НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

Фізико-математичний факультет
Кафедра математичного аналізу та теорії ймовірностей

«На правах рукопису»
УДК _____________

«До захисту допущено»
Завідувач кафедри
_________ Клесов О.І
«___»____________2018 р.

Магістерська дисертація

на здобуття ступеня магістра

зі спеціальності 111 «Математика»

на тему: «Гранична поведінка збурених випадкових блукань**»**

Виконала:
студентка VI курсу, групи ОМ-61м
Кусій Вікторія Василівна __________

Керівник:
доктор фізико-математичних наук, професор
Пилипенко А.Ю. __________

Рецензент:
с.н.с., д.ф.-м.н., зав. відділом тектонофізики
Інституту геофізики ім. С. І. Субботіна НАН України
Арясова О.В. __________

Засвідчую, що у цій магістерській дисертації немає запозичень з праць інших авторів без відповідних посилань.
Студентка _____________

Київ – 2018 року

Національний технічний університет України

«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

Фізико-математичний факультет

Математичного аналізу та теорії ймовірностей

Рівень вищої освіти – другий (магістерський) за освітньо-професійною програмою

Спеціальність (спеціалізація) – 111 «Математика» («Страхова та фінансова математика»)

ЗАТВЕРДЖУЮ

Завідувач кафедри

__________ Клесов О.І.

«___»_____________2018 р.

ЗАВДАННЯ
на магістерську дисертацію студенту

Кусій Вікторії Василівні

1. Тема дисертації «Гранична поведінка збурених випадкових блукань», науковий керівник дисертації доктор фізико-математичних наук, професор Пилипенко А.Ю., затверджені наказом по університету від « 23 » березня 2018 р. № 1016-с

2. Термін подання студентом дисертації: 4.05.2018 р.

3. Об'єкт дослідження: випадкові блукання зі збуреннями.

4. Предмет дослідження: гранична поведінка, асимптотика ймовірності неповернення в початкову точку.

5. Перелік завдань, які потрібно розробити:

1) Ознайомитись з теорією випадкових блукань та попередніми результатами;

2) Знайти асимптотику ймовірності неповернення в 0 випадкового блукання та зробити перевірку на прикладах;

3) Знайти оцінку для часу проведеного випадковим блуканням в множині збурень;

4) Дослідити нормовану суму стрибків з множини збурень;

5) Довести граничну теорему для збуреного випадкового блукання з необмеженою дисперсією.

6. Орієнтовний перелік графічного (ілюстративного) матеріалу: 14 слайдів

7. Орієнтовний перелік публікацій:

1) Кусій В.В. Асимптотична поведінка випадкового блукання, Шоста всеукраїнська конференція молодих вчених з математики та фізики, 21–22 квітня 2017р., Тези доповідей, Київ, с.22.

2) Кусій В.В. Гранична поведінка збурених випадкових блукань, Сьома всеукраїнська конференція молодих вчених з математики, 19-20 квітня 2018р.,Тези доповідей, Київ, с.18.

8. Дата видачі завдання: 5.02.2018.

Календарний план

№ з/п	Назва етапів виконання магістерської дисертації	Термін виконання етапів магістерської дисертації	Примітка
1	Ознайомлення з теорією випадкових блукань та попередніми результатами	5.02.2018 – 26.02.2018	виконано
2	Знаходження асимптотики ймовірності неповернення в 0 випадкового блукання та зробити перевірку на прикладах	26.02.2018 – 12.03.2018	виконано
3	Знайти оцінку для часу проведеного випадковим блуканням в множині збурень	12.03.2018 – 21.03.18	виконано
4	Дослідити нормовану суму стрибків з множини збурень	21.03.2018 – 2.04.2018	виконано
5	Довести граничну теорему для збуреного випадкового блукання з необмеженою дисперсією	2.04.2018 – 9.04.2018	виконано
6	Підготовка до виступу на конференції	9.04.2018 – 18.04.2018	виконано
7	Підготовка магістерської дисертації	20.04.2018 – 3.05.2018	виконано

Студент Кусій В. В.

Науковий керівник дисертації Пилипенко А. Ю.

Реферат

Магістерська дисертація: 45 сторінок, 29 посилань

В магістерській дисертації вивчається гранична поведінка збурених випадкових блукань.

Метою роботи є доведення граничних теорем для локальних збурень цілочисельних випадкових блукань, стрибок яких належить області притягання стійкого розподілу.

Також досліджується асимптотика ймовірності неповернення у вихідну точку для випадкового блукання з малим математичним сподіванням.

Ключові слова: випадкове блукання, гранична поведінка, слабка збіжність, ймовірність неповернення.

Реферат

Магистерская диссертация: 45 страниц, 29 ссылок

В магистерской диссертации изучается предельное поведение возмущенных случайных блужданий.

Целью работы есть доказательство предельных теорем для локальных возмущений целочисельных случайных блужданий, скачок которых принадлежит области притяжения устойчивого распределения.

Также исследуется асимптотика вероятности невозвращения в начальную точку для случайного блуждания с малым математическим ожиданием.

Ключевые слова: случайное блуждание, предельное поведение, слабая сходимость, вероятность невозвращения.

Abctract

Master's thesis: 45 pages, 29 links

The limit behavior of perturbed random walks is considered in the master's thesis.

The aim of this thesis is to prove the limit theorems for local perturbations of integer-valued random walks whose jump belongs to the domain of attraction of the stable law.

We also study the asymptotics of the non-return to the initial point probability for a random walk with a small expectation.

Key words: random walk, limiting behavior, weak convergence, probability of non-return.

ЗМІСТ

ВСТУП........8
Розділ 1. Теоретичні відомості
1.1. Ланцюги Маркова. Формула для обчислень скінченновимірних розподілів. Строго марковська властивість. Класифікація станів........11
1.2. Характеристичні функції та генератриси........14
1.3. Нерівність Маркова. Закон великих чисел. Тотожність Вальда......16
1.4. Повільно змінні функції........18
1.5. Стійкі функції розподілу. Область притягання стійкого закону......19
1.6. Слабка збіжність........22
1.7. Простір D........23
Розділ 2. Збурені випадкові блукання
2.1. Постановка задачі та основний результат........24
2.2. Допоміжні результати........26
2.3. Доведення теореми........34
Розділ 3. Асимптотика ймовірності неповернення в початкову точку
3.1. Постановка задачі та основний результат........36
3.2. Доведення........37
3.3. Приклади........40
ВИСНОВКИ........42
СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ........43

ВСТУП

Теорія ймовірностей як наука з'явилась в середині $XVII$ століття і пов'язана з іменами Паскаля, Ферма, Гюйгенса, хоча окремі задачі теорії ймовірностей розглядалися і раніше.

Першою граничною теоремою теорії ймовірностей був закон великих чисел опублікований в роботі Бернуллі 1713 року. Пізніше даний результат узагальнили Пуассон, Чебишов, Марков, Хінчин, Борель, Колмогоров та інші.

В роботах математиків того часу з'явилась перша центральна гранична теорема(ЦГТ). Під ЦГТ зараз зазвичай розуміють комплекс тверджень про збіжність розподілів сум великого числа малих випадкових величин до нормального розподілу. Історія виникнення нових формулювань відповідних тверджень та їх доведенням пов'язана з іменами великих математиків: Муавра, Лапласа, Пуассона, Гаусса, Чебишова, Маркова, Ляпунова, Ліндеберга та інших.

Також було отримано ряд результатів про збіжність сум незалежних випадкових величин до законів відмінних від нормального. Наприклад, теореми про збіжність до розподілу Пуассона, до стійких розподілів.

Природним узагальненням результатів про суми незалежних однаково розподілених випадкових величин є доведення граничних теорем для таких сум, що розглядаються як функції від верхньої границі сумування.

Одним із перших результатів такого типу одержав М.Д. Донскер[1]. Він розглядав випадкове блукання з нульовим математичним сподіванням та скінченною дисперсією. Після довизначення його до неперервного процесу Донскер довів теорему, що якщо стиснути його часову змінну в n разів, а просторову в $\sqrt{n}$ разів, то такий процес буде збігатися до вінерового руху слабко.

Узагальнення теореми Донскера було отримано у роботах українського математика А.В. Скорохода[2], який встановив збіжність до загальних процесів з незалежними приростами послідовності нормованих випадкованих блукань, де стрибки належать області притягання стійкого закону. Для цього Скороход в просторі функцій, що неперервні справа та мають лівосторонні границі ввів метрику, яку зараз і називають його іменем.

Магістерська дисертація присвячена дослідженню граничної поведінки для збурених випадкових блукань, тобто блукань, що при потраплянні в деяку множину точок змінюють свої перехідні ймовірності.

Перший результат пов'язаний з блуканнями зі збуреннями отримали Harrison і Shepp [3]. Вони розглянули випадкове блукання X_n на $\mathbb{Z}$ з перехідними ймовірностями $p_{i,i\pm1} = \frac{1}{2}, i \neq 0$ та $p_{0,1} = p, p_{0,-1} = q = 1 - p$. Було доведено, що $\{\frac{X_{[nt]}}{\sqrt{n}}\}$ слабко збігається при $n \to \infty$ до косого броунового руху W_γ з параметром $\gamma = p - q$, тобто неперервного марковського процесу з перехідною густиною

$$p_t(x, y) = \varphi_t(x - y) + \gamma sign(y)\varphi_t(|x| + |y|),\ x, y \in \mathbb{R},$$

де $\varphi_t(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{x^2}{2t}}$ - густина нормального розподілу $N(0, t)$.

Узагальнення даного результату на випадок коли збурення відбуваються не в одній точці, а в скінченній множині точок було отримано у роботах Р.А. Мінлоса, А.Е. Жижиної , Д.А. Яроцького, А.Ю. Пилипенка, О.М. Іксанова, Ю.Є. Приходька , В. Мандрекара та інших (див.[4],[5],[6],[7]). Також узагальнення на випадок коли перехідні ймовірності випадкового блукання змінюються на кожному кроці було одержано А.Ю. Пилипенком та В.Л. Хоменком [8].

Блукання в багатовимірному просторі було досліджено групою угорських вчених. В роботах Szasz і Telcs[9] та Szasz і Paulin[10] було розглянуто збурене випадкове блукання в $\mathbb{Z}^d$

$$Y_n = y_0 + \sum_{i=1}^{n}(\xi_i 1\!\!1_{Y_{i-}\in A} + \sum_{j\in A}\eta_{i,j}1\!\!1_{Y_{i-1}=j}),$$

де $\{\xi_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ - незалежні однаково розподілені випадкові величини, $\{\eta_{i,j}\}_{i\in\mathbb{N}}$ - незалежні однаково розподілені $\forall j \in A$, $\eta_{i,j}$ - приймають значень в $\mathbb{Z}^d$.
$\{\xi_i\}$, $\{\eta_{1,j}\}$, $\cdots$, $\{\eta_{n,j}\}$ - незалежні в сукупності.

