

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО

ЗВИЧАЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Методи розв'язування та
застосування

*Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра за
спеціальністю 111 «Математика»*

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2018

Звичайні диференціальні рівняння: методи розв'язування та застосування: [Електронний ресурс] навч. посіб. для студ. спеціальності 111 «Математика» / КПІ ім. Ігоря Сікорського; уклад.: С.Д.Івасишен, В.П.Лавренчук, Н.І.Турчина. – Електронні текстові данні (1 файл: 1,38 Мбайт). – Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2018. – 329 с.

*Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
(протокол № 2 від 18.10.2018 р.)
за поданням Вченої ради фізико-математичного факультету
(протокол № 7 від 27.09.2018 р.)*

Електронне мережне навчальне видання

ЗВИЧАЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Методи розв'язування та застосування

Укладачі: Івасишен Степан Дмитрович, д-р фіз.-мат. наук,
проф.
Лавренчук Володимир Петрович, канд. фіз.-мат.
наук, доц.
Турчина Наталія Іванівна

Відповідальний
редактор Івасишен С.Д., д-р фіз.-мат. наук, проф.

Рецензенти: Станжицький О. М., д-р фіз.-мат. наук, проф
Нитребич З. М., д-р фіз.-мат. наук, проф

Анотація орієнтовно 650 символів

©КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2018

Передмова

При розв'язуванні конкретних задач з різних галузей знань не завжди можна знайти безпосередній зв'язок між змінними, які описують розглядуваний процес або явище. У багатьох випадках одержується співвідношення, яке зв'язує між собою незалежну змінну, функцію від неї та її похідні. Таке співвідношення називається диференціальним рівнянням.

Пропонований навчальний посібник, що є переробленим варіантом посібника [3], має на меті дати читачеві основи знань з класичної теорії звичайних диференціальних рівнянь, які необхідні для складання математичних моделей різних прикладних задач та їхнього розв'язування. За традицією посібник включає розділи, в яких розглядаються звичайні диференціальні рівняння і рівняння з частинними похідними першого порядку.

Посібник написано на основі лекцій, що читалися авторами студентам різних спеціальностей у різних навчальних закладах. Він складається з семи розділів, які поділені на параграфи та пункти. Виклад матеріалу проведено стисло й в доступній формі. Оскільки посібник розрахований на студентів природничих та інженерних спеціальностей, то наведено багато задач з різних галузей знань, математичні моделі яких описуються диференціальними рівняннями або системами рівнянь. Крім того, в кінці кожного параграфа пропонуються задачі та вправи для самостійного розв'язування, що дає можливість використовувати посібник також як збірник задач і вправ. Значну увагу приділено теорії рівнянь другого порядку, а також теорії стійкості. Окремий розділ присвячено застосуванню диференціальних рівнянь до задач економіки, техніки і природознавства.

Вступ

При розв'язуванні багатьох різноманітних прикладних задач використовують математичні моделі, в основі яких лежать диференціальні рівняння. **Диференціальним** називається рівняння, яке зв'язує між собою незалежну змінну або змінні, шукану функцію та похідні різних порядків від цієї функції. При цьому рівняння може не містити в явному вигляді незалежну змінну (змінні) та шукану функцію, але обов'язково містить одну або декілька похідних від шуканої функції.

Якщо шукана функція залежить від однієї змінної, то диференціальне рівняння називається **звичайним**, якщо ж від декількох – рівнянням **із частинними похідними**. Ми розглядатимемо, в основному, звичайні диференціальні рівняння.

У загальному випадку звичайне диференціальне рівняння можна записати у вигляді

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad (1)$$

де F – відома функція від $n + 2$ змінних, $n \in \mathbb{N}$. Найвищий порядок n похідної, яка входить в (1), називається **порядком** диференціального рівняння. Наприклад, рівняння $y' = 3x^2$, $y' - \sqrt{y} = 0$ – це рівняння першого порядку; рівняння $y'' + \omega^2 y = 0$, $y'' - y = x^2$ – другого порядку; рівняння $y^{(4)} + y'' \ln x = x$ – четвертого порядку.

Розв'язком диференціального рівняння (1) на проміжку X називається функція $y = \varphi(x)$, яка визначена і неперервна разом зі своїми похідними до порядку рівняння на цьому проміжку і така, що при підставлянні її в рівняння перетворює його в тотожність

$$F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)) = 0, \quad x \in X.$$

Задача про знаходження розв'язку диференціального рівняння називається **задачею інтегрування** цього рівняння. Предметом інтегрування диференціального рівняння є відшукання за цим рівнянням зв'язку між залежною і незалежною

змінними, з якого одержуємо функцію або функції, що задовольняють задане диференціальне рівняння. Графік розв'язку диференціального рівняння називається **інтегральною кривою** або **інтегральною лінією**. Область існування розв'язку рівняння (1), взагалі кажучи, не збігається з множиною значень незалежної змінної x з області задання рівняння. Наприклад, для рівняння першого порядку $y' = 1 + y^2$ функція $F(x, y, y') = y' - 1 - y^2$ визначена для всіх x, y і y' , а тому $x \in (-\infty, +\infty)$. Однак його розв'язок $y = \operatorname{tg} x$ визначений лише для $x \neq \frac{(2n+1)\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}$.

Приклад 1. Розв'язати рівняння $y' = x^2$.

◀ Розв'язати це рівняння означає, що треба знайти функцію y , похідна від якої дорівнює x^2 , тобто треба знайти первісну для функції $f(x) = x^2, x \in \mathbb{R}$. З інтегрального числення відомо, що такою є функція $y = \frac{x^3}{3} + C, x \in \mathbb{R}$, де C – довільна стала з \mathbb{R} . ▶

З прикладу 1 видно, що розв'язок рівняння визначається неоднозначно, тобто диференціальне рівняння визначає сім'ю інтегральних ліній на площині. Для виділення конкретного розв'язку треба задати додаткову умову. Такою умовою є $y(x_0) = y_0$ або умова того, що інтегральна лінія проходить через задану точку (x_0, y_0) .

Загальним розв'язком диференціального рівняння (1) n -го порядку називається вираз

$$y = \varphi(x, C_1, \dots, C_n), \quad (2)$$

який містить n довільних сталих C_1, \dots, C_n і такий, що при відповідному виборі цих сталих з (2) одержуємо будь-який розв'язок рівняння (1), який належить до певного класу.

Частинним розв'язком диференціального рівняння називається розв'язок, який одержується із загального розв'язку при деяких конкретних числових значеннях сталих C_1, C_2, \dots, C_n .

У наступних параграфах ми уточнимо поняття загального та частинного розв'язків диференціального рівняння.

Наведемо приклади задач із різних галузей науки і природознавства, які описуються диференціальними рівняннями.

Приклад 2. Відомо, що радіоактивна речовина маси m_0 має період піврозпаду T , тобто за час T у результаті розпаду залишається $\frac{m_0}{2}$ речовини. Треба знайти закон, який описує залежність маси речовини від часу.

◀ Нехай $m(t)$ – маса речовини в момент часу t . Згідно з законом радіоактивного розпаду швидкість розпаду в момент часу t пропорційна наявній масі речовини в цей самий момент часу, тобто

$$\frac{dm(t)}{dt} = -km(t), \quad (3)$$

де k – додатний коефіцієнт пропорційності. Знак мінус взято для позначення розпаду.

Легко можна переконатися, що функція

$$m(t) = Ce^{-kt}, \quad t \geq 0, \quad (4)$$

де C – довільна стала з \mathbb{R} , є розв'язком рівняння (3).

Оскільки в початковий момент часу $t = 0$ було m_0 речовини, тобто $m(0) = m_0$, то, підставивши в (4) $t = 0$, дістанемо

$$m_0 = Ce^0 \quad \text{або} \quad C = m_0.$$

Тому

$$m(t) = m_0 e^{-kt}.$$

Для знаходження коефіцієнта k скористаємося тим, що $m(T) = \frac{m_0}{2}$. Тоді

$$\frac{m_0}{2} = m_0 e^{-kT} \quad \text{або} \quad e^{kT} = 2,$$

звідки випливає, що $k = \frac{1}{T} \ln 2$.

Отже, закон радіоактивного розпаду має вигляд

$$m(t) = m_0 e^{-\frac{t}{T} \ln 2} = m_0 2^{-\frac{t}{T}}, \quad t > 0. \quad \blacktriangleright$$

Досвід показує, що різні за змістом задачі приводить до однакових диференціальних рівнянь. Використання диференціального рівняння як моделі деякого процесу зручне тим, що воно описує еволюцію процесу з часом та характер можливих змін у залежності від його початкового стану.

Приклад 3. Швидкість обезцінювання обладнання внаслідок зношення пропорційна фактичній його вартості в цей самий момент часу. Якою буде вартість обладнання після його використання впродовж t років, якщо початкова вартість становила y_0 гр.од.?

◀ Нехай $y(t)$ – вартість обладнання у момент часу t . Зміна вартості (обезцінювання) дорівнює різниці $y_0 - y(t)$. Швидкість обезцінювання $\frac{d(y_0 - y(t))}{dt}$ пропорційна фактичній вартості $y(t)$ у момент часу t , тобто

$$\frac{d(y_0 - y(t))}{dt} = ky(t)$$

або

$$\frac{dy(t)}{dt} = -ky(t),$$

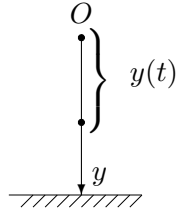
де k – коефіцієнт пропорційності.

Одержали рівняння, яке з точністю до позначень збігається з рівнянням (3). Його розв'язком з урахуванням початкової умови $y(0) = y_0$ є функція

$$y(t) = y_0 e^{-kt}, \quad t > 0. \blacktriangleright$$

Приклад 4. Матеріальна точка маси m падає під дією сили земного тяжіння. Треба знайти закон руху точки, тобто шлях, пройдений точкою за час t , якщо в початковий момент часу $t = 0$ точка мала швидкість v_0 .

◀ Вертикальну пряму, вздовж якої рухається точка, візьмемо за вісь Oy . За початок координат візьмемо точку осі, що відповідає положенню точки в початковий момент часу $t = 0$, тобто $y(0) = 0$. За додатний напрямок осі Oy приймемо напрям-



мок до Землі. Пройдений точкою шлях y є деякою функцією часу t . Треба визначити цю функцію. З фізики відомо, що при вільному падінні прискорення стало і дорівнює $g \approx 9,81 \text{ м/с}^2$. З іншого боку, прискорення дорівнює другій похідній від шляху за часом, тобто $y''(t)$. Прирівнявши ці два вирази, дістанемо диференціальне рівняння другого порядку

$$y''(t) = g. \quad (5)$$

Легко пересвідчитися, що сукупність розв'язків цього рівняння визначається рівністю

$$y = g \frac{t^2}{2} + C_1 t + C_2, \quad t > 0, \quad (6)$$

де C_1 і C_2 – довільні сталі.

Якщо в початковий момент часу $t = 0$ точка займала певне положення y_0 і мала початкову швидкість v_0 , тобто

$$y(0) = y_0, \quad y'(0) = v_0,$$

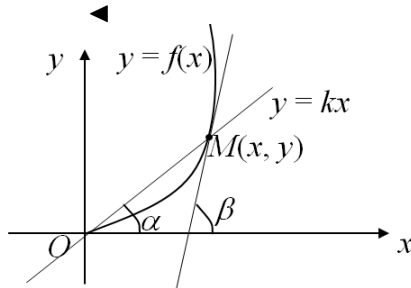
то з рівності (6) знаходимо, що

$$C_1 = v_0, \quad C_2 = y_0.$$

Отже, закон вільного падіння тіла має вигляд

$$y = g \frac{t^2}{2} + v_0 t + y_0, \quad t > 0. \blacktriangleright$$

Приклад 5. Знайти рівняння кривої, для якої кутовий коефіцієнт дотичної в довільній її точці у три рази більший за кутовий коефіцієнт прямої, що проходить через цю точку і початок координат.



Згідно з умовою $\text{tg } \beta = 3 \text{tg } \alpha$. Оскільки $\text{tg } \beta = \frac{dy}{dx}$, а $\text{tg } \alpha = \frac{y}{x}$, то матимемо диференціальне рівняння $\frac{dy}{dx} = 3 \frac{y}{x}$. Очевидно, що розв'язком цього рівняння є функція $y = Cx^3, C \in \mathbb{R}$. \blacktriangleright

Розділ 1

Диференціальні рівняння першого порядку

§ 1. Загальні поняття про диференціальне рівняння першого порядку

Диференціальне рівняння першого порядку зв'язує між собою незалежну змінну, шукану функцію і її першу похідну. Тому в загальному випадку його можна записати у вигляді

$$F(x, y, y') = 0, \quad (1)$$

де x – незалежна змінна, значення якої заповнюють деяку множину $X \subset \mathbb{R}$, y – шукана функція від x , а y' – її похідна.

Рівняння (1) може не містити в явному вигляді x і y , але обов'язково містить y' .

Розв'язавши рівняння (1), якщо це можливо, відносно похідної y' , дістанемо

$$y' = f(x, y), \quad (x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2. \quad (2)$$

Рівняння (2) називається **рівнянням першого порядку, розв'язаним відносно похідної**.

Очевидно, що рівняння (2) можна записати ще так:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad \text{або} \quad f(x, y)dx - dy = 0, \quad (x, y) \in D.$$

У такому вигляді воно є частинним випадком загальнішого рівняння

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0,$$

яке так само називають диференціальним рівнянням першого порядку. Обидві змінні x і y входять у це рівняння вже рівноправно, а тому будь-яку з них можна взяти за незалежну змінну.

Розглянемо рівняння (2), де f – деяка задана неперервна функція в області D .

Функція $y = \varphi(x)$, $x \in X$, називається **розв'язком** диференціального рівняння (2), якщо:

- 1) φ має неперервну похідну $\varphi'(x)$, $x \in X$;
- 2) $(x, \varphi(x)) \in D$ при всіх $x \in X$;
- 3) $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$, $x \in X$.

Приклад 1. Довести, що функція $y = \sin x$ є розв'язком рівняння $y' + y \operatorname{ctg} x - 2 \cos x = 0$, $x \neq n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$.

◀ Маємо $y' = \cos x$, $x \in \mathbb{R}$. Підставивши y і y' у рівняння, одержимо

$$\cos x + \sin x \cdot \operatorname{ctg} x - 2 \cos x = 0$$

або

$$\cos x + \cos x - 2 \cos x = 0, \quad x \neq n\pi, n \in \mathbb{Z},$$

а це й означає, що $y = \sin x$ є розв'язком заданого рівняння при $x \neq n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. ►

Пізніше ми переконаємося в тому, що при знаходженні розв'язку диференціального рівняння доводиться виконувати операцію інтегрування. Тому процес знаходження розв'язку диференціального рівняння називається ще **інтегруванням диференціального рівняння**.

Лінія в області D , яка є графіком деякого розв'язку рівняння (2), називається **інтегральною лінією** цього диференціального рівняння.

З'ясуємо геометричний зміст диференціального рівняння першого порядку (2).

Розглядатимемо в рівнянні (2) змінні x і y як декартові координати точки на площині \mathbb{R}^2 . Нехай $y = \varphi(x)$, $x \in X$, – розв'язок рівняння (2). Це означає, що

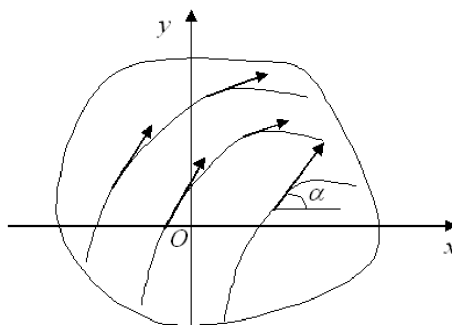
$$\varphi'(x) = f(x, \varphi(x)), \quad x \in X. \quad (3)$$

Візьмемо на графіку функції $y = \varphi(x)$, $x \in X$, тобто на інтегральній лінії, довільну точку $M(x, y)$ і проведемо в цій точці дотичну до лінії. Згідно з геометричним змістом похідної

$$\varphi'(x) = \operatorname{tg} \alpha, \quad (4)$$

де α – кут нахилу дотичної до осі Ox . Із співвідношень (2) – (4) випливає, що $\operatorname{tg} \alpha = f(x, \varphi(x)) = f(x, y)$, де (x, y) – координати точки M . Отже, кутовий коефіцієнт дотичної до інтегральної

лінії в кожній її точці дорівнює значенню в цій точці правої частини диференціального рівняння (2). Це означає, що диференціальне рівняння (2) визначає у кожній точці $(x, y) \in D$ напрямок дотичної до інтегральної лінії, що проходить через цю точку. Сукупність цих напрямків називається **полем напрямків** диференціального рівняння (2). Це поле можна зобразити, якщо від відповідних точок області D провести стрілки, що утворюють з віссю Ox кути $\alpha(x) = \arctg \varphi'(x)$, додатний напрямком стрілки можна вибрати довільно, оскільки арктангенс визначає кут з точністю, кратною π (див. рисунок).



Задачу інтегрування диференціального рівняння можна тлумачити так: *знайти таку лінію, щоб дотична в кожній її точці мала напрямком, що збігається з напрямком поля в цій точці, тобто треба провести лінію так, щоб стрілки поля показували напрямком дотичної до шуканої лінії в кожній точці.*

Для того щоб полегшити побудову поля напрямків, знайдемо всі точки області D , в яких стрілки мають один і той самий напрямком. Множину цих точок називають **ізокліною** диференціального рівняння (2).

Рівняння ізокліни (лінії однакових напрямків) знаходиться легко. Справді, в кожній точці ізокліни тангенс кута нахилу напрямків поля має одне й те саме значення $\operatorname{tg} \alpha = k$. Оскільки, з іншого боку, $\operatorname{tg} \alpha = y' = f(x, y)$, то координати кожної точки ізокліни задовольняють рівняння

$$f(x, y) = k. \quad (5)$$

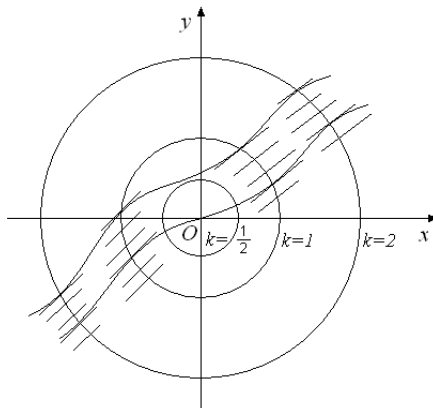
Співвідношення (5) є рівнянням ізокліни диференціального рівняння (2). Якщо припустити, що k в рівнянні (5) може набувати різних значень, то це рівняння можна розглядати як рівняння сім'ї ізоклін.

Приклад 2. Побудувати поле напрямків рівняння

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2$$

і накреслити інтегральні криві.

◀ Рівняння ізоклін заданого рівняння має вигляд $x^2 + y^2 = k$, тобто ізоклінами є концентричні кола радіуса \sqrt{k} , $k \geq 0$, з центром у початку координат. У точках кожного з кіл треба провести відрізки, які утворюють з віссю Ox один і той самий кут α , тангенс якого дорівнює k . При $k = \frac{1}{2}$ ізокліною є коло $x^2 + y^2 = \frac{1}{2}$, при $k = 1$ – коло $x^2 + y^2 = 1$ і т.д. Якщо $k = 0$, то маємо рівняння $x^2 + y^2 = 0$, яке задовольняє єдина точка $(0, 0)$. Для того щоб побудувати інтегральну лінію, візьмемо на площині довільну точку (x_0, y_0) . Проведемо через неї лінію так, щоб вона в кожній точці мала напрямком поля, тобто напрямком дотичної до неї в кожній її точці збігався з напрямком поля в цій точці. Оскільки (x_0, y_0) – довільна точка площини \mathbb{R}^2 , то задане диференціальне рівняння має множину інтегральних ліній, зображених на наступному рисунку. ▶



Розглянутий приклад 2 дозволяє зробити певні висновки, які за відповідних умов є правильними для широкого класу диференціальних рівнянь першого порядку.

1) Диференціальному рівнянню (2) відповідає безліч інтегральних ліній і, отже, безліч розв'язків.

2) Для виділення з цієї множини конкретної інтегральної лінії треба задати точку (x_0, y_0) , через яку повинна проходити лінія. Це означає, що треба задати те значення y_0 , якого набуває розв'язок $y = \varphi(x)$ при $x = x_0$. Задане значення y_0 шуканого розв'язку при $x = x_0$ називається **початковою умовою**. Вона записується так:

$$y(x)|_{x=x_0} = y_0 \quad \text{або} \quad y(x_0) = y_0, \quad (6)$$

де $(x_0, y_0) \in D$.

Задача, в якій треба знайти розв'язок рівняння (2), що задовольняє умову (6), називається **задачею Коші**.

Умови, за яких задача Коші має єдиний розв'язок, визначаються **теоремою Коші про існування і єдиність розв'язку**: якщо права частина f рівняння (2) і її частинна похідна $\frac{\partial f}{\partial y}$ визначені та неперервні в деякій області D зміни x і y , то для довільної внутрішньої точки (x_0, y_0) цієї області задане рівняння має єдиний розв'язок $y = \varphi(x)$, який при $x = x_0$ набуває значення y_0 .

Геометрично це означає, що через кожну внутрішню точку (x_0, y_0) області D проходить єдина інтегральна лінія.

Внутрішні точки області D або точки її межі, в яких не виконуються умови теореми про існування і єдиність розв'язку, називаються **особливими точками** диференціального рівняння. У цих точках має розрив або функція f або її частинна похідна $\frac{\partial f}{\partial y}$. Через кожну з таких точок може проходити або декілька інтегральних ліній, або не проходити жодна.

Приклад 3. Дослідити, чи має особливі точки рівняння $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$.

◀ Права частина рівняння $f(x, y) = \frac{y}{x}$ і її частинна похідна

$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \frac{1}{x}$ неперервні при $x \neq 0$. Отже, на всій площині Oxy , за винятком осі Oy , права частина рівняння задовольняє умови теореми Коші. Точки, які лежать на осі Oy , є особливими.

Легко перевірити, що розв'язком заданого рівняння є функція $y = Cx$, де C – довільна стала. При конкретних значеннях сталої C одержуємо різні розв'язки цього рівняння.

Нехай відомо, що $y(x_0) = y_0$, $x_0 \neq 0$. Підставляючи в сукупність розв'язків замість x і y їхні значення x_0 і y_0 , дістанемо співвідношення для визначення сталої C , а саме, $y_0 = Cx_0$. Звідси випливає, що $C = \frac{y_0}{x_0}$ і відповідний частинний розв'язок

$$y = \frac{y_0}{x_0}x.$$

Сукупність розв'язків $y = Cx$ – це всі прямі, які проходять через початок координат, за винятком осі Oy . Через кожну точку, що не лежить на осі Oy , проходить єдина пряма (інтегральна лінія) з цієї сукупності. Через початок координат проходить безліч інтегральних ліній. Порушення єдності пояснюється тим, що початок координат є особливою точкою. Зауважимо, що через особливі точки, які лежать на осі Oy і не збігаються з початком координат, не проходить жодна інтегральна лінія. ►

Теорема Коші гарантує існування розв'язку тільки в малому околі точки x_0 . Це істотно, оскільки розв'язок задачі Коші може за скінченне значення x перетворитися в нескінченність.

Приклад 4. Розв'язати задачу Коші

$$\frac{dy}{dx} = y^2, \quad y(x_0) = y_0.$$

◀ Легко перевіряємо, що всі розв'язки рівняння визначаються рівністю

$$y = \frac{1}{C - x}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Задовольняючи початкову умову, дістаємо $y_0 = \frac{1}{C - x_0}$ або $C = x_0 + \frac{1}{y_0}$. Тому розв'язок задачі Коші має вигляд

$$y = \frac{y_0}{1 - (x - x_0)y_0}. \quad (7)$$

Якщо $y_0 \neq 0$, то інтегральною лінією є гіпербола, а якщо

$y_0 = 0$, то вісь Ox .

З формули (7) випливає, що розв'язок перетворюється у нескінченність при $x = x_0 + \frac{1}{y_0}$, $y_0 > 0$. ►

Дамо означення **загального** та **частинного** розв'язків диференціального рівняння (2), права частина якого f задовольняє в деякій області D умови теореми Коші.

Функція $y = \varphi(x, C)$, яка залежить від аргументу x і довільної сталої C , називається **загальним розв'язком** рівняння (2) в області D , якщо вона задовольняє умови:

1) при довільних значеннях сталої C , яка належать до деякої множини, функція $y = \varphi(x, C)$ є розв'язком рівняння (2);

2) для кожної точки (x_0, y_0) , що лежить усередині області D , існує єдине значення сталої $C = C_0$ таке, що розв'язок $y = \varphi(x, C_0)$ задовольняє початкову умову (6).

Значення $C = C_0$ знаходимо з умови

$$y_0 = \varphi(x_0, C_0).$$

Будь-який розв'язок $y = \varphi(x, C_0)$ рівняння (2), який одержується із загального розв'язку $y = \varphi(x, C)$ при конкретному значенні $C = C_0$, називається **частинним розв'язком**.

Якщо загальний розв'язок диференціального рівняння знайдено у вигляді, не розв'язаному відносно y , тобто у вигляді $\Phi(x, y, C) = 0$, то він називається **загальним інтегралом** диференціального рівняння. Якщо, інтегруючи рівняння (2), дістаємо загальний інтеграл у вигляді, розв'язаному відносно довільної сталої C , тобто $\psi(x, y) = C$, то ліву частину цієї рівності називають **інтегралом** диференціального рівняння.

Нижче розглянемо методи знаходження розв'язків диференціальних рівнянь першого порядку. Оскільки не існує єдиного методу знаходження розв'язків рівняння (2) для довільної правої частини f , то виділимо ті типи рівнянь, які інтегруються в **квadrатурах**, тобто їхні розв'язки виражаються через елементарні функції або інтеграли від них.

§ 2. Рівняння з відокремлюваними змінними

Диференціальне рівняння першого порядку називається **рівнянням з відокремлюваними змінними**, якщо його можна подати у вигляді

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y). \quad (1)$$

Вважатимемо, що функція f неперервна на проміжку X , а g – неперервна на проміжку Y , причому $g(y) \neq 0$, $y \in Y$.

У рівнянні (1) права частина є добутком функції тільки від x і функції тільки від y . Воно інтегрується за допомогою методу відокремлення змінних, який полягає в тому, що множенням і діленням рівняння зводиться до такого вигляду, коли до однієї частини його входить тільки функція від x і множник dx , а до другої – функція від y і множник dy . У нашому випадку треба помножити обидві частини рівняння (1) на dx і поділити на $g(y)$:

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx. \quad (2)$$

Якщо рівняння (1) подано у вигляді (2), то кажуть, що в ньому **змінні відокремлені**.

Припустимо, що ми знайшли розв'язок $y(x)$ рівняння (2). Якщо функцію $y(x)$ підставити в це рівняння, то воно перетвориться в тотожність. Зінтегрувавши її почленно, дістанемо

$$\int \frac{dy}{g(y)} + C_1 = \int f(x)dx + C_2$$

або

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + C, \quad (3)$$

де $C = C_2 - C_1$ – довільна стала. Тут і далі знак інтеграла означає взяття первісної від підінтегральної функції.

Отже, припускаючи, що y є розв'язком рівняння (1), ми дістали співвідношення (3), яке зв'язує цей розв'язок y і незалежну змінну x , тобто дістали **загальний інтеграл рівняння**

(1). Якщо вдасться розв'язати його відносно y , то матимемо загальний розв'язок заданого рівняння. Легко пересвідчуємося, що кожний розв'язок рівняння (3) є розв'язком рівняння (1), оскільки коли деяка функція $y(x)$ при підставлянні перетворює рівняння (3) в тотожність, то диференціюючи цю тотожність, переконуємося, що $y(x)$ задовольняє і рівняння (1).

Зауваження 1. При діленні обох частин рівняння (1) на $g(y)$, ми могли втратити ті розв'язки, для яких $g(y) = 0$. Справді, якщо $g(y_0) = 0$, то функція $y = y_0$, очевидно, є розв'язком рівняння (1).

Приклад 1. Розв'язати рівняння

$$xy' + y = 0, \quad x \neq 0.$$

◀ Розв'язавши рівняння відносно y' , одержимо $y' = -\frac{y}{x}$ або $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$. Відокремлюючи змінні, знаходимо $\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}$. Зінтегрувавши, дістанемо

$$\int \frac{dy}{y} = - \int \frac{dx}{x} + C_1$$

або

$$\ln |y| = -\ln |x| + C_1,$$

де C_1 – довільна стала. Для спрощення одержаного розв'язку скористаємося часто вживаним прийомом, а саме, покладемо $C_1 = \ln C_2$, $C_2 > 0$. Тоді $\ln |y| = -\ln |x| + \ln C_2$, звідки $|y| = \frac{C_2}{|x|}$. Якщо ми розглядаємо гладкі розв'язки, то рівність $|y| = \frac{C_2}{|x|}$, де $C_2 > 0$, еквівалентна рівності $y = \pm \frac{C_2}{x}$ або $y = \frac{C}{x}$, де C може набувати як додатних, так і від'ємних значень, але $C \neq 0$. Якщо взяти до уваги, що при діленні на y ми втратили розв'язок $y = 0$, то можна вважати, що в формулі $y = \frac{C}{x}$ стала C набуває і значення $C = 0$, при якому ми одержимо втрачений раніше розв'язок $y = 0$.

