло те, що необхідна деяка форма ефективного механізму їх «запирання».

Найбільш очевидним було зробити кварки надзвичайно масивними але зв'язати їх дуже сильним потенціалом взаємодії (таким чином компенсувавши колосальну масу), щоб маси спостережених адронних станів не виходили б за рамки розумного. Проста модель такого типу була побудована

Боголюбовим [40]. Він задавав значення маси кварку m , та помістив кварки у сферичний об'єм з радіусом R , в якому вони піддавались притягуванню скалярного поля з відповідною силою m .

Розглядається рівняння Дірака для частинки з масою m , що рухається в сферичній порожнині радіусу R під дією постійного скалярного потенціалу. Отримуючи його розв'язок, розглядають границю при $m \rightarrow \infty$ так, що кварки поведуться себе вільно (мають нульову ефективну масу) всередині радіусу R але мають нескінченну масу ззовні - отже вони «запираються» у кулі з радіусом R .

Ця надзвичайно проста модель привела до точних передбачень маси резонанса Ропера, а також, була успішною в застосуванні до спектроскопії легких адронів та дала інші цікаві результати. Bag-модель дає простий опис адронних систем, але, як багато інших феноменологічних моделей, вона не містить суджень про кіральну симетрію, яку прийнято вважати фундаментальною симетрією сильної взаємодії.

З сучасної точки зору, модель Боголюбова є привабливою для опису асимптотичної свободи та конфайнменту простим способом, але не дуже підходить для точної спектроскопії адронів, адже зіштовхується з рядом проблем, наприклад, радіус сфери задається штучним чином, а не отримується динамічно (справді, мінімізуючи енергію адрону ми отримаємо $R \rightarrow \infty$). Тож, існує багато модифікацій bag-моделі Боголюбова, що використовуються для спектроскопії адронів, наприклад MIT bag-модель.

1.2.2.2 Правила сум в КХД

Кольорова динаміка, що описується за допомогою КХД є дуже своєрідною. Взаємодія між двома пробними кольоровими зарядами на малій відстані буде підпорядковуватись кулонівському закону зі слабкою констан-

тою зв'язку (взаємодія через одноглюонний обмін). На великих відстанях, глюон починає «розгалуджуватись», що приводить до дивовижного явища антиекранування або, так званої, асимптотичної свободи [29], це явище є протилежним до явища екранування (зменшення значення заряду внаслідок поляризації вакуума) в КЕД.

Основні особливості кварків та кваркових систем залежать від того як будується їх взаємодія з флуктуаціями вакуумного поля.

Було запропоновано (а потім і доведено), що вакуум КХД достатнім чином характеризується кількістю конденсатів [32]: глюонний конденсат, кварковий конденсат, змішаний конденсат, чотири-кварковий конденсат та інші. Використовуючи метод Сум, що базується на феноменологічних правилах Фейнмана та методі операторного розкладу [32] ми можемо знайти числові значення величин, що характеризують конденсати, що зазначені вище, і потім визначити з достатньою точністю параметри багатьох мезонів і баріонів. Можна зазначити основні сфери, опис яких може бути реалізовано в рамках даного підходу:

- Адронний спектр.
- Форм-фактори: електромагнітного, адронного, слабкого адронного — розпадів.
- КХД: маси кварків, константи зв'язку.
- КХД за кінцевих температур: кварк-глюонна плазма, відновлення киральної симетрії, кварк-глюонний деконфайнмент.

1.2.2.3 Ефективна теорія важкого кварка

Одним з підходів для моделювання непертурбативних аспектів сильної взаємодії на адронному рівні є застосування ефективної теорії важкого кварка (HQET - Heavy Quark Effective Theory). Цей підхід запропоновано

Ісгуром та Вайсом [33]. Він виявляється корисним при роботі з адронними системами, що складаються з одного важкого кварка та будь-якої кількості легких. Точніше кажучи, квантові числа ізоспін та дивність (strangeness) є необмеженими, у той час як одне з квантових чисел краса (bottomness) або чарівність (charmness) приймає значення ± 1 . Успіх моделі складових кварків свідчить про те, що всередині адрону сильно зв'язані кварки обмінюються імпульсом порядку декількох сотень МеВ.

Можемо розглядати характерний енергетичний масштаб Λ_{QCD} . При значенні $\Lambda_{QCD} \simeq m_p/3 \simeq 330$ МеВ кварки в нуклоні знаходяться поза масової поверхні. Для важкого адрона можна застосувати схожі міркування і прийти до висновку, що легкі кварки за даного значення Λ_{QCD} знаходяться далеко поза масової поверхні. Але маса важкого кварка значно перевищує характерний масштаб, $m_Q \gg \Lambda_{QCD}$. Важкий кварк несе більшу частину імпульсу важкого адрона. Взаємодія з легкими кварками призводить до зміни імпульсу важкого кварка тільки на величину порядку Λ_{QCD} , так що він знаходиться майже на масовій поверхні. Дійсно, $m_Q \approx m_q + o(\Lambda_{QCD})$ [41].

Таким чином, можна вважати, що Q рухається майже з постійною швидкістю (тобто нехтуємо зміною швидкості важкого кварка) і ця швидкість дорівнює швидкості важкого адрону. В системі спокою важкого адрону, важкий кварк практично знаходяться в стані спокою. Через те, що $m_Q \gg \Lambda_{QCD}$, можна проводити розклад за ступенями малої величини Λ_{QCD}/m_Q в рамках теорії збурень.

Згідно з HQET, властивості важких адронів не залежать від спіну та маси важкого кварку. Крім того, при застосуванні цього методу немає необхідності в тому, щоб детально знати конфігурацію легких кварків. Обмеженням цього метода є те, що його можна застосовувати лише до адронів, що містять і важкі, і легкі кварки.

1.2.2.4 Потенціальні моделі

Потенціальні моделі є базовим інструментом феноменологічного підходу. Використання нерелятивістських потенціальних моделей виправдано тим, що маси b - та c -кварків перевищують характерний адронний масштаб Λ_{QCD} . Потенціал зазвичай обирається наступним чином: на малих відстанях він співпадає з кулонівським потенціалом, що описує одноглюонний обмін, а на великих враховує конфайнмент. Через те, що для деяких станів, головним чином для чармонію, значними є релятивістські ефекти, існують також моделі, що включають релятивістську кінематику [42].

Потенціальні моделі зазвичай або мотивовані принципами КХД, або відомими експериментальними фактами. При цьому методи аналізу є дуже схожими до тих, що використовуються в атомній фізиці.

1.2.3 Підходи з урахуванням релятивізму

Одною з перших робіт була робота Коплі, Ізгура та Карл [43]: вони досліджували спектр баріонів з одним s -кварком та баріонів з одним c -кварком у потенціальній моделі гармонічного осцилятора, конфаймента та надтонкої (спін-спінової) взаємодії. Урахування релятивістської поправки на спін-спінову взаємодію виявилось необхідним для адекватного опису спектру баріонів, так як без неї неможливо розчепити частинки з різним спіном і, відповідно, описати спостережувані маси.

Більше детальні розрахунки були проведені Ізгуром та Карлом [44], було використано гамільтоніан подібний до гамільтоніану Брейта (оснований на потенціалі гармонічного осцилятора) для передбачення спектру збуджених P -хвильових баріонів з s -кварками. У цій роботі було знехтувано

спін-орбітальними термами, також не було присутні всі члени відповідного порядку в релятивістському розкладі.

Розрахунок та аналіз спектру збуджених баріонів (включно з баріонами з одним важким кварком) був проведений Капстіком та Ізгуром [45]. Атори наголошують на важливості "релятивізації" моделей для баріонів. Також, в цій роботі присутні докази модельного об'єднання мезонів та баріонів, у тому розумінні, що одна модель може описати обидві системи з деякою зміною параметрів.

Об'ємна робота по дослідженню важких та двічі важких баріонів була проведена Робертсом та Первіном [46]. Автори використовували схожий "релятивізованих" підхід до розрахунку збудженого спектру баріонів та форм факторів семілептонного розпаду.

Важкі та двічі важкі баріони були досліджені в роботі Йошиди та інших [47], був використаний варіаційний принцип Релея-Рітца з Гаусовим розкладом в моделі конститuentних кварків.

Інший підхід до розгляду баріонів було запропоновано Ебертом та іншими [48]. Автори використовували двочастинкове наближення (легкий кварк — важкий дікварк) до двічі важких баріонів, що може бути точно вирішено з деяким квазіпотенціалом, з деякою аналогією до мезону, що також може бути точно вирішеним. Легкий кварк розглядався повністю як релятивістський. Автори також наголошують на важливість релятивістського підходу. Двочастинковий підхід був далі узагальнений на збуджені баріони та тетракварки [49, 50].

1.3 Висновки до розділу 1

В даний час проводиться велика кількість експериментів по дослідженню адронів, зокрема баріонів з одним важким кварком. Такі експерименти

потребують попереднього ґрунтовного теоретичного опису поведінки таких систем.

Огляд літератури за обраною тематикою показав, що при описі властивостей важких баріонів можна застосовувати велику кількість різноманітних методів, кожний з яких має свої особливості. Одним з найбільш зручних для застосування є варіаційний метод Рітца, який можна застосовувати в рамках потенціальної моделі. При цьому взаємодію кварків, як з точки зору простоти, так і з глибоких фізичних міркувань, краще за все описати за допомогою корнеллівського потенціалу. Врахування поправки на спин-спінову взаємодію є необхідним для опису розчеплення спектру, однак є дуже багато робіт в яких наголошується важливість врахування релятивістських ефектів.

З одної стороно наш підхід схожий на роботу Йошиди та інших [47], де вони використали варіаційний підхід до повноцінно тричасткової системи, але в меншій мірі релятивізований, з іншої стороно наш підхід схожий на роботи Еберта та соавторів [48–50] де автори розглядали легкі системи (кварки або мезони) повністю релятивістськими але у двочастинковому наближенні.

РОЗДІЛ 2

РОЗРОБКА ФОРМАЛІЗМУ МОДЕЛІ

2.1 Аналогія важких баріонів з атомними системами

2.1.1 Баріон з одним важким кварком як аналог атома гелію

З теоретичної точки зору баріони з одним важким кварком є цікавими тим, що їх можна розглядати по аналогії з атомом гелію, де важкий кварк грає роль ядра, а два легких – електронів. Такий атом зображено на рис. 2.1.

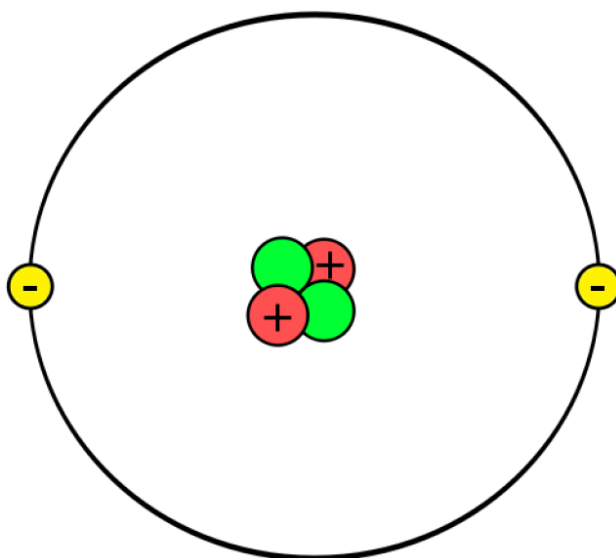


Рис. 2.1. Схематичне зображення атома гелію

Порівняємо ці дві системи.

Атом гелію має наступні характеристики:

- He ($A = 4$, $Z = 2$),
- ядро: $M(2p^+ + 2n) \approx 4 \text{ GeV}$,
- пара e^-e^- на орбіті,
- кулонівська взаємодія.

Відповідні характеристики важкого баріона:

- (Qq_1q_2) , де $Q \in (c, b)$; $q_1, q_2 \in (u, d, s)$,
- b -кварк (c -кварк) грає роль ядра ($m_b \approx 5$ ГеВ, $m_c \approx 2$ ГеВ),
- легкий дікварк q_1q_2 аналогічний до електронної пари,
- поле кольорового заряду.

Отже, робимо висновок, що така аналогія має місце. Класично, до атома гелію застосовується відомий в атомній фізиці підхід [51, 52], а саме — варіаційний метод Рітца. Таким чином, врахувавши деякі зміни, ми можемо застосувати цей метод і до більш складної системи, якою є важкий баріон.

2.1.2 Двічі важкий баріон як аналог іонізованої молекули водню

Іонізована молекула водню H_2^+ являє собою найпростішу молекулу. Вона складається з двох ядер водню, в потенціальному полі яких знаходиться один електрон [53]. Схематично ця молекула зображена на рис. 2.2. Таким чином, баріон з двома важкими кварками можна розглядати як іонізовану молекулу водню, де два важких кварки грають роль ядер, а легкий кварк — роль електрона.

Ця аналогія дозволяє застосувати до розрахунку спектру мас важких баріонів варіаційний метод Рітца, який застосовуються до задачі іонізованої молекули водню. Згідно з аналогією, маси важких кварків не повинні сильно відрізнятися, тому ми розглянемо двічі важкі баріони з тотожними за ароматом важкими кварками, оскільки маса b -кварка перевищує масу c -кварка більше ніж в два рази. Це баріони вигляду: QQq .

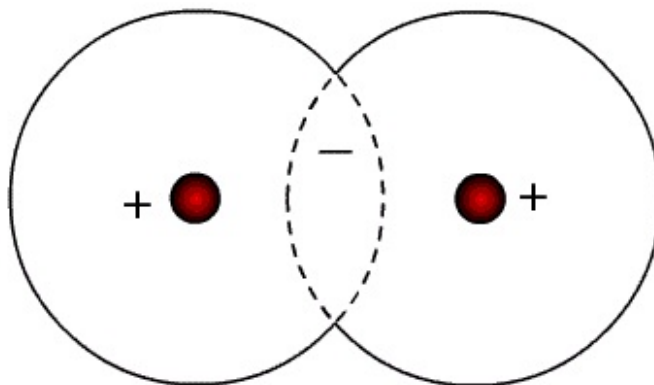


Рис. 2.2. Схематично зображена іонізована молекула водню

2.2 Систематика важких баріонів в основному стані

Спочатку проведемо систематизацію важких баріонів в основному стані, виходячи с аналізу симетрії хвильової функції системи.

Ще у 1960-х роках стало зрозуміло, що всі адрони підпорядковуються більш-менш простій класифікації та об'єднуються в мультиплети. Тобто при їх описі ми потребуємо невеликої кількості параметрів. Іншими словами, всі адрони мають невелику кількість ступенів вільності, а саме: всі баріони с однаковим спіном мають три ступені вільності, а мезони — дві [54].

Отже, представимо повну хвильову функцію для баріона як добуток функцій, що відповідають чотирьом (враховуючи спін) ступеням вільності (квантовим числам). Тоді хвильова функція системи набуває наступного вигляду:

$$\Psi = \varphi_s \varphi_l \varphi_f \varphi_c = \tilde{\Psi} \varphi_c \quad (2.1)$$

де φ_s , φ_l , φ_f , φ_c — функції спіну, орбітального квантового числа, аромату та кольору відповідно.

Для того, щоб ця хвильова функція правильно описувала систему при перестановці кварків, вона має бути антисиметричною. Постулюється, що

всі адрони не мають кольору, тобто належать синглетному представленню кольорової групи $SU(3)$, що є антисиметричною відносно перестановки кварків [55] незалежно від симетрії інших множників у формулі (2.1).

Таким чином, симетричною має бути наступна комбінація:

$$\tilde{\Psi} = \varphi_s \varphi_l \varphi_f \quad (2.2)$$

Що стосується ароматної частини хвильової функції, всього існує дев'ять можливих комбінацій двох легких та одного важкого кварків. Ці комбінації розташовуються в двох $SU(3)$ -мультиплетах: секстеті (симетричний) та антитриплеті (антисиметричний) [55]:

$$3 \otimes 3 = 6 \oplus \bar{3} \quad (2.3)$$

Ці мультиплети для важкого b -кварка зображено на рис. 2.3.