Нескладно перевірить, що $\{Y_n\}$ - однорідний ланцюг Маркова з перехідними ймовірностями $\| P_{x,y} \|$, $x, y \in \mathbb{Z}^d$:

$$\forall x \notin A\ \ P_{x,x\pm e_i} = \frac{1}{2d};\ \forall x \in A\ \ P_{x,x+y} = P(\eta_{x,1} = y).$$

Було доведено, що такі блукання збігаються до вінерівського процесу.

Отже, багатовимірний та одновимірний випадки відрізняються.

Задачами магістерської дисертації є:

а) дослідити граничну поведінку випадкового блукання, що притягується до стійкого закону з інтегровними збуреннями в деякій скінченній множині точок.

б) дослідити асимптотику ймовірності неповернення в початкову точку для випадкового блукання з математичним сподіванням стрибку $\mu \to 0$.

Розділ 1. Теоретичні відомості

1.1. Ланцюги Маркова. Формула для обчислень скінченновимірних розподілів. Строго марковська властивість. Класифікація станів

Нехай E - скінченна або зліченна множина, $\{X_n, n \geq 0\}$-послідовність випадкових величин, які набувають значення з множини E. Множину E будемо називати фазовим простором або простором станів.

Означення 1. Послідовність $\{X_n, n \geq 0\}$ називається ланцюгом Маркова, якщо

$$P(X_{n+1} = j | X_n = i, X_k = i_k, k = \overline{1, n-1}) = P(X_{n+1} = j | X_n = i)$$

для всіх $i, j, i_1, \cdots, i_{n-1} \in E, n \geq 0$ [11].

Позначимо $P(X_{n+1} = j | X_n = i) = p_{ij},\ i, j \in E$. Число p_{ij} - перехідна ймовірність, з якою система перейде з стану i в стан j за одиницю часу, тобто це умовна ймовірність того, що система буде знаходитися у стані j в наступний момент часу, при умові, що в даний момент часу, вона знаходиться у стані i.

Зміна станів описується матрицею переходу P з елементами $p_{ij},\ i, j \in E$. Всі елементи матриці P невід'ємні, але не перевищують 1 і сума елементів в будь-якому рядку рівна 1:

$$\forall i, j \in E \ \ 0 \leq p_{ij} \leq 1,$$

$$\forall i \in E \ \ \sum_{j \in E} p_{ij}.$$

Правила, що задають ланцюг Маркова з початковим розподілом λ і матрицею переходу P, такі:

якщо X_0 має розподіл λ: $P(X_0 = i) = \lambda_i,\ \forall i \in E$, то $\forall n$ та $i_0, \cdots, i_n \in E$ ймовірність $P(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \cdots, X_n = i_n)$ того, що система знаходиться в станах $i_0, i_1, \cdots, i_n$ в моменти часу $0, 1, \cdots, n$ записується як добуток

$$P(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \cdots, X_n = i_n) = \lambda_{i_0} p_{i_0 i_1} \cdot ... \cdot p_{i_{n-1} i_n}.$$

В такому випадку ми будемо говорити, що $\{X_n\}$ - ланцюг Маркова з параметрами (λ, P).

Теорема 1. *[12]*

Якщо $\{X_n\}$ ланцюг Маркова з параметрами (λ, P), то

а) Умовна ймовірність

$$P(X_{n+1} = j | X_0 = i_0, \cdots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i_n)$$

дорівнює умовній ймовірності $P(X_{n+1} = j | X_n = i)$ та співпадає з p_{ij}.

б) Ймовірність $P(X_n = i)$ того, що система знаходиться у стані i в момент n, рівна $(\lambda P^n)_i$.

в) Елемент $p_{ij}^{(n)}$ матриці P^n співпадає з умовною ймовірністю $P(X_{k+n} = j | X_k = i)$, тобто задає ймовірність переходу із i в j за n кроків.

г) Ймовірність загального вигляду

$$P(X_{k_1} = i_1, X_{k_2} = i_2, \cdots, X_{k_n} = i_n)$$

задається наступною формулою

$$P(X_{k_1} = i_1, X_{k_2} = i_2, \cdots, X_{k_n} = i_n) = (\lambda P^{k_1})_{i_1} (P^{k_2 - k_1})_{i_1 i_2} \cdot \ldots \cdot (P^{k_n - k_{n-1}})_{i_{n-1} i_n}.$$

Строго марковська властивість

Строго марковська властивість заключається в тому, що процес починається наново не тільки після будь-якого заданого моменту часу n, але також і після випадково обраного моменту часу.

Означення 2. Випадкова величина T, що залежить від $X_0, X_1, \cdots$ і приймає значення $0, 1, 2, \cdots, \infty$ називається моментом зупинки, якщо подія $\{T = n\}$ описується лише в термінах випадкових величин $X_0 \ldots, X_n$ без залучення величин $X_{n+1}, X_{n+2}, \cdots$, тобто вимірна відносно $\sigma(X_0, \cdots X_n)$.

Теорема 2. *[12]*

Нехай $\{X_n, n \geq 0\}$ - ланцюг Маркова (λ, P) і припустимо, що T - момент зупинки. Тоді при умові $T < \infty$ і $X_T = i$ послідовність $\{X_{T+n}, n \geq 0\}$ утворює (δ_i, P) - ланцюг Маркова. Зокрема, при умові $T < \infty$ і $X_T = i$ випадкові величини $X_{T+1}, X_{T+2}, \cdots$ не залежать від $X_0, \cdots, X_{T-1}$.

Класифікація станів ланцюга Маркова

Означення 3. Будемо називать стан $i \in E = \{1, 2, \cdots\}$ неістотним, якщо з нього з додатньою ймовірністю можна за скінченне число кроків вийти, але неможливо в нього повернутись, тобто існують такі m та j, що $p_{ij}^{(m)} > 0$, але для всіх n: $p_{ji}^{(n)} = 0$.

Означення 4. Стан i називається істотним, якщо i не є неістотним.

Далі будемо розглядати істотні стани.

Означення 5. Стан j називається досяжним з точки i $(i \to j)$, якщо існує таке $m \geq 0$, що $p_{ij}^{(m)} > 0$. ($p_{ij}^{(0)} = 1, \text{якщо } \ i = j; \text{та } \ 0, \text{якщо } \ i \neq j$).

Означення 6. Стани i та j сполучаються $(i \leftrightarrow j)$, якщо j досяжно з i та i досяжно з j [13].

Зворотність випадкового блукання

Нехай $\{\xi_k, k \geq 1\}$ незалежні однаково розподілені цілочисельні випадкові величини, $\mathbb{E}\xi_k = \mu$, всі стани $\mathbb{Z}$ досяжні.

Розглянемо випадкове блукання $X_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n, \ n \geq 1$.

Означення 7. Випадкове блукання називається зворотним, якщо ймовірність повернення в початкову точку блукання рівна одиниці, тобто $P\{\tau_i | X_0 = i\} = 1$, де $\tau_i = \inf\{n \geq 1 : X_n = i\}$ - момент повернення в i.

Добре відомо, що якщо $\mathbb{E}\xi_k \neq 0$, то X_n не зворотнє, тобто $P_i\{\tau_i < \infty\} < 1$ або $P_i\{\tau_i = \infty\} > 0$.

У випадку коли блукання має математичне сподівання необхідною і достатньою умовою буде:

Теорема 3. *[14]*

Одномірне випадкове блукання з $m = \mathbb{E}|\xi_k| < \infty$ зворотне тоді і тільки тоді, коли $\mu = \mathbb{E}\xi_k = 0$.

Слід зауважити, що $\mathbb{E}\xi_k = 0$ є лише достатньою умовою зворотності.

1.2. Характеристичні функції та генератриси

Означення 8. Нехай $\xi = \xi(\omega)$ - випадкова величина, $F_\xi = F_\xi(x)$ - її функція розподілу. Її характеристичною функцією називається функція

$$\varphi_{\xi^{(\mu)}}(t) = \mathbb{E}e^{it\xi},\ t \in \mathbb{R}.$$

Теорема 4. *[13]*

Нехай ξ - випадкова величина, $F = F(x)$ - її функція розподілу і $\varphi(t) = \mathbb{E}e^{it\xi}$, $t \in \mathbb{R}$ її характеристична функція.

Мають місце наступні властивості:

1) $|\varphi(t)| \le \varphi(0) = 1$,

2) $\varphi(t)$ - рівномірно неперервна по $t \in \mathbb{R}$,

3) $\varphi(t) = \overline{\varphi(-t)}$,

4) $\varphi(t)$ є дійснозначною функцією тоді і тільки тоді, коли розподіл F симетричний ($\int_B dF(x) = \int_{-B} dF(x), B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), -B = \{-x : x \in B\}$,

5) Якщо для деякого $n \ge 1$ $\mathbb{E}|\xi|^n < \infty$, то для всіх $r \le n$ існують похідні $\varphi^{(r)}(t)$ і

$$\varphi^{(r)}(t) = \int_{\mathbb{R}} (ix)^r e^{itx} dF(x)$$

$$\mathbb{E}\xi^r = \frac{\varphi^{(r)}(0)}{i^r};\ \ \varphi(t) = \sum_{r=0}^{n} \frac{(it)^r}{r!}\mathbb{E}\xi^r + \frac{(it)^n}{n!}\varepsilon_n(t)$$

де $|\varepsilon_n(t)| \le 3\mathbb{E}|\xi|^n$ і $\varepsilon_n(t) \to 0, t \to 0$,

6) Якщо існує і скінченна $\varphi^{(2n)}(0)$, то $\mathbb{E}\xi^{2n} < \infty$,

7) Нехай $\mathbb{E}|\xi|^n < \infty$ для всіх $n \ge 1$ і

$$\overline{\lim_n} \frac{(\mathbb{E}|\xi|^n)^{1/n}}{n} = \frac{1}{R} < \infty$$

тоді при всіх $|t| < R$

$$\varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n}{n!}\mathbb{E}\xi^n.$$

Теорема 5. *[14]*

Якщо $\varphi(\theta)$ характеристична функція випадкового блукання, то

$$\frac{1}{2\pi} \lim_{t \to 1^-} \int_{-\pi}^{\pi} Re\left[\frac{1}{1 - t\varphi(\theta)}\right] d\theta < \infty$$

тоді і тільки тоді, коли це блукання незворотне.

