

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ  
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ  
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

**В.П. Легеза, Л.М. Олещенко**

# **ОПЕРАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ**

## **ПРАКТИКУМ**

*Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського  
як навчальний посібник для студентів,  
які навчаються за спеціальністю 121 «Інженерія програмного  
забезпечення», спеціалізацією «Програмне забезпечення комп'ютерних та  
інформаційно-пошукових систем»*

Київ

КПІ ім. Ігоря Сікорського

2018

Рецензенти: *Бідюк, П. І.*, д-р техн. наук, проф.  
*Стеценко, І. В.*, д-р техн. наук, проф.

Відповідальний редактор *Заболотня, Т. М.*, канд. техн. наук, доц.

*Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського*

*(протокол № 9 від 24.05.2018 р.)*

*за поданням Вченої ради факультету прикладної математики*

*(протокол № 9 від 23.04.2018 р.)*

Електронне мережне навчальне видання

*Легеза Віктор Петрович*, д-р техн. наук, проф.

*Олещенко Любов Михайлівна*, канд. техн. наук

# **ОПЕРАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ**

## **ПРАКТИКУМ**

Операційне числення: практикум [Електронний ресурс] : навч. посіб. для студ. спеціальності 121 «Інженерія програмного забезпечення», спеціалізації «Програмне забезпечення комп'ютерних та інформаційно-пошукових систем» / В.П. Легеза, Л.М. Олещенко ; КПІ ім. Ігоря Сікорського. – Електронні текстові дані (1 файл: 1,4 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2018. – 70 с.

Навчальний посібник розроблено для отримання студентами практичних навичок з розв'язання технічних задач з використанням методів операційного числення. Навчальне видання призначене для студентів, які навчаються за спеціальністю 121 Інженерія програмного забезпечення, спеціалізацією «Програмне забезпечення комп'ютерних та інформаційно-пошукових систем» факультету прикладної математики КПІ ім. Ігоря Сікорського.

© В.П. Легеза, Л.М. Олещенко, 2018

© КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2018

# ЗМІСТ

ВСТУП.....	4
<b>Розділ 1. Невласні інтеграли, залежні від параметра <math>p</math>. Загальні поняття та означення перетворення Лапласа. Поняття оригіналу та зображення. Функція Хевісайда. Теорема про існування зображення Лапласа.....</b>	<b>6</b>
1.1. Невласні інтеграли, залежні від параметра $p$ .....	6
1.2. Оригінал та його зображення.....	8
1.3. Зображення функцій $\eta(t)$ , $t$ , $e^{at}$ , $\sin t$ , $\cos t$ .....	14
<b>Розділ 2. Властивості перетворення Лапласа. Знаходження зображень. Таблиця «оригінал-зображення».....</b>	<b>16</b>
2.1. Лінійність.....	16
2.2. Подібність.....	17
2.3. Зміщення (затухання).....	18
2.4. Запізнення.....	19
2.5. Випередження.....	21
2.6. Диференціювання по параметру.....	21
2.7. Диференціювання оригіналу.....	22
2.8. Диференціювання зображення .....	23
2.9. Інтегрування оригіналу.....	24
2.10. Інтегрування зображення.....	25
2.11. Множення зображень. Згортка функцій.....	26
2.12. Множення оригіналів.....	28
2.13. Основні властивості перетворень операційного числення.....	28
2.14. Таблиця оригіналів та відповідних зображень.....	29
<b>Розділ 3. Знаходження простих оригіналів. Застосування операційного числення до розв'язування диференціальних та інтегральних рівнянь. ....</b>	<b>32</b>
3.1. Метод розкладу раціонального дроби на суму простіших.....	32
3.2. Методи знаходження оригіналів, які ґрунтуються на трьох Теоремах розвинення.....	34
3.3. Загальний підхід розв'язування лінійних диференціальних рівнянь і їх систем зі сталими коефіцієнтами.....	39
3.4. Особливості розв'язування диференціальних рівнянь за допомогою формули Дюамеля.....	43
3.5. Застосування методів операційного числення до розв'язання деяких інтегральних рівнянь.....	47
3.6. Застосування операційного числення до розв'язання задач електротехніки....	50
ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ СТУДЕНТІВ.....	52
СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ТА РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ.....	70

## ВСТУП

Основи операційного числення були закладені в кінці XIX ст., але строге математичне обґрунтування з'явилося лише у перші роки минулого століття на основі теорії функції комплексної змінної (ТФКЗ). Методи операційного числення базуються на заміні операцій диференціювання та інтегрування заданої функції алгебраїчними операціями. У результаті цього багато математичних дій, виконання яких у диференціальному та інтегральному численні є достатньо складними, зводяться до простіших алгебраїчних дій.

Операційне числення почали розвивати у своїх працях такі відомі математики як Лейбниц, Ейлер, Лагранж, Лаплас, Фур'є, Коші. Подальші дослідження в теорії операційного числення проводили французькі математики Франсе і Лобатто, а також англійські математики Грегори, Буль, Челлета, Кармайкл. В Україні вперше теоретичні основи операційного числення були обґрунтовані у монографії «Символьне числення та його застосування до інтегрування лінійних диференціальних рівнянь» професора Київського університету М.Є. Ващенко-Захарченка, яка була опублікована у 1862 році. Систематичному використанню операційного числення для розв'язування фізико-технічних задач значною мірою сприяв англійський інженер-електрик О.Хевісайд у 1887 – 1912 роках, який успішно використовував операційне числення при розрахунках характеристик електричних полів. Він першим показав, яким чином розв'язування деяких диференціальних рівнянь можна звести до виконання певних алгебраїчних операцій та як надати отриманим результатам відповідне фізичне тлумачення. Усі положення свого методу О.Хевісайд вивів емпірично і незалежно від інших математиків. Строге математичне обґрунтування операційного числення було дано лише у 20-х роках XX ст. Бромвичем і Карсоном, які пов'язали цей метод із методом інтегральних перетворень.

Теорія і застосування операційного числення отримали математичне обґрунтування і подальший розвиток в роботах Крилова, Боголюбова, Леві, Джеффра, Коісумі, Андронова, Конторовича та ін. Вони значно розширили

теоретичний базис операційного числення та межі його застосування. У наш час операційне числення широко використовується у прикладній математиці, технічній фізиці, комп'ютерних науках, автоматичі та електротехніці.

Учбова дисципліна «Математичний аналіз (додаткові розділи) 2. Ряди і перетворення Фур'є та операційне числення» є нормативною і входить до циклу професійно-орієнтованих дисциплін навчального плану підготовки бакалаврів, що навчаються за спеціальністю 121 «Інженерія програмного забезпечення» спеціалізації «Програмне забезпечення інформаційно-пошукових систем».

Предметом дисципліни є теоретичні основи з теорії функції комплексної змінної та рядів Фур'є, можливості застосування методів операційного числення до розв'язання прикладних технічних задач. Мета дисципліни – забезпечити необхідні знання методів операційного числення та вміння використовувати перетворення Лапласа для розв'язання практичних задач.

Метою навчального посібника є отримання необхідного рівня знань з основних методів операційного числення для розв'язування диференціальних та інтегральних рівнянь, а також до розв'язання деяких задач електротехніки.

У даному навчальному посібнику студенти ознайомляться з необхідним теоретичним матеріалом та прикладами розв'язання задач з кожної теми. У кінці практикуму наведено варіанти індивідуальних завдань для самостійної роботи. У розділах 2 та 3 практикуму наведені основні поняття операційного числення, правила знаходження зображень та оригіналів, викладені операційні методи розв'язання звичайних диференціальних рівнянь та їх систем, а також методи знаходження розв'язків інтегральних рівнянь певного типу. Детальніше з навчальним матеріалом за темою «Операційне числення» можна ознайомитись, використовуючи підручники та посібники, наведені у списку рекомендованої літератури.

## РОЗДІЛ 1

# НЕВЛАСНІ ІНТЕГРАЛИ, ЗАЛЕЖНІ ВІД ПАРАМЕТРА $p$ . ЗАГАЛЬНІ ПОНЯТТЯ ТА ОЗНАЧЕННЯ ПЕРЕТВОРЕННЯ ЛАПЛАСА. ПОНЯТТЯ ОРИГІНАЛУ ТА ЗОБРАЖЕННЯ. ФУНКЦІЯ ХЕВІСАЙДА. ТЕОРЕМА ПРО ІСНУВАННЯ ЗОБРАЖЕННЯ ЛАПЛАСА

### 1.1. Невласні інтеграли, залежні від параметра $p$

Перед тим, як надати основний матеріал цього розділу, наведемо деякі поняття і означення, пов'язані з **невласними інтегралами, залежними від параметра  $p$** .

Будемо казати, що певний **факт** має місце на деякому інтервалі  $(a,b)$  (або в області  $D$ ), за **виключенням, можливо, ізольованих точок**, якщо на кожному відрізку  $[\alpha, \beta] \subset (a,b)$  (або в замкненій області  $\Delta \subset D$ ), що лежить всередині даного інтервалу  $(a,b)$  (даної області  $D$ ), знаходиться **не більше, ніж скінченне число точок**, в яких зазначений **факт не має місця**.

Нехай  $g(t, p)$  при **кожному значенні параметра  $p$**  в деякій області  $D$  є **неперервною функцією** від змінної  $t \in [a, +\infty]$ , за **виключенням, можливо, ізольованих точок**. Якщо для **кожного значення  $p$**  з області  $D$  інтеграл

$\int_0^{+\infty} g(t, p) dt$  є **збіжним** і інтеграл  $\int_0^L g(t, p) dt$  при  $L \rightarrow +\infty$  прямує до своєї

границі **рівномірно відносно  $p$**  в області  $D$ , то невластний інтеграл

$\int_0^{+\infty} g(t, p) dt$ , що залежить від параметра  $p$ , називається **рівномірно збіжним**

**в області  $D$** .

**Достатньою умовою рівномірної збіжності інтеграла, залежного від параметра  $p$** , є існування для нього **збіжного інтеграла-мажоранти** від деякої невід'ємної функції.

Нехай  $D$  – область на  $z$  – площині комплексної змінної  $p$ .

**Означення.** Невласний інтеграл  $\int_0^{+\infty} g(t, p) dt$  називається **рівномірно**

**збіжним всередині області  $D$** , якщо він є рівномірно збіжним в кожній обмеженій замкненій області  $\Delta \subset D$ .

В подальшому ми будемо розглядати неперервні комплекснозначні функції  $g(t, p)$  двох змінних, з яких змінна  $t$  є дійсною змінною ( $t \in [a, b]$ ), а змінна  $p$  є комплексною змінною в області  $D$ , тобто  $p \in D \subset \mathbb{C}$ . Крім того, ця функція при кожному значенні  $t \in [a, b]$  є **аналітичною за змінною  $p$**  в області  $D$ .

**Лема (про аналітичну залежність інтеграла від параметра  $p$ ).** Нехай відносно функції  $g(t, p)$  виконуються припущення, викладені в попередньому абзаці. Тоді частинна похідна  $\frac{\partial g(t, p)}{\partial p}$  має такі ж властивості, що і функція  $g(t, p)$ , а функція

$$G(p) = \int_a^b g(t, p) dt$$

представляє собою **аналітичну функцію від змінної  $p$**  в області  $D$ , причому її похідна обчислюється за формулою:

$$G'(p) = \int_a^b g'_p(t, p) dt.$$

Твердження цієї Лемі приймаємо без доведення; її результат використовується в Теоремі про аналітичну залежність вже **невласного інтеграла від параметра  $p$** , яка наводиться нижче.

**Теорема (про аналітичну залежність невластного інтеграла від параметра  $p$ ).**

Нехай  $g(t, p)$  – **неперервна комплекснозначна функція** двох змінних  $t$  і  $p$ : дійсної змінної  $t$  на проміжку  $[a, +\infty)$ , крім, можливо, ізолюваних точок, і комплексної змінної  $p$  в області  $D$ . Нехай, крім того, ця функція при

кожному значенні змінної  $t$  буде **аналітичною** по змінній  $p$  в області  $D$ .

Припустимо ще, що невластний інтеграл  $\int_a^{+\infty} g(t, p) dt$  в кожній **обмеженій замкненій області**  $\Delta \subset D$  має **мажоранту** у вигляді деякого збіжного інтеграла від дійсної невід'ємної функції. Тоді невластний інтеграл

$$G(p) = \int_a^{+\infty} g(t, p) dt$$

представляє собою **аналітичну функцію** від параметра  $p$  в області  $D$ , причому її похідна обчислюється за формулою:

$$G'(p) = \int_a^{+\infty} g'_p(t, p) dt.$$

З доведенням попередньої Лєми і цієї Теорєми можна ознайомитись у книзі [1].

## 1.2. Оригінал та його зображення

Нехай задано функцію  $f(t)$  дійсної змінної  $t$ , яка визначена при  $t \geq 0$ . Будемо вважати, що функція  $f(t)$  є **кусково-неперервною**, тобто на будь-якому скінченному інтервалі вона має **скінченне число точок розриву першого роду**.

Для забезпечення існування деяких інтегралів на нескінченному інтервалі  $0 \leq t < \infty$  накладемо на функцію  $f(t)$  додаткове обмеження. Припустимо, що існують такі сталі додатні числа  $M$  і  $p_0$ , при яких виконується така нерівність:

$$|f(t)| < Me^{p_0 t} \tag{1.1}$$

для довільного  $t$  з інтервалу  $0 \leq t < \infty$ .



Розглянемо нову функцію  $g(t, p)$  – добуток функції  $f(t)$  на комплексну функцію  $e^{-pt}$  дійсної змінної  $t$ , де  $p = \alpha + \beta i$  – деяке комплексне число ( $\alpha > 0$ ):

$$g(t, p) = e^{-pt} \cdot f(t). \quad (1.2)$$

Функція (1.2) також є комплексною функцією дійсної змінної  $t$ :

$$e^{-pt} f(t) = e^{-(\alpha + \beta i)t} f(t) = e^{-\alpha t} f(t) e^{-t\beta i} = e^{-\alpha t} f(t) \cos \beta t - i e^{-\alpha t} f(t) \sin \beta t.$$

Далі розглянемо невластний інтеграл такого вигляду:

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} f(t) \cos \beta t dt - i \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} f(t) \sin \beta t dt. \quad (1.3)$$

Доведемо, що інтеграли в правій частині рівності (1.3) існують та є абсолютно збіжними, якщо функція  $f(t)$  задовольняє умову (1.1) та  $\alpha > p_0$ .

Оцінимо перший інтеграл рівності (1.3):

$$\left| \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} f(t) \cos \beta t dt \right| \leq \int_0^{\infty} |e^{-\alpha t} f(t) \cos \beta t| dt < M \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} e^{p_0 t} dt < M \int_0^{\infty} e^{-(\alpha - p_0)t} dt = \frac{M}{\alpha - p_0}.$$

Аналогічно можна оцінити і другий інтеграл рівності (1.3). Отже, інтеграл  $\int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt$  існує. Він визначає деяку функцію від  $p$ , яку позначимо  $F(p)$ :

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt. \quad (1.4)$$

**Означення.** Інтегральний оператор в правій частині рівності (1.4) називається *перетворенням Лапласа* функції  $f(t)$ .

**Означення.** Функція  $F(p)$  називається *зображенням Лапласа*, або *L-перетворенням*, або просто *зображенням* функції  $f(t)$ .

**Означення.** Функція  $f(t)$  називається **оригіналом** перетворення Лапласа, якщо вона задовольняє три умови:

1).  $f(t) = 0$  при  $t < 0$  ( $f(0) = f(+0)$ ).

2). На довільному обмеженому інтервалі функція  $f(t)$  має лише **скінченне число точок розриву першого роду**.

3).  $|f(t)|$  зростає не швидше показникової функції, тобто існують такі числа  $p_0$  і  $M > 0$ , що  $|f(t)| < Me^{p_0 t}$ .

Число  $p_0$  називається **показником росту (зростання) функції**  $f(t)$ .

Умови 1 – 3 задовольняють **майже всі функції**, які описують **реальні фізичні процеси**. Прикладом функцій, які **не можуть бути оригіналом**, є функції  $e^{t^2}$  (не задовольняє умові 3) і  $1/t$  (не задовольняє умові 2).

Якщо  $F(p)$  є зображенням функції  $f(t)$ , то цей зв'язок математично записують так:

$$f(t) \div F(p) \tag{1.5}$$

або

$$L[f(t)] = F(p). \tag{1.6}$$

За значення оригіналу  $f(t)$  в будь-якій його точці розриву  $t_0$  першого роду будемо приймати пів-суму його граничних значень справа і зліва від цієї точки (за Дирихле):

$$f(t_0) = \frac{f(t_0 - 0) + f(t_0 + 0)}{2}.$$

При виконанні такої умови **відповідність між оригіналами і зображеннями** буде мати наступні **властивості**:

1. Ця відповідність є **взаємно однозначною**, тобто будь-якому оригіналу відповідатиме єдине зображення і навпаки.

2. Довільній лінійній комбінації скінченної множини оригіналів відповідає, як зображення, **єдина лінійна комбінація** їхніх відповідних зображень.

Отже, математично зазначену властивість записують у такий спосіб:

$$\sum_{k=1}^n c_k f_k(t) \div \sum_{k=1}^n c_k F_k(p)$$

Сенс введення зображень полягає в тому, що за їхньою допомогою вдається **суттєво спростити розв'язання багатьох задач**, що містять як диференціальні, так і певні інтегральні рівняння. Знайшовши зображення шуканої функції, можна знайти її оригінал по вже складених таблицях «оригінал – зображення», або за допомогою методів, які будуть викладені нижче. Проте виникають такі природні питання.

Нехай задана деяка функція  $F(p)$ . Чи існує така функція  $f(t)$ , для якої функція  $F(p)$  є її зображенням? Якщо така функція існує, то чи єдина вона? На обидва ці питання існує **позитивна відповідь** [4]. **Єдиність зображення** встановлюється наступною Теоремою, яку наводимо без доведення.

**Теорема про єдиність зображення.** *Якщо дві неперервні функції  $\varphi(t)$  та  $\psi(t)$  мають одне і те саме зображення  $F(p)$ , то ці функції тотожно рівні.*

Ця Теорема в подальшому буде відігравати дуже важливу роль. Дійсно, нехай при розв'язанні деякої практичної задачі ми визначили зображення шуканої функції, а потім за цим зображенням знайшли функцію-оригінал. Тоді на основі **Теорема єдиності зображення** можна заключити, що саме знайдена функція є розв'язком поставленої задачі, і інших розв'язків не існує.

**Теорема (про умови існування зображення).** *Якщо функція  $f(t)$  є оригіналом з показником росту  $p_0$ , то інтеграл Лапласа*

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt$$

є **абсолютно збіжним** в півплощині  $\operatorname{Re} p > p_0$ , а функція  $F(p)$  в ній є **аналітичною**.

**Доведення.** З умови Теорема маємо  $|f(t)| < Me^{p_0 t}$ . Якщо  $p = \sigma + is$ , то  $|e^{-pt}| = e^{-\sigma t}$  і  $|f(t)e^{-pt}| < Me^{p_0 t} e^{-\sigma t} = Me^{(p_0 - \sigma)t}$ . Зазначимо, що за умовою Теорема виконується нерівність:  $p_0 - \sigma < 0$ .

Звідси маємо оцінку інтеграла:

$$\int_0^{\infty} |f(t)e^{-pt}| dt \leq M \int_0^{\infty} e^{(p_0 - \sigma)t} dt = M \frac{e^{(p_0 - \sigma)t}}{p_0 - \sigma} \Big|_0^{\infty} = \frac{M}{\sigma - p_0}, \quad (1.7)$$

оскільки, за умовою Теорема,  $p_0 - \sigma < 0$  і тому  $e^{(p_0 - \sigma)t} \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ . Отже, нерівність (1.7) показує, що інтеграл Лапласа є **абсолютно збіжним в області**  $\operatorname{Re} p > p_0$ .

