

**НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ  
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ  
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»  
Інститут прикладного системного аналізу  
Кафедра математичних методів системного аналізу**

«На правах рукопису»  
УДК 519.86

«До захисту допущено»  
Завідувач кафедри  
\_\_\_\_\_ О.Л. Тимощук  
«\_\_» \_\_\_\_\_ 20\_\_ р.

**Магістерська дисертація**

**на здобуття ступеня магістра**

**зі спеціальності 124 Системний аналіз**

**на тему: «Моделі гетероскедастичних процесів для оцінювання та прогнозування ринкового ризику»**

Виконав:

Студент(ка) II курсу, групи КА-62м  
Чуприна Олександра Євгенівна \_\_\_\_\_

Керівник:

д.т.н., проф.  
Бідюк П.І. \_\_\_\_\_

Рецензент:

д.т.н., проф.  
Теленик С.Ф. \_\_\_\_\_

Засвідчую, що у цій магістерській дисертації немає запозичень з праць інших авторів без відповідних посилань.  
Студент \_\_\_\_\_

Київ  
2018

## РЕФЕРАТ

Магістерська дисертація: 142 с., 7 рис., 28 табл., 2 додатка, 30 джерел.

Об'єкт дослідження – нестационарні фінансово-економічні процеси зі змінною у часі волатильністю.

Предмет дослідження – математичні моделі і методи опису гетероскедастичних процесів, оцінювання та аналізу якості побудованих моделей та прогнозів, моделі та методи оцінювання ринкових ризиків, а також методи перевірки якості оцінок ризику.

Методи дослідження – теорія моделювання і прогнозування, регресійний аналіз, статистичні методи.

Метою роботи є побудова адекватних моделей гетероскедастичних процесів для прогнозування волатильності та оцінювання ринкових ризиків за її допомогою.

В роботі проведено огляд основних підходів до оцінювання ринкових ризиків, розглянуто та проаналізовано метод оцінки Value-at-Risk та Expected Shortfall, застосовані інноваційні методи перевірки якості даних оцінок. Також проведений огляд моделей та їх особливостей для опису динаміки волатильності та її прогнозування. Було проаналізовано результати моделювання та оцінювання за-для обґрунтованого вибору найкращої моделі для оцінки ринкових ризиків.

Моделювання й прогнозування фінансово-економічних процесів на базі авторегресійних умовно гетероскедастичних моделей та для оцінювання ризикової вартості за їх допомогою реалізовано на мові програмування Python. Наведено приклади застосування програми на реальних фінансових даних. Розглянуто шляхи можливого подальшого вдосконалення системи.

**РИНКОВИЙ РИЗИК, ВОЛАТИЛЬНІСТЬ, ПРОГНОЗУВАННЯ, VALUE-AT-RISK, EXPECTED SHORTFALL, УМОВНА АВТОРЕГРЕСІЙНА ГЕТЕРОСКЕДАСТИЧНІСТЬ.**

## ABSTRACT

Master's thesis: 142 p., 7 fig., 28 tab., 2 applications, 30 sources.

Object of study - non-stationary financial-economic processes with time-varying volatility.

Subject of investigation - mathematical models and methods for describing heteroscedastic processes, evaluating and analyzing the quality of the models and forecasts, models and methods for estimation of market risk, and methods for backtesting of risk estimates.

Methods - Theory of modeling and forecasting, regression analysis, statistical methods.

The aim is to build adequate models of heteroskedastic processes for forecasting volatility and market risk estimation with their results.

In this paper, it is reviewed of the main approaches to market risk estimation, reviewed and analyzed the method for estimating Value-at—Risk and Expected Shortfall and applied innovative methods for verifying the quality of these estimates. Also reviewed models and their features to describe the dynamics of volatility and its forecasting. Results of modeling, forecasting and evaluation were analyzed for selecting the best model for market risks estimation.

Modeling and forecasting of financial and economic processes on the basis of autoregressive conditionally heteroscedastic models and estimating the risk with their help are implemented in the programming language Python. Examples of application on real financial data are given. The ways of possible further improvement of the system are considered.

MARKET RISK, VOLATILITY, FORECASTING, VALUE-AT-RISK, EXPECTED SHORTFALL, AUTOREGRESSIVE CONDITIONAL HETEROSKEDASTICITY.

## ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК ПРИЙНЯТИХ ПОЗНАЧЕНЬ ТА СКОРОЧЕНЬ .....	8
ВСТУП .....	10
РОЗДІЛ 1 ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ УПРАВЛІННЯ ТА ОЦІНЮВАННЯ РИНКОВИХ РИЗИКІВ .....	14
1.1 Виникнення ринкових ризиків.....	14
1.1.1 Загальна характеристика ризиків.....	15
1.1.2 Ринкові ризики та їх класифікація.....	18
1.2 Методи менеджменту ринковими ризиками .....	20
1.3 Поняття міри ризику .....	22
1.3.1 Підходи до вимірювання ризиків.....	23
1.3.2 Міри ризику на основі розподілу втрат.....	27
Висновки до розділу .....	31
РОЗДІЛ 2 ОПИС МОДЕЛЕЙ ДЛЯ ОЦІНЮВАННЯ РИНКОВИХ РИЗИКІВ	33
2.1 Моделі «Вартість під ризиком» та «Очікуваний дефіцит».....	33
2.1.1 Методи оцінювання.....	39
2.1.2 Оцінка якості моделей .....	43
2.1.3 Недоліки моделей.....	50
2.2 Моделі авторегресійної умовної гетероскедастичності.....	51
2.2.1 Методологія застосування для оцінювання ризику .....	51
2.2.1 Різновиди моделей та їх основні властивості .....	53
2.2.2 Перевірка наявності гетероскедастичності .....	66
Висновки до розділу .....	68
РОЗДІЛ 3 РЕЗУЛЬТАТИ ОБЧИСЛЮВАЛЬНИХ ЕКСПЕРИМЕНТІВ .....	70
3.1 Функціональна схема алгоритму.....	70
3.2 Вхідні дані.....	72
3.3 Результати прогнозування та оцінювання.....	74
Висновки до розділу .....	84
РОЗДІЛ 4 РОЗРОБЛЕННЯ СТАРТАП-ПРОЕКТУ .....	85
4.1 Інформаційна карта проекту .....	85

4.2 Команда стартап-проекту .....	86
4.3 Бізнес-модель Canvas .....	87
4.4 Аналіз ринкових можливостей запуску стартап-проекту .....	90
4.5 Розроблення ринкової стратегії проекту .....	101
4.6 Розроблення маркетингової програми стартап-проекту .....	107
Висновки до розділу .....	111
ВИСНОВКИ.....	112
ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ .....	114
ДОДАТОК А Лістинг програми .....	118
ДОДАТОК Б Ілюстративні матеріали для доповіді .....	132

## ПЕРЕЛІК ПРИЙНЯТИХ ПОЗНАЧЕНЬ ТА СКОРОЧЕНЬ

АКФ – автокореляційна функція;

АР – авторегресія;

АРКС – авторегресія з ковзним середнім;

АРУГ – авторегресійна умовна гетероскедастичність

ЕУАРУГ – експоненційна узагальнена авторегресійна умовна гетероскедастичність;

КС – ковзне середнє;

ММП – метод максимальної правдоподібності;

МНК – метод найменших квадратів;

ПП – програмний продукт;

АСПП – середня абсолютна похибка в процентах;

СКП – сума квадратів похибок;

СПП – середня похибка в процентах;

ЧАКФ – часткова автокореляційна функція;

AIC – Akaike info criterion (інформаційний критерій Акайке);

ARCH – Autoregressive Conditionally Heteroscedastic (авторегресійна умовна гетероскедастичність);

BSC – Bias-Schwarz criterion (критерій Байєса-Шварца);

EGARCH – Exponential generalized autoregressive conditional heteroscedastic (експоненційна узагальнена авторегресійна умовна гетероскедастичність);

ES – Expected Shortfall (очікуваний дефіцит)

GARCH – Generalised Autoregressive Conditionally Heteroscedastic (узагальнена авторегресійна умовна гетероскедастичність);

GJR – Glosten-Jagannathan-Runkle (Глостен-Джаганнатан-Ранкл);

MAPE – mean absolute percent error (середня абсолютна похибка в процентах);

MPE – mean percent error (середня похибка в процентах);

U – коефіцієнт нерівності Тейла;

VaR – Value at Risk (вартість під ризиком)

## ВСТУП

Зростання фінансових ринків по всьому світу привертає все більшу кількість учасників, що бажають отримати прибуток на цих високоліквідних площадках. Дане зростання сприяє розвитку математичних моделей, що адекватно описують фінансові дані. Традиційні лінійні моделі часових рядів часто не можуть адекватно врахувати всі характеристики, якими володіють фінансові дані і вимагають розширення. Безліч проведених досліджень виявили цілий ряд специфічних особливостей часових рядів прибутковості фінансових активів і їх волатильності – відсутність автокореляції, лептокуртозис (високі піки і товсті хвости розподілу), довгострокова пам'ять, кластеризації волатильності, умовну гетероскедастичності, ефект «важеля» та інші. Термін «волатильність» використовується, як правило, для неформального позначення ступеня варіабельності розкиду змінної. Формальною мірою волатильності служить дисперсія або середньоквадратичне відхилення, які також широко використовують для оцінювання ризиків. До теперішнього часу запропоновано досить багато моделей, які описують подібну поведінку часових рядів. Авторегресійна модель умовної гетероскедастичності (ARCH), запропонована в Engle (1982) і пізніше узагальнена (GARCH) в Bollerslev (1986), є найбільш широко вживаною. Розуміння точного характеру фінансово-економічних процесів вкрай важливо для багатьох проблем в макроекономіці і фінансах, таких як незворотні інвестиції, ціни на опціони, структура процентних ставок по термінами і загальні динамічні співвідношення для цін активів.

Діяльність кожної фінансової установи, незалежно від форми власності, пов'язана зі збільшенням власної ефективності, на що неодмінно впливає обґрунтованість на правильність прийнятих рішень. Для забезпечення цього, суб'єкту ринку необхідно вміти враховувати усі можливі фінансові ризики,



тобто оцінювати ступінь цих ризиків, межі, за які варто не виходити, правильно їх аналізувати та інтерпритувати. Найбільшою проблемою для фінансових установ може стати ризик, спричинений постійними випадковими змінами цін на ставки процентів, на курс валют та інших показників фінансового ринку. Даний ризик називають ринковим ризиком, що описує причину його виникнення. Для оцінювання ризику існує багато різноманітних технологій, наприклад: VaR (Value-at-risk), ES (Expected Shortfall), CaR (Capital-at-Risk), Maximum Loss та інші. Оцінки VaR та споріднена з нею ES здобули найбільшого використання. По-перше, дані методології прості у застосуванні та інтуїтивно зрозумілі, бо ґрунтуються на розрахунку можливих втрат; по-друге, стандарти міжнародних організації визнають їх та рекомендують до застосування для ведення ризик-менеджменту фінансових організацій.

Фінансовий ринок України наразі є нестабільним, тому реагувати на зміни ринкових показників вдається не швидко та не завжди вчасно. Це впливає на те, що багато моделей, що засновані на нормальному законі розподілу, не можуть бути застосовані для українського фінансового ринку так як дають значні похибки у результатах при прогнозуванні зміни цін фінансових показників. Саме це і є основною проблемою щодо практичної застосованості звичайних методів для оцінювання VaR та ES, тому потребує використання більш сильних гнучких та сучасних підходів, технологій та статистичних методів. У роботі пропонується застосування методологій VaR та ES на основі поширеного класу фінансово-економічних процесів зі змінною у часі дисперсією, які більш характерні для нестійкої перехідної економіки.

Об'єкт дослідження – нестационарні фінансово-економічні процеси зі змінною у часі волатильністю.

Предмет дослідження – моделі оцінювання ринкових ризиків та методи обрахунку даних оцінок, математичні моделі і методи опису процесів з

умовною гетероскедастичністю, методи оцінювання та аналізу якості прогнозування.

Методи дослідження – теорія моделювання і прогнозування, регресійний аналіз, статистичні методи.

Метою роботи є побудова адекватних моделей процесів з умовною гетоскедастичністю для оцінювання та прогнозування ринкових ризиків за їх допомоги. Також, порівняльний аналіз використання сучасних методів оцінювання ринкового ризику за методологією Value-at-Risk (VaR) та Expected Shortfall (ES) на даних показників фондових індексів, валідація отриманих результатів прогнозування оцінок ризику на основі гетероскедастичних моделей.

Актуальність теми даної роботи пов'язана з необхідністю прогнозування фінансово-економічних процесів для прийняття обґрунтованих рішень дуже часто пов'язана із дослідженням гетероскедастичних процесів. Спектр використання прогнозування дисперсії широкий, він включає як операції на біржі, так і менеджмент ринкових ризиків та інвестування. Саме тому проведена робота та проаналізовані результати є практичними та прикладними у сучасній фінансовій сфері.

У першому розділі розглянуто основні теоретичні та практичні аспекти ризик-менеджменту, особлива увага приділяється управлінню ринковими ризиками, вимогам до їх оцінки міжнародними наглядовими органами, а також різним методам до їх управління.

У другому розділі дано теоретичне підґрунтя та визначення показника оцінки ризику VaR та ES, коротко розглянуті методи оцінки ринкового ризику за методологією VaR, вимоги до визначення адекватності моделей оцінки ризиків міжнародними наглядовими органами. Також проведено огляд математичних моделей нестационарних гетероскедастичних процесів для оцінювання і прогнозування ринкових ризиків, шляхи перевірки даних на наявність гетероскедастичності.

Третій розділ присвячено практичній реалізації отриманих результатів. Було проведено детальний аналіз побудови адекватних моделей для опису фінансових інструментів із наявною гетероскедастичністю, оцінку ризику за цими моделями та порівняння результатів застосування цих моделей для оцінювання та прогнозування.

Четвертий розділ стосується розробки стартап-проекту на основі проаналізованих та отриманих результатів. У висновку сформульовано основні підсумки даної роботи та наведено пропозиції щодо подальшого розвитку.

## РОЗДІЛ 1 ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ УПРАВЛІННЯ ТА ОЦІНЮВАННЯ РИНКОВИХ РИЗИКІВ

### 1.1 Виникнення ринкових ризиків

Діяльність будь-якої людини, організації та підприємства так чи інакше пов'язана з ризиком. Саме слово «ризик», як стверджують історики, зародилось ще в давнину серед мореплавців та рибаків і означало «підводні скали», звідки й первинне значення дієслова «ризикувати» — об'їжджати скелю, лавірувати між ними. Не дивно, що й зараз кожен з нас інтуїтивно розуміє «ризик» як дещо таке, що необхідно уникати, як можливу небезпеку втрат, що витікає із специфіки тих або інших природних явищ і видів діяльності суспільства. Як бачимо, етимологія слова віддзеркалює його сучасне значення як економічного поняття, яке сформувалося по мірі розвитку цивілізації та товарно-грошових відносин.

Термін «ризик» у сучасній економічній теорії є досить багатозмістовним, оскільки конкретне визначення буде дещо одностороннім. В загальному розумінні – це негативний процес, невизначений та випадковий за характером та пов'язаний з реальними чи потенційними втратами, тобто подія, що може відбутися або не відбутися [1]. Ризик може бути *чистим* тобто таким, що несе за собою тільки негативний або нульовий результат, або *спекулятивним*, що крім вище зазначеного може також призвести до позитивного результату [2]. Загалом *ризик* в управлінні фінансами розглядається як негативне явище, що веде до невиправданих втрат або недоотримання певного прибутку.

Фінансова установа може брати на себе деякі ризики, якщо вони є виправданими, тобто зрозумілими з точки зору бізнес-процесів, такими, що можна виміряти та контролювати у відповідності до спроможності установи. Очевидно, що невиправдані ризики, спричинені ненавмисними діями,

необхідно зменшувати, там де можливо – взагалі усувати. Одними з таких заходів є зменшення сум втрат, що знаходяться під ризиком, збільшення капіталу, робота над покращенням стратегії контролю ризиків [3].

На виникнення ризику впливає багато факторів: недостатня інформованість про зовнішнє середовище та слабкий інструментарій для аналізу інформації, спорадичний характер появи несприятливих подій та перешкод у процесі діяльності; діяльність конкурентів, що націлена проти установи; порушення угод партнерами; політичні події та їх наслідки тощо.

Отже, виникає певна необхідність в класифікації та структуризації ризиків за-для подальшого успішного керування ними. Проте, один і той самий ризик можна класифікувати за різними ознаками, і зважаючи на велику кількість таких ризиків у фінансовій теорії, дотепер не створено єдиної вичерпної системи класифікації ризиків. Тим не менш, проаналізувавши відповідну літературу з ризик-менеджменту, а також загальноприйняті установи щодо організації системи управління ризику, можна визначити наступну класифікацію ризиків.

### 1.1.1 Загальна характеристика ризиків

Ризики у фінансах в залежності від джерела виникнення можуть бути внутрішні (ендогенні) та зовнішні (екзогенні).

Зовнішні ризики не залежать безпосередньо від діяльності організації та виникають за її межами. Події у політичній та економічній сферах є основними факторами які впливають на виникнення та рівень даного типу ризиків. Інші чинники (соціальні або географічні, наприклад) розглядаються вже як частина політичних та економічних.

До п'яти основних груп зовнішніх чинників, що впливають на виникнення екзогенних ризиків належать: умови країни (політична, економічна, правова несприятлива ситуація у країні); форс-мажорні обставини; зміни у зовнішньо-політичній відносинах; правові умови (наприклад, зміни у законодавстві); макроекономічні зміни (наприклад, кон'юктури ринку) та явище інфляції (зменшення первісної вартості активу), як складова макроекономічних чинників [4].

Внутрішні ризики, в свою чергу, виникають як наслідок діяльності конкретної організації і тому їх легше розпізнати, оцінити та передбачити. Залежність між ризиками та доходами зумовлює поділ внутрішніх ризиків на квантифіковані (або фінансові), які можна кількісно оцінити, оскільки наявна пряма залежність між рівнем ризику і доходами, та неквантифіковані (нефінансові). Квантифіковані ризики у рамках процесу ризик-менеджменту підлягають оптимізації, тоді як неквантифіковані - мінімізації. В цілому установи розробляють стратегії не на усунення, а на отримання деякого профіту (прибутку або винагороди) від обгрунтованого прийняття та правильного керування виправданими ризиками [4].

До квантифікованих ризиків відносять:

а) Кредитний ризик – реальний чи потенційний ризик, як наслідок неспроможності організації дотримати умови фінансової угоди (наприклад, виплат суми боргу та відсотків у визначені строки) [3]. Даний вид ризику виникає не тільки при прямому кредитуванні, а й при формуванні портфелю цінних паперів, здійсненні лізингових або гарантійних операцій тощо. Розрізняють портфельний та індивідуальний кредитний ризики [4].

б) Ризик ліквідності пов'язаний з неспроможністю організації вчасно виконати свої зобов'язання без надмірних та непередбачених втрат або втрат частини доходів у зв'язку з надмірною кількістю високоліквідних активів. [4] Даний вид ризику виникає часто через неправильну стратегію управління незапланованими відтоками коштів та надатність виконувати позабалансові

угоди. Ризик ліквідності часто дуже складно оцінити через значну кількість факторів, що на нього впливають.

в) Ринковий ризик – зв'язаний зі зменшення доходності (вартості активів) у зв'язку зі зміною ринкових цін на активи організації. Детально особливості і класифікацію ринкових ризиків розглянуто у наступному пункті цього розділу (див. пункт 1.1.2).

г) Операційно-технологічний ризик – може спричинити припинення існування установи через недоліки організації роботи установи, а саме управління, інформаційних технологій, внутрішнього контролю надійності та ефективності всієї системи. Як наслідок, виникають порушення повноважень (шахрайство), етичних норм, невчасне та нефективне виконання робіт. Сюди відносять ймовірність форс-мажорних подій (пожежа, технічні аварії, стихійні лиха).

До неквантифікованих ризиків відносять:

а) Ризик репутації – виникає, як наслідок того, що рівень репутації впливає на встановлення нових фінансових відносин із більшим числом контрагентів. Погіршення рівня репутації може призвести до погіршення відносин з партнерами, клієнтами, і як наслідок, фінансових втрат, особливо якщо кошти були залучені. Даний ризик має місце вздовж всієї вертикалі організації, тому вважається важливим [8].

б) Юридичний ризик виникає через недотримання або порушення установою вимог законів або особливостей нормативно-правових угод. Найчастіше він призводить до стягнення коштів, погіршення позицій фінансової організації на ринку та репутації, зменшує можливості розвитку установи [4, 8].

в) Стратегічний ризик виникає як наслідок неправильного формування фінансової стратегії, неправильне визначення цілей, неналежна розробка та підтримка генерального плану на етапі реалізації [8].

### 1.1.2 Ринкові ризики та їх класифікація

Ринкові ризики (market risks) є однією з основних груп ризиків, що виділяють на практиці, оскільки вони є невідмінною складовою діяльності будь-якої фінансової установи. В загальному сенсі під ринковими ризиками розуміють ймовірність такої зміни цін на фінансові інструменти фінансового ринку, яка в результаті призводить установу до втрати або недоотримання прибутку в порівнянні з запланованим. Виникнення ринкового ризику може бути спричинене змінами ставок відсотків, курсів тощо при операціях з активами та пасивами організації [4].

Серед специфічних характеристик ринкових ризиків можна виділити наступні [8]:

а) залежність в першу чергу від ринкової кон'юнктури — попит і пропозиція на конкретний фінансовий актив, загального стану ринку;

б) неоднорідність, виражена в одночасній залежності від фундаментальних факторів фінансового стану емітента (рентабельність, прибутковість тощо);

в) взаємозалежність його складових елементів та інтегрованість майже в усі види операцій та послуг фінансових установ.

Оскільки ринкове середовище є невіддільним від поняття ризику, основною задачею фінансових установ слід вважати не пошук заздалегідь безризикового ділового рішення, а пошук альтернативного, нестандартного розв'язку, що в першу чергу залежить від ефективності процесу управління та оцінки ризиків. Найбільш розповсюдженим підходом до цілісного аналізу ринкових ризиків є розкладання на складові більш прості елементи, конкретні групи за певними ознаками.



Згідно з рекомендаціями Базельського комітету, ринкові ризики поділяють на процентний, фондовий (ціновий) і валютний ризик, хоча виділяють також ціновий ризик товарних ринків (товарний ризик), та ризик ринку похідних фінансових інструментів [5].

Ризик зміни процентної ставки (або процентний ризик) Ризик зміни процентної ставки (процентний ризик), що виникає, як це може бути зрозуміло з назви, внаслідок негативних змін процентних ставок, в свою чергу поділяють на типи [4]:

- ризик зміни вартості ресурсів;
- ризик зміни кривої дохідності;
- базисний ризик;
- ризик права вибору (опціону).

На валютний ризик впливають коливання курсу іноземних валют та цін на дорогоцінні метали. Валютний ризик можна також класифікувати на [4]:

- ризик трансакції;
- ризик перерахування з однієї валюти в іншу;
- економічний валютний ризик (ризик зміни конкурентоспроможності фінансової установи).

В сучасній українській літературі фондовим ризикам приділяють незначну увагу, що найімовірніше пов'язано з тим, що ринок фондових інструментів майже не розвинутий. В зарубіжній літературі цьому питанню присвячена значна кількість видань, проте усі вони в основному будуються на теорії портфеля або описують методи технічного аналізу.

## 1.2 Методи менеджменту ринковими ризиками

Кожна фінансова організація розробляє власну систему та стратегію управління ризиками в залежності від власної структури та умов ринку, оскільки єдиного правильного рішення для процесу ризик-менеджменту не існує. Однак, можна виділити множину спільних рис серед усіх ефективних підходів до управління ризиками. Наприклад, всі вони абстрагуються від діяльності, пов'язаної з прийняттям ризиків. Загалом, кожна система ризик-менеджменту у процесі дослідження ринкового ризику включає наступні етапи [3, 6]:

- а) ідентифікація — виявлення наявного та потенційного ризику;
- б) вимірювання ризику є важливою складовою при управлінні ризиками;
- в) контроль ризику — певні стандарти і положення організації як інструменти регулювання процесу ризик-менеджменту;
- г) моніторинг ризику — регулярне та своєчасне відстеження рівня ризику.

Для контролю та оцінки ризиків повинен бути створений окремий підрозділ з ризик-менеджменту, цілі та програма якого впливають з назви [3].

Основна небезпека ринкового ризику полягає в тому, що він призводить до нестійкості грошових потоків у часі, а все це, в кінцевому рахунку, серйозно впливає на фінансові показники організації і, перш за все, на її фінансову стійкість. Для захисту від несприятливого впливу різних чинників ризику існують спеціальні механізми управління ризиками, використання яких дозволяє підвищити стійкість організації по відношенню до діючих факторів [7].

В залежності від специфіки галузі виділяють наступні шляхи зменшення ризиків як мінімізація і запобігання (відмова від пов'язаної з ризиком операції),

резервування (самострахування), хеджування, страхування, розподіл та диверсифікація [8].

*Резервування* відбувається шляхом формування власного капіталу для того, щоб компенсувати потенційні втрати. Досягається перенесенням ризику на клієнта при включенні в ціну послуги, наприклад, кредиту.

Метою *страхування* є переважно відшкодування матеріального збитку, а не зниження ризику як такого, як, до речі, і при резеруванні.

*Хеджування* означає певний спосіб уникнення втрат за допомогою деякої угоди (при якій ризик зміни цін переноситься з однієї особи на іншу) та вимагає додаткових витрат (опціонна премія, внесення маржі тощо). Стабілізація сумарного грошового потоку шляхом зменшення амплітуди коливань грошових потоків окремих угод є суттю процесу хеджування.

Включення ризику в вартість послуг та продукції, надання гарантій, системи взаємних штрафних санкцій, застави майна – все це способи зменшення ризику шляхом його *розподілу* між сторонами угоди.

Напевно, найпопулярнішим способом зниження ринкових ризиків є *диверсифікація*. Диверсифікація має на меті зниження максимально можливих втрат за одну подію, приймаючи до уваги, що кількість видів ризику, які необхідно тримати під контролем, зростає. В широкому розумінні диверсифікація – це розміщення фінансових коштів серед більше ніж одного видів активів, доходності яких слабо пов'язані між собою.

Мета *мінімізація* полягає у справному балансуванні активів та зобов'язань по угодам для максимального зменшення коливань чистої вартості портфеля. Застосовується для керування ринковими, особливо валютними і процентними ризиками. [8].

### 1.3 Поняття міри ризику

Фінансовим організаціям за-для успішного ведення діяльності та прийняття обґрунтованих рішень необхідно проводити систематичний аналіз ризиків, на які вона може наражатися, тобто правильно виявляти їх та оцінювати величини цих ризиків, що неможливо без розміння внутрішньої природи виникнення ризику. Даний аналіз має включати також визначення взаємозв'язку та взаємовпливу усіх проявів та типів ризику, а також проводитись на загальному рівні для усієї установи та для її окремих частин або підрозділів. При оцінюванні ринкового ризику, необхідно звертати увагу на наступні фактори та критерії, що неодмінно будуть корисними при подальшому прийнятті рішень (про це також шлось раніше у п.1.3):

- наявність ефективної внутрішньої бази положень та нормативів щодо процесу ризик-менеджменту установи;
- врахування усіх джерел виникнення ринкового ризику (тобто динаміку цін різних фінансових інструментів);
- врахування складових ринкового ризику та їх чутливості;
- врахування динаміки капіталу та надходжень, що знаходяться під ризиком;
- належні механізми моніторингу своєчасності, інформативності та точності інформації.

Варто зауважити, що даний перелік є неповним та може доповнюватись управлінням фінансової організації в залежності від її цілей та напрямків діяльності [4].

Поняття економічної вартості капіталу та підтримка його на рівні необхідному для відшкодування ризику є основою для побудови методики *кількісного оцінювання* ринкового ризику, що в свою чергу є невідмінною

складовою та базою для аналізу та моделювання процесів пов'язаних з прогнозуванням ризику.

На змістовному рівні це зводиться не тільки і не стільки до технічної складності самих оцінок, але, в першу чергу, до визначення показника — *міри ризику*. При цьому питання щодо показника, який характеризує величину ризику, тісно пов'язаний з цілями аналізу, оскільки виходячи з вибору основного цільового показника формується загальна система показників управлінської інформації, в т.ч. і в частині ризиків.

На практиці вимірювання ризику використовується для різних цілей. Серед найважливіших є наступні:

- Визначення *ризикового капіталу* та його адекватності. Як зазначалося вище, однією з основних функцій управління ризиками у фінансовому секторі є визначення розміру капіталу, який фінансова установа повинна утримувати як буфер за-для запобігання можливих втрат в майбутньому.
- *Інструмент керування*. Заходи ризику часто використовуються як інструмент обмеження суми ризику, яке підприємство може втратити. Наприклад, трейдери в банку часто обмежуються правилом, згідно з яким щоденний 95% Value-at-Risk своєї позиції не повинен перевищувати певну межу.
- *Страхові премії*. Страхові премії компенсують для страхової компанії ризик страхових позовів. Розмір цієї компенсації можна розглядати як показник ризику цих позовів [10, с.34].