Теорема 6. *[15]*

Нехай $\varphi(\theta) = \mathbb{E}e^{i\theta\xi}$, *де* $\mathbb{E}\xi = \mu,\ 0 < M, \infty$, *така що* $\varphi(\theta) \neq 1$ *для* $0 < |\theta| \leq M$. *Тоді для* $|\theta| \leq M,\ Re\left[\frac{1}{1-\phi(\theta)}\right]$ *інтегрована і*

$$Re\left[\frac{1}{1 - t\varphi(\theta)}\right] \to \frac{\pi}{\mu}\delta_0 + Re\left[\frac{1}{1 - \varphi(\theta)}\right]$$

слабко при $t \to 1^-$, *де* δ_0 *- узагальнена функція Дірака, тобто*

$$\forall g \in C[-M; M]$$

$$\lim_{t\to 1^-} \int_{-M}^{M} g(\theta) Re\left[\frac{1}{1 - t\varphi(\theta)}\right] d\theta = \int_{-M}^{M} g(\theta) Re\left[\frac{1}{1 - \varphi(\theta)}\right] d\theta + \frac{\pi}{\mu} g(0). \quad (1)$$

Нехай ϵ - момент повернення в початкову точку. Позначимо $u_n = P\{\epsilon$ настало при n-тому випробуванні$\}$, $f_n = P\{\epsilon$ вперше настало при n-тому випробуванні$\}$, $n = 1, 2, \cdots$.

Зручно довизначити

$$f_0 = 0,\ u_0 = 1$$

і ввести генератриси

$$F(s) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k s^k,\ \ U(s) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k s^k.$$

Теорема 7. *[16]*

Генератриси послідовностей $\{u_n\}$ *і* $\{f_n\}$ *пов'язані співвідношенням*

$$U(s) = \frac{1}{1 - F(s)}.$$

1.3. Нерівність Маркова. Закон великих чисел. Тотожність Вальда

Узагальнена нерівність Чебишева

Теорема 8. *[17]*

Нехай g - невід'ємна, неспадна на множині значень випадкової величини ξ функція. Припустимо, що існує $\mathbb{E}g(\xi)$. Тоді для кожного $\varepsilon > 0$

$$P\{\xi > \varepsilon\} \leq \frac{\mathbb{E}g(\xi)}{g(\varepsilon)}.$$

Якщо покладемо $g(x) = x$, то отримаємо звичайну нерівність Чебишева

$$P\{\xi > \varepsilon\} \leq \frac{\mathbb{E}\xi}{\varepsilon}.$$

Якщо в якості $g(x)$ візьмемо функцію $g(x) = |x|^r \ \ (r > 0)$, то отримаємо нерівність

$$P\{|\xi| > \varepsilon\} \leq \frac{\mathbb{E}|\xi|^r}{|\varepsilon|^r},$$

яка називається нерівністю Маркова.

Закон великих чисел

Говоритимемо, що послідовність $\{\xi_n, \ \ n \geq 1\}$ випадкових величин з $\mathbb{E}|\xi_n| < \infty$, $n \geq 1$ задовольняє закону великих чисел, якщо

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}\xi_k \to 0, n \to \infty$$

за ймовірністю, тобто коли для довільного $\varepsilon > 0$:

$$P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}\xi_k\right| > \varepsilon\right\} \to 0, n \to \infty.$$

Теорема 9. *[11](Закон великих чисел у формі Хінчина)*

Послідовність $\{\xi_n, n \geq 1\}$ незалежних однаково розподілених випадкових величин, для яких існують $\mathbb{E}\xi_n = \mu$, задовольняє закону великих *чисел, тобто*

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k \to \mu, n \to \infty$$

за ймовірністю.

Теорема 10. *[13](Тотожність Вальда)*

Нехай $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *послідовність дійснозначних, незалежних однаково розподілених випадкових величин і нехай* N *невід'ємна цілочисельна величина, що незалежна від послідовності* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$*. Припустимо, що* N *і* X_n *мають скінченні математичні сподівання. Тоді*

$$\mathbb{E}\sum_{n=1}^{N} X_n = \mathbb{E}N\mathbb{E}X_1.$$

1.4. Повільно змінні функції

Означення 9. Додатня вимірна на $[A, \infty), A > 0$ функція $L(x)$ називається повільно змінною, якщо для довільного $\lambda > 0$:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{L(\lambda x)}{L(x)} = 1.$$

Теорема 11. *[18]*

Якщо функція L, визначена на півосі $[A, \infty), A > 0$, повільно змінна, то знайдеться число $B \geq A$ таке, що при всіх $x \geq B$

$$L(x) = exp\{\eta(x) + \int_B^x \frac{\epsilon(t)}{t} dt\}, \tag{2}$$

де η - обмежена вимірна функція на $[B, \infty]$, така що $\eta(x) \to c$ при $x \to \infty$ ($|c| < \infty$), і $\epsilon(x)$ - неперервна функція на $[B, \infty]$, така, що $\epsilon(x) \to 0$ при $x \to \infty$. Будь-яка функція, яку можна представити у вигляді (2) є повільно змінною функцією.

Властивості

Нехай L, L_1, L_2 - повільно змінні функції.

1. Для будь-якого $\gamma > 0$ при $x \to \infty$

$$x^{\gamma} L(x) \to \infty, \; x^{-\gamma} L(x) \to 0.$$

2. При $x \to \infty$

$$\frac{logL(x)}{logx} \to 0.$$

3. Функції $L_1(x)L_2(x), L_1(x) + L_2(x)$ і при будь-яких $\alpha \in (-\infty, +\infty)$ функції $L^{\alpha}(x)$ є повільно змінними. Якщо $L_2(x) \to \infty$ при $x \to \infty$, то функція $L_1(L_2(x))$ також буде повільно змінною [18].

1.5. Стійкі функції розподілу. Область притягання стійкого закону

Означення 10. Функція розподілу $F(x)$ називається стійкою, якщо для будь-яких дійсних $a_1 > 0, a_2 > 0, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ має місце рівність

$$F(a_1 x + b_1) * F(a_2 x + b_2) = F(ax + b)$$

де $a > 0$ і b деякі константи.

Теорема 12. *[19] (Леві і Хінчина)*

Для того щоб функція розподілу $F(x)$ була стійкою, необхідно і достатньо, щоб логарифм її характеристичної функції можна було представити у вигляді $lnf(z) = i\gamma z - c|z|^{\alpha}\{1 + i\beta\frac{z}{|z|}\omega(z,\alpha)\}$, де α, β, γ, c - константи (γ - будь-яке дійсне число, $-1 \leq \beta \leq 1$, $0 \leq \alpha \leq 2$, $c \geq 0$) і

$$\omega(z,\alpha) = \begin{cases} tg(\frac{\pi}{2}\alpha), & \text{якщо } \alpha \neq 1, \\ \frac{2}{\pi} ln|z|, & \text{якщо } \alpha = 1. \end{cases}$$

Такі функції розподілу, як в теоремі Леві і Хінчина будемо позначати через $G_{\alpha,\beta}$, а у випадку симетричного розподілу при $\gamma = 0$ та $\beta = 0$ через U_α.

Означення 11. Кажуть, що функція розподілу $F(x)$ належить до області притягання стійкого закону $G_{\alpha,\beta}(x)$, якщо знайдуться такі послідовності чисел $B_n > 0$ та $A_n \in (-\infty; \infty)$, що для незалежних однаково розподілених випадкових величин ξ_i з функцією розподілу $F(x)$ нормовані і центровані суми

$$S_n^* = B_n^{-1}(S_n - A_n) = B_n^{-1}(\xi_1 + \cdots + \xi_n - A_n) \Rightarrow G_{\alpha,\beta}, n \to \infty. \tag{3}$$

Теорема 13. *[19] (Гнеденко)*

Для того щоб закон розподілу $F(x)$ належав області притягання стійкого закону з характеристичним показником α, необхідно і достатньо, щоб

1) $\frac{F(-x)}{1-F(x)} \to \frac{c_1}{c_2}$ *при* $x \to \infty$,

2) при кожному $k > 0$

$\frac{1-F(x)+F(-x)}{1-F(kx)+F(-kx)} \to k^{\alpha}$ *при* $x \to \infty$,

Або існує повільно змінна функція $L(x)$:

$$F(-x) \sim \frac{c_1 L(x)}{x^{\alpha}}, x \to +\infty,$$

$$1 - F(x) \sim \frac{c_2 L(x)}{x^{\alpha}}, x \to +\infty.$$

В цьому випадку $F(x)$ належить області притягання стійкого закону з індексом α з $\beta = \frac{(c_1-c_2)}{(c_1+c_2)}$ для $\alpha \neq 1$ і $\beta = \frac{(c_2-c_1)}{(c_1+c_2)}$ для $\alpha = 1$.

Обирати послідовності чисел A_n та B_n, щоб вони задовольняли (3) можна наступним чином [19]. Нехай $\chi(x) = 1 - F(x) + F(-x)$ та визначимо її узагальнену обернену функцію $\chi^{-1}(x) = inf[y : \chi(y) \leq x]$. Тоді для $0 < \alpha < 2$ B_n можна обрати такими:

$$B_n = \chi^{-1}(n^{-1}(c_1 + c_2)).$$

Більш конкретніше було знайдено, що $B_n = n^{1/\alpha}\widetilde{L}(n)$, де $\widetilde{L}(x)$ - деяка повільно змінна функція при $x \to \infty$.

Також доведено, що A_n для $1 < \alpha < 2$ треба обирати такими:

$$A_n = nB_n^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} x dF(x).$$

Для $\alpha \in (0, 1)$ можна обирати $A_n = 0$.

Нехай $S_n = x_0 + \sum_{k=1}^{n} X_k$ - частинна сума цілочисельних величин, зворотне аперіодичне блукання, де $\{X_k\}$ - незалежні однаково розподілені випадкові величини з функцією розподілу, що належить області притягання стікого закону з параметром $\alpha \in (1, 2]$.

Введемо позначення $T_0 = \min[n > 0 : S_n = 0]$ - момент потрапляння випадкового блукання в точку 0,

$r_n = P\{T_0 > n\}$ - ймовірність неповернення в 0 за n кроків.

Лема 1. *[20]*

Для таких випадкових блукань S_n *вірно*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{nr_n}{B_n} = \frac{sin\pi/\alpha}{\pi g_{\alpha}(0)},$$

де g_α щільність стійкого розподілу U_α, і $B_n = n^{1/\alpha}\widetilde{L}(n)$, $\widetilde{L}(n)$- повільно змінна функція.