Отже, загальний розв'язок заданого рівняння має вигляд $y = \frac{C}{x}$, $x \neq 0$, де стала $C \in \mathbb{R}$. ►

Приклад 2. Розв'язати рівняння

$$x(1 + y^2)dx - y(1 + x^2)dy = 0.$$

◀ Відокремимо змінні та зінтегруємо:

$$\frac{ydy}{1 + y^2} = \frac{xdx}{1 + x^2}, \quad \int \frac{ydy}{1 + y^2} = \int \frac{xdx}{1 + x^2} + C,$$
$$\ln(1 + y^2) = \ln(1 + x^2) + \ln C_1, \quad C_1 > 0.$$

Звідси одержуємо загальний інтеграл рівняння

$$1 + y^2 = C_1(1 + x^2), \quad C_1 > 0.$$

Зауважимо, що втрати розв'язків не було, бо $1 + y^2 \neq 0$ і $1 + x^2 \neq 0$. ►

Зауваження 2. До рівняння з відокремлюваними змінними зводиться рівняння

$$\frac{dy}{dx} = f(ax + by + c), \quad (4)$$

де a , b і c – дійсні числа, а $f(z)$ – неперервна функція на проміжку X .

У рівнянні (4) зробимо заміну $z = ax + by + c$. Оскільки $\frac{dz}{dx} = a + b\frac{dy}{dx}$, то

$$\frac{dz}{dx} = a + bf(z). \quad (5)$$

Рівняння (5) є диференціальним рівнянням з відокремлюваними змінними. Відокремлюючи змінні та інтегруючи, отримуємо

$$\frac{dz}{a + bf(z)} = dx, \quad a + bf(z) \neq 0,$$
$$x = \int \frac{dz}{a + bf(z)} + C. \quad (6)$$

Знайшовши інтеграл у правій частині (6) і повернувшись до змінної y , одержимо загальний інтеграл рівняння (4).

Приклад 3. Знайти розв'язок задачі Коші

$$\frac{dy}{dx} = 2x + y, \quad y(1) = 2.$$

◀ Задане рівняння не є рівнянням з відокремленими змінними, але зводиться до нього заміною $z = 2x + y$. Оскільки $\frac{dz}{dx} = 2 + \frac{dy}{dx}$, то рівняння набуде вигляду

$$\frac{dz}{dx} = 2 + z.$$

Відокремлюючи змінні та інтегруючи, маємо

$$\frac{dz}{z+2} = dx, \quad \ln|z+2| = x + \ln|C_1|, \quad C_1 \neq 0,$$

$$|z+2| = |C_1|e^x, \quad z+2 = \pm C_1 e^x.$$

Якщо врахувати розв'язок $z = -2$, який ми втратили при відокремленні змінних, то одержимо загальний розв'язок

$$z = -2 + Ce^x, \quad x \in \mathbb{R}, C \in \mathbb{R}.$$

Після повернення до змінної y , матимемо

$$2x + y = -2 + Ce^x \quad \text{або} \quad y = -2(x+1) + Ce^x, \quad x \in \mathbb{R}, C \in \mathbb{R}.$$

З початкової умови знаходимо

$$2 = -2(1+1) + Ce \quad \text{або} \quad C = \frac{6}{e}.$$

Отже, розв'язком задачі Коші є функція

$$y = -2(x+1) + 6e^{x-1}, \quad x \in \mathbb{R}. \blacktriangleright$$

Приклад 4 (модель рівноважного зростання випуску продукції). Нехай $y(t)$ – кількість продукції, що випускається галуззю за час t , а p – ціна одиниці продукції. Відомо, що сума інвестицій, тобто кількість коштів $I(t)$, які направляються на

розширення виробництва, пропорційна прибутку $py(t)$ з коефіцієнтом пропорційності $m \in (0, 1)$. Швидкість випуску продукції пропорційна збільшенню інвестицій з коефіцієнтом l . Треба знайти кількість продукції, що випускається галуззю за час t , якщо $y = y_0$ при $t = t_0$.

◀ Згідно з умовою задачі

$$I(t) = mpy(t), \quad y'(t) = lI(t), \quad t > t_0.$$

Звідси випливає, що

$$y'(t) = lmpy(t)$$

або

$$y'(t) = ky(t),$$

де $k := lmp$.

Маємо диференціальне рівняння з відокремленими змінними. Відокремивши змінні та зінтегрувавши, дістанемо

$$\frac{dy}{dt} = ky, \quad \frac{dy}{y} = kdt,$$

$$\int \frac{dy}{y} = k \int dt + \ln C_1, \quad C_1 > 0,$$

$$\ln |y| = kt + \ln C_1, \quad |y| = C_1 e^{kt},$$

$$y = \pm C_1 e^{kt}, \quad C_1 > 0.$$

Оскільки при відокремленні змінних втрачено розв'язок $y = 0$, то його треба включити в одержану вище сукупність. Тому загальний розв'язок рівняння

$$y(t) = Ce^{kt}, \quad t > t_0, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Врахуємо, що $y(t_0) = y_0$, тоді

$$y_0 = Ce^{kt_0}$$

або

$$C = y_0 e^{-kt_0}.$$

Отже, кількість продукції, що випускається галуззю, визначається функцією

$$y(t) = y_0 e^{k(t-t_0)}, \quad t > t_0. \blacktriangleright$$

Приклад 5 (охолодження тіла). Тіло маси m зі сталою теплоємністю c має температуру y_0 . Температура оточуючого середовища стала і дорівнює $y_1 < y_0$. Знайти закон охолодження тіла, вважаючи, що кількість тепла, яке віддає тіло за нескінченно малий проміжок часу dt , пропорційна різниці температур тіла і оточуючого середовища, а також довжині проміжку dt (закон Ньютона).

◀ Нехай $y(t)$ – температура тіла в момент часу t . За нескінченно малий проміжок часу dt кількість тепла, яке віддає тіло, згідно з припущенням, дорівнює

$$dq = -k(y - y_1)dt, \quad (7)$$

де k – коефіцієнт пропорційності.

З іншого боку, кількість тепла q , яке віддає тіло при охолодженні від температури y до y_1 , дорівнює $q = mc(y - y_1)$, а тому

$$dq = mcdy. \quad (8)$$

Порівнюючи між собою (7) і (8), одержуємо диференціальне рівняння

$$mcdy = -k(y - y_1)dt$$

або

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{k}{mc}(y - y_1). \quad (9)$$

Відокремивши змінні та зінтегрувавши, дістанемо

$$\begin{aligned} \frac{dy}{y - y_1} &= -\frac{k}{mc}dt, \\ \ln(y - y_1) &= -\frac{k}{mc}t + \ln C, \\ y &= y_1 + Ce^{-\frac{k}{mc}t}, C \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (10)$$

Оскільки $y(0) = y_0$, то з (10) одержуємо, що $C = y_0 - y_1$, а тому шуканий закон охолодження тіла має вигляд

$$y = y_1 + (y_0 - y_1)e^{-\frac{kt}{mc}}. \quad (11)$$

Коефіцієнт k або задається умовою задачі, або визначається додатковою умовою, наприклад, $y(t_1) = y_2$. Тоді, підставивши в (11) $t = t_1$ і $y = y_2$, матимемо

$$y_2 = y_1 + (y_0 - y_1)e^{-\frac{kt_1}{mc}},$$

звідки знаходимо, що

$$e^{-\frac{k}{mc}} = \left(\frac{y_2 - y_1}{y_0 - y_1} \right)^{\frac{1}{t_1}}.$$

Тому

$$y = y_1 + (y_0 - y_1) \left(\frac{y_2 - y_1}{y_0 - y_1} \right)^{\frac{t}{t_1}}. \blacktriangleright$$

Вправи

1. Розв'язати рівняння з відокремленими змінними:

- 1) $\sqrt{xy} dx + x^2y dy = 0$; 2) $\sin x \cos y dx + \cos x \sin y dy = 0$;
- 3) $(y - x^2y) dy = (x - xy^2) dx$; 4) $(1 + y^2) dx + xy dy = 0$;
- 5) $y' = (2y + 1) \operatorname{ctg} x$; 6) $x\sqrt{1 + y^2} + yy'\sqrt{1 + x^2} = 0$;
- 7) $y = xy' + 2(1 + x^2y')$; 8) $xy' = y \ln y$; 9) $xy(1 + x^2)y' = 1 + y^2$;
- 10) $(1 + y^2) dx = x dy$; 11) $y' = \frac{x}{y}$; 12) $dy = y \operatorname{tg} x dx$;
- 13) $y' = e^{x+y}$; 14) $(1 + y^2)x dx + (1 + x^2) dy = 0$;
- 15) $y - xy' = 1 + x^2y'$; 16) $y' = \sin(x - y)$;
- 17) $x^2 dx + y^3 e^{x+y} dy = 0$; 18) $x + xy + y'(y + xy) = 0$;
- 19) $(xy^2 + x)dx + (y - x^2y)dy = 0$; 20) $xyy' = 1 - x^2$;
- 21) $yy' = \frac{1-2x}{y}$; 22) $y' \operatorname{tg} x - y = 1$;
- 23) $xy' + y = 7y^2$; 24) $y' + \sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}} = 0$;
- 25) $\sqrt{1 - y^2} dx + y\sqrt{1 - x^2} dy = 0$; 26) $e^{y'} = x$.

2. Знайти розв'язок диференціального рівняння, що задовольняє початкову умову:

- 1) $y' \sin x = y \ln y$, $y(\frac{\pi}{2}) = 1$; 2) $y' = \frac{1+y^2}{1+x^2}$, $y(0) = 1$;
 3) $\sin y \cos x dy = \cos y \sin x dx$, $y(0) = \frac{\pi}{4}$;
 4) $y' = \frac{xy^2 + y^2}{x^2y - x^2}$, $y(1) = 1$; 5) $2y'\sqrt{x} = y$, $y(4) = 1$;
 6) $(1 + e^x)yy' = e^x$, $y(1) = 1$; 7) $y' = y \cos x$, $y(0) = 1$;
 8) $y'\sqrt{1-x^2} = 1$, $y(1) = \frac{\pi}{2}$; 9) $e^y(\frac{dy}{dx} + 1) = 1$, $y(0) = 0$;
 10) $xy' = \frac{y}{\ln x}$, $y(e) = 1$.

3. Фірма має на складі 1680 приладів, причому вона виробляє по 900, а реалізує по 800 приладів за місяць. Попит на продукцію знижується зі швидкістю 10 приладів за місяць. З якою швидкістю v має падати виробництво, щоб на складі через 12 місяців не залишилося жодного приладу?

4. У культурі пивних дріжджів швидкість приросту діючого ферменту пропорційна наявній його кількості. Якщо ця кількість подвоюється за годину, то в скільки разів вона збільшиться за 2,5 год?

5. Відомо, що попит d і пропозиція s на деякий товар визначається відповідно співвідношеннями

$$d = 4p' - 2p + 39, s = 44p' + 2p - 1,$$

де p – ціна товару, а p' – тенденція формування ціни. Виходячи з вимоги відповідності попиту і пропозиції, знайти закон зміни ціни в залежності від часу, якщо в початковий момент часу $t = 0$ одиниця товару коштувала 1 гр.од.

6. У резервуар, що містить 10 кг солі на 100 л суміші, щохвилини вливається 30 л води і витікає 20 л суміші. Визначити, яка кількість солі залишиться в резервуарі через t хв, вважаючи, що суміш миттєво перемішується.

7. Розв'язати рівняння:

- 1) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x-y} + 1$; 2) $\frac{dy}{dx} = \sqrt{4x + 2y - 1}$, якщо $y(0) = 1$;
 3) $\frac{dy}{dx} = 2x + y - 3$; 4) $(x + 2y)\frac{dy}{dx} = 1$, якщо $y(0) = -1$.

8. Нехай є N потенційних покупців деякого товару. Після рекламного оголошення інформація про даний товар поширюється через спілкування покупців між собою. Враховуючи, що швидкість зміни числа покупців, які знають про товар, пропорційна як числу проінформованих про товар, так і числу по-

купців, які про нього нічого не знають, скласти математичну модель задачі та знайти закон залежності числа проінформованих покупців від часу, якщо $x(0) = \frac{N}{\psi}$.

9. За який час тіло, нагріте до 100° , охолodиться до 25° в кімнаті з температурою 20° , якщо до 60° воно охолodжується за 10 хв? За законом Ньютона швидкість охолodження пропорційна різниці температур тіла та кімнати.

10. Зінтегрувати диференціальне рівняння розширеного відтворення $\frac{dP}{dt} = \frac{H-S}{f}P$, де H , S і f – сталі, та визначити, через який проміжок часу відбудеться подвоєння сукупного продукту, якщо $H = 0,6$, $S = 0,5$, $f = 1$.

11. Залежність кількості населення міста від часу t (у роках) описується диференціальним рівнянням $y' = 0,1y(1 - 10^{-6}y)$. Через скільки років кількість населення цього міста зросте з 100000 до 500000?

12. Знайти обсяг реалізованої продукції $y(t)$ і його значення при $t = 2$, якщо відомо, що ціна залежить від обсягу продукції і має вигляд $p(y) = 3 - 2y$, норма акселерацій $\frac{1}{l} = 1,5$, норма інвестицій $m = 0,6$, $y(0) = 1$, а модель росту має вигляд $y' = mlyp(y)$.

13. Граничний прибуток фірми визначається співвідношенням $y'(x) = 50000 - x$. Знайти повний прибуток фірми, якщо нульовий випуск продукції дає нульовий прибуток.

14. Проходячи через ліс і зазнаючи опору дерев, вітер втрачає свою швидкість. На нескінченно малому шляху ця втрата пропорційна швидкості на початку цього шляху і його довжині. Знайти швидкість вітру, який пройшов у лісі 150 м, знаючи, що до вступу в ліс початкова швидкість вітру $v_0 = 12$ м/с, після проходження в лісі шляху $x = 1$ м швидкість вітру зменшилася до величини $v_1 = 11,8$ м/с.

15. Площа області, обмеженої лінією, віссю Ox і ординатою довільної точки лінії, дорівнює кубові цієї ординати. Знайти ту з інтегральних ліній, що проходить через початок координат.

16. Цегляна стіна товщиною 30 см має із зовнішнього бо-

ку температуру 0° , а з внутрішнього 20° . Знайти температуру всередині стіни.

17. Якщо через довільну точку лінії провести прямі, паралельні осям координат до зустрічі з цими осями, то площа прямокутника, який при цьому утворюється, ділиться лінією на дві частини, одна з яких за площею втричі більша за другу. Знайти рівняння цієї лінії.

Відповіді

1. 1) $\frac{2}{3}\sqrt{y^3} - \frac{2}{\sqrt{x}} = C, x = 0, y = 0$; 2) $\cos x \cos y = C$; 3) $1 - y^2 = C(1 - x^2), x = \pm 1$; 4) $x(1 + y^2) = C$; 5) $y = \frac{1}{2}(C \sin^2 x - 1)$; 6) $\sqrt{1 + x^2} + \sqrt{1 + y^2} = C$; 7) $y = 2 + \frac{2Cx}{1+2x}$; 8) $y = e^{Cx}$; 9) $(1 + x^2)(1 + y^2) = Cx^2$; 10) $y = \operatorname{tg} \ln Cx$; 11) $y^2 - x^2 = C$; 12) $\ln |y \cos x| = C$; 13) $e^x + e^{-y} = C$; 14) $\operatorname{arctg} y \pm \frac{1}{2} \ln(1 + x^2) = C$; 15) $y = 1 + \frac{Cx}{1+x}$; 16) $x + C = \operatorname{ctg}(\frac{y-x}{2} + \frac{\pi}{4})$; 17) $e^y(y^3 - 3y^2 + 6y - 6) - e^{-x}(2 + 2x + x^2) = C$; 18) $x + y = \ln C(x+1)(y+1)$; 19) $1 + y^2 = C(1 - x^2)$; 20) $x^2 + y^2 = \ln Cx^2$; 21) $y = \sqrt{C + 3x - 3x^2}$; 22) $y = C \sin x - 1$; 23) $Cx = \frac{y-1}{y}$; 24) $x\sqrt{1 - y^2} + y\sqrt{1 - x^2} = C$; 25) $\sqrt{1 - y^2} = \arcsin x + C$; 26) $y = x(\ln x - 1) + C$.

2. 1) $y = 1$; 2) $y = \frac{1+x}{1-x}$; 3) $\cos x = \sqrt{2} \cos y$; 4) $\frac{x+y}{xy} = \ln \frac{x}{y} + 2$; 5) $y = e^{\sqrt{x}-2}$; 6) $y^2 - 1 = 2 \ln \frac{e^x+1}{e+1}$; 7) $y = e^{\sin x}$; 8) $y = \arcsin x$; 9) $y = 0$; 10) $y = \ln x$.

3. $\frac{dx}{dt} = s(t) - d(t), s(t) = 900 - vt, d(t) = 800 - 10t, x(t) = 1680 + 100t + \frac{(10-v)t^2}{2}, v = 50$.

4. $\frac{dx}{dt} = kx, x(t) = x_0 e^{kt}, k = \ln 2, x(2, 5) = 2^{5/2} x_0 = 5,65 x_0$.

5. $10p' + p - 1 = 0, p(t) = C e^{-0,1t} + 10$.

6. $\frac{dx}{dt} = -\frac{2x}{10+t}, x(0) = 10, x(t) = \frac{C}{(10+t)^2}, x(t) = \frac{1000}{(10+t)^2}$.

7. 1) $(x - y)^2 = -2x + C$; 2) $x + C = \sqrt{4x + 2y - 1} - 2 \ln(2 + \sqrt{4x + 2y - 1}), x + 1 - 2 \ln 3 = \sqrt{4x + 2y - 1} - 2 \ln(2 + \sqrt{4x + 2y - 1})$; 3) $2x + y - 1 = C e^x$; 4) $x + 2y + 2 = C e^y, x + 2y + 2 = 0$.

8. $\frac{dx}{dt} = kx(N - x), x(0) = \frac{N}{\psi}; x = \frac{N}{1 + (\psi - 1)e^{-Nkt}}$.

9. $\frac{dy}{dt} = k(y - 20)$, $t_0 = 40$ хв; скористатись міркуваннями з прикладу 5.

10. $P(t) = P_0 e^{\frac{H-S}{f}t}$, $t_0 = 10 \ln 2 = 10 \cdot 0,6931 \approx 7$.

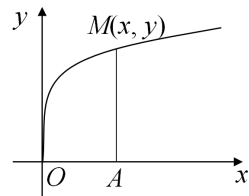
11. $t_0 = 20 \ln 3 = 20 \cdot 1,0986 \approx 22$ роки.

12. $y' = 0,4(3 - 2y)y$, $y(t) = \frac{3e^{1,2t}}{1 + 2e^{1,2t}}$, $y(2) = \frac{3e^{2,4}}{1 + e^{2,4}} \approx 1,43$.

13. $y(x) = 50000x - \frac{x^2}{2}$.

14. $\frac{dv}{dx} = -kv$, $v = v_0 e^{-kx}$, $e^{-k} = \frac{v_1}{v_0} = 0,983$, $v = 12(0,983)^{150} = 12 \cdot 0,0776 \approx 0,93$ м/с.

15.

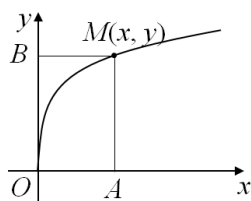


Оскільки площа фігури OMA $S = \int_0^x y(\xi)d\xi$, то згідно з умовою $\int_0^x y(\xi)d\xi = y^3$. Взавши диференціал від обох частин цієї рівності, одержимо диференціальне рівняння $y(x)dx = 3y^2 dy$ або $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3y}$.

Звідси випливає, що $\frac{y^2}{2} = \frac{x}{3} + C$. Враховуючи те, що лінія проходить через початок координат, одержимо рівняння шуканої лінії $y^2 = \frac{2}{3}x$.

16. У даному випадку рівняння теплопровідності $q = k \frac{dt}{dx}$, де q – кількість тепла, k – коефіцієнт теплопровідності, x – віддаль від зовнішньої стіни до відповідної площадки. Зінтегрувавши одержане рівняння, матимемо $t = \frac{q}{k}x + C$. Згідно з умовою $t(30) = 0$, $t(0) = 20$. Тому $0 = \frac{q}{k}30 + C$, $C = -30\frac{q}{k}$, а отже, $t = \frac{q}{k}x - 30\frac{q}{k}$ або $t = \frac{q}{k}(x - 30)$, $20 = \frac{q}{k}(0 - 30)$, $\frac{q}{k} = -\frac{2}{3}$. Звідси випливає, що $t = -\frac{2}{3}(x - 30)$. Тоді при $x = 15$ $t = -\frac{2}{3}(15 - 30)$ або $t = 10^\circ$.

17.



Згідно з умовою задачі площа криволінійної трапеції OMA , яка дорівнює $\int_0^x y(\xi)d\xi$, втричі більша за площу криволінійного трикутника OBM , що дорівнює $xy - \int_0^x y(\xi)d\xi$, тобто $\int_0^x y(\xi)d\xi = 3(xy - \int_0^x y(\xi)d\xi)$.

Після спрощення і диференціювання за x обох частин рівності, дістанемо диференціальне рівняння $3xy' = y$, розв'язком якого є $y^3 = Cx$.

§ 3. Однорідні рівняння першого порядку

Рівняння першого порядку

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

називається **однорідним**, якщо f є однорідною функцією своїх аргументів нульового виміру, тобто якщо правильною є тотожність

$$f(tx, ty) = t^0 f(x, y) = f(x, y), \quad t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \quad (1)$$

У загальному випадку функція $f(x, y)$ називається **однорідною m -го виміру**, якщо виконується тотожність $f(tx, ty) = t^m f(x, y)$, $t \neq 0$.

Якщо в (1) взяти $t = \frac{1}{x}$, то дістанемо тотожність

$$f(x, y) = f\left(1, \frac{y}{x}\right).$$

Оскільки в правій частині стоїть функція тільки одного аргументу $\frac{y}{x}$, то, позначивши її через $\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$, однорідне рівняння

можемо записати у вигляді

$$\frac{dy}{dx} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right). \quad (2)$$

При довільній заданій неперервній функції φ змінні в цьому рівнянні не відокремлюються, але його можна звести до рівняння з відокремлюваними змінними, якщо зробити заміну $z = \frac{y}{x}$. Справді, тоді $y = zx$, $\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx}x + z$, а тому рівняння (2) набуде вигляду

$$\frac{dz}{dx}x + z = \varphi(z)$$

або

$$\frac{dz}{dx}x = \varphi(z) - z. \quad (3)$$

При розв'язуванні рівняння (3) треба розрізняти три випадки: а) $\varphi(z) \neq z$ для кожного z з області визначення φ ; б) $\varphi(z) \equiv z$; в) $\varphi(z_k) = z_k$ для деяких точок z_k . Рівняння (3) еквівалентне рівнянню з відокремленими змінними вигляду

$$\frac{dz}{\varphi(z) - z} = \frac{dx}{x}$$

у випадку а) і рівнянню $xz' = 0$ у випадку б). У випадку в) безпосередньою перевіркою можна переконатися, що $z(x) = z_k$ є розв'язком рівняння (3).

Знайшовши всі розв'язки рівняння (3) і повернувшись до заміни, знайдемо всі розв'язки рівняння (2). При цьому можливі і складені розв'язки, які на різних проміжках визначаються різними аналітичними виразами. Вони з'являються тоді, коли інтегральні криві рівняння (2) дотикаються до інтегральних прямих $y = z_k x$.

Приклад 1. Розв'язати рівняння

$$x \frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + y^2}{x + y}, \quad x > 0, x + y > 0.$$

◀ Запишемо рівняння у вигляді

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}{1 + \frac{y}{x}}$$

і зробимо заміну $y = zx$. Тоді рівняння набуде вигляду

$$\frac{dz}{dx}x + z = \frac{1 + z^2}{1 + z}, \quad x > 0, z > -1.$$

Звідси знаходимо, що

$$\frac{dz}{dx}x = \frac{1 - z}{1 + z}, \quad x > 0, z > -1.$$

Безпосередньою перевіркою переконуємося, що $z = 1$ є розв'язком цього рівняння. Якщо ж $z \neq 1$, то рівняння еквівалентне такому:

$$\frac{1 + z}{1 - z} dz = \frac{dx}{x}, \quad x > 0, z > -1.$$

Зінтегрувавши це рівняння, дістанемо

$$-\ln(z - 1)^2 - z = \ln|x| + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Повернувшись до змінної y , одержимо всі розв'язки заданого рівняння

$$\ln x + C = -\ln\left(\frac{y}{x} - 1\right)^2 - \frac{y}{x}, \quad C \in \mathbb{R},$$

$$y = x. \blacktriangleright$$

Зауваження 1. Рівняння вигляду

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right), \quad (4)$$

де $f(t)$ – неперервна функція на проміжку T , а числа $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ такі, що $|a_1| + |b_1| > 0$, $|a_2| + |b_2| > 0$, зводиться

до рівняння з відокремленими змінними або до однорідного рівняння.

Розглянемо на площині прямі $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ і $a_2x + b_2y + c_2 = 0$. Якщо ці прямі мають точку перетину (x_0, y_0) , то заміна

$$x = u + x_0, \quad y = v + y_0$$

зводить рівняння (4) до однорідного рівняння

$$\frac{dv}{du} = f\left(\frac{a_1u + b_1v}{a_2u + b_2v}\right).$$

Якщо ж прямі паралельні, то знайдеться таке число $k \neq 0$, що $a_2x + b_2y = k(a_1x + b_1y)$. У цьому випадку рівняння (4) набуде вигляду

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{k(a_1x + b_1y) + c_2}\right)$$

і заміною $z = a_1x + b_1y$ зводиться до рівняння з відокремленими змінними.

Приклад 2. Зінтегрувати рівняння

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y + 2}{2x + y - 4}.$$

◀ Розв'язавши систему рівнянь

$$\begin{cases} y + 2 = 0, \\ 2x + y - 4 = 0, \end{cases}$$

одержимо, що $x_0 = 3$, $y_0 = -2$.

Після заміни

$$x = u + 3, \quad y = v - 2$$

дістанемо рівняння

$$\frac{dv}{du} = \frac{v}{2u + v}.$$

Очевидно, що $v = 0$ є розв'язком цього рівняння. При $v \neq 0$ воно є однорідним. Шукатимемо його розв'язок у вигляді

$$v = zu,$$

де $z = z(u)$ – нова невідома функція.

Після підстановки в рівняння і відповідних спрощень знаходимо, що

$$\frac{dz}{du}u + z = \frac{zu}{2u + zu}$$

або

$$\frac{dz}{du}u = -\frac{z(z+1)}{2+z}.$$

Відокремивши змінні та зінтегрувавши, одержимо

$$\int \frac{(z+2)dz}{z(z+1)} = -\int \frac{du}{u} + \ln|C_1|, \quad C_1 \neq 0,$$

$$\int \left(\frac{2}{z} - \frac{1}{z+1} \right) dz = -\ln|u| + \ln|C_1|,$$

$$2 \ln|z| - \ln|z+1| + \ln|u| = \ln|C_1|,$$

$$\ln \left| \frac{z^2 u}{z+1} \right| = \ln|C_1|, \quad \frac{z^2 u}{z+1} = \pm C_1$$

або

$$z^2 u = C(z+1), \quad \text{де } C \in \mathbb{R}.$$

Якщо повернутися спочатку до змінної v , а потім до змінних x і y , то дістанемо

$$v^2 = C(u+v),$$

$$(y+2)^2 = C(x+y-1), \quad C \in \mathbb{R}.$$

Отже, всі розв'язки заданого рівняння визначаються формулою

$$(y+2)^2 = C(x+y-1), \quad C \in \mathbb{R}. \blacktriangleright$$

Приклад 3. Розв'язати рівняння $(x + y + 1)dx + (2x + 2y - 1)dy = 0$.

◀ Оскільки система рівнянь

$$\begin{cases} x + y + 1 = 0, \\ 2x + 2y - 1 = 0 \end{cases}$$

несумісна, то зробимо заміну $x + y = z$. Тоді $dy = dz - dx$ і рівняння набуде вигляду

$$(z + 1)dx + (2z - 1)(dz - dx) = 0$$

або

$$(2 - z)dx + (2z - 1)dz = 0.$$

Відокремлюючи змінні та інтегруючи, дістаємо

$$dx = \frac{2z - 1}{z - 2} dz, \quad z \neq 2,$$

$$\int dx = \int \frac{2z - 1}{z - 2} dz + C, \quad x = 2z + 3 \ln |z - 2| + C.$$

Повернувшись до змінних x і y , знайдемо сукупність розв'язків рівняння

$$x + 2y + 3 \ln |x + y - 2| = C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Оскільки при відокремленні змінних ми втратили розв'язок $z = 2$ або $y = 2 - x$, то остаточно дістаємо всі розв'язки рівняння

$$x + 2y + 3 \ln |x + y - 2| = C, \quad C \in \mathbb{R},$$

$$y = 2 - x. \blacktriangleright$$

Зауваження 2. Іноколи рівняння

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

можна звести до однорідного заміною

$$y = zx^\alpha.$$

Це можливе лише тоді, коли в рівнянні всі члени є одного й того самого виміру, якщо змінній x приписати вимір 1, змінній y – вимір α і похідній y' – вимір $\alpha - 1$.

Приклад 4. Розв'язати рівняння

$$(x^2 y^2 + y - \frac{2}{x^2}) dx + x dy = 0.$$

◀ Зробимо підстановку $y = z^\alpha$, $dy = \alpha z^{\alpha-1} dz$, де α – деяке число, яке виберемо пізніше. Підставляючи в рівняння вирази для y і dy , отримаємо

$$(x^2 z^{2\alpha} + z^\alpha - \frac{2}{x^2}) dx + x \alpha z^{\alpha-1} dz = 0.$$

Зауважимо, що $x^2 z^{2\alpha}$ має вимір $2 + 2\alpha$, z^α – вимір α , $\frac{2}{x^2}$ – вимір -2 , $x \alpha z^{\alpha-1}$ – вимір $1 + \alpha - 1$. Одержане рівняння буде однорідним, якщо виміри всіх членів однакові, тобто, якщо виконуються умови $2 + 2\alpha = \alpha = -2 = \alpha$. Ці умови задовольняє $\alpha = -2$.