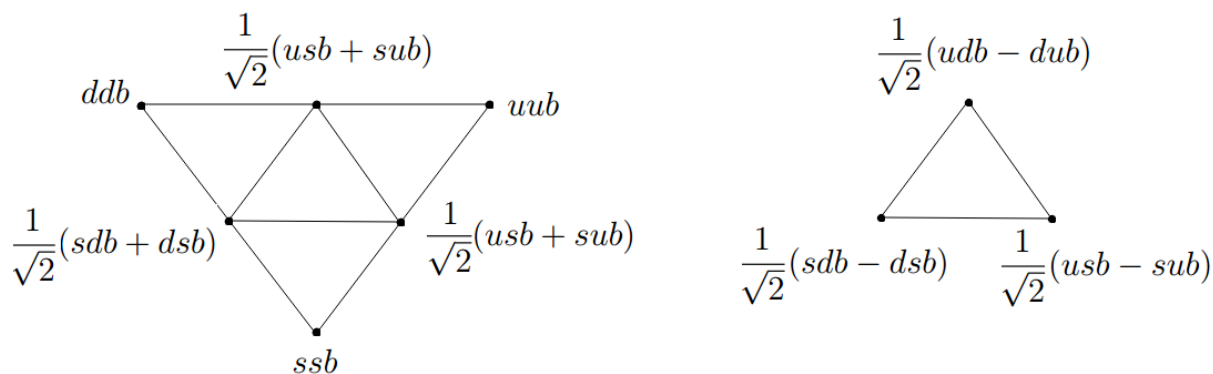


Рис. 2.3. Мультиплети станів з b -кварком

Аналогічний вигляд мають мультиплети, утворені з комбінацій важкого c -кварка з легкими.

Далі ми будемо розглядати лише баріони в основному стані. Іншими словами, це стани, що не мають збудження по орбітальному квантовому

числу ($L = 0$). Тоді φ_l є симетричною відносно перестановки кварків. Тому спін-ароматна частина повинна бути також симетричною. Комбінуючи симетричні (антисиметричні) спінові хвильові функції з симетричним (антисиметричним) мультиплетом, отримаємо секстети з $j = 3/2$ та $j = 1/2$ та антитриплет з $j = 1/2$ (всього 15 частинок).

Мультиплети баріонів, що містять b -кварк, зображено на рис. 2.4.

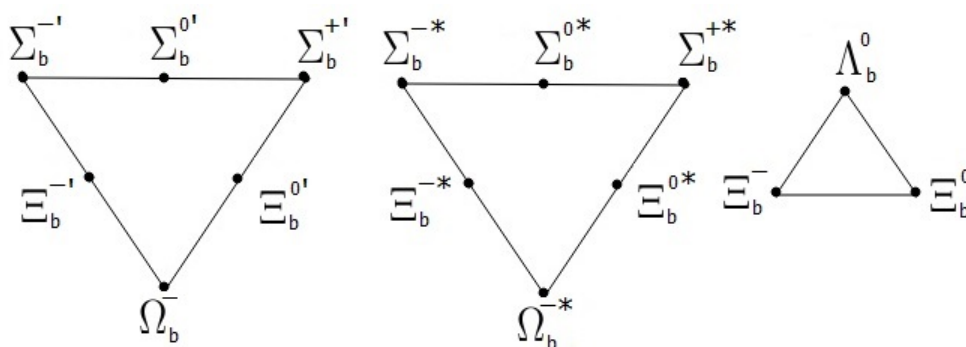


Рис. 2.4. Мультиплети b -баріонів в основному стані

Аналогічний вигляд мультиплетів матимемо й для c -баріонів.

Також, для баріонів з двома важкими кварками систематизація може бути зображена у вигляді триплету для фіксованих двох b -кварків, який зображено на рис. 2.5. Аналогічний триплет отримаємо для двох c -кварків.

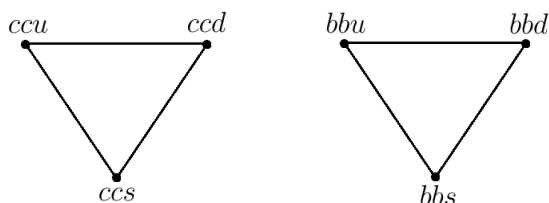


Рис. 2.5. Триплети станів з двома важкими кварками за ароматом

Ці мультиплети станів треба комбінувати з симетричними за спіном станами ($s = 3/2$ та $s = 1/2$). В результаті отримаємо два триплети з $j = 3/2$ та $j = 1/2$ для фіксованих двох b -кварків, які зображено на рис. 2.6. Триплети

для двох c -кварків будуть мати такий самий вигляд.

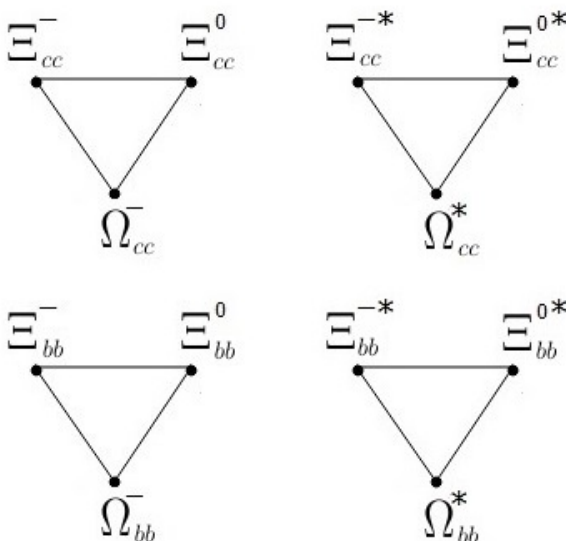


Рис. 2.6. Двічі важкі баріони в основному стані

2.3 Введення координат Якобі

Координати Якобі дуже часто застосовуються в теорії для опису систем з багатьма частинками з метою спростити математичне формулювання задачі. Тому для баріону, який є системою трьох частинок, використання даного підходу є цілком обґрунтованим.

Якщо позначити маси кварків через m_1, m_2, m_3 , координати Якобі \mathbf{r} і $\boldsymbol{\rho}$ (рис. 2.7) та відповідні імпульси \mathbf{p} і \mathbf{q} будуть визначатися наступним чином:

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 + m_3 \mathbf{r}_3}{m_1 + m_2 + m_3}, & \mathbf{P} &= \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3, \\ \mathbf{r} &= \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3, & \mathbf{p} &= \frac{m_3 \mathbf{p}_2 - m_2 \mathbf{p}_3}{m_2 + m_3}, \\ \boldsymbol{\rho} &= \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\mathbf{r}_1 - \frac{m_2 \mathbf{r}_2 + m_3 \mathbf{r}_3}{m_2 + m_3} \right), & \mathbf{q} &= \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{(m_2 + m_3) \mathbf{p}_1 - m_1 (\mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3)}{m_1 + m_2 + m_3}, \end{aligned} \quad (2.4)$$

де \mathbf{R} , \mathbf{P} - радіус-вектор та імпульс центру мас системи, \mathbf{r}_1 , \mathbf{r}_2 , \mathbf{r}_3 — координати кварків в лабораторній системі відліку.

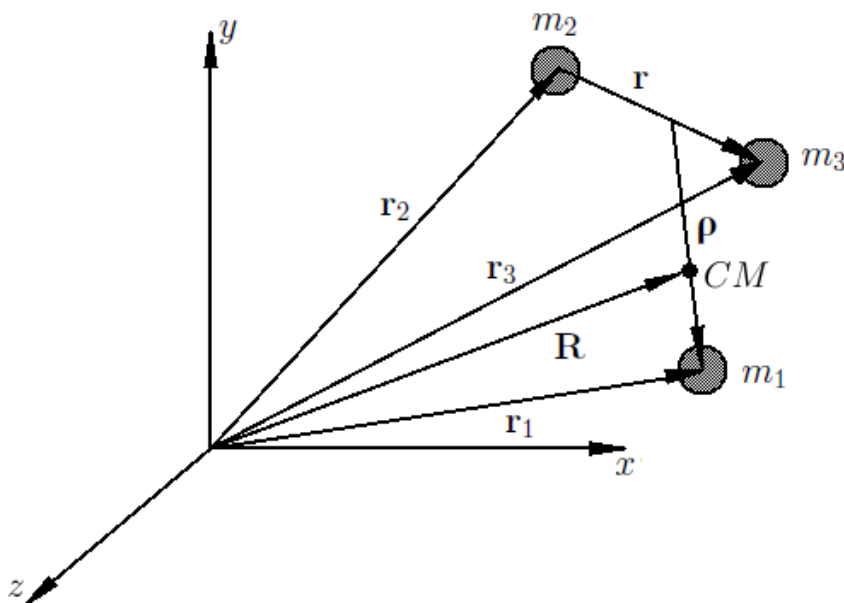


Рис. 2.7. Координати Якобі

Тоді зворотні вирази запишемо у вигляді:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{r}_1 &= \mathbf{R} + \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{m_2 + m_3}{m_1 + m_2 + m_3} \boldsymbol{\rho}, \\
 \mathbf{r}_2 &= \mathbf{R} - \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{m_1}{m_1 + m_2 + m_3} \boldsymbol{\rho} + \frac{m_3}{m_2 + m_3} \mathbf{r}, \\
 \mathbf{r}_3 &= \mathbf{R} - \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{m_1}{m_1 + m_2 + m_3} \boldsymbol{\rho} - \frac{m_2}{m_2 + m_3} \mathbf{r}, \\
 \mathbf{p}_1 &= \frac{m_1}{m_1 + m_2 + m_3} \mathbf{P} + \frac{2}{\sqrt{3}} \mathbf{q}, \\
 \mathbf{p}_2 &= \frac{m_2}{m_1 + m_2 + m_3} \mathbf{P} - \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{m_2}{m_2 + m_3} \mathbf{q} + \mathbf{p}, \\
 \mathbf{p}_3 &= \frac{m_3}{m_1 + m_2 + m_3} \mathbf{P} - \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{m_3}{m_2 + m_3} \mathbf{q} - \mathbf{p}.
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

2.4 Варіаційний метод Рітца

Для багатьох задач, у тому числі і для дослідження спектру мас барионів, дуже корисним є варіаційний метод Рітца. Для основного стану він базується на наступній теоремі: середнє значення від оператора Гамільтона \hat{H} по будь-яким функціям $\phi(x)$, нормованим на одиницю, більше або рівне енергії основного стану, при чому рівність виконується коли $\phi(x)$ співпадає з хвильовою функцією основного стану. Таким чином для практичних цілей виконується наступна процедура. Беремо довільну функцію $\phi(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, x)$, де $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ - деякі параметри. Вимагається щоб вона була нормована на одиницю:

$$\int \phi^*(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, x) \phi(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, x) dx = 1, \quad (2.6)$$

така функція називається пробною функцією.

Потім обчислюється функціонал:

$$R_0(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \int \phi^*(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, x) \hat{H} \phi(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, x) dx = 1 \quad (2.7)$$

і шукається мінімум за його параметрами $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, тобто таке значення параметрів $\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \dots, \tilde{\alpha}_n$, щоб виконувалась умова:

$$\frac{\partial R_0}{\partial \tilde{\alpha}_1}; \quad \frac{\partial R_0}{\partial \tilde{\alpha}_2}; \quad \dots; \quad \frac{\partial R_0}{\partial \tilde{\alpha}_n}. \quad (2.8)$$

Тоді покладаємо $E_0 \approx R_0(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \dots, \tilde{\alpha}_n)$ і $\Phi_0(x) \approx \phi(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \dots, \tilde{\alpha}_n, x)$. Звичайно цей метод дає гарний результат, якщо вдасться завдяки якимось здогадкам вибрати правильну пробну функцію. Часто буває навіть досить використати однопараметричну пробну функцію. Для того, щоб знайти

енергію першого збудженого стану методом Рітца, необхідно побудувати пробну функцію, яка задовольняє обидві умови.

З умов нормування:

$$\int \phi_1^*(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n, x) \phi_1(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n, x) dx = 1 \quad (2.9)$$

З умов ортогональності хвильової функції до хвильової функції основного стану:

$$\int \phi^*(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n, x) \phi_1(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n, x) dx = 0 \quad (2.10)$$

Обчислюючи мінімум функціонала:

$$R_0(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) = \int \phi_1^*(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n, x) \hat{H} \phi_1(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n, x) dx = 1, \quad (2.11)$$

можна ототожнити його з енергією E_1 , а $\phi_1(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n, x)$ з хвильовою функцією збудженого стану $\Phi_1(x)$. Далі цю процедуру можна продовжити, будуючи нормовану функцію для другого збудженого стану і т.д. [56]

2.5 Гамільтоніан системи

2.5.1 Нерелятивістський гамільтоніан

В загальному вигляді звичайний нерелятивістський гамільтоніан системи записується наступним чином:

$$H = T + V, \quad (2.12)$$

де T — кінетична енергія системи, V — потенціал взаємодії кварків.

Кінетична енергія системи трьох кварків з масами m_1, m_2, m_3 при переході до координат Якобі набуває наступного вигляду:

$$T = \frac{\mathbf{P}^2}{2M} + \frac{\mathbf{q}^2}{2\mu_q} + \frac{\mathbf{p}^2}{2\mu_p}, \quad (2.13)$$

де $M = m_1 + m_2 + m_3$ — сумарна маса кварків, μ_q, μ_p — зведені маси, які виражаються наступним чином:

$$\mu_q = \frac{3m_1(m_2 + m_3)}{4M}, \quad \mu_p = \frac{m_2m_3}{m_2 + m_3}. \quad (2.14)$$

Враховуючи те, що нас цікавить лише взаємний рух кварків, який не залежить від імпульсу центра мас системи \mathbf{P} , можемо переписати вираз (2.13) у наступному вигляді:

$$T = \frac{\mathbf{q}^2}{2\mu_q} + \frac{\mathbf{p}^2}{2\mu_p}. \quad (2.15)$$

Запишемо потенціальну енергію у вигляді суми потенціалів взаємодії кожної пари кварків:

$$V(\mathbf{r}, \boldsymbol{\rho}) = V(\mathbf{r}_{12}) + V(\mathbf{r}_{13}) + V(\mathbf{r}_{23}). \quad (2.16)$$

Враховуючи вирази (2.5), радіус-вектор взаємодії i -того та j -го кварків виражається наступним чином:

$$\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j = b_{ij}\boldsymbol{\rho} + c_{ij}\mathbf{r}, \quad (2.17)$$

Коефіцієнти b_{ij} та c_{ij} з виразу (2.17) визначаються як:

$$\begin{aligned} b_{12} &= \frac{\sqrt{3}}{2}, & c_{12} &= -\frac{m_3}{m_2 + m_3}, \\ b_{13} &= \frac{\sqrt{3}}{2}, & c_{13} &= \frac{m_2}{m_2 + m_3}, \\ b_{23} &= 0, & c_{23} &= 1. \end{aligned} \tag{2.18}$$

Визначимось з виглядом потенціалу взаємодії (2.15).

Найбільш вдалим для опису взаємодії в даній моделі є потенціал, що являє собою суму лінійно зростаючого (потенціал конфайнмента) та кулонівського. Потенціал такого вигляду називається корнеллівським. Він не тільки має досить простий вигляд, що дозволяє уникнути додаткових математичних складностей, а й має глибокий фізичний сенс: на малих відстанях потенціал має вигляд, аналогічно кулонівському; на великих відстанях потенціал повинен зростати, оскільки кварки не спостерігаються в вільному стані і потенціал повинен їх ефективно «запирати» на відстанях масштабу радіуса адрона. Класично потенціал такого вигляду застосовується для опису взаємодії кварка з антикварком, наприклад, для чармонію ($c\bar{c}$ -мезон) [57]. Але виявляється, що його можна застосувати і у випадку взаємодії двох кварків. В цьому випадку, його параметри можна використати ті ж самі, що й для чармонію, але з урахуванням відмінності в процесі обміну глюонами при взаємодії qq та $\bar{q}q$.

В КЕД сила електромагнітного зв'язку між двома кварками характеризується добутком $e_1 e_2 \alpha$, де e_i — електричний заряд в одиницях e (тобто $e_i = +2/3$ або $-1/3$), а α — постійна тонкої структури. Подібним чином в КХД величина сильного зв'язку при обміні одним глюоном між двома кольоровими зарядами характеризується добутком $(1/2)c_1 c_2 \alpha_s$, де c_1, c_2 — кольорові коефіцієнти, а α_s — константа сильної взаємодії [55]. Прийнято

називати кольоровим множником величину:

$$C_F \equiv \frac{1}{2}|c_1 c_2| \quad (2.19)$$

Тоді можемо представити потенціал у вигляді:

$$V = C_F V(r_{ij}), \quad (2.20)$$

де $V(r_{ij})$ — універсальний потенціал, що не залежить від кольору кварків.