Теорема 14. *[2] (Скорохода)*

Припустимо, що $\{\xi_k, k \geq 1\}$ належать області притягання стійкого процесу з індексом $\alpha \in (1,2)$, тоді існує $L(n)$ - повільно змінна функція така, що

$$\frac{S_{[nt]}}{n^{1/\alpha}L(n)} \Rightarrow U_\alpha(t),\ t \in [0,1],$$

де $U_\alpha(t),\ t \in [0,1]$ є α - стійким процесом у просторі $D([0,1])$.

Теорема 15. *[21] (Слуцького)*

Нехай даний ймовірнісний простір $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, і $X_n, Y_m : \Omega \to \mathbb{R}$, $n, m \in \mathbb{N}$ -випадкові величини. Тоді якщо $X_n \Rightarrow X$, де $X : \Omega \to \mathbb{R}$ - випадкова величина, і $Y_m \xrightarrow{P} c$, де c - фіксована константа, то

$$X_n + Y_n \Rightarrow X + c \ \text{ і } \ X_n \cdot Y_n \Rightarrow c \cdot X.$$

1.6. Слабка збіжність

Нехай S - метричний простір, $\mathcal{G}$ - клас борельових множин простору S.

Означення 12. Якщо ймовірнісні міри P_n і P задовольняють співвідношення $\int_S f dP_n \to \int_S f dP$ для кожної дійсної обмеженої неперервної функції f на S, ми будемо говорить, що P_n слабко збігається до P, і будемо позначати $P_n \Rightarrow P$.

Означення 13. Множина A з $\mathcal{G}$, границя якої $\mathfrak{d}A$ задовільняє умову $P(\mathfrak{d}A) = 0$, називається множиною неперервності P або P- неперервною множиною.

Теорема 16. *[22] Нехай P_n і P - ймовірнісні міри, визначені на $(S, \mathcal{G})$. Наступні п'ять умов еквівалентні:*

(i) $P_n \Rightarrow P, n \to \infty$,

(ii) $\lim_{n\to\infty} \int f dP_n = \int f dP$ для всіх обмежених рівномірно неперервних дійсних функцій f,

(iii) $\limsup_{n\to\infty} P_n(F) \leq P(F)$ для всіх замкнених F,

(iv) $\liminf_{n\to\infty} P_n(G) \geq P(G)$ для всіх відкритих G,

(v) $\lim_{n\to\infty} P_n(A) = P(A)$ для всіх P - неперервних множин A.

Збіжність за розподілом

Означення 14. Послідовність $\{X_n\}$ випадкових елементів збігається за розподілом (слабко) до випадкового еламенту X (позн. $X_n \Rightarrow X$), якщо розподіли P_n елементів X_n слабко збігаються до розподілу P елемента X:

$$P_n \Rightarrow P, n \to \infty.$$

Теорема 17. *[22] Наступні п'ять тверджень еквівалентні. Назвем $\mathcal{G}$-вимірну множину A X - неперервною множиною, якщо $P\{X \in \mathfrak{d}A\} = 0$.*

(i) $X_n \Rightarrow X$,

(ii) $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\{f(X_n)\} = \mathbb{E}\{f(X)\}$ для всіх обмежених рівномірно неперервних дійсних функцій f,

(iii) $\limsup_{n\to\infty} P\{X_n \in F\} \leq P\{X \in F\}$ для всіх замкнених F,

(iv) $\liminf_{n\to\infty} P\{X_n \in G\} \geq P\{X \in G\}$ для всіх відкритих G,

(v) $\lim_{n\to\infty} nP\{X_n \in A\} = P\{X \in A\}$ для всіх X - неперервних множин A.

1.7. Простір D

$D = D[0,1]$ - простір функцій x, визначених на $[0,1]$, неперервних справа, що мають лівосторонню границю. Тобто D складається з функцій $x : [0,1] \to \mathbb{R}$ таких, що:

1) При $0 \le t \le 1$ границя $x(t+) = \lim_{s \downarrow t} x(s)$ існує і $x(t+) = x(t)$.

2) При $0 < t \le 1$ границя $x(t-) = \lim_{s \uparrow t} x(s)$ існує.

У просторі D визначена топологія Скорохода з метрикою $d(x, y)$.

Означення 15. Відстань $d(x, y)$ між x та y з D визначається як нижня грань таких $\varepsilon > 0$, для яких існує $\lambda \in \Lambda$ таке, що

$$\sup_t |\lambda(t) - t| \le \varepsilon$$

і

$$\sup_t |x(t) - y(\lambda(t))| \le \varepsilon,$$

де Λ-клас строго зростаючих, неперервних відображень відрізка $[0,1]$ на себе. Якщо $\lambda \in \Lambda$, то $\lambda(0) = 0, \lambda(1) = 1$ [22].

Розділ 2. Збурені випадкові блукання

2.1. Постановка задачі та основний результат

Нехай $x \in \mathbb{Z}$ та $(\xi_i)_{i \in \mathbb{N}}$ послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин, що набувають цілих значень та мають нульове математичне сподівання і нескінченну дисперсію.

Позначимо $A := \{-m, -m+1, \cdots, m\}$.

Нехай $\forall j \in A \quad (\eta_{ji})_{i \in \mathbb{N}}$ - незалежні однаково розподілені цілочисельні випадкові величини, що задовільняють умови: $\exists \epsilon > 0$ таке, що $\mathbb{E}|\eta_{ji}|^{\epsilon} < \infty$ і всі сукупності $\{\{\eta_{ji}\}_{i \in \mathbb{N}}\}$ незалежні.

Розглянемо випадкове блукання

$$S(n) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i$$

та збурене випадкове блукання

$$X(0) = x,\ X(n) = x + \sum_{i=1}^{n} (\xi_i \mathbb{I}_{\{|X(i-1)|>m\}} + \sum_{j \in A} \eta_{ji} \mathbb{I}_{\{X(i)=j\}}).$$

Послідовність $X(n)$ - ланцюг Маркова з перехідними ймовірностями:

$$P(X(n+1) = j | X(n) = i) = \begin{cases} \mathbb{P}\{\xi = j - i\}, & \text{якщо } i \notin A, \\ \mathbb{P}\{\eta_i = j\}, & \text{якщо } i \in A. \end{cases}$$

Припустимо, що випадкові величини $\{\xi_i\}$ та $\{\eta_{ji}\}$ такі, що всі стани сполучаються.

Припустимо, що $\{\xi_i\}$ належать області притягання стійкого закону з індексом $\alpha \in (1, 2)$. Тоді існує $L(n)$ - повільно змінна функція така, що

$$\frac{S([nt])}{n^{1/\alpha} L(n)} \Rightarrow U_\alpha(t),\ n \to \infty, \tag{4}$$

див. теорему 14.

Мета: дослідити поведінку $\{X_n(t) := \frac{X([nt])}{n^{1/\alpha} L(n)}\}$ при $n \to \infty$.

Основним результатом є така гранична теорема:

Теорема 18. *Нехай* $\exists\epsilon > 0$ *таке, що* $\mathbb{E}|\eta_{ji}|^{\epsilon} < \infty$ *для всіх* j. *Якщо* $\epsilon > \alpha - 1$, *то для будь-яких* $t_i \geq 0$ *маємо збіжність скінченновимірних розподілів:*

$$\left(\frac{X([nt_i])}{n^{1/\alpha}L(n)}\right)_{i=1,\cdots,m} \Rightarrow (U_\alpha(t_i))_{i=1,\cdots,m},$$

де L *та* U_α *такі ж як в* (4).

2.2. Допоміжні результати

Позначимо $\rho_n = \sum_{i=0}^{n} 1\!\!1_{X(i)\in A}$ - час проведений випадковим блуканням в множині A за n кроків.

Лема 2. $\forall \delta > 0 \quad \mathbb{E}\rho_n = o(n^{1-\frac{1}{\alpha}+\delta}), n \to \infty.$

Доведення. **I.** Розглянемо випадок коли A складається з однієї точки, тобто $A = \{0\}$.

Позначимо $T_0 = min\{k \in \mathbb{N}, X(k) = 0\}$.

Зафіксуємо точку $b \neq 0$.

Введемо позначення

$$\sigma_1 = inf\{k \geq 0 : X(k) = b\},$$

$$\tau_n = inf\{k \geq \sigma_n : X(k) = 0\},$$

$$\sigma_{k+1} = inf\{i > \tau_k : X(i) = b\},$$

$\varepsilon_k = \sum_{i=\sigma_{k-1}}^{\sigma_k} 1\!\!1_{X(i)=0}$ - кількість часу проведеного в 0 між $k-1$-им та k-тим відвідуванням b,

$$\nu_n = max\{k : \sigma_k \leq n\},$$

$$\overline{\nu}_n = min\{k : X(\sigma_k + 1) \neq 0, \cdots, X(\sigma_k + n) \neq 0\}.$$

Помітимо, що $\rho_n \leq \sum_{k=1}^{\overline{\nu}_n} \varepsilon_k$.

Із строго марковської властивості випливає, що $\{\varepsilon_k, k \geq 1\}$ незалежні однаково розподілені випадкові величини, що незалежні від $\overline{\nu}_n$, тому можемо застосувати тотожність Вальда

$$\mathbb{E}\rho_n \leq \mathbb{E}(\sum_{k=1}^{\overline{\nu}_n} \varepsilon_k) = \mathbb{E}\varepsilon_k \mathbb{E}\overline{\nu}_n.$$

$\mathbb{E}(\varepsilon_k) < \infty$, бо блукання зворотне та всі стани сполучні.

Знайдемо $\mathbb{E}\overline{\nu}_n$:

$\overline{\nu}_n$ - має геометричний розподіл. Тоді

$$\mathbb{E}(\overline{\nu}_n) = \frac{1}{P_b(T_0 > n)}.$$

Ймовірність не потрапити в точку 0 з точки b за n кроків для збуреного та незбуреного випадкових блукань буде однаковою, тому за лемою 1

$$P_b(T_0 > n) \sim \frac{\widetilde{L}(n)}{n^{1-\frac{1}{\alpha}}} \cdot \frac{sin\frac{\pi}{\alpha}}{\pi g_\alpha(0)},$$

де g_α - щільність стійкого розподілу U_α.

Тоді $\mathbb{E}\overline{\nu}_n \sim const \cdot n^{1-\frac{1}{\alpha}}$, звідси $\exists c \ \ \mathbb{E}\rho_n \leq c \cdot n^{1-\frac{1}{\alpha}}, \ n \geq 1$.