Отже, треба зробити заміну $y = \frac{z}{x^2}$. Ця заміна зводить рівняння до вигляду

$$(z^2 - z - 2) dx + x dz = 0,$$

в якому змінні відокремлюються. Відокремивши змінні, інтегрувавши і виконавши обернену заміну змінних, одержимо

$$\frac{x^3(x^2 y - 2)}{x^2 y + 1} = C. \blacktriangleright$$

Вправи

1. Розв'язати диференціальне рівняння:

- 1) $(x + 2y)y' + y = 0$; 2) $x^2 y' = y^2 + 2xy$; 3) $y' = \frac{y^2 - x^2}{2xy}$;
 4) $(2\sqrt{xy} - x)dy + y dx = 0$; 5) $y' = \frac{y^2}{x^2} - 2$; 6) $y' = \frac{x+y}{y-x}$;
 7) $x dy - y dx = y dy$; 8) $y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2}$; 9) $y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$;
 10) $xy' \sin \frac{y}{x} + x = y \sin \frac{y}{x}$; 11) $xy' - y = \sqrt{x^2 + y^2}$;
 12) $y^2 + x^2 y' = xy y'$; 13) $y' = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}$; 14) $xy' = y \ln \frac{y}{x}$;
 15) $x dy - (y - \sqrt{x^2 + y^2}) dx = 0$; 16) $(x + y) dx - (x - y) dy = 0$;

- 17) $(x - y \cos \frac{y}{x})dx + x \cos \frac{y}{x} dy = 0$;
 18) $(3y^2 + 3xy + x^2)dx = (x^2 + 2xy)dy$; 19) $xy dx + (x^2 + y^2) dy = 0$;
 20) $y^2 dx + x(x - y) dy = 0$; 21) $(2x^3 + 3xy^2)dx + y^3 dy = 0$;
 22) $(3x^2 + 6xy + 3y^2)dx + (2x^2 + 3xy)dy = 0$;
 23) $(x - 2)dx + (y - 2x + 1)dy = 0$;
 24) $(3x - 7y - 3)dy = (3y - 7x + 7)dx$;
 25) $(x + 2y + 1)dx = (2x + 4y + 3)dy$;
 26) $(x - y^2)dx + 2xydy = 0$;
 27) $(\frac{2}{x^2} - y^2)dx + dy = 0$;
 28) $2xy^3 dx + (x^2 y^2 - 1)dy = 0$.

2. Знайти розв'язок диференціального рівняння, що задовольняє початкову умову:

- 1) $xy' - y = x \operatorname{tg} \frac{y}{x}$, $y(1) = \frac{\pi}{2}$;
 2) $y' = 4 + \frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2$, $y(1) = 2$;
 3) $(x^2 + 2xy - y^2)dx + (y^2 + 2xy - x^2)dy = 0$, $y(1) = -1$;
 4) $(1 + e^{\frac{x}{y}})dx = (\frac{x}{y} - 1)e^{\frac{x}{y}} dy$, $y(0) = 2$;
 5) $xy' = x \sin \frac{y}{x} + y$, $y(1) = \frac{\pi}{2}$;
 6) $xy dy - y^2 dx = (x + y)^2 e^{-\frac{x}{y}} dx$, $y(1) = 0$;
 7) $(x - 2y)y' = 2x + y$, $y(1) = 0$.

3. Знайти лінії, в яких піддотична дорівнює сумі абсциси і ординати точки дотику.

4. Знайти лінії, в яких відрізок дотичної від точки дотику M до точки N її перетину з віссю Ox дорівнює відрізку осі Ox від точки N до початку координат O .

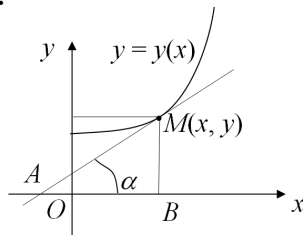
Відповіді

- 1.** 1) $y^2 + xy = C$; 2) $x^2 + xy = Cy$, $y = 0$; 3) $(x - C)^2 + y^2 = C^2$;
 4) $\sqrt{\frac{x}{y}} - \ln |y| = C$; 5) $y - 2x = Cx^2(y + x)$; 6) $x^2 + 2xy - y^2 = C$;
 7) $\ln |y| + \frac{x}{y} = C$; 8) $x^2 + y^2 = Cy$; 9) $y = \pm x \sqrt{2 \ln |Cx|}$; 10) $Cx = e^{\cos \frac{y}{x}}$;
 11) $y + \sqrt{x^2 + y^2} = Cx^2$; 12) $e^{\frac{y}{x}} = Cy$; 13) $\ln |Cx| = -e^{-\frac{y}{x}}$;
 14) $y = xe^{1+Cx}$; 15) $y + \sqrt{x^2 + y^2} = C$; 16) $\operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \ln \sqrt{x^2 + y^2} + C$;
 17) $x = Ce^{-\sin \frac{y}{x}}$; 18) $(x + y)^2 = Cx^3 e^{-\frac{x}{x+y}}$;
 19) $y^2(2x^2 + y^2) = C^2$; 20) $y = Ce^{y/x}$; 21) $2x^2 + y^2 = C\sqrt{x^2 + y^2}$;
 22) $3x^4 + 8x^3y + 6x^2y^2 = C$; 23) $\ln(y - x - 1) = C + \frac{x-2}{x-y+1}$;

24) $(x+y-1)^5(y-x+1)^2 = C$; 25) $\ln(4x+8y+5)+8y-4x = C$;
 26) $xe^{\frac{y^2}{x}} = C, \alpha = \frac{1}{2}$; 27) $y = \frac{C+2x^3}{(C-x^3)x}, \alpha = -1$; 28) $1+x^2y^2 = Cy, y=0, \alpha = -1$.

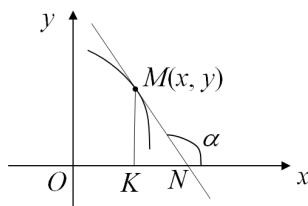
2. 1) $y = x \arcsin x$; 2) $\arctg \frac{y}{2x} - 2 \ln |x| = \frac{\pi}{4}$; 3) $x+y=0$;
 4) $x+ye^{\frac{x}{y}} = C, x+ye^{\frac{x}{y}} = 2$; 5) $y = 2x \arctg Cx, y = 2x \arctg x$;
 6) $xe^{\frac{y}{x}} = (x+y)(1+\ln|x|)$; 7) $x^2+y^2 = e^{\arctg \frac{y}{x}}$.

3.



Оскільки $\operatorname{tg} \alpha = y'$, то з трикутника AMB знаходимо, що піддотична $AB = \frac{y}{y'}$. Згідно з умовою $\frac{y}{y'} = x+y$ або $y' = \frac{y}{x+y}$. Отже, маємо однорідне рівняння, яке краще записати у вигляді $\frac{dx}{dy} = \frac{x+y}{y}$ і зробити заміну $x = zy$. Тоді загальний розв'язок легко знаходиться і має вигляд $y = Ce^{\frac{x}{y}}, C \in \mathbb{R}$.

4.



$MN = \sqrt{MK^2 + KN^2}$,
 $ON = OK + KN$ або $MN = \sqrt{y^2 + (\frac{y}{y'})^2}$, $ON = x - \frac{y}{y'}$,
 бо $\frac{MK}{KN} = \operatorname{tg}(180^\circ - \alpha)$, де $\operatorname{tg} \alpha = y'$, тому $\frac{y}{KN} = -y'$, а отже, $KN = -\frac{y}{y'}$.

Оскільки $MN = ON$, то $y^2 + \frac{y^2}{y'^2} = (x - \frac{y}{y'})^2$, звідки $y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2}$. Зінтегрувавши це однорідне рівняння, одержимо загальний інтеграл $\frac{y}{x^2+y^2} = C$.

§ 4. Лінійні рівняння першого порядку та звідні до них

4.1. **Лінійне рівняння першого порядку.** Так називається рівняння, яке лінійне відносно шуканої функції та її похідної. Воно має вигляд

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = f(x), \quad (1)$$

де p і f – неперервні функції, наприклад, на відрізку $[a, b]$.

Якщо $f(x) = 0$, $x \in [a, b]$, то рівняння (1) називається **лінійним однорідним** і воно має вигляд

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0. \quad (2)$$

Однорідне лінійне рівняння (2) розв'язується за допомогою відокремлення змінних і одного інтегрування:

$$\frac{dy}{y} = -p(x)dx, \quad \ln|y| = -\int p(x)dx + \ln C_1, \quad C_1 > 0,$$

або

$$y = Ce^{-\int p(x)dx}, \quad C = \pm C_1, C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \quad (3)$$

При діленні на y ми втратили розв'язок $y = 0$, але його можна включити в знайдену сім'ю (3), якщо вважати, що C може набувати і значення 0.

Для того щоб знайти загальний розв'язок **лінійного неоднорідного рівняння (1)**, застосуємо **метод варіації сталої**. Цей метод полягає в тому, що загальний розв'язок рівняння (1) шукатимемо у вигляді (3), замінивши довільну сталу C деякою диференційовною функцією $c(x)$:

$$y = c(x)e^{-\int p(x)dx}. \quad (4)$$

Знайдемо похідну

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{dc(x)}{dx}e^{-\int p(x)dx} - c(x)e^{-\int p(x)dx} \left(\int p(x)dx \right)' = \\ &= \frac{dc(x)}{dx}e^{-\int p(x)dx} - c(x)p(x)e^{-\int p(x)dx} \end{aligned} \quad (5)$$

та підставимо (4) і (5) у рівняння (1). Тоді одержимо

$$\frac{dc(x)}{dx}e^{-\int p(x)dx} - c(x)p(x)e^{-\int p(x)dx} + p(x)c(x)e^{-\int p(x)dx} = f(x)$$

або

$$\frac{dc(x)}{dx} = f(x)e^{\int p(x)dx}.$$

Інтегруючи, знайдемо

$$c(x) = \int f(x)e^{\int p(x)dx} dx + C_2, \quad C_2 \in \mathbb{R}. \quad (6)$$

Підставивши (6) у (4), дістанемо загальний розв'язок неоднорідного лінійного рівняння (1):

$$y = \left(\int f(x)e^{\int p(x)dx} + C_2 \right) e^{-\int p(x)dx}, \quad C_2 \in \mathbb{R}. \quad (7)$$

Отже, загальний розв'язок неоднорідного лінійного рівняння дорівнює сумі загального розв'язку відповідного однорідного рівняння

$$C_2 e^{-\int p(x)dx}$$

і частинного розв'язку неоднорідного рівняння

$$e^{-\int p(x)dx} \int f(x)e^{\int p(x)dx} dx,$$

який одержується з (7) при $C_2 = 0$.

З формули (7) випливає, що загальний розв'язок лінійного рівняння є лінійною функцією довільної сталої C_2 , тобто $y = C_2 \phi(x) + \psi(x)$. Ця властивість загального розв'язку характерна тільки для лінійного рівняння. Легко можна довести, що жодне інше диференціальне рівняння такої властивості не має.

Зауважимо, що в конкретних прикладах недоцільно користуватися громіздкою формулою (7), значно легше кожного разу повторювати всі наведені вище міркування.

Приклад 1. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + x^2, \quad x \neq 0,$$

і виділити з нього частинний розв'язок, який задовольняє початкову умову $y(1) = \frac{1}{2}$.

◀ Розглянемо спочатку відповідне однорідне рівняння

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}.$$

Відокремлюючи змінні та інтегруючи, одержуємо

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}, \quad \ln |y| = \ln |x| + \ln |C|, C \neq 0, \text{ або } y = Cx, \quad C \in \mathbb{R},$$

враховуючи втрачений розв'язок $y = 0$.

Розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді

$$y = c(x)x.$$

Диференціюючи, знаходимо $\frac{dy}{dx} = \frac{dc(x)}{dx}x + c(x)$. Підставимо вирази для y і $\frac{dy}{dx}$ в задане рівняння:

$$\frac{dc(x)}{dx}x + c(x) = \frac{c(x)x}{x} + x^2$$

або

$$\frac{dc(x)}{dx} = x.$$

Звідси випливає, що $c(x) = \frac{x^2}{2} + C_1$, а тому загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння має вигляд

$$y = \left(\frac{x^2}{2} + C_1 \right) x$$

або

$$y = C_1 x + \frac{x^3}{2}, \quad C_1 \in \mathbb{R}.$$

Знайдемо значення сталої C_1 , скориставшись початковою умовою $y(1) = \frac{1}{2}$:

$$\frac{1}{2} = C_1 \cdot 1 + \frac{1}{2}.$$

Отже, $C_1 = 0$ і тому розв'язком задачі Коші є функція $y = \frac{x^3}{2}$. ►

4.2. Модель Еванса встановлення рівноважної ціни на ринку одного товару. Нехай $p(t)$ – ціна певного товару,

$d(t) = a - bp(t)$ – попит на товар, $s(t) = \alpha + \beta p(t)$ – пропозиція товару на момент часу t , де a, b, α, β – додатні сталі, причому $a > \alpha$, тобто при нульовій ціні попит перевищує пропозицію. Прийнято вважати, що швидкість зміни ціни товару пропорційна різниці між попитом і пропозицією з коефіцієнтом пропорційності $\gamma > 0$.

Треба знайти закон залежності ціни від часу, якщо $p(0) = p_0$.

◀ Згідно з умовою задачі

$$\frac{dp(t)}{dt} = \gamma(d(t) - s(t)).$$

Тоді, підставивши у цю рівність вирази для $d(t)$ і $s(t)$, одержимо

$$\frac{dp}{dt} = \gamma(a - bp(t) - \alpha - \beta p(t))$$

або

$$\frac{dp}{dt} = -\gamma(b + \beta)p(t) + \gamma(a - \alpha). \quad (8)$$

Маємо лінійне неоднорідне диференціальне рівняння. Знайдемо загальний розв'язок цього рівняння. Спочатку розв'яжемо однорідне рівняння

$$\frac{dp}{dt} = -\gamma(b + \beta)p. \quad (9)$$

Відокремивши змінні та зінтегрувавши, одержимо

$$\frac{dp}{p} = -\gamma(b + \beta)dt, \quad \int \frac{dp}{p} = -\gamma(b + \beta) \int dt + \ln |C|,$$

$$\ln p = -\gamma(b + \beta)t + \ln C \quad \text{або} \quad p = Ce^{-\gamma(b + \beta)t}, \quad C > 0.$$

Розв'язок неоднорідного рівняння (8) шукатимемо у вигляді

$$p(t) = c(t)e^{-\gamma(b + \beta)t}. \quad (10)$$

Тоді

$$\frac{dp(t)}{dt} = \frac{dc(t)}{dt}e^{-\gamma(b + \beta)t} - \gamma(b + \beta)c(t)e^{-\gamma(b + \beta)t}. \quad (11)$$

Підставивши вирази (10) і (11) у рівняння (8), дістанемо

$$\frac{dc(t)}{dt} e^{-\gamma(b+\beta)t} = \gamma(a - \alpha)$$

або

$$\frac{dc(t)}{dt} = \gamma(a - \alpha) e^{\gamma(b+\beta)t}.$$

Звідси випливає, що

$$c(t) = \frac{a - \alpha}{b + \beta} e^{\gamma(b+\beta)t} + C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R},$$

а тому загальний розв'язок рівняння (8) має вигляд

$$p(t) = C_1 e^{-\gamma(b+\beta)t} + \frac{a - \alpha}{b + \beta}, \quad C_1 \in \mathbb{R}.$$

Скориставшись початковою умовою, дістанемо

$$p_0 = C_1 + \frac{a - \alpha}{b + \beta} \quad \text{або} \quad C_1 = p_0 - \frac{a - \alpha}{b + \beta}.$$

Отже, закон залежності ціни від часу описується функцією

$$p(t) = \left(p_0 - \frac{a - \alpha}{b + \beta} \right) e^{-\gamma(b+\beta)t} + \frac{a - \alpha}{b + \beta}, \quad t > 0. \quad (12)$$

Якщо в (12) перейти до границі при $t \rightarrow +\infty$, то одержимо

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} p(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(p_0 - \frac{a - \alpha}{b + \beta} \right) e^{-\gamma(b+\beta)t} + \frac{a - \alpha}{b + \beta} = \frac{a - \alpha}{b + \beta},$$

бо

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \left(p_0 - \frac{a - \alpha}{b + \beta} \right) e^{-\gamma(b+\beta)t} = 0.$$

Ця границя визначає рівноважну ціну. При ній попит дорівнює пропозиції. Якщо $p_0 < \frac{a - \alpha}{b + \beta}$, то ціна прямує до $\frac{a - \alpha}{b + \beta}$

зростаючи, а якщо $p_0 > \frac{a - \alpha}{b + \beta}$, то ціна прямує до $\frac{a - \alpha}{b + \beta}$ спадаючи. ►

4.3. Рівняння Бернуллі. Так називається рівняння вигляду

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)y^\alpha,$$

де p і q – неперервні функції на відрізку $[a, b]$, α – деяке число, відмінне від нуля і одиниці. Зауважимо, що $y = 0$ – розв’язок рівняння Бернуллі при $\alpha > 0$. Якщо $y \neq 0$, то, поділивши рівняння на y^α і ввівши нову невідому функцію $z = y^{1-\alpha}$, відносно функції z дістанемо лінійне рівняння

$$z' + (1 - \alpha)p(x)z = (1 - \alpha)q(x).$$

Приклад 2. Знайти розв’язок рівняння $\frac{dy}{dx} - 2xy = 2x^3y^2$, який задовольняє умову $y(0) = 1$.

◀ Маємо рівняння Бернуллі з $\alpha = 2$. Поділимо обидві частини рівняння на y^2 , $y \neq 0$:

$$y^{-2} \frac{dy}{dx} - 2xy^{-1} = 2x^3.$$

Зробимо заміну $y^{-1} = z$, тоді $-y^{-2} \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx}$. Отже, рівняння набуде вигляду

$$\frac{dz}{dx} + 2xz = -2x^3.$$

Зінтегруємо одержане лінійне неоднорідне рівняння. Спочатку знайдемо загальний розв’язок відповідного лінійного однорідного рівняння:

$$\frac{dz}{dx} = -2xz, \quad \frac{dz}{z} = -2xdx, \quad \ln |z| = -x^2 + \ln |C|, \quad C \neq 0,$$

або $z = Ce^{-x^2}$, $C \in \mathbb{R}$, якщо врахувати ще розв’язок $z = 0$.

Загальний розв’язок лінійного неоднорідного рівняння шукатимемо у вигляді

$$z = c(x)e^{-x^2}.$$

Тоді, після підстановки в рівняння, дістанемо

$$\begin{aligned}\frac{dc(x)}{dx}e^{-x^2} &= -2x^3, & \frac{dc(x)}{dx} &= -2x^3e^{x^2}, \\ c(x) &= -2 \int x^3 e^{x^2} dx = - \int x^2 de^{x^2} = \\ &= - \left(x^2 e^{x^2} - \int 2xe^{x^2} dx \right) = -(x^2 - 1)e^{x^2} + C_1.\end{aligned}$$

Отже, загальним розв'язком лінійного неоднорідного рівняння є функція

$$z(x) = C_1 e^{-x^2} + 1 - x^2, \quad C_1 \in \mathbb{R}.$$

Якщо повернутися до змінної y , то дістанемо

$$y = \frac{1}{C_1 e^{-x^2} + 1 - x^2}.$$

Крім цього, є ще частинний розв'язок $y = 0$, бо $\alpha = 2 > 0$.

Задовольнимо початкову умову:

$$1 = \frac{1}{C_1 + 1}, \quad C_1 = 0.$$

Звідси випливає, що розв'язком задачі Коші є

$$y = \frac{1}{1 - x^2}, \quad x \neq \pm 1. \blacktriangleright$$

Зауваження 1. Розглянемо рівняння

$$f'(y)y' + p(x)f(y) = q(x). \quad (13)$$

Це рівняння можна записати у вигляді

$$\frac{df}{dx} + pf = q$$

і розглядати його як лінійне рівняння відносно функції $f(y)$.

Загальний розв'язок цього рівняння

$$f(y) = e^{-\int p(x)dx} \left(C + \int q(x)e^{\int p(x)dx} dx \right), C \in \mathbb{R}.$$

Рівняння Бернуллі множенням на $(1 - \alpha)y^{-\alpha}$ зводиться до рівняння (13), де $f(y) = y^{1-\alpha}$.

До рівняння (13) зводиться також і рівняння

$$y' + p(x) = q(x)e^{\alpha y}, \quad (14)$$

якщо його помножити на $-e^{-\alpha y}$ і взяти $f(y) = e^{-\alpha y}$.

Приклад 3. Розв'язати рівняння $\cos y \frac{dy}{dx} + \sin y = x + 1$.

◀ Зробимо заміну $z = \sin y$, $\frac{dz}{dx} = \cos y \frac{dy}{dx}$. Тоді рівняння набуде вигляду

$$\frac{dz}{dx} + z = x + 1.$$

Розв'яжемо одержане лінійне рівняння методом варіації довільної сталої:

$$\frac{dz}{dx} + z = 0, \frac{dz}{z} = -dx, \ln |z| = x + \ln |C_1|, C_1 \neq 0,$$

$$z = Ce^{-x}, C \in \mathbb{R}, z = c(x)e^{-x},$$

$$e^{-x} \frac{dc(x)}{dx} - c(x)e^{-x} + c(x)e^{-x} = x + 1,$$

$$\frac{dc(x)}{dx} = (x + 1)e^x, c(x) = \int (x + 1)e^x dx,$$

$c(x) = xe^x - e^x + e^x + C_1, z = (xe^x + C_1)e^{-x}, z = x + C_1e^{-x}$. Повернувшись до заміни, дістанемо загальний інтеграл рівняння

$$\sin y = x + C_1e^{-x}, C_1 \in \mathbb{R}. \blacktriangleright$$

Приклад 4. Розв'язати рівняння

$$e^{-x} \frac{dy}{dx} - e^{-x} = e^y.$$

◀ Запишемо задане рівняння у вигляді $e^{-y} \frac{dy}{dx} - e^{-y} = e^x$.

Зробивши заміну $z = e^{-y}$, $\frac{dz}{dx} = -e^{-y} \frac{dy}{dx}$, одержимо лінійне неоднорідне рівняння $-\frac{dz}{dx} - z = e^x$ або $\frac{dz}{dx} + z = -e^x$.

Розв'яжемо це рівняння методом варіації сталої:

$$\frac{dz}{dx} + z = 0, \frac{dz}{z} = -dx, \ln |z| = -x + \ln |C_1|, C_1 \neq 0,$$

$$z = Ce^{-x}, C \in \mathbb{R}, z = c(x)e^{-x},$$

$$c'(x)e^{-x} - c(x)e^{-x} + c(x)e^{-x} = -e^x,$$

$$c'(x) = -e^{2x}, c(x) = -\frac{1}{2}e^{2x} + C_2, z = C_2e^{-x} - \frac{1}{2}e^x.$$

Тоді

$$e^{-y} = C_2e^{-x} - \frac{1}{2}e^x, C_2 \in \mathbb{R}. \blacktriangleright$$

4.4. Рівняння Ріккати. Так називається нелінійне рівняння першого порядку вигляду

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y^2 + q(x)y = f(x), \quad (15)$$

де p, q, f – неперервні функції на відрізку $[a, b]$. На відміну від раніше розглянутих рівнянь, рівняння Ріккати розв’язується в квадратурах лише в деяких випадках. Розглянемо деякі з них.

1) Коефіцієнти p, q і f – сталі. У цьому випадку в рівнянні (15) можна відокремити змінні. Зробивши це, одержимо

$$\frac{dy}{py^2 + qy} = f dx,$$

$$\int \frac{dy}{py^2 + qy} = fx + C.$$

Отже, інтегрування рівняння звелось до знаходження інтеграла.

2) Відношення $\frac{q}{p}, \frac{f}{p}$ – сталі. Якщо ввести позначення $\frac{q}{p} = a, \frac{f}{p} = -b$, де a і b сталі, то можемо рівняння (15) записати у вигляді

$$\frac{dy}{dx} + p(y^2 + ay + b) = 0.$$

Відокремивши змінні, матимемо

$$\frac{dy}{y^2 + ay + b} + p dx = 0,$$

$$\frac{dy}{y^2 + ay + b} + \int p(x) dx = C,$$

тобто задачу зведено до знаходження інтегралів.

- 3) Якщо $f = 0$, то маємо рівняння Бернуллі з $\alpha = 2$.
- 4) У випадку $p = 0$ рівняння (15) є лінійним рівнянням.
- 5) Спеціальне рівняння Ріккати

$$\frac{dy}{dx} + cy^2 = dx^\alpha, \quad (16)$$

де $c \neq 0$, $d \neq 0$, α – задані числа, розв’язується в квадратурах тільки тоді, коли $\frac{\alpha}{2\alpha + 4}$ – ціле число, $\alpha \neq -2$. У випадку $\alpha = -2$ рівняння (16) зводиться до однорідного заміною $y = \frac{z}{x}$.

6) Доведено, що заміною функції рівняння Ріккати (15) зводиться до рівняння Бернуллі, коли відомий його частинний розв’язок y_1 .

Приклад 5. Розв’язати рівняння Ріккати

$$\frac{dy}{dx} = y^2 - 2e^x y + e^{2x} + e^x.$$

◀ Безпосередньою підстановкою в рівняння переконуємося в тому, що $y_1(x) = e^x$ є розв’язком заданого рівняння. Тоді заміна $y = z + e^x$ зводить рівняння до вигляду $\frac{dz}{dx} = z^2$, яке має розв’язки $z = 0$, $z = -\frac{1}{x + C}$, де C – довільна стала. Отже, всі розв’язки вихідного рівняння такі: $y = e^x$, $y = -\frac{1}{x + C} + e^x$. ▶

Приклад 6. Розв’язати рівняння $4y' + y^2 + \frac{4}{x^2} = 0$.

◀ Маємо спеціальне рівняння Ріккати з $\alpha = -2$. Зробивши заміну $y = \frac{z}{x}$, дістанемо рівняння

$$\frac{4}{x} z' - \frac{4z}{x^2} + \frac{z^2}{x^2} + \frac{4}{x^2} = 0,$$

$$4xz' - 4z + z^2 + 4 = 0, \frac{4dz}{z^2 - 4z + 4} = -\frac{dx}{x}.$$

Зінтегрувавши це рівняння, одержимо

$$\int \frac{dz}{(z-2)^2} = -\frac{1}{4} \int \frac{dx}{x},$$

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{4} \ln|x| + C_1, z = 2 + \frac{4}{C + \ln|x|}.$$

Якщо повернутися до заміни, то матимемо

$$y = \frac{2}{x} + \frac{4}{Cx + x \ln|x|}. \blacktriangleright$$

Зауваження 2. За наявності двох частинних розв'язків y_1 і y_2 рівняння Ріккати загальний розв'язок цього рівняння знаходиться з рівності

$$\frac{y - y_1}{y - y_2} = C e^{\int p(x)(y_2(x) - y_1(x)) dx}, C \in \mathbb{R}. \quad (17)$$

Приклад 7. Розв'язати рівняння

$$y' + xy^2 + \frac{3}{x}y + \frac{1}{x} = 0,$$

якщо його частинними розв'язками є $y_1 = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$ і $y_2 = -\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$.

◀ З формули (17) одержуємо

$$\frac{y - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}{y + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = C e^{-2x},$$

$$y = \frac{x - 1 + C(x + 1)e^{-2x}}{x^2(1 - C e^{-2x})}, C \in \mathbb{R}. \blacktriangleright$$

Вправи

1. Розв'язати лінійне рівняння:

- 1) $xy' - 2y = 2x^4$; 2) $y' + y = x$; 3) $y' - y = e^x$; 4) $x^2y' - xy = 1$;
- 5) $y' + y \cos x = \sin x \cos x$; 6) $(x^2 + 1)y' + 4xy = 3$; 7) $xy' + 2y = x^2$;
- 8) $(1 + y^2)dx + xy dy = \sqrt{1 + y^2} \sin y dy$; 9) $dx + (x + y^2)dy = 0$;
- 10) $y' + 2xy = 1 + 2x^2$; 11) $xy' + y = 3x^2$; 12) $xy' - 2y = 2x^4$;
- 13) $y'(x \cos y + \sin 2y) = 1$; 14) $(x - 2xy - y^2)y' + y^2 = 0$;
- 15) $y' \cos x - y \sin x = 1, y(0) = 1$; 16) $y' = \frac{y}{3x - y^2}$;
- 17) $(xy + e^x)dx - xdy = 0$; 18) $y = x(y' - x \cos x)$;
- 19) $y' = \frac{1}{2x - y^2}$; 20) $x(x - 1)y' + y = x^2(2x - 1), y(2) = 4$.

2. Крапля, початкова маса якої M , вільно падаючи в повітрі, рівномірно випаровується і втрачає кожної секунди масу m . Сила опору повітря пропорційна швидкості руху краплі з коефіцієнтом пропорційності $k \neq m$. Знайти залежність швидкості руху краплі від часу, що пройшов від початку падіння краплі, якщо в початковий момент часу швидкість краплі дорівнювала нулю.

3. Розв'язати рівняння Бернуллі:

- 1) $y' + \frac{xy}{1-x^2} = x\sqrt{y}$; 2) $xy' - y = 2xy^2$; 3) $y' + 2xy = 2x^3y^3$;
 4) $y' + y = x\sqrt{y}$; 5) $dy = (xy^3 - xy)dx$; 6) $y' - \frac{x^3}{y} + \frac{2y}{x} = 0$;
 7) $x dy + 2y dx = x^5y^2 dx$; 8) $xy' + y = y^2 \ln x$; 9) $y' + \frac{y}{x+1} + y^2 = 0$;
 10) $y' - y \operatorname{tg} x + y^2 \cos x = 0$; 11) $xy' - 4y - x^2\sqrt{y} = 0$;
 12) $y' + 2y = y^2 e^x$; 13) $y' = y^4 \cos x + y \operatorname{tg} x$;
 14) $y' + xy = y^2 \sin x$.