При qq взаємодії кольоровий множник є в два рази меншим, ніж у випадку $\bar{q}q$, що впливає з властивостей кольорової групи $SU(3)$ [55]:

$$V(r_{ij}) = \frac{1}{2} V_{\bar{q}q}(r_{ij}). \quad (2.21)$$

Кулонівська частина корнеллівського потенціалу відповідає за одноглюонний обмін в рамках КХД, що є аналогом однофотонного обміну в електродинаміці. Це дає нам можливість записати його у вигляді:

$$V_{\text{Coul}}(r_{ij}) = -\frac{2}{3} \frac{\alpha_s}{r_{ij}}. \quad (2.22)$$

Необхідно визначитись з виглядом константи сильного зв'язку, так як КХД дає лише асимптотичні значення при великих енергіях (малих відстанях) та малих енергіях (великих відстанях). Обґрунтована параметризація на відстанях розміру адронів дається виразами [58]:

$$\alpha_s(\mu_{ij}^2) = \frac{4\pi}{\beta_0 \ln \frac{\mu_{ij}^2 + M_0^2}{\Lambda^2}}, \quad \mu_{ij} = 2 \frac{m_i m_j}{m_i + m_j}, \quad (2.23)$$

$$\beta_0 = 11 - \frac{2}{3}n_f, \quad (2.24)$$

де m_i це маса i того кварка, n_f — параметр, що характеризує номер ароматів взаємодіючих кварків, M_0 та Λ — константи.

У корнеллівському потенціалі частина, що відповідає за явище конфайнменту, подається у лінійному вигляді:

$$V_{\text{conf}}(r_{ij}) = \frac{1}{2}(Ar_{ij} + B). \quad (2.25)$$

де A, B — параметри.

Тоді корнеллівський потенціал виглядає наступним чином:

$$V(\mathbf{r}_{ij}) = V_{\text{Coul}}(r_{ij}) + V_{\text{conf}}(r_{ij}). \quad (2.26)$$

2.5.2 Релятивістська частина — гамільтоніан Брейта

З визначеним нерелятивістським гамільтоніаном ми враховуємо квазірелятивістські поправки в формі гамільтониана Брейта без зовнішніх полів.

Гамільтоніан Брейта описує взаємодію двох (або більше) масивних ферміонів, включаючи релятивістські ефекти в порядку $(v/c)^2$.

Ідеї по розрахунку атомних систем [51] свого часу мали значних внесок у квантову, атомну та ядерну фізику. Сам автор данної книги, лауреат Нобелівської премії Ганс Бете, називав ці ідеї "методами прикладної квантової механіки". До цих методів входить як варіаційний метод так і доповнення його релятивістськими поправками у вигляді гамільтоніану Брейта.

Оригінально чотиривимірний гамільтоніан Брейта може бути розбитий на класичні терми:

$$H_0 = T + V_{Cornell} + \sum_{i=1}^3 m_i, \quad (2.27)$$

звичайний нерелятивістський член;

$$H_{mv} = - \sum_{i=1}^3 \frac{\mathbf{p}_i^4}{8m_i^3}, \quad (2.28)$$

релятивістська поправка, що враховує залежність маси від швидкості (mass violation);

$$H_D = \frac{2}{3} \sum_{i<j=1}^3 \alpha_s(\mu_{ij}^2) \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{m_i^2} + \frac{1}{m_j^2} \right) \delta(\mathbf{r}_{ij}), \quad (2.29)$$

так званий контактний дарвінівський терм (Darwin);

$$H_{ssc} = \frac{2}{3} \sum_{i<j=1}^3 \alpha_s(\mu_{ij}^2) \frac{2\pi}{3m_i m_j} \mathbf{s}_i \cdot \mathbf{s}_j \delta(\mathbf{r}_{ij}), \quad (2.30)$$

поправка, що враховує контактну спін-спінову взаємодію (spin-spin contact);

$$H_{ret} = \frac{2}{3} \sum_{i<j=1}^3 \alpha_s(\mu_{ij}^2) \left(\frac{\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{p}_j}{m_i m_j r_{ij}} + \frac{\mathbf{r}_{ij} \cdot (\mathbf{r}_{ij} \cdot \mathbf{p}_i) \mathbf{p}_j}{r_{ij}^2} \right), \quad (2.31)$$

поправка, що враховує ефект запізнювання полів, що створюються частинками (retardation).

Терми з орбітальною взаємодією зникають для частинок S -хвилі (основного стану).

Спочатку гамільтоніан Брейта використовувався для електромагнітної взаємодії (електрон-електронної або електрон-позитронної) і тому містив елементарний заряд e для обох частинок у взаємодіючій парі (що призводить до появи постійної тонкої структури α , яка пропорційна квадрату електронного заряду). Цілком повторюючи міркування з рівнянь (2.19) та (2.20) отримуємо фактор $\frac{2}{3}\alpha_s$ у виразах (2.29), (2.30), (2.31) з відповідною параметризацією константи сильної взаємодії (2.23).

У вказаному виразі для гамільтоніану використовуються звичайні позначення: s — оператор спіну, $\delta(\mathbf{r}_{ij})$ — тривимірна дельта функція Дірака, вирази для імпульсів p_i впливають з вигляду введених координат Якобі (2.4) та можуть бути записані наступним чином, базуючись на (2.5):

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_i &= f_i \mathbf{q} + d_i \mathbf{p}, \\ f_1 &= \frac{2}{\sqrt{3}}, & d_1 &= 0, \\ f_2 &= -\frac{2}{\sqrt{3}} \frac{m_2}{m_2 + m_3}, & d_2 &= 1, \\ f_3 &= -\frac{2}{\sqrt{3}} \frac{m_3}{m_2 + m_3}, & d_3 &= -1. \end{aligned} \tag{2.32}$$

Відповідно повний гамільтоніан баріонів основного стану є суммою вказаних термів:

$$H = H_0 + H_{mv} + H_D + H_{ssc} + H_{ret} \tag{2.33}$$

2.5.3 Гамільтоніан та оператор кутового моменту

Доведемо деяку властивість гамільтоніану системи, а саме те, що він комутує з повним кутовим моментом $\mathbf{L} = \mathbf{l}_p + \mathbf{l}_q$, де $\mathbf{l}_p, \mathbf{l}_q$ — відповідні до імпульсів p та q кутові моменти.

Подіємо оператором \mathbf{l}_p на потенціал, враховуючи вираз (2.15):

$$\begin{aligned}
 l_{pk} V(|\mathbf{r}_{ij}|) &= -i\epsilon_{knm} r_n \frac{\partial}{\partial r_m} V(|b_{ij}\mathbf{p} + c_{ij}\mathbf{r}|) = \\
 &= -i\epsilon_{knm} V'(|b_{ij}\mathbf{p} + c_{ij}\mathbf{r}|) r_n \frac{\partial}{\partial r_m} |b_{ij}\mathbf{p} + c_{ij}\mathbf{r}| + V(|\mathbf{r}_{ij}|) l_{pk} = \\
 &= -2ib_{ij}c_{ij}\epsilon_{knm} V'(|\mathbf{r}_{ij}|) \frac{r_n \rho_m}{|\mathbf{r}_{ij}|} + V(|\mathbf{r}_{ij}|) l_{pk}.
 \end{aligned} \tag{2.34}$$

Аналогічно для \mathbf{l}_q :

$$\begin{aligned}
 l_{qk} V(|\mathbf{r}_{ij}|) &= -i\epsilon_{knm} \rho_n \frac{\partial}{\partial \rho_m} V(|b_{ij}\mathbf{p} + c_{ij}\mathbf{r}|) = \\
 &= -2ib_{ij}c_{ij}\epsilon_{knm} V'(|\mathbf{r}_{ij}|) \frac{\rho_n r_m}{|\mathbf{r}_{ij}|} + V(|\mathbf{r}_{ij}|) l_{qk}.
 \end{aligned} \tag{2.35}$$

Додаючи до виразу 2.34 вираз 2.35, отримаємо:

$$(l_{pk} + l_{qk}) V(|\mathbf{r}_{ij}|) = V(|\mathbf{r}_{ij}|) (l_{pk} + l_{qk}). \tag{2.36}$$

Таким чином, комутатор гамільтоніана та оператора повного кутового момента дорівнює нулю.

Але комутатор гамільтоніана з \mathbf{l}_q^2 та \mathbf{l}_p^2 не дорівнює нулю. Ця властивість призводить до змішування станів з різними значеннями кутових моментів ℓ_p та ℓ_q , що відповідають одному обраному значенню L .

2.6 Хвильова функція в загальному вигляді

Враховуючи властивість змішування станів з різними ℓ_p та ℓ_q , запишемо загальний вигляд просторової частини хвильової функції (2.1):

$$|n = 1, L, M\rangle = \frac{1}{N} \sum_{\ell_p, \ell_q, m_p, m_q} \langle L, M | \ell_p, \ell_q, m_p, m_q \rangle \times \\ \times Y_{\ell_p, m_p}(\hat{\mathbf{r}}) Y_{\ell_q, m_q}(\hat{\boldsymbol{\rho}}) \rho^{\ell_q} r^{\ell_p} \phi_{1, L, \ell_p, \ell_q}(r, \rho), \quad (2.37)$$

де $\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r}/r$, $\hat{\boldsymbol{\rho}} = \boldsymbol{\rho}/\rho$, $\langle \dots | \dots \rangle$ — коефіцієнти Клебша-Гордана, n — головне квантове число (використовується для нумерації радіально збуджених станів), $\phi_{L, \ell_p, \ell_q}(r, \rho)$ — деяка скалярна функція координат, $\rho^{\ell_q} r^{\ell_p}$ — множник, використаний для зручності. Для збуджених станів сумарний момент імпульсу буде складатись з суми орбітального та спінового моментів за допомогою коефіцієнтів Клебша-Гордана.

2.7 Пробна функція

Варіаційний метод Рітца передбачає усереднення гамільтоніану за деяким класом пробних функцій. Вибір правильної пробної функції забезпечує отримання гарного результату, тому цьому питанню необхідно приділити значну увагу.

Представимо скалярну функцію у виразі (2.37) наступним чином (експоненційний вигляд):

$$\phi_{1, L, \ell_p, \ell_q}(r, \rho) = \sum_{k=0}^{\nu} a_k^{1, L, \ell_p, \ell_q} \exp\left(-\alpha_k^{1, L, \ell_p, \ell_q} \rho - \beta_k^{1, L, \ell_p, \ell_q} r\right), \quad (2.38)$$

де $\alpha_k^{1,L,\ell_p,\ell_q}$ та $\beta_k^{1,L,\ell_p,\ell_q}$ - варіаційні параметри, a_k^{1,L,ℓ_p,ℓ_q} — коефіцієнти, які знаходяться з умови ортогональності хвильових функцій.

Далі для зручності опустимо індекси (L, ℓ_p, ℓ_q) .

Коефіцієнт N визначається з умов нормування:

$$\begin{aligned} N^2 &= \sum_{l_p, l_q} \sum_{k, l=0}^{\nu} a_k a_l \int e^{-(\alpha_k + \alpha_l)\rho - (\beta_k + \beta_l)r} \rho^{2(\ell_q + 1)} r^{2(\ell_p + 1)} d\rho dr = \\ &= \sum_{l_p, l_q} (2(\ell_q + 1))! (2(\ell_p + 1))! \sum_{k=0}^{\nu} \sum_{l=0}^{\nu} \frac{a_k a_l}{(\alpha_{kl})^{2\ell_q + 3} (\beta_{kl})^{2\ell_p + 3}}, \end{aligned} \quad (2.39)$$

де $\alpha_{kl} = \alpha_k + \alpha_l$ and $\beta_{kl} = \beta_k + \beta_l$.

Запишемо пробну функцію (2.38) для основного стану:

$$|n = 1, 0, 0\rangle = \frac{1}{N_1} \sum_{k=0}^{\nu} a_k e^{-\alpha_k \rho - \beta_k r}, \quad a_0 = 1, \quad (2.40)$$

Відповідний нормувальний множник:

$$\begin{aligned} N_1^2 &= \sum_{k=0}^{\nu} \sum_{l=0}^{\nu} a_k a_l \int e^{-\alpha_{kl}\rho - \beta_{kl}r} d^3\rho d^3r = (4\pi)^2 (\Gamma(3))^2 \sum_{k=0}^{\nu} \sum_{l=0}^{\nu} \frac{a_k a_l}{(\alpha_{kl})^3 (\beta_{kl})^3}, \\ N_1 &= \left[4(4\pi)^2 \sum_{k=0}^{\nu} \sum_{l=0}^{\nu} \frac{a_k a_l}{(\alpha_{kl})^3 (\beta_{kl})^3} \right]^{1/2}, \quad \alpha_{kl} = \alpha_k + \alpha_l, \quad \beta_{kl} = \beta_k + \beta_l. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Разом з пробною функцією експоненційного вигляду, ми можемо використати пробну функцію гауссового вигляду. Такі функції є універсальними кандидатами для ролі пробної функції для варіаційного методу, оскільки вони задовольняють умовам збіжності на нескінченності, можуть бути знормовані на одиницю та є згодом близькими до істинних. Вони були використані в

різних варіаціях для дослідження атомних систем і зараз часто використовуються.

Гаусова форма для баріонів основного стану має вигляд:

$$|n = 1, 0, 0\rangle = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{\nu} a_k e^{-\alpha_k \rho^2 - \beta_k r^2}, \quad a_0 = 1, \quad (2.42)$$

Нормуючи функцію (2.42), отримаємо:

$$N^2 = \sum_{k=0}^{\nu} \sum_{l=0}^{\nu} a_k a_l \int e^{-\alpha_{kl} \rho^2 - \beta_{kl} r^2} d^3 \rho d^3 r = (4\pi)^2 \left(\frac{\Gamma(\frac{3}{2})}{2} \right)^2 \sum_{k=0}^{\nu} \sum_{l=0}^{\nu} \frac{a_k a_l}{(\alpha_{kl} \beta_{kl})^{3/2}},$$

$$N = \left[\pi^3 \sum_{k=0}^{\nu} \sum_{l=0}^{\nu} \frac{a_k a_l}{(\alpha_{kl} \beta_{kl})^{3/2}} \right]^{1/2}, \quad \text{де } \alpha_{kl} = \alpha_k + \alpha_l, \quad \beta_{kl} = \beta_k + \beta_l. \quad (2.43)$$

Для тотожних кварків $\alpha_k = \beta_k$, тому:

$$N = \left[\pi^3 \sum_{k=0}^{\nu} \sum_{l=0}^{\nu} \frac{a_k a_l}{(\alpha_{kl})^3} \right]^{1/2}. \quad (2.44)$$

Відповідно до розрахунків, виявляється, що гаусова форма демонструє кращу збіжність до мінімуму та є більш зручною у аналітичних розрахунках, тому далі теорія формулюється з її застосуванням.

2.8 Усереднення гамільтоніана

В цьому підрозділі проведено усереднення гамільтоніана (2.33) за гаусовою пробною функцією (2.42).

2.8.1 Усереднення кінетичної енергії

Для того, щоб усереднити кінетичну енергію (2.15) проведемо деякі попередні розрахунки.