### 1.3.1 Підходи до вимірювання ризиків

Відносно ринкових ризиків досить тривалий час питання міри ризику було проблемним: в умовах відсутності єдиного показника, характеристики

якого відповідають наведеним вимогам, ризик характеризувався набором різномірних величин, які застосовувались в залежності від цілей аналізу, ринкових умов, набору доступної інформації тощо.

Існуючі підходи до вимірювання ризику фінансового інструменту можна об'єднати у чотири різні категорії: підхід на основі номінальної вартості; міра чутливості факторів; міра ризику на основі розподілу втрат; міра ризику на основі сценаріїв.

*Підход номінальної вартості.* Це найстаріший підхід до кількісної оцінки ризику портфелю ризикових активів. У даному підході ризик портфелю визначається як сума номінальних цін окремих цінних паперів у портфелі, де кожна номінальна ставка може бути зважена коефіцієнтом, що представляє оцінку ризикованості широкого класу активів. Перевагою цього методу очевидно є його простота. Варіанти цього підходу все ще використовуються в стандартизованому підході правил банківського регулювання Базельського комітету.

*Міра чутливості факторів.* Вимірювання чутливості факторів дають зміну вартості портфелю для заданої заздалегідь визначеної зміни одного з основних чинників ризику; зазвичай вони визначаються як похідна (в сенсі числення). Хоча дана оцінка дає корисну інформацію про надійність вартості портфеля щодо певних чітко визначених подій, вона не може виміряти загальну ризикованість позиції. Крім того, міри чутливості до різних факторів створюють проблеми при агрегації ризиків.

*Міри ризику на основі розподілу втрат.* Найбільш сучасними мірами ризику в портфелі є статистичні величини, що описують умовне або безумовне розподіл збитків портфеля за певним заздалегідь визначеним горизонтом часу. Приклади включають дисперсію, значення під ризиком (value-at-risk) та expected shortfall, про які докладніше буде йти далі. Звичайно, проблематично покладатися на одну конкретну статистику, щоб підсумувати ризик усього

розподілу. Проте думка про те, що розподіл втрат в цілому дає точне уявлення про ризик портфелю, має багато підстав.

*Міри на основі сценаріїв.* В основі сценарій-підходу до оцінки ризику портфеля розглядаються можливі зміни у майбутніх факторах ризику (сценарії): такі як збільшення основних валютних курсів на 10% або одночасне зменшення основних індексів фондового ринку на 20% або одночасне зростання основних процентних ставок по всьому світу. Ризик портфеля вимірюється як максимальна втрата портфеля за всіма сценаріями, де певні екстремальні сценарії можуть бути зменшені, щоб послабити їх вплив на результат. Підход, що ґрунтується на сценаріях, є дуже корисним інструментом управління ризиками для портфелів, які піддаються відносно невеликому набору факторів ризику. Крім того, вони надають корисну додаткову інформацію для мір, що базуються на статистиках розподілу втрат. Головною проблемою, звичайно, є визначення відповідного набору сценаріїв та вагових факторів. Більш того, порівняння портфелів, на які впливають різні фактори ризику, є досить складною задачею [10, с.34-37].

У загальному випадку, виходячи з визначення ризику як поєднання вартісних і ймовірнісних характеристик можливих відхилень реального стану від очікуваного, технічно ризик найкращим чином може бути охарактеризован множиною імовірних сценаріїв з відповідною функцією розподілу. Таким чином *ймовірності* небажаних подій, похідні показники від них та параметри розподілів, є основною базою серед мір ризиків. Прикладом є вірогідність банкрутства (дефолту), що показує міру впевненості в тому, що майна та капіталу організації може бути недостатньо для задоволення потреб позикодавців. З практичної точки зору даний підхід може слугувати проміжним теоретичним підґрунтям для визначення *міри ризику*, яка повинна забезпечувати [8]:

- можливість представлення даних у наочному, чіткому, компактному вигляді;

- здатність відслідковувати динаміку процесу;
- можливість порівнювати оцінки різних видів ризику та для різних показників, обраховувати агреговані оцінки.

Основним елементом функціонування фінансових ризиків є співвідношення ризику і доходності. Мистецтво фінансової діяльності власне являє собою вміння знаходити оптимальні поєднання цих елементів.

При вимірі ринкових ризиків в якості випадкової змінної приймають *доходність* фінансового активу. Арифметична або дискретна доходність визначається як приріст вартості активу за формулою:

$$r_i = \frac{P_i - P_{i-1}}{P_{i-1}} \quad (1.1)$$

де  $r_i$  — доходність активу на поточний ( $i$ -тий) момент часу;

$P_i, P_{i-1}$  — вартість активу відповідно на поточний ( $i$ -ий) та попередній ( $i-1$ -ий) моменти часу.

Для довгострокових періодів зазвичай застосовують геометричну доходність, яка визначається як натуральний логарифм співвідношення вартостей (цін) активу за формулою:

$$r_i = \ln \frac{P_i}{P_{i-1}} \quad (1.2)$$

Кожен з підходів має свої переваги. По-перше, геометрична доходність може бути економічно більш змістовною, ніж арифметична. По-друге, геометрична доходність дуже легко приймається для множини періодів, тому що може бути представлена, як сума кількох доходностей. На практиці дуже часто різниця між арифметичною і геометричною доходністю мала [8].



Найважливішими аспектами, що характеризують ринкові ризики є: *волатильність* (мінливість) показників та *чутливість* факторів ризику. Відповідно до цього й існує два основні підходи до оцінки ризику: показники чутливості і ймовірнісні (статистичні) величини. Однак варто розуміти, що вони не є зваємовиключними, скоріше навпаки, взаємопов'язні та доповнюють один одного: показники чутливості, наприклад можна інтерпритувати з ймовірнісної точки зору, а ймовірнісні оцінки можуть містити відомості про чутливість [11]. Різниця між цими показниками є скоріш умовною та суб'єктивною, що, до речі, характерно для оцінювання ринкових ризиків. Детальніше з різними мірами ризику на основі чутливості, такими як, наприклад, дюрація, показник бета, що використовується у моделі оцінки доходності активів — CAPM (Capital Asset Pricing Model), показник дельта для ринку похідних інструментів та різні непрямі показники, можна ознайомитися у роботах [2, 8, 11].

### 1.3.2 Міри ризику на основі розподілу втрат

*Standard deviation (Variance)*. Найбільш поширеною у фінансуванні оцінкою ризику виступає показник "сигма" як статистична характеристика волатильності ринку, що розраховується як стандартне відхилення від середнього по вибірці значення (або квадратний корінь з дисперсії вибірки). Широке використання цієї міри значним чином пов'язане з величезним впливом теорії портфеля Марковіца, який використовує дисперсію як міру ризику. Зрозуміло, що стандартне відхилення є зрозумілим і простим у використанні для аналітичних цілей.

Більш того, найбільшого поширення в ринковій практиці в якості міри ризику отримало стандартне відхилення, розраховане не за ціною, а за

доходністю інструменту. У конкретний момент часу по конкретному інструменту ціна і доходність в інформаційному сенсі рівнозначні, оскільки між цими величинами існує взаємно-однозначна відповідність. Разом з тим, показник доходності є більш адекватною для зіставлення по різних інструментах характеристикою ринкової кон'юнктури.

Розглянемо деякий портфель ризикових активів і зафіксуємо часовий горизонт  $\Delta t$ . Покладемо  $F_L(l) = P(L \leq l)$  як функцію відповідну розподілу втрат, припускаючи, що він був заданий на початку аналізу. Тобто  $F_L$  являє собою розподіл доходності. Задача оцінювання полягає в тому, щоб визначити статистику на основі  $F_L$ , яка вимірює серйозність ризику нашого портфеля протягом певного періоду часу  $\Delta t$ .

На практиці розподіл доходності зазвичай оцінюється за ретроспективою, допускаючи, що спостереження незалежні і однаково розподілені. Очікувана дохідність може бути оцінена простим середнім, а ризик, варіація – оцінкою дисперсії. Квадратний корінь із оцінки дисперсії дохідності – стандартне відхилення називають *волатильністю* (мінливістю):

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (r_i - \bar{r})^2} \quad (1.3)$$

де  $N$  – кількість спостережень,

$\bar{r}$  – середнє значення, очікувана доходність.

Волатильність вимірює величину розсіювання значень доходності навколо очікуваного рівня. При тому факті, що в практиці фінансових ринків досить часто зустрічається ототожнення понять стандартного відхилення і волатильності, стандартне відхилення не є всеохоплюючою характеристикою волатильності. Волатильність (або мінливість) ринкового показника проявляється в динаміці значень даного показника (наприклад, у русі

котирувань), і з цього погляду може бути описана статистичним розподілом даної величини, або, у скороченому варіанті, її дисперсією й стандартним відхиленням. Тобто, можна зробити висновок про те, що *волатильність* — це характеристика, що визначає мінливість фінансових результатів від використання певного інструмента. Одним з її прикладів, але не єдиним, є стандартне відхилення.

Однак одним з основних недоліків використання даної міри є той факт, що воно не відрізняє позитивні та негативні відхилення від середнього. Тому стандартне відхилення є гарним показником ризику лише для розподілів (приблизно) симетричних навколо середнього, таких як нормальний розподіл, що не завжди зустрічається на практиці [10, с.44].

*Value-at-Risk*. Протягом останніх десятиліть активно розроблявся новий підхід до оцінки ризику: в якості міри ризику була прийнята величина втрат по певній даній позиції, що оцінюється з певними (стандартними) припущеннями — VaR (Value-at-Risk) оцінка ризику — мабуть, найпоширеніший показник ризику в фінансових установах, є також прийнятим в рамках Базель II, а отже заслуговує на більш детальний розгляд.

При тому, що підсумкова величина ризику, по суті, формується двома джерелами — рівнем схильності до ризику (тобто розподілом ймовірності можливих результатів) базового інструменту і величиною позиції — оцінка ризику в формі можливих втрат по позиції зводить їх в єдиний показник.

Даний показник є досить вдалим поєднанням перерахованих в якості вимог до міри ризику можливостей:

- компактне представлення у вигляді числа робить його зручним для подання в рамках фінансової звітності, як безпосередньо, так і в поєднанні з іншими показниками, що характеризують діяльність організації, а також з використанням форм візуалізації інформації;
- економічний сенс показника можливих втрат інтуїтивно очевидний як в безпосередньому вигляді, так і в зіставленні з іншими фінансовими

- показниками, в тому числі величиною прибутку, власних коштів, резервів на можливі втрати, об'ємом операцій тощо;
- загальноприйнятий механізм встановлення відповідності між можливою величиною втрат і капіталом, необхідним для покриття ризику, дозволяє використовувати дану міру ризику не тільки в якості інформаційної бази для прийняття рішень, але і в якості прямого інструменту регулювання обсягів здійснюваних або можливих операцій відповідно до наявної в розпорядженні величини власних коштів;
  - використання вартісного показника втрат дозволяє коректно зіставляти, складати оцінки ризиків по різних об'єктах, в тому числі з різною природою ризику. Крім того, можливість оцінки ризику по різних угрупованням інструментів дає додатково кількісну оцінку ефекту диверсифікації.

У цьому контексті оцінка VaR є не стільки альтернативою окремим мірам ризику, скільки їх комплексним заміщенням. Детальніше цей метод буде розглянуто в наступному розділі (див. п. 2.1).

*Lower and upper partial moments.* Часткові моменти - це показники ризику на основі нижньої або верхньої частини розподілу. У більшості літератури з управління ризиками основна проблема полягає у ризику, притаманному нижньому хвосту розподілу доходності, для вимірювання якого і використовуються нижні часткові моменти. Детальніше це розглянуто у [10].

*Expected shortfall.* Дана міра тісно пов'язана с VaR, на сьогоднішній день їй навіть віддають більшу перевагу у ризик-менеджменті; в багатьох джерелах вона має також назву conditional value at risk (CVaR), average value at risk (AVaR), або expected tail loss (ETL). Даний метод також буде детальніше розглянутий в наступному розділі (див. п. 2.1) [10].

Однак, крім розглянутих вище, у фінансовому світі існує ще безліч технологій оцінки ризиків. Серед них можна виділити: Capital-at-Risk (капітал під ризиком), Maximum Loss (показник максимальних втрат), Stress Testing

(стрес-тестування) і ряд інших класичних методів. Деякі з них тільки починають завойовувати популярність в банках, інвестиційних і страхових компаніях, пенсійних фондах. Тенденція розвитку наукової думки та практичних напрацювань (за найкращими зразками світової практики) на сучасному етапі така, що методи оцінювання ризиків безперервно удосконалюються, переглядаються і доповнюються.

### Висновки до розділу

Розвиток інформаційних технологій, підготовка відповідних спеціалістів і вплив західних інвесторів змушують приділяти ризик-менеджменту будь-якої фінансової установи значну увагу.

Якщо узагальнити, основними причинами виникнення ризиків є наступні фактори: недостатня інформованість про зовнішнє середовище та обмежений інструментарій для аналізу вхідної інформації, спорадичний характер появи несприятливих подій та перешкод у процесі діяльності установи; протидія конкурентів; порушення між партнерами певних зобов'язань; політичні події та їх наслідки та інші економічні фактори.

Менеджмент ринкових ризиків є найбільш проблемним і вартим уваги. Ринковий ризик виникає при проведенні операцій як з активами, так і з пасивами у зв'язку зі змінами відсоткових ставок, обмінних курсів та інших цін на різноманітні інструменти.

Для оцінки ризику існує багато різних підходів, однак методології VaR та ES використовуються нині найбільше. По-перше, дані підходи до оцінювання прості у застосуванні та інтуїтивно зрозумілі, бо ґрунтуються на розрахунку можливих втрат; по-друге, є прийнятими стандартами

міжнародних організації щодо ведення процедури ризик-менеджменту у фінансових установах.

Фінансовий ринок України знаходиться на перехідному етапі і є нестабільним, що ускладнює процес вчасного реагування на зміни ринкових показників. Як наслідок, більшість моделей засновані на нормальному законі розподілу не можуть бути застосовані для українського фінансового ринку так як дають значні похибки у результатах при прогнозуванні зміни цін фінансових показників. Саме це спричинює основну потребу до використання більш сильних гнучких та сучасних підходів, технологій та статистичних методів., а саме застосування методологій VaR та ES на основі поширеного класу фінансово-економічних процесів зі умовною гетероскедастичністю, які більш характерні для нестійкої перехідної економіки.

Постановка задачі:

1. Виконати огляд сучасних математичних моделей для моделювання і прогнозування нестационарних гетероскедастичних фінансово-економічних процесів, методів оцінювання ринкових ризиків.
2. Зібрати необхідні статистичні дані для виконання обчислювальних експериментів.
3. Створити програмний продукт для виконання обчислювальних експериментів, а саме моделювання і прогнозування процесів зі змінною дисперсією, оцінки ризику.
4. Провести практичне застосування моделей для оцінки ризиків.
5. Виконати аналіз отриманих результатів і зробити висновки.

## РОЗДІЛ 2 ОПИС МОДЕЛЕЙ ДЛЯ ОЦІНЮВАННЯ РИНКОВИХ РИЗИКІВ

### 2.1 Моделі «Вартість під ризиком» та «Очікуваний дефіцит»

Необхідність великих фінансових установ для оцінки їх схильності до ризику почалася ще в 1970-і роки після збільшення фінансової нестабільності. З середини 90-х рр. ХХ ст. для кількісного виміру ринкового ризику особливо широко стала застосовуватися методика відома як *Value at Risk* (VaR). Дана методика дозволила уніфікувати підходи до кількісної оцінки ринкового ризику. Назву цього критерію можна перекласти як "сума під ризиком", "вартість на ризик" і т.п. Спочатку він використовувався в основному при оцінці фінансових ризиків, але поступово сфера застосування розширилася, і зараз його можна зустріти практично в будь-яких галузях економіки. Під терміном VaR розуміють як методику, так і кількісну оцінку ринкового ризику у вигляді єдиного параметра. Це виражена в грошових одиницях ймовірнісна оцінка величини, яку не перевищать очікувані протягом даного періоду часу (часового горизонту) втрати з заданою вірогідністю (рівнем довіри) [8, 9]. Основою для оцінки VaR є динаміка курсів і цін інструментів за встановлений період часу в минулому.

Як зазначалося раніше, ми розглядаємо доходність деякого портфелю ризикових активів для фіксованого часового інтервалу  $\Delta t$ . Покладемо  $F_L(l) = P(L \leq l)$  як функцію відповідну розподілу дохожності. Задача оцінювання полягає в тому, щоб визначити статистику на основі  $F_L$ , яка вимірює серйозність ризику нашого портфеля протягом певного періоду часу  $\Delta t$  [10]. Очевидним кандидатом для такої статистики є значення максимально можливих втрат, що визначається як  $\inf\{l \in \mathbb{R}: F_L(l) = 1\}$ , міра ризику важлива для перестраховування. Однак у більшості моделей функція розподілу для дохожності  $F_L$  є необмеженою, тому максимальною втратою буде просто

нескінченність. Більше того, використовуючи максимальні втрати в якості міри ризику, ми не беремо до уваги будь-яку ймовірнісну інформацію про  $F_L$ . *Value-at-Risk* в даному випадку виступає прямим розширенням міри максимальних втрат, що враховує недоліки попередньої. Ідея полягає в тому, щоб замінити "максимальну втрату" на "максимальну втрату, яка не буде перевищена з заданою ймовірністю", так званим рівнем довіри  $\alpha \in (0,1)$ . Таким чином  $VaR$  даного портфелю ризикових активів з рівнем довіри  $\alpha$  визначається як найменше число  $l$  таке, що ймовірність того, що втрати  $L$  перевищать  $l$ , буде не більша за  $(1 - \alpha)$ . Формально, це [10]:

$$VaR_\alpha = \inf\{l \in \mathbb{R}: P(L \leq l) \leq 1 - \alpha\} = \inf\{l \in \mathbb{R}: F_L(l) \geq \alpha\} \quad (2.1)$$

У ймовірнісному сенсі,  $VaR$  – це просто клантиль розподілу втрат. Зазвичай значення  $\alpha$  беруть  $\alpha = 0.95$  або  $\alpha = 0.99$ . Для вимірювання ринкових ризиків (а також і операційних) часовий інтервал  $\Delta t$  зазвичай беруть в 1 день або 10 днів. Однак, як видно з визначення,  $VaR$  для рівня довіри  $\alpha$  не містить ніякої додаткової інформації про серйозність та масштаб втрат, що з'являться з ймовірністю мешною за  $(1 - \alpha)$ . Очевидно, що саме це і є головним недоліком  $VaR$  як міри ризику [10].

Покладемо, що розподіл доходності  $F_L$  є нормальним розподілом з середнім  $\mu$  та дисперсією  $\sigma^2$ , та зафіксуємо рівень довіри  $\alpha \in (0,1)$ . Тоді:

$$VaR_\alpha = \mu + \sigma\Phi^{-1}(\alpha), \quad (2.2)$$

де  $\Phi$  — функція стандартного нормального розподілу, і  $\Phi^{-1}(\alpha)$  є  $\alpha$ -квантилем  $\Phi$  [10].

Тоді, справедлива також рівність:



$$P(L \leq VaR_\alpha) = P\left(\frac{L-\mu}{\sigma} \leq \Phi^{-1}(\alpha)\right) = \Phi(\Phi^{-1}(\alpha)) = \alpha \quad (2.3)$$

Даний результат використовується при варіантно-коваріаційному підході (також відомий як дельта-нормальний підхід) до обчислення міри ризику, як буде описаний у п.2.1.1 нижче. Формально формула ця тлумачиться як: очікувана кількість ризику  $VaR$  перевищить реальну кількість ризику  $L$  за часовий горизонт  $t$  з імовірністю  $\alpha$  ( $\alpha=0,99;0,95$  і т.п.).

Звичано, схожий результат отримаємо, якщо замість нормального розподілу застосувати розподіл t-Стюдента. Тепер покладемо, що наша випадкова величина доходності  $L$  така, що  $\frac{L-\mu}{\sigma}$  є розподілом Стюдента-t з  $\nu$  ступенями вільності. Тоді дана модель доходності як  $L \sim t(\nu, \mu, \sigma^2)$  з центральними моментами  $E(L) = \mu$  та  $var(L) = \nu\sigma^2/(\nu - 2)$ , де  $\nu > 2$ , тоді отримуємо:

$$VaR_\alpha = \mu + \sigma t_\nu^{-1}(\alpha), \quad (2.4)$$

де  $t_\alpha$  - функція розподілу стандартного розподілу t-Стюдента [10].

Як видно з означення (2.1), показник VaR характеризується наступними параметрами [8]:

а) Очікувана кількість ризику, яка може розраховуватися як абсолютна величина або у процентному вимірі до значення показника на певну дату.

б) Часовий горизонт, що вибирається на основі мінімального терміну, протягом якого можна реалізувати на ринку даний актив без суттєвого збитку. Часовий горизонт вимірюється числом робочих або торгових днів. На практиці залежно від специфіки використання VaR такими горизонтами найчастіше може бути день, тиждень, декада, місяць.

в) Глибина періоду рестроспективних або змодельованих штучно даних для розрахунку VaR.

г) Рівень довіри (імовірність), з якою максимальні втрати не перевищать розрахованої вартості під ризиком, визначається в залежності від корпоративної практики або регламенту фінансової установи. Наприклад, установкою Базельського комітету з банківського нагляду встановлюється рівень довіри – 99%, однак, на практиці, найбільш застосований рівень довіри – 95%.

*Expected shortfall* (очікуваний дефіцит). Для втрат  $L$  з сеченими втратами  $E(|L|) < \infty$  та функцією розподілу  $F_L$  очікуваний дефіцит (*expected shortfall*) для рівня довіри  $\alpha \in (0,1)$  визначається як [10]:

$$ES_\alpha = \frac{1}{1-\alpha} \int_\alpha^1 q_u(F_L) du = \frac{1}{1-\alpha} \int_\alpha^1 VaR_u(L) du, \quad (2.5)$$

де  $q_u(F_L)$  – квантиль функція від  $F_L$  з  $u \in (0,1)$ , що в загальному випадку визначається як:

$$q_u(F) = \inf\{x \in \mathbb{R}: F(x) \geq u\}$$

Замість того, щоб зафіксувати якесь конкретне число рівня довіри  $\alpha$ , ми усереднюємо VaR для усіх рівнів  $u \geq \alpha$ , що дає змогу «більш глибоко роздивитись» вплив хвосту розподілу втрат. Очевидно, що  $ES_\alpha$  залежить тільки від розподілу  $L$ , та що  $ES_\alpha \geq VaR_\alpha$ .

Для неперервного розподілу втрат може бути отримано ще більш інтуїтивне вираження, яке показує, що очікуваний дефіцит (*expected shortfall*) може бути інтерпретований як очікуваний збиток, якого зазнають у разі перевищення VaR [13]:

$$ES_\alpha = \frac{E(L: L \geq q_\alpha(L))}{1-\alpha} = E(L | L \geq VaR_\alpha), \quad (2.6)$$

де  $L$  – інтегровані втрати з неперервною функцією розподілу  $F_L$  та будь-яким значенням  $\alpha \in (0,1)$  [10].

Якщо покласти, що розподіл доходності  $F_L$  є нормальним розподілом з середнім  $\mu$  та дисперсією  $\sigma^2$ , та фіксованим рівнем довіри  $\alpha \in (0,1)$ . Тоді:

$$ES_\alpha = \mu + \sigma \frac{\phi(\Phi^{-1}(\alpha))}{1-\alpha}, \quad (2.7)$$

де  $\phi$  - щільність стандартного нормального розподілу [10].

Тепер покладемо, що доходність  $L$  є такою, що  $\tilde{L} = \frac{L-\mu}{\sigma}$  є розподілом Стюдента- $t$  з  $\nu$  ступенями вільності. Використовуючи попередню формулу, отримуємо [13]:

$$ES_\alpha = \mu + \sigma ES_\alpha(\tilde{L})$$

Тоді, оцінка ES для стандартного розподілу Стюдента, обраховується як:

$$ES_\alpha(\tilde{L}) = \frac{g_\nu(t_\nu^{-1}(\alpha))}{1-\alpha} \left( \frac{\nu + (t_\nu^{-1}(\alpha))^2}{\nu+1} \right), \quad (2.8)$$

де  $t_\nu$  - функція розподілу, а  $g_\nu$  - щільність стандартного розподілу Стюдента [10].

Серед переваг даних методологій можна виділити наступні: можливість вимірювання ризику як величини можливих втрат та співвіднесення з ймовірністю виникнення цих втрат; універсальність у вимірюванні та порівнянні оцінки ризику на різних ринках; агреговане значення оцінки ризику по портфелю, якщо це необхідно [8].

Сформулюємо тепер дане визначення більш формально у сенсі оцінювання ринкових ризиків: при заданому рівні ймовірності  $(1 - \alpha)$ ,  $VaR$  є передбачуваною кількістю втрат фінансового інструменту (портфелю) протягом заданого часового горизонту.

Нехай,  $P_t$  — спостережуване значення ціни акції (портфелю) в момент часу  $t$ , відповідно  $r_t$  — доходність активу (портфелю), обрахована за формулами (1.1) або (1.2). При припущенні про нормальний розподіл доходності,  $VaR$  визначається значенням  $VaR_t^{(1-\alpha)}$ , що задовольняє умові [21]:

$$\alpha = P(r_t \leq VaR_t^{(1-\alpha)}) = \int_{-\infty}^{VaR_t^{(1-\alpha)}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}r_t^2\right) dr_t \quad (2.9)$$

З цього випливає, що  $VaR_t^{(1-\alpha)} = \xi_\alpha$ , де  $\xi_\alpha$  —  $(1 - \alpha)$ -процентний квантиль розподілу випадкової величини. В загальному випадку, де  $\xi_t \sim N(\mu_t, \sigma_t^2)$  маємо:

$$\alpha = P(\xi_t \leq VaR_t^{(1-\alpha)}) = \frac{1}{\sigma_t \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{VaR_t^{(1-\alpha)}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\xi_t - \mu_t}{\sigma_t}\right)^2\right) d\xi_t \quad (2.10)$$

Звідки

$$VaR_t^{(1-\alpha)} = \mu_t + \xi_\alpha \sigma_t \quad (2.10)$$

Отже в припущенні, що  $r_t \sim N(0,1)$  ймовірність втрати менше ніж  $VaR_t^{(0.95)} \equiv VaR_t^{(1-0.05)} = -1.645$  дорівнює  $\alpha = 5\%$ . Значення  $VaR_t^{(1-\alpha)}$  означає вартість під ризиком при рівні довіри  $(1 - \alpha)$  [16, 18].

Графічна інтерпретація критерію  $VaR$  приведена на рисунку 2.1 [8, 21]. Заштрихована область відповідає вибраному рівню довіри 95%.  $VaR$

представляє собою максимальну величину можливих втрат, що відповідають заданому рівню довіри.

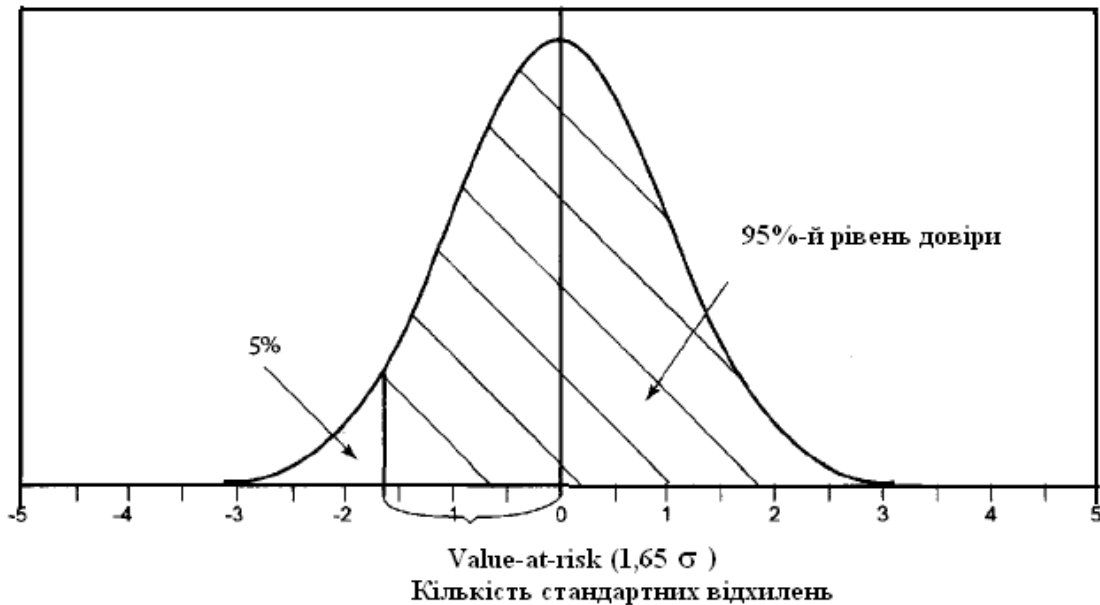


Рисунок 2.1 — Визначення величини VaR на графіку щільності розподілу

### 2.1.1 Методи оцінювання

Основною проблемою під час розрахунку вартості під ризиком є визначення та оцінка розподілу доходностей фінансового інструменту. Так, в фінансовій індустрії існують дві основні групи підходів до обчислення величини VaR [8]:

- параметричні методи (засновані на так званому «локальному оцінюванні»);
- непараметричні методи (використовують «повне оцінювання», тобто повний перерахунок вартості фінансового інструменту без деякого апроксимуючого припущення).