4. Знайти рівняння лінії, яка проходить: 1) через точку $A(0, 1)$, якщо в кожній точці нормаль до лінії відтинає на осі абсцис відрізок, який дорівнює квадрату радіуса-вектора цієї точки; 2) через точку $A(a, a)$ і для якої, якщо в довільній її точці $M(x, y)$ з ординатою PM провести дотичну до перетину з віссю Oy у точці N , площа трапеції $ONMP$ дорівнює a^2 ; 3) через початок координат, якщо середина відрізка її нормалі від довільної точки лінії до осі Ox знаходиться на параболі $y^2 = \frac{1}{2}x$.

5. У випадку моделі Еванса (пункт 4.2) знайти ціну $p(t)$ і рівноважну ціну, якщо: 1) $d(t) = 10 - 5p(t)$, $s(t) = 7 + 3p(t)$, $p(0) = 4$, $\gamma = 2$; 2) $d(t) = 9 - 4p(t)$, $s(t) = 2 + 5p(t)$, $p(0) = 3$, $\gamma = 1,5$.

6. Нехай $Y(t)$ – прибуток, одержуваний на момент часу t деякою галуззю, є сумою інвестицій $I(t)$ і споживання $C(t)$, тобто

$$Y(t) = I(t) + C(t).$$

Вважатимемо, що швидкість зростання прибутку пропорційна величині інвестицій $b \frac{dY(t)}{dt} = I(t)$, де b – коефіцієнт капіталомісткості. Тоді для функції $Y(t)$ матимемо диференціальне рівняння

$$b \frac{dY(t)}{dt} = Y(t) - C(t).$$

Знайти $Y(t)$, якщо: 1) $C(t) = 2t$, $b = \frac{1}{2}$; $Y(0) = 2$; 2) $C(t) = C_0 e^{rt}$, $br \neq 1$, r – темп зростання споживання, $Y(0) = Y_0$, C_0 і Y_0 – дійсні числа.

7. Повні витрати y і граничні витрати y' виробництва

пов'язані рівністю $y' - 4y + x = 0$. Знайти функцію y повних витрат, якщо $y(0) = 0$.

8. Конденсатор ємністю c вмикається в коло з напругою E і опором R . Знайти заряд q конденсатора в момент t після включення.

9. У приміщенні цеху з кубатурою 10800 м^3 повітря містить $0,12\%$ вуглекислоти. Вентилятори подають свіже повітря, що містить $0,04\%$ вуглекислоти, в кількості $1500 \text{ м}^3/\text{хв}$. Припускаючи, що концентрація вуглекислоти в усіх частинах приміщення у кожний момент часу одна й та сама, знайти вміст вуглекислоти через 10 хв після початку роботи вентилятора.

10. Розв'язати рівняння, яке має вигляд рівняння (13) чи (14):

- 1) $\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} - x \ln y = 2x$;
- 2) $\frac{1}{1+y^2} \frac{dy}{dx} + x \operatorname{arctg} y = x$;
- 3) $\cos y y' + \frac{1}{1+x^2} \sin y = \frac{1}{1+x^2}$;
- 4) $\frac{dy}{dx} - x = x e^{-x^2} e^{2y}$;
- 5) $3 \frac{dy}{dx} + e^{x+3y} + 1 = 0$;
- 6) $\frac{dy}{dx} + x \sin 2y = 2x e^{-x^2} \cos^2 y$.

11. Розв'язати рівняння Ріккати, якщо відомий частинний розв'язок y_1 :

- 1) $y' = y^2 + \frac{y}{x} + \frac{1}{x^2}$, $y_1 = -\frac{1}{x}$;
- 2) $y' = y^2 - 2xy + x^2$, $y_1 = x + 1$;
- 3) $x^2 y' + x^2 y^2 + 2xy = 2$, $y_1 = \frac{1}{x}$;
- 4) $y' = y^2 - \frac{y}{x} - \frac{4}{x^2}$, $y_1 = \frac{2}{x}$;
- 5) $x^2 y' + 2x^2 y^2 - 5xy + 4 = 0$, $y_1 = \frac{1}{x}$;
- 6) $y' = -y - y^2 + 2$, $y_1 = 1$.

12. Знайти криві, в яких відрізок, що відтинається нормаллю на вісі Ox , дорівнює $\frac{y^2}{x}$.

Відповіді

- 1.** 1) $y = x^4 + Cx^2$; 2) $y = x - 1 + Ce^{-x}$; 3) $y = e^x(x + C)$; 4) $y = Cx - \frac{1}{2x}$; 5) $y = \sin x - 1 + Ce^{-\sin x}$; 6) $y = \frac{x^3 + 3x + C}{(x^2 + 1)^2}$; 7) $y = \frac{x^2}{4} + \frac{C}{x^2}$; 8) $x\sqrt{1 + y^2} + \cos y = C$; 9) $x = 2y - y^2 + Ce^{-y}$; 10) $y = x + Ce^{-x^2}$; 11) $y = (x^3 + C)\frac{1}{x}$; 12) $y = x^4 + Cx^2$; 13) $x = Ce^{\sin y} - 2 \sin y - 2$; 14) $x = y^2(1 + Ce^{\frac{1}{y}})$; 15) $y = \frac{x+1}{\cos x}$; 16) $x = y^2 + Cy^3$,

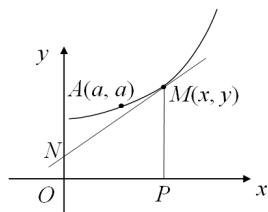
$y = 0$; 17) $y = e^x(\ln|x| + C)$, $x = 0$; 18) $x(\sin x + C) = y$;
 19) $x = Ce^{2y} + \frac{y^2}{2} + \frac{y}{2} + \frac{1}{4}$; 20) $y = x^2$.

2. $v = \frac{g}{m-k}(-M + mt + (1 - \frac{m}{M}t)^{k/m}M)$.

3. 1) $y^{\frac{1}{2}} = C(1-x^2)^{1/4} - \frac{1}{3}(1-x^2)$; 2) $y = \frac{x}{C-x^2}$; 3) $Cy^2e^{2x^2} - y^2 - 2x^2y^2 = 2$, $y = 0$; 4) $y = (x-2 + Ce^{-\frac{x}{2}})^2$; 5) $y^2(Ce^{x^2} + 1) = 1$, $y = 0$; 6) $y = x^{-2}\sqrt{\frac{1}{4}x^8 + C}$; 7) $y = -\frac{1}{\frac{1}{3}x^5 + Cx^2}$, $y = 0$;
 8) $y(1 + \ln x + Cx) = 1$; 9) $y = \frac{1}{(x+1)(C + \ln|1+x|)}$; 10) $y(x + C) = \sec x$; 11) $y = \frac{x^4}{4} \ln^2 |Cx|$; 12) $y = \frac{1}{e^x + Ce^{2x}}$; 13) $y^{-3} = C \cos^3 x - 3 \sin x \cos^2 x$, $C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$; 14) $y = e^{-\frac{x^2}{2}}(C - \int \sin xe^{-\frac{x^2}{2}} dx)^{-1}$.

4. 1) $y' - y = (x^2 - x)y^{-1}$, тоді $x^2 + y^2 = e^{2x}$;

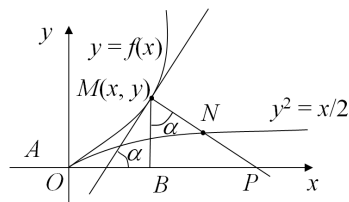
2)



Площа трапеції $S = \frac{ON+PM}{2}OP$.
 Оскільки $ON = y - xy'$, $PM = y$,
 $OP = x$, то одержимо диференціальне рівняння $(2y - xy')x = 2a^2$
 або $y' - \frac{2}{x}y = -\frac{2a^2}{x^2}$. Це лінійне
 рівняння, загальним розв'язком

якого є $y = \frac{2a^2}{3x} + Cx^2$. Оскільки $y(a) = a$, то $C = \frac{1}{3a}$, а тому
 рівняння шуканої лінії набуде вигляду $y = \frac{2a^2}{3x} + \frac{x^2}{3a}$;

3)



Нехай $M(x, y)$ – довільна
 точка на шуканій лінії.
 Точка P перетину нор-
 малі в точці M лінії з
 віссю Ox має координати
 $x + yy'$ і 0 , а середина N
 відрізка MP нормалі –
 координати $x + \frac{xy'}{2}$ і $\frac{y}{2}$.

Оскільки точка N лежить на параболі $y^2 = \frac{1}{2}x$, то її координати задовольняють рівняння параболи, тобто $\frac{y^2}{4} = \frac{1}{2}(x + \frac{yy'}{2})$ або $y' - y = -\frac{2x}{y}$. Зінтегрувавши одержане диференціальне рівняння Бернуллі, одержимо загальний розв'язок $y^2 = 2x + 1 + Ce^{2x}$. Скориставшись початковою умовою $y(0) = 0$, дістанемо, що

$C = -1$. Рівняння шуканої лінії має вигляд $y^2 = 2x + 1 - e^{2x}$.

5. 1) $p(t) = 3,655e^{-16t} + 0,375$; 2) $p(t) = 2,222e^{-13,5t} + 0,778$; 0,778.

6. 1) $Y(t) = Ce^{2t} + 2t + 1$, $Y(t) = e^{2t} + 2t + 1$; 2) $Y(t) = \left(Y_0 - \frac{C_0}{1-br}\right)e^{\frac{t}{b}} + \frac{C_0}{1-br}e^{rt}$.

7. $y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{16} - \frac{1}{16}e^{4x}$.

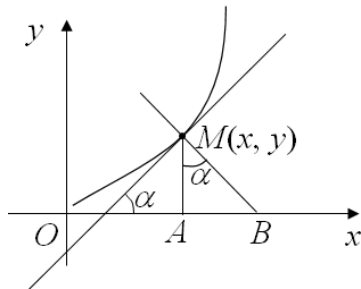
8. З фізики відомо, що $i = \frac{dq}{dt}$, а також $i = \frac{V}{R}$, де i – сила струму, V – електрорушійна сила, $V = E - \frac{q}{c}$. Диференціальне рівняння процесу $R\frac{dq}{dt} = E - \frac{q}{c}$. Тоді $q(t) = cE - C_1e^{-\frac{t}{cR}}$, $C_1 \in \mathbb{R}$, а оскільки $q(0) = 0$, то $q(t) = cE\left(1 - e^{-\frac{t}{cR}}\right)$.

9. Рівняння має вигляд $(0,01x - 0,0004)1500dt = -10800 \cdot 0,01dx$ або $\frac{dx}{dt} = -\frac{5}{36}x + \frac{0,1}{18}$, де x – вміст вуглекислоти (у %) в повітрі на момент часу t . Тоді $x(t) = Ce^{-\frac{5}{36}t} + 0,04$, $x(t) = 0,08e^{-\frac{5}{36}t} + 0,04$, $x(10) \approx 0,06\%$.

10. 1) $\ln y = Ce^{-\frac{x^2}{2}} - 2$; 2) $\operatorname{arctg} y = Ce^{-\frac{x^2}{2}} + 1$; 3) $e^{\operatorname{arctg} x}(\sin y - 1) = C$; 4) $e^{-2y} = (C + x^2)e^{-x^2}$; 5) $e^{-3y} = (C + x)e^x$; 6) $\operatorname{tg} y = (C + x^2)e^{-x^2}$.

11. 1) $y = -\frac{1}{x} + \frac{1}{Cx - x \ln x}$; 2) $y = x + 1 + \frac{2Ce^{2x}}{1 - Ce^{2x}}$; 3) $y = \frac{1}{x} + \frac{16}{Ce^{4x} - 4x - 1}$; 4) $y = \frac{2(C - x^4)}{x(C + x^4)}$, $y = \frac{2}{x}$; 5) $y = \frac{1}{x} + \frac{x}{C + x^2}$; 6) $y = 1 + \frac{1}{Ce^{3x} - \frac{1}{3}}$.

12.



Згідно з умовою $OB = \frac{y^2}{x}$. Оскільки $OB = OA + AB$, де $OA = x$, а $AB = y \operatorname{tg} \alpha$ або $AB = yy'$, то маємо рівняння $yy' + x = \frac{y^2}{x}$ або $y' - \frac{y}{x} = -\frac{x}{y}$, яке є рівнянням Бернуллі. Розв'язавши це рівняння знайдемо шукані лінії $y^2 = Cx^2 - 2x^2 \ln |x|$, $C > 0$.

§ 5. Рівняння в повних диференціалах. Інтегровальний множник

5.1. Рівняння в повних диференціалах. Розглянемо диференціальне рівняння першого порядку в симетричній формі

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0, \quad (1)$$

де функції P , Q , $\frac{\partial P}{\partial y}$ і $\frac{\partial Q}{\partial x}$ неперервні в деякій області $D \subset \mathbb{R}^2$ і область D не містить особливих точок цього рівняння.

Рівняння (1) називається **рівнянням у повних диференціалах**, якщо існує така неперервно диференційовна функція u в області D , що

$$du(x, y) = P(x, y)dx + Q(x, y)dy, \quad (x, y) \in D. \quad (2)$$

Оскільки

$$du(x, y) = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x}dx + \frac{\partial u(x, y)}{\partial y}dy,$$

то рівність (2) еквівалентна таким двом рівностям:

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = P(x, y), \quad \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = Q(x, y), \quad (x, y) \in D. \quad (3)$$

Якщо функція $y = y(x)$, $x \in X$, є розв'язком рівняння (1), то

$$du(x, y(x)) = 0, \quad x \in X,$$

і, отже,

$$u(x, y(x)) = C, \quad (4)$$

де C – довільна стала, і навпаки, якщо деяка функція $y = y(x)$, $x \in X$, перетворює в тотожність рівняння (4), то диференціюючи одержану тотожність, дістаємо $du(x, y(x)) = 0$, і, отже, $u(x, y) = C$, де C – довільна стала, є загальним інтегралом рівняння (1).

Якщо задано початкову умову $y(x_0) = y_0$, то стала C визначається з (4) рівністю $C = u(x_0, y_0)$ і

$$u(x, y) = u(x_0, y_0) \quad (5)$$

є частинним інтегралом. Якщо $\frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial y} = Q(x_0, y_0) \neq 0$, то рівність (5) визначає y як неявну функцію x .

Відомо, що вираз $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ є повним диференціалом в однозв'язній області D тоді й тільки тоді, коли виконується рівність

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}, \quad (x, y) \in D. \quad (6)$$

Якщо умова (6) виконується, то рівняння (1) легко інтегрується. Справді, інтегруючи за x першу з рівностей (3), одержуємо

$$u(x, y) = \int P(x, y)dx + \varphi(y). \quad (7)$$

При знаходженні інтеграла $\int P(x, y)dx$ величина y розглядається як стала, а тому $\varphi(y)$ є довільною диференційовною функцією від y . Для її визначення продиференціюємо (7) за y і скористаємося другою рівністю з (3):

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\int P(x, y)dx \right) + \varphi'(y) = Q(x, y).$$

З цього рівняння знаходимо $\varphi'(y)$, і після інтегрування визначаємо функцію φ , підставивши яку в (7), одержимо u .

Приклад 1. Розв'язати рівняння

$$(y \cos x - x^2)dx + (\sin x + y)dy = 0.$$

◀ Тут $P(x, y) = y \cos x - x^2$, $Q(x, y) = \sin x + y$ – неперервно диференційовні функції на всій площині \mathbb{R}^2 , яка є однозв'язною областю. Отже, можна скористатися рівністю (6).

Маємо $\frac{\partial P}{\partial y} = \cos x$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = \cos x$, тобто задане рівняння є рівнянням у повних диференціалах. Функцію u , повний диференціал якої стоїть у правій частині рівняння, знайдемо із системи (3), яка має вигляд

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y \cos x - x^2, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \sin x + y.$$

Інтегруючи першу рівність за x , одержуємо

$$u(x, y) = y \sin x - \frac{x^3}{3} + \varphi(y),$$

де φ – довільна диференційовна функція від y . Для її визначення продиференціюємо отриманий вираз за y і результат прирівняємо до $Q(x, y) = \sin x + y$:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \sin x + \varphi'(y), \quad \sin x + \varphi'(y) = \sin x + y,$$

$$\varphi'(y) = y, \quad \varphi(y) = \frac{y^2}{2} + C_1.$$

Отже, функція u має вигляд

$$u(x, y) = y \sin x - \frac{x^3}{3} + \frac{y^2}{2} + C_1.$$

Тоді загальним інтегралом рівняння є $u(x, y) = C_2$, $C_2 \in \mathbb{R}$, тобто

$$y \sin x - \frac{x^3}{3} + \frac{y^2}{2} = C, \quad C = C_2 - C_1 \in \mathbb{R}. \blacktriangleright$$

5.2. Інтегрувальний множник. Якщо рівняння (1) не є рівнянням у повних диференціалах, то виникає запитання, чи не можна його звести до рівняння в повних диференціалах за допомогою множення на деяку функцію $\mu(x, y)$.

Нехай задано рівняння (1), для якого в області D

$$\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Неперервно диференційовна в області D функція $\mu(x, y) \neq 0$ називається **інтегровальним множником** рівняння (1), якщо рівняння

$$\mu(x, y)P(x, y)dx + \mu(x, y)Q(x, y)dy = 0$$

є в області D рівнянням у повних диференціалах.

Якщо інтегровальний множник $\mu(x, y)$ існує для рівняння (1), то він згідно з умовою (6) повинен задовольняти співвідношення

$$\frac{\partial(\mu P)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu Q)}{\partial x}.$$

Звідси випливає, що інтегровальний множник є розв'язком рівняння

$$Q \frac{\partial \mu}{\partial x} - P \frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right). \quad (8)$$

Рівняння (8) є рівнянням із частинними похідними для визначення невідомої функції μ . Задача інтегрування такого рівняння в загальному випадку не простіша, ніж задача розв'язування рівняння (1).

Якщо наперед відомо, що $\mu = \mu(\omega)$, де ω – задана функція від x і y , то рівняння (8) зводиться до звичайного диференціального рівняння з невідомою функцією μ від незалежної змінної ω

$$\frac{d\mu}{d\omega} = \psi(\omega)\mu, \quad (9)$$

де

$$\psi(\omega) = \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q \frac{\partial \omega}{\partial x} - P \frac{\partial \omega}{\partial y}}, \quad (10)$$

тобто дріб справа є тільки функцією від ω .

Розв'язавши рівняння (9), знайдемо інтегровальний множник

$$\mu = e^{\int \psi(\omega) d\omega}.$$

На практиці за ω , як правило, беруть одну із функцій x , y , $x \pm y$, $x^2 \pm y^2$, xy і т.п.

Зокрема, рівняння (1) має інтегровальний множник, залежний тільки від x ($\omega = x$) або лише від y ($\omega = y$), якщо виконується відповідно умова

$$\frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} = \psi(x), \quad \mu = e^{\int \psi(x) dx}$$

або

$$\frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{-P} = \psi(y), \quad \mu = e^{\int \psi(y) dy}. \quad (11)$$

Якщо відомо два незалежних інтегровальних множники $\mu_1(x, y)$ і $\mu_2(x, y)$, то з їхньою допомогою загальний інтеграл рівняння знаходиться без інтегрування у вигляді

$$\frac{\mu_1(x, y)}{\mu_2(x, y)} = C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Приклад 2. Розв'язати рівняння

$$y dx + 2(y^4 - x) dy = 0.$$

◀ Тут $P = y$, $Q = 2(y^4 - x)$. Оскільки $\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = 1 + 2 = 3 \neq 0$, то рівняння не є рівнянням у повних диференціалах. Очевидно, $y = 0$ є розв'язком рівняння. Вважаючи, що $y \neq 0$, знайдемо інтегровальний множник рівняння вигляду $\mu = \mu(y)$. Згідно з (11) маємо

$$\psi(y) = \frac{3}{-y}, \quad \mu(y) = e^{-\int \frac{3}{y} dy}, \quad \mu(y) = e^{-3 \ln |y|} \text{ або } \mu(y) = \frac{1}{|y|^3}.$$

Помноживши рівняння на $\frac{1}{|y|^3}$, дістанемо для $y > 0$ і $y < 0$ таке рівняння в повних диференціалах

$$\frac{1}{y^2} dx + 2 \left(y - \frac{x}{y^3} \right) dy = 0.$$

Звідси випливає, що

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{y^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2 \left(y - \frac{x}{y^3} \right). \quad (12)$$

Тоді з першого рівняння одержуємо, що

$$u(x, y) = \frac{x}{y^2} + \varphi(y).$$

Підставивши цю функцію в друге рівняння з (12), матимемо

$$-\frac{2x}{y^3} + \varphi'(y) = 2y - \frac{2x}{y^3} \quad \text{або} \quad \varphi'(y) = 2y,$$

звідки випливає, що $\varphi(y) = y^2 + C_1$. Тому

$$u(x, y) = \frac{x}{y^2} + y^2 + C_1.$$

Отже, всі розв'язки заданого рівняння визначаються формулами

$$\frac{x}{y^2} + y^2 = C, \quad C \in \mathbb{R}, \quad y \neq 0. \quad \blacktriangleright$$

Приклад 3. Для диференціального рівняння

$$x dx + y dy + x dy - y dx = 0$$

знайти інтегровальний множник вигляду $\mu = \mu(x^2 + y^2)$ і зінтегрувати його.

◀ Для існування інтегровального множника вигляду $\mu = \mu(x^2 + y^2)$ необхідно, щоб функція ψ з формули (10) була функцією від $\omega = x^2 + y^2$. У нашому випадку

$$\begin{aligned} \psi(\omega) &= \frac{\frac{\partial(x-y)}{\partial y} - \frac{\partial(y+x)}{\partial x}}{(x+y)2x - (x-y)2y} = \\ &= \frac{-2}{2x^2 + 2xy - 2xy + 2y^2} = -\frac{1}{x^2 + y^2} = -\frac{1}{\omega}, \end{aligned}$$

а тому

$$\mu = e^{-\int \frac{1}{\omega} d\omega} = e^{-\ln \omega} = \frac{1}{\omega} = \frac{1}{x^2 + y^2}.$$

Помноживши задане рівняння на $\mu = \frac{1}{x^2 + y^2}$, зведемо його до вигляду

$$\frac{x dx + y dy}{x^2 + y^2} + \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} = 0$$

або

$$\frac{\frac{1}{2}d(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} + \frac{d\left(\frac{y}{x}\right)}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} = 0,$$
$$\frac{1}{2}d(\ln(x^2 + y^2)) + d\left(\arctg \frac{y}{x}\right) = 0.$$

Після інтегрування, одержимо

$$\ln \sqrt{x^2 + y^2} = -\arctg \frac{y}{x} + \ln C, \quad C > 0,$$

звідки, потенціуючи, отримуємо загальний інтеграл заданого рівняння

$$\sqrt{x^2 + y^2} = Ce^{-\arctg \frac{y}{x}}, \quad C > 0. \blacktriangleright$$

Приклад 4. Розв'язати рівняння

$$(3x + 2y + y^2)dx + (x + 4xy + 5y^2)dy = 0,$$

якщо воно має інтегрувальний множник $\mu = \mu(x + y^2)$.

◀ Маємо $P = 3x + 2y + y^2$, $Q = x + 4xy + 5y^2$, а тому

$$\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = 2 + 2y - 1 - 4y = 1 - 2y.$$

Оскільки $w = x + y^2$, то $\frac{\partial w}{\partial x} = 1$, $\frac{\partial w}{\partial y} = 2y$, а отже, згідно з формулами (9), (10) одержуємо рівняння для знаходження μ :

$$\frac{d\mu}{dw} = \frac{1 - 2y}{x + 4xy + 5y^2 - 6xy - 4y^2 - 2y^3} \mu$$

або

$$\frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{dw} = \frac{1 - 2y}{x(1 - 2y) + y^2(1 - 2y)}, \quad \frac{d\mu}{\mu} = \frac{dw}{w}.$$

Звідси випливає, що $\mu = x + y^2$. Помноживши задане рівняння на $\mu = x + y^2$, дістанемо рівняння в повних диференціалах

$$(3x^2 + 2xy + 4xy^2 + 2y^3 + y^4)dx + (x^2 + 4x^2y + 6xy^2 + 4xy^3 + 5y^4)dy = 0.$$

Маємо

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 + 2xy + 4xy^2 + 2y^3 + y^4,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x^2 + 4x^2y + 6xy^2 + 4xy^3 + 5y^4,$$

а тому

$$u = x^3 + x^2y + 2x^2y^2 + 2xy^3 + xy^4 + \varphi(y).$$

Підставивши цю функцію у друге з вищенаведених рівнянь, дістанемо

$$x^2 + 4x^2y + 6xy^2 + 4xy^3 + \varphi'(y) = x^2 + 4x^2y + 6xy^2 + 4xy^3 + 5y^4$$

або $\varphi'(y) = 5y^4$. Звідси випливає, що $\varphi(y) = y^5 + C_1$. Тому

$$u = x^3 + x^2y + 2x^2y^2 + 2xy^3 + xy^4 + y^5 + C_1,$$

а отже, загальний інтеграл рівняння має вигляд

$$x^3 + x^2y + 2x^2y^2 + 2xy^3 + xy^4 + y^5 = C, C \in \mathbb{R}. \blacktriangleright$$

Приклад 5. Розв'язати рівняння

$$y^2 dx + (xy - 1) dy = 0,$$

знайшовши два незалежних інтегровальних множники.

◀ Маємо $P = y^2$, $Q = xy - 1$,

$$\frac{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}{Px - Qy} = \frac{y - 2y}{y^2x - (xy - y)y} = -1,$$

а тому можна знаходити інтегровальний множник як функцію добутку xy , тобто

$$\mu_1 = e^{-\int d(xy)} = e^{-xy}.$$

Розглядуване рівняння має також інтегровальний множник як функцію y , бо

$$\frac{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}{P} = \frac{y - 2y}{y^2} = -\frac{1}{y},$$

а тому

$$\mu_2 = e^{-\int \frac{dy}{y}} = e^{-\ln y} = \frac{1}{y}.$$

Маючи два незалежних інтегровальних множники, знайдемо загальний інтеграл рівняння

$$\frac{\mu_1}{\mu_2} = C, \frac{e^{-xy}}{\frac{1}{y}} = C, ye^{-xy} = C, C \in \mathbb{R}. \blacktriangleright$$

Зауваження. Якщо відомий інтегровальний множник, то можна знайти не тільки загальний інтеграл, але також і всі особливі розв'язки. Особливим розв'язком рівняння (1) може бути тільки такий розв'язок, вздовж якого інтегровальний множник перетворюється в нескінченність, тобто такий розв'язок, при наближенні до якого $\mu \rightarrow \infty$.

Звідси випливає просте *правило знаходження особливих розв'язків*: 1) знайти лінії, вздовж яких μ перетворюється в нескінченність; 2) перевірити, чи знайдені лінії є інтегральними лініями, тобто розв'язками рівняння; 3) перевірити, чи міститься цей розв'язок у загальному розв'язку. Ті із знайдених розв'язків, які не містяться в загальному, й будуть особливими. Якщо з'ясується, що μ не перетворюється в нескінченність або перетворюється в нескінченність лише в окремих точках, то рівняння не має особливих розв'язків.

Приклад 6. Знайти всі розв'язки рівняння

$$dy - 2\sqrt{y}dx = 0, y \geq 0.$$

◀ Маємо, що $\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{1}{\sqrt{y}} - 0 = -\frac{1}{\sqrt{y}}, y > 0$, а тому рівняння не є рівнянням у повних диференціалах. Оскільки

$$\frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{-P} = -\frac{1}{2y},$$

то рівняння має інтегровальний множник як функцію y

$$\mu = e^{-\frac{1}{2} \int \frac{dy}{y}} = e^{-\frac{1}{2} \ln y} = e^{\ln y^{-\frac{1}{2}}} = y^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{y}}.$$

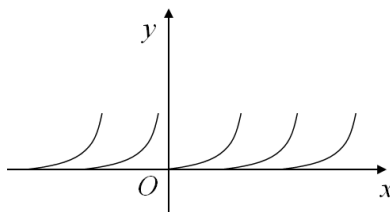
Помноживши вихідне рівняння на μ , дістанемо рівняння у повних диференціалах

$$\frac{dy}{\sqrt{y}} - 2dx = 0,$$

звідки випливає, що

$$\sqrt{y} - x = C, C \in \mathbb{R}.$$

З рівності $\mu = \frac{1}{\sqrt{y}} = \infty$ випливає, що $y = 0$. Очевидно, що $y = 0$ є розв'язком рівняння і це особливий розв'язок, бо він не міститься в загальному при жодному числовому значенні C (див. рисунок). ►



Приклад 7. Розв'язати рівняння $dy - xydx = 0$.