Доведемо аналітичність зображення  $F(p)$ . Для довільної точки півплощини  $\operatorname{Re} p > p_0$  маємо:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta F}{\Delta p} &= \frac{F(p + \Delta p) - F(p)}{\Delta p} = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) \frac{1}{\Delta p} (e^{-\Delta p t} - 1) dt = \\ &= \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) \frac{1}{\Delta p} \left( -\Delta p t + \frac{(\Delta p t)^2}{2!} - \frac{(\Delta p t)^3}{3!} + \frac{(\Delta p t)^4}{4!} - \dots \right) dt = \\ &= - \int_0^{\infty} e^{-pt} t f(t) dt + \varepsilon(\Delta p), \end{aligned} \quad (1.8)$$

$$\text{де } \varepsilon(\Delta p) = \Delta p \cdot \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} t^2 \left[ \frac{1}{2!} - \frac{\Delta p t}{3!} + \frac{(\Delta p t)^2}{4!} - \dots \right] dt.$$

Знайдемо оцінку функції  $\varepsilon(\Delta p)$  при  $\Delta p \rightarrow 0$ . Спочатку запишемо:

$$\begin{aligned} |\varepsilon(\Delta p)| &\leq |\Delta p| \cdot \int_0^{\infty} |f(t)| |e^{-pt}| t^2 \left[ \frac{1}{2!} + \frac{|\Delta p| t}{3!} + \frac{|\Delta p|^2 \cdot t^2}{4!} + \dots \right] dt < \\ &< |\Delta p| \cdot \int_0^{\infty} M e^{p_0 t} e^{-\sigma t} t^2 \left[ 1 + \frac{|\Delta p| t}{1!} + \frac{|\Delta p|^2 \cdot t^2}{2!} + \frac{|\Delta p|^3 \cdot t^3}{3!} \dots \right] dt < \end{aligned}$$

$$< M |\Delta p| \cdot \int_0^{\infty} e^{-(\sigma - p_0 - |\Delta p|)t} t^2 dt.$$

Інтегруючи частинами цю нерівність при  $\sigma - p_0 - |\Delta p| > 0$ , отримаємо:

$$|\varepsilon(\Delta p)| < \frac{M}{(\sigma - p_0 - |\Delta p|)^3} \Delta p.$$

Тому при  $\Delta p \rightarrow 0$  маємо

$$\lim_{\Delta p \rightarrow 0} \varepsilon(\Delta p) = 0.$$

Отже, похідна зображення Лапласа набуває вигляду:

$$\lim_{\Delta p \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta F}{\Delta p} \right) = F'(p) = - \int_0^{\infty} e^{-pt} t f(t) dt.$$

Покажемо, що останній інтеграл **існує**. Дійсно, нехай  $\delta$  – деяке додатне мале число. Тоді має місце така оцінка:

$$|t f(t)| < M e^{(p_0 + \delta)t} e^{-\delta t}.$$

Оскільки функція  $M e^{-\delta t}$  має максимум при  $t > 0$ , то існує таке число  $M_1 > 0$ , для якого

$$|M e^{-\delta t}| < M_1.$$

Тоді

$$|t f(t)| < M_1 e^{(p_0 + \delta)t}.$$

Таким чином, похідна  $F'(p)$  зображення **існує**, і тому  $F(p)$  – **аналітична** там, де

$$\operatorname{Re} p > \sigma + \delta.$$

Теорему доведено.

**Зауваження.** Хоча Теорема стверджує про збіжність інтеграла тільки при  $\operatorname{Re} p > p_0$ , проте функція (зображення)  $F(p)$  виявляється визначеною і аналітичною найчастіше на всій площині, за винятком ізольованих особливих точок.

**Теорема (необхідна ознака існування зображення).** Якщо функція  $F(p)$  – є зображенням функції  $f(t)$  з показником росту  $p_0$ , то  $\lim_{p \rightarrow \infty} F(p) = 0$

**Доведення.** Нагадаємо, що  $p = \sigma + is$  та  $|f(t)| < Me^{p_0 t}$ . Далі, оскільки  $\operatorname{Re} p > p_0$ , то

$$|F(p)| = \left| \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt \right| < \frac{M}{\sigma - p_0}.$$

Це означає, що

$$\lim_{\operatorname{Re} p \rightarrow \infty} F(p) = \lim_{\sigma \rightarrow \infty} F(p) = 0.$$

Оскільки  $F(p)$  – аналітична при  $\operatorname{Re} p > p_0$ , то  $F(p) \rightarrow 0$  при  $p \rightarrow \infty$  у довільному напрямку. Теорему доведено.

З цієї Теорема випливає, що функції, наприклад,  $F(p) = p^2$ , або  $F(p) = 10$  не можуть бути зображеннями.

**Зауваження.** Оскільки оригінал  $f(t)$  дорівнює нулю при  $t < 0$ , то строго математично цю функцію потрібно було би записувати у такий спосіб:

$$f(t) = \begin{cases} f(t), & t \geq 0; \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

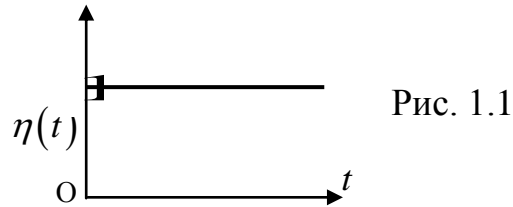
Проте замість цього (якщо це не обумовлено інакше) ми будемо писати стисло так:  $f(t)$ , маючи на увазі, що ця функція визначена саме при  $t \geq 0$ .

### 1.3. Зображення функцій $\eta(t)$ , $t$ , $e^{at}$ , $\sin t$ , $\cos t$

**I. Означення.** Функція  $\eta(t)$ , яка визначається формулою

$$\eta(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0; \\ 0, & t < 0, \end{cases} \quad (1.9)$$

(або стисло  $\eta(t) = 1$ ) називається **одичною функцією Хевісайда**. Ця функція є найпростішим прикладом оригіналу. Графік цієї функції показано на рис.1.1.



Знайдемо зображення функції Хевісайда:

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} dt = -\frac{e^{-pt}}{p} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{p}. \quad (1.10)$$

Отже,  $\eta(t) \div \frac{1}{p}$ .

Знайдемо зображення для деяких відомих елементарних функцій.

**Приклад 1.** Знайти зображення функції  $f(t) = e^{at}$ ,  $a \in \mathbb{C}$ .

**Розв'язання.** Розглянемо випадок, якщо  $\operatorname{Re}(p-a) > 0$ .

$$\begin{aligned} F(p) &= \int_0^{\infty} e^{-pt} e^{at} dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-(p-a)t} dt = -\lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{p-a} e^{-(p-a)t} \Big|_0^b = \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{p-a} - \frac{e^{-(p-a)b}}{p-a} \right] = \frac{1}{p-a}. \end{aligned}$$

Отже,

$$e^{at} \div \frac{1}{p-a}. \quad (1.11)$$

**Приклад 2.** Знайти зображення функції  $f(t) = t$ .

**Розв'язання.**

$$\begin{aligned} F(p) &= \int_0^{\infty} e^{-pt} t dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-pt} t dt = \left| \begin{array}{l} u = t; du = dt; \\ dv = e^{-pt} dt; v = -\frac{1}{p} e^{-pt} \end{array} \right| = \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left( -\frac{t}{p} e^{-pt} - \frac{1}{p^2} e^{-pt} \right) \Big|_0^b = \frac{1}{p^2}. \end{aligned}$$

Отже,

$$t \div \frac{1}{p^2}. \quad (1.12)$$

**Приклад 3.** Знайти зображення функції  $f(t) = \sin t$ .

**Розв'язання.**

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} \sin t dt = -\frac{e^{-pt}(p \sin t + \cos t)}{p^2 + 1} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{p^2 + 1}.$$

Таким чином,

$$\sin t \div \frac{1}{p^2 + 1}. \quad (1.13)$$

**Приклад 4.** Знайти зображення функції  $f(t) = \cos t$ .

**Розв'язання.**

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} \cos t dt = \frac{e^{-pt}(\sin t - p \cos t)}{p^2 + 1} \Big|_0^{\infty} = \frac{p}{p^2 + 1}.$$

Отже, маємо:

$$\cos t \div \frac{p}{p^2 + 1}. \quad (1.14)$$

**Зауваження.** Знаходити зображення «в лоб» за формулою (1.4) не завжди легко і зручно. Нижче, у розділі 2, будуть наведені основні властивості перетворення Лапласа, які суттєво полегшать цю роботу.

## РОЗДІЛ 2 ВЛАСТИВОСТІ ПЕРЕТВОРЕННЯ ЛАПЛАСА. ЗНАХОДЖЕННЯ ЗОБРАЖЕНЬ. ТАБЛИЦЯ «ОРИГІНАЛ-ЗОБРАЖЕННЯ»

### 2.1. Лінійність

**Теорема.** Якщо  $f(t) \div F(p)$  і  $g(t) \div G(p)$ , то

$$Af(t) + Bg(t) \div AF(p) + BG(p),$$

де  $A$  і  $B$  сталі.

Справедливість цієї Теореми випливає з лінійності відповідних інтегралів.



Використовуючи лінійність перетворення Лапласа та формулу (1.11) для зображення експоненти, знайдемо зображення тригонометричних і гіперболічних функцій у загальному вигляді:

$$\sin(\omega t) = \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i} \div \frac{1}{2i} \left( \frac{1}{p - i\omega} - \frac{1}{p + i\omega} \right) = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}. \quad (2.1)$$

$$\cos(\omega t) = \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2} \div \frac{1}{2} \left( \frac{1}{p - i\omega} + \frac{1}{p + i\omega} \right) = \frac{p}{p^2 + \omega^2}. \quad (2.2)$$

$$\operatorname{sh}(\omega t) = \frac{e^{\omega t} - e^{-\omega t}}{2} \div \frac{1}{2} \left( \frac{1}{p - \omega} - \frac{1}{p + \omega} \right) = \frac{\omega}{p^2 - \omega^2}. \quad (2.3)$$

$$\operatorname{ch}(\omega t) = \frac{e^{\omega t} + e^{-\omega t}}{2} \div \frac{1}{2} \left( \frac{1}{p - \omega} + \frac{1}{p + \omega} \right) = \frac{p}{p^2 - \omega^2}. \quad (2.4)$$

## 2.2. Подібність

**Теорема подібності.** Якщо  $f(t) \div F(p)$ , то для довільної сталої  $\mu > 0$

справедлива формула:  $f(\mu t) \div \frac{1}{\mu} F\left(\frac{p}{\mu}\right)$ .

**Доведення.**

$$f(\mu t) \div \int_0^{\infty} f(\mu t) e^{-pt} dt = \left| z = \mu t; dt = \frac{dz}{\mu} \right| = \frac{1}{\mu} \int_0^{\infty} f(z) e^{-\frac{p}{\mu} z} dz = \frac{1}{\mu} F\left(\frac{p}{\mu}\right).$$

**Приклад.** Знайти зображення функції  $f(t) = \sin \omega t$ , якщо  $\sin t \div \frac{1}{p^2 + 1}$ .

**Розв'язання.**

$$\sin \omega t \div \frac{1}{\omega \left( \frac{p}{\omega} \right)^2 + 1} = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}. \quad (2.5)$$

Аналогічно можна знайти зображення функції  $f(t) = \cos \omega t$ .

$$\cos \omega t \div \frac{1}{\omega} \frac{\frac{p}{\omega}}{\left(\frac{p}{\omega}\right)^2 + 1} = \frac{p}{p^2 + \omega^2}. \quad (2.6)$$

### 2.3. Зміщення (затухання)

**Теорема зміщення.** Якщо  $f(t) \div F(p)$ , то  $e^{at} f(t) \div F(p-a)$ , де  $a$  – довільне число, яке задовольняє нерівність  $\operatorname{Re}(p-a) > p_0$ , де  $p_0$  – показник росту функції  $f(t)$ .

**Доведення.** 
$$e^{at} f(t) \div \int_0^{\infty} e^{at} f(t) e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} f(t) e^{-(p-a)t} dt = F(p-a).$$

**Приклад.** Знайти зображення функцій  $e^{at} \sin \omega t$ ,  $e^{at} \cos \omega t$ ,  $e^{at} \operatorname{sh} \omega t$ ,  $e^{at} \operatorname{ch} \omega t$ .

**Розв'язання.** Використовуючи **Теорему зміщення** та знайдені вище формули (2.1) – (2.4) для зображень функцій  $\sin \omega t$ ,  $\cos \omega t$ ,  $\operatorname{sh} \omega t$ ,  $\operatorname{ch} \omega t$ , дістанемо:

$$e^{at} \sin \omega t \div \frac{\omega}{(p-a)^2 + \omega^2},$$

$$e^{at} \cos \omega t \div \frac{p-a}{(p-a)^2 + \omega^2},$$

$$e^{at} \operatorname{sh} \omega t \div \frac{\omega}{(p-a)^2 - \omega^2},$$

$$e^{at} \operatorname{ch} \omega t \div \frac{p-a}{(p-a)^2 - \omega^2}.$$

**Приклад.** Знайти оригінал за його зображенням:  $F(p) = \frac{3p-5}{p^2-4p+13}$ .

**Розв'язання.** Представимо заданий дріб у такому вигляді:

$$F(p) = \frac{3p-5}{p^2-4p+13} = 3 \cdot \frac{p-2}{(p-2)^2+3^2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{(p-2)^2+3^2}.$$

Користуючись **Теоремою зміщення**, дістанемо:  $F(p) \div 3e^{2t} \cos 3t + \frac{1}{3}e^{2t} \sin 3t$ .

## 2.4. Запізнення

**Теорема запізнення.** Якщо  $f(t) \div F(p)$ , то  $f(t-\tau) \div e^{-p\tau} F(p)$ , де  $\tau > 0$  довільна стала.

**Доведення.** Нагадаємо, що при  $0 < t < \tau$  задана функція  $f(t-\tau)$  дорівнює нулю. Запишемо за означенням вираз для її зображення:

$$f(t-\tau) \div \int_0^{\infty} f(t-\tau)e^{-pt} dt = \int_{\tau}^{\infty} f(t-\tau)e^{-pt} dt.$$

оскільки на проміжку  $(0, \tau)$  підінтегральна функція дорівнює нулю. Зробивши заміну  $t_1 = t - \tau$ , дістанемо:

$$\int_{\tau}^{\infty} f(t-\tau)e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} f(t_1)e^{-p(t_1+\tau)} dt_1 = e^{-p\tau} \int_0^{\infty} f(t_1)e^{-pt_1} dt_1 = e^{-p\tau} \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt,$$

це означає, що  $f(t-\tau) \div e^{-p\tau} F(p)$ .

Ця Теорема дає можливість знаходити зображення **кусково-неперервних функцій**, зокрема, функцій, які описують **імпульсні процеси**. Термін «запізнення» виник з тої причини, що функції  $f(t)$  і  $f(t-\tau)$  описують один і той самий процес, проте процес, що описується функцією  $f(t-\tau)$  починається з запізненням на час  $\tau$ . Це впливає з того, що графік функції  $f(t-\tau)$  зміщений відносно графіка  $f(t)$  на час  $\tau$ , а на проміжку  $(0, \tau)$  функція  $f(t-\tau)$  дорівнює нулю, оскільки  $t-\tau < 0$ . Наприклад, графіки функцій  $\eta(t-\tau)$  і  $e^{t-\tau}$  мають вигляд, показаний на рис. 2.1, 2.2.

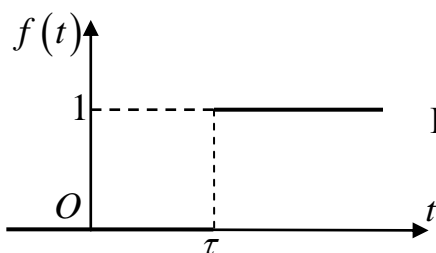


Рис. 2.1

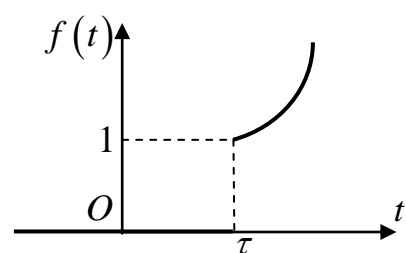


Рис. 2.2

**Приклад.** Знайти зображення одиничного імпульсу (рис. 2.3):

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ 1, & 0 \leq t \leq \tau; \\ 0, & t > \tau. \end{cases}$$

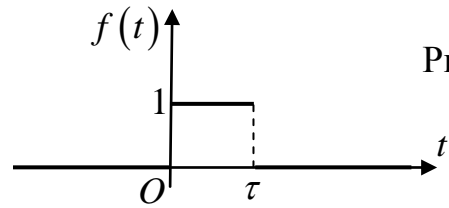


Рис. 2.3

**Розв'язання.** Запишемо функцію  $f(t)$  за допомогою функції Хевісайда:

$$f(t) = \eta(t) - \eta(t - \tau).$$

Тоді використовуючи формули (1.11), (1.12) та **Теорему запізнення** дістанемо:

$$f(t) \div \frac{1}{p} - \frac{e^{-p\tau}}{p}.$$

**Приклад.** Знайти зображення функції  $f(t)$  (рис. 2.4):

$$f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq 1; \\ 3, & 1 < t \leq 2; \\ -1, & 2 < t \leq 4; \\ 0, & t > 4. \end{cases}$$

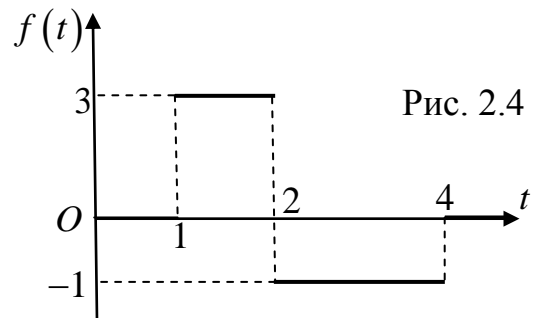


Рис. 2.4

**Розв'язання.** Запишемо функцію  $f(t)$  за допомогою функції Хевісайда у такому вигляді:

$$f(t) = 3\eta(t-1) - 4\eta(t-2) + \eta(t-4).$$

Тоді її зображення за **Теоремами лінійності та згасання** записується так:

$$F(p) = 3\frac{1}{p}e^{-p} - 4\frac{1}{p}e^{-2p} + \frac{1}{p}e^{-4p}.$$

**Завдання для СРС.** Довести, що зображення періодичної функції-оригіналу з періодом  $T$  буде мати вигляд:

$$F(p) = \frac{1}{1 - e^{-Tp}} \int_0^T f(t) e^{-pt} dt.$$

## 2.5. Випередження

**Теорема випередження.** Якщо  $f(t) \div F(p)$ , то

$$f(t+\tau) \div e^{p\tau} \left( F(p) - \int_0^{\tau} f(t) e^{-pt} dt \right),$$

де  $\tau > 0$  довільна стала.

**Доведення.** Запишемо формулу для зображення функції  $f(t+\tau)$ :

$$f(t+\tau) \div \int_0^{\infty} f(t+\tau) e^{-pt} dt.$$

Зробимо заміну змінної  $t_1 = t + \tau$ . В результаті отримаємо:

$$\begin{aligned} f(t+\tau) \div e^{p\tau} \int_{\tau}^{\infty} f(t_1) e^{-pt_1} dt_1 &= e^{p\tau} \left( \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt - \int_0^{\tau} f(t) e^{-pt} dt \right) = \\ &= e^{p\tau} \left( F(p) - \int_0^{\tau} f(t) e^{-pt} dt \right). \end{aligned}$$

Результати цієї Теорема використовують при розв'язуванні різницевих рівнянь.