Далі наведемо більш детальний огляд методів розрахунку величини *VaR*. Для *непараметричних методів* характерна відсутність необхідності вищачення кінцевої кількості параметрів для оцінювання функції розподілу [8]. Одними з найбільш поширених непараметричних методів є:

- метод історичного моделювання;
- метод імітаційного моделювання Монте-Карло.

Побудова деякої емпіричної функції розподілу майбутніх змін цін, тобто можливої доходності та втрат, лежить в основі обох методів.

*Метод історичного моделювання* заснований на припущенні про стаціонарність поведінки ринкових цін в найближчому майбутньому. Суть даного методу полягає у використанні для обчислень реального історичного часового ряду випадкової величини [14]. Серед початкових даних потрібно вибрати: початковий ряд значень (цін); часовий горизонт, для якого необхідно розраховувати вартість під ризиком, та рівень довіри  $\alpha$ . Алгоритм оцінювання даним методом полягає у наступному: розраховуються зміни значень ціни – доходності (встати) активу або портфелю активів. Доходність, отриману на попередньому етапі ранжують за зростанням, і, в залежності від значення рівня довіри, виділяють стільки значень, щоб відношення цих кількості відокремлених значень до загальної довжини часового ряду становило не більше  $(1-\alpha)$  %, починаючи з найбільших від'ємних значень. Наступне значення з найменшим індексом серед тих, що залишилися після відокремлення, і є шуканим значенням *VaR* [22].

Серед переваг цього методу є, очевидно, його простота і наглядність. Як правило, чим більше історичних даних використовується для моделювання, тобто чим більша глибина ретроспективи, тим оцінки *VaR* є більш точними. Однак, таким чином збільшується небезпека застосування застарілих даних. Відсутність припущення щодо нормального закону розподілу доходностей інструменту або використання якої-небудь іншої випадкової моделі динаміки ціни, крім тої, що дійсно спостерігалася в минулому, є також однією з переваг

цього методу. Це часто допомагає врахувати ефект «товстих хвостів». Проте слід звертати увагу на репрезентативність та коректність початкової вибірки. Серед недоліків історичного моделювання можна виділити використання єдиної траєкторії цін та можливий великий об'єм обчислень [8].

*Метод Монте-Карло*, або методу стохастичного моделювання, дуже схожий на метод історичного моделювання, однак, зміни цін активів тут генеруються псевдовипадковим шляхом згідно з заданими параметрами розподілу, при чому імітований розподіл може бути загалом будь-яким. Існує багато моделей для моделювання траєкторії цін, наприклад, модель геометричного броунівського руху [15]. Серед різноманіття підходів, є навіть варіант методу Монте-Карло, де розподіл, за яким моделюється ціна, не визначається, а використовують безпосередньо історичні дані. Серед переваг методу варто виділити можливість розглядати не одну задану траєкторію цін, як при історичному моделюванні, а скільки завгодно багато, що допомагає підвищити точність оцінок. Недоліками даного підходу є низька точність при малих об'ємах даних, технічна складність та застосування припущення, що доходності є незалежними у часі [14].

Інший підхід до оцінки ризикової вартості — параметричні методи, що, як зазначалося вище, засновані на локальному оцінюванні. Локальне оцінювання означає лінійну, або більш складну апроксимацію функції вартості фінансового інструмента, що визначається аналітичним чином. Зазвичай використовуються два параметричних методи розрахунку VaR: дельта-нормальний метод та дельта-гама наближення.

Найблішій популярності на практиці здобув дельта-нормальний метод обрахунку, саме з ним нерозривно пов'язано історичне уявлення поняття Value at Risk. Основним припущенням даного методу є гіпотеза про нормальний закон розподілу логарифмічних доходностей активу (2.4). Зрозуміло, що при нормальному розподілі логарифмів відношень цін (геометрична жорходність) самі відношення цін будуть розподлені логнормально.

$$r_t = \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right) \sim N(\mu, \sigma^2) \quad (2.11)$$

Нехай доходності активів розподілені нормально (2.8) і не корелюють між собою. Використовуючи наведені вище означення (2.2) та (2.3), а також обрахунки (2.8) та (2.9), отримуємо вираз для обрахунку VaR (2.10), що при нульовому середньому зводиться до:

$$VaR^t_\alpha = \sigma\Phi^{-1}(\alpha) = -\sigma\Phi^{-1}(1 - \alpha)$$

При  $\alpha = 0.01; 0.05$  дана формула приймає вигляд [12]:

$$VaR^t_{95\%} = -1.64\sigma,$$

$$VaR^t_{99\%} = -2.33\sigma$$

Звичайно, що в практичних умовах значення середнього та дисперсії не обов'язково мають бути сталими, а навпаки моделі зі змінною у часі волатильністю  $\sigma_t$  користуються широкою популярністю.

Для часових інтервалів, більших за один день, зазвичай припускають, що волатильність змін цін пропорційна довжині часового горизонту прогнозування. Дане припущення дозволяє розрахувати оцінку ринкового ризику шляхом простого масштабування одноденної величини VaR. Для відносно невеликих інтервалів часу  $T$  (не більше 10 днів) допустимою буде оцінка при помноженні на коефіцієнт  $\sqrt{T}$  [8].

Як бачимо, серед переваг дельта-нормального методу можна виділити порівняну простоту реалізації та відносно невеликі витрати на збір поточних даних. Однак, завдяки припущенню щодо нормальності розподілу доходностей, цей метод має свої недоліки. Адже для розподілів доходностей



реальних даних більшості фінансових активів характерні «товсті хвости», тобто відхилення на краях розподілу щільності розподілу ймовірностей від нормального розподілу. Внаслідок цього значення VaR розраховані на основі нормального розподілу можуть виявитися завищеними або заниженими [15].

Дельта-гамма метод (часто зустрічається як дельта-гамма-вега наближення) дозволяє врахувати відповідні ризики, такі як зміна значення дельти або волатильності. Це допомагає посилити переваги дельта-нормального методу за рахунок можливості більш прийнятної оцінки нелінійних фінансових інструментів, проте, значно ускладнює розрахунки [8].

### 2.1.2 Оцінка якості моделей

Незалежно від вибраного підходу, модель розрахунку VaR необхідно верифікувати (від англ. verification — перевірка, підтвердження) за-для уникнення ризику застосування неадекватної моделі. В літературі також може зустрічатись більш розповсюджена назва цього процесу, як «бек-тестування» (backtesting). Верифікація моделі дозволяє встановити ступінь адекватності використаної моделі оцінки ринкового ризику у вигляді показника VaR та ES реальним умовам ринку [5].

Для того щоб оцінити якість конкретної моделі, підрахунки необхідно порівняти з фактичними результатами з метою визначення наскільки модель «життєздатна» для проміжку часу для якого були зроблені прогнози VaR та ES. Саме тому необхідно перевірити відповідність прогнозів моделі щодо припущень, що лежать в основі вибору моделі тобто, розподілі втрат або залишків. Нажаль, теорія бектестування та її методологія розроблялись не стільки для показника ES, як переважно для VaR. В даній роботі для VaR виконується трьох-етапний безумовний тест покриття (unconditional coverage

test) та тест на незалежність (independence test). Для показника ES використовується V-test.

На заданому рівні довіри  $q \in (0, 1)$  очікуємо, що фактична втрата  $X_{t+1}$  перевищить оцінку  $VaR_q^t(X_{t+1})$  лише для  $100(1 - q)\%$  випадків. Прийнято називати такі перевищення VaR-розриви (VaR-breaks). Зокрема для VaR-моделі, яка адаптується до нещодавніх втрат і нестабільності очікується, що VaR-розриви будуть незалежні один від одного. Саме тому спосіб перевірки якості моделі VaR полягає в тому, щоб протестувати, чи модель здійснює очікувану кількість VaR-розривів, а також перевірити, чи VaR-розриви не залежать один від одного. З цією метою формується послідовність змінних індикаторів, що представляють VaR-розриви як:

$$I_{t+1} = \begin{cases} 1 & \text{if } X_{t+1} > VaR_q^t(X_{t+1}) \\ 0 & \text{if } X_{t+1} \leq VaR_q^t(X_{t+1}) \end{cases}, \quad (2.12)$$

З розміром вибірки  $T$  обраховані значення VaR дають послідовність  $\{I_t\}_{t=1}^T$  ("послідовність перевищень"). Найпростіша можлива нульова гіпотеза полягає в тому, що  $I_t$  це змінні Бернуллі з вірогідністю успіху  $\alpha = 1 - q$ . Так,  $\{I_t\}_{t=1}^T$  являє собою послідовність випадкових незалежних однаково розподілених величин Бернуллі. Функція щільності розподілу Бернуллі ( $p$ ) задана формулою:

$$f(I_t; p) = p^{I_t}(1 - p)^{1-I_t}$$

*Безумовний тест покриття (Unconditional coverage test).* Спочатку необхідно перевірити, чи виробляє модель стільки VaR-розривів, скільки

очікувалося для заданого рівня довіри  $\alpha$ ; здійснюється це за допомогою безумовної перевірки покриття. Порівнюється теоретична частка  $\pi$  вибірки VaR-розривів з прогнозованою часткою  $\alpha$ ; нульова гіпотеза для безумовного тесту на покриття:  $\pi = \alpha$  [17]. Це порівняння проводиться за допомогою тесту відношення правдоподібності. Позначивши  $T_1$  і  $T_0$  як кількість «попадань» та «промахів» у вибірці розміру  $T$ , правдоподібність функції для нульової гіпотези визначається:

$$L(\alpha) = \prod_{t=1}^T p^{I_t} (1-p)^{1-I_t} = p^{T_1} (1-p)^{T_0} \quad (2.13)$$

де  $\pi$  оцінюється за  $\hat{\pi} = T_1/T$ , що є максимальною оцінкою правдоподібності  $\pi$ . Тоді, максимізована правдоподібність для вибірки:

$$L(\hat{\pi}) = \left(\frac{T_1}{T}\right)^{T_1} \cdot \left(\frac{T_0}{T}\right)^{T_0} \quad (2.14)$$

Статистика співвідношення правдоподібності обраховується як:

$$LR_{uc} = -2[L(\alpha)/L(\hat{\pi})] \quad (2.15)$$

Вона асимптотично (в  $T$ ) розподіляється як  $X^2$  випадкова величина з одним ступенем свободи, так що для оцінювання можна використовувати квантилі розподілу  $X^2(1)$ . Як відмічає Крістофферсен [17], кількість спостережень  $T$ , а тим більше – кількість перевищень  $T_1$  (особливо для маленьких  $\alpha$ ), на практиці може бути занадто малим для того щоб забезпечити

надійність тестування. Замість цього Крістофферсен рекомендує здійснити моделювання Монте-Карло, щоб отримати надійні р-значення для цього тесту.

*Тестування незалежності.* Далі необхідно перевірити, чи не є VaR-розриви незалежними один від одного, чи створюють вони кластери. Якщо так, це означатиме, що модель VaR не адаптується достатньо і досить швидко до великих втрат, і може створити ризик банкрутства в дуже короткий термін в той час як втрати накопичуються. Знати, що VaR-розриви не є незалежними на практиці означає, що ймовірність розриву завтра, враховуючи те, що розрив був сьогодні більше, ніж  $\alpha$ . Крістофферсен надає спосіб перевірки на незалежність [17]. Припустимо, що послідовність перевищень  $\{I_t\}_{t=1}^T$  залежна і що вона може описуватися дискретним ланцюгом Маркова з матрицею імовірнісного переходу:

$$\Pi_1 = \begin{bmatrix} \pi_{00} & \pi_{01} \\ \pi_{10} & \pi_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \pi_{01} & \pi_{01} \\ 1 - \pi_{11} & \pi_{11} \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

де  $\pi_{ij} (i, j \in \{0, 1\})$  це ймовірність того, що  $I_{t+1} = j$  залежить від  $I_t = i$ . Наприклад,  $\pi_{11}$  - це ймовірність того, що VaR-розрив виникне завтра якщо такий виникнув сьогодні. Згідно з цією моделлю, тільки сьогоднішній результат має значення для завтрашнього результату; більш ранні результати не говорять нічого про результат завтра. Із  $T$  спостереженнями, функція правдоподібності цього процесу визначається, як:

$$L(\Pi_1) = (1 - \pi_{01})^{T_{00}} \cdot \pi_{01}^{T_{01}} \cdot (1 - \pi_{11})^{T_{10}} \cdot \pi_{11}^{T_{11}} \quad (2.17)$$

де  $T_{i,j}$  - кількість днів, протягом яких  $j$  слідував за  $i$  у послідовності перевищень, з  $i, j \in \{0, 1\}$ . Оцінка максимальної правдоподібності для цих ймовірностей:

$$\hat{\pi}_{01} = \frac{T_{01}}{T_{00}+T_{01}} \quad \Rightarrow \quad \hat{\pi}_{00} = 1 - \hat{\pi}_{01}$$

$$\hat{\pi}_{11} = \frac{T_{11}}{T_{10}+T_{11}} \quad \Rightarrow \quad \hat{\pi}_{10} = 1 - \hat{\pi}_{11}$$

Звідки матриця оцінок ймовірностей переходу

$$\hat{\Pi}_1 = \begin{bmatrix} \hat{\pi}_{00} & \hat{\pi}_{01} \\ \hat{\pi}_{10} & \hat{\pi}_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{T_{00}}{T_{00}+T_{01}} & \frac{T_{01}}{T_{00}+T_{01}} \\ \frac{T_{10}}{T_{10}+T_{11}} & \frac{T_{11}}{T_{10}+T_{11}} \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

Якщо послідовність наслідків залежна, тоді  $\pi_{01} \neq \pi_{11}$ . Якщо послідовність була незалежною, то  $\pi_{01} = \pi_{11} = \pi$ . Оскільки найбільша зацікавленість є у позитивній залежності, тобто  $\pi_{11} > \pi_{01}$ ,  $\pi$  можна оцінити, як  $\hat{\pi} = T_1/T$ , як і раніше. Таким чином, під незалежністю ми отримуємо матрицю ймовірностей переходу

$$\hat{\Pi} = \begin{bmatrix} 1 - \hat{\pi} & \hat{\pi} \\ 1 - \hat{\pi} & \hat{\pi} \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

яка має ту ж функцію правдоподібності  $L(\hat{\pi})$ , як і в безумовному тесті покриття. Тоді ми можемо перевірити гіпотезу незалежності  $\pi_{01} = \pi_{11}$  знову за допомогою тесту відношення правдоподібності з статистикою:

$$LR_{ind} = -2[L(\hat{\pi})/L(\hat{\Pi}_1)] \quad (2.20)$$

яка асимптотично розподілена як  $X^2$  випадкова величина з одним ступенем свободи. Крістофферсен рекомендує використовувати симуляцію Монте-Карло, щоб отримати точне р-значення замість використання квантилів з розподілу  $X^2(1)$  при тестуванні гіпотези незалежності. Це робиться таким же чином, як і для безумовного випробування покриття.

*Умовний тест покриття (Conditional coverage test).* Нарешті, два вищезазначені тести можуть бути об'єднані для правильного спільного тестування покриття та незалежності. Оскільки кожен  $LR_{uc}$  та  $LR_{ind}$  є  $X^2(1)$ -розподіленим (асимптотично), їх сума повинна бути  $X^2(2)$ -розподілена, і ми можемо створити статистику тесту

$$LR_{cc} = LR_{uc} + LR_{ind} = -2[L(\alpha)/L(\hat{\Pi}_1)] \quad (2.21)$$

Подібно до двох попередніх тестів, моделювання Монте-Карло проводиться для отримання більш точних р-значень.

*V-тест для Expected shortfall.* У роботі [17] було запропоновано декілька методів оцінки ефективності різних оцінок ES, виходячи з відносного розміру тестової статистики. Перша статистика  $V1$  просто приймає середнє значення різниці між фактичною доходністю та прогнозованим очікуваним дефіцитом, у днях, коли фактична доходність перевищила оцінку VaR. Якщо модель є достатньо адекватна, значення  $V1$  має бути близьке до нуля. Для вибраної ймовірності  $q$ ,  $V1$  визначається наступним чином:

$$V_1 = \frac{\sum_{t=1}^T (x_{t+1} - \widehat{ES}_q^t(X_{t+1})) 1_{\{x_{t+1} > \widehat{x}_q^t\}}}{1_{\{x_{t+1} > \widehat{x}_q^t\}}} \quad (2.22)$$

де  $\widehat{x}_q^t = \widehat{VaR}_q^t(X_{t+1})$ , а  $T$  - загальна кількість оцінок  $ES$  для певного набору даних. Слабкість цієї оцінки полягає в тому, що вона сильно залежить від оцінок  $VaR$ . Це може означати, що ми фактично маємо середнє значення для підмножини, розмір якої сильно відрізняється від бажаного розміру  $T(1 - q)$  залежно від того, наскільки поганими є оцінки  $VaR$ . За допомогою  $ES_q$  відшукується середній розмір одного з  $1/(1 - q)$  -подій. Методом, який розглядає ці типи подій, є міра  $V_2$ , визначена як:

$$V_2 = \frac{\sum_{t=1}^T (x_{t+1} - \widehat{ES}_q^t(X_{t+1})) 1_{\{D_t > D_q\}}}{1_{\{D_t > D_q\}}} \quad (2.23)$$

де  $D_t = (x_{t+1} - \widehat{ES}_q^t(X_{t+1}))$  та  $D_q$  - емпіричний  $q$ -квантиль для  $\{D_t, t = 1, 2, \dots, T\}$ . Очікується, що  $D_t$  буде негативним менш, ніж у  $1/(1 - q)$  випадках. Отже, правильна оцінка для  $ES$  при оптимістичних прогнозах дасть нам оцінку, близьку до нуля.

$V_1$  і  $V_2$  можуть бути об'єднані в третю міру, яка забезпечує баланс між теоретичною мірою  $V_1$  та більш практично орієнтованою мірою  $V_2$ , що може бути визначена як:

$$V = \frac{|V_1| + |V_2|}{2} \quad (2.24)$$

Дана оцінка також має бути близькою до нуля для адекватних моделей.

Зрозуміло, що чим більша кількість спостережень, тим легше відкидається модель оцінки *VaR* у випадку її некоректності. Однак, чим менше задана ймовірність, тим важче зрозуміти, чи завищена оцінка *VaR*, тому на практиці більшість задає ймовірність на рівні 5%. Якщо по результатам верифікації моделі точність оцінки *VaR* виявляється незадовільною, необхідно перевірити вибраний розподіл доходності та його параметри на відповідність тим, що реально спостерігаються, проаналізувати ретроспективу даних на наявність аномальних явищ на ринку і, можливо, змінити її глибину при оцінці вхідних параметрів моделі [8].

### 2.1.3 Недоліки моделей

Підсумувавши, можемо зробити висновок, що показник *VaR* як статистика, що характеризує ризик фінансового інструменту, незалежно від обраного методу розрахунку, безперечно володіє багатьма достоїнствами. Головним серед них є відносна простота уявлення інформації про ризик та практична корисність для керування різними фінансовими інструментами. Однак, цей метод оцінювання ринкових ризиків має також цілий ряд суттєвих недоліків:

а) відсутність інформації про найгірший можливий збиток за межами значення ризикової вартості. Наприклад, при заданому рівні довіри  $(1 - \alpha) = 95\%$  залишається невідомою інформація про те, якими можуть бути втрати в 5% випадків, що залишилися;

б) відсутність інформації про вид розподілу збитків;



в) показник VaR не є однозначно визначеним: для одного й того самого фінансового інструменту при різних рівнях довіри його значення можуть суттєво відрізнятися.

Саме тому для оцінки ризиків потрібно застосовувати системний підхід, тобто користуватися кількома методиками оцінки для повного уявлення про можливі втрати. Наприклад, для врахування ризику екстремальних подій використовують відносно новий підхід стрес-тестування, що є різновидом сценарного аналізу. Стрес-тестування — кількісний метод оцінювання ризику, суть якого криється у визначенні значення неузгодженої позиції при шоківій зміні зовнішнього фактору, як, наприклад, курс обміну валют, процентна ставка тощо [11].

## 2.2 Моделі авторегресійної умовної гетероскедастичності

### 2.2.1 Методологія застосування для оцінювання ризику

Волатильність доходності інструменту, пошук якої є основною проблемою при розрахунку VaR дельта-нормальним методом, може бути оцінена по історичним даним на основі вибіркової дисперсії, та з використанням моделей, що враховують динаміку дисперсії у часі. Такими моделями є, наприклад, експоненційна волатильність, ARCH або GARCH моделі волатильності та ін. Будемо дотримуватися одноденного часового горизонту. Використовуючи попередні викладки можемо сформулювати модель для втрат  $X_t$  як:

$$X_t = \mu_t + \sigma_t Z_t \quad (2.25)$$

де  $\mu_t$  може бути константним середнім значенням, або моделлю вигляду:

$$\mu_t = \phi_0 + \phi_1 X_{t-1}$$

В даному випадку  $\sigma_t$  буде обчислена за допомогою моделі GARCH (1,1) або іншої моделі умовної гетероскедастичності. Нагадаємо, що  $Z_t$  – це незалежні однаково розподілені величини з нульовим середнім та одиничною дисперсією. Припустимо, що  $Z_t$  виражає випадкову змінну з стандартним нормальним розподілом або розподілом t-Стюдента. Так як властивості VaR та ES відносяться до сімейства розподілів за параметрами здвигу та масштабу (location scale family) показники VaR та ES, оцінені в час  $t$  для втрат в час  $t+1$  можуть бути записані, як:

$$VaR_q^t(X_{t+1}) = \mu_{t+1} + \sigma_{t+1} \cdot VaR_q^t(Z) \quad (2.26)$$

$$ES_q^t(X_{t+1}) = \mu_{t+1} + \sigma_{t+1} \cdot ES_q^t(Z) \quad (2.27)$$

Тоді VaR та ES для стандартного нормального розподілу  $Z$  матиме вигляд:

$$VaR_q^t(Z) = \Phi^{-1}(q) \quad (2.28)$$

$$ES_q^t(Z) = \frac{\phi(\Phi^{-1}(q))}{1-q} \quad (2.29)$$

де  $\phi$  виражає щільність розподілу, а  $\Phi$  функцію розподілу стандартної нормальної змінної. Натомість якщо  $Z$  має розподіл t-Стюдента з  $\nu > 2$  ступенями свободи, значення обчислюються як:

$$VaR_q^t(Z) = \sqrt{\frac{v-2}{v}} \cdot t_v^{-1}(q) \quad (2.30)$$

$$ES_q^t(Z) = \sqrt{\frac{v-2}{v}} \cdot \frac{g_v(t_v^{-1}(q))}{1-q} \cdot \frac{v+(t_v^{-1}(q))^2}{v-1} \quad (2.31)$$

де  $g_v$  виражає щільність, а  $t_v$  – функцію розподілу t-Стюдента.

Тепер основною метою для оцінювання ризику постає моделювання та прогнозування волатильності  $\sigma_{t+1}$ .

Так, припущення про незалежність змін цін у часі не відповідає сучасним фінансовим реаліям на ринку. Часто для волатильності властива так звана «кластеризація», коли вона може бути меншою або більшою за абсолютними значеннями. Вивчення закономірностей зміни волатильності призвело до появи на початку 80-х років окремого класу моделей гетероскедастичних процесів.

### 2.2.1 Різновиди моделей та їх основні властивості

Гетероскедастичними називають процеси із змінною в часі дисперсією, а гомоскедастичними – процеси із сталою дисперсією на відрізку часу, що розглядається при моделюванні та прогнозуванні. Гетероскедастичні процеси відносяться до широкого класу нестационарних процесів.

Мірою волатильності фінансових процесів часто вситупає дисперсія та стандартне відхилення. Зміна даних величин у часі потребує розроблення та використання таких математичних моделей, що дозволили б коректно описувати поведінку волатильності та прогнозувати її значення на один або

більше кроків у майбутнє. Це значно покращить якість рішень при процесі ризик-менеджменту та інших залежних від фінансового ринку бізнесів, як наприклад, рішення щодо купівлі/продажу акцій, валюти, оцінювання мір ризику банківській діяльності.

Формально процес вважається гетероскедастичним, якщо

$$\text{Var}[\varepsilon(k)] = \sigma_\varepsilon^2 \neq \text{const.}$$

Гомоскедастичність процесу означає, що розкид кожної випадкової величини  $\varepsilon(k)$  навколо її математичного сподівання залишається сталою величиною. Тобто  $\sigma_\varepsilon^2$  не є функцією часу [20].

Гетероскедастичність означає, що дисперсія процесу зменшується чи збільшується в часі, або є більш складною функцією часу. Тобто, вона може змінюватися за досить складним законом, який і потрібно знайти при створенні моделі процесу.

Нехай оцінюється модель стаціонарного процесу авторегресії із ковзним середнім (АРКС) типу (для спрощення викладок візьмемо просто АР(1)):

$$y(k) = a_0 + a_1 y(k-1) + \varepsilon(k), \quad |a_1| < 1,$$

$$E[\varepsilon(k)] = 0, \quad E[\varepsilon^2(k)] = \sigma_\varepsilon^2, \quad E[\varepsilon(k) y(k-l)] = 0, \quad l > 0,$$

$$E[\varepsilon(k) y(k)] \approx \sigma_\varepsilon^2.$$

Необхідно оцінити прогноз величини  $y(k+1)$ , тобто, знайти оцінку  $\hat{y}(k+1) = E_k[y(k+1)]$ . Якщо використати це умовне середнє для прогнозування значення то дисперсія похибки прогнозу визначається як:

$$E_k \{ [y(k+1) - a_0 - a_1 y(k)]^2 \} = E_k [\varepsilon^2(k+1)] = \sigma_\varepsilon^2.$$

Якщо дисперсія послідовності  $\{\varepsilon(k)\}$  змінюється в часі, то тенденцію зміни цього параметру можна описати за допомогою моделі АРКС. Наприклад, позначимо через  $\{\hat{\varepsilon}(k)\}$  оцінки залишків (похибок) моделі першого порядку  $y(k) = a_0 + a_1 y(k-1) + \varepsilon(k)$ . Для такого випадку умовна дисперсія основної змінної визначається так [20]:

$$\text{Var} [y(k+1) | y(k)] = E_k \{ [y(k+1) - a_0 - a_1 y(k)]^2 \} = E_k [\hat{\varepsilon}^2(k+1)]. \quad (2.32)$$

Досі вважалось, що  $E_k [\varepsilon^2(k+1)] = \sigma_\varepsilon^2$  є постійною величиною. Покладемо тепер, що умовна дисперсія – величина змінна. Одним із простих підходів до описання такої змінної величини є застосування моделі типу АР(q) до квадратів оцінок залишків. Наприклад,

$$\hat{\varepsilon}^2(k) = \alpha_0 + \alpha_1 \hat{\varepsilon}^2(k-1) + \alpha_2 \hat{\varepsilon}^2(k-2) + \dots + \alpha_q \hat{\varepsilon}^2(k-q) + v(k), \quad (2.33)$$

де  $v(k)$  – процес білого шуму з нульовим середнім для адекватної моделі.

Якщо всі коефіцієнти  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_q$  дорівнюють нулю, то оцінка дисперсії буде просто константою. Інакше, умовна дисперсія для  $y(k)$  описується рівнянням (2.33). Це рівняння можна використати для прогнозування умовної дисперсії на один крок наступним чином:

$$E_k [\hat{\varepsilon}^2(k+1)] = \alpha_0 + \alpha_1 \hat{\varepsilon}^2(k) + \alpha_2 \hat{\varepsilon}^2(k-1) + \dots + \alpha_q \hat{\varepsilon}^2(k-q) \quad (2.34)$$

Оскільки (2.33) може бути побудоване при умові, що  $Var[y(k)] \neq const$ , то (2.33) називають *авторегресійним умовно гетероскедастичним (АРУГ) рівнянням (ARCH)*. Залишки (збурення)  $\varepsilon(k)$ , які використовуються у рівнянні (2.33), можуть бути отримані на основі рівнянь регресії, авторегресії або авторегресії із ковзним середнім низького порядку. Очевидно, що для ARCH моделі можна знайти багато потенційних можливостей практичного і теоретичного застосування, насамперед для прогнозування волатильності.