◀ Оскільки $\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = x$, а

$$\frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{-P} = -\frac{1}{y},$$

то рівняння має інтегрувальний множник

$$\mu = e^{-\int \frac{dy}{y}} = e^{-\ln y} = \frac{1}{y}.$$

Після множення рівняння на цей множник, дістанемо рівняння в повних диференціалах

$$\frac{dy}{y} + xdx = 0,$$

всі розв'язки якого визначаються рівністю

$$\frac{x^2}{2} + \ln y = C, C \in \mathbb{R}.$$

З рівності $\mu = \frac{1}{y} = \infty$ випливає, що $y = 0$. Ця функція є розв'язком, який міститься в загальному при $C = 0$, а тому не є особливим. ►

Вправи

1. Розв'язати рівняння:

- 1) $(2x + y)dx + (x + 2y)dy = 0$; 2) $(x + y)dx + (x - y)dy = 0$;
- 3) $(x + \sin y)dx + (x \cos y + \sin y)dy = 0$;
- 4) $(x^2 + 2xy)dx + (x^2 + y^3)dy = 0$;
- 5) $\frac{3x^2+y}{y^2}dx = \frac{2x^3+xy+2y^3}{y^3}dy$;
- 6) $(3x^2 + 6xy - 2y^2)dx + (3x^2 - 4xy - 3y^2)dy = 0$;
- 7) $(1 + e^{x/y})dx + e^{\frac{x}{y}}(1 - \frac{x}{y})dy = 0$;
- 8) $(1 + x\sqrt{x^2 + y^2})dx + (y\sqrt{x^2 + y^2} - 1)dy = 0$;
- 9) $\frac{2x-y}{x^2+y^2}dx + \frac{2y+x}{x^2+y^2}dy = 0$; 10) $y dy = (x dy + y dx)\sqrt{1 + y^2}$;
- 11) $(\sin y - y \sin x + \frac{1}{x})dx + (x \cos y + \cos x - \frac{1}{y})dy = 0$;
- 12) $(x \ln y - x^2 + \cos y)dy + (x^3 + y \ln y - y - 2xy)dx = 0$;
- 13) $(1 + \frac{y^2}{x^2})dx - 2\frac{y}{x}dy = 0$;
- 14) $xe^{xy} + e^y + ye^x = 0$;
- 15) $\frac{y}{x}dx + (y^3 + \ln x)dy = 0$;
- 16) $(2 - 9xy^2)x dx + (4y^2 - 6x^3)y dy = 0$;
- 17) $e^{-y}dx - (2y + xe^{-y})dy = 0$;
- 18) $\frac{2x}{y^3}dx + \frac{(y^2-3x^2)}{y^4}dy = 0, y(1) = 1$;
- 19) $2xy^3 dx + 3(x^2y^2 + y^2 - 1)dy = 0$.

2. Розв'язати рівняння, підбравши спочатку інтегрувальний множник:

- 1) $(x^2 - y) dx + x dy = 0$; 2) $y dx - (x + y^2) dy = 0$;
- 3) $2x \operatorname{tg} y dx + (x^2 - 2 \sin y) dy = 0$;
- 4) $(e^{2x} - y^2) dx + y dy = 0$;
- 5) $(1 + 3x^2 \sin y) dx - x \operatorname{ctg} y dy = 0$;
- 6) $(x^2y^3 + y) dx + (x^3y^2 - x) dy = 0$;
- 7) $(2y + xy^3) dx + (x + x^2y^2) dy = 0$;
- 8) $(x^2 + y) dx - x dy = 0$;
- 9) $(x^2y + y^2 + 2xy) dx + (x^2 + x)(x + 2y) dy = 0$;
- 10) $(2x^3y^2 - y) dx + (2x^2y^3 - x) dy = 0$;
- 11) $(x^2 + y^2 + 1) dx - 2xy dy = 0$;
- 12) $y^2 dx + (xy - 1) dy = 0$;

$$13) (3y^2 - x)dx + (2y^3 - 6xy)dy = 0;$$

$$14) (x + y^2)dx - 2xydy = 0.$$

3. Знайти $u(x, y)$, якщо $u_x = x^2y + x$, $u_y = \frac{x^3}{3} + y$.

Відповіді

1. 1) $x^2 + xy + y^2 = C$; 2) $\frac{x^2}{2} + xy - \frac{y^2}{2} = C$; 3) $\frac{x^2}{2} + x \sin y - \cos y = C$; 4) $\frac{x^3}{3} + x^2y + \frac{y^4}{4} = C$; 5) $\frac{x}{y} + \frac{x^3}{y^2} - 2y = C$; 6) $x^3 + 3x^2y - 2xy^2 - y^3 = C$; 7) $x + ye^{x/y} = C$; 8) $x + \frac{1}{3}\sqrt{(x^2 + y^2)^3} - \frac{y^2}{2} = C$; 9) $\ln(x^2 + y^2) - \operatorname{arctg} \frac{x}{y} = C$; 10) $\sqrt{1 + y^2} - xy = C$; 11) $x \sin y + y \cos x + \ln \left| \frac{x}{y} \right| = C$; 12) $\frac{x^4}{4} + xy \ln y - xy - x^2y + \sin y = C$; 13) $x - \frac{y^2}{x} = C$; 14) $xe^y + ye^x = C$; 15) $y \ln x + \frac{y^4}{4} = C$; 16) $x^2 + 3y^2x^3 + y^4 = C$; 17) $xe^{-y} - y^2 + C = 0$; 18) $y = x$; 19) $x^2y^3 + y^3 - 3y = C$.

2. 1) $x + \frac{y}{x} = C$, $\mu(x) = \frac{1}{x^2}$; 2) $x = y(C + y)$, $\mu(y) = \frac{1}{y^2}$; 3) $x^2 \sin y + \frac{1}{2} \cos 2y = C$, $\mu(y) = \cos y$; 4) $y^2 = (C - 2x)e^{2x}$, $\mu(x) = e^{2x}$; 5) $\frac{x}{\sin y} + x^3 = C$, $\mu(y) = \frac{1}{\sin y}$; 6) $x^2y^2 = \ln \frac{Cy^2}{x^2}$, $C > 0$, $\mu(x, y) = \frac{1}{xy}$; 7) $3x^2y + x^3y^3 = C$, $\mu(x) = x$; 8) $x^2 - y = Cx$, $\mu(x) = \frac{1}{x^2}$; 9) $xy(x + y) = C(x + 1)$, $\mu(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$; 10) $xy(x^2 + y^2) + 1 = Cxy$, $\mu(xy) = \frac{1}{x^2y^2}$; 11) $x^2 - y^2 - 1 = Cx$, $\mu_1(x) = \frac{1}{x^2}$, $\mu_2(x^2 - y^2) = \frac{1}{(x^2 - y^2 - 1)^2}$; 12) $ye^{-xy} = C$, $\mu(xy) = e^{-xy}$; 13) $(x + y^2)^2 C = x - y^2$, $\mu(x + y^2) = \frac{1}{(x + y^2)^3}$; 14) $x = Ce^{\frac{y^2}{x}}$, $\mu(x) = \frac{1}{x^2}$.

3. $u(x, y) = \frac{x^3y}{3} + \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + C$.

§ 6. Особливі розв'язки

Згідно з теоремою Коші про існування і єдиність розв'язку, якщо права частина рівняння $y' = f(x, y)$ неперервна в деякій області D та має в ній неперервну похідну $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$, то через кожну внутрішню точку (x_0, y_0) цієї області проходить єдина інтегральна лінія. Умови теореми Коші можуть не виконуватися в точках, які лежать на межі області D . Такі точки, як відомо, називаються **особливими**. Якщо (x_0, y_0) – особлива точка,

то може трапитися так, що через неї не проходить жодна інтегральна лінія або проходить декілька інтегральних ліній. У прикладі 3 з §1 для диференціального рівняння $y' = \frac{y}{x}$ встановлено, що вся вісь Oy складається з особливих точок. При цьому через початок координат проходить безліч інтегральних ліній, а через особливі точки, відмінні від початку координат, не проходить жодна інтегральна лінія.

Якщо лінія $y = \varphi(x)$ складається тільки з особливих точок і є інтегральною лінією диференціального рівняння, то функція $y = \varphi(x)$ називається **особливим розв'язком**.

Умови теореми Коші є достатніми для того, щоб в деякій області D рівняння $y' = f(x, y)$ не мало особливих розв'язків. Тому для існування особливого розв'язку необхідно, щоб не виконувалися умови теореми Коші.

Отже, для того щоб знайти особливий розв'язок диференціального рівняння $y' = f(x, y)$, треба знайти лінію $y = \varphi(x)$, в кожній точці якої має розрив $f(x, y)$ або $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ і перевірити, чи є функція $y = \varphi(x)$ розв'язком рівняння. Якщо функція $y = \varphi(x)$ є розв'язком диференціального рівняння, то це й буде особливий розв'язок.

Приклад 1. Чи має рівняння $y' = x^2 + y^2$ особливий розв'язок?

◀ Умови теореми Коші виконуються, оскільки права частина рівняння $f(x, y) = x^2 + y^2$ і її похідна $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 2y$ неперервні в довільній обмеженій області $D \subset \mathbb{R}^2$. Тому рівняння особливих розв'язків не має. ▶

Приклад 2. Знайти особливий розв'язок рівняння $y' = \sqrt[3]{y^2}$.

◀ Права частина цього рівняння $f(x, y) = \sqrt[3]{y^2}$ неперервна для всіх значень $y \in \mathbb{R}$, але похідна $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \frac{2}{3\sqrt[3]{y}}$ терпить розрив при $y = 0$, тобто в усіх точках осі Ox . Отже, кожна точка прямої $y = 0$ є особливою. Очевидно, що функція $y = 0$ є розв'язком заданого рівняння. Звідси випливає, що розв'язок

$y = 0$ є особливим.

Знайдемо тепер загальний розв'язок рівняння. Відокремлюючи змінні, знаходимо

$$\frac{dy}{y^{2/3}} = dx.$$

Зінтегрувавши, дістанемо загальний розв'язок



Сім'я інтегральних ліній, що відповідають знайденому загальному розв'язку, є сім'єю кубічних парабол. Оскільки через кожну точку особливого розв'язку $y = 0$ (осі Ox) проходить ще одна інтегральна лінія заданого рівняння (кубічна парабола), то в кожній точці осі Ox порушується властивість єдиності.

Відзначимо, що сукупність розв'язків заданого рівняння складається із загального розв'язку $y = \frac{(x+C)^3}{27}, C \in \mathbb{R}$, і особливого розв'язку $y = 0$. ►

Зауваження. Особливий розв'язок, взагалі кажучи, не міститься в загальному розв'язку і не може бути виділений з нього при жодному конкретному значенні сталої C . У прикладі 2 особливий розв'язок не можна отримати із загального при жодному значенні C .

Приклад 3. Чи має рівняння $y' = \sqrt[3]{(y-x)^2} + 5$ особливий розв'язок?

◀ Права частина рівняння $f(x, y) = \sqrt[3]{(y-x)^2} + 5$ неперервна в \mathbb{R}^2 , а частинна похідна $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2}{3}(y-x)^{-1/3}$ необмежено зростає при наближенні до прямої $y = x$. Це означає, що на прямій $y = x$ може порушуватися єдиність розв'язку. Оскільки, як легко можна переконатися безпосередньою підстановкою, функція

$y = x$ не задовольняє задане рівняння, то особливого розв'язку рівняння не має. ►

Вправи

1. Чи має особливі розв'язки рівняння:

- 1) $y' = \sqrt[3]{(y-x)^2 + 1}$; 2) $y' = \sqrt[3]{y^2 + 1}$;
3) $y' = \sqrt{y}$; 4) $y' = x^2 + y^3$;
5) $y' = \frac{1}{y^2}$; 6) $y' = \sqrt{1-y^2}$?

Відповіді

1. 1) Так, $y = x$; 2) ні; 3) так, $y = 0$; 4) ні; 5) ні, хоча умови теореми Коші не виконуються на осі Ox , через кожену точку x_0 цієї осі проходить єдина інтегральна лінія $y = \sqrt[3]{3(x-x_0)}$; 6) так, $y = -1, y = 1$.

§ 7. Рівняння першого порядку, не розв'язані відносно похідної. Рівняння Лагранжа і Клеро

Диференціальне рівняння першого порядку, не розв'язане відносно похідної, має вигляд

$$F(x, y, y') = 0, \quad (1)$$

де F – відома функція аргументів x, y, y' , яка визначена і неперервна в деякій непорожній області $\Omega \subset \mathbb{R}^3$.

Функція $y = \varphi(x)$, $x \in X$, яка неперервно диференційовна і перетворює рівняння (1) у тотожність, називається **розв'язком** цього рівняння. Графік розв'язку називається **інтегральною лінією**.

Рівняння (1), аналогічно до рівняння, розв'язаного відносно похідної, в області визначення породжує **поле напрямків**. У цьому випадку в кожній точці (x_0, y_0) задається, взагалі кажучи, декілька напрямків поля, тобто декілька значень y' , що знаходяться з рівняння $F(x_0, y_0, y') = 0$.

Інтегральна лінія має ту властивість, що в кожній її точці напрямок дотичної збігається з одним із напрямків поля, що визначаються рівнянням (1) у цій точці.

Задача про знаходження інтегральної лінії, що проходить через задану точку (x_0, y_0) , тобто знаходження розв'язку рівняння (1), який задовольняє початкову умову

$$y(x_0) = y_0, \quad (2)$$

називається **задачею Коші**.

Як відомо, для рівняння $y' = f(x, y)$ початкова умова має вигляд $y(x_0) = y_0$. При певних умовах на f, x_0, y_0 , які описано в теоремі Коші (див. § 1), гарантується існування і єдиність розв'язку задачі Коші. Аналогічне питання виникає і для рівняння (1). Очевидно, що для таких рівнянь через деяку точку (x_0, y_0) , взагалі кажучи, може проходити вже не одна, а декілька інтегральних ліній, оскільки, розв'язуючи рівняння $F(x, y, y') = 0$ відносно y' , дістаємо як правило, не одне, а декілька дійсних значень $y' = f_i(x, y), i \in I$. Якщо кожне з рівнянь $y' = f_i(x, y), i \in I$, в околі точки (x_0, y_0) задовольняє умову теореми Коші, то для кожного з них знайдеться єдиний розв'язок рівняння, який задовольняє початкову умову (2). Тому властивість єдиності розв'язку рівняння (1), що задовольняє умову (2), означає, що через точку (x_0, y_0) у заданому напрямку проходить не більше однієї інтегральної лінії рівняння (1).

Відповідь на питання про існування та єдиність розв'язку задачі Коші (1), (2) дає **теорема Коші**: *нехай y'_0 – один із коренів рівняння*

$$F(x_0, y_0, y') = 0 \quad (3)$$

відносно третього аргументу. Якщо в деякому околі точки (x_0, y_0, y'_0) виконуються умови: 1) $F(x, y, y')$ – неперервна; 2) існують неперервні частинні похідні F'_y і $F'_{y'}$; 3) $F'_{y'}(x_0, y_0, y'_0) \neq 0$, то в досить малому околі точки x_0 існує єдиний розв'язок рівняння (1), для якого

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0. \quad (4)$$

Розв'язок називається **частинним**, якщо в кожній його точці має місце єдиність розв'язку задачі Коші.

Якщо в кожній точці розв'язку порушується єдиність розв'язку задачі Коші, то він називається **особливим**.

При розв'язуванні рівняння (1) розрізняють два підходи: 1) розв'язування його відносно y' з подальшим інтегруванням одержаних рівнянь; 2) введення параметра, коли рівняння (1) розв'язано відносно x або y .

1) Нехай рівняння (1) розв'язане відносно похідної y' , тобто одержано, взагалі кажучи, декілька рівнянь, розв'язаних відносно похідної $y'(x) = f_i(x, y)$, $i \in \{1, \dots, k\}$. Зінтегрувавши кожне з одержаних рівнянь, матимемо множину розв'язків вихідного рівняння. При цьому особливими розв'язками для рівняння (1) будуть лише такі, які є особливими хоча б для одного з отриманих рівнянь.

Приклад 1. Розв'язати рівняння $yy'^2 + (x - y)y' - x = 0$.

◀ Розв'яжемо задане рівняння відносно y' :

$$y' = \frac{-x + y \pm \sqrt{(x - y)^2 + 4xy}}{2y},$$

$$y' = \frac{-x + y \pm \sqrt{(x + y)^2}}{2y}$$

або

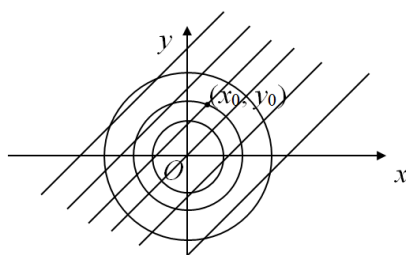
$$y' = \frac{-x + y + x + y}{2y}, \quad y' = 1,$$

$$y' = \frac{-x + y - x - y}{2y}, \quad y' = -\frac{x}{y}.$$

Зінтегруємо кожне з рівнянь окремо:

$$y' = 1, \quad y = x + C;$$

$$y' = -\frac{x}{y}, \quad ydy = -xdx, \quad x^2 + y^2 = C^2.$$



Отже, сукупність розв'язків визначається формулами

$$x - y + C = 0, \quad x^2 + y^2 - C^2 = 0$$

або

$$(x - y + C)(x^2 + y^2 - C^2) = 0.$$

Через кожну точку (x_0, y_0) площини \mathbb{R}^2 , крім точки $(0, 0)$, проходить два розв'язки, кожний у своєму напрямку. Це означає, що розв'язок задачі Коші єдиний. ►

2) Якщо рівняння (1) має вигляд

$$F(y') = 0,$$

то його загальний інтеграл знаходиться без квадратур і визначається формулою $F\left(\frac{y-C}{x}\right) = 0$.

Справді, нехай рівняння $F(y') = 0$ має скінченну або нескінченну кількість дійсних розв'язків $y' = k_i$, де k_i – сталі, $i \in I$, тобто $F(k_i) = 0$, $i \in I$. Зінтегрувавши рівняння $y' = k_i$, одержимо $y = k_i x + C$, звідки $k_i = \frac{y-C}{x}$, $i \in I$. Підставивши ці значення k_i в рівності $F(k_i) = 0$, дістанемо співвідношення $F\left(\frac{y-C}{x}\right) = 0$.

У випадку, коли корені рівняння $F(k) = 0$ заповнюють суцільно деякий інтервал, то можуть бути й інші розв'язки.

Приклад 2. Розв'язати рівняння $\sin y' = 0$.

◀ Загальним інтегралом рівняння є $\sin \frac{y-C}{x} = 0$ або $y = C + nx$, $n \in \mathbb{Z}$. Умови 1) – 3) теореми Коші для вихідного рівняння виконані на всій площині, тому незважаючи на те, що через кожну точку проходить безліч розв'язків, задача Коші, поставлена у формі (4), має єдиний розв'язок. ►

Приклад 3. Зінтегрувати рівняння

$$y' + |y'| = 0.$$

◀ Коренями відносно y' цього рівняння є $y' = k$, $k \in (-\infty, 0]$, вони суцільно заповнюють інтервал $(-\infty, 0]$. Тоді розв'язками нашого рівняння є функції

$$y = kx + C, \quad k \in (-\infty, 0], C \in \mathbb{R}.$$

Очевидно, що розв'язками рівняння є також функції

$$y = -x^n, \quad 0 \leq x < \infty, n \in \mathbb{N},$$

які при $n > 1$ не входять у попередню сім'ю розв'язків. ►

3) Якщо рівняння (1) можна розв'язати відносно y або x , то його зручно зінтегрувати за допомогою введення параметра.

Нехай, наприклад, рівняння (1) розв'язується відносно y :

$$y = f(x, y'). \quad (5)$$

Якщо прийняти y' за незалежну змінну $y' = \frac{dy}{dx} = p$, то з (5) дістанемо

$$y = f(x, p). \quad (6)$$

Продиференціювавши обидві частини рівності (6) і скориставшись рівністю $dy = p dx$, отримаємо рівняння

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial p} dp = p dx$$

або

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} - p \right) dx + \frac{\partial f}{\partial p} dp = 0. \quad (7)$$

Розв'язавши рівняння (7) відносно p , знайдемо розв'язок $p = \varphi(x, C)$, $C \in \mathbb{R}$, а після підстановки його в (6), дістанемо розв'язок рівняння (5) у вигляді $y = f(x, \varphi(x, C))$, $C \in \mathbb{R}$. Якщо ж рівняння (7) розв'язується відносно x , тобто $x = \psi(p, C)$, $C \in \mathbb{R}$, то сукупність розв'язків рівняння визначається у параметричній формі

$$\begin{cases} x = \psi(p, C), \\ y = f(\psi(p, C), p). \end{cases} \quad (8)$$

Аналогічно поступаємо й у випадку, коли рівняння (1) розв'язується відносно x .

Приклад 4. Розв'язати рівняння $y - xy' = y^2 y'^2$.

◀ Розв'яжемо рівняння відносно x і введемо параметр $y' = p$. Тоді одержимо, що

$$x = \frac{y}{p} - py^2.$$

Продиференціюємо цю рівність за y , вважаючи p функцією від y , і замінімо $\frac{dx}{dy}$ на $\frac{1}{p}$:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{p} - \frac{y}{p^2} \frac{dp}{dy} - y^2 \frac{dp}{dy} - 2yp,$$

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{p} - \left(\frac{y}{p^2} + y^2 \right) \frac{dp}{dy} - 2yp$$

або

$$\frac{dp}{dy} = -\frac{2yp}{\frac{y}{p^2} + y^2}.$$

Якщо розглядати y як функцію від p , то це рівняння є лінійним неоднорідним рівнянням:

$$\frac{dy}{dp} = -\frac{y}{2p} - \frac{1}{2p^3}, \quad y \neq 0.$$

Розв'яжемо спочатку лінійне однорідне рівняння:

$$\frac{dy}{dp} = -\frac{y}{2p}; \quad \frac{dy}{y} = -\frac{1}{2} \frac{dp}{p}; \quad \ln |y| = -\frac{1}{2} \ln |p| + \ln C_1,$$

$$y = \pm C_1 p^{-\frac{1}{2}}, \quad C_1 > 0,$$

або $y = Cp^{-\frac{1}{2}}$, $C \in \mathbb{R}$.

Знайдемо розв'язок лінійного неоднорідного рівняння методом варіації довільної сталої:

$$y = c(p)p^{-\frac{1}{2}}, \quad \frac{dy}{dp} = \frac{dc(p)}{dp} p^{-\frac{1}{2}} - c(p) \frac{1}{2} p^{-\frac{3}{2}},$$

$$\frac{dc(p)}{dp} p^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} c(p) p^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{2} c(p) p^{-\frac{3}{2}} - \frac{1}{2p^3},$$

$$\frac{dc(p)}{dp} = -\frac{1}{2} p^{-\frac{5}{2}}, \quad c(p) = \frac{1}{3} p^{-\frac{3}{2}} + C_2,$$

$$y = C_2 p^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{3} p^{-2}, \quad C_2 \in \mathbb{R}.$$

Звідси випливає, що сукупність розв'язків заданого рівняння виражається параметрично рівняннями

$$\begin{cases} x = \frac{y}{p} - py^2, \\ y = C_2 p^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{3} p^{-2}, \quad C_2 \in \mathbb{R}. \blacktriangleright \end{cases}$$

Приклад 5. Розв'язати рівняння $y - y'^2 + xy' - \frac{x^2}{2} = 0$.

◀ Розв'яжемо рівняння відносно y і введемо параметр $y' = p$. Тоді одержимо рівняння в параметричному вигляді

$$y = p^2 - xp + \frac{x^2}{2}, \quad y' = p.$$

Скориставшись рівністю $dy = y'dx$, отримаємо

$$(-p + x)dx + (2p - x)dp = p dx,$$

звідки

$$(-2p + x)dx + (2p - x)dp = 0$$

або

$$(2p - x)(-dx + dp) = 0.$$

Це рівняння розпадається на два:

$$-dx + dp = 0 \quad \text{і} \quad 2p - x = 0.$$

З першого отримуємо, що $p = x + C$, $C \in \mathbb{R}$. Підставивши це значення p у вираз $y = p^2 - xp + \frac{x^2}{2}$, дістанемо загальний розв'язок рівняння

$$y = \frac{x^2}{2} + Cx + C^2, \quad C \in \mathbb{R}.$$

З другого рівняння $2p - x = 0$ знаходимо $p = \frac{x}{2}$. Підставивши його також у вираз $y = p^2 - xp + \frac{x^2}{2}$, одержимо особливий

розв'язок $y = \frac{x^2}{4}$ нашого рівняння. Цей розв'язок є обвідною сім'ї розв'язків $y = \frac{x^2}{2} + Cx + C^2$, $C \in \mathbb{R}$. ►

4) Метод введення параметра особливо зручно застосовувати, коли рівняння (1) лінійно залежить від x і y . Такими рівняннями є рівняння **Лагранжа** і **Клеро**.

Рівняння вигляду

$$y = \varphi(y')x + \psi(y'), \quad (9)$$

в якому y є лінійною функцією від x з коефіцієнтами, залежними від y' , причому коефіцієнт при x не дорівнює y' , називається **рівнянням Лагранжа**. Побудова його загального розв'язку в параметричній формі зводиться до інтегрування деякого лінійного рівняння.

Нехай $y' = p$, тоді

$$y = \varphi(p)x + \psi(p). \quad (10)$$

Замінімо в рівності $dy = y'dx$ величину dy диференціалом y з (10) як функції x і p , а замість y' підставимо p :

$$\varphi(p)dx + (\varphi'(p)x + \psi'(p))dp = p dx$$

або

$$(\varphi(p) - p)dx + (\varphi'(p)x + \psi'(p))dp = 0.$$

Це рівняння зводиться до лінійного рівняння відносно функції x , якщо поділити обидві його частини на dp і $\varphi(p) - p \neq 0$. Маємо

$$\frac{dx}{dp} + \frac{\varphi'(p)}{\varphi(p) - p}x = \frac{\psi'(p)}{p - \varphi(p)}, \quad \varphi(p) - p \neq 0. \quad (11)$$

Загальний розв'язок рівняння (11) має вигляд

$$x = C\alpha(p) + \beta(p), \quad C \in \mathbb{R}.$$

Підставивши цей вираз у (10), дістанемо, що

$$y = C\alpha_1(p) + \beta_1(p).$$

Отже, рівняння Лагранжа має загальний розв'язок у параметричній формі:

$$\begin{cases} x = C\alpha(p) + \beta(p), \\ y = C\alpha_1(p) + \beta_1(p). \end{cases}$$

Якщо рівняння $\varphi(p) - p = 0$ має дійсні розв'язки $p = p_i$, $i \in \{1, \dots, k\}$, то, підставляючи їх в (10) і беручи до уваги, що $\varphi(p_i) = p_i$, одержимо

$$y = p_i x + \psi(p_i), \quad i \in \{1, \dots, k\}.$$

Ці розв'язки можуть бути як частинними, так і особливими. Отже, особливими розв'язками рівняння Лагранжа можуть бути тільки прямі $y = p_i x + \psi(p_i)$, $i \in \{1, \dots, k\}$.

Рівняння вигляду

$$y = xy' + \psi(y') \tag{12}$$

називається **рівнянням Клеро**. Воно відрізняється від рівняння Лагранжа лише тим, що в ньому коефіцієнт при x дорівнює y' .

Нехай $y' = p$. Тоді рівняння (12) набуде вигляду

$$y = xp + \psi(p). \tag{13}$$

Далі маємо

$$dy = y'dx, \quad pdx + (x + \psi'(p))dp = pdx$$

або

$$(x + \psi'(p))dp = 0.$$

Це рівняння розпадається на два:

$$dp = 0 \quad \text{і} \quad x + \psi'(p) = 0.$$

З рівності $dp = 0$ випливає, що $p = C$. Підставляючи це значення p в (12), дістаємо

$$y = Cx + \psi(C), \quad C \in \mathbb{R}. \tag{14}$$

Ця сім'я прямих є загальним розв'язком рівняння Клеро.

Рівність $x + \psi'(p) = 0$ разом з рівністю (13) утворює розв'язок рівняння Клеро в параметричній формі

$$\begin{cases} x = -\psi'(p), \\ y = -\psi'(p)p + \psi(p), \end{cases}$$

який, як правило, є особливим.

До рівняння Клеро приходимо, наприклад, коли шукаємо рівняння кривої за властивістю її дотичної, не залежною від точки дотику, тобто спільною для всіх точок кривої.

Приклад 6. Розв'язати рівняння $y = 2xy' - y'^2$.

◀ Дотримуючись описаного вище методу розв'язування рівняння Лагранжа, одержуємо: $y' = p$, $y = 2xp - p^2$, $dy = y'dx$, $2pdx + 2xdp - 2pdp = pdx$, $pdx + (2x - 2p)dp = 0$, $\frac{dx}{dp} + \frac{2}{p}x = 2$, $p \neq 0$.

Маємо лінійне неоднорідне рівняння з невідомою функцією x . Знайдемо спочатку загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння:

$$\frac{dx}{dp} = -\frac{2}{p}x, \quad \frac{dx}{x} = -\frac{2}{p}dp,$$

$$\ln|x| = -2\ln|p| + \ln|C_1|, \quad x = \frac{C_1}{p^2}, \quad C_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

або, якщо врахувати ще розв'язок $x = 0$, $x = \frac{C}{p^2}$, $C \in \mathbb{R}$.

Розв'язок лінійного неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді

$$x = \frac{c(p)}{p^2},$$

де $c(p)$ – невідома функція. Після підстановки в неоднорідне рівняння дістанемо

$$\frac{c'(p)}{p^2} - \frac{2pc(p)}{p^3} + \frac{2pc(p)}{p^3} = 2,$$

$$\frac{c'(p)}{p^2} = 2, \quad c'(p) = 2p^2, \quad c(p) = \frac{2}{3}p^3 + C_2,$$

а тому

$$x = \frac{2}{3}p + \frac{C_2}{p^2}, \quad C_2 \in \mathbb{R}.$$

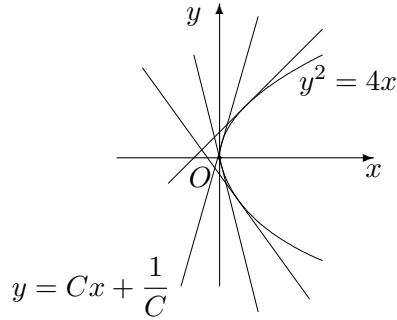
Отже, маємо сукупність розв'язків рівняння Лагранжа в параметричній формі

$$\begin{cases} x = \frac{2}{3}p + \frac{C_2}{p^2}, \\ y = \frac{2C_2}{p} + \frac{p^2}{3}, \quad p \neq 0, C_2 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Якщо $p = 0$, то підставивши його в рівність $y = 2xp - p^2$, знайдемо, що $y = 0$. Це частинний розв'язок нашого рівняння. ►

Приклад 7. Зінтегрувати рівняння $y = xy' + \frac{1}{y'}$.