## 2.6. Диференціювання по параметру

**Теорема.** Якщо  $f(t, x) \div F(p, x)$  і функція  $f(t, x)$  при кожному значенні параметра  $x$  є оригіналом, а функція  $F(p, x)$  має похідну за змінною  $x$ , то:

$$\frac{\partial f(t, x)}{\partial x} \div \frac{\partial F(p, x)}{\partial x}.$$

**Доведення** випливає з рівності:

$$\int_0^{\infty} \frac{\partial f(t, x)}{\partial x} e^{-pt} dt = \frac{\partial}{\partial x} \left( \int_0^{\infty} f(t, x) e^{-pt} dt \right) = \frac{\partial F(p, x)}{\partial x}.$$

**Приклад.** Знайти зображення функції  $te^{at}$ .

**Розв'язання.** За формулою (1.11) маємо  $e^{at} \div \frac{1}{p-a}$ . Тут роль  $x$  відіграє

параметр  $a$ . Диференціюємо ліву і праву частину по параметру  $a$ :

$$te^{at} \div \frac{1}{(p-a)^2}.$$

## 2.7. Диференціювання оригіналу

**Теорема.** Якщо  $f(t) \div F(p)$  і функції  $f'(t), f''(t), \dots, f^{(n)}(t)$  є оригіналами, то

$$f'(t) \div pF(p) - f(0); \tag{2.7}$$

$$f''(t) \div p^2F(p) - pf(0) - f'(0); \tag{2.8}$$

$$f'''(t) \div p^3F(p) - p^2f(0) - pf'(0) - f''(0); \tag{2.9}$$

.....

$$f^{(n)}(t) \div p^nF(p) - p^{n-1}f(0) - p^{n-2}f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0). \tag{2.10}$$

**Доведення.** Запишемо формулу для зображення функції  $f'(t)$ :

$$\begin{aligned} f'(t) \div \int_0^{\infty} f'(t)e^{-pt} dt &= \left| \begin{array}{l} u = e^{-pt}, du = -pe^{-pt} dt; \\ dv = f'(t) dt; v = f(t) \end{array} \right| = \\ &= f(t)e^{-pt} \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt = -f(0) + pF(p). \end{aligned}$$

Отже,  $f'(t) \div pF(p) - f(0)$ . Користуючись цією формулою, знайдемо зображення функції  $f''(t)$ :

$$f''(t) = (f'(t))' \div p(pF(p) - f(0)) - f'(0) = p^2F(p) - pf(0) - f'(0).$$

Аналогічно знайдемо зображення  $f'''(t)$ . Застосовуючи формулу (2.7)  $(n-1)$ -раз, дістанемо формулу (2.10).

**Зауваження.** Якщо всі початкові умови нульові:

$$f(0) = f'(0) = f''(0) = \dots = f^{(n-1)}(0) = 0,$$

то

$$f^{(n)}(t) \div p^n F(p). \quad (2.11)$$

**Наслідок 1.** Якщо  $f'(t)$  – оригінал, а  $F(p)$  – функція зображення, яка аналітична в нескінченності, то

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} pF(p) = f(0).$$

**Наслідок 2.** Якщо  $f'(t)$  – оригінал і існує границя функції  $f(t)$  при  $t \rightarrow \infty$ , то

$$\lim_{p \rightarrow 0} pF(p) = \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = f(\infty). \quad (2.12)$$

**Приклад.** Знайти зображення  $F(p)$  виразу  $\Phi(t) = x''(t) + 3x'(t) + 2x(t) + 5$ , якщо  $x(0) = 1$ ,  $x'(0) = 2$ .

**Розв'язання.** Позначимо зображення  $x(t)$  через  $X(p)$ . Тоді за формулами (2.7), (2.8) маємо:

$$x'(t) \div pX(p) - 1; \quad x''(t) \div p^2X(p) - p - 2.$$

Оскільки  $5 \div \frac{5}{p}$ , то шукане зображення  $F(p)$  заданого виразу набуває

такого вигляду:

$$F(p) = L\{\Phi(t)\} = (p^2 + 3p + 2)X(p) - p + \frac{5}{p} - 5,$$

## 2.8. Диференціювання зображення

**Теорема.** Якщо  $f(t) \div F(p)$ , то

$$F'(p) \div -tf(t);$$

$$F''(p) \div t^2 f(t);$$

.....

$$F^{(n)}(p) \div (-1)^n t^n f(t).$$

**Доведення.** Оскільки функція  $F(p)$  аналітична на півплощині  $\operatorname{Re} p > p_0$ , то у неї існує похідна довільного порядку. Тому після диференціювання інтеграла (1.4) по  $p$  дістанемо:

$$F'(p) = \int_0^{\infty} f(t) \frac{d}{dp} (e^{-pt}) dt = \int_0^{\infty} f(t) (-t) e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} [-tf(t)] e^{-pt} dt \doteq -tf(t).$$

Для другої і третьої похідних маємо:

$$F''(p) \doteq -t(-tf(t)) = t^2 f(t); \quad F'''(p) \doteq -t(t^2 f(t)) = -t^3 f(t),$$

і взагалі

$$F^{(n)}(p) \doteq (-1)^n t^n f(t).$$

**Приклад.** Знайти зображення функції  $t^n$ .

**Розв'язання.** За формулою (1.13) маємо  $t \doteq F(p) = p^{-2}$ . Тоді:

$$f(t) = t \Rightarrow -t \cdot f(t) = -t^2 \Rightarrow -t^2 \doteq (p^{-2})' = -\frac{2}{p^3} \Rightarrow t^2 \doteq \frac{2}{p^3}.$$

Продовжуючи диференціювання, дістанемо:

$$t^n \doteq \frac{n!}{p^{n+1}}. \quad (2.13)$$

## 2.9. Інтегрування оригіналу

**Теорема.** Якщо  $f(t) \doteq F(p)$ , то має місце рівність:  $\int_0^t f(\tau) d\tau \doteq \frac{F(p)}{p}$ .

**Доведення.** Очевидно, що функція  $\varphi(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau$  є оригіналом. Нехай

$\varphi(t) \doteq \Phi(p)$ . За теоремою про диференціювання оригіналу маємо

$$\varphi'(t) \doteq p\Phi(p) - \varphi(0) = p\Phi(p).$$

Але оскільки

$$\varphi'(t) = \frac{d}{dt} \left( \int_0^t f(\tau) d\tau \right) = f(t),$$



то  $F(p) = p\Phi(p)$ . Звідси дістаємо шукану формулу:  $\Phi(p) = \frac{F(p)}{p}$ .

**Приклад.** Знайти зображення функції  $\int_0^t \tau \operatorname{sh} 2\tau d\tau$ .

**Розв'язання.** За формулою (2.3) маємо  $\operatorname{sh} 2t \div \frac{2}{p^2 - 4}$ . За Теоремою диференціювання зображення

$$t \cdot \operatorname{sh} 2t \div - \left( \frac{2}{p^2 - 4} \right)' = \frac{4p}{(p^2 - 4)^2}.$$

Тоді за теоремою інтегрування оригіналу дістанемо:

$$\int_0^t \tau \operatorname{sh} 2\tau d\tau \div \frac{4}{(p^2 - 4)^2}.$$

## 2.10. Інтегрування зображення

**Теорема.** Якщо  $f(t) \div F(p)$ , і інтеграл  $\int_p^\infty F(p) dp$  збіжний, то

$$\int_p^\infty F(p) dp \div \frac{f(t)}{t}.$$

**Доведення.** Змінюючи порядок інтегрування<sup>\*)</sup> у формулі (1.4) дістаємо:

$$\begin{aligned} \int_p^\infty F(p) dp &= \int_p^\infty \left( \int_0^\infty f(t) e^{-pt} dt \right) dp = \int_0^\infty \left( \int_p^\infty e^{-pt} dp \right) f(t) dt = \\ &= \int_0^\infty \left( -\frac{e^{-pt}}{t} \Big|_p^\infty \right) f(t) dt = \int_0^\infty \frac{f(t)}{t} e^{-pt} dt \div \frac{f(t)}{t}. \end{aligned}$$

**Зауваження<sup>\*)</sup>.** Тут і нижче ми використовуємо зміну порядку інтегрування. У відповідності до Теорема Фубіні (яку ми тут не наводимо) ця операція є законною, оскільки отриманий після такої заміни кратний інтеграл

є абсолютно збіжним. Крім того, ми вважаємо, що шлях інтегрування цілком лежить у півплощині  $\operatorname{Re} p > p_0$ , де  $p_0$  – показник росту функції  $f(t)$ .

**Наслідок.** Має місце рівність двох невластних інтегралів

$$\int_0^{\infty} \frac{f(t)}{t} dt = \int_0^{\infty} F(q) dq,$$

якщо вони обидва є збіжними.

**Приклад.** Знайти зображення функції  $\frac{e^t - 1}{t}$ .

**Розв’язання.** Оскільки  $e^t - 1 \div \frac{1}{p-1} - \frac{1}{p}$ , то

$$\frac{e^t - 1}{t} \div \int_p^{\infty} \left( \frac{1}{p-1} - \frac{1}{p} \right) dp = \ln \left( \frac{p-1}{p} \right) \Big|_p^{\infty} = \ln 1 - \ln \left( \frac{p-1}{p} \right) = \ln \left( \frac{p}{p-1} \right).$$

## 2.11. Множення зображень. Згортка функцій

**Теорема (зображення згортки).** Якщо  $f(t) \div F(p)$ ,  $g(t) \div G(p)$ , то

$$F(p) \cdot G(p) \div f(t) * g(t),$$

де  $f(t) * g(t) = \int_0^t f(\tau) g(t-\tau) d\tau$  – згортка функцій  $f(t)$  і  $g(t)$ .

**Доведення.** Легко перевірити, що функція  $f(t) * g(t)$  є оригіналом.

Використовуючи формулу (1.4), запишемо:

$$\int_0^t f(\tau) g(t-\tau) d\tau \div \int_0^{\infty} \left( \int_0^t f(\tau) g(t-\tau) d\tau \right) e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} e^{-pt} dt \int_0^t f(\tau) g(t-\tau) d\tau.$$

Область інтегрування  $D$  задається умовами  $0 \leq t < \infty, 0 \leq \tau < t$ .

Двократний інтеграл, який стоїть справа, береться по нескінченній області (нескінченний сектор), що обмежена прямими  $\tau = 0, \tau = t$  (рис. 2.5).

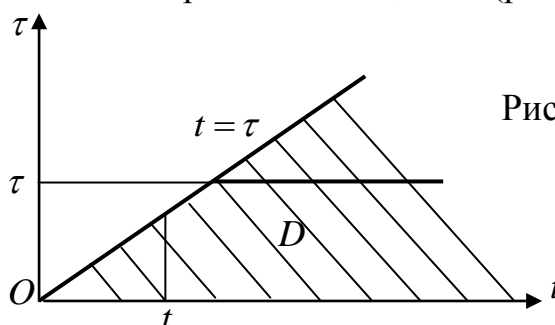


Рис. 2.5

В останньому інтегралі змінимо порядок інтегрування і зробимо підстановку  $t_1 = t - \tau$ . В результаті дістанемо:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-pt} dt \int_0^t f(\tau) g(t-\tau) d\tau &= \int_0^{\infty} f(\tau) d\tau \int_{\tau}^{\infty} e^{-pt} g(t-\tau) dt = \\ &= \int_0^{\infty} f(\tau) e^{-p\tau} d\tau \int_0^{\infty} g(t_1) e^{-pt_1} dt_1 = F(p) \cdot G(p). \end{aligned}$$

**Зауваження 1.** Дія згортки комутативна, тобто  $f(t) * g(t) = g(t) * f(t)$ .

**Зауваження 2.** Подвійний інтеграл, що обчислюється по нескінченному сектору (рис. 2.5) від функції  $e^{-pt} f(\tau) g(t-\tau)$  є **абсолютно збіжним** при  $\operatorname{Re} p > p_0$ , де  $p_0$  – найбільший з показників росту функцій  $f(t)$  і  $g(t)$ .

**Наслідок.** Якщо  $f(t) * g(t) \div F(p)G(p)$  і  $f'(t)$  є оригіналом, то справедлива **формула Дюамеля**:

$$pF(p)G(p) \div \int_0^t f'(\tau) g(t-\tau) d\tau + f(0)g(t). \quad (2.14)$$

**Доведення.**  $pF(p)G(p) = pF(p)G(p) - f(0)G(p) + f(0)G(p) =$   
 $= (pF(p) - f(0))G(p) + f(0)G(p).$

Звідси дістанемо шуканий оригінал:

$$pF(p) \cdot G(p) \div f'(t) * g(t) + f(0)g(t).$$

**Приклад.** Знайти оригінал, зображенням якого є  $F(p) = \frac{3p^2}{(p^2 + 1)^2}$ .

**Розв'язання.** Запишемо  $F(p) = 3p \cdot \frac{1}{p^2 + 1} \cdot \frac{p}{p^2 + 1}$ .

За формулою Дюамеля (2.14) маємо:

$$3p \cdot \frac{1}{p^2+1} \cdot \frac{p}{p^2+1} \div 3 \int_0^t \cos \tau \cos(t-\tau) d\tau + \sin 0 \cos t =$$

$$= \frac{3}{2} \int_0^t [\cos(2\tau-t) + \cos t] d\tau = \frac{3}{2} \left( \frac{\sin t}{2} + \frac{\sin t}{2} + t \cos t \right) = \frac{3}{2} (\sin t + t \cos t).$$

## 2.12. Множення оригіналів

**Теорема.** Якщо  $f(t) \div F(p)$ ,  $g(t) \div G(p)$ , то

$$f(t) \cdot g(t) \div F(p) * G(p),$$

де  $F(p) * G(p) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\theta-i\infty}^{\theta+i\infty} F(z)G(p-z)dz$  – згортка зображень  $F(p)$  і  $G(p)$ ,

а шлях інтегрування – це вертикальна пряма  $\operatorname{Re} z = \theta > p_0$ ,  $z = x + iy$  (рис. 2.6).

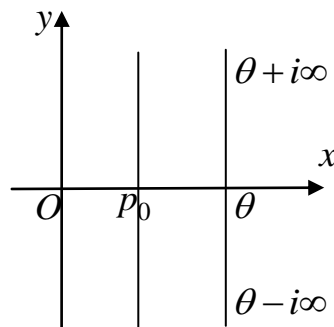


Рис. 2.6

## 2.13. Основні властивості перетворень операційного числення

1. **Лінійність:**  $Af(t) + Bg(t) \div AF(p) + BG(p)$ .

2. **Подібність:**  $f(\mu t) \div \frac{1}{\mu} F\left(\frac{p}{\mu}\right)$ .

3. **Зміщення (затухання):**  $e^{at} f(t) \div F(p-a)$ .

4. **Запізнення (оригіналу):**  $f(t-\tau) \div e^{-p\tau} F(p)$ .

5. **Випередження (оригіналу):**  $f(t+\tau) \div e^{p\tau} \left( F(p) - \int_0^{\tau} f(t) e^{-pt} dt \right)$ .

6. Диференціювання по параметру:  $\frac{\partial f(t, x)}{\partial x} \div \frac{\partial F(p, x)}{\partial x}$ .

7. Диференціювання оригіналу:

$$f^{(n)}(t) \div p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0).$$

8. Диференціювання зображення:  $F^{(n)}(p) \div (-1)^n t^n f(t)$ .

9. Інтегрування оригіналу:  $\int_0^t f(\tau) d\tau \div \frac{F(p)}{p}$ .

10. Інтегрування зображення:  $\int_p^\infty F(p) dp \div \frac{f(t)}{t}$ .

11. Множення зображень:  $F(p) \cdot G(p) \div f(t) * g(t) = \int_0^t f(\tau) g(t-\tau) d\tau$ .

12. Інтеграл Дюамеля:  $pF(p)G(p) \div \int_0^t f'(\tau) g(t-\tau) d\tau + f(0)g(t)$ .

13. Множення оригіналів:

$$f(t) \cdot g(t) \div F(p) * G(p) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\theta-i\infty}^{\theta+i\infty} F(z)G(p-z) dz.$$

#### 2.14. Таблиця оригіналів та відповідних зображень

№	Оригінал	Зображення
1	$\eta(t)$	$1/p$
2	$e^{at}$	$\frac{1}{p-a}$
3	$t$	$1/p^2$
4	$t^n$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
5	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$

6	$\cos \omega t$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$
7	$\text{sh } \omega t$	$\frac{\omega}{p^2 - \omega^2}$
8	$\text{ch } \omega t$	$\frac{p}{p^2 - \omega^2}$
9	$e^{at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(p-a)^2 + \omega^2}$
10	$e^{at} \cos \omega t$	$\frac{p-a}{(p-a)^2 + \omega^2}$
11	$e^{at} \text{sh } \omega t$	$\frac{\omega}{(p-a)^2 - \omega^2}$
12	$e^{at} \text{ch } \omega t$	$\frac{p-a}{(p-a)^2 - \omega^2}$
13	$e^{at} t^n$	$\frac{n!}{(p-a)^{n+1}}$
14	$t \sin \omega t$	$\frac{2\omega p}{(p^2 + \omega^2)^2}$
15	$t \cos \omega t$	$\frac{p^2 - \omega^2}{(p^2 + \omega^2)^2}$
16	$\frac{\sin \omega t}{t}$	$\text{arctg} \left( \frac{\omega}{p} \right)$
17	$\frac{\cos \alpha t - \cos \beta t}{t}$	$\frac{1}{2} \ln \left( \frac{p^2 + \beta^2}{p^2 + \alpha^2} \right)$
18	$t \text{sh } \omega t$	$\frac{2\omega p}{(p^2 - \omega^2)^2}$

19	$tch\omega t$	$\frac{p^2 + \omega^2}{(p^2 - \omega^2)^2}$
20	$\frac{sh\omega t}{t}$	$\frac{1}{2} \ln\left(\frac{p + \omega}{p - \omega}\right)$
21	$\frac{ch\alpha t - ch\beta t}{t}$	$\frac{1}{2} \ln\left(\frac{p^2 - \beta^2}{p^2 - \alpha^2}\right)$
22	$te^{at} \sin \omega t$	$\frac{2\omega(p - a)}{\left((p - a)^2 + \omega^2\right)^2}$
23	$te^{at} \cos \omega t$	$\frac{(p - a)^2 - \omega^2}{\left((p - a)^2 + \omega^2\right)^2}$
24	$\frac{1}{2\omega^3}(\sin \omega t - \omega t \cos \omega t)$	$\frac{1}{(p^2 + \omega^2)^2}$
25	$\frac{1}{2\omega^3}(\omega t ch \omega t - sh \omega t)$	$\frac{1}{(p^2 - \omega^2)^2}$
26	$\sin(\omega t \pm \varphi)$	$\frac{\omega \cos \varphi \pm p \sin \varphi}{p^2 + \omega^2}$
27	$\cos(\omega t \pm \varphi)$	$\frac{p \cos \varphi \mp \omega \sin \varphi}{p^2 + \omega^2}$
28	$1/\sqrt{t}$	$\sqrt{\frac{\pi}{p}}$
29	$2\sqrt{\frac{t}{\pi}}$	$\frac{1}{p\sqrt{p}}$
30	$\frac{1 - e^{at}}{t}$	$\ln\left(\frac{p - a}{p}\right)$
31	$\frac{e^{bt} - e^{at}}{t}$	$\ln\left(\frac{p - a}{p - b}\right)$

32	$\frac{e^{bt} - e^{at}}{2t\sqrt{\pi t}}$	$\sqrt{p-a} - \sqrt{p-b}$
33	$\sum_{n=0}^{\infty} C_n \frac{t^n}{n!}, t > 0$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_n}{p^{n+1}}$

### РОЗДІЛ 3

## ЗНАХОДЖЕННЯ ПРОСТИХ ОРИГІНАЛІВ. ЗАСТОСУВАННЯ ОПЕРАЦІЙНОГО ЧИСЛЕННЯ ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ ТА ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

### 3.1. Метод розкладу раціонального дробу на суму простіших

Перед тим, як викласти методику застосування операційного числення до розв'язування диференціальних рівнянь, наведемо деякі підходи і міркування до знаходження оригіналу за його зображенням.

У багатьох випадках зображення вдається перетворити до такого вигляду, для якого відповідний оригінал легко знаходиться за допомогою властивостей перетворення Лапласа і таблиці зображень. Зокрема, для цього можна використати метод розкладу раціонального дробу на суму елементарних дробів.