Отже,

$$\forall \delta > 0 \ \ \mathbb{E}\rho_n = o(n^{1-\frac{1}{\alpha}+\delta}), n \to \infty.$$

II. Розглянемо випадок коли A скінченна множина. Позначимо ε_k - кількість часу проведеного протягом k-того відвідування A, тобто довжина k-того блоку з одиниць в послідовності

$$1\!\!1_{X(1)\in A}, 1\!\!1_{X(2)\in A}, \cdots, 1\!\!1_{X(n)\in A}.$$

$\overline{\nu}_n$ - кількість одиничних блоків в послідовності

$$1\!\!1_{X(1)\in A}, 1\!\!1_{X(2)\in A}, \cdots, 1\!\!1_{X(m)\in A}$$

де m обрано так, щоб за m кроків блукання провело n за межами A.

Позначимо

$$\sigma_1 = inf\{k \geq 0 : X(k) \in A\},$$

$$\tau_k = inf\{n \geq \sigma_k : X(n) \notin A\},$$

$$\sigma_{k+1} = inf\{i > \tau_k : X(i) \in A\},$$

Нехай u_k перша точка в A при k-тому відвідуванні множини A, а v_k - остання, $u_k \in A$ і $v_k \in A$.

Позначимо $U_n = \{u_k\}_{k=1}^n$ та $V_n = \{v_k\}_{k=1}^n$. Тоді U_n та V_n випадкові вектори , що набувають значень в A^n.

Оскільки множина A скінченна, то існує $M < \infty$ така, що

$$\mathbb{E}(\varepsilon_k | X(\sigma_k) = u_k, X(\tau_k - 1) = v_k) < M.$$

Для скорочення запису будемо позначати $\sum_{U_n,V_n} \stackrel{def}{=} \sum_{U_n\in A^n, V_n\in A^n}$.

$$\mathbb{E}(\rho_n) \le \mathbb{E}(\sum_{k=1}^{\overline{\nu}_n}\varepsilon_k) = \sum_{i=0}^{n}\mathbb{E}(\sum_{k=1}^{i}\varepsilon_k|\overline{\nu}_n = i)\cdot P(\overline{\nu}_n = i) =$$

$$= \sum_{i=0}^{n}\sum_{k=1}^{i}\sum_{U_n,V_n}\mathbb{E}(\varepsilon_k|\overline{\nu}_n = i, X(\sigma_k) = u_k, X(\tau_k - 1) = v_k)\times$$

$$\times P(\overline{\nu}_n = i, X(\sigma_k) = u_k, X(\tau_k - 1) = v_k) \le$$

$$\le \sum_{i=0}^{n}\sum_{U_n,V_n} MiP(\overline{\nu}_n = i, X(\sigma_k) = u_k, X(\tau_k - 1) = v_k) =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} MiP(\overline{\nu}_n = i) = M\sum_{i=0}^{n} iP(\overline{\nu}_n = i) = M\mathbb{E}\overline{\nu}_n.$$

Це випливає з того, що $\overline{\nu}_n$ не залежить від часу проведеного в середині множині A і $\mathbb{E}(\varepsilon_k|\overline{\nu}_n = i, X(\sigma_k) = u_k, X(\tau_k - 1) = v_k) = \mathbb{E}(\varepsilon_k|X(\sigma_k) = u_k, X(\tau_k - 1) = v_k) \le M$.

Знайдемо оцінку для $\mathbb{E}\overline{\nu}_n$.

З послідовності $X(0), X(1), X(2), \cdots$ вилучимо всі елементи, що належать множині А і отримаємо нову послідовність, яку позначимо $\overline{X}(0), \overline{X}(1), \overline{X}(2), \cdots$ Визначимо функцію $\phi : \mathbb{Z}^+ \cup \{0\} \to \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ таку, що індекс для $\overline{X}(i)$ в початковій послідовності буде $\phi(i)$.

Нехай $J = \{j : X(\phi(j)+1) \in A\}$ - множина індексів j коли відбувається стрибок з A.

Розглянемо множину подій $A_i, i = \overline{0,n}$ та A^c:

$A_i = \{i \in J, \{i+1, \cdots, n\} \cap J = \varnothing\}$ - після i-того відвідання A випадкове блукання не потрапляє в множину A,

$A^c = \{\{1, 2, \cdots, n\} \cap J = \varnothing\}$ - випадкове блукання не потрапило в A за перших n кроків.

Події $A_i, i = \overline{0,n}$ та A^c утворюють повну групу подій і

$$0 \le P_x(A^c) \le 1.$$

Тоді

$$1 = P_x(A^c) + \sum_{i=0}^{n} P_x(A_i) \geq \sum_{i=0}^{n} P_x(A_i) \geq$$

$$\geq \sum_{i=0}^{n} \sum_{b \in \overline{A}} P_x(i \in J) P_x(\overline{X}(i+1) = b | i \in J) P_b(T_A > n - i - 1)$$

де $T_A = min\{k \in \mathbb{N} | X(k) \in A\}$.

Нехай $A^\star$ буде множиною таких точок $z \in A$, з яких ми можемо зробити стрибок з множини A з додатньою ймовірністю. Для всіх $z \in A^\star$ виберемо такі точки $b_z \in (\mathbb{Z} \diagdown A)$, що $P(z, b_z) > 0$. Нехай B буде множиною таких точок b_z. Тоді ми зможемо знайти константу $P_m > 0$, таку що ймовірність стрибка з A в B буде більша або рівна P_m. Найкраще обрати $P_m = \min_{z \in A^\star} P(z, b_z)$. І з того, що $P_b(T_A > n - i - 1) \geq P_b(T_A > n)$ маємо

$$1 \geq \sum_{i=0}^{n} \sum_{b \in \overline{A}} P_x(i \in J) P_x(\overline{X}(i+1) = b | i \in J) P_b(T_A > n - i - 1) \geq$$

$$\geq \sum_{i=0}^{n} P_x(i \in J) \sum_{b \in B} P_b(T_A > n) P_x(\overline{X}(i+1) = b | i \in J) \geq$$

$$\geq \sum_{i=0}^{n} P_x(i \in J) \min_{b \in B} P_b(T_A > n) \sum_{b \in B} P_x(\overline{X}(i+1) = b | i \in J) =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} P_x(i \in J) \min_{b \in B} P_b(T_A > n) P_x(\overline{X}(i+1) \in B | i \in J) \geq$$

$$\geq \sum_{i=0}^{n} P_x(i \in J) \min_{b \in B} P_b(T_A > n) P_m.$$

Помітимо, що $\sum_{i=0}^{n} P_x(i \in J) = \mathbb{E}(\overline{\nu}_n)$ та ймовірність не потрапити в множину A для збуреного та не збуреного випадкових блукань однакова і не залежить від початкової точки, тому ми можемо скористатися лемою з статті [20].

$$P(T_A > n) \sim \frac{\widetilde{g}_A(0) \widetilde{L}(n)}{n^{1 - \frac{1}{\alpha}}}$$

Маємо

$$1 \geq \sum_{i=0}^{n} P_x(i \in J) \min_{b \in B} P_b(T_A > n) P_{min}$$

$$1 \geq \mathbb{E}\overline{\nu}_n \min_{b\in B} P_b(T_A > n) P_{min}$$

$$\mathbb{E}\overline{\nu}_n \leq \frac{1}{\min_{b\in B} P_b(T_A > n) P_{min}} \Rightarrow \mathbb{E}\overline{\nu}_n \sim const \cdot n^{1-\frac{1}{\alpha}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall \delta > 0 \ \ \mathbb{E}\overline{\nu}_n = 0(n^{1-\frac{1}{\alpha}+\delta}).$$

Звідси і отримуємо результат нашої леми, що $\forall \delta > 0 \quad \mathbb{E}\rho_n = o(n^{1-\frac{1}{\alpha}+\delta})$. □

Лема 3. *Нехай $F_1(x)$ - функція розподілу η_1, $F_2(x)$ - функція розподілу η_2 та $F_1(x) \geq F_2(x)$. Нехай $\{U_i\}$ - незалежні однаково розподілені рівномірно на $[0,1]$ випадкові величини та $\eta_{1,i} = F_1^{(-1)}(U_i)$, $\eta_{2,i} = F_2^{(-1)}(U_i)$, де $F_1^{(-1)}(U_i)$, $F_2^{(-1)}(U_i)$ -узагальнені обернені функції ($F^{(-1)}(x) = \inf\{y : F(y) \geq x\}, x \in [0,1]$; якщо $F(y) < 1$ для всіх $y \in \mathbb{R}$, то $F^{(-1)}(1) := +\infty$; якщо $F(y) > 0$ для всіх $y \in \mathbb{R}$, то $F^{(-1)}(0) := -\infty$). Тоді $\{\eta_{1,i}\}$ - незалежні з функцією розподілу $F_1(x)$, $\{\eta_{2,i}\}$ - незалежні з функцією розподілу $F_2(x)$ і $\sum_{i=1}^n \eta_{1,i} \geq \sum_{i=1}^n \eta_{2,i}$.*

Доведення. Знайдемо функцію розподілу для величин $\eta_{1,i} = F_1^{(-1)}(U_i)$.

$$P(\eta_{1,i} < x) = P(F_1^{(-1)}(U_i) < x) =$$

$$= P(F_1(F_1^{(-1)}(U_i)) < F_1(x)) = P(U_i < F_1(x)) = F_1(x).$$

Для $\eta_{2,i} = F_2^{(-1)}(U_i)$ аналогічно.