Окрім рівняння типу (2.33) можна вибрати і складніші форми описання поведінки дисперсії. Наприклад, майже ніколи наперед невідомо як впливає збурення на процес – адитивно чи мультиплікативно. Тому його можна ввести в модель у мультиплікативній формі, наприклад:

$$\varepsilon^2(k) = v^2(k)[\alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon^2(k-1)],$$

де  $v(k)$  – мультиплікативне збурення у формі білого шуму, причому  $\{v(k)\} \sim (0,1)$ , тобто воно має нульове середнє і одиничну дисперсію; змінні  $\varepsilon(k-1)$  і  $v(k)$  – статистично незалежні (некорельовані) величини. Можна також показати, що елементи послідовності  $\{\varepsilon(k)\}$  некорельовані між собою і мають нульове середнє. При  $E[v(k)v(k-1)] = 0$  маємо, що

$$E[\varepsilon(k)\varepsilon(k-i)] = 0, \quad i \neq 0. \quad (2.35)$$

Знайдемо також безумовну дисперсію для  $\varepsilon(k)$ . Враховуючи те, що  $\sigma_v^2 = 1$ , а безумовна дисперсія змінної  $\varepsilon(k)$  така ж як і для  $\varepsilon(k-1)$ , тобто  $E[\varepsilon^2(k)] = E[\varepsilon^2(k-1)]$ , то безумовна дисперсія приймає значення:

$$E[\varepsilon^2(k)] = \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1}. \quad (2.36)$$

Таким чином, на безумовне середнє та дисперсію не впливає процес  $\varepsilon(k)$ , який визначений рівнянням (2.26). По аналогії можна легко показати, що умовне середнє процесу  $\varepsilon(k)$  дорівнює нулю, так якщо  $v(k)$  і  $\varepsilon(k-1)$  – незалежні величини і  $E[v(k)] = 0$ . Очевидно, що процес, який визначається виразом (2.26), впливає на умовну дисперсію. Оскільки дисперсія  $\sigma_v^2 = 1$ , то умовна дисперсія для  $\varepsilon(k)$  визначається як

$$E_{k-1}[\varepsilon^2(k) | \varepsilon(k-1), \varepsilon(k-2), \dots] = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon^2(k-1). \quad (2.37)$$

Звідси видно, що умовна дисперсія змінної  $\varepsilon(k)$  залежить від значення  $\varepsilon^2(k-1)$ . Якщо остання змінна приймає велике значення, то і умовна дисперсія в момент  $k$  також буде мати велике значення. Рівняння (2.27) є авторегресією першого порядку, але відрізняється від звичайної авторегресії тим, що коефіцієнти  $\alpha_0, \alpha_1$  повинні мати певні обмеження. Для того щоб забезпечити додатність дисперсії, обидва коефіцієнти  $\alpha_0, \alpha_1$  повинні бути додатними. Крім того, для забезпечення стійкості (збіжності) процесу авторегресії необхідно щоб виконувалась наступна умова:  $0 < \alpha_1 < 1$ .

Рівняння (2.34)-(2.37) ілюструють загальні властивості будь-якого процесу ARCH. Структура ARCH моделі така, що умовне та безумовне середнє значення похибок цієї моделі дорівнює нулю (фактично, воно має дорівнювати нулю для адекватної моделі). Окрім того, послідовність  $\varepsilon(k)$  є послідовно некорельованою, оскільки  $E[\varepsilon(k)\varepsilon(k-s)] = 0$  для  $\forall s \neq 0$ . Головним моментом в даному випадку є те, що елементи послідовності  $\{\varepsilon(k)\}$  зв'язані між собою через їх другий центральний момент, тобто умовну дисперсію. Якщо значення елемента  $\varepsilon(k-1)$  суттєво відрізняється від нуля, що приводить до відносно великого значення  $\alpha_1 \varepsilon^2(k-1)$ , то дисперсія змінної

$\varepsilon(k)$  має тенденцію до зростання. Таким чином, умовна гетероскедастичність процесу  $\{\varepsilon(k)\}$  свідчить про те, що послідовність  $\{y(k)\}$  також відноситься до процесу типу ARCH [19].

Визначимо яким же чином структура похибки впливає на послідовність  $\{y(k)\}$ . Суттєвим моментом є те, що структура похибки процесу АРУГ і автокореляційні параметри послідовності  $\{y(k)\}$  взаємодіють між собою. Про це свідчать численні обчислювальні експерименти. Цьому явищу можна дати пояснення на інтуїтивному рівні. Будь-яке різке зростання модуля змінної  $v(k)$  викликає збільшення дисперсії послідовності  $\{\varepsilon(k)\}$ ; при цьому чим більше значення має коефіцієнт  $\alpha_1$ , тим більшим буде вплив на дисперсію. Більше того, чим більшим буде авторегресійний параметр  $a_1$ , тим більшим буде вплив правої частини на  $y(k)$ . І чим більшою буде тенденція до зміни середнього значення послідовності  $\{y(k)\}$ , тим більшою буде її дисперсія [20, 24].

Безумовну дисперсію для  $y(k)$  також можна отримати [24]:

$$\text{Var}[y(k)] = \sum_{i=0}^{\infty} a_1^{2i} \text{Var}[\varepsilon(k-i)]. \quad (2.38)$$

Якщо врахувати те, що безумовна дисперсія для  $\varepsilon(k)$  є величиною постійною, тобто  $\text{Var}[\varepsilon(k)] = \text{Var}[\varepsilon(k-1)] = \text{Var}[\varepsilon(k-2)] = \dots = \alpha_0 / (1 - \alpha_1)$ , то

$$\text{Var}[y(k)] = \frac{\alpha_0}{(1 - \alpha_1)} \frac{1}{(1 - a_1^2)}. \quad (2.39)$$

Модель гетероскедастичного процесу (2.24) може бути розширена до довільного порядку і записана у вигляді:



$$\varepsilon(k) = v(k) \left( \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon^2(k-i) \right)^{1/2}. \quad (2.40)$$

В цьому рівнянні на змінну  $\varepsilon(k)$  впливають всі значення від  $\varepsilon(k-1)$  до  $\varepsilon(k-q)$ , а тому умовну дисперсію можна розглядати як процес авторегресії порядку  $q$ .

Наступним розширенням ARCH моделі є описання умовної дисперсії як процесу АРКС. Нехай похибки описуються рівнянням

$$\varepsilon(k) = v(k) [h(k)]^{1/2}, \quad (2.41)$$

де  $\sigma_v^2 = 1$ , а умовна дисперсія  $h(k)$  визначається за виразом

$$h(k) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon^2(k-i) + \sum_{i=1}^p \beta_i h(k-i). \quad (2.42)$$

Оскільки процес  $\{v(k)\}$  визначено як білий шум, який є некорельованим із значеннями  $\varepsilon(k-i)$ , то умовне і безумовне середнє для  $\varepsilon(k)$  дорівнюють нулю. Очевидно, що безумовне математичне сподівання визначається як

$$E[\varepsilon(k)] = E[v(k) (h(k))^{1/2}] = 0. \quad (2.43)$$

Умовна дисперсія змінної  $\varepsilon(k)$  визначається як  $E_{k-1}[\varepsilon^2(k)] = h(k)$ . Вибіркову умовну дисперсію  $h_g(k)$  можна досить наближено визначити за виразом [24]:

$$h_g(k) = \frac{1}{k-1} \sum_{i=1}^k [y(i) - \bar{y}_g(k)]^2, \quad k = 2, 3, \dots, N, \quad (2.44)$$

де  $\bar{y}_e(k)$  – вибіркове умовне середнє:

$$\bar{y}_e(k) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k y(i); \quad (2.45)$$

Використовуючи наведені формули, можемо отримати ряд значень умовного середнього та умовної дисперсії, які можуть стати корисними при побудові математичних і статистичних моделей.

Наближені значення умовних вибіркових статистичних характеристик можна визначити, також, по аналогії з обчисленням ковзного середнього. При такому підході необхідно вибрати ширину ковзного вікна і обчислити значення статистичного параметра рухаючись крок за кроком від початку до кінця часового ряду [24]. Наприклад, якщо вибрати вікно шириною п'ять значень ряду, то умовна дисперсія буде обчислюватись за виразом:

$$h_e(k) = \frac{1}{4} \sum_{i=k-2}^{k+2} [y(i) - \bar{y}]^2, \quad k = 3, \dots, N - 2, \quad (2.46)$$

або в загальному вигляді:

$$h_e(k) = \frac{1}{d-1} \sum_{i=k-(d-1)/2}^{k+(d-1)/2} [y(i) - \bar{y}]^2, \quad k = \frac{d-1}{2}, \dots, N - \frac{d-1}{2}, \quad (2.47)$$

де  $d$  – ширина ковзного вікна.

Ширина вікна залежить від того, наскільки швидко змінюється дисперсія. Якщо вона має високу динаміку, то ширину вікна вибирають

рівною 5-9. Незважаючи на наближеність таких розрахунків, практика моделювання свідчить, що обчислені значення виявляються досить корисними при побудові моделей [24].

Узагальнена модель ARCH, яку називають GARCH(p,q) (GARCH), складається з двох компонент – авторегресії та ковзного середнього відносно дисперсії гетероскедастичного процесу. Процес першого порядку отримуємо при  $p = 0, q = 1$ , його можна формально визначити як процес GARCH(0,1). Якщо всі коефіцієнти  $\beta_i = 0$ , то модель GARCH(p,q) еквівалентна моделі ARCH(q). Для того щоб забезпечити скінченність умовної дисперсії, корені характеристичного рівняння, повинні знаходитися всередині кола одиничного радіусу на комплексній площині [24].

Основним характерним моментом GARCH моделі є те, що збурення, яке діє на процес  $\{y(k)\}$ , є процесом АРКС. Тому можна очікувати, що залишки (похибки) моделі АРКС (попередньої моделі процесу) будуть відповідати за своїми характеристиками гетероскедастичному процесу.

Це твердження можна пояснити наступним чином. Нехай  $\{y(k)\}$  — процес АРКС. Якщо модель АРКС адекватна процесу  $\{y(k)\}$ , то автокореляційна функція (АКФ) і часткова автокореляційна функція (ЧАКФ) залишків повинні вказувати на те, що це процес білого шуму. З іншого боку, АКФ квадратів залишків можна використати для попереднього (наближеного) визначення порядку процесу GARCH. Оскільки  $E_{k-1}[\varepsilon(k)] = (h(k))^{1/2}$ , то рівняння можна записати у вигляді:

$$E_{k-1}[\varepsilon^2(k)] = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon^2(k-i) + \sum_{i=1}^p \beta_i h(k-i). \quad (2.48)$$

Останнє рівняння формально схоже на процес АРКС(p,q) відносно послідовності  $\{\varepsilon^2(k)\}$ . Якщо умовна гетероскедастичність в процесі наявна, то

корелограма повинна вказувати на цей факт.

Для того щоб визначити, наскільки значення вибіркової АКФ є відмінними від нуля (тобто чи вони значимі в статистичному сенсі), можна застосувати  $Q$  – статистику Льюнга-Бокса [24]:

$$Q = N(N + 2) \sum_{i=1}^n \rho(s)/(N - s). \quad (2.49)$$

Якщо значення  $\hat{\varepsilon}^2(k)$  некорельовані між собою, то  $Q$  – статистика має в асимптотиці розподіл  $\chi^2$  з  $n$  ступенями свободи. За нульову гіпотезу можна прийняти те, що значення  $\hat{\varepsilon}^2(k)$  некорельовані між собою. Відмова від цієї нульової гіпотези еквівалентна тому, що процес ARCH чи GARCH ефект в конкретному випадку наявний.

Частіше всього моделі такого типу застосовують до аналізу та прогнозування фінансових процесів, зокрема й для процесів формування цін на біржах. Розглянемо деякі недоліки застосування цих моделей саме по відношенню до таких процесів та задач, які при цьому розв’язуються:

а) З емпіричних досліджень відомо, що дохід від акцій знаходиться у від’ємній кореляції із змінами волатильності (ступеня мінливості ряду). Це явище отримало назву “леверидж” або “леверидж-ефект” (leverage-effect). Зниження ринкової вартості акціонерного капіталу збільшує відношення взятого кредиту до власного капіталу і, таким чином, підвищує ризик інвестицій в ту чи іншу компанію. Формально це проявляється у збільшенні волатильності процесу. В результаті майбутні значення волатильності від’ємно корелюють з поточним доходом (віддачею) від акцій [21].

Це явище можна описати наступним чином: від’ємні інновації (або нев’язки), тобто  $\varepsilon(k) = y_{\text{факт.}}(k) - y_{\text{очікуване}}(k) < 0$ , що трактують як “невтішні новини” – це ситуація, в якій фактичний дохід є нижчим очікуваного; це

призводить до зростання волатильності. Навпаки, додатні інновації,  $\varepsilon(k) > 0$ , тобто “хороші новини” – це ситуація, коли фактичний доход є вищим за очікуваний, ведуть до зменшення волатильності.

В даному випадку мова йде про від’ємну кореляцію між  $\varepsilon(k)$  і  $h(k+1)$  і ця кореляція не враховується в моделях типу ARCH. Дійсно,  $h(k)$  – це функція власних затриманих значень та значень  $\varepsilon^2(k)$ , а тому вона не залежить від зміни знака  $\varepsilon(k)$ , а тільки від її абсолютних значень. В результаті від’ємність або додатність похибок моделі не впливають на умовну дисперсію. Якщо послідовність  $\{\varepsilon(k)\}$  має симетричний розподіл, то майбутнє значення умовної дисперсії не корелюється з поточною похибкою прогнозування.

б) По відношенню до узагальнених умовно гетероскедастичних процесів не узгоджено визначення стаціонарності, тобто сильно стаціонарний процес GARCH не завжди буде слабо стаціонарним. Таким чином, виникає проблема визначення стаціонарності таких процесів. Визначення слабкої стаціонарності узгоджується з процесами AP та APKC, але не узгоджується з псевдолінійними моделями ARCH та GARCH. Так, для лінійних процесів формально чітко визначено, що слабка стаціонарність означає наступне:  $E[y(k)] = const$ ,  $E[y^2(k)] = const$  та  $E[y(k)y(k-s)] = const$  [20, 24].

в) Обмеження області допустимих значень параметрів  $\alpha$  і  $\beta$  додатними значеннями створюють додаткові труднощі з оцінюванням моделей ARCH.

Враховуючи вищезазначені переваги та недоліки моделей ARCH та GARCH, стає зрозуміло, чому вони набули такої популярності та розповсюдженості, та чому нині існує таке різноманіття варіацій та доповнень даних моделей. Подальший розвиток цих моделей пішов у двох напрямках. Деякі дослідники зробили акцент на дослідженні різких стрибків доходності в моделі за допомогою моделі Пуассонівських стрибків. Інший підхід полягає у спробі змінити нормальний розподіл розподілом з більш товстими «тяжкими хвостами». Наведемо далі деякі модифікації умовно

гетероскедастичних моделей, що в певній мірі допомагають уникнути вищезазначених недоліків [21, 25].

На фінансовому ринку часто спостерігається асиметричність, тобто негативні шоки мають більший вплив на волатильність, ніж позитивні. Даний ефект має назву «ефект важеля». Класичні GARCH-моделі даний ефект пояснити неспроможні, так як умовна дисперсія не залежить від знаків і є позитивно визначеною. Оскільки дана проблема дуже часто зустрічається у фінансових реаліях, було розроблено багато модифікацій базових моделей, що можуть враховувати даний ефект.

Так, в 1991 році з'явилася модель EGARCH, запропонована Нельсоном. Крім урахування асиметрії, в даній моделі вирішується проблема позитивної визначеності моделі, так як замість умовної дисперсії враховуються значення її логарифмів [24, 21, 19]. Експоненційна авторегресійна умовно гетероскедастична модель (ЕУАРУГ( $p, q$ ) або EGARCH( $p, q$ )) модель має параметр  $p$  GARCH, пов'язаний з лагами логарифмів дисперсії,  $q$  ARCH параметр, пов'язаний з величиною лагів стандартизованої випадкової змінної:

$$\ln(\sigma_t^2) = k + \sum_{i=1}^q \beta_i \log(\sigma_{t-i}^2) + \sum_{j=1}^p \alpha_j \left[ \frac{|\varepsilon_{t-j}|}{\sigma_{t-j}} - E \left\{ \frac{|\varepsilon_{t-j}|}{\sigma_{t-j}} \right\} \right] + \sum_{j=1}^q \gamma_j \frac{\varepsilon_{t-j}}{\sigma_{t-j}}$$

Форма очікуваних значень, пов'язаних з коефіцієнтами ARCH в рівнянні EGARCH, залежить від розподілу  $z_t$ . Якщо розподіл є гауссовим, то

$$E \left\{ \frac{|\varepsilon_{t-j}|}{\sigma_{t-j}} \right\} = E\{|z_t|\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

Якщо розподіл випадкової складової є розподілом Стюдента з  $\nu > 2$  ступенями свободи, то

$$E \left\{ \frac{|\varepsilon_{t-j}|}{\sigma_{t-j}} \right\} = E\{|z_t|\} = \sqrt{\frac{\nu-2}{\pi} \frac{\Gamma(\frac{\nu-1}{2})}{\Gamma(\frac{\nu}{2})}}$$

В моделях GARCH( $p, q$ ) умовна дисперсія залежить від розміру залишків, а не від їх знаків. Наведена модель моделює умовну дисперсію, як асиметричну функцію значень  $\varepsilon$ . Це дозволяє додатнім і від'ємним попереднім значенням  $\varepsilon$  мати різний вплив на волатильність. Представлення в логарифмічному вигляді дозволяє включити від'ємні значення залишків, не отримуючи при цьому від'ємну умовну дисперсію [24].

Порогові моделі GARCH (Threshold GARCH, TGARCH) були запропоновані Закоюном в 1991 році і незалежно від нього Глостеном, Джаганнатаном і Ранкл в 1993 році (останню модель позначають по іменах авторів GJR-GARCH). Відмінність цих двох моделей полягає лише в тому, що модель Закоюна використовує умовні стандартні відхилення, а модель GJR - умовну дисперсію. Ці моделі можна представити таким чином [25]:

$$\begin{aligned} \sigma_t^\delta &= \alpha_0 + \sum_{i=1}^q (\alpha_i \varepsilon_{t-i}^\delta + \gamma_i I_{t-i} \varepsilon_{t-i}^\delta) + \sum_{i=1}^p \beta_i \sigma_{t-i}^\delta, \\ I_t &= \begin{cases} 1, \varepsilon_t < 0 \\ 0, \varepsilon_t \geq 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (2.50)$$

де для моделі Закоюна  $\delta = 1$ , а для моделі GJR -  $\delta = 2$ .

Функція індикатор в дані моделі вводиться для врахуванні вищезазначеного ефекту «важеля». Якщо коефіцієнти  $\gamma \neq 0$ , тобто є статистично значущими, можемо сказати, що в динаміці умовної дисперсії наявна асиметрія.

На сьогоднішній день подібних моделей існує безліч, чому присвячено дуже об'ємна частина фінансово-економічної літератури.

### 2.2.2 Перевірка наявності гетероскедастичності

Наявність гетероскедастичності випадкових помилок призводить до неефективності оцінок, отриманих за допомогою методу найменших квадратів. Крім того, в цьому випадку виявляється зміщеною і неспроможною класична оцінка коваріаційної матриці МНК-оцінок параметрів. Отже статистичні висновки про якість отриманих оцінок можуть бути неадекватними. У зв'язку з цим тестування моделей на гетероскедастичності є однією з необхідних процедур при побудові регресійних моделей [24].

Найпершим способом перевірки гетероскедастичності є візуальний аналіз графіків залишків регресії (або їх квадратів). На цих графіках розкид точок може змінюватися в залежності від значення цих змінних. Для більш строгої перевірки застосовують, наприклад, статистичні тести Уайта, Голдфелда - Куандт, Бройша - Пагана, Парка, Глейзера, Спірмена. Розглянемо деякі з них детальніше.

*Тест Уайта.* У відповідності до тесту Уайта для виявлення присутності гетероскедастичності необхідно побудувати допоміжну модель регресії для квадратів залишків, які генеруються в результаті застосування звичайного методу найменших квадратів до часових рядів [19]. Регресія квадратів залишків містить в собі (в правій частині) константу, а також всі ненадлишкові регресори на множині всіх регресорів, яка включає самі регресори, їхні квадрати та взаємні добутки. Висувається гіпотеза про відсутність гетероскедастичності, тоді добуток  $NR^2$  буде мати в асимптотиці розподілення хі-квадрат  $\chi^2(n)$ , де  $n$  означає число регресорів без константи;  $R^2$  – коефіцієнт множинної детермінації. Якщо узагальнити:  $NR^2 \leftrightarrow \chi^2(q)$ , тобто добуток  $NR^2$  приблизно має хі-квадрат розподіл при використанні в регресії  $q$  регресорів (константа не враховується). Цей тест дає можливість виявити присутність гетероскедастичності, але не вказує на її форму і, як



наслідок, на тип алгоритму оцінювання параметрів, який необхідно використовувати. Застосування тесту Уайта передбачає використання МНК для оцінювання параметрів початкової моделі. Ще однією проблемою, пов'язаною із використанням цього тесту, є те, що число ступенів свободи в розподілі  $\chi^2$  може приймати велике значення, що знижує якість тестування [26].

*Тест Голдфелда - Куандта.* Процедура тестування гетероскедастичності випадкових помилок регресійної моделі Голдфелда-Куандта застосовується в разі, коли є підстави вважати, що стандартне відхилення помилок може бути пропорційно деякій змінній. Тест також ґрунтується на припущенні нормальності розподілу випадкових помилок регресійної моделі. Загалом, це спрощений тест застосовують в тих випадках, коли є одна змінна (як правило, з числа регресорів), що приводить до гетероскедастичності. Припустимо, наприклад, що  $\hat{\sigma}_\varepsilon^2$  позитивно корельована з  $i$ -м регресором  $x_i$ . Тоді процедура тестування складається із наступних кроків [26]:

1. Упорядкувати (за зростанням чи зменшенням) масив значень регресора  $x_i$ .
2. Виключити із аналізу  $c$  середніх значень змінної.
3. Побудувати окремо регресії для перших та останніх  $(N - c)/2$  значень при умові, що їх достатньо для оцінювання заданого числа параметрів моделі.
4. Обчислити значення похибок  $RSS_1$  і  $RSS_2$ , де індекс 1 відноситься до регресії, яка оцінювалась за меншими значеннями  $x_i$ , а 2 відноситься до регресії, яка оцінювалась за більшими значеннями  $x_i$ . Тоді відношення  $R = RSS_2 / RSS_1$  буде мати (в припущенні існування гетероскедастичності)  $F$ -розподіл із  $[(N - c - 2r)/2, (N - c - 2r)/2]$  ступенями свободи. При висуванні альтернативної гіпотези  $F$  матиме велике значення.

Таким чином, якщо  $R < F_{0,95}$ , то гіпотеза про існування гетероскедастичності буде відхилена на рівні 5%.

Якість тестування при використанні даного тесту залежить зокрема від числа середніх спостережень, які виключаються із аналізу. Так, при великому значенні  $c$  якість тестування буде низькою, оскільки  $RSS_1$  і  $RSS_2$  матимуть невелику кількість ступенів свободи. Однак, якщо значення  $c$  невелике, то якість тестування також буде низькою, оскільки зменшуватиметься різниця між  $RSS_1$  і  $RSS_2$ . Рекомендується вибирати значення  $c \approx N/3$  [26].

### Висновки до розділу

Розглянута методика VaR дозволила уніфікувати підходи до кількісної оцінки ринкового ризику у вигляді єдиного параметра. VaR — це виражена в грошових одиницях базової валюти оцінка величини, яку не перевищать очікувані протягом даного періоду часу (часового горизонту) втрати з заданою ймовірністю (рівнем довіри).

Для оцінки VaR використовуються методи локального оцінювання та повного оцінювання. Волатильність доходності інструменту, пошук якої є основною проблемою при розрахунку VaR дельта-нормальним методом, може бути оцінена з використанням моделей, що враховують динаміку дисперсії у часі. Головним недоліком методів локального оцінювання є припущення про нормальний розподіл ретроспективних даних, за якими і відбувається оцінка волатильності факторів ризику.

Мірою волатильності фінансових процесів часто вситупає дисперсія та стандартне відхилення. Зміна даних величин у часі потребує розроблення та використання таких математичних моделей, що дозволили б коректно описувати поведінку волатильності та прогнозувати її значення на один або

більше кроків у майбутнє. Це значно покращить якість рішень при процесі ризик-менеджменту та інших залежних від фінансового ринку бізнесів, як наприклад, рішення щодо купівлі/продажу акцій, валюти, оцінювання мір ризику банківській діяльності.

Саме тому в цьому розділі викладені основні теоретичні відомості щодо математичних методів моделювання та прогнозування гетероскедастичних процесів.

## РОЗДІЛ 3 РЕЗУЛЬТАТИ ОБЧИСЛЮВАЛЬНИХ ЕКСПЕРИМЕНТІВ

### 3.1 Функціональна схема алгоритму

У процесі виконання обчислювальних експериментів розроблена і практично реалізована програма, яка призначена для аналізу статистичних даних, побудови моделей гетероскедастичних процесів для прогнозування волатильності та оцінювання ринкових ризиків за методологією VaR та ES на основі побудованих моделей, а також для аналізу якості отриманої прогнозованої моделі. Головною метою створення даної програми було проілюструвати роботу методів моделювання фінансово-економічних процесів, їх оцінювання та прогнозування, застосування їх на реальних даних, та отримання відповідного прогнозу стосовно подальшого розвитку подій за для прийняття управлінських рішень. Схему роботи алгоритму схематично зображено на рис.3.1.

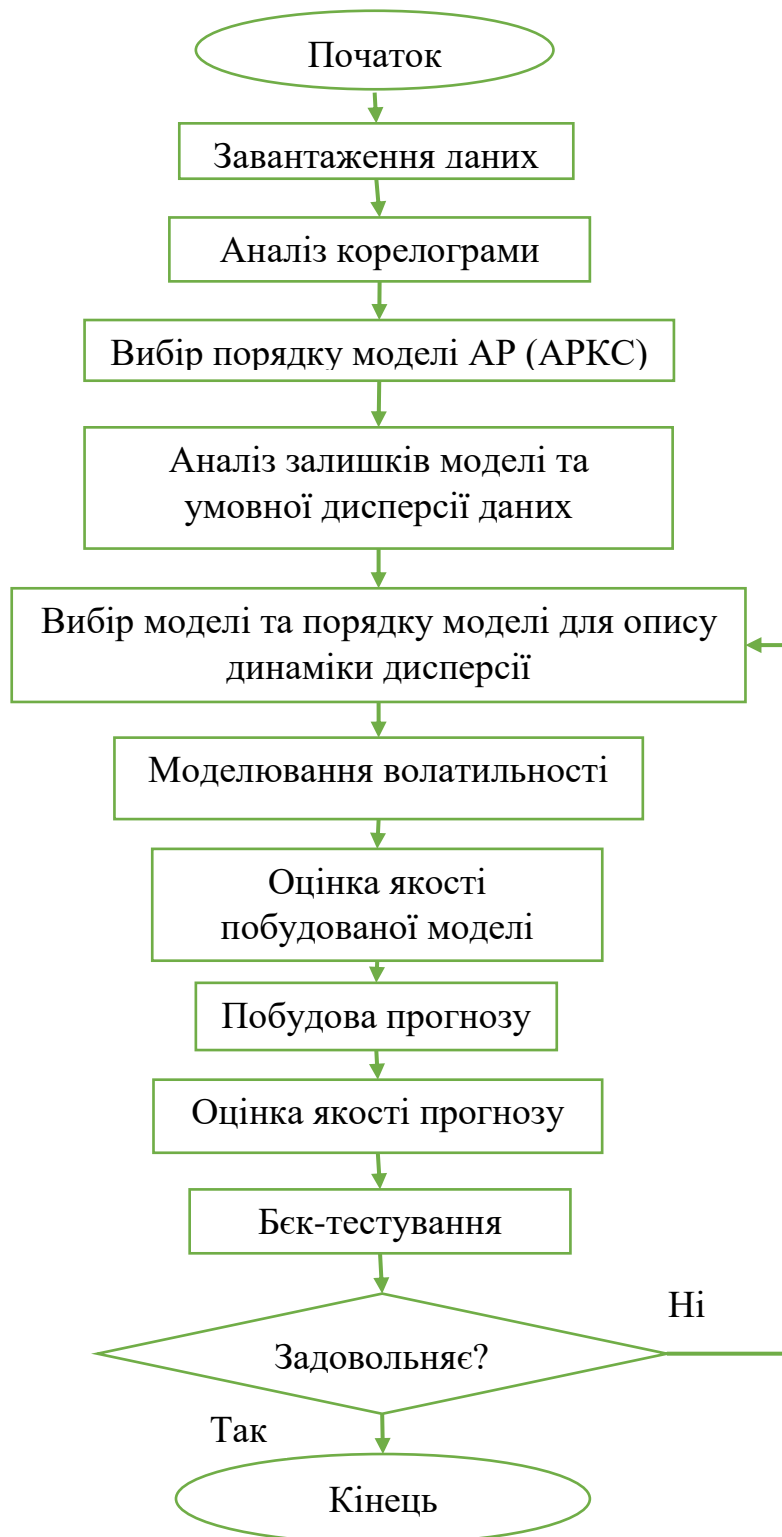


Рисунок 3.1 — Блок-схема алгоритму

### 3.2 Вхідні дані

Для застосування методології оцінювання ризику *VaR* та *ES* на основі гетероскедастичних моделей динаміки їх волатильності у роботі використовується дані біржових, або як їх ще називають, фондових індексів.