◀ Покладемо $y' = p$ і запишемо задане рівняння Клеро у вигляді $y = xp + \frac{1}{p}$. Тоді $dy = xdp + p dx - \frac{1}{p^2} dp$ і з рівності $dy = y' dx$ випливає, що $x dp + p dx - \frac{1}{p^2} dp = p dx$ або $\left(x - \frac{1}{p^2}\right) dp = 0$. Прирівнявши до нуля другий множник, одержимо $dp = 0$, звідки $p = C$ і загальний розв'язок заданого рівняння має вигляд $y = Cx + \frac{1}{C}$. Якщо прирівняти до нуля перший множник, то матимемо $x = \frac{1}{p^2}$. Виключаючи p з цього рівняння і рівняння $y = xp + \frac{1}{p}$, дістаємо $y^2 = 4x$. Цей розв'язок є особливим і він служить обвідною сім'ї прямих $y = Cx + \frac{1}{C}$ (див. рисунок). ►



5) У багатьох випадках рівняння (1) складно розв'язується як відносно y' , так і відносно x або y . Тоді зручно подати це рівняння у параметричному вигляді

$$x = \varphi(u, v) \quad y = \psi(u, v), \quad y' = \chi(u, v).$$

Скориставшись співвідношенням $dy = y'dx$, дістанемо рівняння

$$\frac{\partial \psi}{\partial u} du + \frac{\partial \psi}{\partial v} dv = \chi(u, v) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} du + \frac{\partial \varphi}{\partial v} dv \right)$$

або

$$\frac{dv}{du} = \frac{\chi(u, v) \frac{\partial \varphi}{\partial u} - \frac{\partial \psi}{\partial u}}{\frac{\partial \psi}{\partial v} - \chi(u, v) \frac{\partial \varphi}{\partial v}}. \quad (15)$$

Якщо рівняння (15) розв'язати відносно v , то дістанемо сукупність його розв'язків $v = g(u, C)$. Підставивши знайдене v у $x = \varphi(u, v)$ і $y = \psi(u, v)$, одержимо розв'язок рівняння (1) у параметричній формі $x = \varphi(u, g(u, C))$, $y = \psi(u, g(u, C))$.

Приклад 8. Розв'язати рівняння $y^{2/3} + (y')^{2/3} = 1$.

◀ Покладемо $y = \cos^3 u$, $y' = \sin^3 u$. Тоді, скориставшись співвідношенням $dy = y'dx$, дістанемо

$$dx = \frac{dy}{y'}, \quad dx = \frac{-3 \cos^2 u \sin u du}{\sin^3 u}, \quad dx = -3 \frac{\cos^2 u}{\sin^2 u} du.$$

Звідси

$$\begin{aligned} x &= -3 \int \frac{\cos^2 u}{\sin^2 u} du + C = -3 \int \frac{1 - \sin^2 u}{\sin^2 u} du + C = \\ &= 3 \int du - 3 \int \frac{du}{\sin^2 u} + C = 3u + 3 \operatorname{ctg} u + C. \end{aligned}$$

Тому загальний розв'язок нашого рівняння в параметричній формі має вигляд

$$x = 3u + 3 \operatorname{ctg} u + C, \quad y = \cos^3 u, \quad C \in \mathbb{R}. \quad \blacktriangleright$$

Для знаходження особливих розв'язків рівняння (1) застосовують два методи.

Метод p -дискримінантної лінії. Якщо функція $F(x, y, y')$ неперервна за змінною x і неперервно диференційовна за y і y' , то особливий розв'язок (якщо він існує) задовольняє систему рівнянь

$$\begin{cases} F(x, y, p) = 0, \\ F'_p(x, y, p) = 0, \end{cases} \quad (16)$$

де $p = y'$. Виключивши з цієї системи p , знайдемо рівняння p -дискримінантної лінії. Для кожної вітки p -дискримінантної лінії необхідно перевірити, чи є вона інтегральною лінією і чи порушується в кожній точці умова єдиності.

Метод C -дискримінантної лінії. Якщо сім'я інтегральних ліній $\Phi(x, y, C) = 0$ рівняння (1) має **обвідну**, тобто лінію, яка дотикається до кожної лінії сім'ї в одній або декількох точках і вся складається з цих точок дотику, то остання завжди є розв'язком диференціального рівняння і причому особливим. Справді, по-перше, обвідна є інтегральною лінією; по-друге, в кожній точці обвідної порушується єдиність, оскільки через точки обвідної в одному напрямку проходять принаймні дві інтегральні лінії, а саме, обвідна та інтегральна лінія, що дотикається до неї в цій точці.

Відомо, що обвідна входить до складу C -дискримінантної лінії, яка визначається системою рівнянь

$$\begin{cases} \Phi(x, y, C) = 0, \\ \frac{\partial \Phi(x, y, C)}{\partial C} = 0. \end{cases} \quad (17)$$

Знайшовши C -дискримінанту лінію, треба перевірити, чи є вона або її частина обвідною заданої сім'ї розв'язків. Це буде

тоді, коли на ній: 1) існують обмежені частинні похідні

$$\left| \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right| \leq M, \quad \left| \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right| \leq N, \quad (18)$$

де M і N – сталі;

$$2) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x} \neq 0 \text{ або } \frac{\partial \Phi}{\partial y} \neq 0. \quad (19)$$

Приклад 9. Знайти особливі розв'язки диференціального рівняння

$$xy'^2 - 2yy' + 4x = 0, \quad x > 0, \quad (20)$$

якщо його загальний інтеграл має вигляд

$$x^2 = C(y - C). \quad (21)$$

◀ Знаходимо C -дискримінанту лінію. Маємо

$$\Phi(x, y, C) := C(y - C) - x^2,$$

тоді

$$\frac{\partial \Phi}{\partial C} = y - 2C = 0,$$

звідки $C = \frac{y}{2}$. Підставивши це значення C в загальний інтеграл (21), дістанемо

$$x^2 = \frac{y}{2} \left(y - \frac{y}{2} \right) \quad \text{або} \quad (y - 2x)(y + 2x) = 0,$$

тобто $y = \pm 2x$.

Отже, C -дискримінантна лінія складається з двох прямих $y = 2x$ і $y = -2x$.

Безпосередньою перевіркою переконуємося, що кожна з цих прямих є розв'язком нашого рівняння.

Доведемо, що кожний з цих розв'язків є особливим розв'язком рівняння. Маємо $\frac{\partial \Phi}{\partial x} = -2x$, $\frac{\partial \Phi}{\partial y} = C$, а тому

$\left| \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right| = |-2x| \leq 2b$, $0 < a \leq x \leq b$, $\left| \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right| = |C| \leq N$, де $N = \max_{C \in \Omega} |C|$, де Ω – область допустимих значень C .

Оскільки, на C -дискримінантних лініях $\frac{\partial\Phi}{\partial x} = -2x \neq 0$ в області $x > 0$, то прямі $y = 2x$ і $y = -2x$ є обвідними сім'ї парабол $x^2 = C(y-C)$, тобто особливими розв'язками рівняння (20). ►

Приклад 10. Знайти особливі розв'язки рівняння

$$2y(y' + 2) - xy'^2 = 0. \quad (22)$$

◀ Знайдемо p -дискримінанту лінію з системи рівнянь

$$\begin{cases} \Phi(x, y, p) := 2y(p + 2) - xp^2 = 0, \\ \frac{\partial\Phi}{\partial p} = 2y - 2xp = 0. \end{cases}$$

Маємо $p = \frac{y}{x}$, а тому $2y\left(\frac{y}{x} + 2\right) - x\frac{y^2}{x^2} = 0$, тобто $y^2 + 4xy = 0$ є p -дискримінантною лінією, яка розпадається на дві вітки

$$y = 0 \quad \text{і} \quad y = -4x. \quad (23)$$

Безпосередньою перевіркою переконуємося, що обидві ці функції є розв'язками нашого рівняння.

Для того щоб з'ясувати, чи розв'язки (23) є особливими, знайдемо обвідну сім'ї інтегральних ліній

$$Cy - (C - x)^2 = 0 \quad (24)$$

рівняння (22).

Випишемо систему для знаходження C -дискримінантної лінії

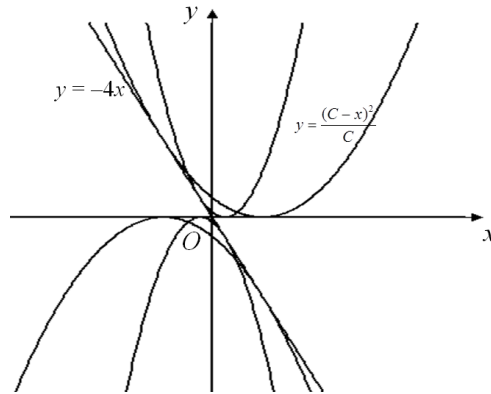
$$\begin{cases} Cy - (C - x)^2 = 0, \\ y - 2(C - x) = 0, \end{cases}$$

звідки, виключаючи C , дістанемо

$$y^2 + 4xy = 0 \quad \text{або} \quad y = 0 \quad \text{і} \quad y = -4x,$$

що збігається з (23). Оскільки на цих лініях виконуються умови (18) і (19), то вони є особливими розв'язками рівняння (22).

Інтегральні лінії (24) є параболами $y = \frac{(C-x)^2}{C}$, а прямі $y = 0$ і $y = -4x$ – обвідними цієї сім'ї парабол (див. рисунок).►



Вправи

1. Зінтегрувати рівняння:

- 1) $y'^2 - (3x - 2y)y' + 2x^2 - xy - 3y^2 = 0$; 2) $y'^2 - (2x + y)y' + x^2 + xy = 0$; 3) $y'^2 + x = 2y$; 4) $y'(2y - y') = y^2 \sin^2 x$; 5) $y(y - 2xy')^2 = 2y'$; 6) $y = y'^2 e^{y'}$; 7) $y = y' \sin y' + \cos y'$; 8) $y - y' = \sqrt{1 + y'^2}$; 9) $y = \ln(1 + y'^2)$; 10) $y'^2 - y'^3 = y^2$; 11) $x = y' \sqrt{y'^2 + 1}$; 12) $x = y' \sin y'$; 13) $xy'^2 - e^{1/y'} = 0$; 14) $x(y' - 1)^2 = y'(y' - 2)$; 15) $y = xy' - x^2 y'^3$; 16) $x = \frac{y}{y'} + \frac{1}{y'^2}$; 17) $xy' + y - 4\sqrt{y'} = 0$; 18) $2xy' - y = y' \ln yy'$; 19) $x^2 y'^2 = xy' + 1$; 20) $y' - \sin y' = 0$; 21) $y' - |y'| = 0$; 22) $y'^2 + y' - 2 = 0$; 23) $y(y - 2xy')^3 = y'^2$.

2. Знайти розв'язки поданих нижче рівнянь Лагранжа і Клеро:

- 1) $y = 2xy' - 4y'^3$; 2) $y = xy'^2 - 2y'^3$; 3) $2y'^2(y - xy') = 1$; 4) $2xy' - y = \ln y'$; 5) $y = 2xy' + \sqrt{1 + y'^2}$; 6) $y = xy'^2 - 2y'$; 7) $y = xy' + \ln y'$; 8) $y = xy' - a\sqrt{1 + y'^2}$; 9) $y = xy'^2 + y'^2$; 10) $y = 2xy' + \sin y'$; 11) $y + y' = x + y'^2$; 12) $y = \frac{3}{2}xy' + e^{y'}$; 13) $y = xy' - e^{y'}$; 14) $xy'^2 - 2yy' + 4x = 0$; 15) $y = xy' - \frac{1}{4}y'^2$; 16) $y = xy' - \frac{y'^4}{2}$; 17) $x = y + \frac{4}{9}y'^2 - \frac{8}{27}y'^3$.

3. Знайти особливі розв'язки рівняння, якщо відомий загальний інтеграл:

- 1) $y = y'^2 - xy' + \frac{x^2}{2}, \quad y = Cx + C^2 + \frac{x^2}{2};$
- 2) $y^2 y'^2 + y^2 = 1, \quad (x - C)^2 + y^2 = 1;$
- 3) $y'^2 - yy' + e^x = 0, \quad y = Ce^x + \frac{1}{C};$
- 4) $3xy'^2 - 6yy' + x + 2y = 0, \quad x^2 + C(x - 3y) + C^2 = 0.$

4. Методом p -дискримінантної лінії знайти особливі розв'язки рівняння:

- 1) $y'^2 - 4y = 0;$ 2) $y'^3 - 4xyy' + 8y^2 = 0;$ 3) $y'^2 - 4yy' - y'^2 + 4y = 0;$
- 4) $y'^2 - y^2 = 0;$ 5) $(y')^2 + 4xy' = 5x^2 + 9y.$

5. Знайти лінію, для якої будь-який відрізок дотичної до неї в довільній точці $M(x, y)$, що лежить між координатними осями, має довжину l .

6. Знайти лінію, будь-яка дотична до якої утворює з осями координат трикутник площею $2a^2$.

7. Знайти лінію, для якої піввізниця піддотичної і піднормалі в довільній точці дорівнює абсцисі точки дотику.

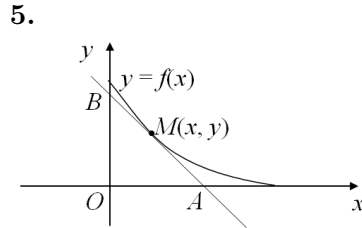
Відповіді

1. 1) $y = Ce^x - x - 1, y = Ce^{-3x} + \frac{2}{9}(3x - 1);$ 2) $y = \frac{x^2}{2} + C,$
 $y = Ce^x - x - 1;$ 3) $\ln|1 \pm 2\sqrt{2y - x}| = 2(x + C \pm \sqrt{2y - x});$
- 4) $\ln Cy = x \pm \sin x, y = 0;$ 5) $y^2 = C^2x - C, 4xy^2 = -1;$
- 6) $x = e^p(p+1) + C, y = p^2e^p;$ 7) $x = \sin p + C, y = p \sin p + \cos p;$
- 8) $x = 4p^3 + \frac{1}{2p^2} + C, y = 3p^4 + \frac{1}{p};$ 9) $x = 2 \operatorname{arctg} p + C, y =$
 $= \ln(1 + p^2); y = 0;$ 10) $\begin{cases} x = \pm \left(\ln \left| \frac{1 - \sqrt{1-p}}{1 + \sqrt{1-p}} \right| + 3\sqrt{1-p} \right) + C, \\ y = \pm \sqrt{1-p}; \end{cases}$
- 11) $x = p\sqrt{p^2 + 1}, 3y = (2p^2 - 1)\sqrt{p^2 + 1} + C;$ 12) $x = p \sin p,$
 $y = p^2 \sin p + p \cos p - \sin p + C;$ 13) $x = \frac{e^{1/p}}{p^2}, y = e^{1/p} \left(1 + \frac{1}{p} \right) + C;$
- 14) $x = \frac{p(p-2)}{(p-1)^2}, y = 1 - \frac{p^2}{(p-1)^2} + C;$ 15) $xp^2 = C\sqrt{|p|} - 1, y =$
 $= xp - x^2p^3, y = 0;$ 16) $x = Cy + C^2, 4x = -y^2;$ 17) $x\sqrt{p} = \ln p + C,$
 $y = \sqrt{p}(4 - \ln p - C);$ 18) $y^2 = 2Cx - C \ln C, 2x = 1 + 2 \ln |y|;$

$$\begin{aligned}
& 19) \begin{cases} \pm xp\sqrt{2\ln Cp} = 1, \\ y = \pm \left(\sqrt{2\ln Cp} - \frac{1}{\sqrt{2\ln Cp}} \right); \end{cases} \quad 20) \frac{y-C}{x} - \sin \frac{y-C}{x} = \\
& = 0; \quad 21) y = kx + C, k \in (0; \infty); y = x^n, x \in (0; \infty), n > 1; \\
& 22) (y-x-C)(y+2x-C) = 0; \quad 23) y^2 = 2C^3x + C^2, 27x^2y^2 = 1. \\
& \quad 2. 1) \begin{cases} x = 3p^2 + \frac{C}{p^2}, \\ y = 2p^3 + \frac{2C}{p}; \end{cases} \quad y = 0; \\
& 2) \begin{cases} x = \frac{C}{(p-1)^2} + 2p + 1, \\ y = \frac{Cp^2}{(p-1)^2} + p^2; \end{cases} \quad y = 0, y = x - 2; \\
& 3) 2C^2(y-Cx) = 1, 8y^2 = 27x^2; \quad 4) xp^2 = p+C, y = 2 + \frac{2C}{p} - \ln p; \\
& 5) \begin{cases} x = \frac{1}{2p^2}(\ln|p + \sqrt{p^2+1}| - p\sqrt{p^2+1} + C), \\ y = 2px + \sqrt{p^2+1}; \end{cases} \\
& 6) x = \frac{2p-2\ln p+C}{(p-1)^2}, y = xp^2-2p; \quad 7) y = Cx - \ln C, y = \ln x + 1; \\
& 8) y = Cx - C\sqrt{1+C^2}, y^2 + x^2 = a^2; \\
& 9) \begin{cases} x+1 = \frac{C}{(p-1)^2}, \quad y = 0; \\ y = p^2(x+1); \end{cases} \\
& 10) \begin{cases} x = \frac{C}{p^2} - \frac{\cos p}{p^2} - \frac{\sin p}{p}, \\ y = \frac{2C}{p} - \frac{2\cos p}{p} - \sin p; \end{cases} \quad y = 0; \\
& 11) \begin{cases} x = 2p + \ln|p-1| + C, \\ y = p^2 + p + \ln|p-1| + C; \end{cases} \\
& 12) \begin{cases} x = \frac{C}{p^3} - 2e^p \left(\frac{1}{p} - \frac{2}{p^2} + \frac{2}{p^3} \right), \\ y = \frac{3C}{2p^2} - 2e^p \left(1 - \frac{3}{p} + \frac{3}{p^2} \right); \end{cases} \\
& 13) y = Cx - e^C; y = x(\ln x - 1); \quad 14) y = Cx^2 + \frac{1}{C}; \\
& 15) y = Cx - \frac{1}{4}e^2, y = x^2; \quad 16) y = Cx - \frac{C^4}{2}, y = \frac{3x}{4} \sqrt[3]{\frac{x}{2}}; \\
& 17) (y-C)^2 = (x-C)^2, y = x - \frac{4}{27}.
\end{aligned}$$

3. 1) $y = \frac{x^2}{3}$; 2) $y = \pm 1$; 3) $y = \pm 2e^{\frac{x}{2}}$; 4) $y = x, y = -\frac{x}{3}$.

4. 1) $y = 0$; 2) $y = 0, y = \frac{4}{27}x^3$; 3) $y = 0$; 4) особливих розв'язків немає; 5) $y = -x^2$.



Рівняння дотичної в точці $M(x, y)$ лінії $y = f(x)$ має вигляд $Y - y = y'(X - x)$, де X, Y – координати точок дотичної. Координати точок A і B знайдемо, якщо в це рівняння підставити відповідно $Y = 0$ і $X = 0$: $X_A = x - \frac{y}{y'}$, $Y_B = y - xy'$. Згідно з умовою

$AB = l$. Відстань AB між точками $A(X_A, 0)$ і $B(0, Y_B)$ дорівнює $\sqrt{(x - \frac{y}{y'})^2 + (y - xy')^2}$. Тоді одержимо диференціальне рівняння $\sqrt{(x - \frac{y}{y'})^2 + (y - xy')^2} = l$ або $y = xy' \pm \frac{ly'}{\sqrt{1+(y')^2}}$. Це рівняння Клеро. Його загальним розв'язком є $y = Cx \pm \frac{Cl}{\sqrt{1+C^2}}$, а особливим $y = \pm \frac{lC^3}{(1+C^2)^{3/2}}$ або $x^{2/3} + y^{2/3} = l^{3/2}$.

6. Якщо скористатись рисунком і міркуваннями із задачі 5, то матимемо $S = 2a^2$ і $S = \frac{1}{2}(x - \frac{y}{y'})(y - xy')$ або $(x - \frac{y}{y'})(y - xy') = 4a^2$. Звідси дістанемо рівняння $xy' - y = \pm 2a\sqrt{-y'}$ або $y = xy' \mp 2a\sqrt{-y'}$. Розв'язавши це рівняння дістанемо, що шуканими лініями є $xy = -3a^2$ і $xy = a^2$.

7. Згідно з умовою $\frac{1}{2}(\frac{y}{y'} - yy') = x$ або $y = \frac{2y'}{1-(y')^2}x$. Маємо рівняння Лагранжа, яке зручно записати у вигляді $x = \frac{yx'}{2} - \frac{y}{2x}$, вважаючи, що x є функцією від y . Розв'язавши останнє рівняння дістанемо загальний інтеграл у параметричній формі

$$\begin{cases} x = \frac{Cp}{2}(p - \frac{1}{p}), \\ y = Cp. \end{cases}$$

Виключивши параметр p , одержимо загальний розв'язок $x = \frac{y^2}{2C} - \frac{C}{2}$ або $2Cx = y^2 - C^2$, тобто сім'ю парабол.

Розділ 2

Диференціальні рівняння вищого порядку. Рівняння, що допускають зниження порядку

§ 8. Загальні поняття та означення

Рівняння

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad (1)$$

де x – незалежна змінна, y – шукана функція, а функція F визначена й неперервна в деякій області $D \subset \mathbb{R}^{n+2}$, $n \in \mathbb{N}$, та обов'язково залежна від $y^{(n)}$, називається **звичайним диференціальним рівнянням n -го порядку**.

Диференціальне рівняння n -го порядку, розв'язане відносно старшої похідної, має вигляд

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}), \quad (2)$$

де функція f неперервна в деякій області $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ зміни своїх аргументів.

Розв'язком рівняння (2) на проміжку X називається функція $y = \varphi(x)$, яка задовольняє умови:

- 1) φ неперервно диференційовна n разів на X ;
- 2) $(x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n-1)}(x)) \in \Omega$, $x \in X$;
- 3) φ перетворює рівняння (2) в тотожність, тобто

$$\varphi^{(n)}(x) = f(x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n-1)}(x)), \quad x \in X.$$

Задачею Коші або **початковою задачею** для рівняння (2) називається задача про знаходження розв'язку $y = y(x)$ рівняння (2), який задовольняє початкові умови

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}, \quad (3)$$

де $x_0 \in X$, $y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}$ – задані числа.

Існування та єдиність розв'язку задачі Коші гарантує **теорема Коші**: якщо в рівнянні (2) функція f задовольняє умови: а) f неперервна за сукупністю змінних $x, y, y', \dots, y^{(n-1)}$

в області Ω ; б) існують неперервні частинні похідні $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial y'}$, ..., $\frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}$ всередині області Ω , то для будь-якої точки $(x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}) \in \Omega$ існує єдиний розв'язок рівняння (2), який визначений в деякому околі точки $x_0 \in X$ і задовольняє початкові умови (3).

Для рівняння другого порядку

$$y'' = f(x, y, y')$$

початкові умови мають вигляд

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0,$$

де $x_0 \in X$, y_0, y'_0 – задані числа. У цьому випадку теорема Коші про існування та єдиність **геометрично** означає, що через задану точку (x_0, y_0) проходить одна інтегральна крива, кутовий коефіцієнт дотичної до якої в цій точці дорівнює y'_0 . З механічної точки зору це означає, що треба знайти закон руху $y = y(x)$ матеріальної точки, яка в початковий момент часу x_0 займала положення y_0 і мала швидкість y'_0 .

Приклад 1. Довести, що задача Коші

$$y'' = \sin y' + e^{-x^2 y},$$

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0, \quad x_0 \in \mathbb{R}, \{y_0, y'_0\} \subset \mathbb{R},$$

має єдиний розв'язок в деякому околі точки x_0 .

◀ Перевіримо виконання умов теореми Коші. У нашому випадку $f(x, y, y') = \sin y' + e^{-x^2 y}$. Ця функція визначена і неперервна в \mathbb{R}^3 . Її частинні похідні

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -x^2 e^{-x^2 y}, \quad \frac{\partial f}{\partial y'} = \cos y'$$

є неперервними та обмеженими функціями в будь-якій обмеженій області $\Omega \subset \mathbb{R}^3$.

Оскільки умови теореми Коші виконуються, то задача Коші має єдиний розв'язок у деякому околі точки x_0 . ▶

Нехай Ω – область, у кожній точці якої задача Коші для рівняння (2) має єдиний розв’язок. Функція

$$y = \varphi(x, C_1, \dots, C_n), \quad (4)$$

де C_1, \dots, C_n – довільні сталі, називається **загальним розв’язком рівняння (2)** в області Ω , якщо:

1) функція φ має неперервні частинні похідні за x до n -го порядку включно;

2) для будь-якої точки $(x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}) \in \Omega$ система

$$\begin{cases} y_0 = \varphi(x_0, C_1, \dots, C_n), \\ y'_0 = \varphi'(x_0, C_1, \dots, C_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_0^{(n-1)} = \varphi^{(n-1)}(x_0, C_1, \dots, C_n) \end{cases}$$

має єдиний розв’язок відносно C_1, \dots, C_n :

$$\begin{aligned} C_1^0 &= \psi_1(x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}), \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ C_n^0 &= \psi_n(x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}); \end{aligned} \quad (5)$$

3) функція $\varphi(x, C_1^0, \dots, C_n^0)$ є розв’язком рівняння (2) при будь-яких допустимих значеннях C_1^0, \dots, C_n^0 , які визначаються рівностями (5), за умови, що $(x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}) \in \Omega$.

Якщо загальний розв’язок (4) в області Ω заданий неявно співвідношенням

$$\Phi(x, y, C_1, \dots, C_n) = 0, \quad (6)$$

то (6) називають **загальним інтегралом** рівняння (2) в області Ω .

Розв’язок, який можна знайти з (4) при конкретних числових значеннях C_1, \dots, C_n , називають **частинним розв’язком рівняння (2)**. Аналогічно вводиться поняття **частинного інтеграла**. Якщо відомий загальний розв’язок (4) або загальний інтеграл (6), то розв’язати задачу Коші можна так. Із співвідношень (4) або (6) і тих, які дістають з них за допомогою $(n-1)$ -кратного диференціювання за x з використанням початкових

умов (3), записують систему рівнянь для визначення C_1, \dots, C_n . Розв'язавши цю систему і підставивши знайдені значення C_1^0, \dots, C_n^0 в (4) або (6), дістанемо розв'язок задачі Коші

$$y = \varphi(x, C_1^0, \dots, C_n^0) \quad (7)$$

або частинний інтеграл

$$\Phi(x, y, C_1^0, \dots, C_n^0) = 0,$$

яким неявно задається розв'язок задачі Коші.

Якщо в кожній точці розв'язку порушується єдиність розв'язку задачі Коші, то він називається **особливим**.

Часто розв'язки (4) або (6) задаються у вигляді

$$\begin{cases} x = \varphi(t, C_1, \dots, C_n), \\ y = \psi(t, C_1, \dots, C_n), \end{cases} \quad t \in T. \quad (8)$$

Тоді (8) називають **загальним інтегралом в параметричній формі**.

Співвідношення вигляду

$$\Psi(x, y, y', \dots, y^{(n-k)}, C_1, \dots, C_k) = 0, \quad (9)$$

яке справджується для всіх розв'язків y рівняння (1) і одержане внаслідок інтегрування цього рівняння, називається **проміжним інтегралом k -го порядку рівняння (1)**.

Проміжний інтеграл першого порядку

$$\Psi(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}, C_1) = 0 \quad (10)$$

називають **першим інтегралом**.

Якщо відомо k різних перших інтегралів, то порядок рівняння можна знизити на k одиниць. Якщо ж відомо n різних перших інтегралів, то виключивши з них усі похідні $y', y'', \dots, y^{(n-1)}$, дістанемо загальний інтеграл рівняння.

Нижче ми розглянемо рівняння, які допускають зниження порядку, тобто за допомогою деякої підстановки їх можна звести до рівняння нижчого порядку.

§ 9. Деякі типи рівнянь, які допускають зниження порядку

9.1. Рівняння вигляду $F(x, y^{(n)}) = 0$. Розглянемо рівняння вигляду

$$F(x, y^{(n)}) = 0. \quad (1)$$

У багатьох випадках рівняння (1) можна зобразити у параметричній формі

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y^{(n)} = \psi(t), \quad t \in T, \end{cases}$$

де $\varphi(t)$ – диференційовна функція.

Оскільки $dy^{(n-1)} = y^{(n)} dx$, то $dy^{(n-1)} = \psi(t)\varphi'(t)dt$, звідки знаходимо, що

$$y^{(n-1)} = \int \psi(t)\varphi'(t)dt + C_1 = \psi_1(t, C_1), \quad C_1 \in \mathbb{R}.$$

Аналогічно знаходимо $y^{(n-2)}$ і т.д. Для y дістанемо вираз вигляду $y = \psi_n(t, C_1, \dots, C_n)$. Тоді система

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi_n(t, C_1, \dots, C_n), \quad t \in T, \{C_1, \dots, C_n\} \subset \mathbb{R}, \end{cases}$$

є загальним інтегралом рівняння (1) в параметричній формі.