**Приклад.** Знайти оригінал функції  $F(p) = \frac{1}{p^2 + 2p + 10}$ .

**Розв'язання.** Виділимо повний квадрат в знаменнику і застосуємо **Теорему зміщення:**

$$F(p) = \frac{1}{p^2 + 2p + 10} = \frac{1}{(p+1)^2 + 9} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{(p+1)^2 + 9} \div \frac{1}{3} e^{-t} \sin 3t.$$

**Приклад.** Знайти оригінал функції  $F(p) = \frac{1}{(p^2 + 1)^2}$ .

**Розв'язання.** Скористаємось **Теоремою про множення зображень:**



$$F(p) = \frac{1}{(p^2 + 1)^2} = \frac{1}{p^2 + 1} \cdot \frac{1}{p^2 + 1} \div \sin t * \sin t = \int_0^t \sin(t - \tau) \sin \tau d\tau =$$

$$= -\frac{1}{2} \int_0^t [\cos t - \cos(2\tau - t)] d\tau = -\frac{1}{2} t \cos t + \frac{1}{4} \sin(2\tau - t) \Big|_0^t = -\frac{1}{2} (t \cos t - \sin t).$$

**Приклад.** Знайти оригінал функції  $F(p) = \frac{5(p-9)}{p(p-1)(p^2+9)}$ .

**Розв'язання.** Розкладемо функцію  $F(p)$  на елементарні дроби:

$$F(p) = \frac{5}{p} - \frac{4}{p-1} - \frac{p}{p^2+9} + \frac{4}{p^2+9}.$$

Користуючись теоремою лінійності і таблицею зображень, запишемо оригінал:  $f(t) = 5 - 4e^t - \cos 3t + \frac{4}{3} \sin 3t$ .

Наведемо (без доведення) **необхідну і достатню умову** раціональності зображення [1].

**Теорема.** Для того, щоб зображення було раціональною функцією, **необхідно і достатньо**, щоби оригінал можна було би представити у вигляді лінійної комбінації функцій вигляду  $t^m e^{\lambda t}$ , де  $m$  – ціле невід'ємне, а  $\lambda$  – комплексне число.

**Зауваження.** Зазначимо, що **будь-який правильний раціональний дріб є зображенням деякого оригіналу**. Отже, за допомогою перетворення Лапласа встановлюється **взаємно однозначна відповідність** між всіма функціями, які можна представити у вигляді **лінійних комбінацій виразів  $t^m e^{\lambda t}$**  і всіма правильними раціональними дробами. Крім того, зазначимо, що клас функцій, які представлені лінійними комбінаціями виразів  $t^m e^{\lambda t}$ , наділений наступними властивостями: операції лінійного комбінування, множення на аргумент, множення на показникову функцію, лінійного перетворення аргументу, диференціювання і інтегрування, які

застосовуються до функцій цього класу, приводять знову до функцій цього класу.

### 3.2. Методи знаходження оригіналів, які ґрунтуються на трьох Теоремах розвинення

Для знаходження оригіналу в більш загальних випадках використовують **Теорему розвинення**, які в цьому курсі лекцій наводяться без доведення. Детальніше з цими Теоремами можна ознайомитись у книгах [4, 6].

**Перша Теорема розвинення.** *Якщо функція  $F(p)$  є аналітичною в околі нескінченно віддаленої точки  $p = \infty$  і її розвинення в ряд Лорана має вигляд:*

$$F(p) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_n}{p^{n+1}} = \frac{C_0}{p} + \frac{C_1}{p^2} + \frac{C_2}{p^3} + \dots,$$

то функція

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \frac{t^n}{n!} = C_0 + C_1 t + C_2 \frac{t^2}{2!} + \dots \quad (3.1)$$

є **оригіналом**, який має зображення  $F(p)$ .

**Приклад.** Знайти оригінал  $f(t)$  для такої функції-зображення:

$$F(p) = \frac{1}{p} \sin\left(\frac{1}{p}\right).$$

**Розв'язання.** Розкладемо функцію  $F(p)$  в ряд Лорана:

$$F(p) = \frac{1}{p} \sin\left(\frac{1}{p}\right) = \frac{1}{p} \left( \frac{1}{p} - \frac{1}{3!p^3} + \frac{1}{5!p^5} - \dots \right) = \frac{1}{p^2} - \frac{1}{3!p^4} + \frac{1}{5!p^6} - \dots$$

Користуючись Першою Теоремою розвинення дістанемо:

$$f(t) = t - \frac{t^3}{(3!)^2} + \frac{t^5}{(5!)^2} - \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{3n-1} \frac{t^{2n-1}}{((2n-1)!)^2}.$$

**Друга Теорема розвинення.** Якщо функція  $F(p)$  однозначна і має скінченне число особливих точок  $p_1, p_2, \dots, p_k$ , які лежать в скінченній частині площини, то функція, побудована з відповідних лишків,

$$f(t) = \sum_{k=1}^n \operatorname{res} \left( e^{p_k t} F(p_k) \right) \quad (3.2)$$

є оригіналом, який має зображення  $F(p)$ .

**Наслідок 1.** Якщо  $F(p) = \frac{Q(p)}{R(p)}$  – правильний раціональний дріб, то оригіналом для нього буде функція

$$f(t) = \sum_k \frac{1}{(n_k - 1)!} \lim_{p \rightarrow p_k} \frac{d^{(n_k - 1)}}{dp^{(n_k - 1)}} \left( (p - p_k)^{n_k} \frac{Q(p)e^{pt}}{R(p)} \right), \quad (3.3)$$

де  $p_k$  полюси  $F(p)$  кратності  $n_k$ .

**Наслідок 2.** Якщо  $F(p) = \frac{Q(p)}{R(p)}$ , і всі нулі  $p_k$  знаменника прості, то оригіналом для  $F(p)$  буде така функція:

$$f(t) = \sum_k \frac{Q(p_k)}{R'(p_k)} e^{p_k t}. \quad (3.4)$$

**Наслідок 3.** Якщо  $F(p) = \frac{Q(p)}{(p - p_1) \cdot (p - p_2) \cdot \dots \cdot (p - p_m)}$ , де  $p_k$  – прості нулі знаменника ( $k = \overline{1, m}$ ), то оригіналом для  $F(p)$  буде така

$$f(t) = \frac{Q(p_1)e^{p_1 t}}{(p_1 - p_2) \cdot (p_1 - p_3) \cdot \dots \cdot (p_1 - p_m)} + \frac{Q(p_2)e^{p_2 t}}{(p_2 - p_1) \cdot (p_2 - p_3) \cdot \dots \cdot (p_2 - p_m)} + \dots + \frac{Q(p_m)e^{p_m t}}{(p_m - p_1) \cdot (p_m - p_2) \cdot \dots \cdot (p_m - p_{m-1})}. \quad (3.5)$$

**Приклад.** Знайти оригінал  $f(t)$  для такої функції-зображення:

$$F(p) = \frac{3p}{(p+1)^2(p-2)^2}.$$

**Розв'язання.** Ця функція має полюси  $p = -1$  і  $p = 2$  подвійної кратності. Використовуємо формулу (3.3):

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{(2-1)!} \lim_{p \rightarrow -1} \left( \frac{3pe^{pt}}{(p-2)^2} \right)' + \frac{1}{(2-1)!} \lim_{p \rightarrow 2} \left( \frac{3pe^{pt}}{(p+1)^2} \right)' = \\ &= 3 \lim_{p \rightarrow -1} \frac{e^{pt}((1+pt)(p-2) - 2p)}{(p-2)^3} + 3 \lim_{p \rightarrow 2} \frac{e^{pt}((1+pt)(p+1) - 2p)}{(p+1)^3} = \\ &= \frac{1}{9} [(6t-1)e^{2t} - (3t-1)e^{-t}]. \end{aligned}$$

**Приклад.** Знайти оригінал  $f(t)$  для такої функції-зображення:

$$F(p) = \frac{1}{p^4 - 1}.$$

**Розв'язання.** Знаменник має тільки прості корені  $p_{1,2} = \pm 1$ ,  $p_{3,4} = \pm i$ . Тому за формулою (3.4) дістанемо:

$$f(t) = \frac{1}{2}(\text{sh}t - \text{sin}t).$$

**Приклад.** Знайти оригінал  $f(t)$  для такої функції-зображення:

$$F(p) = \frac{3p^2 + 2}{p(p-1)(p+1)(p+2)}.$$

**Розв'язання.** За формулою (3.5) маємо:

$$\begin{aligned} f(t) &= \left. \frac{(3p^2 + 2)e^{pt}}{(p-1)(p+1)(p+2)} \right|_{p=0} + \left. \frac{(3p^2 + 2)e^{pt}}{p(p+1)(p+2)} \right|_{p=1} + \\ &+ \left. \frac{(3p^2 + 2)e^{pt}}{p(p-1)(p+2)} \right|_{p=-1} + \left. \frac{(3p^2 + 2)e^{pt}}{p(p-1)(p+1)} \right|_{p=-2} = -1 + \frac{5}{6}e^t + \frac{5}{2}e^{-t} - \frac{7}{3}e^{-2t}. \end{aligned}$$

**Третя Теорема розвинення (узагальнена) (про обернення перетворення Лапласа).**

Якщо функція  $f(t)$  – оригінал, а  $F(p)$  – його зображення, то в кожній точці, де  $f(t)$  неперервна, справедлива **формула обернення**:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\theta-i\infty}^{\theta+i\infty} F(p) e^{pt} dp, \quad (3.6)$$

де інтегрування ведеться по довільній прямій  $\operatorname{Re} p = \theta, \theta > p_0$  – показник росту  $f(t)$  і інтеграл розглядається в розумінні **головного значення**.

Перед доведенням цієї Теорема зробимо наступне Зауваження.

**Зауваження.** Якщо перетворенням Лапласа для функції  $f(t)$  є функція  $F(p)$ , тобто

$$F(p) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt,$$

то **перетворенням Фур'є** для функції  $e^{-\theta t} f(t)$  є  $F(\theta + iu)$ , якщо  $\theta$  – дійсне число, яке є більшим за показник росту  $p_0$  функції  $f(t)$ . Дійсно, маємо

$$F(\theta + iu) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-(\theta+iu)t} dt = \int_0^{+\infty} [e^{-\theta t} f(t)] e^{-iut} dt.$$

**Доведення.** В силу попереднього Зауваження і Теорема обернення перетворення Фур'є для довільної точки  $t$  для абсолютно інтегрованої і кусково-гладкої на проміжку функції  $f(t)$  можна записати рівність:

$$e^{-\theta t} f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\theta + iu) e^{iut} du,$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\theta + iu) e^{(\theta+iu)t} du,$$

заміна  $p = \theta + iu$ ,  $dp = i du$ ;  $du = \frac{dp}{i}$ ;  $\theta - i\infty < p < \theta + i\infty$ ;

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\theta-i\infty}^{\theta+i\infty} F(p) e^{pt} dp,$$

що і потрібно було довести.

**Означення.** Головним значенням невласного інтеграла  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$

називається границя  $\lim_{b \rightarrow \infty} \int_{-b}^b f(x)dx$ , тобто для інтеграла (3.6) це виглядає так:

$$\int_{\theta-i\infty}^{\theta+i\infty} F(p)e^{pt}dp = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_{\theta-ib}^{\theta+ib} F(p)e^{pt}dp$$

і інтеграл не залежить від  $\theta$  ( $\theta > \alpha$ ).

**Зауваження 1.** Якщо функція  $f(t)$  має перетворення Лапласа  $F(p)$  і інтеграл  $\int_0^{+\infty} |f(t)|dt$  збіжний, то для неї існує перетворення Фур'є  $F(i\omega)$ , тобто  $p \rightarrow i\omega$ .

**Зауваження 2.** Безпосереднє застосування **формули обернення** (3.6) часто призводить до труднощів і тому для знаходження оригіналу  $f(t)$  за його зображенням  $F(p)$  користуються попередніми Теоремами розвинення, які є наслідками цієї Теореми. Намітимо шлях практичного знаходження оригіналу  $f(t)$  за допомогою методів ТФКЗ, який можливо використовувати при певних умовах [1,2].

Якщо  $|F(p)| < CR^{-k}$ , де  $p = Re^{i\varphi}$ ,  $-\pi \leq \varphi < \pi$ , і дійсні числа  $R > R_0$ ,  $R_0, C$  і  $k > 0$  є сталими, то інтеграл

$$\int_{\theta-i\infty}^{\theta+i\infty} F(p)e^{pt}dp$$

у формулі обернення (3.6) можна замінити на інтеграл

$$\int_{\gamma} e^{pt} \cdot F(p)dp,$$

де  $\gamma$  – коло з центром у початку координат, яке містить всередині всі полюси функції  $e^{pt} \cdot F(p)$ .

Таким чином, можна записати:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} e^{pt} \cdot F(p) dp.$$

Застосувавши Основну Теорему про лишки, дістанемо:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\theta-i\infty}^{\theta+i\infty} F(p) e^{pt} dp = \frac{1}{2\pi i} \cdot 2\pi i \cdot \sum_k \operatorname{res}(F(p_k) e^{p_k t}) = \sum_k \operatorname{res}(F(p_k) e^{p_k t}).$$

Тим самим ми стисло обґрунтували результат Другої Теорему розвинення та формулу (3.2).

**Достатня умова для того, щоб аналітична функція  $F(p)$  була зображенням**

**Теорема.** Нехай  $F(p)$  – аналітична функція в смужі  $\operatorname{Re} p > s_0$  та для довільного числа  $a > s_0$  виконуються такі умови:

1. Невласний інтеграл  $\int_{-\infty}^{\infty} |F(a + i\sigma)| d\sigma$  є збіжним;
2. Функція  $F(p)$  прямує до нуля, тобто  $F(p) \rightarrow 0$ , при  $|p| \rightarrow +\infty$ , якщо  $\operatorname{Re} p > a$ .

Тоді функція  $F(p)$  є зображенням, причому його оригіналом буде функція:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(p) e^{pt} dp.$$

**Зауваження.** Визначення оригіналу  $f(t)$  не залежить від вибору числа  $a$ .

З доведенням цієї Теорему можна ознайомитись в книзі [1].

### 3.3. Загальний підхід розв'язування лінійних диференціальних рівнянь і їх систем зі сталими коефіцієнтами

Властивості перетворення Лапласа дають можливість розв'язати лінійне диференціальне рівняння за такою схемою. Перетворення Лапласа переводить лінійне диференціальне рівняння в алгебраїчне рівняння відносно зображення. З цього рівняння можна знайти зображення шуканого

оригіналу, а далі за відомим зображенням можна однозначно відтворити оригінал.

Отже, маємо таке диференціальне рівняння  $n$ -го порядку:

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + a_2 x^{(n-2)} + \dots + a_n x = f(t), \quad (3.7)$$

де  $f(t)$  – оригінал.

Потрібно розв'язати задачу Коші з такими початковими умовами:

$$x(0) = x_0, x'(0) = x'_0, x''(0) = x''_0, \dots, x^{(n-1)}(0) = x_0^{(n-1)}. \quad (3.8)$$

Нехай  $x(t) \div X(p)$ ,  $f(t) \div F(p)$ . Застосуємо до обох частин рівняння (3.7) перетворення Лапласа, використовуючи **Теорему лінійності** і **Теорему про диференціювання оригіналу**. В результаті від рівняння (3.7) з початковими умовами (3.8) перейдемо до так званого **операторного рівняння**:

$$(p^n + a_1 p^{n-1} + a_2 p^{n-2} + \dots + a_n) X(p) + Q(p) = F(p), \quad (3.9)$$

де  $Q(p)$  – деякий відомий многочлен, коефіцієнти якого залежать від початкових умов (3.8).

Після розв'язання операторного рівняння (3.9) відносно  $X(p)$ :

$$X(p) = \frac{F(p) - Q(p)}{p^n + a_1 p^{n-1} + a_2 p^{n-2} + \dots + a_n},$$

та знайшовши для  $X(p)$  оригінал, дістанемо шуканий розв'язок  $x(t)$ .

Аналогічно розв'язуються і системи лінійних диференціальних рівнянь зі **сталими коефіцієнтами**. Відмінність полягає тільки в тому, що замість одного операторного рівняння дістанемо систему таких рівнянь відносно зображень невідомих функцій  $X(p), Y(p), Z(p), \dots$

**Приклад.** Розв'язати задачу Коші:  $\dot{x} + x = e^{-t}$ ,  $x(0) = 1$ .



**Розв'язання.** Нехай  $x(t) \div X(p)$ . Тоді  $\dot{x}(t) \div pX(p) - 1$ . За таблицями відповідності для правої частини маємо:  $e^{-t} \div \frac{1}{p+1}$ . Операторне рівняння для заданого диференціального рівняння буде мати вигляд:

$$pX(p) - 1 + X(p) = \frac{1}{p+1}.$$

Дістали алгебраїчне рівняння відносно  $X(p)$ . Звідси

$$X(p)(p+1) = \frac{1}{p+1} + 1 \Rightarrow X(p) = \frac{1}{(p+1)^2} + \frac{1}{p+1}.$$

Оскільки  $te^{-t} \div \frac{1}{(p+1)^2}$ ,  $e^{-t} \div \frac{1}{p+1}$ , то шуканий розв'язок  $x(t)$  має

вигляд:

$$x(t) = e^{-t}(t+1).$$

**Приклад.** Розв'язати задачу Коші:

$$x^{(4)} + 2x'' + x = \sin t, \quad x(0) = x'(0) = x''(0) = x'''(0) = 0.$$

**Розв'язання.** Нехай  $x(t) \div X(p)$ . Тоді

$$x''(t) \div p^2 X(p), \quad x^{(4)}(t) \div p^4 X(p).$$

Оскільки  $\sin t \div \frac{1}{p^2+1}$ , то задане диференціальне рівняння

перетвориться в алгебраїчне рівняння відносно  $X(p)$ :

$$p^4 X(p) + 2p^2 X(p) + X(p) = \frac{1}{p^2+1}.$$

Звідси

$$X(p) = \frac{1}{(p^2+1)^3}.$$

Тепер знайдемо оригінал  $x(t)$ , який відповідає цьому зображенню. Функція  $X(p)$  має два полюси  $i$  та  $-i$ , кратність кожного з яких дорівнює 3. Тоді за формулою (3.3) маємо

$$x(t) = \frac{1}{2!} \lim_{p \rightarrow i} \left( \frac{e^{pt}}{(p+i)^3} \right)'' + \frac{1}{2!} \lim_{p \rightarrow -i} \left( \frac{e^{pt}}{(p-i)^3} \right)''.$$

Враховуючи комплексну спряженість доданків, дістанемо:

$$\begin{aligned} x(t) &= 2 \frac{1}{2!} \operatorname{Re} \left( \frac{e^{pt}}{(p+i)^3} \right)'' = \operatorname{Re} \left( \frac{(-3)(-4)}{(p+i)^5} e^{pt} + 2 \frac{(-3)t}{(p+i)^4} e^{pt} + \frac{t^2}{(p+i)^2} e^{pt} \right) \Bigg|_{p=i} = \\ &= \operatorname{Re} \left( \frac{12e^{it}}{(2i)^5} - \frac{6te^{it}}{(2i)^4} + \frac{t^2 e^{it}}{(2i)^3} \right) = \frac{1}{8} (3 \sin t - 3t \cos t - t^2 \sin t). \end{aligned}$$

**Приклад.** Знайти розв'язок системи диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \dot{x} + y = e^t, \\ \dot{y} + x = e^{-t}, \end{cases}$$

при початкових умовах  $x(0) = 1$ ;  $y(0) = 1$ .

**Розв'язання.** Нехай  $x(t) \div X(p)$ ,  $y(t) \div Y(p)$ . Тоді  $\dot{x}(t) \div pX(p) - 1$ ,  $\dot{y}(t) \div pY(p) - 1$ . Оскільки  $e^{-t} \div \frac{1}{p+1}$ ,  $e^t \div \frac{1}{p-1}$ , то операторна система рівнянь виглядає так:

$$\begin{cases} pX(p) - 1 + Y(p) = (p-1)^{-1}, \\ pY(p) - 1 + X(p) = (p+1)^{-1}. \end{cases}$$

Після перетворень отримали систему двох рівнянь з двома невідомими:

$$\begin{cases} pX(p) + Y(p) = \frac{p}{p-1}, \\ X(p) + pY(p) = \frac{p+2}{p+1}. \end{cases}$$

Після розв'язання цієї системи одним з відомих методів (методом Гаусса або за формулами Крамера) дістанемо:

$$X(p) = \frac{p}{p^2 - 1} + \frac{2}{(p^2 - 1)^2}, \quad Y(p) = \frac{p}{p^2 - 1} - \frac{2p}{(p^2 - 1)^2}.$$

Оскільки  $\text{cht} \div \frac{p}{p^2 - 1}$ ,  $t\text{cht} - \text{sht} \div \frac{2}{(p^2 - 1)^2}$ ,  $t\text{sht} \div \frac{2p}{(p^2 - 1)^2}$ , то розв'язок

даної системи має вигляд:

$$\begin{cases} x(t) = e^{-t} + t\text{cht}; \\ y(t) = \text{cht} - t\text{sht}. \end{cases}$$

### 3.4. Особливості розв'язування диференціальних рівнянь за допомогою формули Дюамеля

Введемо для лівої частини рівняння (3.7) символ  $L(x)$ , який називається **лінійним диференціальним оператором**  $n$ -го порядку. Із означення оператора  $L(x) = x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + a_2 x^{(n-2)} + \dots + a_n x$  випливає його **лінійність**, тобто

$$L(C_1 x_1 + C_2 x_2) = C_1 L(x_1) + C_2 L(x_2). \quad (3.10)$$

Перепишемо рівняння (3.7) в такому вигляді:

$$L(x) = f(t). \quad (3.11)$$

Має місце наступна Теорема.