Подіємо оператором \mathbf{q}^2 на хвильову функцію:

$$\begin{aligned} \mathbf{q}^2 \psi(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{r}) &= -\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{\nu} a_k \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho^2 \frac{\partial}{\partial \rho} \exp(-\alpha_k \rho^2 - \beta_k r^2) = \\ &= \frac{2}{N} \sum_{k=0}^{\nu} a_k \alpha_k (3 - 2\rho^2 \alpha_k) \exp(-\alpha_k \rho^2 - \beta_k r^2), \end{aligned} \quad (2.45)$$

Усереднення цього оператора:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{q}^2 \rangle &= \frac{2}{N^2} \sum_{k,l=0}^{\nu} a_k a_l \int d^3 \rho d^3 r \alpha_k (3 - 2\rho^2 \alpha_k) \exp(-\alpha_{kl} \rho^2 - \beta_{kl} r^2) = \\ &= \frac{2(4\pi)^2}{N^2} \sum_{k,l=0}^{\nu} a_k a_l \alpha_k \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \frac{1}{2(\beta_{kl})^{3/2}} \times \\ &\times \int d\rho \rho^2 (3 - 2\rho^2 \alpha_k) \exp[-(\alpha_{kl})\rho^2] = \\ &= \frac{(4\pi)^2 \sqrt{\pi}}{2N^2} \sum_{k,l=0}^{\nu} a_k a_l \frac{\alpha_k}{2(\alpha_{kl} \beta_{kl})^{3/2}} \int dt \sqrt{t} \left(3 - \frac{2\alpha_k}{\alpha_{kl}} t\right) e^{-t} = \\ &= \frac{(4\pi)^2 \sqrt{\pi}}{2N^2} \sum_{k,l=0}^{\nu} a_k a_l \frac{\alpha_k}{2(\alpha_{kl} \beta_{kl})^{3/2}} \left[3\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) - \frac{2\alpha_k}{\alpha_{kl}} \Gamma\left(\frac{5}{2}\right)\right] = \\ &= \frac{(4\pi)^2 \pi 3}{2N^2} \sum_{k,l=0}^{\nu} a_k a_l \frac{\alpha_k \alpha_l}{2(\alpha_{kl} \beta_{kl})^{3/2} \alpha_{kl}} = \frac{6\pi^3}{N^2} \sum_{k,l=0}^{\nu} a_k a_l \frac{\alpha_k \alpha_l}{(\alpha_{kl})^{5/2} (\beta_{kl})^{3/2}}. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Середнє значення оператора p отримується заміною варіаційних параметрів $\alpha \rightarrow \beta$.

Таким чином, кінетична енергія, усереднена за гаусовою пробною функцією, набуде вигляду:

$$\langle T \rangle = \frac{3\pi^3}{N^2} \sum_{k,l=0}^{\nu} a_k a_l \frac{\mu_q^{-1} \alpha_k \alpha_l \beta_{kl} + \mu_p^{-1} \beta_k \beta_l \alpha_{kl}}{(\alpha_{kl} \beta_{kl})^{5/2}}. \quad (2.47)$$

Для тотожних кварків ($m_1 = m_2 = m_3 = m$):

$$\langle T \rangle = \frac{12\pi^3}{mN^2} \sum_{k=0}^{\nu} \sum_{l=0}^{\nu} a_k a_l \frac{\alpha_k \alpha_l}{\alpha_{kl}^4}. \quad (2.48)$$

2.8.2 Усереднення кулонівської частини корнеллівського потенціалу

Кулонівський потенціал взаємодії i того та j того кварків записується, згідно з (2.22), у вигляді:

$$V_{\text{Coul}}(r_{ij}) = -\frac{2}{3} \frac{\alpha_s (\mu_{ij}^2)}{|b_{ij}\mathbf{p} - c_{ij}\mathbf{r}|}, \quad (2.49)$$

Надалі, для зручності опустимо залежність константи сильного зв'язку від параметризації. Можна помітити, що середнє значення потенціалу залежить від абсолютних значень $|b_{ij}|$ та $|c_{ij}|$. Справді, роблячи заміну (наприклад

$\mathbf{r} \rightarrow -\mathbf{r}$) ми отримаємо:

$$\begin{aligned} \langle V(\mathbf{r}_{ij}) \rangle &\sim \int V(|b_{ij}\boldsymbol{\rho} - c_{ij}\mathbf{r}|) \exp(-\alpha_{kl}\rho^2 - \beta_{kl}r^2) d^3\rho d^3r = \\ &= \int V(|b_{ij}\boldsymbol{\rho} + c_{ij}\mathbf{r}|) \exp(-\alpha_{kl}\rho^2 - \beta_{kl}r^2) d^3\rho d^3r. \end{aligned} \quad (2.50)$$

Таким чином, надалі ми будемо використовувати абсолютне значення перепозначивши b та c : $b_{ij} = |b_{ij}|$ та $c_{ij} = |c_{ij}|$. Усереднення виразу (2.49):

$$\begin{aligned} \langle V_{\text{Coul}}(\mathbf{r}_{ij}) \rangle &= -\frac{2}{3} \frac{\alpha_s}{N^2} \sum_{k,l=0}^{\nu} a_k a_l \int \frac{1}{|b_{ij}\boldsymbol{\rho} - c_{ij}\mathbf{r}|} \exp(-\alpha_{kl}\rho^2 - \beta_{kl}r^2) d^3\rho d^3r = \\ &= -\frac{2}{3} \frac{\alpha_s}{N^2} \sum_{k,l=0}^{\nu} a_k a_l \int d\Omega_\rho d\Omega_r dr d\rho \rho^2 r^2 \exp(-\alpha_{kl}\rho^2 - \beta_{kl}r^2) \times \\ &\quad \times \begin{cases} \frac{1}{b_{ij}\rho} \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(\frac{c_{ij}r}{b_{ij}\rho}\right)^\ell P_\ell(\cos\theta), & b_{ij}\rho > c_{ij}r \\ \frac{1}{c_{ij}r} \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(\frac{b_{ij}\rho}{c_{ij}r}\right)^\ell P_\ell(\cos\theta), & b_{ij}\rho < c_{ij}r \end{cases} = \\ &= -\frac{2}{3} \alpha_s \frac{(4\pi)^2}{N^2} \sum_{k,l=0}^{\nu} a_k a_l \times \\ &\quad \times \left[\frac{1}{b_{ij}} \int_0^\infty dr r^2 \int_{\frac{c_{ij}}{b_{ij}}r}^\infty d\rho \rho \exp(-\alpha_{kl}\rho^2 - \beta_{kl}r^2) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{c_{ij}} \int_0^\infty d\rho \rho^2 \int_{\frac{b_{ij}}{c_{ij}}\rho}^\infty dr r \exp(-\alpha_{kl}\rho^2 - \beta_{kl}r^2) \right]. \end{aligned} \quad (2.51)$$

Обчислюючи інтеграли, отримаємо вираз для усередненого значення кулонівської частини:

$$\langle V_{\text{Coul}}(\mathbf{r}_{ij}) \rangle = -\frac{2}{3} \alpha_s \frac{2\pi^{5/2}}{N^2} \sum_{k,l=0}^{\nu} \frac{a_k a_l}{\alpha_{kl} \beta_{kl} \sqrt{b_{ij}^2 \beta_{kl} + c_{ij}^2 \alpha_{kl}}}. \quad (2.52)$$

У випадку тотожних кварків перепишемо у вигляді:

$$\langle V_{\text{Coul}}(\mathbf{r}_{ij}) \rangle = -\frac{2}{3} \alpha_s \frac{2\pi^{5/2}}{N^2} \sum_{k,l=0}^{\nu} \frac{a_k a_l}{\alpha_{kl}^{5/2}}. \quad (2.53)$$

2.8.3 Усереднення потенціалу конфаймента

Тепер проведемо усереднення виразу (2.25) за гаусовою пробною функцією:

$$\begin{aligned} \langle V_{\text{conf}}(r_{ij}) \rangle &= \frac{A}{N^2} \sum_{k,l=0}^{\nu} a_k a_l \int d^3 r d^3 \rho |b_{ij} \boldsymbol{\rho} - c_{ij} \mathbf{r}| \exp(-\alpha_{kl} \rho^2 - \beta_{kl} r^2) = \\ &= \frac{A}{N^2} \sum_{k,l=0}^{\nu} a_k a_l \int d\Omega_{\rho} d\Omega_r dr d\rho \rho^2 r^2 \exp(-\alpha_{kl} \rho^2 - \beta_{kl} r^2) \times \\ &\quad \times \frac{b_{ij}^2 \rho^2 + c_{ij}^2 r^2 - 2b_{ij} c_{ij} r \rho \cos \theta}{|b_{ij} \boldsymbol{\rho} - c_{ij} \mathbf{r}|} = I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned} \quad (2.54)$$

Інтегралі I_1 та I_2 виражаються наступним чином:

$$\begin{aligned}
I_1 &= \frac{A}{N^2} \sum_{k,l=0}^{\nu} a_k a_l b_{ij}^2 \int d\Omega_\rho d\Omega_r dr d\rho \rho^4 r^2 \exp(-\alpha_{kl}\rho^2 - \beta_{kl}r^2) \frac{1}{|b_{ij}\boldsymbol{\rho} - c_{ij}\mathbf{r}|} = \\
&= \frac{A}{N^2} \sum_{k,l=0}^{\nu} a_k a_l b_{ij}^2 \int d\Omega_\rho d\Omega_r dr d\rho \rho^4 r^2 \exp(-\alpha_{kl}\rho^2 - \beta_{kl}r^2) \times \\
&\quad \times \begin{cases} \frac{1}{b_{ij}\rho} \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(\frac{c_{ij}r}{b_{ij}\rho}\right)^\ell P_\ell(\cos\theta), & b_{ij}\rho > c_{ij}r \\ \frac{1}{c_{ij}r} \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(\frac{b_{ij}\rho}{c_{ij}r}\right)^\ell P_\ell(\cos\theta), & b_{ij}\rho < c_{ij}r \end{cases} = \\
&= \frac{A}{N^2} (4\pi)^2 \sum_{k,l=0}^{\nu} a_k a_l \left[b_{ij} \int_0^\infty dr r^2 \int_{\frac{c_{ij}}{b_{ij}}r}^\infty d\rho \rho^3 \exp(-\alpha_{kl}\rho^2 - \beta_{kl}r^2) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{b_{ij}^2}{c_{ij}} \int_0^\infty d\rho \rho^4 \int_{\frac{b_{ij}}{c_{ij}}\rho}^\infty dr r \exp(-\alpha_{kl}\rho^2 - \beta_{kl}r^2) \right] = \\
&= i_1^{32} + i_1^{41}. \\
I_2 &= \frac{A}{N^2} \sum_{k,l=0}^{\nu} a_k a_l c_{ij}^2 \int d\Omega_\rho d\Omega_r dr d\rho \rho^2 r^4 \exp(-\alpha_{kl}\rho^2 - \beta_{kl}r^2) \frac{1}{|b_{ij}\boldsymbol{\rho} - c_{ij}\mathbf{r}|} = \\
&= \frac{A}{N^2} \sum_{k,l=0}^{\nu} a_k a_l c_{ij}^2 \int d\Omega_\rho d\Omega_r dr d\rho \rho^2 r^4 \exp(-\alpha_{kl}\rho^2 - \beta_{kl}r^2) \times \\
&\quad \times \begin{cases} \frac{1}{b_{ij}\rho} \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(\frac{c_{ij}r}{b_{ij}\rho}\right)^\ell P_\ell(\cos\theta), & b_{ij}\rho > c_{ij}r \\ \frac{1}{c_{ij}r} \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(\frac{b_{ij}\rho}{c_{ij}r}\right)^\ell P_\ell(\cos\theta), & b_{ij}\rho < c_{ij}r \end{cases} = \\
&= \frac{A}{N^2} (4\pi)^2 \sum_{k,l=0}^{\nu} a_k a_l \left[\frac{c_{ij}^2}{b_{ij}} \int_0^\infty dr r^4 \int_{\frac{c_{ij}}{b_{ij}}r}^\infty d\rho \rho \exp(-\alpha_{kl}\rho^2 - \beta_{kl}r^2) + \right. \\
&\quad \left. + c_{ij} \int_0^\infty d\rho \rho^2 \int_{\frac{b_{ij}}{c_{ij}}\rho}^\infty dr r^3 \exp(-\alpha_{kl}\rho^2 - \beta_{kl}r^2) \right] = \\
&= i_2^{14} + i_2^{23}.
\end{aligned}$$

Також для I_3 :

$$\begin{aligned}
I_3 &= -\frac{2A}{N^2} \times \\
&\sum_{k,l=0}^{\nu} a_k a_l b_{ij} c_{ij} \int d\Omega_{\rho} d\Omega_r dr d\rho \rho^3 r^3 \exp(-\alpha_{kl}\rho^2 - \beta_{kl}r^2) \frac{\cos \theta}{|b_{ij}\rho - c_{ij}r|} = \\
&= -\frac{2A}{N^2} \sum_{k,l=0}^{\nu} a_k a_l b_{ij} c_{ij} \int d\Omega_{\rho} d\Omega_r dr d\rho \rho^3 r^3 \exp(-\alpha_{kl}\rho^2 - \beta_{kl}r^2) \cos \theta \times \\
&\times \begin{cases} \frac{1}{b_{ij}\rho} \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(\frac{c_{ij}r}{b_{ij}\rho}\right)^{\ell} P_{\ell}(\cos \theta), & b_{ij}\rho > c_{ij}r \\ \frac{1}{c_{ij}r} \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(\frac{b_{ij}\rho}{c_{ij}r}\right)^{\ell} P_{\ell}(\cos \theta), & b_{ij}\rho < c_{ij}r \end{cases}
\end{aligned} \tag{2.56}$$

Отже отримаємо:

$$\begin{aligned}
I_3 &= -\frac{A}{N^2} \frac{2(4\pi)^2}{3} \sum_{k,l=0}^{\nu} a_k a_l \left[\frac{c_{ij}^2}{b_{ij}} \int_0^{\infty} dr r^4 \int_{\frac{c_{ij}}{b_{ij}}r}^{\infty} d\rho \rho \exp(-\alpha_{kl}\rho^2 - \beta_{kl}r^2) + \right. \\
&\left. + \frac{b_{ij}^2}{c_{ij}} \int_0^{\infty} d\rho \rho^4 \int_{\frac{b_{ij}}{c_{ij}}r}^{\infty} dr r \exp(-\alpha_{kl}\rho^2 - \beta_{kl}r^2) \right] = -\frac{2}{3} (i_2^{14} + i_1^{14}).
\end{aligned} \tag{2.57}$$

Остаточно, середнє значення потенціалу конфаймента, отримаємо:

$$\langle V_{\text{conf}}(r_{ij}) \rangle = \frac{2\pi^{5/2} A}{N^2} \sum_{k,l=0}^{\nu} a_k a_l \frac{\sqrt{b_{ij}^2 \beta_{kl} + c_{ij}^2 \alpha_{kl}}}{\alpha_{kl}^2 \beta_{kl}^2}, \tag{2.58}$$

відповідно для тотожних кварків:

$$\langle V_{\text{conf}}(r_{ij}) \rangle = \frac{2\pi^{5/2} A}{N^2} \sum_{k,l=0}^{\nu} \frac{a_k a_l}{\alpha_{kl}^{7/2}}. \tag{2.59}$$

2.8.4 Усереднення контактних термів

Контактними термами називаються такі члени гамільтоніана, до складу яких входить дельта функція Дірака. В рамках побудованої моделі такими є вирази (2.29) та (2.30).