Приклад 1. Розв'язати рівняння

$$x - e^{y''} + (y'')^2 = 0.$$

◀ Запишемо рівняння у вигляді

$$x = e^{y''} - (y'')^2$$

і введемо параметр $y'' = t$. Тоді одержимо параметричний вигляд рівняння

$$\begin{cases} x = e^t - t^2, \\ y'' = t. \end{cases}$$

Далі

$$dy' = y'' dx, \quad dy' = t(e^t - 2t)dt,$$

звідки

$$y' = \int t(e^t - 2t)dt + C_1 = e^t(t - 1) - \frac{2}{3}t^2 + C_1.$$

Тому з рівності

$$dy = y' dx$$

випливає, що

$$dy = \left(e^t(t - 1) - \frac{2}{3}t^2 + C_1 \right) (e^t - 2t)dt$$

або

$$dy = (e^{2t}(t - 1) - (\frac{2}{3}t^3 + 2t^2 - 2t - C_1)e^t + \frac{4}{3}t^4 - 2C_1t)dt.$$

Інтегруючи, отримуємо

$$y = (\frac{t}{2} - \frac{3}{4})e^{2t} - (\frac{2}{3}t^3 - 2t + 2 - C_1)e^t + \frac{4}{15}t^5 - C_1t^2 + C_2.$$

Приєднуючи сюди рівність $x = e^t - t^2$, одержуємо загальний розв'язок у параметричній формі. ►

Частинним випадком рівняння (1) є рівняння

$$y^{(n)} = f(x). \quad (2)$$

Припустимо, що функція f неперервна на проміжку X . Тоді існує єдиний розв'язок задачі Коші, причому початкові дані $y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}$ можна задавати довільно, а $x_0 \in X$. Цей розв'язок буде визначеним на всьому проміжку X . Інтегруючи послідовно n разів рівняння (2), знайдемо загальний розв'язок цього рівняння.

Приклад 2. Знайти загальний розв'язок рівняння $y^{(3)} = \frac{\ln x}{x^2}$ і виділити розв'язок, який задовольняє початкові умови $y(1) = 0, y'(1) = 1, y''(1) = 2$.

◀ Зінтегруємо задане рівняння послідовно три рази:

$$\begin{aligned}
 y'' &= \int \frac{\ln x}{x^2} dx + C_1 = - \int \ln x d\left(\frac{1}{x}\right) + C_1 = \\
 &= - \left(\frac{1}{x} \ln x - \int \frac{1}{x} \frac{1}{x} dx \right) + C_1 = - \left(\frac{1}{x} \ln x + \frac{1}{x} \right) + C_1; \\
 y' &= - \int \left(\frac{1}{x} (\ln x + 1) + C_1 \right) dx + C_2 = - \int \frac{\ln x}{x} dx - \int \frac{dx}{x} + C_1 \int dx + C_2 = \\
 &= - \int \ln x d(\ln x) - \ln x + C_1 x + C_2 = - \frac{\ln^2 x}{2} - \ln x + C_1 x + C_2; \\
 y &= - \frac{1}{2} \int \ln^2 x dx - \int \ln x dx + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3 = \\
 &= - \frac{1}{2} \left(x \ln^2 x - 2 \int \ln x dx \right) - \int \ln x dx + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3 = \\
 &= - \frac{x}{2} \ln^2 x + \int \ln x dx - \int \ln x dx + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3 = \\
 &= - \frac{x}{2} \ln^2 x + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3, \quad \{C_1, C_2, C_3\} \subset \mathbb{R}.
 \end{aligned}$$

Знайдемо розв'язок, який задовольняє задані початкові умови. Підставляючи початкові дані в одержані вище вирази для y , y' і y'' , дістаємо таку систему рівнянь для знаходження C_1 , C_2 і C_3 :

$$\begin{cases} \frac{C_1}{2} + C_2 + C_3 = 0, \\ C_1 + C_2 = 1, \\ -1 + C_1 = 2. \end{cases}$$

Звідси випливає, що $C_1 = 3$, $C_2 = -2$, $C_3 = \frac{1}{2}$. Шуканим розв'язком є

$$y = - \frac{x}{2} \ln^2 x + \frac{3}{2} x^2 - 2x + \frac{1}{2}. \blacktriangleright$$

9.2. Рівняння, яке не містить явно шуканої функції і кількох послідовних похідних. Розглянемо рівняння вигляду

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}) = 0, \quad (3)$$

$k \in \{1, \dots, n-1\}$.

За допомогою підстановки $y^{(k)} = z$, де z – нова невідома функція від x , рівняння (3) можна звести до рівняння $(n-k)$ -го порядку

$$F(x, z', z'', \dots, z^{(n-k)}) = 0. \quad (4)$$

Якщо рівняння (4) зінтегрувати, то, повертаючись до змінної y , дістанемо проміжний інтеграл рівняння (3) у вигляді

$$y^{(k)} = \varphi(x, C_1, \dots, C_{n-k}) \quad \text{або} \quad \Phi(x, y^{(k)}, C_1, \dots, C_{n-k}) = 0. \quad (5)$$

Рівняння (5) є рівняннями типу (1), тільки порядку $k < n$.

Приклад 3. Розв'язати рівняння $y' = xy'' + (y'')^2$.

◀ Покладемо $y' = z$. Тоді дістанемо рівняння

$$z = xz' + z'^2,$$

яке є рівнянням Клеро. Розв'яжемо його за допомогою методу введення параметра.

Нехай $z' = p$, тоді $z = xp + p^2$, а $dz = xdp + p dx + 2p dp$. З рівності $dz = z' dx$ випливає, що $x dp + p dx + 2p dp = p dx$ або $(x + 2p) dp = 0$. Звідси одержуємо, що: 1) $dp = 0$, і тоді $p = C_1$, а тому $z = C_1 x + C_1^2$; 2) $x = -2p$ або $p = -\frac{x}{2}$, а це означає, що $z = -\frac{x^2}{4}$. Отже, загальним розв'язком рівняння Клеро є

$$z = C_1 x + C_1^2, \quad (6)$$

а особливим

$$z = -\frac{x^2}{4}. \quad (7)$$

Повернувшись до змінної y , дістанемо з (6), що

$$y' = C_1 x + C_1^2.$$

Після інтегрування матимемо, що загальним розв'язком вихідного рівняння є

$$y = \frac{C_1}{2}x^2 + C_1^2x + C_2.$$

Замінімо в (7) z на y' , тоді

$$y' = -\frac{x^2}{4},$$

звідки

$$y = -\frac{x^3}{12} + C_3.$$

Кожний з розв'язків, які входять в цю сім'ю, є особливим розв'язком вихідного рівняння. ►

9.3. Рівняння, яке не містить явно незалежної змінної. Розглянемо рівняння вигляду

$$F(y, y', \dots, y^{(n)}) = 0. \quad (8)$$

За допомогою заміни

$$y' = p \quad (9)$$

де $p = p(y)$ – нова шукана функція, y – нова незалежна змінна, порядок рівняння (8) можна знизити на одиницю, оскільки

$$\begin{aligned} y'' &= \frac{dy'}{dx} = \frac{dp}{dy} \frac{dy}{dx} = pp', \\ y^{(3)} &= \frac{dy''}{dx} = \frac{dy''}{dy} \frac{dy}{dx} = (p''p + p'^2)p, \\ &\dots\dots\dots \\ y^{(n)} &= g(p, p', \dots, p^{(n-1)}), \end{aligned} \quad (10)$$

де

$$p^{(j)} = \frac{d^j p}{dy^j}, \quad j \in \{1, \dots, n-1\}.$$

Підставивши (9) і (10) у (8), дістанемо рівняння $(n - 1)$ -го порядку відносно нової шуканої функції p

$$F_1(y, p, p', \dots, p^{(n-1)}) = 0. \quad (11)$$

Якщо відомий загальний інтеграл рівняння (11)

$$\Phi_1(y, p, C_1, \dots, C_{n-1}) = 0,$$

то співвідношення

$$\Phi_1(y, y', C_1, \dots, C_{n-1}) = 0 \quad (12)$$

є проміжним інтегралом $(n - 1)$ -го порядку рівняння (8) – диференціальним рівнянням першого порядку інтегровного типу. Загальний інтеграл рівняння (12), який має вигляд $\Phi(x, y, C_1, \dots, C_n) = 0$, де C_1, \dots, C_n – довільні сталі, є загальним інтегралом рівняння (8).

При виконанні заміни (9) можлива втрата розв'язків вигляду $y = \text{const}$. Безпосередньою підстановкою необхідно перевірити, чи справді рівняння (8) має такі розв'язки.

Приклад 4. Знайти розв'язок диференціального рівняння $y'' + \frac{2}{1-y}(y')^2 = 0$, який задовольняє початкові умови $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

◀ У рівнянні не міститься в явному вигляді незалежна змінна x . Виконавши заміну $y' = p(y)$, з урахуванням того, що $y'' = p'p$, одержуємо диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними

$$\frac{dp}{dy}p + \frac{2}{1-y}p^2 = 0.$$

Відокремивши змінні, дістанемо

$$\frac{dp}{p} = -\frac{2dy}{1-y}, \quad p \neq 0,$$

або після інтегрування обох частин $\ln |p| = 2 \ln |1 - y| + \ln |C|$, звідки випливає, що $p = C(1 - y)^2$, $C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Очевидно, що $p = 0$ є розв'язком рівняння з відокремлюваними змінними, тому одержуємо

$$\begin{cases} p = C(1-y)^2, C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, & \text{або } p = C_1(1-y)^2, C_1 \in \mathbb{R}. \\ p = 0 \end{cases}$$

Ураहुавши заміну, дістанемо рівняння з відокремленими змінними

$$y' = C_1(1-y)^2.$$

Відокремивши змінні $(1-y)^{-2}dy = C_1 dx$, після інтегрування матимемо

$$1-y = \frac{1}{C_1x + C_2}, \quad \{C_1, C_2\} \subset \mathbb{R}.$$

Знайдемо значення сталих C_1 і C_2 , при яких розв'язок задовольняє початкові умови:

$$0 = 1 - \frac{1}{C_2}, \quad 1 = C_1(1-0)^2,$$

звідки $C_1 = 1, C_2 = 1$.

Отже, розв'язком задачі Коші є функція $y = 1 - \frac{1}{x+1}$. ►

9.4. Рівняння, однорідне відносно $y, y', \dots, y^{(n)}$. Розглянемо рівняння

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0, \tag{13}$$

де функція F однорідна відносно $y, y', \dots, y^{(n)}$ з показником однорідності m , тобто

$$F(x, ty, ty', \dots, ty^{(n)}) = t^m F(x, y, y', \dots, y^{(n)}), \quad t > 0.$$

За допомогою заміни

$$y = e^{\int z(x)dx}$$

або

$$y' = yz, \tag{14}$$

де z – нова невідома функція, порядок рівняння (13) можна знизити на одиницю.

Справді, диференціюючи послідовно (14) і замінюючи кожного разу y' на yz , одержимо

$$\begin{cases} y'' = y'z + yz' = y(z^2 + z'), \\ \dots\dots\dots, \\ y^{(n)} = yg(z, z', \dots, z^{(n-1)}), \end{cases} \tag{15}$$

де g – певна функція від змінних $z, z', \dots, z^{(n-1)}$.

Підставимо (15) і (14) в (13). Тоді дістанемо

$$F(x, y, yz, y(z^2 + z'), \dots, yg(z, z', \dots, z^{(n-1)})) = 0$$

або

$$y^m F(x, 1, z, z^2 + z', \dots, g(z, z', \dots, z^{(n-1)})) = 0. \quad (16)$$

Скоротивши рівняння (16) на y^m (розв'язок $y = 0$ не втрачимо), дістанемо диференціальне рівняння $(n - 1)$ -го порядку відносно функції z :

$$F(x, 1, z, z^2 + z', \dots, g(z, z', \dots, z^{(n-1)})) = 0. \quad (17)$$

Якщо відомий загальний розв'язок $z = \varphi(x, C_1, \dots, C_{n-1})$ рівняння (17), то, як впливає з (14), загальний розв'язок рівняння (13) має вигляд

$$y = C_n e^{\int \varphi(x, C_1, \dots, C_{n-1}) dx}, \quad (18)$$

де C_1, \dots, C_n – довільні сталі. Розв'язок $y = 0$ дістаємо з (18) при $C_n = 0$.

Приклад 5. Розв'язати рівняння

$$xyy'' - xy'^2 - yy' = 0.$$

◀ У цьому випадку $F(x, y, y', y'') = xyy'' - xy'^2 - yy'$ є однорідною функцією другого виміру відносно y, y', y'' , оскільки $F(x, ty, ty', ty'') = x(ty)(ty'') - x(ty')^2 - (ty)(ty') = t^2(xyy'' - xy'^2 - yy') = t^2 F(x, y, y', y'')$.

Нехай $y' = yz$, тоді $y'' = y'z + yz'$ або $y'' = yz^2 + yz'$. Підставивши вирази для y' і y'' в рівняння і скоротивши на $y^2 \neq 0$, дістанемо

$$x(z^2 + z') - xz^2 - z = 0$$

або

$$xz' - z = 0.$$

Відокремивши змінні та зінтегрувавши, одержимо

$$z = C_1 x, \quad C_1 \in \mathbb{R}.$$

Замінімо z на $\frac{y'}{y}$:

$$\frac{y'}{y} = C_1 x.$$

Після інтегрування, отримаємо загальний розв'язок рівняння

$$y = C_2 e^{\frac{C_1}{2} x^2}, \quad \{C_1, C_2\} \subset \mathbb{R}. \quad \blacktriangleright$$

Зауваження. Очевидно, що задане рівняння можна розв'язати методом відокремлення змінних.

Справді, поділивши обидві сторони рівняння на xyy' , матимемо

$$\frac{y''}{y'} - \frac{y'}{y} - \frac{1}{x} = 0$$

або

$$\frac{dy'}{y'} - \frac{dy}{y} - \frac{dx}{x} = 0.$$

Звідси, зінтегрувавши і провівши певні спрощення, дістанемо

$$\ln |y'| - \ln |y| - \ln |x| = \ln |\bar{C}_1|, \bar{C}_1 \neq 0,$$

$$\frac{y'}{y} = C_1 x, C_1 \in \mathbb{R},$$

$$\frac{dy}{y} = C_1 x dx, \ln |y| = C_1 \frac{x^2}{2} + \ln |\bar{C}_2|, \bar{C}_2 \neq 0,$$

$$y = C_2 e^{\frac{C_1 x^2}{2}}, \{C_1, C_2\} \subset \mathbb{R}.$$

9.5. Узагальнено однорідне рівняння. Рівняння вигляду

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (19)$$

називається **узагальнено однорідним**, якщо існує таке число k , при якому ліва частина цього рівняння стає однорідною функцією виміру t відносно всіх аргументів у припущенні, що $x, y, y', \dots, y^{(n)}$ є величинами відповідно 1-го, k -го, \dots , $(k-n)$ -го вимірів.

Якщо в рівнянні (19) покласти

$$x = e^t, \quad y = ze^{kt},$$

де t і z – відповідно нова незалежна змінна і нова невідома функція, то воно зводиться до рівняння, що не містить незалежної змінної t

$$F_1(z, z', \dots, z^{(n)}) = 0.$$

Приклад 6. Розв'язати рівняння

$$x^4 y'' + (xy' - y)^3 = 0.$$

◀ Перевіримо, чи це рівняння узагальнено однорідне, тобто існує таке число k , що

$$F(tx, t^k y, t^{k-1} y', \dots, t^{k-n} y^{(n)}) = t^m F(x, y, y', \dots, y^{(n)}).$$

Маємо

$$t^4 x^4 t^{k-2} y'' + (t x t^{k-1} y' - t^k y)^3 = t^{4+k-2} x^4 y'' + t^{3k} (xy' - y)^3.$$

Звідси випливає, що

$$4 + k - 2 = 3k$$

або

$$k = 1.$$

Отже, задане рівняння є узагальнено однорідним.

Зробимо підстановку

$$x = e^t, \quad y = ze^t.$$

Оскільки

$$y' = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} e^{-t} = \left(\frac{dz}{dt} e^t + ze^t \right) e^{-t} = \frac{dz}{dt} + z,$$

$$y'' = \frac{dy'}{dt} e^{-t} = \left(\frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{dz}{dt} \right) e^{-t},$$

то рівняння набуде вигляду

$$e^{4t} \left(\frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{dz}{dt} \right) e^{-t} + \left(e^t \left(\frac{dz}{dt} + z \right) - ze^t \right)^3 = 0$$

або

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{dz}{dt} + \left(\frac{dz}{dt}\right)^3 = 0.$$

Заміна $\frac{dz}{dt} = u(t)$, $\frac{d^2 z}{dt^2} = u \frac{du}{dz}$ зводить це рівняння до вигляду

$$\frac{du}{dz} u + u + u^3 = 0$$

або

$$\frac{du}{dz} = -(1 + u^2), \quad u \neq 0.$$

Зінтегрувавши одержане рівняння, знайдемо його загальний розв'язок

$$u = \operatorname{tg}(C_1 - z), \quad C_1 \in \mathbb{R}.$$

Повернувшись до заміни, дістанемо рівняння

$$\frac{dz}{dt} = \operatorname{tg}(C_1 - z).$$

Розв'язавши це рівняння, матимемо

$$\sin(z - C_1) = C_2 e^{-t}, \quad \{C_1, C_2\} \subset \mathbb{R}.$$

Оскільки $t = \ln x$, $z = \frac{y}{x}$, то

$$\sin\left(\frac{y}{x} - C_1\right) = C_2 \frac{1}{x}, \quad \{C_1, C_2\} \subset \mathbb{R}. \quad \blacktriangleright$$

9.6. Рівняння, ліва частина якого є точною похідною. Якщо в рівнянні

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \tag{20}$$

ліва частина є точною похідною від деякої функції $\Phi(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$, тобто

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = \frac{d}{dx} \Phi(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}),$$

то

$$\Phi(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) = C_1 \quad (21)$$

буде першим інтегралом рівняння (20). Може трапитися, що рівняння (21) у свою чергу є рівнянням у точних похідних. Тоді ми знайдемо другий інтеграл рівняння (20).

Якщо рівняння (20) не є рівнянням у точних похідних, то іноді можна підібрати таку функцію $\mu = \mu(x, y, y', \dots, y^{(n)})$ – інтегровальний множник, що після множення на неї рівняння (20) стає рівнянням у точних похідних. При множенні на інтегровальний множник можуть з'явитися зайві розв'язки, які є коренями рівняння $\mu = 0$, а також можлива втрата деяких розв'язків у випадку розривності функції μ .

Приклад 7. Розв'язати рівняння $y'' = y'(1 + y')$.

◀ Запишемо рівняння у вигляді

$$\frac{y''}{y'} - (1 + y') = 0$$

або

$$(\ln y')' - (x + y)' = 0, \quad y' > 0.$$

Після інтегрування одержимо диференціальне рівняння першого порядку

$$\ln y' - (x + y) = \ln C_1, \quad C_1 > 0,$$

тобто

$$y' = C_1 e^{x+y}, \quad C_1 > 0.$$

Очевидно, що y , для якого $y' = 0$, є розв'язком вихідного рівняння. Тому остаточно дістанемо, що

$$y' = C_1 e^{x+y}, \quad C_1 \geq 0.$$

Це є рівняння з відокремлюваними змінними. Відокремивши змінні та зінтегрувавши, матимемо

$$e^{-y} dy = C_1 e^x dx$$

або

$$-e^{-y} = C_1 e^x + C_2, \quad C_1 \geq 0, C_2 \in \mathbb{R}. \blacktriangleright$$

Приклад 8. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y'' - xy' - y = 0.$$

◀ Записавши рівняння у вигляді

$$(y' - xy)' = 0,$$

одержимо

$$y' - xy = C_1, C_1 \in \mathbb{R}.$$

Розв'язавши це лінійне неоднорідне рівняння першого порядку дістанемо, що

$$y = e^{\frac{x^2}{2}} \left(C_1 \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt + C_2 \right), \{C_1, C_2\} \subset \mathbb{R}.$$

Оскільки інтеграл $\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ не є елементарною функцією, то маємо загальний розв'язок, який виражається через елементарні функції та інтеграли від них, тобто рівняння розв'язне у квадратурах. ▶

Вправи

1. Розв'язати рівняння:

- 1) $y''' = \frac{5}{x^4} + 2 \sin x$; 2) $y'' = \ln x$; 3) $y''' = \frac{1}{x}$; 4) $y^{(4)} = x^2 + 3 \sin x$;
- 5) $y''' = (y'')^2$; 6) $xy'' = y' + x^2$; 7) $yy'' = y'^2$; 8) $y'^2 + yy'' = yy'$;
- 9) $x^2 yy'' = (y - xy')^2$; 10) $xyy'' + xy'^2 = 2yy'$, $x \neq 0$; 11) $xy'' = y' \ln \frac{y'}{x}$;
- 12) $4x^2 y^3 y'' = x^2 - y^4$; 13) $x^4 y''' + 2x^3 y'' = 1$;
- 14) $x^2 yy'' - 5xyy' - x^2 y'^2 = 6y^2$, $x \neq 0$; 15) $(y'')^4 + y'' - x = 0$;
- 16) $yy'' + 4y' = y'^2$; 17) $4yy'^2 y'' = y'^4 + 3$; 18) $yy'' - y'^2 + y^2 \sin x = 0$;
- 19) $2yy' y'' - y''^2 = y'^3$; 20) $xyy'' - yy' = 2xy'^2$, $x \neq 0$;
- 21) $x^2 yy'' + x^2 y'^2 - 5xyy' + 4y^2 = 0$, $x \neq 0$; 22) $y' y''' = 3y''^2$;
- 23) $xy^{(5)} - y^{(4)} = 0$; 24) $4y' + y''^2 = 4xy''$.

2. Знайти розв'язок рівняння при заданих початкових умовах:

- 1) $y''(x^2 + 1) - 2xy' = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$;

- 2) $y'''(x-1) - y'' = 0, y(2) = 2, y'(2) = 1, y''(2) = 1;$
- 3) $y'' = y' \ln y', y(0) = 0, y'(0) = 1;$
- 4) $yy'' = (1-x)y'^2, y(1) = 1, y'(1) = 2;$
- 5) $3y'y'' = e^y, y(-3) = 0, y'(-3) = 1;$
- 6) $2y^2y'' + y'^2 = 4, y(0) = 1, y'(0) = -2;$
- 7) $4xyy'' - 4yy' + y'^2 = 0, y(-1) = 1, y'(-1) = -4;$
- 8) $xy'' - y' - x^2yy' = 0, y(1) = 0, y'(1) = 2;$
- 9) $yy'' - y'^2 + y'^3 = 0, y(1) = 1, y'(1) = 1;$
- 10) $y''' = 3yy', y(0) = 1, y'(0) = 1, y''(0) = \frac{3}{2};$
- 11) $xy'' = y' + 2x^2yy', y(1) = 2, y'(1) = 4;$
- 12) $y''' = x \ln x, y(1) = 0, y'(1) = 0, y''(1) = -\frac{1}{4};$
- 13) $y'' + y' + 2 = 0, y(0) = 0, y'(0) = -2;$
- 14) $y'' = e^{2y}, y(0) = 0, y'(0) = 1;$
- 15) $y'' + (2 + 4y^2)y'^3 - 2yy'^2 = 0, y(0) = 1, y'(0) = \frac{1}{2}.$

3. Знайти закон руху матеріальної точки масою m вздовж прямої OA під дією відштовхуючої сили, яка обернено пропорційна третьому степеню відстані x точки M від нерухомого центра.

4. Знайти рівняння лінії, радіус кривини якої дорівнює одиниці.

5. У моторного човна, який рухається прямолінійно зі швидкістю $v_0 = 5$ м/с, вимикають мотор. При русі човен зазнає опору води, сила якого пропорційна квадрату швидкості з коефіцієнтом пропорційності $k = \frac{m}{50}$, де m – маса човна. Через який час швидкість човна зменшиться вдвоє і який шлях пройде човен за цей час?

6. Куля входить у дерев'яний брус товщиною 12 см зі швидкістю 200 м/с, а вилітає з нього, пробивши його, зі швидкістю 60 м/с. Куля зазнає опору деревини, сила якого пропорційна квадрату швидкості руху. Знайти час проходження кулі через брус.

Відповіді

1. 1) $y = -\frac{5}{6x} + 2 \cos x + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3;$ 2) $y = \frac{x^2}{2} (\ln x - \frac{3}{2} + C_1 x + C_2);$ 3) $y = \frac{x^2}{2} \ln x - C_1 x^2 + C_2 x + C_3;$ 4) $y = \frac{x^6}{360} + 3 \sin x +$

$$\begin{aligned}
& +C_1 \frac{x^3}{6} + C_2 \frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4; 5) y = -(x + C_1) \ln |x + C_1| + C_2 x + C_3; \\
& 6) y = \frac{x^3}{3} + C_1 x^2 + C_2; 7) y \ln |y| + x + C_1 y + C_2 = 0, \\
& y = C; 8) \frac{y^2}{2} = C_1 e^x + C_2; 9) y = C_2 x e^{-\frac{C_1}{x}}; 10) y = \\
& = C_2 \sqrt{3C_1 + 2x^3}; 11) y = (C_1 x - C_1^2) e^{\frac{x}{C_1} + 1} + C_2; 12) 4C_1 y^2 = 4x + \\
& + x(C_1 \ln C_2 x)^2; 13) y = C_1 \ln |x| + C_2 x + C_3 - \frac{1}{2x}; 14) y = \frac{C_1}{x} e^{C_2 x^6}; \\
& 15) \begin{cases} y = \frac{16}{5} p^9 + \frac{7}{15} p^6 + \frac{1}{6} p^3 + C_1 x + C_2, \\ x = p + p^4; \end{cases} , p = y''; 16) C_1 y + 4 = \\
& = C_2 e^{C_1 x}, y = 4x + C, y = 0; 17) C_1 y = \left(\frac{3}{4} C_1 x + C_2\right)^{4/3} + 3; \\
& 18) \ln(C_2 y) = C_1 x + \sin x, y = 0; 19) 2y = C_2 e^{C_1 x} + C_1, \\
& y(x+C)+2=0; 20) y(C_1+C_2 x^2)=1, y=0; 21) y^2 = C_1 x^4 + C_2 x^2; \\
& 22) (y + C_1)^2 = C_2 x + C_3, y = C_1 x + C_2; 23) y = C_1 x^5 / 120 + \\
& C_2 x^3 / 6 + C_3 x^2 / 2 + C_4 x + C_5; 24) y = C_1 x(x - C_1) + C_2, y = \frac{x^3}{3} + C_3. \\
& \mathbf{2.} 1) y = x^3 + 3x + 1; 2) y = \frac{1}{6}(x - 1)^3 + \frac{1}{2}x + \frac{5}{6}; 3) y = x; \\
& 4) x \ln y = 2(x - 1); 5) x^3 e^y + 27 = 0; 6) y = 1 - 2x; 7) y = \\
& = (2x + 1)^2; 8) y = 2 \operatorname{tg} \frac{x^2 - 1}{2}; 9) y - x = 2 \ln |y|; 10) y = \frac{4}{(x - 2)^2}; \\
& 11) \frac{1}{y} = 1 - \frac{x^2}{2}; 12) y = \frac{x^4}{24} \ln x - \frac{13}{288} x^4 + \frac{5}{36} x - \frac{3}{32}; 13) y = -2x; \\
& 14) y = -\ln |x - 1|; 15) y = \sqrt{x + 1}.
\end{aligned}$$

3. Згідно з другим законом динаміки $m \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{k}{x^3}$, де k – коефіцієнт пропорційності, $x(t)$ – відстань від рухомої точки до нерухомого центра в момент часу t . Зробимо очевидні перетворення, а потім зінтегруємо:

$$2x' x'' dt = 2a^2 x' \frac{dt}{x^3}, \quad d(x')^2 = a^2 d\left(-\frac{1}{x^2}\right),$$

$$x'^2 = a^2 \left(-\frac{1}{x^2} + \frac{1}{C_1}\right), \quad x' = \pm \frac{a}{\sqrt{C_1}} \frac{\sqrt{x^2 - C_1}}{x},$$

$$\frac{dx}{dt} = \pm \frac{a}{\sqrt{C_1}} \frac{\sqrt{x^2 - C_1}}{x}, \quad x^2 - C_1 = \frac{a^2}{C_1} (t + C_2)^2,$$

$$a^2 = \frac{k}{m}.$$

$$4. R = \frac{\sqrt{(1+y'^2)^3}}{y''}, (x+C_1)^2 + (y+C_2)^2 = 1.$$

$$5. ms''(t) = -\frac{m}{50}(s'(t))^2, s(0) = 0, s'(0) = v_0 = 5 \text{ м/с}; s(t) = 50 \ln \frac{t+10}{10}, t_0 = 10 \text{ с}, s_1 = s(10) \approx 34,5 \text{ м}.$$

6. Згідно з другим законом динаміки

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2,$$

де $x(t)$ – шлях, пройдений кулею в брусі за час t . Загальний розв'язок рівняння $x(t) = \frac{m}{k} \ln \left(\frac{k}{m}t - C_1 \right) + C_2$. Сталі C_1 і C_2 знаходимо з початкових умов $x(0) = 0, x'(0) = 200 \text{ м/с}$, $C_1 = -\frac{1}{200}, C_2 = \frac{m}{k} \ln 200$. Тому $x(t) = \frac{m}{k} \ln \left(200 \frac{k}{m}t + 1 \right)$ або $t = \frac{m}{200k} \left(e^{\frac{kx}{m}} - 1 \right)$. Коефіцієнт пропорційності знаходимо з умови, що при $x = 12 \text{ см} = 0,12 \text{ м}, x'(t_0) = 60 \text{ м/с}$. Тоді $e^{\frac{k}{m}} = \left(\frac{10}{3} \right)^{\frac{25}{3}}, k = \frac{m}{0,12} \ln \frac{10}{3} \approx 10,08m$. Отже,

$$t_0 = \frac{m}{200 \cdot 10,08m} \left(\left(\frac{10}{3} \right)^{\frac{25}{3} \cdot 0,12} - 1 \right) = \frac{1}{2006} \left(\frac{10}{3} - 1 \right) \approx 0,00114 \text{ с}.$$

Розділ 3

Лінійні диференціальні рівняння вищих порядків

Багато задач математики, механіки, фізики, хімії, економіки та інших наук приводять до лінійних рівнянь. У §4 вивчено лінійні диференціальні рівняння першого порядку. У цьому розділі розглянемо теорію лінійних диференціальних рівнянь вищих порядків.