**Теорема.** *Якщо  $x_0(t)$  – розв'язок рівняння  $L(x) = 1$  при нульових початкових умовах, то розв'язком рівняння  $L(x) = f(t)$  при таких же умовах є функція*

$$x(t) = \int_0^t \dot{x}_0(t) f(t - \tau) d\tau, \quad (3.12)$$

або

$$x(t) = \int_0^t f(\tau) \dot{x}_0(t - \tau) d\tau. \quad (3.13)$$

**Доведення.** При нульових початкових умовах рівнянню  $L(x)=1$  відповідає операторне рівняння

$$L_0(p)X_0(p) = \frac{1}{p},$$

де  $L_0(p) = p^n + a_1p^{n-1} + a_2p^{n-2} + \dots + a_n$ ,  $X_0(p) \doteq x_0(t)$ .

З цього рівняння дістанемо:

$$L_0(p) = \frac{1}{pX_0(p)}.$$

Рівнянню  $L(x) = f(t)$  при нульових початкових умовах відповідає операторне рівняння

$$L_0(p)X(p) = F(p),$$

де  $X(p) \doteq x(t)$ ,  $F(p) \doteq f(t)$ .

Звідси отримаємо вираз для зображення  $X(p)$ :

$$X(p) = \frac{F(p)}{L_0(p)} = pX_0(p)F(p).$$

За формулою Дюамеля (2.14)

$$pF(p)G(p) \doteq \int_0^t f'(\tau)g(t-\tau)d\tau + f(0)g(t).$$

знайдемо оригінал  $x(t)$ :

$$x(t) = x_0(0)f(t) + \int_0^t \dot{x}_0(\tau)f(t-\tau)d\tau = \int_0^t \dot{x}_0(\tau)f(t-\tau)d\tau,$$

оскільки  $x_0(t) = 0$ . Формула (3.13) впливає з комутативності згортки.

**Зауваження.** Наведена Теорема дозволяє знаходити розв'язок диференціального рівняння (3.7) без знаходження зображення  $F(p)$  його правої частини  $f(t)$ . Крім того, формулу (3.13) зручно використовувати у випадку, коли знаходження зображення  $F(p)$  викликає певні труднощі. Знаючи розв'язок для одиничної правої частини за допомогою інтегрування можна знайти розв'язок для довільної правої частини. Формула (3.12)

відіграє важливу роль при розв'язуванні електротехнічних, фізичних і інших задач.

**Зауваження.** Вимога нульових початкових умов є **несуттєвою**: простою заміною шуканої функції задачу з ненульовими початковими умовами можна звести до задачі з нульовими початковими умовами.

**Приклад.** Знайти розв'язок рівняння  $x^{IV} + 2x'' + x = \cos t$  при початкових умовах  $x(0) = x'(0) = x''(0) = x'''(0) = 0$ .

**Розв'язання.** Знайдемо розв'язок рівняння  $x^{IV} + 2x'' + x = 1$  при заданих початкових умовах.

Позначимо  $x_0(t) \div X_0(p)$ . Тоді  $x_0''(t) \div p^2 X_0(p)$ ,  $x_0^{IV}(t) \div p^4 X_0(p)$ .

Оскільки  $\eta(t) \div \frac{1}{p}$ , то відповідне операторне рівняння набуває такого вигляду:

$$p^4 X_0(p) + 2p^2 X_0(p) + X_0(p) = \frac{1}{p}.$$

Звідси знайдемо зображення  $X_0(p)$ :

$$X_0(p) = \frac{1}{p(p^2 + 1)^2}.$$

За формулою (3.3) знайдемо  $x_0(t)$ :

$$\begin{aligned} x_0(t) &= \left( \frac{e^{pt}}{(p^2 + 1)^2} \right) \Bigg|_{p=0} + 2 \operatorname{Re} \left( \frac{e^{pt}}{p(p+i)^2} \right)' \Bigg|_{p=i} = \\ &= 1 + 2 \operatorname{Re} \left( \frac{tp^2 - 3p + (tp-1)i}{p^2(p+i)^3} e^{pt} \right) \Bigg|_{p=i} = 1 - \cos t - \frac{1}{2} t \sin t. \end{aligned}$$

Знаючи  $x_0(t)$ , знайдемо її похідну  $x_0'(t)$ :  $x_0'(t) = \frac{1}{2} \sin t - \frac{1}{2} t \cos t$ .

Підставимо цей вираз у формулу (3.12), в результаті дістанемо:

$$\begin{aligned}
x(t) &= \frac{1}{2} \int_0^t (\sin \tau - \tau \cos \tau) \cos(t - \tau) d\tau = \\
&= \frac{1}{4} \left( \tau \sin t + \frac{1}{2} \cos(t - 2\tau) - (t - \tau) \left( \tau \cos t - \frac{1}{2} \sin(t - 2\tau) \right) - \right. \\
&\quad \left. - \frac{\tau^2}{2} \cos t + \frac{1}{4} \cos(t - 2\tau) \right) \Big|_0^t = \frac{1}{8} t \sin t - \frac{1}{8} t^2 \cos t.
\end{aligned}$$

**Приклад.** Знайти розв'язок рівняння  $x'' - x = \frac{1}{1+e^t}$  при початкових умовах  $x(0) = x'(0) = 0$ .

**Розв'язання.** За викладеною вище методикою спочатку знайдемо розв'язок рівняння  $x'' - x = 1$  при заданих початкових умовах  $x(0) = x'(0) = 0$ .

Позначимо  $x_0(t) \div X_0(p)$ . Тоді  $x_0''(t) \div p^2 X_0(p)$ . Оскільки  $\eta(t) \div \frac{1}{p}$ , то відповідне операторне рівняння матиме вигляд:

$$p^2 X_0(p) - X_0(p) = \frac{1}{p}.$$

Звідси знайдемо зображення  $X_0(p)$ :

$$X_0(p) = \frac{1}{p(p^2 - 1)}.$$

Представимо  $X_0(p)$  в такому вигляді:

$$X_0(p) = \frac{1}{p(p^2 - 1)} = \frac{p}{p^2 - 1} - \frac{1}{p}.$$

Тепер знайдемо оригінал  $x_0(t)$ :

$$x_0(t) = \text{cht} - 1; \quad x_0'(t) = \text{sht}.$$

За формулою (3.12) дістанемо шуканий розв'язок  $x(t)$ :

$$x(t) = \int_0^t \frac{\text{sh} \tau}{1 + e^{t-\tau}} d\tau = \frac{1}{2} \int_0^t \frac{e^\tau - e^{-\tau}}{1 + e^{t-\tau}} d\tau = \frac{1}{2} (e^t - t e^t - 1) + \text{sht} \cdot \ln \left( \frac{1 + e^t}{2} \right).$$

### 3.5. Застосування методів операційного числення до розв'язання деяких інтегральних рівнянь

**Інтегральним рівнянням** називається рівняння, яке містить шукану функцію під знаком інтеграла.

#### 1. Інтегральні рівняння Вольєрра другого роду

До **інтегральних рівнянь Вольєрра другого роду** відноситься

рівняння виду: 
$$y(t) = f(t) + \int_0^t K(t-\tau)y(\tau)d\tau, \quad (A)$$

де  $K(t, \tau)$  – ядро інтегрального рівняння, яке залежить від різниці аргументів  $t - \tau$ , причому функції  $K(t - \tau)$ ,  $f(t)$  – задані, а  $y(t)$  – невідома функція, яку потрібно знайти. В деякій літературі інтеграли такого типу називають **інтегралами типу згортки**.

Розглянемо інтегральне рівняння Вольєрра другого роду типу згортки:

$$y(t) = f(t) + \int_0^t K(t-\tau)y(\tau)d\tau.$$

Будемо вважати, що  $f(t)$  і  $K(t - \tau)$  достатньо гладкі функції, що мають скінченний порядок зростання. В цьому випадку і функція  $y(t)$  при  $t \geq 0$  також буде мати скінченний порядок зростання, тому можна знайти зображення функцій  $f(t)$ ,  $K(t - \tau)$  та  $y(t)$  за Лапласом. Нехай  $f(t) \div F(p)$ ,  $K(t) \div \bar{K}(p)$ ,  $y(t) \div Y(p)$ . Оскільки інтеграл у правій частині рівняння (A) представляє собою згортку функцій-оригіналів  $K(t)$  та  $y(t)$ , а саме

$$K(t) * y(t) = \int_0^t K(t-\tau)y(\tau)d\tau, \text{ то за } \textbf{Теоремою про згортку функцій (Бореля)}$$

зображення згортки дорівнює добутку зображень окремих функцій, тобто  $K(t) * y(t) \div \bar{K}(p) \cdot Y(p)$ . Отже, інтегральному рівнянню Вольєрра (A) буде відповідати операторне рівняння

$$Y(p) = F(p) + \bar{K}(p) \cdot Y(p).$$

Звідси знайдемо зображення шуканої функції  $Y(p)$ :

$$Y(p) = \frac{F(p)}{1 - \overline{K}(p)}, \overline{K}(p) \neq 1. \quad (B)$$

Знайшовши оригінал  $y(t)$ , який відповідає знайденому зображенню (B), дістанемо розв'язок інтегрального рівняння (A).

## II. Інтегральні рівняння Вольєрра першого роду

Аналогічно розв'язують інтегральні рівняння **Вольєрра першого роду з ядром**  $K(t, \tau)$ , яке залежить від різниці аргументів  $t - \tau$ , тобто рівняння такого виду:

$$\int_0^t K(t - \tau) y(\tau) d\tau = f(t). \quad (C)$$

де  $K(t - \tau)$ ,  $f(t)$  – задані функції, а  $y(t)$  – невідома функція, яку потрібно знайти.

При умовах, які були зазначені вище для функцій  $K(t - \tau)$ ,  $f(t)$  та  $y(t)$ , будуть існувати відповідні зображення цих функцій, а саме  $f(t) \div F(p)$ ,  $K(t) \div \overline{K}(p)$ ,  $y(t) \div Y(p)$ . Крім того, зображення інтеграла у рівнянні (C) представлятиме зображення згортки двох функцій:  $K(t) * y(t) \div \overline{K}(p) \cdot Y(p)$ . Отже, інтегральному рівнянню (C) буде відповідати операторне рівняння

$$F(p) = \overline{K}(p) \cdot Y(p) \Rightarrow Y(p) = \frac{F(p)}{\overline{K}(p)}, \overline{K}(p) \neq 0.$$

Оригінал для  $Y(p)$  і буде розв'язком інтегрального рівняння (C).

Загальні теоретичні методи розв'язання інтегральних рівнянь Вольєрра широко висвітлені у відповідних підручниках і навчальних посібниках.

**Приклад 1.** Розв'язати інтегральне рівняння Вольєрра першого роду:

$$\int_0^t y(\tau) \sin(t - \tau) d\tau = 1 - \cos t.$$

**Розв'язання.** Ліва частина рівняння є згортокою двох функцій  $y(t)$  і  $\sin(t)$ . Перейдемо до зображень. В результаті дістанемо рівняння:



$$Y(p) \cdot \frac{1}{p^2 + 1} = \frac{1}{p} - \frac{p}{p^2 + 1} = \frac{1}{p(p^2 + 1)}.$$

Отже, зображення розв'язку має вигляд:

$$Y(p) = \frac{1}{p}.$$

Звідси знаходимо оригінал розв'язку:  $y(t) = 1$ .

**Приклад 2.** Розв'язати інтегральне рівняння Вольтерра другого роду:

$$\int_0^t y(\tau) e^{t-\tau} d\tau = y(t) - e^t.$$

**Розв'язання.** Ліва частина рівняння є згортокою двох функцій  $y(t)$  і  $e^t$ .

Перейдемо до зображень:

$$Y(p) \cdot \frac{1}{p-1} = Y(p) - \frac{1}{p-1} \Rightarrow Y(p) \left( 1 - \frac{1}{p-1} \right) = \frac{1}{p-1} \Rightarrow Y(p) = \frac{1}{p-2}.$$

Знаходимо оригінал розв'язку:  $y(t) = e^{2t}$ .

**Приклад 3.** Розв'язати інтегральне рівняння:

$$y(t) = e^{2t} - \cos t + \int_0^t \sin(t-\tau) y(\tau) d\tau.$$

**Розв'язання.** Інтеграл в правій частині рівняння є згортокою двох функцій  $y(t)$  і  $\sin t$ . Перейдемо до зображень:

$$Y(p) = \frac{1}{p-2} - \frac{p}{p^2+1} + \frac{1}{p^2+1} Y(p) \Rightarrow Y(p) \left( 1 - \frac{1}{p^2+1} \right) = \frac{1+2p}{(p-2)(p^2+1)}.$$

Звідси дістанемо зображення розв'язку:

$$Y(p) = \frac{2p+1}{p^2(p-2)}.$$

Тепер знайдемо оригінал розв'язку:

$$Y(p) = \frac{2p+1}{p^2(p-2)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p^2} + \frac{C}{p-2}.$$

Визначимо невідомі коефіцієнти  $A, B, C$ :

$$Ap(p-2) + B(p-2) + Cp^2 = 2p+1.$$

$$\begin{cases} -2A + B = 2; \\ -2B = 1; \\ A + C = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -5/4; \\ B = -1/2; \\ C = 5/4. \end{cases}$$

Отже, запишемо зображення у вигляді суми елементарних дробів:

$$Y(p) = -\frac{5}{4} \cdot \frac{1}{p} - \frac{1}{2} \frac{1}{p^2} + \frac{5}{4} \frac{1}{p-2}.$$

Після цього залишилось записати оригінал розв'язку:

$$y(t) = -\frac{5}{4} \cdot \eta(t) - \frac{1}{2} t + \frac{5}{4} e^{2t}.$$

### 3.6. Застосування операційного числення до розв'язання задач електротехніки

Методи операційного числення дозволяють розрахувати деякі процеси в складних електричних колах при довільній зовнішній напрузі. Ці методи, які вперше запропонував О.Хевісайд, виявились настільки зручними для застосування, що в більшості курсів електротехніки і теорії автоматичного регулювання вони займають одне із центральних місць.

Нехай до електричного кола, в яке послідовно включені самоіндукція  $L$ , опір  $R$ , і ємність  $C$  з початковим струмом  $i(0)=0$  та зарядом  $Q(0)=0$ , прикладена електрорушійна сила  $e(t)$ . Диференціальне рівняння, що описує зміну сили струму в електричному колі, має такий вигляд:

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{Q}{C} = e(t). \quad (3.14)$$

Запишемо формулу, яка пов'язує струм та заряд:

$$\frac{dQ}{dt} = i, \quad Q(0) = 0 \Rightarrow Q = \int_0^t i(t) dt.$$

Тоді рівняння (3.14) набуває такого вигляду:

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt = e(t). \quad (3.15)$$

Позначимо  $i(t) \div I(p)$ ,  $e(t) \div E(p)$ , тоді рівняння електричного кола в операторному вигляді буде таким:

$$LpI(p) + RI(p) + \frac{1}{Cp}I(p) = E(p).$$

Запишемо вираз для зображення  $I(p)$  сили струму в електричному колі:

$$I(p) = \frac{E(p)}{R + Lp + \frac{1}{Cp}}.$$

**Означення.** Вираз у знаменнику  $Z(p) = R + Lp + \frac{1}{Cp}$  називається **операторним опором електричного кола.**

Тоді останню формулу можна записати у такому скороченому вигляді

$$I(p) = \frac{E(p)}{Z(p)},$$

яка називається **операторною формулою закону Ома.**

Далі, користуючись **Теоремою обернення**, з останнього виразу знаходимо силу струму  $i(t)$  в електричному колі.

Крім того, **велику роль** при розрахунках електричних кіл **відіграє формула Дюамеля.**

$$\text{Нехай } e_0(t) = 1. \text{ Тоді } E_0(p) = \frac{1}{p} \text{ і } I_0(p) = \frac{1}{Rp + Lp^2 + \frac{1}{C}} \div i_0(t).$$

Якщо в електричне коло включити довільну напругу  $e(t)$ , то за формулою Дюамеля маємо:

$$I(p) \div i(t) = \int_0^t i'_0(\tau) e(t - \tau) d\tau, \text{ або } i(t) = e(0) i_0(t) + \int_0^t e'(\tau) i_0(t - \tau) d\tau.$$

Отже, можна розрахувати характеристики електричного кола, не знаючи всіх його параметрів, якщо тільки нам вдалось експериментально одержати струм  $i_0(t)$ , тобто реакцію кола на одиничну напругу.

## ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ СТУДЕНТІВ

### Завдання І. Перевірити, чи є задані функції функцією-оригіналом

1.  $f(t) = \frac{5e^{3\sqrt{t}} - 2\cos\sqrt{2t} - e^{-3\sqrt{t}} - 2e^{-2t}}{3\sqrt{t}} \cdot \eta(t).$
2.  $f(t) = \frac{\cos(t-2) + \sin(t-2) - e^{t-2}}{(t-2)^2} \cdot \eta(t).$
3.  $f(t) = \frac{e^{(t-3)^2} - \cos(t-3) - \text{sh}^2(t-3)}{3(t-3)^2} \cdot \eta(t-1).$
4.  $f(t) = \frac{e^{(t-5)^2} - \cos(t-5) + \sin^2(t-5)}{4(t-5)^2} \cdot \eta(t-2).$
5.  $f(t) = \frac{\sin(t-5)^2 - 2\text{ch}[2(t-5)] + 2\text{ch}(t-5)}{5(t-5)^2} \cdot \eta(t-4).$
6.  $f(t) = \frac{\sin(t-5) + \cos(t-5) - e^{t-5}}{(t-5)^2} \cdot \eta(t-2).$
7.  $f(t) = \frac{(\text{ch}(3t^2))^2 - (\text{ch}(2t^2))^2}{4t^4} \cdot \eta(t).$
8.  $f(t) = \frac{\sin(t-5) + \cos(t-5) - e^{t-5}}{(t-5)^2} \cdot \eta(t-3).$
9.  $f(t) = \frac{2e^{2\sqrt{t}} - e^{\sqrt{t}} - \sin\sqrt{t} - \cos\sqrt{t}}{2t} \cdot \eta(t).$
10.  $f(t) = \frac{(e^{3\sqrt{t}} - e^{5\sqrt{t}})^3}{4\sqrt{t}} \cdot \eta(t).$
11.  $f(t) = \frac{(e^{5\sqrt[4]{t}} - e^{2\sqrt[4]{t}})^2}{5\sqrt[4]{t}} \cdot \eta(t).$
12.  $f(t) = \frac{e^{(t-4)^2} - \cos(t-4) + \sin^2(t-4)}{4(t-4)^2} \cdot \eta(t-2).$
13.  $f(t) = \frac{e^{(t-3)^2} - \cos(t-3) - \text{sh}^2(t-3)}{2(t-3)^2} \cdot \eta(t-1).$
14.  $f(t) = \frac{\sin(t-7)^2 - 3\cos(t-7) + 3\text{ch}(t-7)}{7(t-7)^2} \cdot \eta(t-5).$
15.  $f(t) = \frac{\sin(t-4) + \cos(t-4) - e^{t-4}}{(t-4)^2} \cdot \eta(t-3).$
16.  $f(t) = \frac{(\cos(t^2))^2 - (\cos(4t^2))^2}{3t^4} \cdot \eta(t).$

17.  $f(t) = \frac{3e^{2\sqrt{t}} - 2e^{\sqrt{t}} - 4\sin\sqrt{t} - \cos t}{2t} \cdot \eta(t).$
18.  $f(t) = \frac{(e^{4\sqrt[3]{t}} - e^{2\sqrt[3]{t}})^4}{5\sqrt[3]{t}} \cdot \eta(t).$
19.  $f(t) = \frac{(e^{5\sqrt[4]{t}} - e^{3\sqrt[4]{t}})^2}{3\sqrt[4]{t}} \cdot \eta(t).$
20.  $f(t) = \frac{3\sin^2\sqrt{t} - e^{2t} + \cos\sqrt{t}}{5t} \cdot \eta(t).$
21.  $f(t) = \frac{6\sin^4(\sqrt[4]{t}) + 5e^{-t} - 5\cos(2t)}{3t} \cdot \eta(t).$
22.  $f(t) = \frac{\sin^3(\sqrt[3]{t-2}) + 2e^{-(t-2)^2} - 2\cos(2\sqrt{t-2})}{6(t-2)} \cdot \eta(t-1).$
23.  $f(t) = \frac{e^{(t-1)^2} - \cos(t-1) + \sin^2(t-1)}{2(t-1)^2} \cdot \eta(t).$
24.  $f(t) = \frac{9(\cos(2t^2))^2 - 4(\cos(3t^2))^2}{3t^4} \cdot \eta(t).$
25.  $f(t) = \frac{(2e^{5\sqrt{t}} - 5e^{2\sqrt{t}} + 3)^4}{5\sqrt{t}} \cdot \eta(t).$

**Завдання II. Користуючись означенням перетворення Лапласа, знайти зображення заданої функції:**

1.  $f(t) = t \cdot \operatorname{ch} 4t \cdot \sin 6t \cdot \eta(t).$
2.  $f(t) = t \cdot \operatorname{sh} 5t \cdot \cos 3t \cdot \eta(t).$
3.  $f(t) = 3e^{2t} \operatorname{ch} 4t \cdot \sin 3t \cdot \eta(t).$
4.  $f(t) = 2e^{3t} \operatorname{sh} 5t \cdot \cos t \cdot \eta(t).$
5.  $f(t) = e^{-3t} \cdot \operatorname{ch} 2t \cdot \cos t \cdot \eta(t).$
6.  $f(t) = t \cdot \operatorname{ch} 2t \cdot \sin 3t \cdot \eta(t).$
7.  $f(t) = t \cdot \cos 2t \cdot \operatorname{sh} 4t \cdot \eta(t).$
8.  $f(t) = t \cdot \operatorname{ch} 2t \cdot \operatorname{sh} 4t \cdot \eta(t).$
9.  $f(t) = t \cdot \sin 2t \cdot \operatorname{sh} 5t \cdot \eta(t).$
10.  $f(t) = t \cdot \cos 3t \cdot \cos 8t \cdot \eta(t).$
11.  $f(t) = t \cdot \sin 4t \cdot \sin 6t \cdot \eta(t).$
12.  $f(t) = 5e^{2t} \operatorname{sh} t \cdot \cos 3t \cdot \eta(t).$
13.  $f(t) = 3e^{-3t} \operatorname{ch} 4t \cdot \sin 2t \cdot \eta(t).$
14.  $f(t) = 4e^{3t} \cdot \operatorname{ch} 2t \cdot \cos 4t \cdot \eta(t).$
15.  $f(t) = 2e^{-2t} \operatorname{sh} 5t \cdot \sin 3t \cdot \eta(t).$
16.  $f(t) = 2\operatorname{sh} 3t \cdot \cos 5t \cdot e^{2t} \cdot \eta(t).$

17.  $f(t) = 3e^{-t} \cdot \text{ch } t \cdot \sin 3t \cdot \eta(t)$ .  
 18.  $f(t) = t \cdot \text{sh } t \cdot \sin 2t \cdot \eta(t)$ .  
 19.  $f(t) = \text{ch } 4t \cdot \cos 3t \cdot e^t \cdot \eta(t)$ .  
 20.  $f(t) = t \cdot \sin 5t \cdot \text{ch } 3t \cdot \eta(t)$ .  
 21.  $f(t) = t \cdot \cos 7t \cdot \sin 3t \cdot \eta(t)$ .  
 22.  $f(t) = t \cdot \text{sh } 2t \cdot \text{ch } 5t \cdot \eta(t)$ .  
 23.  $f(t) = t \cdot \sin 5t \cdot \sin t \cdot \eta(t)$ .  
 24.  $f(t) = t \cdot \cos t \cdot \cos 5t \cdot \eta(t)$ .  
 25.  $f(t) = t \cdot \text{sh } 3t \cdot \text{sh } 5t \cdot \eta(t)$ .

**Завдання III. Користуючись властивостями перетворення Лапласа знайти зображення заданих функцій:**

1). а)  $f(t) = t^2 \cdot \cos\left(\frac{3t}{2}\right) \cdot \eta(t)$ ; б)  $f(t) = t \cdot \text{sh } 3t \cdot \cos 2t \cdot \cos 6t \cdot \eta(t)$ ;

в)  $f(t) = \eta(t) \cdot \int_0^t \tau (\text{sh } \tau + \tau \cos \tau) d\tau$ ; г)  $f(t) = \frac{3 \cos 4t - 2 \cos 2t - e^{-2t}}{4t} \cdot \eta(t)$ ;

д)  $f(t) = \eta(t) \cdot \int_0^t (t - \tau) \cdot \sin^2(t - \tau) \sin \tau d\tau$ .

2). а)  $f(t) = t^2 \cdot \sin\left(\frac{5t}{2}\right) \cdot \eta(t)$ ; б)  $f(t) = t \cdot \text{sh } 3t \cdot \sin 5t \cdot \sin 2t \cdot \eta(t)$ ;

в)  $f(t) = \eta(t) \cdot \int_0^t \tau (\cos \tau + \tau \text{ch } \tau) d\tau$ ; г)  $f(t) = \frac{2 \cos 4t - 3 \cos 6t + e^{-3t}}{3t} \cdot \eta(t)$ ;

д)  $f(t) = \eta(t) \cdot \int_0^t (t - \tau) \cdot \text{sh}(t - \tau) \sin^3 \tau d\tau$ .

3). а)  $f(t) = t^2 \cdot \text{sh } 2t \cdot \eta(t)$ ; б)  $f(t) = \eta(t) \cdot \int_0^t \text{ch } \tau \sin \tau d\tau$ ;

в)  $f(t) = \frac{2 \cos 2t - \cos 4t - 1}{5t} \cdot \eta(t)$ ; г)  $f(t) = \eta(t) \cdot \int_0^t (t - \tau)^3 \cdot e^{-3\tau} d\tau$ ;

д)  $f(t) = t \cdot \sin 3t \cdot \cos 4t \cdot \text{ch } 2t \cdot \eta(t)$ .

4). а)  $f(t) = t^2 \cdot \text{sh}(5t) \cdot \eta(t)$ ; б)  $f(t) = \eta(t) \cdot \int_0^t \text{sh } 2\tau \cos 3\tau d\tau$ ; в).

$f(t) = \frac{\text{sh } 2t - \text{sh } 4t}{2t} \cdot \eta(t)$ ;

$$\Gamma). f(t) = \eta(t) \cdot \int_0^t (t-\tau)^3 \cdot \operatorname{sh} \tau d\tau; \quad \Delta). f(t) = t \cdot \operatorname{sh} 3t \cdot \sin 2t \cdot \cos t \cdot \eta(t).$$

$$5). \quad \text{a) } f(t) = t^2 \cdot \cos^2(2t) \cdot \eta(t); \quad \text{б) } f(t) = \eta(t) \cdot \int_0^t (t-\tau)^2 \cdot \cos \tau d\tau; \quad \text{B)}$$

$$f(t) = \eta(t) \cdot \int_0^t \tau^4 e^{-6\tau} d\tau;$$

$$\Gamma). f(t) = \frac{5e^{-t} - 3e^t - 2\operatorname{ch} 4t}{3t} \cdot \eta(t); \quad \Delta). f(t) = t \cdot \operatorname{sh} 2t \cdot \sin 5t \cdot \operatorname{ch} t \cdot \eta(t).$$

$$6). \text{ a) } f(t) = t^2 \cdot \cos(3t) \cdot \eta(t); \quad \text{б) } f(t) = t \cdot \operatorname{sh} 2t \cdot \sin 4t \cdot \operatorname{ch} t \cdot \eta(t);$$

$$\text{B) } f(t) = \eta(t) \cdot \int_0^t \tau^4 (e^{3\tau} - e^{2\tau}) d\tau; \quad \Gamma). f(t) = \eta(t) \cdot \int_0^t (t-\tau)^2 \cdot \operatorname{sh} \tau d\tau;$$

$$\Delta). f(t) = \frac{4\operatorname{ch} 2t - 3\operatorname{ch} 3t - e^{-t}}{4t} \cdot \eta(t).$$

$$7). \text{ a) } f(t) = t^2 \cdot \sin(5t) \cdot \eta(t); \quad \text{б) } f(t) = t \cdot \operatorname{sh} 3t \cdot \cos 4t \cdot \cos 2t \cdot \eta(t);$$

$$\text{B) } f(t) = \eta(t) \cdot \int_0^t (5\tau^2 + \tau \sin \tau) d\tau; \quad \Gamma). f(t) = \eta(t) \cdot \int_0^t (t-\tau)^2 \cdot e^{t-\tau} \cos \tau d\tau;$$

$$\Delta). f(t) = \frac{3\operatorname{ch} 4t - 1 - 2e^{3t}}{3t} \cdot \eta(t).$$

$$8). \text{ a) } f(t) = t^2 \cdot \sin(3t) \cdot \eta(t); \quad \text{б) } f(t) = t \cdot \operatorname{sh} 5t \cdot \sin 4t \cdot \cos 3t \cdot \eta(t);$$

$$\text{B) } f(t) = \eta(t) \cdot \int_0^t \left( \cos^2 \frac{4\tau}{3} + \tau \cdot \sin \tau \right) d\tau; \quad \Gamma). f(t) = \frac{3e^{2t} - 5\cos 4t + 2}{3t} \cdot \eta(t);$$

$$\Delta). f(t) = \eta(t) \cdot \int_0^t (t-\tau) \cdot e^{t-\tau} \cdot \cos(t-\tau) \sin \tau d\tau.$$

$$9). \text{ a) } f(t) = t^2 \cdot \operatorname{sh}(5t) \cdot \eta(t); \quad \text{б) } f(t) = t \cdot \operatorname{ch} 3t \cdot \cos 6t \cdot \cos 3t \cdot \eta(t);$$

$$\text{B) } f(t) = \eta(t) \cdot \int_0^t (\tau^2 + \tau \cdot \sin \tau) d\tau; \quad \Gamma). f(t) = \frac{3\operatorname{ch} 3t - 6\operatorname{ch} 2t + 3 \cdot e^{-t}}{5t} \cdot \eta(t);$$

$$\Delta). f(t) = \eta(t) \cdot \int_0^t (t-\tau) \cdot \operatorname{ch}(t-\tau) \cdot \operatorname{sh}(t-\tau) \sin \tau d\tau.$$

$$10). \text{ a) } f(t) = t^2 \cdot \cos\left(\frac{3t}{2}\right) \cdot \eta(t); \quad \text{б) } f(t) = t \cdot \operatorname{sh} 3t \cdot \cos 2t \cdot \cos 6t \cdot \eta(t);$$

$$\text{B) } f(t) = \eta(t) \cdot \int_0^t \tau (\operatorname{sh} \tau + \tau \cos \tau) d\tau; \quad \Gamma). f(t) = \frac{3\cos 4t - 2\cos 2t - e^{-2t}}{4t} \cdot \eta(t);$$

$$\text{д). } f(t) = \eta(t) \cdot \int_0^t (t-\tau) \cdot \sin^2(t-\tau) \sin \tau d\tau.$$

$$\mathbf{11.} \quad \text{а). } f(t) = t \cdot \sin^4 2t \cdot \eta(t); \quad \text{б). } f(t) = \eta(t) \cdot \int_0^t e^\tau \cos^2 \tau d\tau;$$

$$\text{в). } f(t) = \frac{3 \cos 2t - 2e^{3t} - \text{ch } 3t}{2t} \cdot \eta(t); \quad \text{г). } f(t) = \eta(t) \cdot \int_0^t (t-\tau) \text{sh}(t-\tau) \sin \tau d\tau;$$

$$\text{д). } f(t) = t \cdot \cos 2t \cdot \sin 3t \cdot \text{ch } t \cdot \eta(t).$$

$$\mathbf{12.} \quad \text{а). } f(t) = t^2 \cdot \cos^2 t \cdot \eta(t); \quad \text{б). } f(t) = \eta(t) \cdot \int_0^t \text{sh } \tau \cos \tau d\tau;$$

$$\text{в). } f(t) = \frac{2e^{\sqrt{t}} - 3e^{-\sqrt{t}} + e^{-5\sqrt{t}}}{4t} \cdot \eta(t); \quad \text{г). } f(t) = \eta(t) \cdot \int_0^t \sin(t-\tau)(e^{3\tau} - e^{2\tau}) d\tau;$$

$$\text{д). } f(t) = t \cdot \sin 2t \cdot \cos 3t \cdot \text{sh } t \cdot \eta(t).$$

$$\mathbf{13.} \quad \text{а). } f(t) = t^2 \cdot \text{sh } 2t \cdot \eta(t); \quad \text{б). } f(t) = \eta(t) \cdot \int_0^t \text{ch } \tau \sin \tau d\tau;$$

$$\text{в). } f(t) = \frac{2 \cos 2t - \text{ch } 4t - e^{-3t}}{5t} \cdot \eta(t); \quad \text{г). } f(t) = \eta(t) \cdot \int_0^t (t-\tau)^3 \cdot e^{-3\tau} d\tau;$$

$$\text{д). } f(t) = t \cdot \sin 3t \cdot \cos 4t \cdot \text{ch } 2t \cdot \eta(t).$$

$$\mathbf{14.} \quad \text{а). } f(t) = t^2 \cdot \text{ch}(3t) \cdot \eta(t); \quad \text{б). } f(t) = \eta(t) \cdot \int_0^t \text{sh } 2\tau \cos 3\tau d\tau; \quad \text{в).}$$

$$f(t) = \frac{\text{sh } 3t - \text{sh } 6t}{3t} \cdot \eta(t);$$

$$\text{г). } f(t) = \eta(t) \cdot \int_0^t (t-\tau)^3 \cdot \text{sh } \tau d\tau; \quad \text{д). } f(t) = t \cdot \text{sh } 3t \cdot \sin 2t \cdot \cos t \cdot \eta(t).$$

$$\mathbf{15.} \text{а). } f(t) = t^2 \cdot \text{ch}(3t) \cdot \eta(t); \quad \text{б). } f(t) = \eta(t) \cdot \int_0^t \text{sh } 2\tau \cos 3\tau d\tau; \quad \text{в).}$$

$$f(t) = \frac{\text{sh } 3t - \text{sh } 6t}{3t} \cdot \eta(t);$$

$$\text{г). } f(t) = \eta(t) \cdot \int_0^t (t-\tau)^3 \cdot \text{sh } \tau d\tau; \quad \text{д). } f(t) = t \cdot \text{sh } 3t \cdot \sin 2t \cdot \cos t \cdot \eta(t).$$

$$\mathbf{16.} \quad \text{а). } f(t) = t^2 \cdot \cos(3t) \cdot \eta(t); \quad \text{б). } f(t) = t \cdot \text{sh } 2t \cdot \sin 4t \cdot \text{ch } t \cdot \eta(t);$$

$$\text{в). } f(t) = \eta(t) \cdot \int_0^t \tau^4 (e^{3\tau} - e^{2\tau}) d\tau; \quad \text{г). } f(t) = \eta(t) \cdot \int_0^t (t-\tau)^2 \cdot \text{sh } \tau d\tau;$$



$$\text{д). } f(t) = \frac{4 \operatorname{ch} 2t - 3 \cos 3t - e^{-t}}{4t} \cdot \eta(t).$$

$$\mathbf{17.} \text{ а) } f(t) = t^2 \cdot \operatorname{ch} \left( \frac{3t}{2} \right) \cdot \eta(t); \quad \text{б). } f(t) = t \cdot \operatorname{ch} 2t \cdot \cos 4t \cdot \cos 2t \cdot \eta(t);$$

$$\text{в) } f(t) = \eta(t) \cdot \int_0^t (3\tau^2 + \tau \cos \tau) d\tau; \quad \text{г). } f(t) = \eta(t) \cdot \int_0^t (t-\tau)^2 \cdot e^{t-\tau} \sin \tau d\tau;$$

$$\text{д). } f(t) = \frac{3 \cos 2t - e^{-t} - 2e^{3t}}{6t} \cdot \eta(t).$$

$$\mathbf{18.} \text{ а) } f(t) = t^2 \cdot \sin \left( \frac{2t}{3} \right) \cdot \eta(t); \quad \text{б). } f(t) = t \cdot \operatorname{sh} 2t \cdot \sin 4t \cdot \sin 3t \cdot \eta(t);$$

$$\text{в) } f(t) = \eta(t) \cdot \int_0^t \left( \cos^2 \frac{4\tau}{3} + \tau \cdot \sin \tau \right) d\tau; \quad \text{г). } f(t) = \frac{2e^{3t} - 5 \cos 3t + 3}{3t} \cdot \eta(t);$$

$$\text{д). } f(t) = \eta(t) \cdot \int_0^t (t-\tau) \cdot e^{t-\tau} \cdot \sin(t-\tau) \sin \tau d\tau.$$

$$\mathbf{19.} \text{ а) } f(t) = t^2 \cdot \operatorname{sh} \left( \frac{3t}{2} \right) \cdot \eta(t); \quad \text{б). } f(t) = t \cdot \operatorname{ch} 3t \cdot \cos 6t \cdot \cos 3t \cdot \eta(t);$$

$$\text{в) } f(t) = \eta(t) \cdot \int_0^t (\tau^2 + \tau \cdot \cos \tau) d\tau; \quad \text{г). } f(t) = \frac{2 \cos 3t - 4 \cos 2t + 2 \cdot e^{-t}}{5t} \cdot \eta(t);$$

$$\text{д). } f(t) = \eta(t) \cdot \int_0^t (t-\tau) \cdot \cos(t-\tau) \cdot \sin(t-\tau) \sin \tau d\tau.$$

$$\mathbf{20.} \text{ а) } f(t) = t^2 \cdot \operatorname{ch}(4t) \cdot \eta(t); \quad \text{б). } f(t) = t \cdot \operatorname{sh} 2t \cdot \cos 4t \cdot \sin 5t \cdot \eta(t);$$

$$\text{в) } f(t) = \eta(t) \cdot \int_0^t \tau (e^{2\tau} + \sin \tau) d\tau; \quad \text{г). } f(t) = \frac{5e^{2t} - 3 \operatorname{ch} 2t - 2 \cdot \operatorname{ch} 3t}{5t} \cdot \eta(t);$$

$$\text{д). } f(t) = \eta(t) \cdot \int_0^t (t-\tau) \cdot e^{t-\tau} \cdot \operatorname{sh}(t-\tau) \sin \tau d\tau.$$

$$\mathbf{21.} \text{ а) } f(t) = t^2 \cdot \cos \left( \frac{2t}{3} \right) \cdot \eta(t); \quad \text{б). } f(t) = t \cdot \operatorname{ch} 5t \cdot \sin 3t \cdot \cos 4t \cdot \eta(t);$$

$$\text{в) } f(t) = \eta(t) \cdot \int_0^t \tau (\sin \tau + \tau \operatorname{sh} \tau) d\tau; \quad \text{г). } f(t) = \frac{3 \operatorname{ch} 4t - 4 \operatorname{ch} 3t + e^{-9t}}{3t} \cdot \eta(t);$$

$$\text{д). } f(t) = \eta(t) \cdot \int_0^t (t-\tau) \cdot \operatorname{ch}(t-\tau) \cos^3 \tau d\tau.$$

$$\mathbf{22.} \text{ а). } f(t) = t^2 \cdot \operatorname{ch} 2t \cdot \eta(t); \quad \text{б). } f(t) = \eta(t) \cdot \int_0^t \operatorname{sh} \tau \sin \tau d\tau;$$

$$\text{В). } f(t) = \frac{2\cos t - \cos 3t - 1}{3t} \cdot \eta(t); \quad \Gamma). f(t) = \eta(t) \cdot \int_0^t (t-\tau)^2 \cdot e^{-4\tau} d\tau; \quad \text{Д).}$$

$$f(t) = t \cdot \sin 2t \cdot \cos 5t \cdot \text{sh } 2t \cdot \eta(t).$$

$$\text{23). a). } f(t) = t^2 \cdot \cos(3t) \cdot \eta(t); \text{ б). } f(t) = \eta(t) \cdot \int_0^t \text{ch } 2\tau \cos 6\tau d\tau; \text{ в). } f(t) = \frac{\text{sh } 3t - \sin 5t}{2t} \cdot \eta(t);$$

$$\Gamma). f(t) = \eta(t) \cdot \int_0^t (t-\tau)^3 \cdot \text{ch } \tau d\tau; \text{ Д). } f(t) = t \cdot \text{sh } 3t \cdot \sin 2t \cdot \text{ch } t \cdot \eta(t).$$

$$\text{24). a). } f(t) = t^2 \cdot \sin^2(3t) \cdot \eta(t); \text{ б). } f(t) = \eta(t) \cdot \int_0^t (t-\tau)^3 \cdot \sin \tau d\tau; \text{ в). } f(t) = \eta(t) \cdot \int_0^t \tau^3 e^{4\tau} d\tau;$$

$$\Gamma). f(t) = \frac{3e^{-2t} - 5e^{2t} - 2\cos 4t}{4t} \cdot \eta(t); \text{ Д). } f(t) = t \cdot \text{sh } 2t \cdot \sin 5t \cdot \text{ch } t \cdot \eta(t).$$

$$\text{25). a). } f(t) = t^2 \cdot \sin(2t) \cdot \eta(t); \text{ б). } f(t) = t \cdot \text{sh } 2t \cdot \sin 4t \cdot \text{ch } t \cdot \eta(t);$$

$$\text{в). } f(t) = \eta(t) \cdot \int_0^t \tau^3 (e^{5\tau} - e^{3\tau}) d\tau; \text{ Г). } f(t) = \eta(t) \cdot \int_0^t (t-\tau)^3 \cdot \text{ch } \tau d\tau;$$

$$\text{Д). } f(t) = \frac{4\text{ch } 2t - 2\text{ch } 4t - 2e^{-2t}}{5t} \cdot \eta(t).$$