Фондовий індекс — це зведений індекс, що обчислюється на основі цін певної групи цінних паперів, так званого «індексного кошика». При розрахунку індексу його початкове (базове) значення може бути сумою цін або прирівнюватися довільному числу (наприклад, 100 або 1000). Для забезпечення порівнянності ціни часто множать на додаткові коефіцієнти. Тому абсолютні значення індексів не важливі. Важливе значення мають зміни індексу з плином часу, що дозволяє судити про загальний напрямок руху цін в індексному кошику, незважаючи на те, що ціни акцій всередині «індексного кошика» можуть змінюватися різноспрямовано. Залежно від принципу покладеного в основу вибору цінних паперів для індексу, він може відображати цінову динаміку групи цінних паперів, об'єднаних за певною ознакою (наприклад висока, середня, мала капіталізація акцій) обраного сектору ринку або широкого ринку акцій в цілому.

Фондові індекси часто є основою однойменних похідних фінансових інструментів (індексних ф'ючерсів або опціонів), які використовуються для інвестиційних та спекулятивних цілей або для хеджування ризиків. На сьогоднішній день існує більше двох тисяч різних біржових індексів, серед яких варто виділити декілька найбільш популярних – це фондові індекси Dow Jones (США), DAX (Німеччина), Nikkei (Японія), NASDAQ (США), RTS (Росія), Standard&Poor's 500 (США), FTSE (Англія).

Для оцінки *VaR* та *ES* та проведення бек-тестування моделей використовувалися дані індексів S&P 500 з 1990 по 2018 рік. Візуальний аналіз даного індексу наведено на рис. 3.2. Для нього було побудовано ряд

доходностей, оскільки абсолютні значення індексу є не так цікаві для оцінювання та прийняття рішень.

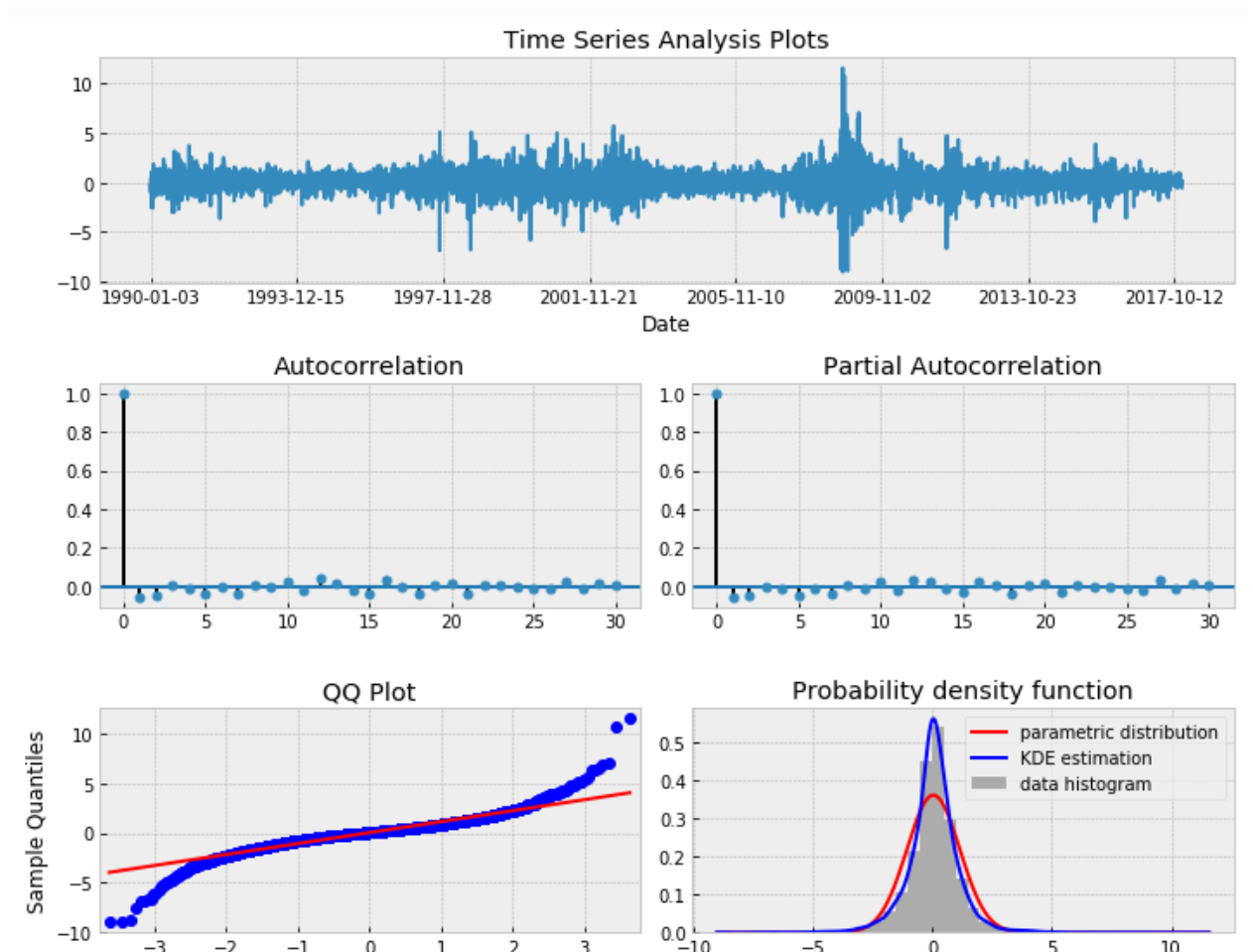


Рисунок 3.2 — Графік значень геометричної доходності індексу S&P 500

Для визначення порядку моделі для середнього значення (Mean model) побудовано також автокореляційну (АКФ) та частково автокореляційну функцію (ЧАКФ), що зображено на рисунку 3.1. За графіком ЧАКФ помітно, що можна побудувати модель для середнього значення  $AR(1)$ . Але оскільки очевидної автокореляції не виявлено, будемо використовувати модель з постійним значенням середнього.

Описова статистика для значень ряду доходностей відображена у табл. 3.1. Можемо зауважити, що коефіцієнт асиметрії даного ряду близьке до

значення при нормальному розподілі, тобто нульовому. Значення ексцесу при цьому дорівнює 9.1, що також більше за значення ексцесу при нормальному розподілі. Це свідчить про те, що форма розподілу ряду доходностей буде «гострішою» від нормального, що гарно також демонструється на графіку щільності розподілу. Також на графіку QQ можна поміти, що хвости розподілу доходність є досить «товстими».

Таблиця 3.1 — Описова статистика ряду доходностей індексу S&P 500

Показник	Значення
Кількість спостережень	7055
Min	-9.034977815503076
Max	11.580036960722694
Mean	0.03457754088588155
Variance	1.2272267570852948
Skewness	0.06833288825573518
Kurtosis	9.104658013838666
Engle (p-value)	2.2518960335047965e-106

### 3.3 Результати прогнозування та оцінювання

Звернемо увагу на результати тесту Engle щодо перевірки гетероскедастичності залишків моделі. Ймовірність, як показано у таблиці 3.1 очевидно менше за значення 0.05. Це свідчить про те, що нуль-гіпотезу у даному випадку необхідно відмінити (нуль-гіпотеза припускає незмінність дисперсії у часі). Отже для залишків даної моделі характерна наявність ефекту ARCH.

Для моделювання динаміки дисперсії, необхідно визначитися з порядком моделі. Для цього будемо корелограму квадратів залишків (рис. 3.3).



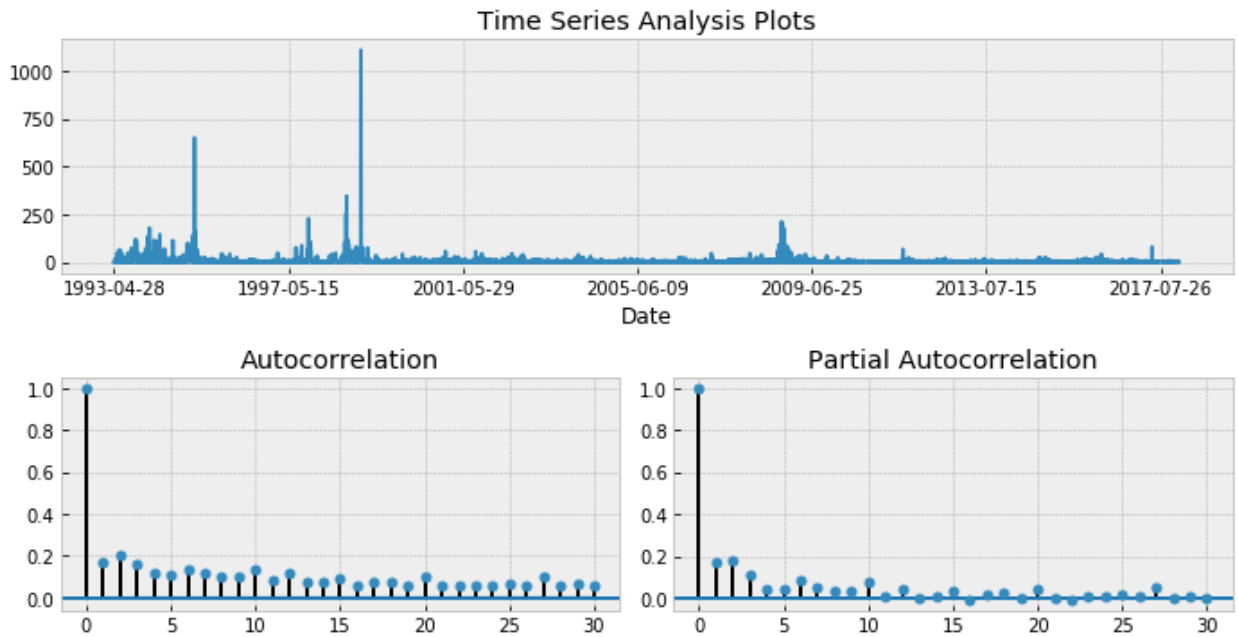


Рисунок 3.3 — Значення АКФ та ЧАКФ для квадратів залишків моделі

Як видно зі значень АКФ та ЧАКФ для рядку квадратів залишків, залежність з лагами більше ніж один може бути присутня, тому у таблиці 3.2 наведемо результати оцінки моделей різного порядку. Однак, як бачимо, результати моделювання дуже схожі, тому для простоти далі будемо розглядати моделі перших порядків.

Таблиця 3.2 — Результати оцінювання моделей різних порядків для індексу S&P 500

	GARCH (1,1)	GARCH (1,2)	GARCH (2,1)	GARCH (2,2)
$\mu$	0.0570324	0.0570297	0.0570034	0.0572123
$\omega$	0.0115434	0.0115429	0.0143272	0.0221132
$\alpha_1$	0.0819303	0.0819297	0.0559868	0.0517633
$\alpha_2$			0.0377281	0.0959552
$\beta_1$	0.90791	0.907911	0.893584	0.209162
$\beta_2$		3.41942e-11		0.623191
<i>LogL</i>	-9237.99	-9237.99	-9234.73	<b>-9229.75</b>
<i>AIC</i>	18484	18486	18479.5	<b>18471.5</b>
<i>BIC</i>	18511.4	18520.3	18513.8	<b>18512.7</b>

Для перевірки побудуємо корелограми для випадкової змінної  $z_t$  (рис. 3.4). Можемо побачити, що взаємо кореляція відсутня, однак хвіст розподілу даної змінної є дещо товстим, тому надалі доцільно буде використати інші розподіли для змінної  $z_t$ , а саме розподіл Стюдента.

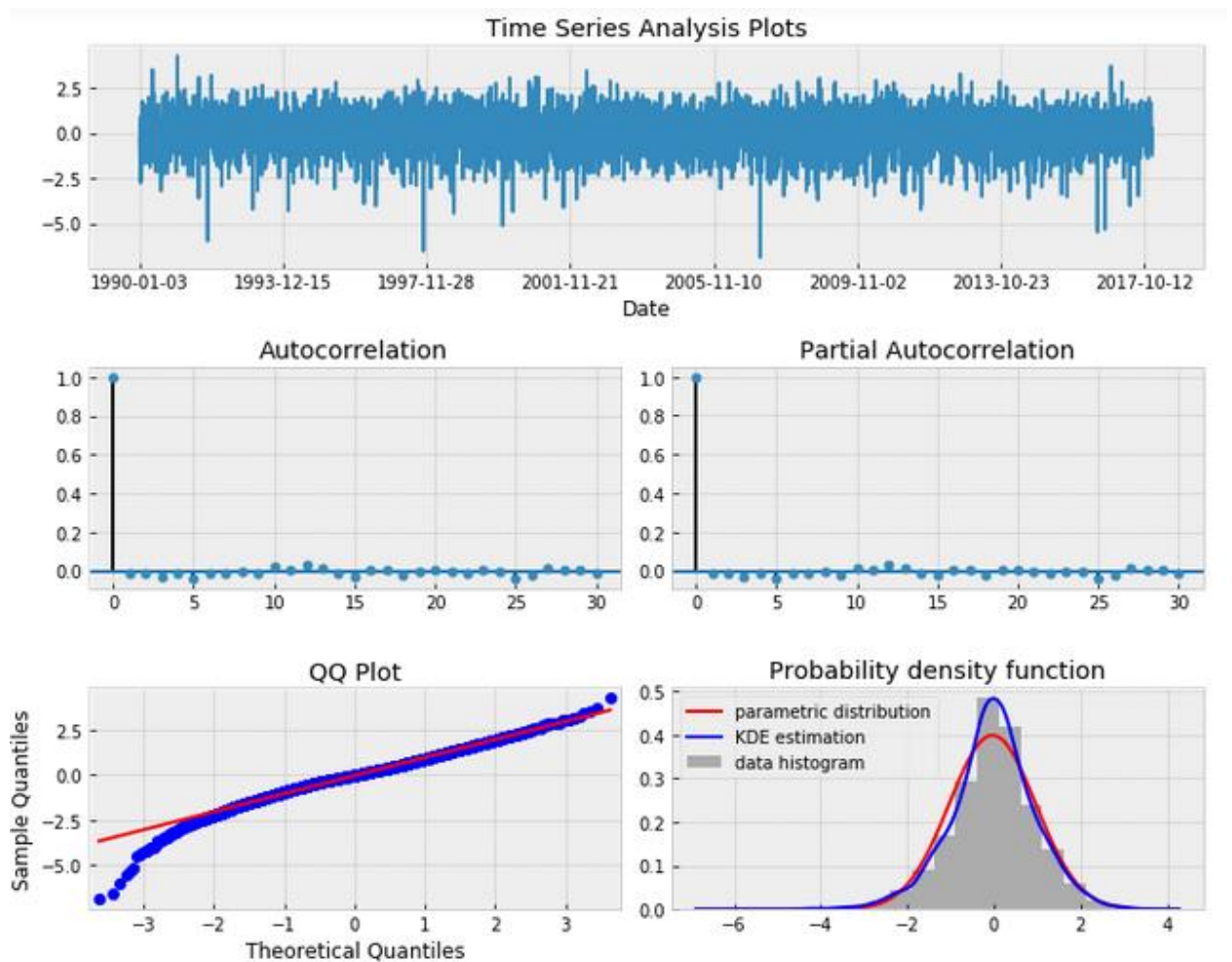


Рисунок 3.4 — Значення АКФ та ЧАКФ для нормально розподіленої випадкової змінної моделі GARCH(1,1)

Отже, побудуємо п'ять моделей: симетричні GARCH(1,1) (3.1), EGARCH(1,1) (3.2) та асиметричні EGARCH(1,1,1) (3.3), GJR- GARCH (1,1,1) (3.4) та TAR(1,1,1) (3.5):

$$X_t = \mu + \varepsilon_t$$

$$\varepsilon_t = \sigma_t Z_t$$

$$\sigma^2_t = k + \alpha \sigma^2_{t-1} + \beta \varepsilon_{t-1}^2 \quad (3.1)$$

$$\ln(\sigma^2_t) = k + \beta \log(\sigma^2_{t-1}) + \alpha \left[ \frac{|\varepsilon_{t-1}|}{\sigma_{t-1}} - E \left\{ \frac{|\varepsilon_{t-1}|}{\sigma_{t-1}} \right\} \right] \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} \ln(\sigma^2_t) &= k + \beta \log(\sigma^2_{t-1}) + \alpha \left[ \frac{|\varepsilon_{t-1}|}{\sigma_{t-1}} - E \left\{ \frac{|\varepsilon_{t-1}|}{\sigma_{t-1}} \right\} \right] + \gamma \frac{\varepsilon_{t-1}}{\sigma_{t-1}} = \\ &= k + \beta \log(\sigma^2_{t-1}) + \alpha \left[ |z_{t-1}| - E\{|z_{t-1}|\} \right] + \gamma z_{t-1} \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\sigma^2_t = k + \alpha \sigma^2_{t-1} + \beta \varepsilon_{t-1}^2 + \gamma I[\varepsilon_{t-1} < 0] \varepsilon_{t-1}^2 \quad (3.4)$$

$$\sigma_t = k + \alpha \sigma_{t-1} + \beta \varepsilon_{t-1} + \gamma I[\varepsilon_{t-1} < 0] \varepsilon_{t-1} \quad (3.5)$$

Результати оцінювання моделей при застосуванні нормального розподілу наведені у таблиці 3.3. Як бачимо, врахування асиметрії дає значне покращення при моделюванні волатильності. Найкращою моделлю за інформаційними критеріями є асиметрична модель TARЧН. Отже, можемо заключити, що даному індексу дуже характерний описаний вище ефект «левериджу», при якому негативні абсолютні значення шоків мають більший вплив на значення волатильності. Застосуємо також розподіл Стюдента для побудови моделей. Результати наведені у таблиці 3.4. Можемо помітити, що навіть у даному випадку моделі TARЧН (1,1,1) та EGARЧН (1,1,1) мають значну перевагу поміж інших, оскільки інформаційні критерії мають мінімальні значення. Цікаво також звернути увагу на значення функції правдоподібності та інформаційні критерії при порівнянні двох розподілів. Навіть для «найгіршої» моделі EGARЧН (1,1) застосування іншого розподілу дає значне покращення. Це в першу чергу спричинено тим, що, як зазначалося раніше, хвости початкового ряду доходності є досить товстими.

Таблиця 3.3 — Порівняння різних GARCH моделей для індексу S&P 500 для нормального розподілу

	GARCH (1,1)	EGARCH (1,1)	EGARCH (1,1,1)	TARCH (1,1,1)	GJR- GARCH (1,1,1)
$\mu$	0.0570324	0.0590636	0.0286726	0.0235426	0.0290237
$\omega$	0.0115434	0.00481054	-0.00018057	0.0195264	0.0147326
$\alpha$	0.0819303	0.17161	0.126045	0.00565508	0.00112733
$\beta$	0.90791	0.985457	0.980887	0.924344	0.912464
$\gamma$			-0.115093	0.134324	0.142586
<i>LogL</i>	-9237.99	-9245.01	-9100.14	<b>-9088.7</b>	-9119.69
<i>AIC</i>	18484	18498	18210.3	<b>18187.4</b>	18249.4
<i>BIC</i>	18511.4	18525.5	18244.6	<b>18221.7</b>	18283.7

Таблиця 3.4 — Порівняння різних GARCH моделей для індексу S&P 500 для розподілу t-Стюдента

	GARCH-t (1,1)	EGARCH-t (1,1)	EGARCH-t (1,1,1)	TARCH-t (1,1,1)	GJR- GARCH-t (1,1,1)
$\mu$	0.0653453	0.0632046	0.0409904	0.0371169	0.043806
$\omega$	0.00607578	0.00633503	-0.000375	0.0163033	0.0102243
$\alpha$	0.076357	0.163291	0.128547	0.00184591	4.29456e-14
$\beta$	0.921517	0.991369	0.986021	0.927068	0.916361
$\gamma$			-0.121009	0.142171	0.149294
$\nu$	6.36118	6.26571	7.14544	7.4202	7.14025
<i>LogL</i>	-9083.98	-9086.11	-8973.23	<b>-8967.57</b>	-8990.38
<i>AIC</i>	18178	18182.2	17958.5	<b>17947.1</b>	17992.8
<i>BIC</i>	18212.3	18216.5	17999.6	<b>17988.3</b>	18033.9

Далі, виконаємо однокроковий прогноз для усіх вище зазначених моделей та порівняємо результати прогнозування. Побудова прогнозів виконувалась методом застосування ковзного вікна, шириною у 1000 значень. Це дозволяє використовувати більш актуальну інформацію для побудови моделі та отримання прогнозу за її допомогою. Результати та порівняння прогнозів наведені у таблиці 3.4

Таблиця 3.5 — Результати прогнозування

	MAPE	MAE	U-Theil
GARCH (1,1)	33.349	29.017	0.081667
EGARCH (1,1)	32.68967	29.23267	0.082333
EGARCH (1,1,1)	13.99867	19.33867	<b>0.054667</b>
TARCH (1,1,1)	<b>13.046</b>	18.742	0.055667
GJR-GARCH (1,1,1)	13.98267	<b>18.73</b>	0.055
GARCH (1,1)-t	30.239	27.12	0.0618
EGARCH (1,1) –t	28.578	25.267	0.0514
EGARCH (1,1,1) –t	<b>11.057</b>	14.435	0.0346
TARCH (1,1,1) –t	11.154	<b>13.512</b>	<b>0.0339</b>
GJR-GARCH (1,1,1)-t	11.234	14.322	0.0342

З огляду на коефіцієнт Тейла можна сказати, що всі моделі є прийнятними для прогнозування, та, як бачимо вибрати якусь одну, що має перевагу не вдається. Варто тільки зробити висновок, що загалом, асиметричні моделі є кращими, ніж симетричні, та зауважити переваги щодо застосування розподілу Стюдента. Перевага асиметричних моделей пов'язана з тим, що дані індексу мають значний вплив віде'мних потрясінь на волатильність, тобто «ефект важеля» є відчутним.

Проілюструємо на графіку значення вибіркової та спрогнозованої умовної дисперсії для моделі TARCH (1,1,1) –t, як для однієї з найкращих моделей за оцінками якості прогнозів. Легко помітити значне перевищення прогнозованого значення особливо у критичних точках, дана поведінка була характерна для всіх моделей. Не виключено, що це вильється на переоцінці ризику у даний період, що відобразатимуть тести якості цих оцінок. Звичайно, ризик краще переоцінити, ніж недооцінити, але це може спричинити обережні дії обличчя, що приймає рішення та недоотримання прибутку за прийняття ризику.

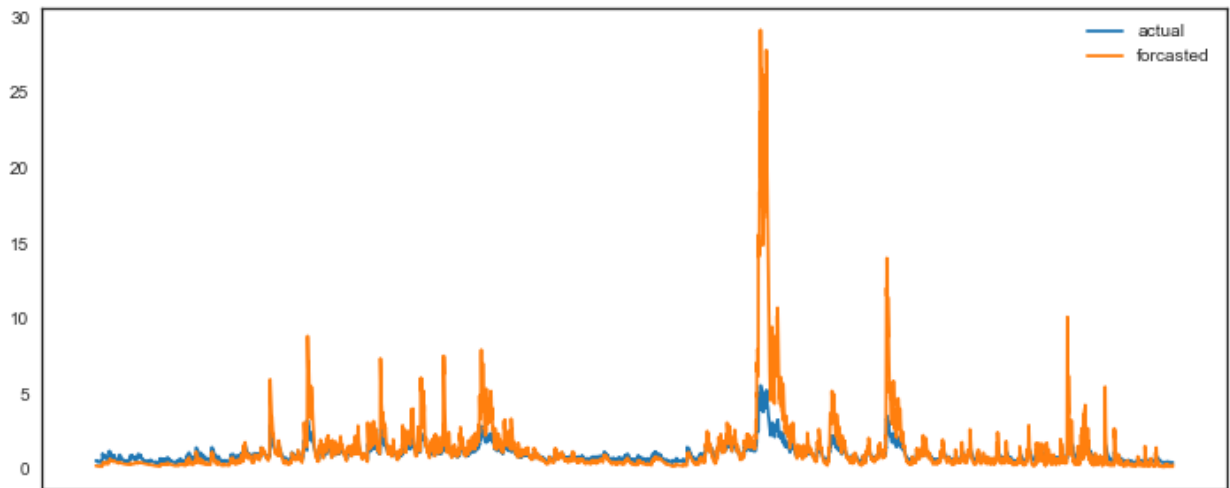


Рисунок 3.5 — Значення вибіркової та спрогнозованої умовної волатильності для моделі TARCh (1,1,1) –t

Проведемо оцінку ризикової вартості та очікуваного дефіциту за побудованими моделями волатильності для довірчих інтервалів 95% та 99%. Результати порівняння та верифікації моделей для оцінки ризику подано у таблиці 3.6. та 3.7. В дужках наведено загальну кількість перевищень (абсолютне значення). Як бачимо, з табл. 3.6 та 3.7 усі моделі є прийнятними для оцінювання ризиків. Симетричні моделі с нормальним розподілом мають гірші показники якості, це в першу чергу залежить від того, скільки недооцінених втрат було зазнано. Можна помітити, що симетричні моделі дають найгірші результати при високому рівні довіри. Використання розподілу Стюдента дає значне покращення у статистичних тестах якості модедей. Цікавими є також тести для оцінки якості ES; у симетричних модедей вони приймають менші значення, але оскільки даний тест враховує усереднене значення тільки у випадках перевищення, яких у симетричних модедей значно більше, дане значення є логічним. Тим не менш, значення усіх модедей є дуже схожими, однак з урахуванням усіх тестів на якість, найбільш пристосованою для оцінки ризику на парктиці, вважатимемо асиметричну EGARCH та TARCh-t моделі.

Таблиця 3.6 — Результати процедури бек-тестування для оцінки VaR та ES за побудованими моделями на основі нормального розподілу

		GARCH (1,1)	EGARCH (1,1)	EGARCH (1,1,1)	TARCH (1,1,1)	GJR- GARCH (1,1,1)
$\alpha = 95\%$	VaR 95 %	(385) 0.063	(390) 0.064	<b>(269)</b> <b>0.044</b>	(273) 0.045	(271) 0.0447
	UT (p- value)	0.072	0.065	0.11	0.085	0.037
	IT (p- value)	0.531	0.089	0.702	0.698	0.641
	CT (p- value)	0.216	0.072	0.224	0.217	0.182
	ES 95%	(205) 0.033	(209) 0.035	(127) 0.02	(132) 0.021	(130) 0.0214
	V1	-0.092	-0.095	-0.049	-0.076	-0.054
	V2	-0.458	-0.534	-0.469	-0.553	-0.474
	V	0.275	0.314	<b>0.259</b>	0.315	0.264
		GARCH (1,1)	EGARCH (1,1)	EGARCH (1,1,1)	TARCH (1,1,1)	GJR- GARCH (1,1,1)
$\alpha = 99\%$	VaR 99 %	(130) 0.0214	(138) 0.0227	<b>(81)</b> <b>0.013</b>	(90) 0.014	(83) 0.0137
	UT (p- value)	0.001	0.001	0.003	0.002	0.001
	IT (p- value)	0.044	0.074	0.233	0.241	0.214
	CT (p- value)	0.001	0.001	0.022	0.02	0.017
	ES 99%	(77) 0.0127	(82) 0.0135	(45) 0.007	(50) 0.008	(48) 0.007
	V1	-0.17	-0.185	-0.118	-0.138	-0.121
	V2	-0.230	-0.236	-0.297	-0.350	-0.331
	V	<b>0.200</b>	0.2105	0.207	0.244	0.226

Таблиця 3.7 — Результати процедури бек-тестування для оцінки VaR та ES за побудованими моделями на основі розподілу t-Стюдента

		GARCH-t (1,1)	EGARCH-t (1,1)	EGARCH-t (1,1,1)	TARCH-t (1,1,1)	GJR- GARCH-t (1,1,1)
$\alpha = 95\%$	VaR	(419)	(415)	(306)	<b>(304)</b>	(309)
	95 %	0.069	0.068	0.051	<b>0.050</b>	0.051
	UT (p- value)	0.349	0.224	0.407	0.384	0.323
	IT (p- value)	0.481	0.089	0.742	0.751	0.738
	CT (p- value)	0.566	0.421	0.605	0.613	0.599
	ES 95%	(164) 0.027	(159) 0.026	(110) 0.018	(111) 0.018	(111) 0.018
	V1	0.026	0.023	0.037	0.0234	0.036
	V2	-0.49	-0.50	-0.535	-0.545	-0.522
V	<b>0.258</b>	0.262	0.286	0.284	0.279	

Наостанок, наведемо візуальне відображення реального та прогнозованого значення VaR та ES для рівня довіри 95%, побудованого на основі моделі EGARCH. Наводити дані графіки для всіх моделей вважатимемо зайвим, оскільки для даного розміру вибірки, а як наслідок і масштабу, вони є неінформативними.