Оскільки $F_1(x) \geq F_2(x)$, то $F_1^{(-1)}(x) \geq F_2^{(-1)}(x)$. Тоді

$$\sum_{i=1}^n \eta_{1,i} = \sum_{i=1}^n F_1^{(-1)}(U_i) \geq \sum_{i=1}^n F_2^{(-1)}(U_i) = \sum_{i=1}^n \eta_{2,i}.$$

□

Наслідок 1. *Якщо $\{\eta_{1,i}\}$ - незалежні однаково розподілені з функцією розподілу $F_1(x)$, $\{\eta_{2,i}\}$ - незалежні однаково розподілені з функцією розподілу $F_2(x)$, та $F_1(x) \geq F_2(x)$, то*

$$\forall c \ \ P(\sum_{i=1}^n \eta_{1,i} > c) \leq P(\sum_{i=1}^n \eta_{2,i} > c).$$

Лема 4. *Нехай* $\{\eta_j\}$ *- незалежні однаково розроділені випадкові величини, для яких існує таке* $\epsilon > 0$, *що* $\mathbb{E}|\eta_j|^\epsilon < \infty$. *Припустимо, що* $\mathbb{E}\rho_n = o(n^{1-\frac{1}{\alpha}+\delta})$. *Якщо* $\epsilon > \alpha - 1$, *то для будь-якої повільно змінної функції* L

$$\frac{\sum_{j=1}^{\rho_n} \eta_j}{n^{\frac{1}{\alpha}} L(n)} \xrightarrow{P} 0, n \to \infty.$$

Доведення. $\{\eta_j\}$ - незалежні однаково розподілені. Позначимо $\mathbb{E}|\eta_j|^\epsilon = K$, тоді за нерівністю Маркова

$P(|\eta_j| > h) < \frac{K}{h^\epsilon}; \quad P(|\eta_j| \le h) \ge 1 - \frac{K}{h^\epsilon}.$

Визначимо нову послідовність випадкових величин $\widetilde{\eta}_j$ функція розподілу якої

$$F_{\widetilde{\eta}_j}(h) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } h < K^{\frac{1}{\epsilon}} \\ 1 - \frac{K}{h^\epsilon}, & \text{якщо } h > K^{\frac{1}{\epsilon}} \end{cases} \le F_{|\eta_j|}(h)$$

Тоді за наслідком 1

$$\forall \gamma \ge 0 \;\; P(\sum_{j=1}^{n} |\eta_j| > \gamma) \le P(\sum_{j=1}^{n} \widetilde{\eta}_j > c\gamma)$$

З припущення леми $\mathbb{E}\rho_n = o(n^{1-\frac{1}{\alpha}+\delta})$.

Отже, для всіх $\gamma \ge 0$ справедливо

$$P\left(\frac{\sum_{j=1}^{\rho_n} \eta_j}{n^{\frac{1}{\alpha}} L(n)} > \gamma\right) \le P\left(\frac{\sum_{j=1}^{\rho_n} \widetilde{\eta}_j}{n^{\frac{1}{\alpha}} L(n)} > \gamma\right) \le$$

$$\le P\left(\frac{\sum_{j=1}^{\rho_n} \widetilde{\eta}_j}{n^{\frac{1}{\alpha}} L(n)} > \gamma | \rho_n > n^{1-\frac{1}{\alpha}+\delta}\right) P(\rho_n > n^{1-\frac{1}{\alpha}+\delta}) + P\left(\frac{\sum_{j=1}^{n^{1-\frac{1}{\alpha}+\delta}} \widetilde{\eta}_j}{n^{\frac{1}{\alpha}} L(n)} > \gamma\right).$$

Оскільки $P(\rho_n > n^{1-\frac{1}{\alpha}+\delta}) \to 0$ за нерівністю Маркова, то будемо розглядати другий доданок.

I. Якщо $\epsilon \ge 1$, то

$$P\left(\frac{\sum_{j=1}^{n^{1-\frac{1}{\alpha}+\delta}} \widetilde{\eta}_j}{n^{\frac{1}{\alpha}} L(n)} > \gamma\right) = P\left(\frac{\sum_{j=1}^{n^{1-\frac{1}{\alpha}+\delta}} \widetilde{\eta}_j}{n^{1-\frac{1}{\alpha}+\delta}} \cdot \frac{n^{1-\frac{1}{\alpha}+\delta}}{n^{\frac{1}{\alpha}} L(n)} > \gamma\right) \to 0,$$

бо за законом великих чисел

$$\frac{\sum_{j=1}^{n^{1-\frac{1}{\alpha}+\delta}} \widetilde{\eta}_j}{n^{1-\frac{1}{\alpha}+\delta}} \to \mathbb{E}\widetilde{\eta}_j$$

і для деяких $\delta > 0$

$$\frac{n^{1-\frac{1}{\alpha}+\delta}}{n^{\frac{1}{\alpha}}L(n)} = \frac{n^{1-\frac{2}{\alpha}+\delta}}{L(n)} \to 0, n \to \infty, \text{оскільки } \alpha < 2.$$

II. Якщо $\epsilon < 1$, то $\widetilde{\eta}_j$ належить області притягання стійкого закону з параметром ϵ. Тоді

$$\frac{\sum_{j=1}^{n} \widetilde{\eta}_j}{n^{1/\epsilon}} \Rightarrow U_\alpha; \tag{5}$$

$1 - F_{\widetilde{\eta}}(x) \approx \frac{k}{x^\epsilon} \to 0, x \to \infty.$

Отже, за наслідком 1

$$P\left(\left|\frac{\sum_{j=1}^{n^{1-\frac{1}{\alpha}+\delta}} \eta_j}{n^{\frac{1}{\alpha}}L(n)}\right| > \gamma\right) \leq P\left(\frac{\sum_{j=1}^{n^{1-\frac{1}{\alpha}+\delta}} |\eta_j|}{n^{\frac{1}{\alpha}}L(n)} > \gamma\right) \leq$$

$$\leq P\left(\frac{\sum_{j=1}^{n^{1-\frac{1}{\alpha}+\delta}} \widetilde{\eta}_j}{n^{\frac{1}{\alpha}}L(n)} > \gamma\right) = P\left(\frac{\sum_{j=1}^{n^{1-\frac{1}{\alpha}+\delta}} \widetilde{\eta}_j}{n^{(1-\frac{1}{\alpha}+\delta)\frac{1}{\epsilon}}} \cdot \frac{n^{(1-\frac{1}{\alpha}+\delta)\frac{1}{\epsilon}}}{n^{\frac{1}{\alpha}}L(n)} > \gamma\right) =$$

$$= P\left(\frac{\sum_{j=1}^{n^{1-\frac{1}{\alpha}+\delta}} \widetilde{\eta}_j}{n^{(1-\frac{1}{\alpha}+\delta)\frac{1}{\epsilon}}} > \frac{\gamma n^{\frac{1}{\alpha}}L(n)}{n^{(1-\frac{1}{\alpha}+\delta)\frac{1}{\epsilon}}}\right).$$

З умови $\epsilon > \alpha - 1$ слідує, що $\exists \delta > 0 : \epsilon > \alpha - 1 + \delta\alpha$. Маємо наступний ланцюг перетворень

$$\epsilon > \alpha - 1 + \delta\alpha \Rightarrow \frac{1}{\epsilon} < \frac{1}{\alpha(1 - \frac{1}{\alpha} + \delta)} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\alpha} - (1 - \frac{1}{\alpha} + \delta)\frac{1}{\epsilon} > 0 \quad \Rightarrow \frac{1}{\alpha} > (1 - \frac{1}{\alpha} + \delta)\frac{1}{\epsilon} \quad \Rightarrow$$

$$n^{\frac{1}{\alpha}-(1-\frac{1}{\alpha}+\delta)\frac{1}{\epsilon}}L(n) \to \infty, n \to \infty,$$

$$\frac{\gamma n^{\frac{1}{\alpha}}L(n)}{n^{(1-\frac{1}{\alpha}+\delta)\frac{1}{\epsilon}}} \to \infty, n \to \infty. \tag{6}$$

Отже, з (5) та (6) маємо збіжність

$$P\left(\left|\frac{\sum_{j=1}^{n^{1-\frac{1}{\alpha}+\delta}}\eta_j}{n^{\frac{1}{\alpha}}L(n)}\right| > \gamma\right) \to 0, n \to \infty.$$

$\square$

2.3. Доведення теореми

Доведення. $S(n) = x + \xi_1 + \xi_2 + ... + \xi_n$ - незалежне від X блукання з одиничними скачками. Коли $A = \{0\}$ введемо наступний допоміжний процес. Покладемо

$$\widetilde{X}(k) := S(k), k = \overline{0, t_1},$$

де t_1 - перший момент потрапляння процесу $\widetilde{X}$ в точку 0.

Наступний приріст для $\widetilde{X}$ покладемо рівним η_1:

$$\widetilde{X}(t_1 + 1) := \widetilde{X}(t_1) + \eta_1 = 0 + \eta_1 = \eta_1.$$

Далі, нехай прирости $\widetilde{X}$ такі ж, як і у S до моменту t_2 -момент наступного попадання $\widetilde{X}$ в точку 0:

$$\widetilde{X}(k) := \widetilde{X}(t_1 + 1) + S(k - 1), k = \overline{t_1 + 2, t_2}.$$

В точці $t_2 + 1$ добавимо η_2:

$$\widetilde{X}(t_2 + 1) := \eta_2$$

і так далі.

Можна помітити, що $\{X(n)\}$ має такий самий розподіл, що і

$$\widetilde{X}(n) = S(n - \rho_n) + \sum_{i=1}^{\rho_n} \eta_i$$

де ρ_n- кількість потраплянь послідовності $\widetilde{X}(n)$ в точку 0.

У випадку коли $A = \{-m, -m+1, \cdots, m\}$ випадкове блукання матиме вигляд:

$$\widetilde{X}(n) = S(n - \rho_n) + \sum_{j \in A} \sum_{i=1}^{\rho_{nj}} \eta_{ji}$$

де $\forall j \in A \ \ \rho_{nj} = \sum_{i=0}^{n} 1\!\!\mathrm{I}_{\{X(i)=j\}}$ і $\rho_n = \sum_{j \in A} \rho_{nj}$.

Нове випадкове блукання можна представити у вигляді

$$\frac{\widetilde{X}([nt])}{n^{\frac{1}{\alpha}} L(n)} = \frac{\sum_{k=1}^{[nt]} \xi_k}{n^{\frac{1}{\alpha}} L(n)} + \frac{\sum_{k=1}^{\rho_{[nt]}} \eta_k}{n^{\frac{1}{\alpha}} L(n)} - \frac{\sum_{k=[nt]-\rho_{[nt]}}^{[nt]} \xi_k}{n^{\frac{1}{\alpha}} L(n)}.$$

Маємо
$\frac{\sum_{k=1}^{[nt]} \xi_k}{n^{\frac{1}{\alpha}} L(n)} \Rightarrow U_\alpha(t), n \to \infty$ за теоремою 4,

$\frac{\sum_{k=1}^{\rho_{[nt]}} \eta_k}{n^{\frac{1}{\alpha}} L(n)} \xrightarrow{P} 0, n \to \infty$ - за лемою 4.