#### Завдання IV. Знайти оригінали функцій за їхнім зображенням:

$$\text{1). a). } F(p) = \frac{2p-1}{(p-1)(p-2)(p-4)(p-6)}; \text{ б). } F(p) = \frac{p^2 + p + 3}{(p^2 + p + 1)(p^2 + 1)}.$$

$$\text{2). a). } F(p) = \frac{p^2 + p}{(p-1)(p-2)(p+3)(p+4)}; \text{ б). } F(p) = \frac{p^3}{(p^4 - 1)(p^4 + 4)}.$$

$$\text{3). a). } F(p) = \frac{p^2 + 16p + 30}{p(p+1)(p+2)(p+4)}; \text{ б). } F(p) = \frac{3p}{(p+1)^2(p-2)^2}.$$

$$\text{4). a). } F(p) = \frac{2p^3 + 11p^2 + 16p + 6}{p(p+1)(p+2)(p+3)}; \text{ б). } F(p) = \frac{p+4}{(p^2 + p + 8)(p^2 + 2)}.$$

$$\text{5). a). } F(p) = \frac{2p^2 - p + 1}{(p-3)(p-4)(p+1)(p+2)}; \text{ б). } F(p) = \frac{p^2}{(p^2 + 2p + 2)(p^2 + 1)}.$$

$$\text{6). a). } F(p) = \frac{p^2 + 2p + 1}{p(p-1)(p+4)(p+5)}; \text{ б). } F(p) = \frac{p^3 + 5p^2 + 12p + 4}{(p+2)^2(p^2 + 4)}.$$

$$\text{7). a). } F(p) = \frac{p^2 + p}{(p-1)(p-2)(p+3)(p+4)}; \text{ б). } F(p) = \frac{p^2}{(p+3)^2(p-5)^2}.$$

$$\text{8). a). } F(p) = \frac{p^2 - 2p + 1}{(p^2 - 9)(p^2 - 4)}; \text{ б). } F(p) = \frac{p^3 + p + 1}{(p^2 + p + 1)(p^2 + 1)}.$$

$$\text{9). a). } F(p) = \frac{2p-1}{(p-1)(p-2)(p-4)(p-6)}; \text{ б). } F(p) = \frac{p^2 + p + 3}{(p^2 + p + 1)(p^2 + 1)}.$$

- 10). a).  $F(p) = \frac{p^2 + p}{(p-1)(p-2)(p+3)(p+4)}$ ; б).  $F(p) = \frac{p^3}{(p^4 - 1)(p^4 + 4)}$ .
- 11). a).  $F(p) = \frac{p^2 + 4}{(p-1)(p-2)(p+2)(p+3)}$ ; б).  $F(p) = \frac{1}{(p-1)^2(p+2)^2}$ .
- 12). a).  $F(p) = \frac{p^2 + 2p + 5}{p(p-1)(p+3)(p+4)}$ ; б).  $F(p) = \frac{p}{p^4 + 5p^2 + 6}$ .
- 13). a).  $F(p) = \frac{8p^2 - 11p + 9}{p(p-1)(p-2)(p-3)}$ ; б).  $F(p) = \frac{p+2}{p^4 + 4p^2 + 3}$ .
- 14). a).  $F(p) = \frac{p^2 + 16p + 30}{p(p+1)(p+2)(p+4)}$ ; б).  $F(p) = \frac{3p}{(p+1)^2(p-2)^2}$ .
- 15). a).  $F(p) = \frac{2p^3 + 11p^2 + 16p + 6}{p(p+1)(p+2)(p+3)}$ ; б).  $F(p) = \frac{p+4}{(p^2 + p + 8)(p^2 + 2)}$ .
- 16). a).  $F(p) = \frac{2p^2 - p + 1}{(p-3)(p-4)(p+1)(p+2)}$ ; б).  $F(p) = \frac{p^2}{(p^2 + 2p + 2)(p^2 + 1)}$ .
- 17). a).  $F(p) = \frac{p^2 + 2p + 1}{p(p-1)(p+4)(p+5)}$ ; б).  $F(p) = \frac{p^3 + 5p^2 + 12p + 4}{(p+2)^2(p^2 + 4)}$ .
- 18). a).  $F(p) = \frac{p^2 + p}{(p-1)(p-2)(p+3)(p+4)}$ ; б).  $F(p) = \frac{p^2}{(p+3)^2(p-5)^2}$ .
- 19). a).  $F(p) = \frac{p^2 - 2p + 1}{(p^2 - 9)(p^2 - 4)}$ ; б).  $F(p) = \frac{p^3 + p + 1}{(p^2 + p + 1)(p^2 + 1)}$ .
- 20). a).  $F(p) = \frac{p^2 + 4}{p(p-1)(p+3)(p+4)}$ ; б).  $F(p) = \frac{p}{p^4 + 9p^2 + 20}$ .
- 21). a).  $F(p) = \frac{p^2 + 16p + 30}{p(p+1)(p+2)(p+4)}$ ; б).  $F(p) = \frac{1}{(p^2 + 1)(p-1)^3(p-2)}$ .
- 22). a).  $F(p) = \frac{p^3 - 16p^2 + 76p - 103}{(p^2 - 7p + 12)(p^2 - 6p + 5)}$ ; б).  $F(p) = \frac{15p}{(p^4 - 1)(p^4 + 4)}$ .
- 23). a).  $F(p) = \frac{p^2 - 15p + 8}{(p-1)(p-2)(p-4)(p-8)}$ ; б).  $F(p) = \frac{16(p-1)}{(p-3)^2(p+1)^2}$ .
- 24). a).  $F(p) = -\frac{p^3 - p^2 + 5p + 4}{(p^2 - 1)(p^2 - 4)}$ ; б).  $F(p) = \frac{3(p^3 - p^2 - 1)}{(p^2 + p + 1)(p^2 + 1)}$ .
- 25). a).  $F(p) = \frac{18p^2 + 22p + 2}{(p-4)(p+1)(p+2)(p+3)}$ ; б).  $F(p) = \frac{2p^2 + 2p - 5}{p^4 - 5p^2 + 6}$ .

**Завдання V. Методом операційного числення знайти розв'язок задачі Коші:**

1). а).  $x^{(4)} + 2x'' + x = t \cdot \sin t$ ;  $x(0) = x'(0) = x''(0) = x'''(0) = 0$ ;

б).  $y'' + 2y' + y = \frac{e^{-t}}{(1+t)^2}$ ;  $y(0) = y'(0) = 0$ .

2). а).  $x^{(4)} + 10x'' + 9x = 96 \sin 2t \cos t$ ;  $x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$ ;  $x'''(0) = 1$ ;

б).  $y'' + y' = \frac{e^{2t}}{3 + e^t}$ ;  $y(0) = y'(0) = 0$ .

3). а).  $x''' - 2x'' + x' = 4$ ;  $x(0) = 1$ ,  $x'(0) = 2$ ,  $x''(0) = 2$ ;

б).  $y'' - y' = \frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch}^2 t}$ ;  $y(0) = y'(0) = 0$ .

4). а).  $x'' + 4x' + 4x = t^3 e^{2t}$ ;  $x(0) = 1$ ,  $x'(0) = 2$ ; б).  $y'' + y' = \frac{1}{(1 + e^t)^2}$ ;  $y(0) = y'(0) = 0$ .

5). а).  $x'' + 3x' + 2x = t^2 + t + 1$ ;  $x(0) = 0$ ,  $x'(0) = 1$ ; б).  $y'' - y' = \frac{1}{\operatorname{ch} t}$ ;  $y(0) = y'(0) = 0$ .

6). а).  $x'' + x = te^t + 4 \sin t$ ;  $x(0) = 0$ ,  $x'(0) = 0$ ; б).  $y'' + 2y' + 1 = \frac{te^{-t}}{1+t}$ ;  $y(0) = y'(0) = 0$ .

7). а).  $x^{(4)} + 2x'' + x = \cos t$ ;  $x(0) = x'(0) = x''(0) = x'''(0) = 0$ ;

б).  $y'' - y = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 t}$ ;  $y(0) = y'(0) = 0$

8). а).  $x^{(4)} - x = \operatorname{sh} t$ ;  $x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$ ;  $x'''(0) = 1$ ;

б).  $2y'' - y' = \frac{e^t}{(1 + e^{t/2})^2}$ ;  $y(0) = y'(0) = 0$ .

9). а).  $x^{(4)} + 10x'' + 9x = 96 \sin 2t \cos t$ ;  $x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$ ;  $x'''(0) = 1$ ;

б).  $y'' - 2y' = \frac{e^t}{\operatorname{ch} t}$ ;  $y(0) = y'(0) = 0$ .

10). а).  $x''' - 2x'' + x' = 4$ ;  $x(0) = 1$ ,  $x'(0) = 2$ ,  $x''(0) = 2$ ; б).  $y'' - y' = \frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch}^2 t}$ ;  $y(0) = y'(0) = 0$ .

11). а).  $x''' + x'' - 2x' - 5x = 5e^t$ ;  $x(0) = 0$ ,  $x'(0) = 1$ ,  $x''(0) = 2$ ;

б).  $y'' - y = \frac{1}{1 + e^t}$ ;  $y(0) = y'(0) = 0$ .

12). а).  $x'' + x' = \sin t$ ;  $x(0) = 1$ ,  $x'(0) = 1$ ,  $x''(0) = 0$ ;

б).  $y'' - 2y' + 2y = 2e^t \cos t$ ;  $y(0) = y'(0) = 0$ .

13). а).  $x''' + 6x'' + 11x' + 6x = 1 + t + t^2$ ;  $x(0) = 0$ ,  $x'(0) = 0$ ,  $x''(0) = 0$ ;

б).  $y'' + 4y = \frac{1}{(1 + e^t)^2}$ ;  $y(0) = y'(0) = 0$ .

14). а).  $x''' - 3x'' + 3x' + x = te^t$ ;  $x(0) = 0$ ,  $x'(0) = 0$ ,  $x''(0) = 1$ ;

б).  $y'' - y' = \frac{e^{2t}}{2 + e^t}$ ;  $y(0) = y'(0) = 0$ .

15). а).  $x''' - 2x'' + x' = 4$ ;  $x(0) = 1$ ,  $x'(0) = 2$ ,  $x''(0) = 2$ ;

$$\bar{6}). y'' - y' = \frac{\text{sh } t}{\text{ch}^2 t}; y(0) = y'(0) = 0.$$

$$16). \text{ a). } x'' + 4x' + 4x = t^3 e^{2t}; x(0) = 1, x'(0) = 2;$$

$$\bar{6}). y'' + y' = \frac{1}{(1+e^t)^2}; y(0) = y'(0) = 0.$$

$$17). \text{ a). } x'' + 3x' + 2x = t^2 + t + 1; x(0) = 0, x'(0) = 1;$$

$$\bar{6}). y'' - 2y' + 1 = \frac{e^t}{\text{ch}^2 t}; y(0) = y'(0) = 0.$$

$$18). \text{ a). } x'' + x = te^t + 4\sin t; x(0) = 0, x'(0) = 0; \bar{6}). y'' + 2y' + 1 = \frac{te^{-t}}{1+t}; y(0) = y'(0) = 0.$$

$$19). \text{ a). } x^{(4)} + 2x'' + x = \cos t; x(0) = x'(0) = x''(0) = x'''(0) = 0;$$

$$\bar{6}). y'' + y' = \frac{e^t}{(1+e^t)^2}; y(0) = y'(0) = 0.$$

$$20). \text{ a). } x^{(4)} - x = \text{sh } t; x(0) = x'(0) = x''(0) = 0; x'''(0) = 1;$$

$$\bar{6}). 2y'' - y' = \frac{e^t}{(1+e^{t/2})^2}; y(0) = y'(0) = 0.$$

$$21). \text{ a). } x'' + 4x' + 4x = t^3 e^{2t}; x(0) = 1, x'(0) = 2;$$

$$\bar{6}). y'' + y' = \frac{1}{(1+e^t)^2}; y(0) = y'(0) = 0.$$

$$22). \text{ a). } x''' - 2x'' + x' = 4; x(0) = 1, x'(0) = 2, x''(0) = 2; \bar{6}). y'' + y' = \frac{e^{2t}}{3+e^t}; y(0) = y'(0) = 0.$$

$$23). \text{ a). } x'' + 4x' + 4x = t^3 e^{2t}; x(0) = 1, x'(0) = 2; \bar{6}). y'' - y' = \frac{1}{\text{ch } t}; y(0) = y'(0) = 0.$$

$$24). \text{ a). } x'' + x = te^t + 4\sin t; x(0) = 0, x'(0) = 0; \bar{6}). y'' - y = \frac{1}{1+e^t}; y(0) = y'(0) = 0.$$

$$25). \text{ a). } x^{(4)} + 2x'' + x = \cos t; x(0) = x'(0) = x''(0) = x'''(0) = 0;$$

$$\bar{6}). y'' - 2y' = \frac{e^t}{\text{ch } t}; y(0) = y'(0) = 0.$$

**Завдання VI. Методом операційного числення знайти частинний розв'язок системи диференціальних рівнянь:**

$$1) \begin{cases} x' = -2x - 2y - 4z; & x(0) = y(0) = z(0) = 1; \\ y' = -2x + y - 2z; \\ z' = 5x + 2y + 7z. \end{cases} .$$

$$2) \begin{cases} x' = 3x - y + z; & x(0) = -2; y(0) = 1; z(0) = 0; \\ y' = x + y + z; \\ z' = 4x - y + 4z. \end{cases} .$$

$$3) \begin{cases} x' + 2x + 2y = 10e^{2t}; & x(0) = 1; y(0) = 3, \\ y' - 2x + y = 7e^{2t}. \end{cases} .$$

- 4) 
$$\begin{cases} x' = 2x - y + 2z; & x(0) = 0; y(0) = 1; z(0) = 2. \\ y' = x + 2z; \\ z' = -2x + y - z. \end{cases}$$
- 5) 
$$\begin{cases} x' = x - 2y - z; & x(0) = 1; y(0) = -1; z(0) = 2. \\ y' = -x + y + z; \\ z' = x - z. \end{cases}$$
- 6) 
$$\begin{cases} x'' + y' = 2 \sin t; & x(0) = z(0) = y'(0) = 0; x'(0) = y(0) = -1; z'(0) = 1. \\ y'' + z' = 2 \cos t; \\ z'' = x. \end{cases}$$
- 7) 
$$\begin{cases} x' - y' - 2x + 2y = 1 - 2t; & x(0) = x'(0) = y(0) = 0; \\ x'' + 2y' + x = 0. \end{cases}$$
- 8) 
$$\begin{cases} x' = -2x - 2y - 4z; & x(0) = y(0) = z(0) = 1; \\ y' = -2x + y - 2z; \\ z' = 5x + 2y + 7z. \end{cases}$$
- 9) 
$$\begin{cases} x' = 3x - y + z; & x(0) = 1; y(0) = 0; z(0) = 2; \\ y' = -x + 5y - z; \\ z' = x - y + 3z. \end{cases}$$
- 10) 
$$\begin{cases} x' = 2x - y + 2z; & x(0) = 0; y(0) = 1; z(0) = 2. \\ y' = x + 2z; \\ z' = -2x + y - z. \end{cases}$$
- 11) 
$$\begin{cases} x'' + y' + x = e^t; & x(0) = 1, x'(0) = 2; \\ y'' + x' = 1; & y(0) = 1, y'(0) = -1. \end{cases}$$
- 12) 
$$\begin{cases} x' = -x + 2y + z + e^t; & x(0) = y(0) = z(0) = 0, \\ 2y' = x - 2y + z + e^{3t}; \\ z' = x + 2y + z + 4. \end{cases}$$
- 13) 
$$\begin{cases} x' = -x + y + z + e^t; & x(0) = y(0) = z(0) = 0, \\ y' = x - y + z + e^{3t}; \\ z' = x + y + z + 4. \end{cases}$$
- 14) 
$$\begin{cases} x' + 2x + 4y = 4t + 1; & x(0) = y(0) = 0, \\ y' + x - y = \frac{3}{2}t^2. \end{cases}$$
- 15) 
$$\begin{cases} x' - y' - 2x + 2y = 1 - 2t; & x(0) = x'(0) = y(0) = 0, \\ 2y' + x'' + x = 0. \end{cases}$$
- 16) 
$$\begin{cases} x' + 2x + 2y = 10e^{2t}; & x(0) = 1; y(0) = 3, \\ y' - 2x + y = 7e^{2t}. \end{cases}$$

- 17) 
$$\begin{cases} x' = 2x - y + 2z; & x(0) = 2; y(0) = 1; z(0) = 0. \\ y' = x + 2z; \\ z' = -2x + y - z. \end{cases}$$
- 18) 
$$\begin{cases} x' = x - 2y - z; & x(0) = -1; y(0) = -1; z(0) = 1. \\ y' = -x + y + z; \\ z' = x - z. \end{cases}$$
- 19) 
$$\begin{cases} x'' + y' = 2 \cos t; & x(0) = z(0) = y'(0) = 0; x'(0) = y(0) = -1; z'(0) = 1. \\ y'' + z' = 2 \sin t; \\ z'' = x. \end{cases}$$
- 20) 
$$\begin{cases} x' - y' - 2x + 2y = 1 - 2t; & x(0) = x'(0) = y(0) = 0; \\ x'' + 2y' + x = 0. \end{cases}$$
- 21) 
$$\begin{cases} x' = 3x - y + z; & x(0) = -2; y(0) = 1; z(0) = 0. \\ y' = x + y + z; \\ z' = 4x - y + 4z. \end{cases}$$
- 22) 
$$\begin{cases} x' = -2x - 2y - 4z; & x(0) = y(0) = z(0) = 1; \\ y' = -2x + y - 2z; \\ z' = 5x + 2y + 7z. \end{cases}$$
- 23) 
$$\begin{cases} x' = 2x - y + 2z; & x(0) = 1; y(0) = 2; z(0) = 1. \\ y' = x + 2z; \\ z' = -2x + y - z. \end{cases}$$
- 24) 
$$\begin{cases} x' = -3x + 4y - 2z; & x(0) = 1; y(0) = 0; z(0) = 2. \\ y' = x + z; \\ z' = 6x - 6y + 5z. \end{cases}$$
- 25) 
$$\begin{cases} x' = 2x + y; & x(0) = 1; y(0) = 0; z(0) = -1. \\ y' = x + 3y - z; \\ z' = -x + 2y + 3z. \end{cases}$$