Обраховуючи середнє значення для дельта функції:

$$\langle \delta(\mathbf{r}_{ij}) \rangle = \frac{1}{N^2} \sum_{k,l=0}^{\nu} a_k a_l \int d^3 r d^3 \rho \delta(b_{ij} \boldsymbol{\rho} - c_{ij} \mathbf{r}) \exp(-\alpha_{kl} \rho^2 - \beta_{kl} r^2). \quad (2.60)$$

Скористуємось заміною:

$$\mathbf{x} = b_{ij} \boldsymbol{\rho} - c_{ij} \mathbf{r}, \quad d^3 \boldsymbol{\rho} = \frac{d^3 x}{b_{ij}^3}. \quad (2.61)$$

Отримаємо інтеграл:

$$\begin{aligned} \langle \delta(\mathbf{r}_{ij}) \rangle &= \frac{1}{N^2} \sum_{k,l=0}^{\nu} \frac{a_k a_l}{b_{ij}^3} \int d^3 r d^3 x \delta(\mathbf{x}) \times \\ &\times \exp \left[-\frac{\alpha_{kl}}{b_{ij}^2} x^2 - \frac{b_{ij}^2 \beta_{kl} + c_{ij}^2 \alpha_{kl}}{b_{ij}^2} r^2 - 2 \frac{\alpha_{kl} c_{ij}}{b_{ij}} \mathbf{x} \cdot \mathbf{r} \right] = \\ &= \frac{4\pi}{N^2} \sum_{k,l=0}^{\nu} \frac{a_k a_l}{b_{ij}^3} \int dr r^2 \exp \left(-\frac{b_{ij}^2 \beta_{kl} + c_{ij}^2 \alpha_{kl}}{b_{ij}^2} r^2 \right). \end{aligned} \quad (2.62)$$

Відповідно вираз для середнього значення дельта функції буде мати вигляд:

$$\langle \delta(\mathbf{r}_{ij}) \rangle = \frac{\pi^{3/2}}{N^2} \sum_{k,l=0}^{\nu} \frac{a_k a_l}{(b_{ij}^2 \beta_{kl} + c_{ij}^2 \alpha_{kl})^{3/2}}. \quad (2.63)$$

Для тотожніх кварків:

$$\langle \delta(\mathbf{r}_{ij}) \rangle = \frac{\pi^{3/2}}{N^2} \sum_{k,l=0}^{\nu} \frac{a_k a_l}{\alpha_{kl}^{3/2}}. \quad (2.64)$$

Підставляючи (2.63) у (2.29) та (2.30), відповідно отримаємо середні значення контактних термів:

$$\langle H_D \rangle = \left(\frac{1}{m_i^2} + \frac{1}{m_j^2} \right) \frac{\alpha_s \pi^{5/2}}{3N^2} \sum_{k,l=0}^{\nu} \frac{a_k a_l}{(b_{ij}^2 \beta_{kl} + c_{ij}^2 \alpha_{kl})^{3/2}}, \quad (2.65)$$

$$\langle H_{ssc} \rangle = \frac{4\alpha_s \pi^{5/2}}{9N^2 m_i m_j} \langle \mathbf{s}_i \cdot \mathbf{s}_j \rangle \sum_{k,l=0}^{\nu} \frac{a_k a_l}{(b_{ij}^2 \beta_{kl} + c_{ij}^2 \alpha_{kl})^{3/2}}. \quad (2.66)$$

Середнє значення добутку операторів спіну для (2.30) отримаємо з симетрії спінової хвильової функції:

$$\langle \mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{s}_3 \rangle = \frac{1}{2} \left[s(s+1) - \frac{3}{2} \right], \quad (2.67)$$

$$\langle \mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_2 \rangle = \langle \mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_3 \rangle = \frac{1}{4} \left[J(J+1) - s(s+1) - \frac{3}{4} \right], \quad (2.68)$$

де J — спін баріона та s — спін пари кварків.

2.8.5 Усереднення терму H_{mv}

До складу (2.30) входить множник \mathbf{r}_i^4 , усереднимо його.

Згідно з (2.5), перепишемо \mathbf{r}_i^4 вигляді:

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{p}_i^4 \rangle &= \langle (f_i \mathbf{q} + d_i \mathbf{p})^4 \rangle = \langle (f_i^2 \mathbf{q}^2 + d_i^2 \mathbf{p}^2 + 2f_i d_i \mathbf{q} \cdot \mathbf{p})^2 \rangle = \\
&= \langle f_i^4 \mathbf{q}^4 + d_i^4 \mathbf{p}^4 + 2f_i^2 d_i^2 \mathbf{q}^2 \mathbf{p}^2 + 4f_i^2 d_i^2 (\mathbf{q} \cdot \mathbf{p})^2 + 2f_i d_i (f_i^2 \mathbf{q}^2 + d_i^2 \mathbf{p}^2) \mathbf{q} \cdot \mathbf{p} \rangle.
\end{aligned} \tag{2.69}$$

Останній член у виразі (2.69) зникає в наслідок симетрії основного стану баріонів (інтеграл по кутах дорівнює нулю у, наприклад, сферичній системі координат), також ця симетрія дозволяє спростити передостанній член (2.69) наступним чином:

$$\langle (\mathbf{q} \cdot \mathbf{p})^2 \rangle = \frac{1}{3} \langle \mathbf{q}^2 \mathbf{p}^2 \rangle, \tag{2.70}$$

Отже, запишемо спрощений вигляд для \mathbf{p}_i^4 :

$$\langle \mathbf{p}_i^4 \rangle = \left\langle f_i^4 \mathbf{q}^4 + d_i^4 \mathbf{p}^4 + \frac{10}{3} f_i^2 d_i^2 \mathbf{q}^2 \mathbf{p}^2 \right\rangle. \tag{2.71}$$

Запишемо явний вираз для оператора імпульсу користуючись обрахованими значеннями, що використовувались для оператора кінетичної енергії (2.45):

$$\begin{aligned}
\mathbf{q}q^2 \psi(r, \rho) &= -i \frac{2}{N} \sum_{k=0}^{\nu} a_k \alpha_k \frac{\partial}{\partial \rho} (3 - 2\rho^2 \alpha_k) \exp(-\alpha_k \rho^2 - \beta_k r^2) = \\
&= -i \frac{2}{N} \sum_{k=0}^{\nu} a_k \alpha_k [-4\alpha_k \rho - 2\alpha_k (3 - 2\rho^2 \alpha_k) \rho] \exp(-\alpha_k \rho^2 - \beta_k r^2) = \\
&= i \frac{4}{N} \sum_{k=0}^{\nu} a_k \alpha_k^2 \rho (5 - 2\alpha_k \rho^2) \exp(-\alpha_k \rho^2 - \beta_k r^2), \tag{2.72}
\end{aligned}$$

та відповідно

$$\begin{aligned}
 \mathbf{q}^4 \psi(r, \rho) &= \frac{4}{N} \sum_{k=0}^{\nu} a_k \alpha_k^2 \frac{\partial}{\partial \rho} \rho (5 - 2\alpha_k \rho^2) \exp(-\alpha_k \rho^2 - \beta_k r^2) = \\
 &= \frac{4}{N} \sum_{k=0}^{\nu} a_k \alpha_k^2 [3(5 - 2\alpha_k \rho^2) - 4\alpha_k \rho^2 - 2\alpha_k \rho^2 (5 - 2\alpha_k \rho^2)] \psi(r, \rho) = \\
 &= \frac{4}{N} \sum_{k=0}^{\nu} a_k \alpha_k^2 (15 - 20\alpha_k \rho^2 + 4\alpha_k^2 \rho^4) \psi(r, \rho). \quad (2.73)
 \end{aligned}$$

Усреднюючи (2.73) з допоміжною заміною змінних:

$$\begin{aligned}
 \langle \mathbf{q}^4 \rangle &= \frac{4}{N^2} \sum_{l,k=0}^{\nu} a_k a_l \alpha_k^2 \int d^3 \rho d^3 r (15 - 20\alpha_k \rho^2 + 4\alpha_k^2 \rho^4) e^{-\alpha_k \rho^2 - \beta_k r^2} = \\
 &= \frac{(4\pi)^2}{N^2} \sum_{l,k=0}^{\nu} a_k a_l \frac{\alpha_k^2}{(\alpha_{kl} \beta_{kl})^{3/2}} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \times \\
 &\quad \times \int_0^{\infty} dt t^{1/2} \left[15 - 20 \frac{\alpha_k}{\alpha_{kl}} t + 4 \left(\frac{\alpha_k}{\alpha_{kl}} \right)^2 t^2 \right] e^{-t} = \\
 &= \frac{4\pi^3}{N^2} \sum_{l,k=0}^{\nu} a_k a_l \frac{\alpha_k^2}{(\alpha_{kl} \beta_{kl})^{3/2}} \left[15 - 30 \frac{\alpha_k}{\alpha_{kl}} + 15 \left(\frac{\alpha_k}{\alpha_{kl}} \right)^2 \right] = \\
 &= \frac{60\pi^3}{N^2} \sum_{l,k=0}^{\nu} a_k a_l \frac{\alpha_k^2 \alpha_l^2}{\alpha_{kl}^{7/2} \beta_{kl}^{3/2}}. \quad (2.74)
 \end{aligned}$$

Середнє значення $\langle \mathbf{p}^4 \rangle$ можна отримати враховуючи вище згаданий перехід для будь-якої степені n : $\langle \mathbf{p}^n \rangle \leftrightarrow \langle \mathbf{q}^n \rangle$ при взаємній заміні варіаційних параметрів $\alpha \leftrightarrow \beta$, таким чином запишемо:

$$\langle \mathbf{p}^4 \rangle = \frac{60\pi^3}{N^2} \sum_{l,k=0}^{\nu} a_k a_l \frac{\beta_k^2 \beta_l^2}{\alpha_{kl}^{3/2} \beta_{kl}^{7/2}}. \quad (2.75)$$

Аналогічно усереднимо вираз (2.70):

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{q}^2 \mathbf{p}^2 \rangle &= \frac{4}{N^2} \sum_{k,l=0}^{\nu} a_k a_l \alpha_k \beta_k \times \\ &\times \int d^3 \rho d^3 r (3 - 2\rho^2 \alpha_k) (3 - 2r^2 \beta_k) \exp(-\alpha_k \rho^2 - \beta_k r^2) = \quad (2.76) \\ &= \frac{36\pi^3}{N^2} \sum_{k,l=0}^{\nu} a_k a_l \frac{\alpha_k \alpha_l \beta_k \beta_l}{(\alpha_{kl} \beta_{kl})^{5/2}}. \end{aligned}$$

Отже, збираючи вирази (2.74), (2.75), (2.76), отримаємо середнє значення (2.69):

$$\langle \mathbf{p}_i^4 \rangle = \frac{60\pi^3}{N^2} \sum_{k,l=0}^{\nu} a_k a_l \left[f_i^4 \frac{\alpha_k^2 \alpha_l^2}{\alpha_{kl}^{7/2} \beta_{kl}^{3/2}} + d_i^4 \frac{\beta_k^2 \beta_l^2}{\alpha_{kl}^{3/2} \beta_{kl}^{7/2}} + 2f_i^2 d_i^2 \frac{\alpha_k \alpha_l \beta_k \beta_l}{(\alpha_{kl} \beta_{kl})^{5/2}} \right]. \quad (2.77)$$

Для тотожніх кварків відповідно:

$$\langle \mathbf{p}_i^4 \rangle = \frac{320\pi^3}{3N^2} \sum_{k,l=0}^{\nu} a_k a_l \frac{(\alpha_k \alpha_l)^2}{\alpha_{kl}^5}. \quad (2.78)$$

Таким чином спрощуючи (2.77) та підставляючи його у вираз для терму (2.28) отримаємо:

$$\langle H_{mv} \rangle = -\frac{30\pi^3}{4m_i^3 N^2} \sum_{k,l=0}^{\nu} \frac{a_k a_l \left(f_i^2 \frac{\alpha_k \alpha_l}{\alpha_{kl}} + d_i^2 \frac{\beta_k \beta_l}{\beta_{kl}} \right)^2}{(\alpha_{kl} \beta_{kl})^{3/2}}. \quad (2.79)$$

2.8.6 Усереднення терму H_{ret}

Спочатку розрахуємо частину $\langle r_{ij}^{-1} \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{p}_j \rangle$ з (2.31):

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{p}_j \psi(\rho, r) &= [f_i f_j q^2 + (f_i d_j + f_j d_i) \mathbf{q} \cdot \mathbf{p} + d_i d_j p^2] \psi(\rho, r) = \\ &= - \sum_k a_k [-2 f_i f_j \alpha_k (3 - 2 \alpha_k \rho^2) + 4 (f_i d_j + f_j d_i) \alpha_k \beta_k \mathbf{p} \cdot \mathbf{r} - \\ &\quad - 2 d_i d_j \beta_k (3 - 2 \beta_k r^2)] \exp(-\alpha_k \rho^2 - \beta_k r^2). \quad (2.80) \end{aligned}$$

Введемо нові координати для спрощення. Тут і нижче трьома крапками позначемо члени, що обнуляться внаслідок зазначеної вище симетрії

основного стану баріонів, отже:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\rho} &= \frac{1}{\sqrt{\alpha_{kl}c_{ij}^2 + \beta_{kl}b_{ij}^2}} \left(b_{ij} \sqrt{\frac{\beta_{kl}}{\alpha_{kl}}} \mathbf{X} + c_{ij} \mathbf{Y} \right), \\
\mathbf{r} &= \frac{1}{\sqrt{\alpha_{kl}c_{ij}^2 + \beta_{kl}b_{ij}^2}} \left(c_{ij} \sqrt{\frac{\alpha_{kl}}{\beta_{kl}}} \mathbf{X} - b_{ij} \mathbf{Y} \right), \\
\mathbf{r}_{ij} &= \sqrt{\frac{\alpha_{kl}c_{ij}^2 + \beta_{kl}b_{ij}^2}{\alpha_{kl}\beta_{kl}}} \mathbf{X}, \quad d^3\rho d^3r = \frac{d^3X d^3Y}{(\alpha_{kl}\beta_{kl})^{3/2}}, \\
\exp(-\alpha_{kl}\rho^2 - \beta_{kl}r^2) &= \exp(-X^2 - Y^2), \\
\alpha_k(3 - 2\alpha_k\rho^2) &= \alpha_k \left[3 - 2\alpha_k \frac{1}{\alpha_{kl}c_{ij}^2 + \beta_{kl}b_{ij}^2} \left(b_{ij}^2 \frac{\beta_{kl}}{\alpha_{kl}} X^2 + c_{ij}^2 Y^2 + \dots \right) \right] = \\
&= \left[3\alpha_k - 2 \frac{\alpha_k^2}{\alpha_{kl}(\alpha_{kl}c_{ij}^2 + \beta_{kl}b_{ij}^2)} (b_{ij}^2\beta_{kl}X^2 + c_{ij}^2\alpha_{kl}Y^2 + \dots) \right] = \\
&= \left[\frac{3}{2}\alpha_{kl} - \frac{\alpha_k^2 + \alpha_l^2}{\alpha_{kl}(\alpha_{kl}c_{ij}^2 + \beta_{kl}b_{ij}^2)} (b_{ij}^2\beta_{kl}X^2 + c_{ij}^2\alpha_{kl}Y^2 + \dots) \right] \\
\beta_k(3 - 2\beta_k r^2) &= \left[\frac{3}{2}\beta_{kl} - \frac{\beta_k^2 + \beta_l^2}{\beta_{kl}(\alpha_{kl}c_{ij}^2 + \beta_{kl}b_{ij}^2)} (c_{ij}^2\alpha_{kl}X^2 + b_{ij}^2\beta_{kl}Y^2 + \dots) \right], \\
\alpha_k\beta_k \boldsymbol{\rho} \cdot \mathbf{r} &= b_{ij}c_{ij} \frac{(\alpha_k\beta_k + \alpha_l\beta_l)}{2(\alpha_{kl}c_{ij}^2 + \beta_{kl}b_{ij}^2)} (X^2 - Y^2 + \dots).
\end{aligned} \tag{2.81}$$