Оскільки $\{\xi_i\}$ належать області притягання стійкого закону з параметром α, то $\forall \delta > 0 \ \ \mathbb{E}|\xi_i|^{\alpha-\delta} < \infty$. Тоді за лемою 4

$$\frac{\sum_{k=[nt]-\rho_{[nt]}}^{[nt]} \xi_k}{n^{\frac{1}{\alpha}} L(n)} \xrightarrow{P} 0, n \to \infty.$$

Отже, за теоремою 15

$$\frac{\widetilde{X}([nt])}{n^{\frac{1}{\alpha}} L(n)} \Rightarrow U_\alpha(t), n \to \infty.$$

Випадок, коли скінченна множина $t_1, \cdots, t_m$ аналогічно.

Теорема доведена.

$\square$

Розділ 3. Асимптотика ймовірності неповернення в початкову точку

3.1. Постановка задачі та основний результат

Нехай $\{\xi_k^{(\mu)}, k \geqslant\}$ - незалежні однаково розподілені випадкові величини, $\mathbb{E}\xi_k^{(\mu)} = \mu > 0$, всі стани $\mathbb{Z}$ досяжні.

Розглянемо випадкове блукання $X_n^{(\mu)} = \xi_1^{(\mu)} + \cdots + \xi_n^{(\mu)}, n \geq 1$.

Мета: дослідити асимптотику ймовірності $p_\mu := P(X_n^{(\mu)} \neq 0, n \geq 1)$ неповернення в 0 для випадкового блукання $\{X_n^{(\mu)}, n \geq 1\}$ при $\mu \longrightarrow 0$.

Теорема 19. *Нехай характеристична функція випадкової величини $\xi_k^{(\mu)}$ задовольняє умови*

$$\varphi_{\xi^{(\mu)}}(\theta) = Ee^{i\theta\xi^{(\mu)}} = 1 + i\mu\theta - a|\theta|^\alpha + o_\mu(|\theta|^\alpha), \theta \longrightarrow 0,$$

де

$\alpha \in (1, 2],\ \mu > 0,$

$$\forall r \in (0, \pi] \quad \inf_{\mu} \inf_{r \leq |\theta| \leq \pi} Re(\varphi_{\xi^{(\mu)}}(\theta) - 1) > 0, \tag{7}$$

$$\lim_{\theta \longrightarrow 0} \lim_{\delta \to 0} \sup_{\mu \in (0,\delta]} \frac{o_\mu(|\theta|^\alpha)}{|\theta|^\alpha} = 0. \tag{8}$$

Тоді

$$p_\mu \sim \frac{2\mu(\alpha - 1)}{\alpha}, \mu \longrightarrow 0.$$

3.2. Доведення

Доведення теореми. Позначимо

$u_n = P\{X_n = i | X_0 = i\}$ - ймовірність повернутися в початкову точку на n-тому кроці,

$f_n = P\{X_1 \neq i, X_2 \neq i, \cdots, X_{n-1} \neq i, X_n = i | X_0 = i\}$ - ймовірність того, що ланцюг Маркова вперше повернувся в початковий стан при n-му випробуванні

Довизначимо $f_0 = 0,\ u_0 = 1$ і введемо генератриси $F(s) = \sum_{k=1}^{n} f_k s^k$, $U(s) = \sum_{k=0}^{n} u_k s^k$.

Відмітимо, що $F(1) = P\{\text{коли} - \text{небудь повернутись}\}$.

З теореми 7 відомо, що дані генератриси зв'язані співвідношенням

$$U(s) = \frac{1}{1 - F(s)}.$$

Тоді $P\{\text{неповернення}\} = 1 - F(1) = \frac{1}{U(1)}$.

Якщо $F(1) = 1$, то блукання зворотне; блукання незворотне, якщо $F(1) < 1$ та $U(1) < \infty$.

З теореми 5 випливає, що

$$U(1) = \frac{1}{2\pi} \lim_{t \to 1^-} \int_{-\pi}^{\pi} Re\left[\frac{1}{1 - t\varphi(\theta)}\right] d\theta < \infty.$$

Отже,

$$P\{\text{не повернутись}\} = \frac{1}{U(1)} = \frac{1}{\frac{1}{2\pi} \lim_{t \to 1^-} \int_{-\pi}^{\pi} Re\left[\frac{1}{1 - t\varphi(\theta)}\right] d\theta}$$

Тоді для знаходження ймовірності неповернення потрібно дослідити інтеграл

$$\int_{-\pi}^{\pi} Re\left[\frac{1}{1 - t\varphi(\theta)}\right] d\theta.$$

З припущення (7) та (1) при $g(\theta) \equiv 1$ випливає

$$\int_{-\pi}^{\pi} Re\left[\frac{1}{1 - t\varphi(\theta)}\right] d\theta \to \int_{-\pi}^{\pi} Re\left[\frac{1}{1 - \varphi(\theta)}\right] d\theta + \frac{\pi}{\mu}$$

при $t \to 1^-$.

Даний наслідок спрощує задачу про дослідження $\int_{-\pi}^{\pi} Re\left[\frac{1}{1-t\varphi(\theta)}\right]d\theta$. За умовою теореми

$$\varphi_{\xi^{(\mu)}}(\theta) = \mathbb{E}e^{i\theta\xi^{(\mu)}} = 1 + i\mu\theta - a|\theta|^\alpha + o_\mu(|\theta|^\alpha), \theta \longrightarrow 0,$$

де $\alpha \in (1,2], \mu > 0$

$$\lim_{\theta \longrightarrow 0} \lim_{\delta \to 0} \sup_{\mu \in (0,\delta]} \frac{o_\mu(|\theta|^\alpha)}{|\theta|^\alpha} = 0.$$

Для довільного малого $\delta > 0$ розіб'ємо наш інтеграл на два

$$\int_{-\pi}^{\pi} Re\left[\frac{1}{1-\varphi_{\xi^{(\mu)}}(\theta)}\right]d\theta = \int_{-\delta}^{\delta} Re\left[\frac{1}{1-\varphi_{\xi^{(\mu)}}(\theta)}\right]d\theta + \int_{[-\pi;\pi]\setminus[-\delta;\delta]} Re\left[\frac{1}{1-\varphi_{\xi^{(\mu)}}(\theta)}\right]d\theta.$$

Розглянемо спочатку

$$\int_{-\delta}^{\delta} Re\left[\frac{1}{1-\varphi_{\xi^{(\mu)}}(\theta)}\right]d\theta = \int_{-\delta}^{\delta} Re\left[\frac{1}{-i\mu\theta + a|\theta|^\alpha - o_\mu(|\theta|^\alpha)}\right]d\theta,$$

Нехай $\varepsilon > 0$. Оберемо $\delta > 0$ таке, що $|o(|\theta|^\alpha)| \le \varepsilon|\theta|^\alpha$ і ми можемо оцінити інтеграл зверху

$$\int_{-\delta}^{\delta} Re\left[\frac{1}{-i\mu\theta + a|\theta|^\alpha - o_\mu(|\theta|^\alpha)}\right]d\theta \le \int_{-\delta}^{\delta} \frac{a|\theta|^\alpha + \varepsilon|\theta|^\alpha}{(a-\varepsilon)^2|\theta|^{2\alpha} + \mu^2\theta^2(1-\varepsilon|\theta|^{\alpha-1})^2}d\theta \le$$

$$\le (a+\varepsilon)\int_{-\delta}^{\delta} \frac{|\theta|^\alpha}{(a-\varepsilon)^2|\theta|^{2\alpha} + \mu^2(1-\varepsilon)^2\theta^2}d\theta \le$$

$$\le (a+\varepsilon)\int_{-\delta}^{\delta} \frac{|\theta|^{\alpha-2}}{(a-\varepsilon)^2|\theta|^{2\alpha-2} + \mu^2(1-\varepsilon)^2}d\theta =$$

$$= (a+\varepsilon)\int_{-\delta}^{\delta} \frac{\frac{1}{\alpha-1}d(|\theta|^{\alpha-1})}{(a-\varepsilon)^2|\theta|^{2(\alpha-1)} + \mu^2(1-\varepsilon)^2} =$$

$$= \frac{(a+\varepsilon)}{(\alpha-1)(a-\varepsilon)^2}\int_{-\delta}^{\delta} \frac{d(|\theta|^{\alpha-1})}{|\theta|^{2(\alpha-1)} + \frac{\mu^2(1-\varepsilon)^2}{(a-\varepsilon)^2}} =$$

$$= \frac{(a+\varepsilon)}{(\alpha-1)(a-\varepsilon)^2}\frac{a-\varepsilon}{\mu(1-\varepsilon)} \arctan \frac{|\theta|^{\alpha-1}(a-\varepsilon)}{\mu(1-\varepsilon)}\Bigg|_{-\delta}^{\delta} =$$

$$= \frac{(a+\varepsilon)}{(\alpha-1)\mu(1-\varepsilon)(a-\varepsilon)} 2\arctan\frac{|\delta|^{\alpha-1}(a-\varepsilon)}{\mu(1-\varepsilon)} \sim \frac{(a+\varepsilon)}{(\alpha-1)\mu(1-\varepsilon)(a-\varepsilon)}\frac{2\pi}{2} =$$

$$= \frac{\pi(a+\varepsilon)}{(\alpha-1)\mu(1-\varepsilon)(a-\varepsilon)}, \text{ при } \mu \to 0.$$

І тоді $\forall\varepsilon > 0$:

$$\overline{\lim_{\mu\to 0+}}\left(\mu\int_{-\pi}^{\pi} Re\left[\frac{1}{1-\varphi_{\xi^{(\mu)}}(\theta)}\right]d\theta\right) =$$

$$= \overline{\lim_{\mu\to 0+}}\left(\mu\int_{-\delta}^{\delta} Re\left[\frac{1}{1-\varphi_{\xi^{(\mu)}}(\theta)}\right]d\theta + \mu\int_{[-\pi;\pi]\setminus[-\delta;\delta]} Re\left[\frac{1}{1-\varphi_{\xi^{(\mu)}}(\theta)}\right]d\theta\right) =$$

$$= \overline{\lim_{\mu\to 0+}}\left(\mu\int_{-\delta}^{\delta} Re\left[\frac{1}{1-\varphi_{\xi^{(\mu)}}(\theta)}\right]d\theta\right) + \overline{\lim_{\mu\to 0+}}\left(\mu\int_{[-\pi;\pi]\setminus[-\delta;\delta]} Re\left[\frac{1}{1-\varphi_{\xi^{(\mu)}}(\theta)}\right]d\theta\right) \le$$

$$\le \overline{\lim_{\mu\to 0+}}\left(\mu\int_{-\delta}^{\delta} Re\left[\frac{1}{1-\varphi_{\xi^{(\mu)}}(\theta)}\right]d\theta\right) \le \frac{\pi(a+\varepsilon)}{(\alpha-1)(a-\varepsilon)(1-\varepsilon)}, \tag{9}$$

бо

$$\overline{\lim_{\mu\to 0+}}\left(\mu\int_{[-\pi;\pi]\setminus[-\delta;\delta]} Re\left[\frac{1}{1-\varphi_{\xi^{(\mu)}}(\theta)}\right]d\theta\right) = 0,$$

за умовою (7).