**Завдання VII. Методом операційного числення знайти розв'язок інтегрального рівняння:**

1). 
$$y(t) = e^{3t} + 3 \int_0^t \operatorname{sh}(t - \tau) y(\tau) d\tau.$$

2). 
$$y(t) = \operatorname{sh} t + \int_0^t (t - \tau) e^{t - \tau} y(\tau) d\tau.$$

3). 
$$y(t) = \sin 2t - \frac{8}{3} \int_0^t \operatorname{sh} 3(t - \tau) y(\tau) d\tau.$$

4). 
$$y(t) = \cos 5t - \frac{7}{4} \int_0^t \operatorname{sh} 4(t - \tau) y(\tau) d\tau.$$

- 5).  $y(t) = 1 - 2t - 4t^2 + \int_0^t [3 + 6(t - \tau) - 4(t - \tau)^2] y(\tau) d\tau .$
- 6).  $y(t) = e^{3t} + \sin t + 2 \int_0^t \cos(t - \tau) y(\tau) d\tau .$
- 7).  $y(t) = 2 \operatorname{ch} t + \int_0^t (t - \tau) e^{2(t - \tau)} y(\tau) d\tau .$
- 8).  $y(t) = \operatorname{sh} t + \int_0^t (t - \tau) e^{3(t - \tau)} y(\tau) d\tau .$
- 9).  $y(t) = \cos 3t - 3 \int_0^t \operatorname{ch}[2(t - \tau)] y(\tau) d\tau .$
- 10).  $y(t) = \eta(t) + e^{2t} + \frac{1}{6} \int_0^t (t - \tau)^3 y(\tau) d\tau .$
- 11).  $y(t) = \cos t + \int_0^t (t - \tau)^2 y(\tau) d\tau .$
- 12).  $y(t) = \sin t + 4 \int_0^t (t - \tau)^2 y(\tau) d\tau .$
- 13).  $y(t) = \cos t + \int_0^t (t - \tau) e^{t - \tau} y(\tau) d\tau .$
- 14).  $y(t) = \frac{t^2}{2} + \int_0^t e^{(t - \tau)} (t - \tau) y(\tau) d\tau .$
- 15).  $y(t) = t + 2 \int_0^t [t - \tau - \sin(t - \tau)] y(\tau) d\tau .$
- 16).  $y(t) = \operatorname{sh} t - 2 \int_0^t \cos(t - \tau) y(\tau) d\tau .$
- 17).  $y(t) = \sin 2t - \frac{8}{3} \int_0^t \operatorname{sh} 3(t - \tau) y(\tau) d\tau .$
- 18).  $y(t) = \cos 5t - \frac{7}{4} \int_0^t \operatorname{sh} 4(t - \tau) y(\tau) d\tau .$
- 19).  $y(t) = 1 - 2t - 4t^2 + \int_0^t [3 + 6(t - \tau) - 4(t - \tau)^2] y(\tau) d\tau .$
- 20).  $y(t) = e^{-t} - \cos t - 3 \int_0^t \operatorname{ch}[2(t - \tau)] y(\tau) d\tau .$
- 21).  $y(t) = \frac{t^2}{2} - \int_0^t (t - \tau) e^{-(t - \tau)} y(\tau) d\tau .$
- 22).  $\int_0^t e^{2(t - \tau)} y(\tau) d\tau = t^2 \cdot e^t .$



$$23). y(t) = e^{2t} + \cos 3t + \int_0^t \sin(t-\tau)y(\tau)d\tau .$$

$$24). y(t) = \operatorname{sh} t - \int_0^t \operatorname{ch}(t-\tau)y(\tau)d\tau .$$

$$25). y(t) = e^{3t} + \frac{9}{4} \int_0^t \operatorname{sh} 4(t-\tau)y(\tau)d\tau .$$

**Завдання VIII. Методом операційного числення розв'язати диференціальне рівняння з графічно заданою правою частиною при вказаних початкових умовах. Побудувати графік розв'язку  $x(t)$ .**

1).  $x'' - x = f(t); x(0) = x'(0) = 0$ , (рис.1).

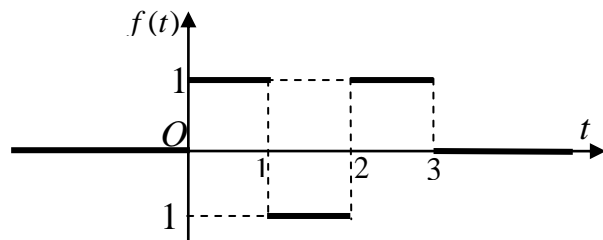


Рис.1

2).  $x' + 4x = f(t); x(0) = 0$ , (рис.2).

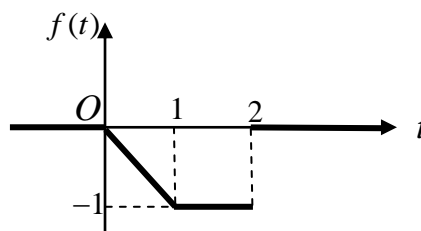


Рис.2

3).  $x'' + 4x' + 3x = f(t); x(0) = x'(0) = 0$ , (рис.3).

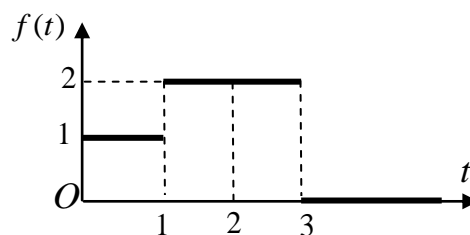


Рис. 3

4).  $x'' - x = f(t); x(0) = x'(0) = 0$ , (рис.4).

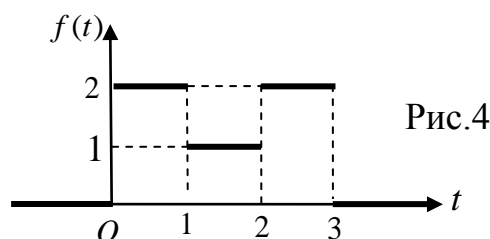
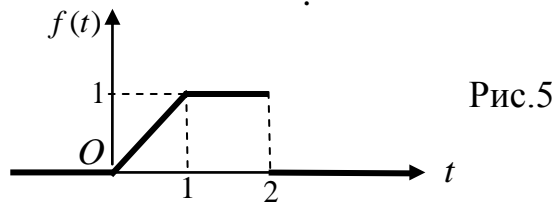
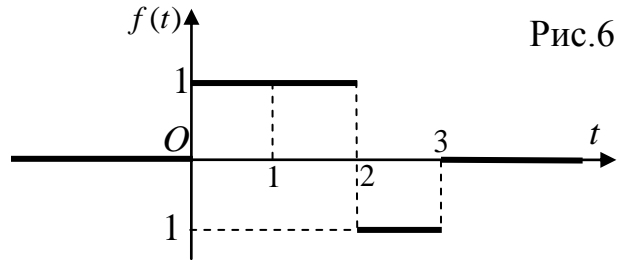


Рис.4

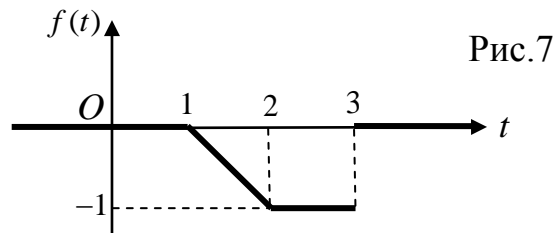
5).  $x' + 3x = f(t); x(0) = 0$ , (рис.5).



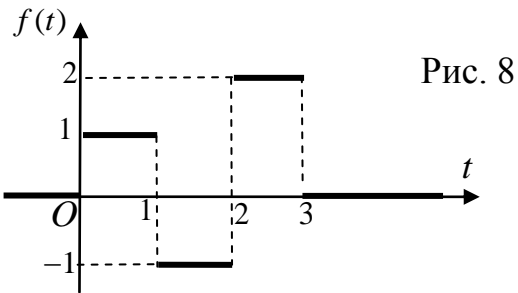
6).  $x'' - 2x = f(t); x(0) = x'(0) = 0$ , (рис.6)



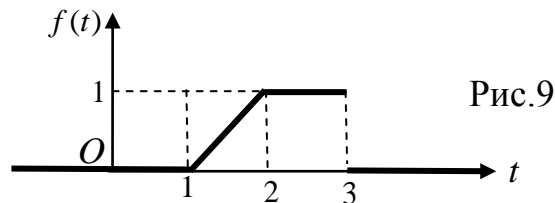
7).  $x' - 5x = f(t); x(0) = 0$ , (рис.7)



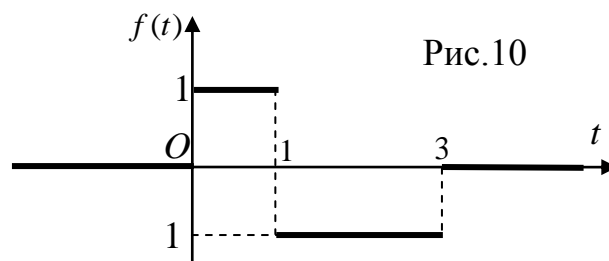
8).  $x'' + 2x' + x = f(t); x(0) = x'(0) = 0$ , (рис.8)



9).  $x'' - 4x = f(t); x(0) = x'(0) = 0$ , (рис.9)



10).  $x'' + x = f(t); x(0) = x'(0) = 0$ , (рис. 10).



11).  $x'' + 5x' + 4x = f(t); x(0) = x'(0) = 0$ , (рис.11)

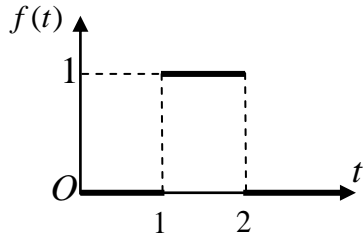


Рис. 11

12).  $x'' - x = f(t); x(0) = x'(0) = 0$ , (рис.12)

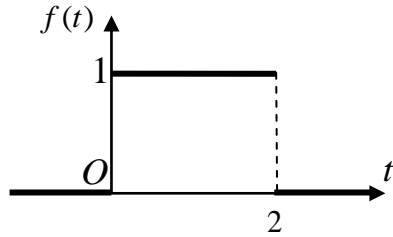


Рис.12

13).  $x' + 2x = f(t); x(0) = 0$ . (рис. 13)

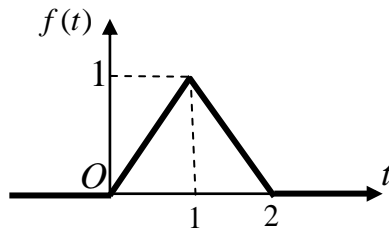


Рис.13

14).  $x'' - 2x = f(t); x(0) = x'(0) = 0$ .(рис.14)

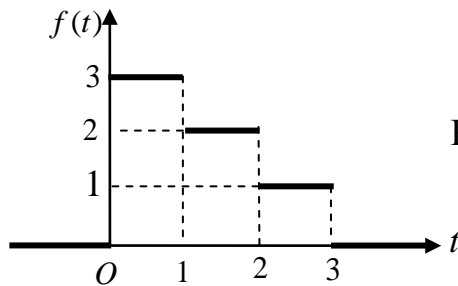


Рис.14

15).  $x'' + x = f(t); x(0) = x'(0) = 0$ . (рис.15)

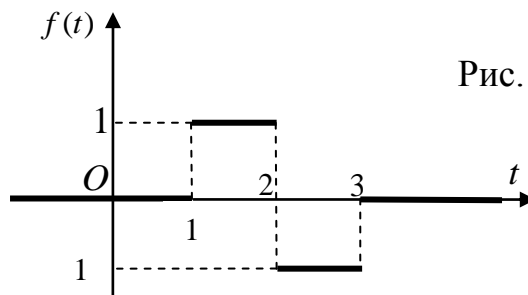


Рис.15

16).  $x' + 3x = f(t); x(0) = 0$ . (рис.16)

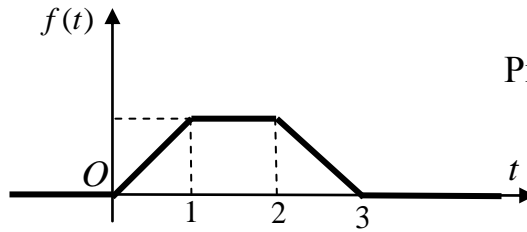


Рис.16

17).  $x'' + 4x = f(t); x(0) = 0; x'(0) = 0$ . (рис. 17)

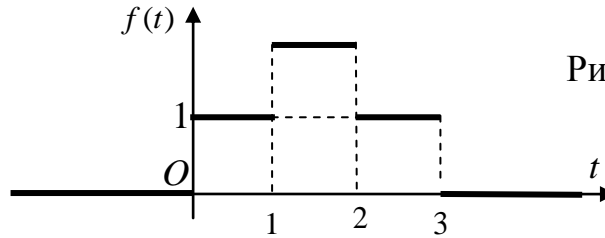


Рис.17

18).  $x' - 5x = f(t); x(0) = 0$ . (рис. 18)

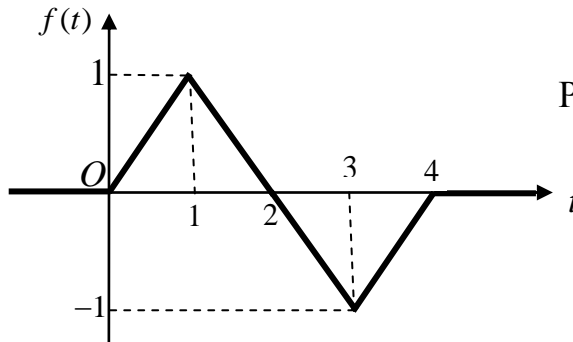


Рис.18

19).  $x' - 2x = f(t); x(0) = 0$ . (рис. 19)

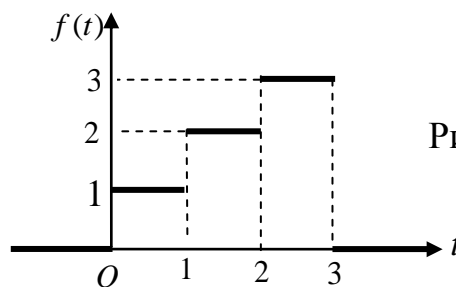


Рис.19

20).  $x'' + 9x = f(t); x(0) = x'(0) = 0$ . (рис.20)

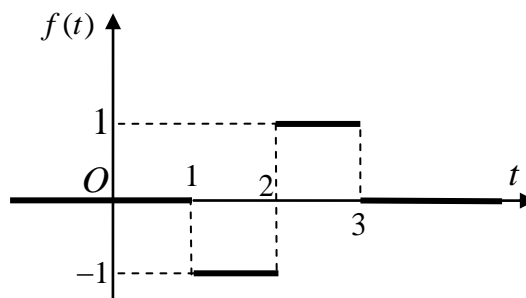
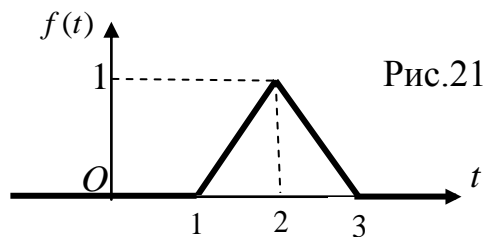
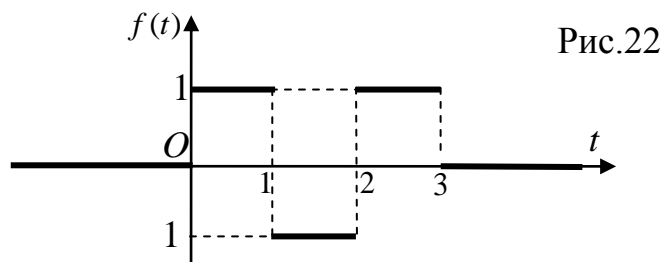


Рис.20

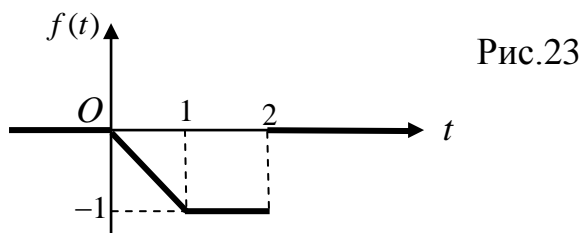
21).  $x'' - x = f(t); x(0) = x'(0) = 0$ . (рис.21)



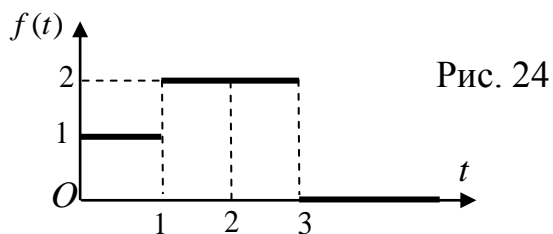
22).  $x'' + 4x' + 4x = f(t); x(0) = x'(0) = 0$ , (рис.22).



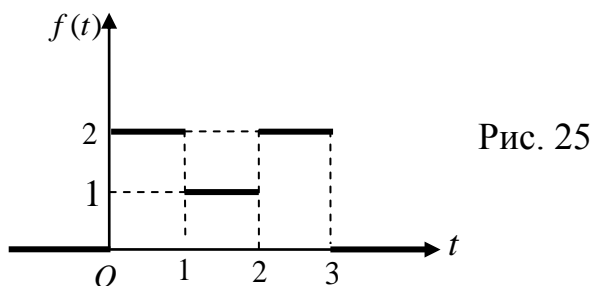
23).  $x' + 4x = f(t); x(0) = 0$ , (рис.23).



24).  $x'' + 6x' + 5x = f(t); x(0) = x'(0) = 0$ , (рис.24).



25).  $x'' - x = f(t); x(0) = x'(0) = 0$ , (рис.25).



## СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ТА РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Романовский П.И. Ряды Фурье. Теория поля. Аналитические и специальные функции. Преобразование Лапласа. М.: Наука, 1973. – 336 с.
2. Мартиненко М.А., Юрик І.І. Теорія функцій комплексної змінної. Операційне числення. Київ, Видавничий дом «Слово», 2007. – 296 с.
3. Владіміров В.М., Пучков О.А., Шмигевський М.В. Збірник завдань з вищої математики (типові розрахунки). Частина 2. – К.: ІВЦ «Політехніка», 2003. – 200 с.
4. Свешников А.Г., Тихонов А.И. Теория функций комплексной переменной. – М.: Наука, 1979.
5. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. Часть 1. – М.: Наука, 1976.
6. Буров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. – М.: Наука, 1985. – 464 с.
7. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И., Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. Задачи и упражнения. – М.: Наука, 1981.
8. І.В.Алексеева, В.О.Гайдей, О.О.Диховичний, Л.Б.Федорова. Ряди. Теорія функцій комплексної змінної. Операційне числення. Практикум. Київ. – 2013. – 160с.
9. Lindell I. V. Heaviside operational rules applicable to electromagnetic problems // Progress In Electromagnetics Research, PIER 26, 293–331, 2000.
10. Schwartz Laurent, Mathematics for the Physical Sciences, Dover Books on Mathematics, New York: Dover Publications, 2008, pp. 215–241.