Використовуючи нові координати, запишемо усереднення (2.80):

$$\begin{aligned}
\langle r_{ij}^{-1} \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{p}_j \rangle &= \\
&= \frac{(4\pi)^2}{N^2} \sum_{l,k=0}^{\nu} a_l a_k \frac{1}{(\alpha_{kl}\beta_{kl})^{3/2}} \sqrt{\frac{\alpha_{kl}\beta_{kl}}{\alpha_{kl}c_{ij}^2 + \beta_{kl}b_{ij}^2}} \int_0^\infty dX dY XY^2 e^{-X^2-Y^2} \times \\
&\times \left\{ 2f_i f_j \left[\frac{3}{2}\alpha_{kl} - \frac{\alpha_k^2 + \alpha_l^2}{\alpha_{kl}(\alpha_{kl}c_{ij}^2 + \beta_{kl}b_{ij}^2)} (b_{ij}^2\beta_{kl}X^2 + c_{ij}^2\alpha_{kl}Y^2 + \dots) \right] + \right. \\
&+ 2d_i d_j \left[\frac{3}{2}\beta_{kl} - \frac{\beta_k^2 + \beta_l^2}{\beta_{kl}(\alpha_{kl}c_{ij}^2 + \beta_{kl}b_{ij}^2)} (c_{ij}^2\alpha_{kl}X^2 + b_{ij}^2\beta_{kl}Y^2 + \dots) \right] - \\
&\left. - 4(f_i d_j + f_j d_i) b_{ij} c_{ij} \frac{(\alpha_k \beta_k + \alpha_l \beta_l)}{2(\alpha_{kl}c_{ij}^2 + \beta_{kl}b_{ij}^2)} (X^2 - Y^2 + \dots) \right\} = \\
&= \frac{4\pi^2}{N^2} \sum_{l,k=0}^{\nu} \frac{a_l a_k}{\alpha_{kl}\beta_{kl} \sqrt{\alpha_{kl}c_{ij}^2 + \beta_{kl}b_{ij}^2}} \times \\
&\times \left\{ 2f_i f_j \left[\frac{3}{2}\alpha_{kl}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) - \frac{\alpha_k^2 + \alpha_l^2}{\alpha_{kl}(\alpha_{kl}c_{ij}^2 + \beta_{kl}b_{ij}^2)} (b_{ij}^2\beta_{kl}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) + c_{ij}^2\alpha_{kl}\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)) \right] + \right. \\
&+ 2d_i d_j \left[\frac{3}{2}\beta_{kl}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) - \frac{\beta_k^2 + \beta_l^2}{\beta_{kl}(\alpha_{kl}c_{ij}^2 + \beta_{kl}b_{ij}^2)} (c_{ij}^2\alpha_{kl}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) + b_{ij}^2\beta_{kl}\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)) \right] - \\
&\left. - 2(f_i d_j + f_j d_i) b_{ij} c_{ij} \frac{(\alpha_k \beta_k + \alpha_l \beta_l)}{\alpha_{kl}c_{ij}^2 + \beta_{kl}b_{ij}^2} (\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) - \Gamma\left(\frac{5}{2}\right)) \right\} = \\
&= \frac{2\pi^{5/2}}{N^2} \sum_{l,k=0}^{\nu} \frac{a_l a_k}{\alpha_{kl}\beta_{kl} \sqrt{\alpha_{kl}c_{ij}^2 + \beta_{kl}b_{ij}^2}} \times \\
&\times \left\{ f_i f_j \left[\alpha_{kl} + \frac{4\alpha_k \alpha_l}{\alpha_{kl}} - \frac{c_{ij}^2(\alpha_k^2 + \alpha_l^2)}{\alpha_{kl}c_{ij}^2 + \beta_{kl}b_{ij}^2} \right] + \right. \\
&+ d_i d_j \left[\beta_{kl} + \frac{4\beta_k \beta_l}{\beta_{kl}} - \frac{b_{ij}^2(\beta_k^2 + \beta_l^2)}{\alpha_{kl}c_{ij}^2 + \beta_{kl}b_{ij}^2} \right] + \\
&\left. + (f_i d_j + f_j d_i) b_{ij} c_{ij} \frac{\alpha_k \beta_k + \alpha_l \beta_l}{\alpha_{kl}c_{ij}^2 + \beta_{kl}b_{ij}^2} \right\}.
\end{aligned} \tag{2.82}$$

Наступним усереднимо $\langle r_{ij}^{-3} \mathbf{r}_{ij} \cdot (\mathbf{r}_{ij} \cdot \mathbf{p}_i) \mathbf{p}_j \rangle$ з виразу (2.31), за допомогою введених вище змінних (2.81):

$$\begin{aligned}
& \mathbf{r}_{ij} \cdot (\mathbf{r}_{ij} \cdot \mathbf{p}_i) \mathbf{p}_j \exp(-\alpha_k \rho - \beta_k r^2) = \\
& = -\mathbf{r}_{ij} \cdot \left[\mathbf{r}_{ij} \cdot \left(f_i \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\rho}} + d_i \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \right] \left(f_j \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\rho}} \mathbf{q} + d_j \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \exp(-\alpha_k \rho^2 - \beta_k r^2) = \\
& = -\frac{\alpha_{kl} c_{ij}^2 + \beta_{kl} b_{ij}^2}{\alpha_{kl} \beta_{kl}} \sum_{a,b=1}^3 X_a X_b \times \\
& \times \left[f_i f_j \frac{\partial^2}{\partial \rho_a \partial \rho_b} + d_i d_j \frac{\partial^2}{\partial r_a \partial r_b} + (f_i d_j + f_j d_i) \frac{\partial^2}{\partial \rho_a \partial r_b} \right] \exp(-\alpha_k \rho^2 - \beta_k r^2) = \\
& = \frac{\alpha_{kl} c_{ij}^2 + \beta_{kl} b_{ij}^2}{\alpha_{kl} \beta_{kl}} \exp(-\alpha_k \rho^2 - \beta_k r^2) 2 \sum_{a,b} X_a X_b \times \\
& \times [f_i f_j \alpha_k (\delta_{ab} - 3\alpha_k \rho_a \rho_b) + d_i d_j \beta_k (\delta_{ab} - 3\beta_k r_a r_b) - 2(f_i d_j + f_j d_i) \alpha_k \beta_k \rho_a r_b] = \\
& = \frac{\alpha_{kl} c_{ij}^2 + \beta_{kl} b_{ij}^2}{\alpha_{kl} \beta_{kl}} \exp(-X^2 - Y^2) \times \\
& \times \left\{ 2f_i f_j \alpha_k \left[X^2 - 2 \frac{\alpha_k}{\alpha_{kl} c_{ij}^2 + \beta_{kl} b_{ij}^2} \left(\mathbf{X} \cdot (b_{ij} \sqrt{\frac{\beta_{kl}}{\alpha_{kl}}} \mathbf{X} + c_{ij} \mathbf{Y}) \right)^2 \right] + \right. \\
& + 2d_i d_j \beta_k \left[X^2 - 2 \frac{\beta_k}{\alpha_{kl} c_{ij}^2 + \beta_{kl} b_{ij}^2} \left(\mathbf{X} \cdot (c_{ij} \sqrt{\frac{\alpha_{kl}}{\beta_{kl}}} \mathbf{X} - b_{ij} \mathbf{Y}) \right)^2 \right] - \\
& \left. - 4(f_i d_j + f_j d_i) \alpha_k \beta_k (\mathbf{X} \cdot \boldsymbol{\rho}) [X^4 - (\mathbf{X} \cdot \mathbf{Y})^2] \right\} = \\
& = \frac{\alpha_{kl} c_{ij}^2 + \beta_{kl} b_{ij}^2}{\alpha_{kl} \beta_{kl}} \exp(-X^2 - Y^2) \times \\
& \times \left\{ 2f_i f_j \alpha_k \left[X^2 - 2 \frac{\alpha_k}{\alpha_{kl} c_{ij}^2 + \beta_{kl} b_{ij}^2} \left(b_{ij}^2 \frac{\beta_{kl}}{\alpha_{kl}} X^4 + c_{ij}^2 (\mathbf{X} \cdot \mathbf{Y})^2 + \dots \right) \right] + \right. \\
& + 2d_i d_j \beta_k \left[X^2 - 2 \frac{\beta_k}{\alpha_{kl} c_{ij}^2 + \beta_{kl} b_{ij}^2} \left(c_{ij}^2 \frac{\alpha_{kl}}{\beta_{kl}} X^4 + b_{ij}^2 (\mathbf{X} \cdot \mathbf{Y})^2 + \dots \right) \right] - \\
& \left. - 4(f_i d_j + f_j d_i) \frac{\alpha_k \beta_k}{\alpha_{kl} c_{ij}^2 + \beta_{kl} b_{ij}^2} b_{ij} c_{ij} [X^4 - (\mathbf{X} \cdot \mathbf{Y})^2] \right\}.
\end{aligned}$$

(2.83)

Таким чином, отримаємо його середні значення:

$$\begin{aligned}
\langle r_{ij}^{-3} \mathbf{r}_{ij} \cdot (\mathbf{r}_{ij} \cdot \mathbf{p}_i) \mathbf{p}_j \rangle &= \frac{(4\pi)^2}{N^2} \sum_{k,l=0}^{\nu} \frac{a_k a_l}{\alpha_{kl} \beta_{kl} \sqrt{\alpha_{kl} c_{ij}^2 + \beta_{kl} b_{ij}^2}} \times \\
&\times \int dX X \int dY Y^2 \exp(-X^2 - Y^2) \times \\
&\times \left\{ f_i f_j \left[\alpha_{kl} - 2 \frac{\alpha_k^2 + \alpha_l^2}{\alpha_{kl} c_{ij}^2 + \beta_{kl} b_{ij}^2} \left(b_{ij}^2 \frac{\beta_{kl}}{\alpha_{kl}} X^2 + \frac{1}{3} c_{ij}^2 Y^2 \right) \right] + \right. \\
&+ d_i d_j \left[\beta_{kl} - 2 \frac{\beta_k^2 + \beta_l^2}{\alpha_{kl} c_{ij}^2 + \beta_{kl} b_{ij}^2} \left(c_{ij}^2 \frac{\alpha_{kl}}{\beta_{kl}} X^2 + \frac{1}{3} b_{ij}^2 Y^2 \right) \right] - \\
&\left. - 2(f_i d_j + f_j d_i) \frac{\alpha_k \beta_k + \alpha_l \beta_l}{\alpha_{kl} c_{ij}^2 + \beta_{kl} b_{ij}^2} b_{ij} c_{ij} \left[X^2 - \frac{1}{3} Y^2 \right] \right\} = \\
&= \frac{4\pi^2}{N^2} \sum_{k,l=0}^{\nu} \frac{a_k a_l}{\alpha_{kl} \beta_{kl} \sqrt{\alpha_{kl} c_{ij}^2 + \beta_{kl} b_{ij}^2}} \times \\
&\times \left\{ f_i f_j \left[\alpha_{kl} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) - 2 \frac{\alpha_k^2 + \alpha_l^2}{\alpha_{kl} c_{ij}^2 + \beta_{kl} b_{ij}^2} \left(b_{ij}^2 \frac{\beta_{kl}}{\alpha_{kl}} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) + \frac{1}{3} c_{ij}^2 \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) \right) \right] + \right. \quad (2.84) \\
&+ d_i d_j \left[\beta_{kl} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) - 2 \frac{\beta_k^2 + \beta_l^2}{\alpha_{kl} c_{ij}^2 + \beta_{kl} b_{ij}^2} \left(c_{ij}^2 \frac{\alpha_{kl}}{\beta_{kl}} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) + \frac{1}{3} b_{ij}^2 \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) \right) \right] - \\
&\left. - 2(f_i d_j + f_j d_i) \frac{\alpha_k \beta_k + \alpha_l \beta_l}{\alpha_{kl} c_{ij}^2 + \beta_{kl} b_{ij}^2} b_{ij} c_{ij} \left[\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) - \frac{1}{3} \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) \right] \right\} = \\
&= \frac{2\pi^{5/2}}{N^2} \sum_{k,l=0}^{\nu} \frac{a_k a_l}{\alpha_{kl} \beta_{kl} \sqrt{\alpha_{kl} c_{ij}^2 + \beta_{kl} b_{ij}^2}} \times \\
&\times \left\{ f_i f_j \left[\alpha_{kl} - \frac{\alpha_k^2 + \alpha_l^2}{\alpha_{kl} c_{ij}^2 + \beta_{kl} b_{ij}^2} \left(2b_{ij}^2 \frac{\beta_{kl}}{\alpha_{kl}} + c_{ij}^2 \right) \right] + \right. \\
&+ d_i d_j \left[\beta_{kl} - \frac{\beta_k^2 + \beta_l^2}{\alpha_{kl} c_{ij}^2 + \beta_{kl} b_{ij}^2} \left(2c_{ij}^2 \frac{\alpha_{kl}}{\beta_{kl}} + b_{ij}^2 \right) \right] - \\
&\left. - (f_i d_j + f_j d_i) \frac{\alpha_k \beta_k + \alpha_l \beta_l}{\alpha_{kl} c_{ij}^2 + \beta_{kl} b_{ij}^2} b_{ij} c_{ij} \right\}.
\end{aligned}$$

Для тотожніх кварків:

$$\langle r_{ij}^{-3} \mathbf{r}_{ij} \cdot (\mathbf{r}_{ij} \cdot \mathbf{p}_i) \mathbf{p}_j \rangle = \frac{2\pi^{5/2}}{N^2} \sum_{k,l=0}^{\nu} \frac{a_k a_l}{\alpha_{kl}^{7/2}} \left(\alpha_k^2 + \alpha_l^2 - \frac{4}{3} \alpha_k \alpha_l \right). \quad (2.85)$$

Таким чином, підставляючи отриманий результат (2.84), спростивши його, в (2.31), запишемо:

$$\langle H_{ret} \rangle = \frac{32\alpha_s \pi^{5/2}}{3N^2 m_i m_j} \sum_{k,l=0}^{\nu} \frac{a_k a_l \left(f_i f_j \frac{\alpha_k \alpha_l}{\alpha_{kl}} + d_i d_j \frac{\beta_k \beta_l}{\beta_{kl}} \right)}{\alpha_{kl} \beta_{kl} \sqrt{\alpha_{kl} c_{ij}^2 + \beta_{kl} b_{ij}^2}}. \quad (2.86)$$

2.9 Висновки до розділу 2

В даному розділі було розглянуто важкий баріон за аналогією з атомом гелію та двічі важкий баріон за аналогією до іонізованої молекули водню, проведено систематизацію станів, виходячи з міркувань симетрії хвильової функції відносно перестановки кварків, а також записано квазірелятивістський гамільтоніан системи та усереднено його за гаусовою пробною функцією. У виразах для усереднених значень мається на увазі сума по індексам кварків. Таким чином, проведено всі необхідні аналітичні розрахунки для подальшого розрахунку спектру мас чисельними методами.

РОЗДІЛ 3

РЕЗУЛЬТАТИ РОЗРАХУНКІВ

В даному розділі буде зусереджена увага на описі та застосуванні обраного чисельного метода, записі та аналізі результатів чисельних розрахунків.

За допомогою варіаційного методу Рітца знайдено спектри мас експериментально досліджених частинок з яких було підібрано гіперпарметри моделі.

В даному розділі проведена фінальна стадія розрахунків, а саме: чисельний розрахунок варіаційним методом Рітца параметрів потенціалу, мас кварків та відповідно спектрів мас баріонів в основному стані на основі аналітичних виразів отриманих в попередньому розділі.

Проаналізовано поведінку різних енергетичних термів релятивістського розкладу.

3.1 Оптимізація

3.1.1 Аналіз функції для оптимізації

В попередньому розділі було обчислено функціонали вигляду:

$$R_0(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \int \phi^*(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, x) \hat{H} \phi(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, x) dx, \quad (3.1)$$

з гаусово пробною функцією вигляду (2.42). Де, як вказано вище, гамільтоніан має брейтівський вигляд. Запишемо остаточний вигляд усереднених функціоналів.

Вираз для середнього значення нерелятивістської частини гамільтоніана (2.27) (мається на увазі врахуванням суми мас складових кварків $\sum_{i=1}^3 m_i$) відповідно до розрахованих вище виразів (2.47), (2.52), (2.58).

Кінетична частина:

$$\langle T \rangle = \frac{3\pi^3}{N^2} \sum_{k,l=0}^{\nu} a_k a_l \frac{\mu_q^{-1} \alpha_k \alpha_l \beta_{kl} + \mu_p^{-1} \beta_k \beta_l \alpha_{kl}}{(\alpha_{kl} \beta_{kl})^{5/2}}, \quad (3.2)$$

Корнеллівський потенціал:

$$\langle V_{\text{Coul}} \rangle = -\frac{4}{3} \alpha_s \frac{\pi^{5/2}}{N^2} \sum_{k,l=0}^{\nu} \frac{a_k a_l}{\alpha_{kl} \beta_{kl} \sqrt{b_{ij}^2 \beta_{kl} + c_{ij}^2 \alpha_{kl}}}, \quad (3.3)$$

$$\langle V_{\text{conf}} \rangle = A \frac{\pi^{5/2}}{N^2} \sum_{k,l=0}^{\nu} a_k a_l \frac{\sqrt{b_{ij}^2 \beta_{kl} + c_{ij}^2 \alpha_{kl}}}{\alpha_{kl}^2 \beta_{kl}^2} + \frac{B}{2}. \quad (3.4)$$

Запишемо релятивістські поправки (2.28), (2.29), (2.30), (2.31), що були усереднені вище. Вираз для поправки за рахунок залежності маси від швидкості (2.79):

$$\langle H_{mv} \rangle = -\frac{30\pi^3}{4m_i^3 N^2} \sum_{k,l=0}^{\nu} \frac{a_k a_l \left(f_i^2 \frac{\alpha_k \alpha_l}{\alpha_{kl}} + d_i^2 \frac{\beta_k \beta_l}{\beta_{kl}} \right)^2}{(\alpha_{kl} \beta_{kl})^{3/2}}. \quad (3.5)$$

Контактні терми H_D 2.65 та H_{ssc} 2.66 мають наступний вигляд:

$$\langle H_D \rangle = \left(\frac{1}{m_i^2} + \frac{1}{m_j^2} \right) \frac{\alpha_s \pi^{5/2}}{3N^2} \sum_{k,l=0}^{\nu} \frac{a_k a_l}{(b_{ij}^2 \beta_{kl} + c_{ij}^2 \alpha_{kl})^{3/2}}, \quad (3.6)$$

$$\langle H_{ssc} \rangle = \frac{4\alpha_s \pi^{5/2}}{9N^2 m_i m_j} \langle \mathbf{s}_i \cdot \mathbf{s}_j \rangle \sum_{k,l=0}^{\nu} \frac{a_k a_l}{(b_{ij}^2 \beta_{kl} + c_{ij}^2 \alpha_{kl})^{3/2}}. \quad (3.7)$$

Вираз для середнього значення "запізнюючого" терму 2.86:

$$\langle H_{ret} \rangle = \frac{32\alpha_s\pi^{5/2}}{3N^2m_i m_j} \sum_{k,l=0}^{\nu} \frac{a_k a_l \left(f_i f_j \frac{\alpha_k \alpha_l}{\alpha_{kl}} + d_i d_j \frac{\beta_k \beta_l}{\beta_{kl}} \right)}{\alpha_{kl} \beta_{kl} \sqrt{\alpha_{kl} c_{ij}^2 + \beta_{kl} b_{ij}^2}}. \quad (3.8)$$

Мається на увазі суммування по кваркам.