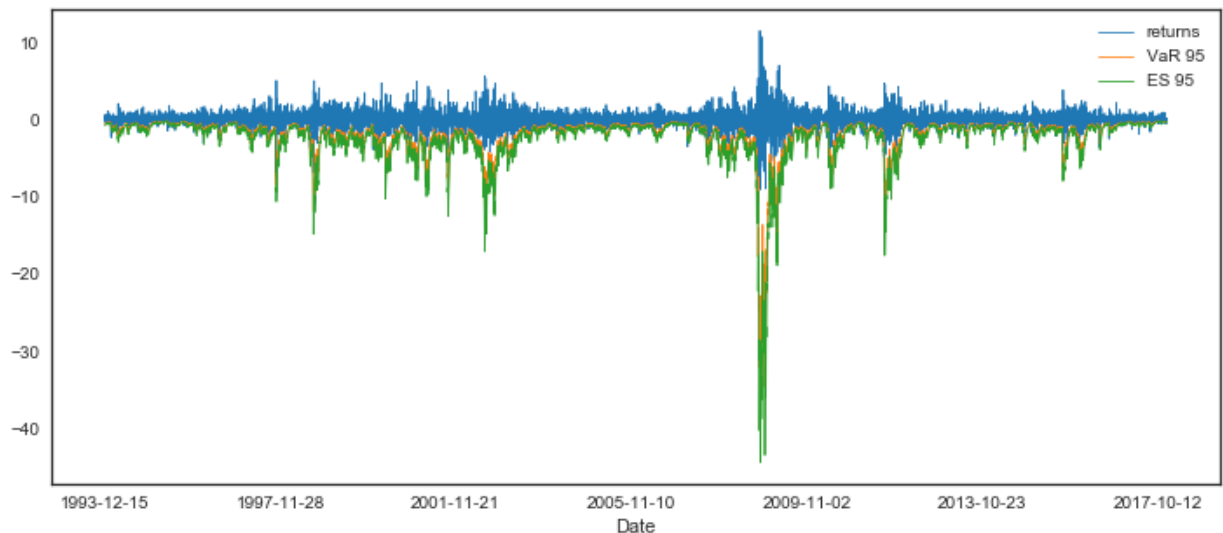


Рисунок 3.6 — Значення VaR та ES для рівня довіри 95%, побудованих на основі моделі EGARCH (1,1,1)

Отже, можемо підсумувати проведені дослідження і дійти до висновку, що за статистичними критеріями асиметричні моделі TARЧН та EGARCH дають кращі результати, однак ми маємо враховувати практичну значимість побудованих моделей, тобто придатність до оцінювання насамперед ринкових ризиків. Так, можемо сказати, що усі моделі є придатними для оцінювання ризику. З огляду на результати наведені у таблицях асиметрична модель експоненційної узагальненої авторегресійної умовно гетероскедастичності є найбільш адекватною для поставленої задачі, оскільки вона не завищує оцінки ризикової вартості та найкраще відображає динаміку процесу, що добре помітно при візуальній інтрепритації. Звичайно, переоцінити втрати краще, ніж їх недооцінити, однак це може призвести до надмірно обережних дій інвесторів та знизити їх можливий прибуток.

## Висновки до розділу

Розроблена програма для обчислювальних експериментів призначена для моделювання, оцінювання та прогнозування фінансово-економічних гетероскедастичних процесів на основі емпіричної вибірки даних. Були використані наступні моделі: для динаміки дисперсії симетричні GARCH(1,1), EGARCH(1,1) та асиметричні EGARCH(1,1,1), TAR(1,1,1) та GJR-GARCH(1,1,1), що ґрунтуються на використанні статистичних характеристик процесу для оцінювання структури моделі та її прогнозів і метод максимальної правдоподібності – для оцінювання параметрів. Для моделювання та прогнозування були використані стандартний нормальний розподіл та розподіл Стюдента, що дало змогу більш адекватно пристосуватись до динаміки реальних даних. Прогнозування волатильності обчислювалося за допомогою ковзного вікна, розміром у 1000 значень, на один крок вперед. На основі даного спрогнозованого ряду було побудовано оцінку ризику методами Value-at-risk та Expected Shortfall для рівнів довіри 95% та 99%. Для валідації якості отриманих прогнозів оцінок ризику методом VaR були використані інноваційні методи, що враховують сутінь покриття та незалежності у часі недооцінених викидів, а також застосований метод для перевірки якості оцінок ES.

Запропонований алгоритм довольняє основним характеристикам програмного моделювання: використовує дані і моделі, призначена для надання допомоги суб'єкту прийняття рішення. Мета створеної системи – проілюструвати роботу методів моделювання, оцінювання та прогнозування, застосування їх на реальних даних, отримання відповідного прогнозу для оцінки ризику та порівняння результатів.

## РОЗДІЛ 4 РОЗРОБЛЕННЯ СТАРТАП-ПРОЕКТУ

### 4.1 Інформаційна карта проекту

Назва проекту: Система автоматизованого моделювання нестационарних процесів та оцінювання ризиків «RickOff»

Автори проекту: Чуприна Олександра Євгенівна

Коротка анотація. Своєчасне оцінювання ризику необхідне на усіх етапах прийняття рішень в багатьох сферах діяльності: бізнес-плануванні, економіці, метеорології, екології, медицині і т.д. Незважаючи на принципову відмінність напрямів, ризик-менеджмент в цілому керується єдиною метою: визначення характеру протікання процесу протягом усього історичного періоду та прогнозування його поведінки у майбутньому, ідентифікацію основних ризикових компонент та оцінювання їх впливу на подальшу діяльність установи. Для кожного процесу залежно від цільової спрямованості та прогнозованих параметрів підбираються відповідні методи аналізу та математичний апарат. Дана система дає можливість завантажити дані установи в зручному форматі, швидко та зручно проаналізувати виявлені взаємозв'язки для правильного встановлення пріоритетів та вагових коефіцієнтів, самостійно підбирає найбільш вдалий метод прогнозування для кожного процесу та оцінює ризики для заданого рівня довіри. Завдяки цьому можна оцінити можливі втрати за для своєчасного прийняття рішення у будь-якій сфері.

Термін реалізації проекту: 24 місяця

Необхідні ресурси:

- а) інтелектуальні: спеціаліст з аналізу даних; розробник; тестувальник; продуктовий менеджер проекту;
- б) матеріальні: комп'ютери/ноутбуки; сервер; офісне приміщення;

в) фінансові: заробітні плати працівникам; апаратне забезпечення; щренда приміщення.

Головні цілі та завдання проекту:

а) огляд підходів для статистичного аналізу даних, методів прогнозування та оцінювання ризиків;

б) створення програмного забезпечення для цієї системи.

Очікувані результати: система автоматизованого моделювання нестационарних процесів та оцінювання ризиків стане помічником у багатьох сферах діяльності. Вона дозволить вести більш ефективну економічну діяльність, а також при керуванні бізнесом. Завдяки якісному оцінюванню фінансового ризику компанії зможуть як застрахувати себе від майбутніх збитків, так і виконувати прибуткові ризикові операції з найменшими втратами.

#### 4.2 Команда стартап-проекту

Обов'язки та ключові ролі початкової команди проекту висвітлені у таблиці 4.1.

Таблиця 4.1 – Команда проекту

<i>Посада</i>	<i>Функціональні обов'язки та досвіду роботи</i>	<i>Роль</i>
Спеціаліст з аналізу даних	вибір архітектури проекту; пошук нових галузей в яких доцільно буде використовувати сервіс; статистичний аналіз великих об'ємів даних та пошук зв'язків та	Рішення бізнес-задач з використанням передових методів обробки даних

Продовження таблиці 4.1

	закономірностей за допомогою сучасних методів	
Розробник	- створення програмного забезпечення проекту та вдосконалення існуючих рішень	Реалізація проекту та його вдосконалення
Тестувальник	- пошук імовірних недоліків та помилок у функціонуванні продукту - пропозиції щодо вдосконалення	Відповідальність за якість та функціональні можливості продукту
Продуктовий менеджер проекту	- бренд-менеджмент - перемовини з замовниками сервісу - моніторингу та аналіз даного сектору послуг	Пошук клієнтів, нових ніш на ринку, просування бренду

### 4.3 Бізнес-модель Canvas

Бізнес-модель Canvas – один з інструментів стратегічного управління для підприємців, який дозволяє зробити опис запропонованого проекту або проаналізувати модель бізнесу, яка використовується, з позицій її ефективності та можливостей розвитку. Застосування даного фреймворку проілюстровано у таблиці 4.2.

Таблиця 4.2 – Бізнес-модель Canvas

№	Назва	Зміст
1	Споживчі сегменти	дослідницькі центри; банки; медицина/охорона здоров'я; університети; страхування; енергетика та інші компанії, специфіка роботи яких пов'язана із прогнозуванням та ризиком
2	Ціннісні пропозиції	Ведення більш ефективної економічної діяльності, при керуванні бізнесом. Завдяки якісному оцінюванню фінансового ризику компанії зможуть як застрахувати себе від майбутніх збитків, так і виконувати прибуткові ризикові операції з найменшими втратами. Вирішення складних задач та виявлення основних можливостей для майбутнього розвитку Продукт, який не потребує особливих налаштувань перед першим використанням
3	Канали збуту	<i>прямі канали:</i> -сайт-візитка; - конференції аналітиків/бізнес-аналітиків - презентації для цільового сегменту розроблених рішень; - презентації в вузах; <i>партнерські канали:</i> служба роботи з клієнтами.

## Продовження таблиці 4.2

4	Взаємовідносини з клієнтами	Служба підтримки; Супроводження продукту протягом певного терміну; Особливий підхід для кожного клієнта; Формат договорів на довгосрокову підписку
5	Потоки надходження доходу	Розробка спеціалізованого продукту (за умови надання клієнтом бази даних) . Покупка ліцензії на певний термін (універсальна web-версія продукту) - довгосрокова підписка для використання необхідної частини розробленого рішення; разові виплати за проведення аналізу
6	Ключові ресурси	технічні ресурси (для виконання хмарних обчислень, розвернення інфраструктури) інтелектуальні ресурси трудові ресурси
7	Ключові види діяльності	аналіз та прогнозування; візуалізація; клієнтська аналітика; керування даними; прийняття рішень; керування ризиками та їх оцінювання;

## Продовження таблиці 4.2

8	Ключові партнери	<p><i>Компанії, що спеціалізуються на аудиті і консалтингу</i> - актуальна інформація щодо стану економіки, показників що впливають на прибутки компаній; досвід, що мають компанії в комерційній, технологічній та ін. сферах, а також в проектуванні та поширенні бізнес-рішень</p> <p><i>Центри даних</i> -постачання даних для навчання моделей, перевірки їх прогнозної якості, обмін сучасними підходами та моделями</p> <p><i>Учбові центри</i> - обмін досвідом, молодими спеціалістами</p>
9	Структура витрат	<p>витрати на зарплатню; оренда серверів; оренда приміщень; відрядження, конференції та внутрішні ресурси; підтримка програмних рішень; просування продукту та пошук нових клієнтів</p>

## 4.4 Аналіз ринкових можливостей запуску стартап-проекту

Визначення ринкових можливостей, які можна використати під час ринкового впровадження проекту, та ринкових загроз, які можуть перешкодити реалізації проекту, дозволяє спланувати напрями розвитку



проекту із урахуванням стану ринкового середовища, потреб потенційних клієнтів та пропозицій проектів-конкурентів.

Спочатку проводиться аналіз попиту: наявність попиту, обсяг, динаміка розвитку ринку (табл. 4.3).

Таблиця 4.3 – Попередня характеристика потенційного ринку стартап-проекту

№ п/п	Показники стану ринку (найменування)	Характеристика
1	Кількість головних гравців, од	3
2	Динаміка ринку (якісна оцінка)	Зростає
3	Наявність обмежень для входу (вказати характер обмежень)	Вихід на ринок прямого конкурента, або суттєве зниження вартості послуг непрямих конкурентів (консалтингових компаній)
4	Специфічні вимоги до стандартизації та сертифікації	немає
5	Середня норма рентабельності в галузі (або по ринку), %	300

**Рентабельність** — поняття, що характеризує економічну ефективність виробництва, за якої за рахунок грошової виручки від реалізації продукції (робіт, послуг) повністю відшкодовує витрати на її виробництво й одержується прибуток як головне джерело розширеного відтворення [27].

Суть одного із найважливіших методів оцінки економічної ефективності інвестицій полягає у розрахунку їх середньої рентабельності за формулою [28]

$$R = \frac{P}{1 + n} \cdot 100,$$

де  $P$  - прибуток за час експлуатації проекту;

$n$  - час експлуатації проекту.

Інвестувати грошові засоби доцільно тоді, коли від цього можна отримати більший прибуток, ніж від їх зберігання у банку. Порівнюючи середньорічну рентабельність інвестицій зі ставкою банківського відсотка, можна дійти висновку, що вигідніше [28].

Середня норма рентабельності в галузі (або по ринку) порівнюється із банківським відсотком на вкладення. За умови, що останній є вищим, можливо, має сенс вкласти кошти в інший проект.

За результатами аналізу таблиці робиться висновок щодо того, чи є ринок привабливим для входження за попереднім оцінюванням.

Надалі визначаються потенційні групи клієнтів, їх характеристики, та формується орієнтовний перелік вимог до товару для кожної групи (табл. 4.4).

Таблиця 4.4 – Характеристика потенційних клієнтів стартап-проекту

Потреба, що формує ринок	Цільова аудиторія (цільові сегменти ринку)	Відмінності у поведінці різних потенційних цільових груп клієнтів	Вимоги споживачів до товару
Необхідне програмне забезпечення для прогнозування показників та оцінювання ринкових ризиків	Потенційними цільовими групами є дослідницькі центри, університети та компанії, специфіка роботи яких пов'язана із аналізом, ризик-менеджментом та прогнозуванням (державний сектор, охорона здоров'я, ритейл, банки)	Відмінність у підходах та застосованих моделях у прогнозуванні та ризик-менеджменті, відмінність у сферах діяльності клієнтів	Рішення має бути швидким, ефективним, мати зрозумілий юзер-френдлі інтерфейс

Після визначення потенційних груп клієнтів проводиться аналіз ринкового середовища: складаються таблиці факторів, що сприяють ринковому впровадженню проекту, та факторів, що йому перешкоджають (табл. 4.5-4.6). Фактори в таблиці подавати в порядку зменшення значущості.

Таблиця 4.5 – Фактори загроз

№ п/п	Фактор	Зміст загрози	Можлива реакція компанії
1	Конкуренція	Вихід на ринок великої компанії	<p>Розширити рекламну кампанію до виходу нового гравця на ринок.</p> <p>Передбачити додаткові переваги власного ПЗ для того, щоб повідомити про них саме після виходу міжнародної компанії на ринок.</p> <p>Обрати нову цільову аудиторію і зосередитися на ній</p> <p>Або наявність вихід з ринку.</p>
2	Зміна потреб користувачів	<p>Дане ПЗ не задовольняє всі потреби користувачів.</p> <p>Користувачам необхідне ПЗ з іншим функціоналом та підходами до аналізу</p>	<p>Передбачити можливість додавання нового функціоналу до існуючого рішення;</p> <p>Передбачити можливості зміни напрямку продукту взагалі, так звану точку Pivot</p>

## Продовження таблиці 4.5

3	Зростання попиту	Занадто швидкі темпи зростання попиту на даного типу ПЗ	Розширення штату, пошук нових методів для задоволення як найбільшої кількості клієнтів; передбачення гнучкості рішення
---	------------------	---	--

Таблиця 4.6 – Фактори можливостей

№ п/п	Фактор	Зміст можливості	Можлива реакція компанії
1	Конкуренція	Відсутність аналогічного продукту для вітчизняного користувача.	Локалізація та адаптація сервісу для локальних груп. Адаптація до вітчизняних особливостей.
2	Розробка нових методів прогнозування та оцінювання ризиків	Розробка нових статистичних методів, що будуть швидші та ефективніші для конкретних цілей	Покращити ПЗ додаванням нового функціоналу, розширення існуючих можливостей
3	Зростання попиту	Можливість залучити більшу кількість клієнтів	Розширення інфраструктури, гнучність рішення, розширення існуючих можливостей, підходів та моделей

Надалі проводиться аналіз пропозиції: визначаються загальні риси конкуренції на ринку (табл. 4.7).

Таблиця 4.7 – Ступеневий аналіз конкуренції на ринку

Особливості конкурентного середовища	В чому проявляється дана характеристика	Вплив на діяльність підприємства (можливі дії компанії, щоб бути конкурентоспроможною)
1. Вказати тип конкуренції <ul style="list-style-type: none"> <li>• монополістична конкуренція</li> </ul>	Існує декілька фірм-конкурентів	Підтримка якості продукту та постійні нововведення
2. За рівнем конкурентної боротьби <ul style="list-style-type: none"> <li>• міжнародний</li> </ul>	Фірми-конкуренти - з інших країн.	Створити основу ПЗ таким чином, щоб можна було легко переробити дане ПЗ для використання у інших країнах та галузях
3. За галузевою ознакою <ul style="list-style-type: none"> <li>• міжгалузєва</li> </ul>	Продукт може використовуватись для різних галузей	Постійне вдосконалення продукту, що не має прив'язки до сфери, гнучкість рішення
4. Конкуренція за видами товарів: - товарно-видова	Види товарів є однаковими, а саме – ПЗ для стат. та бізнес аналізу	Створити ПЗ, враховуючи недоліки конкурентів

## Продовження таблиці 4.7

5. За характером конкурентних переваг - нецінова	Вдосконалення технології створення ПЗ, щоб собівартість була нижчою	Використання менш дорогих технологій для розробки, ніж використовують конкуренти
6. За інтенсивністю - марочна	Велике значення для клієнтів має бренд компаній конкурентів, які вже завоювали місце на ринку	Рекламні кампанії, підтримка компаній партнерів

Таблиця 4.8 – Аналіз конкуренції в галузі за М. Портером

	Прямі конкуренти в галузі	Потенційні конкуренти	Постачальники	Клієнти	Товари-замінники
Складові аналізу	SAS SPSS Eviews	Наявність вже існуючих рішень	-	Контроль якості продукту	Наявність більш широкого функціоналу, зручнішого інтерфейсу та авторитет (перевірена якість)

Продовження таблиці 4.8

Висновки:	доволі інтенсивна боротьба з вже закріпившимися гравцями	Є можливість і входу в ринок, але є потенційні конкуренти. Строки виходу на ринок -12 міс.	-	Клієнти диктують усі умови роботи на ринку	Необхідно випускати ПЗ не гірше, ніж у конкурентів та розширяти функціонал
-----------	--	--	---	--	--

За результатами аналізу таблиці робиться висновок щодо принципової можливості роботи на ринку з огляду на конкурентну ситуацію. Також робиться висновок щодо характеристик (сильних сторін), які повинен мати проект, щоб бути конкурентоспроможним на ринку. Другий висновок враховується при формулюванні переліку факторів конкурентоспроможності (табл. 4.9).

Таблиця 4.9 – Обґрунтування факторів конкурентоспроможності

№ п/п	Фактор конкурентоспроможності	Обґрунтування (наведення чинників, що роблять фактор для порівняння конкурентних проектів значущим)
1	Ціна	Більш доступна ціна збільшує кількість потенційних клієнтів



## Продовження таблиці 4.9

2	Виконання програмного забезпечення у кросплатформеному вигляді	Можливість використання програмного забезпечення на будь-якій платформі.
3	Функціонал	Методи і моделі, що підходять для багатьох сфер діяльності
4	Мобільність	Розробка веб-версій з базовим функціоналом

За визначеними факторами конкурентоспроможності (табл. 4.9) проводиться аналіз сильних та слабких сторін стартап-проекту (табл. 4.10).

Таблиця 4.10 – Порівняльний аналіз сильних та слабких сторін «назва проекту»

№ п/п	Фактор конкурентоспроможності	Бали 1-20	Рейтинг товарів конкурентів у порівнянні з даним						
			-3	-2	-1	0	+1	+2	+3
1	Ціна	10		+					
2	Виконання програмного забезпечення у кросплатформеному вигляді	15					+		
3	Функціонал	20				+			
4	Мобільність	10			+				

Фінальним етапом ринкового аналізу можливостей впровадження проекту є складання SWOT-аналізу (матриці аналізу сильних (Strength) та слабких (Weak) сторін, загроз (Troubles) та можливостей (Opportunities) (табл.4.11) на основі виділених ринкових загроз та можливостей, та сильних і слабких сторін (табл. 4.10).

Перелік ринкових загроз та ринкових можливостей складається на основі аналізу факторів загроз та факторів можливостей маркетингового середовища. Ринкові загрози та ринкові можливості є наслідками (прогнозованими результатами) впливу факторів, і, на відміну від них, ще не є реалізованими на ринку та мають певну ймовірність здійснення. Наприклад: зниження доходів потенційних споживачів – фактор загрози, на основі якого можна зробити прогноз щодо посилення значущості цінового фактору при виборі товару та відповідно, – цінової конкуренції (а це вже – ринкова загроза).

Таблиця 4.11 – SWOT- аналіз стартап-проекту

Сильні сторони: ціна, функціонал, мобільність	Слабкі сторони: кросплатформенність, недостатня кількість спеціалістів підкованих у найсучасніших методах
Можливості: конкуренція, розробка нових методів прогнозування, зростання попиту	Загрози: Конкуренція, зміна потреб користувачів, занадто швидке зростання попиту

На основі SWOT-аналізу розробляються альтернативи ринкової поведінки (перелік заходів) для виведення стартап-проекту на ринок та орієнтовний оптимальний час їх ринкової реалізації з огляду на потенційні проекти конкурентів, що можуть бути виведені на ринок.

Визначені альтернативи аналізуються з точки зору строків та ймовірності отримання ресурсів (табл. 4.12).

Таблиця 4.12 – Альтернативи ринкового впровадження стартап-проекту

№ п/п	Альтернатива (орієнтовний комплекс заходів) ринкової поведінки	Ймовірність отримання ресурсів	Строки реалізації
1	Створення повноцінного веб-сервісу	65%	11 місяців
2	<i>Створення програмного забезпечення</i>	80%	12 місяців
3	Перехід на безкоштовне розповсюдження	50%	5 місяців

З означених альтернатив обирається та, для якої: а) отримання ресурсів є більш простим та ймовірним; б) строки реалізації – більш стислими.

#### 4.5 Розроблення ринкової стратегії проекту

Розроблення ринкової стратегії першим кроком передбачає визначення стратегії охоплення ринку: опис цільових груп потенційних споживачів (табл. 4.13).

Таблиця 4.13 – Вибір цільових груп потенційних споживачів

№ п/п	Опис профілю цільової групи потенційних клієнтів	Готовність споживачів сприйняти продукт	Орієнтовний попит в межах цільової групи (сегменту)	Інтенсив ність конкурен ції в сегменті	Простота входу у сегмент
1	Компанії (українські та міжнародні), специфіка роботи яких пов'язана із аналізом даних, прогнозуванням та ризик- менеджментом.	Висока	Високий	Сильна	Складно
2	Державні підприємства, специфіка роботи яких пов'язана із аналізом даних, прогнозуванням та ризик- менеджментом.	Помірна	Високий	Сильна	Складно

Продовження таблиці 4.13

3	Університети та дослідницькі центри, специфіка роботи яких пов'язана із аналізом даних, прогнозуванням та ризик-менеджментом.	Помірна	Помірний	Помірна	Середня складність
Які цільові групи обрано: 1 та 3					

За результатами аналізу потенційних груп споживачів (сегментів) автори ідеї обирають цільові групи, для яких вони пропонуватимуть свій товар, та визначають стратегію охоплення ринку:

- якщо компанія зосереджується на одному сегменті – вона обирає стратегію концентрованого маркетингу;
- якщо працює із кількома сегментами, розробляючи для них окремі програми ринкового впливу – вона використовує стратегію диференційованого маркетингу;
- якщо компанія працює із всім ринком, пропонуючи стандартизовану програму (включно із характеристиками товару/послуги) – вона використовує масовий маркетинг.

Для роботи в обраних сегментах ринку необхідно сформулювати базову стратегію розвитку (табл. 4.14).

Таблиця 4.14 – Визначення базової стратегії розвитку

Обрана альтернатива розвитку проекту	Стратегія охоплення ринку	Ключові конкурентоспроможні позиції відповідно до обраної альтернативи	Базова стратегія розвитку*
Створення програмного забезпечення для аналізу даних, прогнозування та ризик-менеджменту.	Ринкове позиціонування (Позиція компанії чи продукту показує чим він унікальний, чим відрізняється від конкурентів, чим корисний споживачу. )	Простота інтерфейсу, універсальність та ефективність продукту	Стратегія диференціації

Наступним кроком є вибір стратегії конкурентної поведінки (табл. 4.15)

Таблиця 4.15 - Визначення базової стратегії конкурентної поведінки

<i>Чи є проект «першопрохідцем» на ринку?</i>	<i>Чи буде компанія шукати нових споживачів, або забирати існуючих у конкурентів?</i>	<i>Чи буде компанія копіювати основні характеристики товару конкурента, і які?</i>	<i>Стратегія конкурентної поведінки*</i>
Ні	Як нових, так і вже існуючих	Так, але розробляти більш гнучні та універсальні методи, розширювати функціонал новими методами та підходами	Стратегія заняття конкурентної ніші

На основі вимог споживачів з обраних сегментів до постачальника (стартап-компанії) та до продукту (див. табл. 4.4), а також в залежності від обраної базової стратегії розвитку (табл. 4.14) та стратегії конкурентної поведінки (табл. 4.15) розробляється стратегія позиціонування (табл. 4.16). що полягає у формуванні ринкової позиції (комплексу асоціацій), за яким споживачі мають ідентифікувати торгівельну марку/проект.

Таблиця 4.16 - Визначення стратегії позиціонування

<i>Вимоги до товару цільової аудиторії</i>	<i>Базова стратегія розвитку</i>	<i>Ключові конкурентоспроможні позиції власного стартап-проекту</i>	<i>Вибір асоціацій, які мають сформувати комплексну позицію власного проекту (три ключових)</i>
Ефективність, зручність інтерфейсу, швидкість роботи.	Диференціації	Простота користувацького інтерфейсу, що дозволяє пришвидшити та спростити роботу, швидкість роботи, що дозволяє підвищити швидкість експериментів, ефективність результатів, що дозволяє розробити якісний прогноз та оцінку. гнучкість та мобільність	- Стабільність роботи, - якість роботи, - швидкість роботи, - зручність роботи - мобільність - гнучкість

Результатом виконання підрозділу має стати узгоджена система рішень щодо ринкової поведінки стартап-компанії, яка визначатиме напрями роботи стартап-компанії на ринку.



#### 4.6 Розроблення маркетингової програми стартап-проекту

Першим кроком є формування маркетингової концепції товару, який отримає споживач [29, 30].

Таблиця 4.17 - Визначення ключових переваг концепції потенційного товару

<i>Потреба</i>	<i>Вигода, яку пропонує товар</i>	<i>Ключові переваги перед конкурентами (існуючі або такі, що потрібно створити)</i>
Якість прогнозу та оцінки	Якісний прогноз будь-яких показників, визначення ризикових компонент	Відсутність самостійно будувати модель та обирати модель прогнозу. Комплексний підхід до оцінювання ризику
Спрощення інтерфейсу користувача	Простота роботи з ПЗ	Користувачам не потрібно замислюватись над тим, як саме побудувати прогноз. Незалежно, від даних (категоріальних, числових) ПЗ виконає аналіз, запропонує методи та підходи прогнозування та оцінювання ризиків

## Продовження таблиці 4.17

Мобільність	Можливість використовувати базову веб-версію	Користувачі не обов'язково мають бути прив'язані до конкретного місця, а зможуть виконати необхідний базовий аналіз у будь-який час та з будь-якого девайсу
-------------	--	---

Надалі розробляється трирівнева маркетингова модель товару: уточнюється ідея продукту та/або послуги, його фізичні складові, особливості процесу його надання (табл. 4.18).