Аналогічно одержимо оцінку знизу.

Спрямуємо в (9) $\varepsilon \to 0$, тоді

$$\overline{\lim_{\mu\to 0+}}\left(\mu\int_{-\pi}^{\pi} Re\left[\frac{1}{1-\varphi_{\xi^{(\mu)}}(\theta)}\right]d\theta\right) \le \frac{\pi}{(\alpha-1)}$$

Аналогічно

$$\underline{\lim}_{\mu\to 0+}\left(\mu\int_{-\pi}^{\pi} Re\left[\frac{1}{1-\varphi_{\xi^{(\mu)}}(\theta)}\right]d\theta\right) \ge \frac{\pi}{(\alpha-1)}$$

Звідси

$$\lim_{t\to 1^-}\int_{-\pi}^{\pi} Re\left[\frac{1}{1-t\varphi_{\xi^{(\mu)}}(\theta)}\right]d\theta \sim \frac{\pi}{(\alpha-1)\mu} + \frac{\pi}{\mu}, \text{ при } \mu \to 0.$$

Тоді

$$p_\mu \sim \frac{1}{\frac{1}{2\pi}\left(\frac{\pi}{(\alpha-1)\mu} + \frac{\pi}{\mu}\right)} = \frac{2\mu(\alpha-1)}{\alpha}, \text{ при } \mu \to 0.$$

Теорема доведена. $\square$

3.3. Приклади

Розглянемо найпростіший прриклад в якому можна знайти ймовірність неповернення в явному вигляді.

Приклад 1. Нехай

$$P\{\xi^{(\mu)} = 1\} = p = \frac{1}{2}(1 + \mu),$$

$$P\{\xi^{(\mu)} = -1\} = q = \frac{1}{2}(1 - \mu),$$

$\mathbb{E}\xi^{(\mu)} = \mu,\ \mu \to 0,\ \alpha = 2.$

Характеристична функція такого блукання має вигляд

$$\varphi_{\xi^{(\mu)}}(\theta) = \mathbb{E}e^{i\theta\xi^{(\mu)}} = pe^{i\theta} + qe^{-i\theta} =$$

$$= p + q + i\theta(p - q) + \frac{\theta^2}{2}(-p - q) + o(\theta^2) =$$

$$= 1 + i\mu\theta - \frac{\theta^2}{2} + o(\theta^2),$$

що задовольняє умову теореми 19.

Відомо, що генератриси (визначені в 3.2) для даного блукання будуть такими

$$F(s) = 1 - \sqrt{1 - 4pqs^2},\ U(s) = \frac{1}{1 - F(s)}.$$

Ймовірність

$$P\{\text{ не повернутись}\} = 1 - F(1) = 1 - 1 + \sqrt{1 - 4pq} =$$

$$= \sqrt{1 - 4p + 4p^2} = |1 - 2p| = |q - p| = |\frac{1}{2}(1 - \mu) - \frac{1}{2}(1 + \mu)| = \mu.$$

Приклад 2. В роботі Портенка [23] досліджувалась асимптотична поведінка ядра потенціалу одновимірного нерекурентного випадкового блукання. Якщо $D\xi_\mu = \sigma^2 < \infty,\ \mathbb{E}|\xi_\mu|^3 < \infty,\ \mathbb{E}\xi_\mu = \mu$ і всі стани досяжні, то $\alpha = 2$ і таке блукання повністю задовольняє умови нашої теореми 19. Для такого блукання було знайдено $U_\mu(1) \sim \frac{1}{\mu} + C$, де C явно виражається через σ^2 та третій момент. А це співпадає з результатом даного розділу.

Приклад 3. В підручнику [14] розглянуто симетричне випадкове блукання перехідні ймовірності якого задовольняють умову

$$|n|^{1+\alpha} p_n \to c_1,\ n \to \infty.$$

Тоді характеристична функція цього блукання має вигляд

$$\varphi(\theta) = 1 - a|\theta|^\alpha + o(|\theta|^\alpha),$$

де $a > 0,\ \alpha > 0$. Розглянемо випадкове блукання, для якого

$$p_n^\mu = p_n \text{ при } n \neq 1, n \neq -1,$$

$$p_1^\mu = p_1 + \frac{\mu}{2},\ \ p_{-1}^\mu = p_{-1} - \frac{\mu}{2}.$$

Для таких блукань виконуються умови теореми 19.

Дійсно,

$$\varphi_\mu(\theta) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} p_n e^{in\theta} + \frac{\mu}{2} e^{i\theta} - \frac{\mu}{2} e^{-i\theta} = \varphi(\theta) + i\mu\theta + o(|\theta|^2) =$$

$$= 1 + i\mu\theta - a|\theta|^\alpha + o_\mu(|\theta|^\alpha).$$

Приклад 4. Нехай ξ таке, що $\varphi_\xi(\theta) = 1 - a|\theta|^\alpha + o(|\theta|^\alpha), \theta \to 0$, η_μ та ξ незалежні, $P(\eta_\mu = 1) = \frac{1}{2}(1+\mu)$, $P\{\eta_\mu = -1\} = \frac{1}{2}(1-\mu)$.
Тоді

$$\varphi_{\xi+\eta_\mu}(\theta) = (1 - a|\theta|^\alpha + o(|\theta|^\alpha))(\frac{1}{2}(1+\mu)e^{i\theta} + \frac{1}{2}(1-\mu)e^{-i\theta}) =$$

$$= (1 - a|\theta|^\alpha + o(|\theta|^\alpha))(1 + i\mu\theta - \frac{\theta^2}{2} + o(\theta^2))$$

задовольняє умови теореми.

ВИСНОВКИ

В роботі досліджувалось цілочислене випадкове блукання з регулярно змінними хвостами, що має інтегровні збурення в скінченній множині точок.

Була доведена гранична теорема про слабку збіжність даного блукання до стійкого процесу. Даний результат є узагальненням роботи угорських математиків D.Paulin, D.Szász, A. Telcs про збіжність збурених випадкових блукань зі скінченним другим моментом до броунового руху.

Також була знайдена асимптотика ймовірності неповернення в початкову точку випадкового блукання в залежності від математичного сподівання.

Результати магістерської роботи доповідались на Шостій Всеукраїнській конференції молодих вчених з математики та фізики та Сьомій Всеукраїнській науковій конференції студентів, аспірантів та молодих вчених з математики.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

[1] Donsker M.D. An invariance principle for certain probability limit theorems. Mem. AMS, 6, 1-12,1951.

[2] Скороход А.В. О предельном переходе от последовательности сумм независимых случайных величин к однородному случайному процессу с независимыми приращениями, ДАН, 104, 364-367, 1955.

[3] Harrison J.M., Shepp L.A., On skew Brownian motion, Ann. Probab. 9(2) (1981), 309–313.

[4] Р.А. Минлос, Е.А. Жижина, Предельный диффузионный процесс для неоднородного случайного блуждания на одномерной решетке, УМН, 52:2(314) (1997), 87–100.

[5] Д. А. Яроцкий, Принцип инвариантности для неоднородного случайного блуждания на решетке $\mathbb{Z}^1$, Матем. заметки, 66:3 (1999), 459–472.

[6] Iksanov A., Pilipenko A. *A functional limit theorem for locally perturbed random walks.* Probability and Mathematical Statistics, Vol.36, No.2 (2016), pp 353-368.

[7] Пилипенко А.Ю., Приходько Ю.Є., Про граничну поведінку симетричних випадкових блукань з мембранами, Теор. Ймов. Мат. Стат., 85 (2011), 84-94.

[8] Pilipenko A., Khomenko V. On a limit behavior of a random walk with modifications upon each visit to zero, Theory Stoch. Process., 22(38):1 (2017), 71–80

[9] Szász D., and Telcs A., Random walk in an inhomogeneous medium with local impurities. *J. Stat. Physics.* 26, 527–537, 1981.

[10] Paulin D., Szász D. *Locally Perturbed Random Walks with Unbounded Jumps.* Journal of Statistical Physics, December 2010, Vol.141, Issue 6, pp 1116–1130.

[11] Дороговцев А.Я., Сильвестров Д.С., Скороход А.В., Ядренко М.И. «Теория вероятностей. Сборник задач», К. 1980.

[12] Кельберт М.Я., Сухов Ю.М. Вероятность и статистика в примерах и задачах. Том 2. Марковские цепи как отправная точка теории случайных процессов и их приложения. М.МЦНМО, 2009. – 588с.

[13] Ширяев А.Н. Вероятность. – М.: Наука, 1989.

[14] Spitzer F. Principles of Random Walks. New York: Van Nostrand, 1964. Рус. пер.: Спицер Ф. Принципы случайного блуждания. М.: Мир, 1969.

[15] Stone C. *On characteristic function and renewal theory* University of California, Los Angeles, California

[16] Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Том 1. (2-е изд.). М.: Мир, 1964.

[17] Гихман И. И., Скороход А. В., Ядренко М. И. Теория вероятностей и математическая статистика. Выща школа. – К.: –1988

[18] Сенета Ю. Правильно меняющиеся функции. М.: Наукаб 1985.

[19] Гнеденко Б.В. ,Колмогоров А.Н. Предельные распределения для сумм независимых случайных величин. — М.-Л., 1949, 264 стр.

[20] Belkin B. A Limit Theorem for Conditioned Recurrent Random Walk Attracted to a Stable Law. Ann. Math. Statist. 41 (1970), no. 1, 146–163.

[21] Gut A. *Probability: A graduate course.* Springer-Verlag, New York, 2005.

[22] Биллингсли П., Сходимость вероятностных мер, М.: Наука, 1977.

[23] Портенко М.І. *Про асимптотичну поведінку ядра потенціалу одновимірного нерекурентного випадкового блукання* Український математичний журнал Інституту математики т.26, 1974.

[24] Кусій В.В. Асимптотична поведінка випадкового блукання, Шоста всеукраїнська конференція молодих вчених з математики та фізики, 21–22 квітня 2017р., Тези доповідей, Київ, с.22.

[25] Кусій В.В. Гранична поведінка збурених випадкових блукань, Сьома всеукраїнська конференція молодих вчених з математики, 19-20 квітня 2018р.,Тези доповідей, Київ, с.18.