Базуючись на теоремі Рітца, що стверджує: середнє значення від оператора Гамільтона по будь яким функціям, нормованим на одиницю, більше або рівне енергії основного стану. Отже, мінімізуючи середнє значення гамільтоніана ми прямуємо до шуканої енергії основного стану частинки, що розглядається. Мінімізується непертурбативна частина гамільтоніана (3.2), (3.3), (3.4) та знайдені значення параметрів, що відповідають мінімуму підставляються у вирази до поправок.

Проаналізуємо дану функцію з метою обрати метод оптимізації. Дана функція — це функція багатьох параметрів. Якщо обрати $\nu = 4$, сумарна кількість параметрів, по яких проводиться мінімізація функції — 14 (враховуючи фіксоване значення a_0). Крім того, на більшість з цих параметрів накладається обмеження, а саме: α_{kl} , β_{kl} можуть бути тільки додатніми через те, що вони стоять під експонентою у хвильовій функції. Таким чином, нам підходять тільки ті методи, що дозволяють накладати обмеження на параметри оптимізації. Найбільш поширені серед таких методів це: L-BFGS-B, SLSQP, TNC.

В наступному підрозділі порівняємо ці методи. Будемо використовувати їх імплементації в пакеті `scipy.optimize`.

3.1.2 Порівняння методів оптимізації

Спочатку необхідно обрати найбільш ефективний метод. Щоб зрозуміти який метод дає більш мінімальні значення, оберемо деякі стандартні для спектроскопії баріонів гіперпараметри та порівняємо значення мінімізованого незбуреного гамільтоніану. А також, оцінемо час за який ці методи сходяться до мінімуму. Відповідно до того, що незбурений гамільтоніан є спінонезалежним, будемо вказувати по одній частинці з одного спінового мультиплету, ці значення вказано у табл. 3.1.

Таблиця 3.1

Отримані значення мінімумів для незбуреного гамільтоніану за допомогою методів SLSQP, L-BFGS-B та TNC відповідно. Значення вказано в MeV

	SLSQP	L-BFGS-B	TNC
p	948.37	948.51	948.8
Λ	878.82	879.25	879.24
Ξ	792.37	792.95	793.14
Ω	691.81	691.94	692.35
Λ_c	735.87	736.26	736.25
Ξ_c	656.22	656.6	656.67
Ω_c	560.38	560.88	560.96
Λ_b	698.95	699.6	699.36
Ξ_b	617.18	617.53	617.54
Ω_b	519.33	519.85	519.9
Ξ_{cc}	489.63	489.73	489.72
Ω_{cc}	404.82	405.49	405.8
Ξ_{bb}	354.78	355.8	355.66
Ω_{bb}	268.95	269.04	270.81

Час за який методи досягають мінімальних значень є наступними: SLSQP — 29.2 с; L-BFGS-B — 28.6 с; TNC — 58.9 с.

Бачимо, що отримані значення для різних методів є досить близькими між собою. Однак методи TNC та L-BFGS-B мають більшу кількість внутрішніх параметрів, в порівнянні з методом SLSQP, і всі ці параметри необхідно ретельно підбирати для кращої збіжності. В результаті їх підбору було виявлено нестабільність оптимізатора при малих коливаннях значень цих параметрів. Крім, цього, метод TNC потребує в два рази більше часу до збіжності. Взавши до уваги це, а також стійкість методу до зміни початкових умов, ми обрали метод SLSQP для подальшого підбору гіперпараметрів моделі та розрахунку остаточних спектрів.

3.1.3 Вибір гіперпараметрів моделі

Для розрахунку спектру мас важких баріонів в рамках запропонованої моделі, необхідно визначитись з чисельними значеннями параметрів, які входять до гамільтоніану, що описує поведінку системи, а саме: параметри корнеллівського потенціалу та маси кварків, чисельні значення величини параметризації константи сильного зв'язку від яких залежить енергія системи.

Чисельні значення параметрів потенціалу зазначено в табл. 3.2, вказано значення гіперпараметрів нерелятивістської моделі для дослідження їх модифікації при врахування квазірелятивістських ефектів.

Таблиця 3.2

Значення параметрів потенціалу, вказано значення отримані з нерелятивістським підходом [60, 61]

Параметр	Значення	[60, 61]
A	0.112 GeV ²	0.18 GeV ²
B	-0.098 GeV	-1.234 GeV
M_0	0.95 GeV	—
Λ	0.424 MeV	—

Параметри A , B , M_0 , Λ входять до нерелятивістського потенціалу.

Далі визначимось з масами кварків в складі адрону.

Маси легких кварків m_u та m_d приймаються рівними: $m_u = m_d = m_{ud}$.

Розраховані значення мас складових кварків вказано в 3.3.

Таблиця 3.3

Значення конститuentних мас кварків, вказано значення отримані з нерелятивістським підходом [60, 61]

Кварк	Маса, GeV	[60, 61], GeV
m_{ud}	0.296	0.335
m_s	0.453	0.65
m_c	1.662	1.92
m_b	4.994	5.3

Гіперпараметри моделі дуже суттєво змінили свої значення в порівнянні до нерелятивістських робіт [60, 61], з чого можемо зробити висновок про впливовий внесок релятивістських ефектів. Чисельні значення поправок будуть детально обговорюватись нижче.

Отримані значення мас та параметри потенціалу будуть використовуватись при подальших розрахунках спектрів мас баріонів.

3.2 Спектри мас та їх аналіз

3.2.1 Спектр мас експериментально досліджених баріонів

Відповідно до того, що маси u та d кварків приймаються рівними, маси баріонів, що входять до відповідних ізотопічних мультиплетів будуть однаковими. Наприклад, $\Sigma_c^-(I(J^P) = 1(\frac{1}{2}^+)) = \Sigma_c^0(I(J^P) = 1(\frac{1}{2}^+)) = \Sigma_c^+(I(J^P) = 1(\frac{1}{2}^+)) = \Sigma_c(I(J^P) = 1(\frac{1}{2}^+))$. Для інших ізотопічних мультиплетів аналогічно.

Таблиця 3.4

Спектр мас легких, MeV

	$I(J)^p$	Experiment [62]	Theory
p	$\frac{1}{2}(\frac{1}{2})^+$	938.272046 ± 0.000021	980.87
Λ	$0(\frac{1}{2})^+$	1115.683 ± 0.006	1134.84
Σ^+	$1(\frac{1}{2})^+$	1189.37 ± 0.07	1193.31
Ξ^-	$\frac{1}{2}(\frac{1}{2})^+$	1321.71 ± 0.07	1297.07
Δ	$\frac{3}{2}(\frac{3}{2})^+$	1232 ± 2	1226.67
Σ^*	$1(\frac{3}{2})^+$	1382.80 ± 0.35	1376.61
Ξ^*	$\frac{1}{2}(\frac{3}{2})^+$	1531.80 ± 0.32	1501.58
Ω	$0(\frac{3}{2})^+$	1672.45 ± 0.29	1615.37

Таке наближення не є сильним, адже маси u та d кварків є дуже близькими, різниця в їх кулонівських зарядах не розрізняється моделью, так

як ми нехтуємо електромагнітними силами. Дане наближення є звичним для адронної спектроскопії.

Таким чином, кількість одержаних частинок зменшується до вісьми, значення їх мас представлено в табл. 3.5.

Таблиця 3.5

Спектр мас баріонів з c -кварком, MeV

	$I(J)^p$	Experiment [62]	Theory
Λ_c	$0(\frac{1}{2})^+$	2286.46 ± 0.14	2268.07
Σ_c	$1(\frac{1}{2})^+$	2453.97 ± 0.14	2414.41
Σ_c	$1(\frac{3}{2})^+$	$2518.41^{+0.21}_{-0.19}$	2459.12
Ξ_c	$\frac{1}{2}(\frac{1}{2})^+$	$2467.93^{+0.28}_{-0.40}$	2459.12
Ξ'_c	$\frac{1}{2}(\frac{1}{2})^+$	2575.7 ± 3.0	2571.17
Ξ_c	$\frac{1}{2}(\frac{3}{2})^+$	2645.9 ± 0.5	2649.75
Ω_c	$0(\frac{1}{2})^+$	2695.2 ± 1.7	2703.64
Ω_c	$0(\frac{3}{2})^+$	2765.9 ± 2.0	2780.44

Аналогічно отримаємо спектр мас для b -баріонів, який представлено в табл. 3.6.

Варто сказати, що для частинки Ω_b ще не було отримано достовірних експериментальних даних, тобто запропонована модель дозволила передбачити її масу.

3.2.2 Спектр мас двічі важких баріонів

Сектор двічі важких баріонів ще не був суттєво досліджений експериментально, однак існує одна статистично підтверджена частинка Ξ_{cc}^{++} , що

Таблиця 3.6

Спектр мас b -баріонів, MeV

	$I(J)^p$	Experiment [62]	Theory
Λ_b	$0(\frac{1}{2})^+$	5619.5 ± 0.4	5587.75
Σ_b	$1(\frac{1}{2})^+$	$5811.3 \pm 0.9 \pm 1.7$	5784.11
Σ_b	$1(\frac{3}{2})^+$	$5832.1 \pm 0.7^{+1.7}_{-1.8}$	5814.1
Ξ_b	$\frac{1}{2}(\frac{1}{2})^+$	5794.9 ± 0.9	5783.6
Ξ'_b	$\frac{1}{2}(\frac{1}{2})^+$	$5935.02 \pm 0.02 \pm 0.05$	5935.69
Ξ_b	$\frac{1}{2}(\frac{3}{2})^+$	5949.3 ± 0.9	5965.33
Ω_b	$0(\frac{1}{2})^+$	6048.8 ± 3.2	6068.01
Ω_b	$0(\frac{3}{2})^+$		6097.61

має експериментальну масу $3621.40 \pm 0.72 \pm 0.27 \pm 0.14$ MeV [28], що є близькою до передбаченої, що вказана у табл. 3.7.

3.2.3 Вплив релятивістських поправок на спектри мас

Проаналізуємо вплив врахованих релятивістських поправок на розраховані спектри. Прослідкуємо динаміку релятивістських поправок на легкому спектрі, двічі важкому спектрі та спектрі баріонів з одним важким кварком (в останньому динаміка має однаковий характер як для c -баріонів так і для b -баріонів), відповідні значення вказано у таблицях 3.8, 3.9, 3.10 відповідно (для наглядності вказано величину $T + V$, до значення якої не враховано суми мас кварків та вільного коефіцієнта B).

Значення, що вказані в табл. 3.8, 3.9, 3.10 мають дуже великі значення, особливо для частинок з легкими кварками (внаслідок малої маси остан-

Таблиця 3.7

Розрахований спектр мас двічі важких баріонів в порівнянні з передбаченнями нерелятивістської моделі та інших підходів, MeV

	$I(J)^p$	Theory	[60, 61]	Yoshida [47]	Karliner [22]
Ξ_{cc}	$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}^+ \right)$	3623.26	3605	3685	3627 ± 12
Ξ_{cc}	$\frac{1}{2} \left(\frac{3}{2}^+ \right)$	3733.2	3734	3754	3690 ± 12
Ξ_{bb}	$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}^+ \right)$	10219.56	10250	10314	10162 ± 12
Ξ_{bb}	$\frac{1}{2} \left(\frac{3}{2}^+ \right)$	10269.48	10316	10339	10184 ± 12
Ω_{cc}	$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}^+ \right)$	3812.73	3797	3832	-
Ω_{cc}	$\frac{1}{2} \left(\frac{3}{2}^+ \right)$	3908.63	3893	3883	-
Ω_{bb}	$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}^+ \right)$	10413.08	10426	10454	-
Ω_{bb}	$\frac{1}{2} \left(\frac{3}{2}^+ \right)$	10458.67	10473	10486	-

ні)), з чого можна заключити, що релятивістські ефекти є суттєвими для спектроскопії як легких так і важких адронів.

Досліджуючи дану поправку ще детальніше, ми помітили, що за її велике значення відповідальні легкі кварків (значення поправки 422 MeV розпадається на 2 MeV, 2 MeV та 418 MeV відповідно до двох важких та одного легкого кварків у частинці Ξ_{cc} , подібна поведінка властива всім розрахованим баріонам). Тому, хоча легкі кварки мають нехтовно малу масу, вони сильно впливають на спектр за рахунок великого значення імпульсу, це особливо помітно на прикладі поправки $H_{mv} \propto \frac{p^4}{m^3}$ (2.28). З чого робимо висновок про необхідність врахування релятивізму для адронів до складу яких входять легкі кварки.

Спін-спінова поправка H_{ssc} (2.30) є необхідною для опису спектру адронів, адже вона є спіно-залежною і дозволяє розчипити частинки з різним спіном.

Таблиця 3.8

Значення термів гамільтоніана Брейта для легких баріонів, MeV, першою записана частинка з меншим спіном

	$T + V$	H	H_D	H_{mv}	H_{ret}	H_{ssc}
p	948.37	980.87	178.58	-387.93	-421.4	-126.74
Λ	878.82	1134.84	167.82	-353.37	-369.94	-135.5
Σ^+	878.82	1193.31	167.82	-353.37	-369.94	-77.03
Ξ^-	792.37	1297.07	160.07	-311.38	-344.14	-103.86
Δ	948.37	1226.67	178.58	-387.93	-421.4	119.05
Σ^*	878.82	1376.61	167.82	-353.37	-369.94	106.27
Ξ^*	792.37	1501.58	160.07	-311.38	-344.14	100.65
Ω	691.81	1615.37	147.33	-247.61	-335.37	98.22

Поправки H_D та H_{ret} (2.29), (2.31) мають також суттєві значення за рахунок легких кварків. Такий результат є очікуваним з фізичних міркувань: легкі кварки рухаються з релятивістськими швидкостями. Даний результат також варто очікувати, помітивши, що у виразах для поправок маси кварків знаходяться в знаменнику, і, відповідно, вони будуть проявлятися для легких кварків.

Як можна бачити, тенденція впливу на різні частини спектру є доволі складною, але загальним чином значення поправок є суттєвими.

3.3 Висновки до розділу 3

Проаналізовано методи оптимізації та обрано найбільш ефективний.

Таблиця 3.9

Значення термів гамільтоніана Брейта для двічі важких баріонів, MeV,
першою записана частинка з меншим спіном

	$T + V$	H	H_D	H_{mv}	H_{ret}	H_{ssc}
Ξ_{cc}	489.63	3623.26	170.45	-355.91	-137.1	-65.82
Ξ_{cc}	489.63	3733.2	170.45	-355.91	-137.1	44.13
Ξ_{bb}	354.78	10219.56	215.08	-452.38	-53.14	-30.77
Ξ_{bb}	354.78	10269.48	215.08	-452.38	-53.14	19.15
Ω_{cc}	404.82	3812.73	107.78	-194.37	-129.43	-55.07
Ω_{cc}	404.82	3908.63	107.78	-194.37	-129.43	40.83
Ω_{bb}	268.95	10413.08	130.64	-250.98	-50.78	-27.75
Ω_{bb}	268.95	10458.67	130.64	-250.98	-50.78	17.84

На експериментально відомому спектрі було оптимізовано гіперпараметри моделі. На їх основі було розраховано маси баріонів, що не були підтверджені експериментально.