Таблиця 4.18 - Опис трьох рівнів моделі товару

<i>Рівні товару</i>	<i>Сутність та складові</i>		
I. Товар за задумом	Зручність, швидкість та мобільність отримання практичного результату щодо прогнозування процесів та оцінювання ризиків		
II. Товар у реальному виконанні	Властивості/характеристики	М/Нм	Вр/Тх /Тл/Е/Ор
	1. Якість		
	2. Швидкість обробки		
	3. Мобільність		
	4. Ціна		
	Якість: функціональне тестування (наявності багів), тестування перформансу, стабільності та глобалізації		
	Пакування: відсутнє		
	Марка: "RiskOff"		

Продовження таблиці 4.18

III. Товар із підкріпленням	1-місячна пробна безкоштовна версія та безкоштовне встановлення на етапі бета-тестування
	Постійна підтримка для користувачів
За рахунок чого потенційний товар буде захищено від копіювання: патент, система захисту	

Після формування маркетингової моделі товару слід особливо відмітити – чим саме проєкт буде захищено від копіювання. Захист може бути організовано за рахунок захисту ідеї товару (захист інтелектуальної власності), або ноу-хау, чи комплексне поєднання властивостей і характеристик, закладене на другому та третьому рівнях товару.

Наступним кроком є визначення цінових меж, якими необхідно керуватись при встановленні ціни на потенційний товар (остаточне визначення ціни відбувається під час фінансово-економічного аналізу проєкту), яке передбачає аналіз ціни на товари-аналоги або товари субститути, а також аналіз рівня доходів цільової групи споживачів (табл. 4.19). Аналіз проводиться експертним методом.

Таблиця 4.19 - Визначення меж встановлення ціни

<i>Рівень цін на товари-замінники</i>	<i>Рівень цін на товари-аналоги</i>	<i>Рівень доходів цільової групи споживачів</i>	<i>Верхня та нижня межі встановлення ціни на товар/послугу</i>
50000 грн	1000000 грн	250000 грн	30000-40000 грн

Таблиця 4.20 - Формування системи збуту

<i>Специфіка закупівельної поведінки цільових клієнтів</i>	<i>Функції збуту, які має виконувати постачальник товару</i>	<i>Глибина каналу збуту</i>	<i>Оптимальна система збуту</i>
Купують ПЗ та роблять щорічні внески для подовження ліцензії (аналог довгосрокові підписки)	Продаж	0(напрямую)	Прямий канал збуту

Визначення ідеї та теми рекламного звернення зумовлює всі наступні етапи планування рекламної діяльності. Тому цей етап є основним для професіоналів — творчих працівників рекламних агенцій чи рекламних підрозділів підприємств.

Таблиця 4.21 - Концепція маркетингових комунікацій

<i>Специфіка поведінки цільових клієнтів</i>	<i>Канали комунікацій, якими користуються цільові клієнти</i>	<i>Ключові позиції, обрані для позиціонування</i>	<i>Завдання рекламного повідомлення</i>	<i>Концепція рекламного звернення</i>
Купівля ПЗ через Інтернет, робота з ПЗ на	Електронна пошта, Інтернет, мобільний зв'язок	Швидкодія, простота використання, ефективність, мобільність	Показати переваги ПЗ, у тому числі і перед	Демо-ролик із використання

## Подовження таблиці 4.21

комп'ютерах з різними ОС			конкурентами	Сайт- візитка
-----------------------------	--	--	--------------	------------------

## Висновки до розділу

Отже, можливість ринкової комерціалізації проекту присутня, оскільки на даного виду продукти наявний попит, динаміка ринку збільшується, рентабельність роботи на ринку є також значно високою. Існують перспективи впровадження з огляду на потенційні групи клієнтів, бар'єри входження, стан конкуренції, конкурентоспроможність проекту. Цільовими групами вибрано компанії (українські та міжнародні), специфіка роботи яких пов'язана із аналізом даних, прогнозуванням та ризик-менеджментом. Як альтернативу (варіант) впровадження для ринкової реалізації проекту доцільно обрати розроблення програмного забезпечення. Подальша імплементація проекту є доцільною.

## ВИСНОВКИ

В роботі розглянуто загальну методологію моделювання та прогнозування нестаціонарних гетероскедастичних фінансово-економічних процесів з використанням статистичних даних та оцінювання ризикові вартості з їх допомогою. Виконано огляд сучасних методів оцінювання ринкових ризиків, моделювання і прогнозування нестаціонарних процесів.

Розглянуто та використано для аналізу результатів – основні критерії якості для оцінювання моделей опису процесів та якості прогнозування. Критеріями для оцінки якості побудованих моделей були логарифмічна функція правдоподібності та інформаційні критерії Акайке та Байєса; САПП, СКП і коефіцієнт Тейла для аналізу якості прогнозу. Для методу оцінювання параметрів моделі вибраний ММП, як найбільш широко вживаний та апробований на практиці.

Створена програма, яка призначена для моделювання та прогнозування економічних процесів на основі емпіричної вибірки даних. Алгоритм реалізовано на мові програмування Python. Дана програма в своїй основі може використовувати авторегресійно умовно гетероскедастичні процеси, серед яких розглянуто моделі GARCH, EGARCH, GJR-GARCH та TARARCH, як симетричні так і асиметричні. На основі прогнозів волатильності за даними моделями оцінюється показник VaR та ES як узагальнена міра ризику. Виконано оцінювання та моделювання фондових індексів, з наступною верифікацією моделей.

Для подальших досліджень рекомендовано до розробленої системи додати реалізації інших методів інтелектуального аналізу даних, таких як метод подібних траєкторій, нейронні мережі, теорію копул нечітку логіку та інші. Застосувати теорію портфелів та оцінку ризику для них. Застосувати методи стрес-тестування для шоківих випадків, а також використати різні

розподіли випадкових величин для врахування не тільки ефекту «тяжких хвостів», а й інших характеристик розподілів доходностей.

## ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

1. Кирюшкин В. Основы риск-менеджмента [Текст] / В. Кирюшкин, И. Ларионов. – М.: Анкил, 2009. – 132 с.
2. Балабанов И. Риск-менеджмент [Текст] / И. Балабанов. – М.: Финансы и статистика, 1996. – 192 с.
3. Методичні вказівки з інспектування банків «Система оцінки ризиків» [Електронний ресурс]. – Режим доступу <http://zakon3.rada.gov.ua/laws/show/v0104500-04>
4. Методичні рекомендації щодо організації та функціонування систем ризик-менеджменту в банках України [Електронний ресурс]. – Режим доступу <http://zakon5.rada.gov.ua/laws/show/v0361500-04>
5. Amendment to the Capital Accord to incorporate market risks [Електронний ресурс]. – Режим доступу <http://www.bis.org>
6. Киселев В. Управление банковским капиталом: теория и практика [Текст] / В. Киселев. – М.: Экономика, 1997. – 192 с.
7. Ульянова М. Управление рыночным риском [Текст] / М. Ульянова // Молодой ученый. - 2014. - №21.2. - С. 99-102.
8. Лобанов А. Энциклопедия финансового риск-менеджмента [Текст] / А. Лобанов, А. Чугунов. – М.: Альпина Паблишер, 2003. – 786 с.
9. Кишакевич Б.Ю. Оцінювання економічного капіталу банку для валютних ризиків на основі VaR технологій / Б.Ю. Кишакевич // Економічний простір. — 2015. — № 102. — С. 113—123.
10. McNeil A.J. Quantitative risk management: concepts, techniques, and tools [Text] / Alexander J.McNeil, Rudiger Frey, Paul Embrechts. – London: T&T Pfoctions Ltd., 2005. – 554 p.
11. Jorion Ph. Financial risk-management: Second edition [Text] / Ph. Jorion. – Hobokon, New Jersey: John Wiley & Sons Ltd., 2003. – 708 p.



12. Бідюк П. І. Визначення величини ризику VaR на основі оцінок параметрів моделі стохастичної волатильності [Текст] / П.І. Бідюк, М.М. Коновалюк // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2012. — № 3. — С. 1092—1099.
13. Acerbi C. On the coherence of expected shortfall / C. Acerbi, D. Tasche // Journal of Banking & Finance. — 2002. — № 26(7). — P. 1487–1503.— [Електронний ресурс].— Режим доступу : <http://arxiv.org/pdf/cond-mat/0104295%22%20>.
14. Швець Н.Р. VaR як основний метод розрахунку величини інтегрального фінансового ризику банківських установ [Текст] / Н.Р.Швець, А.А.Юшкалюк // Економіка і суспільство. — 2017. — № 9. — С. 85—94.
15. Білань Н.С. Оцінювання ризику валютної позиції банку за методом Монте-Карло [Текст] / Н.С. Білань // Вісник ЖДТУ. — 2016. — № 1(51). — С. 101—104.
16. Poon S.-H. A practical guide for forecasting financial market volatility [Text] / Ser Huang Poon. — Chichester: John Wiley & Sons Ltd., 2005. — 238 p.
17. Christoffersen P. Elements of Financial Risk Management [Text] / Peter Christoffersen. — Academic Press, 2012. — 344 p.
18. Giraitis L. Recent advances in ARCH modelling [Text] / Liudas Giraitis, Remigijus Leipus, Donatas Surgailis // Econometric Theory. — 2013. - №17. — 608-631 p.
19. Bollerslev T. Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity // Journal of Econometrics. — 1986. — № 31. — P. 307–327.
20. Бідюк П. І. Моделювання і короткострокове прогнозування гетероскедастичних процесів [Текст] / П.І. Бідюк, О.А. Кожухівська // Індуктивне моделювання складних систем. — 2012. — № 4. — С. 48—63.

21. Xekalaki E. ARCH Models for Financial Applications [Text] / Evdokia Xekalaki, Stavros Degiannakis. – Chichester: John Wiley & Sons Ltd., 2010. – 550 p.
22. Примостка Л. Управління банківськими ризиками [Текст]/ Л. Примостка, П. Чуб, Т. Карчева. – К: КНЕУ, 2007. – 600 с.
23. Yahoo Finance [Електронний ресурс]. – Режим доступу <https://finance.yahoo.com/?guccounter=1>
24. Бідюк П.І. Моделювання і прогнозування гетероскедастичних процесів // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2004. — № 1. — С. 115—134.
25. Чуприна О.Є. Моделювання волатильності фінансових інструментів для оцінювання ринкових ризиків [Текст] / О.Є. Чуприна // Актуальні наукові дослідження в сучасному світі. — 2016. — № 7(15). — С. 51 — 57.
26. Прогнозування на основі часових рядів. [Електронний ресурс]. – Режим доступу [http://docplayer.net/73004557-7-1-prognozuvannya-na-osnovi-chasovih-ryadiv.html#show\\_full\\_text](http://docplayer.net/73004557-7-1-prognozuvannya-na-osnovi-chasovih-ryadiv.html#show_full_text)
27. Рентабельність виробництва і методика визначення її показників.[Електронний ресурс]. – Режим доступу: <http://buklib.net/books/29473/>– Дата доступу: 04.02.2018
28. Прогнозування ефективності інвестиційного проекту. [Електронний ресурс]. – Режим доступу: [http://pidruchniki.com/1566072162240/turizm/prognozuvannya\\_efektivnosti\\_investitsiynogo\\_proektu](http://pidruchniki.com/1566072162240/turizm/prognozuvannya_efektivnosti_investitsiynogo_proektu) – Дата доступу: 12.02.2018
29. Розробка та перевірка концепції товару. [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <http://westudents.com.ua/glavy/35910-3-rozrobka-ta-perevrka-kontsepts-tovaru.html>.– Дата доступу: 04.02.2018

30. Концепції маркетингової діяльності.[Електронний ресурс]. – Режим доступу: <http://referat-ok.com.ua/marketing/marketingova-diyalnist-2> –  
Дата доступу: 01.03.2018

## ДОДАТОК А Лістинг програми

```
# In[1]:

import os
import sys

import pandas as pd
#import pandas_datareader.data as pdr
import numpy as np

import statsmodels.formula.api as smf
import statsmodels.tsa.api as smt
import statsmodels.api as sm
import scipy.stats as scs
from arch import arch_model

import matplotlib.pyplot as plt
import matplotlib as mpl
get_ipython().run_line_magic('matplotlib', 'inline')

print('Machine: {} {}\n'.format(os.uname_result.sysname,os.uname_result.machine))
print(sys.version)
```

```
# In[2]:
```

```
#import statsmodels.formula.api as smf
#import statsmodels.tsa.api as smt
#import statsmodels.api as sm
#import scipy.stats as scs
#import matplotlib.pyplot as plt
#import matplotlib as mpl

#function to draw grafics
def tsplot(y, lags=None, figsize=(10, 8), style='bmh'):
    if not isinstance(y, pd.Series):
        y = pd.Series(y)
    with plt.style.context(style):
        fig = plt.figure(figsize=figsize)
        #mpl.rcParams['font.family'] = 'Ubuntu Mono'
        layout = (3, 2)
        ts_ax = plt.subplot2grid(layout, (0, 0), colspan=2)
        acf_ax = plt.subplot2grid(layout, (1, 0))
        pacf_ax = plt.subplot2grid(layout, (1, 1))
        qq_ax = plt.subplot2grid(layout, (2, 0))
        pp_ax = plt.subplot2grid(layout, (2, 1))

        y.plot(ax=ts_ax)
        ts_ax.set_title('Time Series Analysis Plots')
        smt.graphics.plot_acf(y, lags=lags, ax=acf_ax, alpha=0.5)
        smt.graphics.plot_pacf(y, lags=lags, ax=pacf_ax, alpha=0.5)
        sm.qqplot(y, line='s', ax=qq_ax)
        qq_ax.set_title('QQ Plot')
        #scs.probplot(y, sparams=(y.mean(), y.std()), plot=pp_ax)
```

```

        kde_pdf = scs.gaussian_kde(y)
        x= np.linspace(min(y), max(y), len(y))
        bins=np.arange(min(y), max(y),0.5)
        pp_ax.plot(x,scs.norm.pdf(x,scs.tmean(y),scs.tstd(y)),label="parametric
distribution",color="red")
        pp_ax.plot(x,kde_pdf(x),'r',label="KDE estimation",color="blue")
        pp_ax.hist(y,bins=bins,density = True,color="gray",alpha=.6, label='data
histogram')
        pp_ax.set_title("Probability density function")
        pp_ax.legend()
        plt.tight_layout()
    plt.show()
    return
lags=30

```

```
# In[3]:
```

```

##read from YAHOO
#import fix_yahoo_finance as yf
#end = '2018-04-01'
#start = '2000-01-01'
#get_px = lambda x: web.DataReader(x, 'yahoo', start=start, end=end)['Adj Close']

#yf.pdr_override()
# raw adjusted close prices
#data = pdr.get_data_yahoo(['^DJI'], start=start, end=end)
#data.head()
#data.to_csv("data3.csv")

```

```
# In[5]:
```

```

#NEW data upload to file
#import datetime as dt
#import pandas_datareader.data as web
#st = dt.datetime(1990,1,1)
#en = dt.datetime(2018,1,1)
#data_to_file = web.get_data_yahoo('^GSPC', start=st, end=en)
#data_to_file.to_csv("dow_jones_1990_2018.csv")
#data_to_file.head()

```

```
# In[3]:
```

```

## read from file
#data=pd.read_csv("data/nasdaq_composite_1990_2018.csv", index_col='Date')
data=pd.read_csv("data/^GSPC_1990_2018.csv", index_col='Date')
#data=pd.read_csv("data/^HSI_1990_2018.csv", index_col='Date')
data.sort_index(ascending=True, inplace=True)
data.head()

```

```
# In[4]:
```

```
lrets = 100 * data['Adj Close'].pct_change().dropna()
```

```
lrets.head()
```

```
# In[5]:
```

```
describe_stat = scs.describe(lrets)
describe_stat
```

```
# In[477]:
```

```
#save stat to file
#import csv
#csvfile = "data_stat_gspc.csv"
#Assuming res is a flat list
#with open(csvfile, "w") as output:
#    writer = csv.writer(output, lineterminator='\n')
#    for val in describe_stat:
#        writer.writerow(describe_stat._fields)
#        writer.writerow(describe_stat)
```

```
# In[6]:
```

```
_=tsplot(lrets, lags=12)
```

```
# In[7]:
```

```
#GARCH
am=arch_model(lrets)
res = am.fit(disp='off')
print(res.summary())
```

```
# In[8]:
```

```
#heterosked test
import statsmodels.stats.diagnostic as smd
#smd.het_white(res_arx.resid,res_arx.model.regressors)
smd.het_arch(res.resid)
#print(np.array(res.resid.as_matrix().tolist()))
```

```
# In[9]:
```

```
scs.describe(res.resid)
```

```
# In[10]:
```

```
_=tsplot(res.resid**2, lags=lags)
```

```
# In[227]:
```

```
resid_all = res.resid/res.conditional_volatility
scs.describe(resid_all)
```

```
# In[228]:
```

```
_=tsplot(resid_all, lags=lags)
```

```
# In[239]:
```

```
###result is the same as previous
#GARCH garch = GARCH(p=1, q=1)
# gjr = GARCH(p=1, o=1, q=1)
#tarch = GARCH(p=1, o=1, q=1, power=1.0)
from arch.univariate import ConstantMean, GARCH, Normal, StudentsT

am = ConstantMean(lrets)
am.volatility = GARCH(p=1, o=1, q=1, power=1.0)
am.distribution = StudentsT()
#am.distribution = Normal()
res = am.fit(disp='off')
print(res.summary())
```

```
# In[182]:
```

```
def mdl_conclusion(res):
    res_ser = pd.Series()
    res_ser = pd.Series(res.params).append([res.pvalues, pd.Series(res.model,
index=['MDL']),pd.Series([res.nobs, res.loglikelihood, res.aic, res.bic],
index=['Num', 'LL', 'AIC', 'BIC'])])
    # print(res_ser)
    return res_ser
```

```
# In[183]:
```

```
mdl_conclusion(res)
```

```
# In[232]:
```

```
#egarch = EGARCH(p=1, q=1)
#egarch = EGARCH(p=1, o=1, q=1)
#exponential arch process: earch = EGARCH(p=5)
from arch.univariate import EGARCH
am = ConstantMean(lrets)
am.volatility = EGARCH(p=1, o=1, q=1)
am.distribution = Normal()
res = am.fit(disp='off')
```

```
print(res.summary())
```

```
# In[16]:
```

```
fig = res.plot(annualize='D')
#fig = res.hedgehog_plot(type='mean')
```

```
# In[230]:
```

```
#rollingwindow forecast
import pandas as pd
import numpy as np
index = lrets.index
start_loc = 0
#end_loc = np.where(index >= '2015-01-01')[0].min()
end_loc = 1000
print(lrets.index[end_loc])
forecasts = {}
for i in range(lrets.size-end_loc):
#for i in range(10):
    sys.stdout.write('.')
    sys.stdout.flush()
    #res_window = am.fix(res.params.values,first_obs=i,last_obs=i+end_loc)
    res_window = am.fit(first_obs=i,last_obs=i+end_loc, disp = 'off')
    #print(i, lrets.index[i], i+end_loc,lrets.index[i+end_loc])
    ##for recursive
    #res_window = am.fix(res.params.values,last_obs=i+end_loc)
    #res_window = am.fit(last_obs=i+end_loc, disp='off')
    temp = res_window.forecast(horizon=1, align = 'origin').variance
    fcast = temp.iloc[i+end_loc]
    forecasts[fcast.name] = fcast
print()
```

```
# In[185]:
```

```
pred=pd.DataFrame(forecasts).T
print(pred)
```

```
# In[240]:
```

```
#fixed window
end_loc = 1000
res_test = am.fix(res.params.values, last_obs=end_loc)
pred_test = res_test.forecast(horizon=1, align = 'origin').variance
print(pred_test.shift(1)[end_loc:])
```

```
# In[213]:
```

```
# change size of graph
fig_size = plt.rcParams["figure.figsize"]
```



```
print("Current size:", fig_size)
fig_size[0] = 12
fig_size[1] = 5
plt.rcParams["figure.figsize"] = fig_size
```

```
# In[241]:
```

```
sample_var = res.conditional_volatility[end_loc:]
print(sample_var.size)
forecasted_var = pred_test.shift(1)[end_loc:]
#forecasted_var = pd.DataFrame(forecasts).T['h.1']
print(forecasted_var.size)
#df = pd.concat([sample_var,forecasted_var],1)
#df.columns = ['actual', 'forecasted']
plt.plot(sample_var, label = 'actual')
plt.plot(forecasted_var, label = 'forecasted')
plt.legend()
plt.show()
```

```
# In[215]:
```

```
print(sample_var.head())
print(forecasted_var.head())
```

```
# In[21]:
```

```
def mae(y_true, y_pred):
    y_true, y_pred = np.array(y_true), np.array(y_pred)
    return np.mean(np.abs(y_true - y_pred)) * 100
```

```
# In[22]:
```

```
def mape(y_true, y_pred):
    y_true, y_pred = np.array(y_true), np.array(y_pred)
    return np.mean(np.abs((y_true - y_pred) / y_true)) * 100
```

```
# In[23]:
```

```
def theil(y_true, y_pred):
    y_true, y_pred = np.array(y_true), np.array(y_pred)
    y_true_sq = np.sqrt(np.sum(y_true**2)/y_true.size)
    y_pred_sq = np.sqrt(np.sum(y_pred**2)/y_pred.size)
    y_sq = np.sqrt(np.mean((y_true - y_pred)**2))
    return y_sq/(y_true_sq+y_pred_sq)
```

```
# In[216]:
```

```

print(mape(sample_var, forecasted_var), mae(sample_var, forecasted_var),
theil(sample_var, forecasted_var))

# In[310]:

#quantile
scs.norm.ppf(p)

# In[319]:

#alpha = 1-p = 0.95
np.sqrt((nu-2)/nu)*scs.t.ppf(p, df = nu)

# In[307]:

p=0.05
-scs.norm.pdf(scs.norm.ppf(1-p))/(p)

# In[322]:

nu=1000
np.sqrt((nu-2)/nu)*(-scs.t.pdf(scs.t.ppf(1-p,df = nu), df =nu)/p)*((nu +
(scs.t.ppf(p, df = nu)**2)/(nu-1))

# In[190]:

###VAR
#type(res.conditional_volatility)=pd.series

#df = pd.concat([lrets[200:400],-1.65*res.conditional_volatility[200:400]],1)
def VaR_gaus(p, volatility, mean):
    v_a_r=pd.Series()
    coef = scs.norm.ppf(p)
    v_a_r=mean + coef*volatility
    return v_a_r

def ES_gaus(p, volatility, mean):
    es=pd.Series()
    coef = -scs.norm.pdf(scs.norm.ppf(1-p))/(p)
    es=mean + coef*volatility
    return es

def VaR_t(p, volatility, mean, nu):
    v_a_r=pd.Series()
    coef = np.sqrt((nu-2)/nu)*scs.t.ppf(p, df = nu)
    v_a_r = mean + coef * volatility
    return v_a_r

def ES_t(p, volatility, mean, nu):

```

```

        es=pd.Series()
        coef = np.sqrt((nu-2)/nu)*(-scs.t.pdf(scs.t.ppf(1-p,df = nu), df =nu)/p)*((nu
+ (scs.t.ppf(p, df = nu))**2)/(nu-1))
        es=mean + coef * volatility
        return es

```

```
# In[243]:
```

```
df = pd.concat([actual,VaR_95,ES_95],1)
df.columns = ['returns', 'VaR 95', 'ES 95']
```

```
# In[244]:
```

```
sns.set_style("white")
sns.set_context("notebook")
df.plot(lw=0.8)
```

```
# In[52]:
```

```
print(mpl.__version__)
```

```
# In[154]:
```

```
#!/usr/bin/env python
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
import pandas as pd
import seaborn as sns
from scipy import stats
from datetime import datetime
```

```
plt.ioff()
```

```
class Backtest:
```

```

    def __init__(self, actual, forecast, alpha, forecast_es = None):
        self.index = actual.index
        self.actual = actual.values
        self.forecast = forecast.values
        self.alpha = alpha
        if not forecast_es.empty:
            self.forecast_es = forecast_es.values

```

```

    def hit_series(self):
        return (self.actual < self.forecast) * 1

```

```

    def up_series(self):
        return (self.actual > self.forecast) * 1

```

```

    def hit_series_es(self):
        return (self.actual < self.forecast_es) * 1

```

```

def number_of_hits(self):
    return self.hit_series().sum()

def number_of_hits_es(self):
    return self.hit_series_es().sum()

def hit_rate(self):
    return self.hit_series().mean()

def hit_rate_es(self):
    return self.hit_series_es().mean()

def expected_hits(self):
    return self.actual.size * self.alpha

def duration_series(self):
    hit_series = self.up_series()
    hit_series[0] = 1
    hit_series[-1] = 1
    return np.diff(np.where(hit_series == 1))[0]

def plot(self, file_name=None):
    # Re-add the time series index
    r = pd.Series(self.actual, index=self.index)
    q = pd.Series(self.forecast, index=self.index)

    sns.set_context("paper")
    sns.set_style("whitegrid", {"font.family": "serif", "font.serif": "Computer
Modern Roman", "text.usetex": True})

    # Hits
    #ax = r[r <= q].plot(color="red", marker="o", ls="None", figsize=(6, 3.5))
    #for h in r[r <= q].index:
    #    plt.axvline(h, color="black", alpha=0.4, linewidth=1, zorder=0)

    # Positive returns
    #r[q < r].plot(ax=ax, color="green", marker="o", ls="None")

    # Negative returns but no hit
    #r[(q <= r) & (r <= 0)].plot(ax=ax, color="orange", marker="o", ls="None")

    # VaR
    q.plot(ax=ax, grid=False, color="black", rot=0)

    # Axes
    plt.xlabel("")
    plt.ylabel("Log Return")
    ax.yaxis.grid()

    sns.despine()
    if file_name is None:
        plt.show()
    else:
        plt.savefig(file_name, bbox_inches="tight")
        plt.close("all")

def tick_loss(self, return_mean=True):
    loss = (self.alpha - self.up_series()) * (self.actual - self.forecast)

```

```

    if return_mean:
        return loss.mean()
    else:
        return loss

def smooth_loss(self, delta=25, return_mean=True):
    """Gonzalez-Rivera, Lee and Mishra (2004)"""
    loss = ((self.alpha - (1 + np.exp(delta*(self.actual - self.forecast)))**(-1)
* (self.actual - self.forecast))
    if return_mean:
        return loss.mean()
    else:
        return loss

def quadratic_loss(self, return_mean=True):
    """Lopez (1999); Martens et al. (2009)"""
    loss = (self.up_series() * (1 + (self.actual - self.forecast)**2))
    if return_mean:
        return loss.mean()
    else:
        return loss

def firm_loss(self, c=1, return_mean=True):
    """Sarma et al. (2003)"""
    loss = (self.up_series() * (1 + (self.actual - self.forecast)**2) - c*(1-
self.up_series()) * self.forecast)
    if return_mean:
        return loss.mean()
    else:
        return loss

def v_test(self):
    hits = self.hit_series()
    diff = self.actual - self.forecast_es
    #print(diff)
    v1 = np.sum(diff[hits == 1])/(hits == 1).sum()
    print('v1 = ',v1)
    dq = -scs.mstats.mquantiles(diff, prob = self.alpha)
    print('quantile = ',dq)
    print((diff < dq).sum())
    v2 = np.sum(diff[diff < dq])/(diff < dq).sum()
    print('v2 = ',v2)
    return (abs(v1)+abs(v2))/2

def lr_bt(self):
    """Likelihood ratio framework of Christoffersen (1998)"""
    hits = self.up_series() # Hit series
    tr = hits[1:] - hits[:-1] # Sequence to find transitions

    # Transitions: nij denotes state i is followed by state j nij times
    n01, n10 = (tr == 1).sum(), (tr == -1).sum()
    n11, n00 = (hits[1:][tr == 0] == 1).sum(), (hits[1:][tr == 0] == 0).sum()

    # Times in the states
    n0, n1 = n01 + n00, n10 + n11
    n = n0 + n1

    # Probabilities of the transitions from one state to another
    p01, p11 = n01 / (n00 + n01), n11 / (n11 + n10)
    p = n1 / n