Проаналізовано вплив урахування квазірелятивістського підходу на спектр мас та на гіперпараметри моделі, з чого зроблено висновок, що для адекватного опису адронів врахування релятивізму є дуже важливим фактором, особливо для адронів з легкими кварками.

Таблиця 3.10

Значення термів гамільтоніана Брейта для c -баріонів, МеВ, першою записана частинка з меншим спіном

	$T + V$	H	H_D	H_{mv}	H_{ret}	H_{ssc}
Λ_c	735.87	2268.07	192.01	-436.48	-229.19	-150.13
Σ_c	735.87	2414.41	192.01	-436.48	-229.19	-3.79
Σ_c	735.87	2495.16	192.01	-436.48	-229.19	76.96
Ξ_c	656.22	2459.12	163.64	-342.67	-207.74	-123.32
Ξ'_c	656.22	2649.75	163.64	-342.67	-207.74	67.37
Ξ_c	656.22	2571.17	163.64	-342.67	-207.74	-11.28
Ω_c	560.38	2703.64	134.88	-247.85	-202.03	-11.73
Ω_c	560.38	2780.44	134.88	-247.85	-202.03	65.07

ВИСНОВКИ

- 1) Розроблено модель для опису важких баріонів в рамках кваркової теорії, де в якості нерелятивістської міжкваркової взаємодії було обрано корнеллівський потенціал.
- 2) Введено новий клас поправок пов'язаних з гамільтоніаном Брейта $(v/c)^2$.
- 3) Була проведена повна класифікація основного стану баріонів, що містять один важкий c - або b -кварк, та два тотожних за ароматом важкі кварки cc - або bb -кварки.
- 4) Гамільтоніан адронів було усереднено по пробним хвильовим функціям.
- 5) Одержано чисельні значення всіх необхідних параметрів, що входять до гамільтоніану.
- 6) Проведено порівняння мінімізуючих методів.
- 7) На основі розвинутого формалізму, було застосовано варіаційний принцип Рітца для розрахунку спектру мас важких баріонів. При порівнянні розрахованого спектру мас з експериментальними значеннями мас частинок, було зроблено висновок про узгодження теорії та експерименту.
- 8) Проаналізовано чисельні значення релятивістських термів, з чого зроблено висновок про необхідність їх урахування для адекватного опису адронів.
- 9) Було отримано спектр мас баріонів з двома тотожними важкими кварками, які ще не спостерігались експериментально, тобто було зроблено передбачення їх мас. Отримані значення мас були порівняні з масами, розрахованими за допомогою інших підходів [22, 47].
- 10) Розрахована маса єдиної статистично підтвердженої двічі важкої частинки Ξ_{cc}^{++} є близькою до експериментального значення.

ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

1. Martin A. Baryons made of heavy quarks at the LHC / André Martin // arXiv preprint arXiv:1409.8138. – 2014.
2. Kotwal A. V. Review of physics results from the Tevatron: Electroweak physics / Ashutosh V. Kotwal, Heidi Schellman, Jadranka Sekaric // International Journal of Modern Physics A. – 2015. – Т. 30. – №. 06. – С. 1541004.
3. Paulini M. Spectroscopy and Decay of B Hadrons at the Tevatron / Manfred Paulini // arXiv preprint hep-ex/0702047. – 2007.
4. Mitchell R. E. Recent Results on Charmonium Decays at CLEO-c / R.E. Mitchell // International Journal of Modern Physics: Conference Series. – World Scientific Publishing Company, 2011. – Т. 2. – С. 204-208.
5. Bernreuther W. Top-quark physics at the LHC / Werner Bernreuther // Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics. – 2008. – Т. 35. – №. 8. – С. 083001.
6. He X. G. Predictive CP violating relations for charmless two-body decays of beauty baryons and with flavor SU (3) symmetry / Xiao-Gang He, Guan-Nan Li // Physics Letters B. – 2015. – Т. 750. – С. 82-88.
7. Cheng H. Y. Strong decays of charmed baryons in heavy hadron chiral perturbation theory: An update / Hai-Yang Cheng, Chun-Khiang Chua // Physical Review D. – 2015. – Т. 92. – №. 7. – С. 074014.
8. Cazzoli E. G. Evidence for $\Delta S = -\Delta Q$ Currents or Charmed-Baryon Production by Neutrinos / E Go Cazzoli, A.M. Cnops, P.L. Connolly et al. // Physical Review Letters. – 1975. – Т. 34. – №. 17. – С. 1125.
9. Baltay C. Confirmation of the Existence of the Σc^{++} and Λc^{+} Charmed Baryons and Observation of the Decay $\Lambda c^{+} \rightarrow \Lambda \pi^{+}$ and $K^{-} 0 p$ / C. Baltay, D. Caroubalis, H. French et al. // Physical Review Letters. – 1979. – Т. 42. – №. 26. – С. 1721.

10. Albajar C. First observation of the beauty baryon Λ_b in the decay channel $\Lambda_b \rightarrow J/\psi \Lambda$ at the CERN proton-antiproton collider / C. Albajar, M.G. Albrow, O.C. Allkofer et al. // *Physics Letters B.* – 1991. – T. 273. – №. 4. – C. 540-548.
11. Knapp B. Observation of a Narrow Antibaryon State at 2.26 GeV/c² / B. Knapp, W. Lee, S.D. Smith et al. // *Physical Review Letters.* – 1976. – T. 37. – №. 14. – C. 882.
12. Aubert B. Precision measurement of the Λ_{c^+} baryon mass / Bernard Aubert, R. Barate, D. Boutigny et al. // *Physical Review D.* – 2005. – T. 72. – №. 5. – C. 052006.
13. Ammar R. First Observation of the $\Sigma_{c^{*+}}$ Baryon and a New Measurement of the $\Sigma_{c^{*+}}$ Mass / R. Ammar, A. Bean, D. Besson et al. // *Physical review letters.* – 2001. – T. 86. – №. 7. – C. 1167.
14. Athar S. B. New measurement of the masses and widths of the $\Sigma_{c^{*++}}$ and Σ_{c^*0} charmed baryons / S.B. Athar, P. Avery, L. Brevina-Newell et al. // *Physical Review D.* – 2005. – T. 71. – №. 5. – C. 051101.
15. Biagi S. F. Observation of a narrow state at 2.46 GeV/c²—a candidate for the charmed strange Baryon Λ_{c^+} / S.F. Biagi, M. Bourquin, A.J. Britten et al. // *Physics Letters B.* – 1983. – T. 122. – №. 5. – C. 455-460.
16. Avery P. Observation of the Charmed Strange Baryon Ξ_{c^0} / P. Avery, D. Besson, L. Garren et al. // *Physical review letters.* – 1989. – T. 62. – №. 8. – C. 863.
17. Biagi S. F. Properties of the charmed strange baryon Λ_{c^+} and evidence for the charmed doubly strange baryon Ξ_{c^0} at 2.74 GeV/c² / S.F. Biagi, M. Bourquin, A.J. Britten et al. // *Zeitschrift für Physik C Particles and Fields.* – 1985. – T. 28. – №. 2. – C. 175-185.
18. Bari G. A measurement of Λ_c^+ baryon production in proton-proton interactions at $\sqrt{s} = 62\text{GeV}$ / G. Bari, M. Basile, G. Bruni et al. // *Il Nuovo Cimento A (1965-1970).* – 1991. – T. 104. – №. 4. – C. 571-599.

19. Aaltonen T. Observation of the Heavy Baryons Σ_b and Σ_b^* / T. Aaltonen, A. Abulencia, J. Adelman et al. // Physical review letters. – 2007. – T. 99. – №. 20. – C. 202001.
20. Abazov V. M. Direct Observation of the Strange b Baryon Ξ_b^- / V.M. Abazov, B. Abbott, M. Abolins et al. // Physical review letters. – 2007. – T. 99. – №. 5. – C. 052001.
21. Abazov V. M. Observation of the Doubly Strange b Baryon Ω_b^- / V.M. Abazov, B. Abbott, M. Abolins et al. // Physical review letters. – 2008. – T. 101. – №. 23. – C. 232002.
22. M. Karliner. Heavy quark spectroscopy and prediction of bottom baryon masses, Nuclear Physics B - Proceedings Supplements, 187, 21 - 28, 2009.
23. M.Karliner and J.Rosner, Baryons with two heavy quarks: Masses, production, decays, and detection, Phys. Rev. **D90**, 094007 (2014).
24. M. Karliner, H. J. Lipkin and N. A. Tornqvist. New hadrons with heavy quark. Acta Phys. Polon. Supp. 6, 181 (2013).
25. M. Karliner and H. J. Lipkin. The Constituent Quark Model Revisited - Quark Masses, New Predictions for Hadron Masses and KN Pentaquark. [arXiv:hep-ph/0307243] condensed version in Phys. Lett. **B575** (2003) 249.
26. M. Karliner, B. Keren-Zur, H. J. Lipkin and J. L. Rosner. Predictions for masses of Ξ_b baryons. [arXiv:hep-ph/0706.2163].
27. M. Karliner, B. Keren-Zur, H. J. Lipkin and J. L. Rosner. The Quark Model and b Baryons. Annals Phys. 324, 2 (2009) [arXiv:hep-ph/0804.1575].
28. R. Aaij et al., (LHCb Collaboration), Observation of the Doubly Charmed Baryon Ξ_{cc}^{++} , Phys. Rev. Lett., 119, 11, 2017.
29. Gross D. J. Ultraviolet behavior of non-abelian gauge theories / David J. Gross, Frank Wilczek // Physical Review Letters. – 1973. – T. 30. – №. 26. – C. 1343.
30. Bloom E. D. High-Energy Inelastic e- p Scattering at 6 and 10 / Elliott D. Bloom, D.H. Coward, H. DeStaebler // Physical Review Letters. – 1969. –

- T. 23. – №. 16. – C. 930.
31. Chodos A. Baryon structure in the bag theory / A. Chodos, R.L. Jaffe, K. Johnson et al. // *Physical Review D*. – 1974. – T. 10. – №. 8. – C. 2599.
 32. Shifman M. A. QCD and resonance physics. Theoretical foundations / Mikhail A. Shifman, A.I. Vainshtein, Valentin I. Zakharov // *Nuclear Physics B*. – 1979. – T. 147. – №. 5. – C. 385-447.
 33. Isgur N. Weak decays of heavy mesons in the static quark approximation / Nathan Isgur, Mark B. Wise // *Physics Letters B*. – 1989. – T. 232. – №. 1. – C. 113-117.
 34. Ebert D. Properties of heavy quarkonia and B c mesons in the relativistic quark model / D. Ebert, R.N. Faustov, V.O. Galkin // *Physical Review D*. – 2003. – T. 67. – №. 1. – C. 014027.
 35. Quigg C. Quantum mechanics with applications to quarkonium / Chris Quigg, Jonathan L. Rosner // *Physics Reports*. – 1979. – T. 56. – №. 4. – C. 167-235.
 36. Richardson J. L. The heavy quark potential and the Υ , J/ψ systems / John L. Richardson // *Physics Letters B*. – 1979. – T. 82. – №. 2. – C. 272-274.
 37. Gupta R. Introduction to lattice QCD / Rajan Gupta // arXiv preprint hep-lat/9807028. – 1998.
 38. Van Baal P. The QCD vacuum / Pierre Van Baal // *Nuclear Physics B- Proceedings Supplements*. – 1998. – T. 63. – №. 1. – C. 126-137.
 39. Majethiya A. A. Properties of heavy flavour baryons using quark models / Ajay A. Majethiya – 2013.
 40. Bogoliubov P.N. Quarks confinement and Quark model / P.N. Bogoliubov // *Ann. Inst. Henri Poincare*. – 1967. – №. 8. – C. 163.
 41. Hussain F. An introduction to the heavy quark effective theory / F. Hussain, G. Thompson. – International Centre for Theoretical Physics, 1995.
 42. Ebert D. Masses of light mesons in the relativistic quark model / D. Ebert, R.N. Faustov, V.O. Galkin // *Modern Physics Letters A*. – 2005. – T. 20. – №. 25. – C. 1887-1893.

43. L. A. Copley, N. Isgur, G. Karl, Charmed baryons in a quark model with hyperfine interactions, *Phys. Rev. D*, 20, 1979.
44. N. Isgur, G. Karl, *P*-wave baryons in the quark model, *Phys. Rev. D*, 18, 11, 1978.
45. S. Capstick, N. Isgur, Baryons in a relativized quark model with chromodynamics, *AIP Conference Proceedings*, 132, 1, 1985.
46. W. Roberts, M. Pervin, Heavy Baryons in a Quark Model, *Int. J. Mod. Phys. A* 23, 2817, 2008.
47. T.Yoshida et al., Spectrum of heavy baryons in the quark model, *Phys. Rev. D*92, 2015.
48. Ebert, D., Faustov, R. N., Galkin, V. O., Martynenko, A. P., Mass spectra of doubly heavy baryons in the relativistic quark model, *Phys. Rev. D*, 66, 2002.
49. D. Ebert, R.N.Faustov, V.O. Galkin, Masses of excited heavy baryons in the relativistic quark–diquark picture, *Physics Letters B* 659, 612–620, 2008.
50. D. Ebert, R.N.Faustov, V.O. Galkin, Masses of heavy tetraquarks in the relativistic quark model, *Physics Letters B* 634, 214–219, 2006.
51. Bethe H. A. *Intermediate quantum mechanics* / Hans Albrecht Bethe, Roman W. Jackiw et al. – 1968.
52. Schiff L. I. *Quantum Mechanics 3rd* / Leonard I. Schiff // New York: McGraw-Hill. – 1968. – С. 61-62.
53. Проблема многих частиц в квантовой механике./Теория и методы решения/ / П.Гомбаш; Пер. с нем. Н.Е.Барабанова, В.Н.Лукашев ; Ред.:Я.А.Смородинский . – М. : Изд-во иностр. лит.,(1952) – 280 с.
54. Gell-Mann M. A schematic model of baryons and mesons / Murray Gell-Mann // *Physics Letters*. – 1964. – Т. 8. – №. 3. – С. 214-215.
55. Хелзен Ф. Кварки и лептоны: Введение в физику частиц / Ф. Хелзен, А.Д. Мартин: Пер. с англ. – Мир, 1987.
56. Кобушкін, О.П. Квантова механіка: навч. посібник / О.П. Кобушкін – К., 2003. – С. 92-94.

57. Badalian A. M. Restriction on the strong coupling constant in the IR region from the 1D-1P splitting in bottomonium / A. M. Badalian, A.I. Veselov, B.L.G. Bakker // *Physical Review D.* – 2004. – Т. 70. – №. 1. – С. 016007.
58. D.Ebert, R.N.Faustov, and V.O.Galkin, Masses of heavy baryons in the relativistic quark model, *Phys. Rev. D*, 72, 2005.
59. V.B. Berestetski, E.M. Lifshitz, and L.P. Pitaevski, *Quantum Electrodynamics*, Eq. (83.15); volume 4 of L.L. Landau and E.M. Lifshitz, *Theoretical Physics*, Moscow, "Nauka", 1989.
60. Трубочова, К.В. Застосування варіаційного методу для розрахунку мас баріонів в моделі складових кварків / К.В. Трубочова, А.В. Демський, О.П. Кобушкін, Д.Л. Борисюк // *Теоретичні і прикладні проблеми фізики, математики та інформатики: матеріали XIV Всеукр. наук.-практ. конф. студентів, аспірантів та молодих вчених, Київ, 26 – 28 травня 2016 р.* – С. 89-92.
61. Демський, А.В. Спектр мас важких баріонів в моделі складових кварків з корнеллівським потенціалом / А.В. Демський, К.В. Трубочова, О.П. Кобушкін, Д.Л. Борисюк // *Теоретичні і прикладні проблеми фізики, математики та інформатики: матеріали XIV Всеукр. наук.-практ. конф. студентів, аспірантів та молодих вчених, Київ, 26 – 28 травня 2016 р.* – С. 33-36.
62. Olive K.A. Particle Data Group / K.A. Olive et al. // *Chin. Phys. C.* –2014. –Т. 38. – С. 090001.