```

```

if n1 > 0:
    # Unconditional Coverage
    uc_h0 = n0 * np.log(1 - self.alpha) + n1 * np.log(self.alpha)
    uc_h1 = n0 * np.log(1 - p) + n1 * np.log(p)
    uc = -2 * (uc_h0 - uc_h1)

    # Independence
    ind_h0 = (n00 + n01) * np.log(1 - p) + (n01 + n11) * np.log(p)
    ind_h1 = n00 * np.log(1 - p01) + n01 * np.log(p01) + n10 * np.log(1 -
p11)

    if p11 > 0:
        ind_h1 += n11 * np.log(p11)
    ind = -2 * (ind_h0 - ind_h1)

    # Conditional coverage
    cc = uc + ind

    # Stack results
    df = pd.concat([pd.Series([uc, ind, cc]),
                    pd.Series([1 - stats.chi2.cdf(uc, 1),
                               1 - stats.chi2.cdf(ind, 1),
                               1 - stats.chi2.cdf(cc, 2)])], axis=1)
else:
    df = pd.DataFrame(np.zeros((3, 2))).replace(0, np.nan)

# Assign names
df.columns = ["Statistic", "p-value"]
df.index = ["Unconditional", "Independence", "Conditional"]

return df

def dq_bt(self, hit_lags=4, forecast_lags=1):
    """Dynamic Quantile Test (Engle & Manganelli, 2004)"""
    try:
        hits = self.up_series()
        p, q, n = hit_lags, forecast_lags, hits.size
        pq = max(p, q - 1)
        y = hits[pq:] - self.alpha # Dependent variable
        x = np.zeros((n - pq, 1 + p + q))
        x[:, 0] = 1 # Constant

        for i in range(p): # Lagged hits
            x[:, 1 + i] = hits[pq-(i+1):-i]

        for j in range(q): # Actual + lagged VaR forecast
            if j > 0:
                x[:, 1 + p + j] = self.forecast[pq-j:-j]
            else:
                x[:, 1 + p + j] = self.forecast[pq:]

        beta = np.dot(np.linalg.inv(np.dot(x.T, x)), np.dot(x.T, y))
        lr_dq = np.dot(beta, np.dot(np.dot(x.T, x), beta)) / (self.alpha * (1-
self.alpha))
        p_dq = 1 - stats.chi2.cdf(lr_dq, 1+p+q)

    except:
        lr_dq, p_dq = np.nan, np.nan

    return pd.Series([lr_dq, p_dq],

```

```
index=["Statistic", "p-value"], name="DQ")
```

```
# In[219]:
```

```
bt_95 = Backtest(actual = actual, forecast = VaR_95, forecast_es = ES_95, alpha = 0.05)
```

```
# In[220]:
```

```
bt_99 = Backtest(actual = actual, forecast = VaR_99, forecast_es = ES_99, alpha = 0.01)
```

```
# In[221]:
```

```
print(bt_95.number_of_hits())
print(bt_95.hit_rate())
print(bt_95.number_of_hits_es())
print(bt_95.hit_rate_es())
print(bt_95.lr_bt())
bt_95.v_test()
```

```
# In[222]:
```

```
print(bt_99.number_of_hits())
print(bt_99.hit_rate())
print(bt_99.number_of_hits_es())
print(bt_99.hit_rate_es())
print(bt_99.lr_bt())
bt_99.v_test()
```

```
# In[23]:
```

```
#1-step forecast
forecasts = res.forecast()
print(forecasts.mean.iloc[-3:])
print(forecasts.residual_variance.iloc[-3:])
print(forecasts.variance.iloc[-3:])
```

```
# In[38]:
```

```
#5-steps forecast
forecasts = res.forecast(horizon=5)
print(forecasts.residual_variance.iloc[-3:])
```

```
# In[56]:
```

```

split_date = np.array('2011-01-01')
res = am.fit(last_obs = split_date, update_freq=5)
forecasts = res.forecast(horizon=5)
print(forecasts.variance.dropna())

```

```
# In[104]:
```

```

#GJR
am = arch_model(lrets, p=1, o=1, q=1)
res = am.fit(update_freq=5, disp='off')
print(res.summary())

```

```
# In[241]:
```

```

#ARCH
am = arch_model(returns, p=1, o=0, q=0)
res = am.fit(update_freq=5, disp='off')
print(res.summary())

```

```
# In[246]:
```

```

#TARCH
am = arch_model(returns, p=1, o=1, q=1, power=1.0)
res = am.fit(update_freq=5)
print(res.summary())

```

```
# In[247]:
```

```

#T-students errors
am = arch_model(returns, p=1, o=1, q=1, power=1.0, dist='StudentsT')
res = am.fit(update_freq=5)
print(res.summary())

```

```
# In[261]:
```

```

fixed_res = am.fix([0.0235, 0.01, 0.06, 0.0, 0.9382, 8.0])
print(fixed_res.summary())

```

```
# In[262]:
```

```

import pandas as pd
df = pd.concat([res.conditional_volatility, fixed_res.conditional_volatility],1)
df.columns = ['Estimated', 'Fixed']
df.plot()

```

```
# In[128]:
```



```
# Fit ARIMA(p, d, q) model to Returns
# pick best order and final model based on aic

best_aic = np.inf
best_order = None
best_mdl = None

pq_rng = range(5) # [0,1,2,3,4]
d_rng = range(2) # [0,1]
for i in pq_rng:
    for d in d_rng:
        for j in pq_rng:
            try:
                tmp_mdl = smt.ARIMA(lrets, order=(i,d,j)).fit(method='mle',
trend='nc')
                tmp_aic = tmp_mdl.aic
                if tmp_aic < best_aic:
                    best_aic = tmp_aic
                    best_order = (i, d, j)
                    best_mdl = tmp_mdl
            except: continue

p('aic: {:.6.5f} | order: {}'.format(best_aic, best_order))
# aic: -11518.22902 | order: (4, 0, 4)

# ARIMA model resid plot
_ = tsplot(best_mdl.resid, lags=30)
```

## ДОДАТОК Б Ілюстративні матеріали для доповіді

### СТРУКТУРНІ ЕЛЕМЕНТИ ДОСЛІДЖЕННЯ

- **Об'єкт** дослідження – нестационарні фінансово-економічні процеси зі змінною у часі волатильністю.
- **Предмет** дослідження – математичні моделі і методи опису гетероскедастичних процесів, оцінювання та аналізу якості побудованих моделей та прогнозів, моделі та методи оцінювання ринкових ризиків, а також методи перевірки якості оцінок ризику.
- **Методи** дослідження – теорія моделювання і прогнозування часових рядів, регресійний аналіз, статистичні методи аналізу фінансових ризиків.
- **Мета** роботи – побудова адекватних моделей процесів з умовною гетоскедастичністю для оцінювання та прогнозування ринкових ризиків за їх допомогою; порівняльний аналіз використання даних моделей для оцінки ризику за методологіями Value-at-Risk (VaR) та Expected Shortfall (ES), валідація отриманих результатів.

### АКТУАЛЬНІСТЬ РОБОТИ

- Необхідність у ефективному управлінні ризиками, оцінюванні розміру резервного капіталу для покриття ризику активних операцій
- Потреба у розумінні точного характеру фінансових даних, побудові адекватних моделей
- Поширеність фінансово-економічних процесів з неоднорідною волатильністю
- Обчислення оцінок волатильності для прийняття обґрунтованих рішень стосовно:
  1. Виконання операцій на біржі
  2. Інвестування та спекулювання
  3. Менеджменту фінансових ризиків
  4. Економічно-фінансова діагностика підприємств

## ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

1. Виконати **огляд** сучасних математичних **моделей** для моделювання і прогнозування нестаціонарних **гетероскедастичних** фінансово-економічних процесів, **методів** оцінювання ринкових ризиків.
2. Зібрати необхідні статистичні **дані** для виконання обчислювальних експериментів.
3. Виконання обчислювальних експериментів, а саме **моделювання і прогнозування** процесів зі змінною дисперсією, **оцінки ризику**.
4. Провести аналіз можливості **практичного застосування** моделей для оцінювання ризиків, вибрати найкращу модель для заданих цілей.
5. Виконати **аналіз отриманих результатів** і зробити висновки.

## РИНКОВИЙ РИЗИК

**Ризик** — поєднання ймовірності та наслідків настання несприятливих подій; можливість втрати чи недоотримання прибутків.

**Ринковий ризик** — наявний або потенційний ризик для надходжень і капіталу, який виникає в результаті зміни ринкових цін

- процентний ризик;
- валютний ризик;
- ціновий ризик ринку акцій, або фондовий ризик;
- ціновий ризик товарних ринків або товарний ризик.

## МІРИ РИЗИКУ НА ОСНОВІ РОЗПОДІЛУ ВТРАТ

### VALUE AT RISK

Оцінка, яку не перевищать очікувані для даного періоду часу (часового горизонту) втрати  $L$  з заданою ймовірністю  $\alpha \in (0, 1)$  (рівнем довіри):

$$VaR_\alpha = \inf\{l \in \mathbb{R}: P(L \leq l) \leq 1 - \alpha\} = \inf\{l \in \mathbb{R}: F_L(l) \geq \alpha\}$$

### EXPECTED SHORTFALL

Оцінка умовних очікуваних втрат для даного періоду часу  $t$  (часового горизонту) та рівня довіри  $\alpha \in (0, 1)$ , які перевищили  $VaR_\alpha$ :

$$ES_\alpha = E(L | L \geq VaR_\alpha)$$

Методи оцінки:

- Параметричні
- Непараметричні

6

$$L \sim N(\mu, \sigma^2)$$

$$VaR_\alpha = \mu + \sigma \Phi^{-1}(\alpha)$$

$$ES_\alpha = \mu + \sigma \frac{\phi(\Phi^{-1}(\alpha))}{1 - \alpha}$$

де  $\Phi$  — функція стандартного нормального розподілу, і  $\Phi^{-1}(\alpha)$  є  $\alpha$ -квантилем  $\Phi$ ;  
 $\phi$  - щільність стандартного нормального розподілу.

$$L \sim t(\nu, \mu, \sigma^2), \text{ де для } \nu > 2: E(L) = \mu \text{ та } var(L) = \nu\sigma^2/(\nu - 2)$$

$$VaR_\alpha = \mu + \sigma \Phi^{-1}(\alpha)$$

$$ES_\alpha = \mu + \sigma \frac{g_\nu(t_\nu^{-1}(\alpha))}{1 - \alpha} \left( \frac{\nu + (t_\nu^{-1}(\alpha))^2}{\nu + 1} \right)$$

де  $t_\nu$  - функція розподілу стандартного розподілу t-Стюдента, і  $t_\nu^{-1}(\alpha)$  є  $\alpha$ -квантилем  $t_\nu$ ;  
 $g_\nu$  - щільність стандартного розподілу t-Стюдента.

7

## МЕТОДИКА ОЦІНЮВАННЯ РИЗИКУ

$P_t$  — ціна акції або значення індексу деякого фінансового активу в момент часу  $t$

$X_t$  — логарифмічна доходність/втрати (returns / losses) в момент часу  $t$ :  $\ln P_{t+1} / P_t$

Припустимо, що доходність  $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$  є описується процесом:

$$X_t = \mu_t + \varepsilon_t,$$

$$\varepsilon_t = \sigma_t Z_t, \text{ де } Z_t \sim \text{iid } \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \text{ або } t(v, \mu, \sigma^2)$$

$$\text{Var}_\alpha^t(X_{t+1}) = \mu_{t+1} + \sigma_{t+1} \text{Var}_\alpha(Z_t)$$

$$\text{ES}_\alpha^t(X_{t+1}) = \mu_{t+1} + \sigma_{t+1} \text{ES}_\alpha(Z_t)$$

## МОДЕЛІ УМОВНОЇ ГЕТЕРОСКЕДАСТИЧНОСТІ

$$\text{GARCH: } \sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^p \alpha_i |\varepsilon_{t-i}|^2 + \sum_{j=1}^q \gamma_j |\varepsilon_{t-j}|^2 I[\varepsilon_{t-j} < 0] + \sum_{k=1}^q \beta_k \sigma_{t-k}^2$$

$$\text{EGARCH: } \ln(\sigma_t^2) = \omega + \sum_{i=1}^p \alpha_i \left[ \frac{|\varepsilon_{t-i}|}{\sigma_{t-i}} - E \left\{ \frac{|\varepsilon_{t-i}|}{\sigma_{t-i}} \right\} \right] + \sum_{j=1}^q \gamma_j \left| \frac{\varepsilon_{t-j}}{\sigma_{t-j}} \right| + \sum_{k=1}^q \beta_k \ln(\sigma_{t-k}^2)$$

## ВИКОРИСТАНІ МОДЕЛІ УМОВНОЇ ГЕТЕРОСКЕДАСТИЧНОСТІ

GARCH(1,1)	$\sigma_t^2 = \omega + \beta\sigma_{t-1}^2 + \alpha\varepsilon_{t-1}^2$
EGARCH(1,1)	$\ln(\sigma_t^2) = \omega + \beta\ln(\sigma_{t-1}^2) + \alpha( z_{t-1}  - E\{ z_{t-1} \})$
EGARCH(1,1,1)	$\ln(\sigma_t^2) = \omega + \beta\ln(\sigma_{t-1}^2) + \alpha( z_{t-1}  - E\{ z_{t-1} \}) + \gamma z_{t-1} $
GJR-GARCH(1,1,1)	$\sigma_t^2 = \omega + \beta\sigma_{t-1}^2 + \alpha\varepsilon_{t-1}^2 + \gamma I[\varepsilon_{t-1} < 0]\varepsilon_{t-1}^2$
TARCH(1,1,1)	$\sigma_t^2 = \omega + \beta\sigma_{t-1}^2 + \alpha\varepsilon_{t-1}^2 + \gamma I[\varepsilon_{t-1} < 0] \varepsilon_{t-1} $

10

## BACKTESTING

### VALUE AT RISK

На заданому рівні довіри  $\alpha \in (0, 1)$  очікуємо, що фактична втрата  $X_{t+1}$  перевищить оцінку  $VaR_\alpha^t(X_{t+1})$  лише для  $100(1 - \alpha)\%$  випадків. Прийнято називати такі перевищення VaR-розриви (VaR-breaks)

Формуємо послідовність  $\{I_t\}_{t=1}^T$  змінних індикаторів, що представляють послідовність перевищень як:

$$I_{t+1} = \begin{cases} 1, & X_{t+1} > VaR_\alpha^t(X_{t+1}) \\ 0, & X_{t+1} \leq VaR_\alpha^t(X_{t+1}) \end{cases}$$

$\{I_t\}_{t=1}^T$  являє собою послідовність випадкових незалежних однаково розподілених величин Бернуллі

- Безумовний тест покриття
- Тест на незалежність
- Умовний тест покриття

### EXPECTED SHORTFALL

- *V-тест*

11

## БЕЗУМОВНИЙ ТЕСТ ПОКРИТТЯ

$T_1$  – кількість перевищень

$T$  – розмір вибірки

$\pi$  – частка перевищень для вибірки:  $\pi = T_1/T$

$q$  – очікувана частка перевищень для вибраного рівня довіри  $q = 1 - \alpha$

$H_0: \pi = q$

Функція правдоподібності для  $H_1: L(q) = \prod_{t=1}^T p^{I_t} (1-p)^{1-I_t} = p^{T_1} (1-p)^{T-T_1}$

Функція правдоподібності для  $H_0: L(\hat{\pi}) = \left(\frac{T_1}{T}\right)^{T_1} \cdot \left(\frac{1-T_1}{T}\right)^{1-T_1}$

Статистика відношення правдоподібності:  $LR_{uc} = -2 \left[ \frac{L(q)}{L(\hat{\pi})} \right] \sim \chi^2(1)$

12

## ТЕСТ НА НЕЗАЛЕЖНІСТЬ

Припустимо, що послідовність перевищень  $\{I_t\}_{t=1}^T$  ( $T$  – розмір вибірки) залежна та описується дискретним ланцюгом Маркова з матрицею імовірнісного переходу:

$$P_1 = \begin{bmatrix} \pi_{00} & \pi_{01} \\ \pi_{10} & \pi_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \pi_{01} & \pi_{01} \\ 1 - \pi_{11} & \pi_{11} \end{bmatrix},$$

де  $\pi_{ij}$  ( $i, j \in \{0, 1\}$ ) – це ймовірність того, що  $I_{t+1} = j$  залежить від  $I_t = i$

$$L(P_1) = (1 - \pi_{01})^{T_{00}} \cdot \pi_{01}^{T_{01}} \cdot (1 - \pi_{11})^{T_{10}} \cdot \pi_{11}^{T_{11}},$$

де  $T_{ij}$  – кількість днів, протягом яких  $j$  слідував за  $i$  у послідовності перевищень,  $i, j \in \{0, 1\}$

$$\hat{P}_1 = \begin{bmatrix} \hat{\pi}_{00} & \hat{\pi}_{01} \\ \hat{\pi}_{10} & \hat{\pi}_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{T_{00}}{T_{00}+T_{01}} & \frac{T_{01}}{T_{00}+T_{01}} \\ \frac{T_{10}}{T_{10}+T_{11}} & \frac{T_{11}}{T_{10}+T_{11}} \end{bmatrix}$$

Якщо послідовність залежна:  $\pi_{01} \neq \pi_{11}$ . Якщо послідовність є незалежною, то  $\pi_{01} = \pi_{11} = \pi$

$\hat{\pi} = T_1/T$ , тоді під незалежністю ми отримуємо матрицю ймовірностей переходу

$$\hat{\Pi} = \begin{bmatrix} 1 - \hat{\pi} & \hat{\pi} \\ 1 - \hat{\pi} & \hat{\pi} \end{bmatrix}$$

$$LR_{ind} = -2 \left[ L(\hat{\Pi}) / L(\hat{P}_1) \right] \sim \chi^2(1)$$

13

## V-ТЕСТ ДЛЯ EXPECTED SHORTFALL

$$V_1 = \frac{\sum_{t=1}^T (x_{t+1} - \widehat{ES}_q^t(X_{t+1})) 1_{\{x_{t+1} > \widehat{x}_q^t\}}}{1_{\{x_{t+1} > \widehat{x}_q^t\}}}$$

де  $\widehat{x}_q^t = \widehat{VaR}_q^t(X_{t+1})$ ,  $T$  - загальна кількість оцінок  $ES$

$$V_2 = \frac{\sum_{t=1}^T (x_{t+1} - \widehat{ES}_q^t(X_{t+1})) 1_{\{D_t > D_q\}}}{1_{\{D_t > D_q\}}}$$

де  $D_t = (x_{t+1} - \widehat{ES}_q^t(X_{t+1}))$  та  $D_q$  - емпіричний q-квантиль для  $\{D_t, t = 1, 2, \dots, T\}$

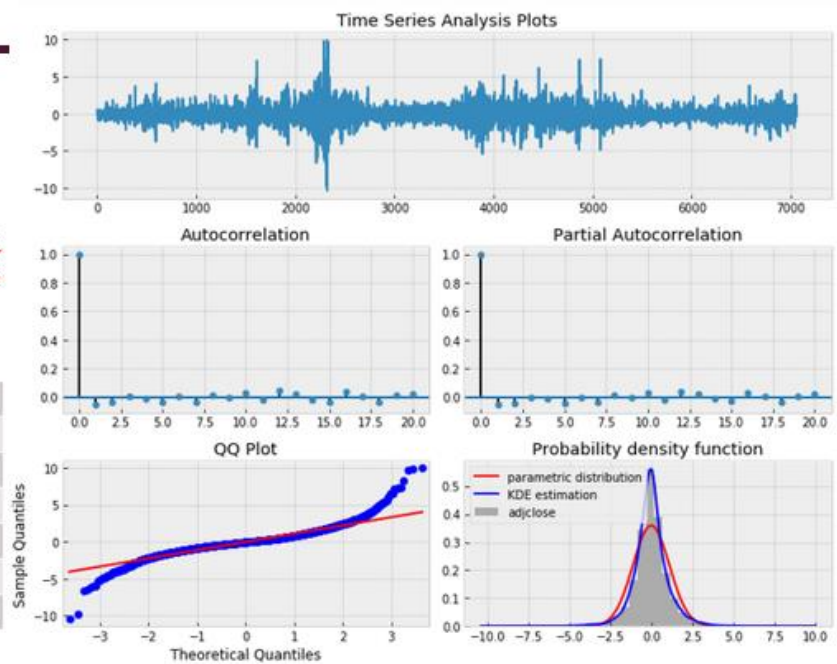
$$V = \frac{|V_1| + |V_2|}{2}$$

14

## ВХІДНІ ДАНІ

S&P 500 — фондовий індекс, у кошик якого включено 500 акціонерних компаній США, що мають найбільшу капіталізацію

N	7055
Min	-10.37823
Max	9.932364
Mean	-0.02228
Var	1.232667
Skewness	0.43236
Kurtosis	9.11249





## РЕЗУЛЬТАТИ МОДЕЛЮВАННЯ

Порівняння різних GARCH моделей для індексу S&P 500 для нормального розподілу

	GARCH (1,1)	EGARCH (1,1)	EGARCH (1,1,1)	TARCH (1,1,1)	GJR- GARCH (1,1,1)
$\mu$	0.0570324	0.0590636	0.0286726	0.0235426	0.0290237
$\omega$	0.0115434	0.00481054	-0.00018057	0.0195264	0.0147326
$\alpha$	0.0819303	0.17161	0.126045	0.00565508	0.00112733
$\beta$	0.90791	0.985457	0.980887	0.924344	0.912464
$\gamma$			-0.115093	0.134324	0.142586
<i>LogL</i>	-9237.99	-9245.01	-9100.14	-9088.7	-9119.69
<i>AIC</i>	18484	18498	18210.3	18187.4	18249.4
<i>BIC</i>	18511.4	18525.5	18244.6	18221.7	18283.7

17

Порівняння різних GARCH моделей для індексу S&P 500 для розподілу t-Стюдента

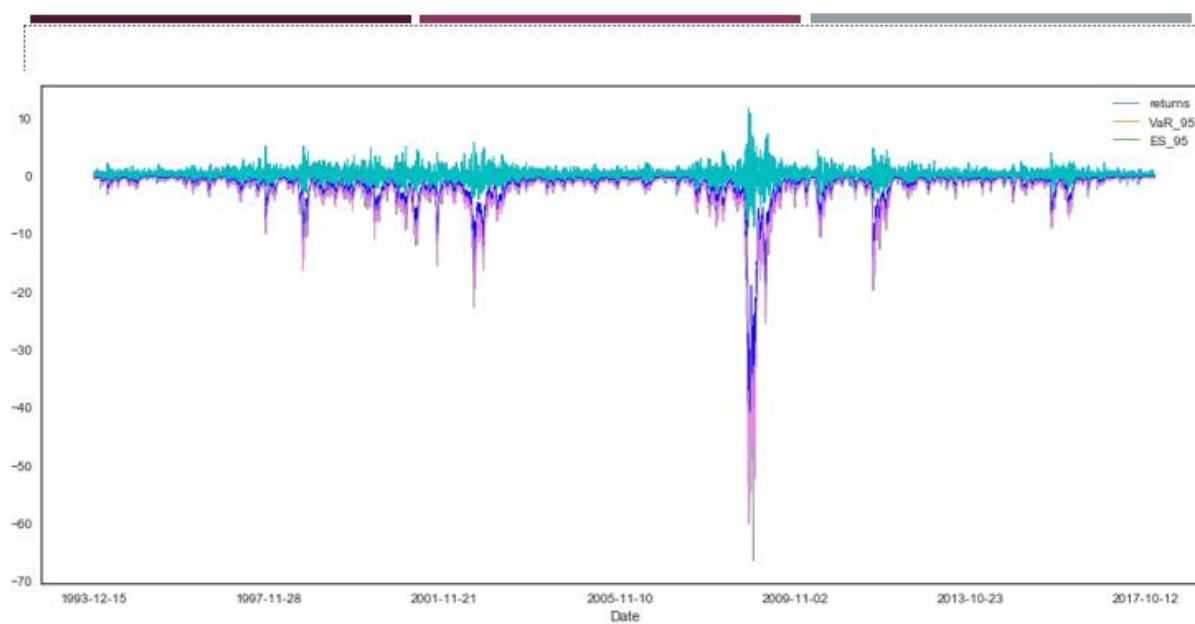
	GARCH-t (1,1)	EGARCH-t (1,1)	EGARCH-t (1,1,1)	TARCH-t (1,1,1)	GJR- GARCH-t (1,1,1)
$\mu$	0.0653453	0.0632046	0.0409904	0.0371169	0.043806
$\omega$	0.0060757	0.00633503	-0.000375	0.0163033	0.0102243
$\alpha$	0.076357	0.163291	0.128547	0.00184591	4.29456e-14
$\beta$	0.921517	0.991369	0.986021	0.927068	0.916361
$\gamma$			-0.121009	0.142171	0.149294
$\nu$	6.36118	6.26571	7.14544	7.4202	7.14025
<i>LogL</i>	-9083.98	-9086.11	-8973.23	-8967.57	-8990.38
<i>AIC</i>	18178	18182.2	17958.5	17947.1	17992.8
<i>BIC</i>	18212.3	18216.5	17999.6	17988.3	18033.9

18

## РЕЗУЛЬТАТИ ПРОГНОЗУВАННЯ

	MAPE	MAE	U-Theil
GARCH (1,1)	33.349	29.017	0.081667
EGARCH (1,1)	32.68967	29.23267	0.082333
EGARCH (1,1,1)	13.99867	19.33867	0.054667
TARCH (1,1,1)	13.046	18.742	0.055667
GJR-GARCH (1,1,1)	13.98267	18.73	0.055
GARCH (1,1)-t	30.239	27.12	0.0618
EGARCH (1,1)-t	28.578	25.267	0.0514
EGARCH (1,1,1)-t	11.057	14.435	0.0346
TARCH (1,1,1)-t	11.154	13.512	0.0339
GJR-GARCH (1,1,1)-t	11.234	14.322	0.0342

19



20

## BACKTESTING

Результати процедури бек-тестування для оцінки VaR та ES за побудованими моделями на основі нормального розподілу

		GARCH (1,1)	EGARCH (1,1)	EGARCH (1,1,1)	TARCH (1,1,1)	GJR-GARCH (1,1,1)
$\alpha = 95\%$	VaR 95 %	(385) 0.063	(390) 0.064	(269) 0.044	(273) 0.045	(271) 0.0447
	UT (p-value)	0.072	0.065	0.11	0.085	0.037
	IT (p-value)	0.531	0.089	0.702	0.698	0.641
	CT (p-value)	0.216	0.072	0.224	0.217	0.182
	ES 95%	(205) 0.033	(209) 0.035	(127) 0.02	(132) 0.021	(130) 0.0214
	V1	-0.092	-0.095	-0.049	-0.076	-0.054
	V2	-0.458	-0.534	-0.469	-0.553	-0.474
	V	0.275	0.314	0.259	0.315	0.264

21

Результати процедури бек-тестування для оцінки VaR та ES за побудованими моделями на основі розподілу t-Стюдента

		GARCH-t (1,1)	EGARCH-t (1,1)	EGARCH-t (1,1,1)	TARCH-t (1,1,1)	GJR-GARCH-t (1,1,1)
$\alpha = 95\%$	VaR 95 %	(419) 0.069	(415) 0.068	(306) 0.051	(304) 0.050	(309) 0.051
	UT (p-value)	0.349	0.224	0.407	0.384	0.323
	IT (p-value)	0.481	0.089	0.742	0.751	0.738
	CT (p-value)	0.566	0.421	0.605	0.613	0.599
	ES 95%	(164) 0.027	(159) 0.026	(110) 0.018	(111) 0.018	(111) 0.018
	V1	0.026	0.023	0.037	0.0234	0.036
	V2	-0.49	-0.50	-0.535	-0.545	-0.522
	V	0.258	0.262	0.286	0.284	0.279

22

## ВИСНОВКИ

- У даній дипломній роботі було виконано аналіз і моделювання гетероскедастичних процесів.
- За допомогою адекватно побудованих моделей спрогнозовано волатильність відповідних фінансово-економічних процесів та оцінено ринкові ризики.
- Виконано перевірку якості прогнозів ринкового ризику
- Застосовані методи для оцінювання волатильності факторів ризику показують високі результати навіть при невисоких порядках, що виправдовує їх розповсюджене використання.

### Можливе подальше вдосконалення

- Застосування різних розподілів випадкової величини
- Застосування стрес-тестування для шоківих випадків
- Застосування теорій хаосу, фракталів, копул, нейронних мереж, нечіткої логіки для оцінювання ризиків.

## НАУКОВІ ПУБЛІКАЦІЇ

1. Наукова стаття «Моделювання волатильності фінансових інструментів для оцінювання ринкових ризиків», що опублікована у журналі IScience “Актуальні наукові дослідження в сучасному світі № 7 (15)”, 2016.
2. Прийнята до опублікування стаття у збірнику: «Системні науки та кібернетика», 2018, № 1.