§ 10. Означення та загальні властивості

Лінійним диференціальним рівнянням n -го порядку називається рівняння, яке лінійне відносно невідомої функції та її похідних, і, отже, має вигляд

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = g(x). \quad (1)$$

У ньому a_0, a_1, \dots, a_n і g є заданими неперервними функціями на проміжку X , зокрема, вони можуть бути сталими або й нулями. Якщо рівняння (1) має порядок n , то коефіцієнт $a_0(x) \neq 0, x \in X$. Поділивши обидві частини рівняння (1) на $a_0(x) \neq 0$ і ввівши позначення $p_i(x) := \frac{a_i(x)}{a_0(x)}, i \in \{1, \dots, n\}$,

$\varphi(x) := \frac{g(x)}{a_0(x)}$, зведемо його до вигляду

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = \varphi(x), \quad (2)$$

де p_1, \dots, p_n і φ – відомі неперервні функції на проміжку X .

Рівняння (2) називається **неоднорідним лінійним диференціальним рівнянням** або **рівнянням з правою частиною**. Якщо ж права частина або вільний член рівняння φ дорівнює нулю на X , то рівняння називається **лінійним однорідним** і воно має вигляд

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0. \quad (3)$$

Рівняння (3) називається **однорідним рівнянням, що відповідає** неоднорідному рівнянню (2).

Запишемо рівняння (2) у вигляді

$$y^{(n)} = \varphi(x) - \sum_{i=1}^n p_i(x)y^{(n-i)} =: f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}). \quad (4)$$

Очевидно, що рівняння (4) є частинним випадком рівняння

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}), \quad (5)$$

яке розглядалося в попередньому розділі. Це дозволяє застосувати теорему Коші про існування і єдиність розв'язку задачі Коші, яку наведено в §8. Оскільки $\frac{\partial f}{\partial y} = -p_n$, $\frac{\partial f}{\partial y'} = -p_{n-1}$, \dots , $\frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}} = -p_1$, а функції $p_i(x)$, $i \in \{1, \dots, n\}$, є неперервними на проміжку X , то вони обмежені на будь-якому відрізку $[\alpha, \beta] \subset X$. Звідси випливає, що правильною для лінійного неоднорідного рівняння (2) є така **теорема Коші**: якщо коефіцієнти p_1, \dots, p_n і функція φ неперервні на проміжку X , то які б не були початкові умови $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$, \dots , $y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$, де $x_0 \in X$, існує єдиний розв'язок рівняння (2), який задовольняє задані початкові умови.

Для рівняння (5) розв'язок задачі Коші існує, взагалі кажучи, в деякому околі точки x_0 , а для лінійного рівняння (2) цей розв'язок існує на всьому проміжку X , де неперервні коефіцієнти p_1, \dots, p_n і права частина φ .

Відзначимо деякі загальні властивості лінійних диференціальних рівнянь [10]: 1) рівняння (2) залишається лінійним при заміні незалежної змінної $x = \psi(t)$, де ψ – довільна неперервно диференційовна n разів функція, похідна якої $\psi'(t)$ не перетворюється в нуль на проміжку T , який відповідає зміні x на проміжку X ; 2) рівняння (2) залишається лінійним при лінійному перетворенні залежної змінної $y = a(x)z + b(x)$, де функції a і b мають неперервні похідні до порядку n включно і $a(x) \neq 0$ для $x \in X$.

§ 11. Загальна теорія лінійних однорідних рівнянь

Розглянемо лінійне однорідне рівняння n -го порядку

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_n(x)y = 0, \quad (1)$$

де p_1, \dots, p_n – неперервні функції на проміжку X . Запишемо його у вигляді

$$L(y) = 0, \quad (2)$$

де

$$L(y) := y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_n(x)y$$

називається **лінійним диференціальним виразом**.

Лінійний диференціальний вираз має такі властивості:

1) Для довільних функцій y_1 і y_2 , що мають n неперервних похідних, правильна рівність

$$L(y_1 + y_2) = L(y_1) + L(y_2). \quad (3)$$

◀ Маємо

$$\begin{aligned} L(y_1 + y_2) &= (y_1 + y_2)^{(n)} + p_1(x)(y_1 + y_2)^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x)(y_1 + y_2)' + \\ &+ p_n(x)(y_1 + y_2) = (y_1^{(n)} + p_1(x)y_1^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x)y_1' + p_n(x)y_1) + \\ &+ (y_2^{(n)} + p_1(x)y_2^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x)y_2' + p_n(x)y_2) = L(y_1) + L(y_2). \quad \blacktriangleright \end{aligned}$$

Цю властивість доведено для суми двох функцій, але вона, очевидно, поширюється на суму будь-якої скінченної кількості доданків.

2) Для будь-якої n разів диференційовної функції y та довільної сталої C

$$L(Cy) = CL(y), \quad (4)$$

тобто сталий множник можна винести за знак лінійного виразу.

◀ Справді,

$$L(Cy) = (Cy)^{(n)} + p_1(x)(Cy)^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x)(Cy)' + p_n(x)(Cy) =$$

$$= C(y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y) = CL(y). \blacktriangleright$$

Наслідком властивостей 1) і 2) є рівність

$$L\left(\sum_{k=1}^n C_k y_k\right) = \sum_{k=1}^n C_k L(y_k),$$

де $C_k, k \in \{1, \dots, n\}$, – сталі.

За допомогою властивостей лінійного диференціального виразу L доведемо теореми про розв'язки лінійного однорідного рівняння.

Теорема 1. *Якщо y_1 і y_2 – два розв'язки рівняння (2), то $y_1 + y_2$ так само є розв'язком цього рівняння.*

◀ Оскільки y_1 і y_2 є розв'язками рівняння (2), то $L(y_1) = 0$ і $L(y_2) = 0$. Згідно з (3) $L(y_1 + y_2) = L(y_1) + L(y_2)$, а тому $L(y_1 + y_2) = 0$, тобто $y = y_1 + y_2$ є розв'язком рівняння (2). ▶

Теорема 2. *Якщо y_1 є розв'язком лінійного однорідного рівняння (2), то і Cy_1 , де C – довільна стала, є розв'язком того самого рівняння.*

◀ Згідно з умовою $L(y_1) = 0$. Тоді, скориставшись рівністю (4), матимемо $L(Cy_1) = CL(y_1) = C \cdot 0 = 0$, тобто $y = Cy_1$ є розв'язком рівняння (2). ▶

З теорем 1 і 2 випливає, що коли y_1, \dots, y_n є розв'язками рівняння (2), то й функція

$$y = C_1 y_1 + \dots + C_n y_n, \quad (5)$$

де C_1, \dots, C_n – довільні сталі, є також розв'язком цього рівняння.

Теорема 3. *Якщо лінійне однорідне рівняння (1) з дійсними коефіцієнтами $p_k, k \in \{1, \dots, n\}$, має комплексний розв'язок $y = u + iv$, то дійсна частина цього розв'язку u і його уявна частина v окремо є розв'язками цього ж рівняння.*

◀ Згідно з умовою теореми маємо $L(u + iv) = 0$. Треба довести, що $L(u) = 0$ і $L(v) = 0$.

Скориставшись властивостями 1) і 2) диференціального виразу L , дістанемо

$$L(u + iv) = L(u) + iL(v) = 0,$$

звідки випливає, що $L(u) = 0$ і $L(v) = 0$, оскільки комплексна функція дійсної змінної перетворюється тотожно в нуль тоді й тільки тоді, коли її дійсна та уявна частини тотожно дорівнюють нулю. ►

Зауваження. Ми застосували властивості 1) і 2) диференціального виразу L до комплексної функції $u + iv$ дійсної змінної, що допустимо, оскільки при доведенні властивостей 1) і 2) використовували лише властивості похідних $(Cy)' = Cy'$, де C – стала, і $(y_1 + y_2)' = y_1' + y_2'$, які правильні й для комплексних функцій дійсної змінної.

Оскільки загальний розв'язок рівняння n -го порядку містить n довільних сталих C_1, \dots, C_n , то виникає запитання, коли вираз, який визначається рівністю (5), буде загальним розв'язком лінійного однорідного рівняння (2). Як показує наступний приклад останнє не завжди має місце.

Приклад 1. Довести, що для рівняння

$$y'' + 4y = 0$$

функція $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$, де $y_1 = \sin 2x$, $y_2 = 10 \sin 2x$ – частинні розв'язки рівняння, C_1, C_2 – довільні сталі, не є загальним розв'язком.

◀ Очевидно, що для заданого рівняння виконуються умови теореми Коші про існування і єдиність розв'язку при довільних початкових умовах. Якщо б вираз $y = C_1 \sin 2x + C_2 10 \sin 2x$ був загальним розв'язком заданого рівняння, то з нього можна було б одержати будь-який частинний розв'язок, вибравши відповідним чином сталі C_1 і C_2 . Цього не можна зробити, наприклад, для функції $y = \cos 2x$, яка є розв'язком рівняння $y'' + 4y = 0$ і задовольняє початкові умови $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$. Легко бачити, що цей розв'язок не можна одержати з лінійної комбінації $y = C_1 \sin 2x + C_2 10 \sin 2x$, задовольняючи зазначені вище початкові умови, бо, наприклад, уже перша умова $y(0) = 1$ для функції y не виконується при жодних значеннях C_1 і C_2 : $C_1 \sin 0 + C_2 10 \sin 0 \neq 1$. ►

Питання про те, які умови повинні задовольняти частинні розв'язки, щоб вираз (5) був загальним розв'язком однорідно-

го рівняння (2), розв'язується за допомогою поняття **лінійної незалежності** функцій.

Функції y_1, \dots, y_n , що визначені на проміжку X , називаються **лінійно залежними** на цьому проміжку, якщо існують сталі $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, які не всі дорівнюють нулю, тобто $\alpha_1^2 + \dots + \alpha_n^2 \neq 0$, і такі, що

$$\alpha_1 y_1(x) + \dots + \alpha_n y_n(x) = 0, \quad x \in X. \quad (6)$$

Якщо не існує таких сталих $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, де $\alpha_1^2 + \dots + \alpha_n^2 \neq 0$, щоб рівність (6) справджувалась для всіх $x \in X$, то функції y_1, \dots, y_n називаються **лінійно незалежними** на проміжку X .

Приклад 2. Довести, що функції $1, x, \dots, x^n$ лінійно незалежні на довільному відрізку $[a, b] \subset \mathbb{R}$.

◀ Справді, рівність

$$\alpha_1 + \alpha_2 x + \dots + \alpha_{n+1} x^n = 0, \quad x \in [a, b], \quad (7)$$

можлива лише, коли всі $\alpha_i = 0$, $i \in \{1, \dots, n+1\}$. Якщо хоча б одне $\alpha_i \neq 0$, то в лівій частині (7) стояв би многочлен степеня не вище n , який може мати не більше ніж n різних коренів, і, отже, перетворюється в нуль не більше як в n точках розглядуваного відрізка, а не на всьому відрізку згідно з рівністю (7). ▶

Приклад 3. Довести, що функції $e^{k_1 x}, \dots, e^{k_n x}$, де $k_i \neq k_j$, $i \neq j$, лінійно незалежні на довільному відрізку $[a, b] \subset \mathbb{R}$.

◀ Припустимо, що задані функції лінійно залежні. Тоді

$$\alpha_1 e^{k_1 x} + \dots + \alpha_n e^{k_n x} = 0, \quad x \in [a, b], \quad (8)$$

де принаймні одне $\alpha_i \neq 0$, наприклад, $\alpha_n \neq 0$. Поділивши тотожність (8) на $e^{k_1 x}$ і продиференціювавши, дістанемо

$$\alpha_2 (k_2 - k_1) e^{(k_2 - k_1)x} + \dots + \alpha_n (k_n - k_1) e^{(k_n - k_1)x} = 0. \quad (9)$$

Далі, поділимо тотожність (9) на $e^{(k_2 - k_1)x}$ і продиференціюємо одержану рівність. Тоді матимемо, що

$$\alpha_3 (k_3 - k_1)(k_3 - k_2) e^{(k_3 - k_2)x} + \dots +$$

$$+\alpha_n(k_n - k_1)(k_n - k_2)e^{(k_n - k_2)x} = 0, x \in [a; b].$$

Продовживши цей процес $n - 1$ разів, отримаємо

$$\alpha_n(k_n - k_1)(k_n - k_2) \dots (k_n - k_{n-1})e^{(k_n - k_{n-1})x} = 0, x \in [a, b].$$

Остання рівність неможлива, оскільки $\alpha_n \neq 0$ згідно з припущенням, а $k_i \neq k_j$, коли $i \neq j$.

Зауважимо, що $k_i, i \in \{1, \dots, n\}$, можуть бути й комплексними. ►

Можна також довести, що функції

$$\begin{aligned} & e^{k_1 x}, x e^{k_1 x}, \dots, x^{n_1} e^{k_1 x}, \\ & \dots\dots\dots \\ & e^{k_p x}, x e^{k_p x}, \dots, x^{n_p} e^{k_p x}, \end{aligned}$$

де $k_i \neq k_j, i \neq j$, лінійно незалежні на довільному відрізку $[a, b] \subset \mathbb{R}$.

Зауваження. У випадку двох функцій маємо простіший критерій лінійної незалежності: функції y_1 і y_2 є лінійно незалежними на проміжку X , якщо їхнє відношення $\frac{y_1}{y_2}$ не дорівнює тотожно сталій, якщо ж їхнє відношення дорівнює тотожно сталій, то вони лінійно залежні.

Нехай є n функцій y_1, \dots, y_n , які визначені та мають неперервні похідні до $(n - 1)$ -го порядку на проміжку X . Визначник

$$W_{y_1, y_2, \dots, y_n}(x) := W(x) := \begin{vmatrix} y_1(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}, \quad (10)$$

$$x \in X,$$

називається **визначником Вронського** цих функцій.

Теорема 3. Якщо функції y_1, \dots, y_n лінійно залежні на X , то їх визначник Вронського тотожно дорівнює нулю на X .

◀ Згідно з умовою правильна рівність (6), де $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_n^2 \neq 0$. Продиференціювавши тотожність (6) $n - 1$ разів, одержимо систему рівнянь

$$\begin{cases} \alpha_1 y_1(x) + \dots + \alpha_n y_n(x) = 0, \\ \alpha_1 y_1'(x) + \dots + \alpha_n y_n'(x) = 0, \\ \dots, \dots, \dots, \\ \alpha_1 y_1^{(n-1)}(x) + \dots + \alpha_n y_n^{(n-1)}(x) = 0, \end{cases} \quad x \in X. \quad (11)$$

Це лінійна однорідна система відносно α_i , $i \in \{1, \dots, n\}$, яка має ненульові розв'язки, бо не всі α_i , $i \in \{1, \dots, n\}$, дорівнюють нулю за припущенням. Отже, визначник системи (11), який є визначником Вронського $W(x)$ дорівнює нулю в кожній точці x з проміжку X . ▶

Якщо y_1, \dots, y_n є частинними розв'язками однорідного рівняння (2), то правильна обернена й до того ж сильніша теорема.

Теорема 4. Якщо лінійно незалежні функції y_1, \dots, y_n є розв'язками лінійного однорідного рівняння (2) з неперервними на проміжку X коефіцієнтами p_i , $i \in \{1, \dots, n\}$, то їх визначник Вронського $W(x)$ не може перетворитися в нуль в жодній точці x розглядуваного проміжку.

◀ Припустимо, що в деякій точці $x_0 \in X$ визначник Вронського $W(x_0) = 0$. Виберемо сталі α_i , $i \in \{1, \dots, n\}$, так, щоб задовольнялася система рівнянь

$$\begin{cases} \alpha_1 y_1(x_0) + \dots + \alpha_n y_n(x_0) = 0, \\ \alpha_1 y_1'(x_0) + \dots + \alpha_n y_n'(x_0) = 0, \\ \dots, \dots, \dots, \\ \alpha_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + \dots + \alpha_n y_n^{(n-1)}(x_0) = 0 \end{cases} \quad (12)$$

і щоб не всі α_i , $i \in \{1, \dots, n\}$, дорівнювали нулю. Цей вибір можливий, оскільки визначник лінійної однорідної системи (12) n рівнянь з n невідомими дорівнює $W(x_0) = 0$, і, отже, існує нетривіальний розв'язок цієї системи. При такому виборі α_i , $i \in \{1, \dots, n\}$, лінійна комбінація

$$y(x) = \alpha_1 y_1(x) + \dots + \alpha_n y_n(x), \quad x \in X,$$

буде розв'язком лінійного однорідного рівняння (2), який задовольняє, згідно з рівняннями системи (12), нульові початкові умови

$$y(x_0) = 0, y'(x_0) = 0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = 0. \quad (13)$$

Такі початкові умови, очевидно, задовольняє тривіальний розв'язок $y(x) = 0, x \in X$, рівняння (2) і, як випливає з теореми про єдиність розв'язку, початкові умови (13) задовольняє тільки цей розв'язок. Отже, $\alpha_1 y_1(x) + \dots + \alpha_n y_n(x) = 0, x \in X$, і розв'язки y_1, \dots, y_n , всупереч умові теореми, лінійно залежні. ►

Теореми 3 і 4 можна об'єднати так: *визначник Вронського, складений для системи n розв'язків лінійного рівняння n -го порядку (2), або тотожно дорівнює нулю, або не перетворюється в нуль у жодній точці того інтервалу, де коефіцієнти рівняння неперервні.*

Будь-яка система n лінійно незалежних частинних розв'язків лінійного однорідного рівняння (2) n -го порядку називається **фундаментальною системою розв'язків**.

З теореми 4 випливає, що функції, які утворюють фундаментальну систему, лінійно незалежні в усякому проміжку $X_1 \subset X$. Це випливає з того, що визначник Вронського не перетворюється в нуль.

Доведено [10], що для кожного лінійного однорідного рівняння (2) з неперервними коефіцієнтами $p_i, i \in \{1, \dots, n\}$, на проміжку X , існує фундаментальна система розв'язків.

Теорема 5. *Якщо y_1, \dots, y_n утворюють фундаментальну систему розв'язків лінійного однорідного рівняння (2), то загальний розв'язок цього рівняння має вигляд*

$$y = C_1 y_1 + \dots + C_n y_n, \quad (14)$$

де C_1, \dots, C_n – довільні сталі.

◀ Згідно з означенням, вираз, до якого входять n довільних сталих, називається загальним розв'язком, якщо з нього при певних значеннях сталих одержується будь-який частинний розв'язок. Раніше було зазначено, що будь-який частинний

Можна застосувати формулу Лувілля для знаходження загального розв'язку рівняння другого порядку

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0,$$

якщо відомий один ненульовий частинний розв'язок y_1 цього рівняння.

Нехай y – будь-який розв'язок цього рівняння, відмінний від y_1 . Складемо визначник $W_{y_1, y}$ і запишемо його у вигляді (17), де $W(x_0) = C$, $C \in \mathbb{R}$:

$$\begin{vmatrix} y_1 & y \\ y_1' & y' \end{vmatrix} = Ce^{-\int p_1(x)dx}.$$

Тоді

$$y_1 y' - y_1' y = Ce^{-\int p_1(x)dx}$$

або

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{y}{y_1} \right) = \frac{1}{y_1^2} Ce^{-\int p_1(x)dx}.$$

Звідки, зінтегрувавши, одержимо загальний розв'язок

$$y = y_1 \left(\int \frac{Ce^{-\int p_1(x)dx}}{y_1^2} dx + C_1 \right), \{C, C_1\} \subset \mathbb{R}. \quad (18)$$

Приклад 5. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$xy'' - xy' + y = 0, \quad x \neq 0,$$

якщо відомий частинний розв'язок $y_1 = x$.

◀ Скористаємося формулою (18), в якій візьмемо $p_1 = -1$, $y_1 = x$. Тоді

$$y = x \left(\int \frac{Ce^{-\int (-1)dx}}{x^2} dx + C_1 \right)$$

або

$$y = x \left(C \int \frac{e^x}{x^2} dx + C_1 \right), \quad x \neq 0, \{C, C_1\} \subset \mathbb{R}. \blacktriangleright$$

Розв'яжемо задачу про відновлення диференціального рівняння за відомою його фундаментальною системою розв'язків.

Нехай задано лінійно незалежну систему функцій y_1, \dots, y_n на інтервалі (a, b) . Треба побудувати диференціальне рівняння n -го порядку, для якого ця система є фундаментальною системою розв'язків. З цією метою прирівняємо до нуля визначник, в якому через y позначимо шукану функцію:

$$\begin{vmatrix} y_1 & \dots & y_n & y \\ y_1' & \dots & y_n' & y' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n)} & \dots & y_n^{(n)} & y^{(n)} \end{vmatrix} = 0. \quad (19)$$

Розкладаючи цей визначник за елементами останнього стовпчика, переконуємося в тому, що рівність (19) є лінійним однорідним диференціальним рівнянням n -го порядку відносно функції y . Підставляючи замість y функцію y_i , $i \in \{1, \dots, n\}$, дістаємо визначник з двома однаковими стовпчиками. Він тотожно дорівнює нулю, а тому y_1, \dots, y_n є частинними розв'язками рівняння (19).

Коефіцієнт при $y^{(n)}$ є визначником Вронського $W(x)$, а він, як відомо, не перетворюється в нуль на інтервалі (a, b) . Поділивши на нього обидві частини рівняння (19), отримаємо рівняння n -го порядку із старшим коефіцієнтом, що дорівнює одиниці, а за доведеним таке рівняння однозначно визначається фундаментальною системою розв'язків. Отже, задачу розв'язано.

Приклад 6. Скласти рівняння, фундаментальною системою розв'язків якого є функції $y_1 = x^2$, $y_2 = e^x$.

◀ Згідно з формулою (19) маємо

$$\begin{vmatrix} x^2 & e^x & y \\ 2x & e^x & y' \\ 2 & e^x & y'' \end{vmatrix} = e^x \begin{vmatrix} x^2 & 1 & y \\ 2x & 1 & y' \\ 2 & 1 & y'' \end{vmatrix} = 0.$$

Якщо розкласти визначник за елементами третього стовп-

чика, то одержимо

$$e^x \left(\begin{vmatrix} x^2 & 1 \\ 2x & 1 \end{vmatrix} y'' - \begin{vmatrix} x^2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} y' + \begin{vmatrix} 2x & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} y \right) = 0$$

або

$$(x^2 - 2x)y'' - (x^2 - 2)y' + 2(x - 1)y = 0. \blacktriangleright$$

Вправи

1. Знайти визначник Вронського для системи функцій:

- 1) $x, \frac{1}{x}$; 2) e^{-x}, xe^{-x} ; 3) $2, \cos x, \cos 2x$; 4) $e^{-3x} \sin 2x, e^{-3x} \cos 2x$.

2. Дослідити, чи є лінійно незалежними наведені функції в їхній області визначення:

- 1) e^x, xe^x, x^2e^x ; 2) $\sin x, \cos x, \cos 2x$; 3) $1, \sin x, \cos 2x$; 4) $5, \cos^2 x, \sin^2 x$.

3. Зінтегрувати рівняння, якщо відомий один його частинний розв'язок y_1 :

- 1) $y'' + \frac{2}{x}y' + y = 0, y_1 = \frac{\sin x}{x}$; 2) $y'' \sin^2 x = 2y, y_1 = \operatorname{ctg} x$;
 3) $x^2(\ln x - 1)y'' - xy' + y = 0, y_1 = x$;
 4) $y'' + (\operatorname{tg} x - 2 \operatorname{ctg} x)y' + 2 \operatorname{ctg}^2 x \cdot y = 0, y_1 = \sin x$;
 5) $(1 + x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0, y_1 = x$.

4. Скласти лінійне однорідне рівняння, якщо задана його фундаментальна система розв'язків:

- 1) e^{-x}, e^x ; 2) $\sin 3x, \cos 3x$; 3) $1, x$; 4) e^x, xe^x, x^2e^x ; 5) x, x^2, x^3 ; 6) $e^{-x} \sin 2x, e^{-x} \cos 2x, 1$.

Відповіді

- 1.** 1) $-\frac{2}{x}$; 2) e^{-2x} ; 3) $-8 \sin^3 x$; 4) $-2e^{-6x}$.

- 2.** 1) Так; 2) так; 3) так; 4) ні.

- 3.** 1) $y = C_1 \frac{\sin x}{x} + C_2 \frac{\cos x}{x}$; 2) $y = C_1 + (C_1 - C_2 x) \operatorname{ctg} x$; 3) $y = C_1 x + C_2 \ln x$; 4) $y = C_1 \sin x + C_2 \sin 2x$; 5) $y = C_1(x^2 - 1) + C_2 x$.

- 4.** 1) $y'' - y = 0$; 2) $y'' + 9y = 0$; 3) $y'' = 0$; 4) $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$; 5) $2x^3 y''' - 6x^2 y'' + 12xy' - 12y = 0$; 6) $y''' + 2y'' + 5y' = 0$.

§ 12. Лінійні неоднорідні рівняння

Розглянемо неоднорідне лінійне диференціальне рівняння n -го порядку вигляду

$$L(y) := y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f(x), \quad (1)$$

де p_1, \dots, p_n, f – неперервні функції на X , причому $f \neq 0$.

Однорідне лінійне рівняння з тими ж коефіцієнтами, але з правою частиною, що дорівнює нулю,

$$L(y) := y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0, \quad (2)$$

називається, як було зазначено вище, однорідним рівнянням, що відповідає неоднорідному рівнянню (1). Очевидно, що рівняння (1) і (2) не мають спільних розв'язків.

З двох основних властивостей лінійного диференціального виразу

$$L(Cy) = CL(y), \quad L(y_1 + y_2) = L(y_1) + L(y_2),$$

де C – стала, випливають відповідні властивості розв'язків рівняння (1).

1) Сума $\tilde{y} + y_1$ розв'язку \tilde{y} неоднорідного рівняння (1) і розв'язку y_1 відповідного однорідного рівняння (2) є розв'язком неоднорідного рівняння (1).

◀ Оскільки

$$L(\tilde{y} + y_1) = L(\tilde{y}) + L(y_1),$$

а $L(\tilde{y}) = f$, $L(y_1) = 0$, то

$$L(\tilde{y} + y_1) = f. \quad \blacktriangleright$$

2) Якщо y_k є розв'язком рівняння $L(y) = f_k$, $k \in \{1, \dots, m\}$, то $y = \alpha_1 y_1 + \dots + \alpha_m y_m$ є розв'язком рівняння

$$L(y) = \alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_m f_m,$$

де α_k , $k \in \{1, \dots, m\}$, – сталі.

◀ Згідно з властивостями лінійності виразу L , маємо

$$\begin{aligned} L(\alpha_1 y_1 + \dots + \alpha_m y_m) &= L(\alpha_1 y_1) + \dots + L(\alpha_m y_m) = \\ &= \alpha_1 L(y_1) + \dots + \alpha_m L(y_m). \end{aligned}$$

Оскільки $L(y_k) = f_k$, $k \in \{1, \dots, m\}$, то

$$L(\alpha_1 y_1 + \dots + \alpha_m y_m) = \alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_m f_m. \blacktriangleright$$

Ця властивість називається **принципом суперпозиції**.

3) Якщо рівняння $L(y) = f + ig$, де всі коефіцієнти p_k , $k \in \{1, \dots, n\}$, і функції f і g дійсні, має розв'язок $y = u + iv$, то його дійсна частина u та уявна частина v є відповідно розв'язками рівнянь

$$L(u) = f, \quad L(v) = g.$$

◀ Маємо

$$L(u + iv) = f + ig$$

або

$$L(u) + iL(v) = f + ig.$$

Звідси випливає, що рівні окремо дійсні частини $L(u) = f$ та уявні частини $L(v) = g$. ▶

Теорема 1. Загальний розв'язок рівняння (1) з неперервними на проміжку X коефіцієнтами p_i , $i \in \{1, \dots, n\}$, і правою частиною f дорівнює сумі загального розв'язку відповідного однорідного рівняння (2) і будь-якого частинного розв'язку неоднорідного рівняння (1).

◀ Нехай \tilde{y} – частинний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння (1), тобто

$$L(\tilde{y}) = f. \quad (3)$$

Введемо нову шукану функцію z , покладаючи

$$y = \tilde{y} + z. \quad (4)$$

Підставляючи вираз (4) у рівняння (1), маємо згідно з властивістю лінійного диференціального виразу L , що

$$L(\tilde{y}) + L(z) = f.$$

Звідси, враховуючи рівність (3), дістаємо

$$L(z) = 0$$

– однорідне рівняння, що відповідає рівнянню (1).

Припустимо, що y_1, \dots, y_n – фундаментальна система розв’язків однорідного рівняння (2), що відповідає рівнянню (1). Тоді загальний розв’язок рівняння (2) має вигляд

$$C_1 y_1 + \dots + C_n y_n.$$

Підставляючи цей вираз замість z у формулу (4), дістаємо загальний розв’язок лінійного неоднорідного рівняння (1):

$$y = C_1 y_1 + \dots + C_n y_n + \tilde{y}. \quad (5)$$

Для доведення того, що формула (5) визначає загальний розв’язок рівняння (1), треба пересвідчитися, що підбором сталей $C_i, i \in \{1, \dots, n\}$, в (5) можна задовольнити довільно задані початкові умови

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}, \quad (6)$$

де $x_0 \in X$, а $y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}$ – будь-яка система дійсних чисел.

Задовольняючи виразом (5) початкові умови (6), дістаємо таку систему алгебраїчних рівнянь відносно невідомих C_1, \dots, C_n :

$$\begin{cases} C_1 y_1(x_0) + \dots + C_n y_n(x_0) + \tilde{y}(x_0) = y_0, \\ C_1 y'_1(x_0) + \dots + C_n y'_n(x_0) + \tilde{y}'(x_0) = y'_0, \\ \dots, \\ C_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + \dots + C_n y_n^{(n-1)}(x_0) + \tilde{y}^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}. \end{cases} \quad (7)$$

Система (7) має єдиний розв’язок, бо її визначник є визначником Вронського $W(x_0) \neq 0$. Отже, для C_1, \dots, C_n дістанемо цілком певні значення, і вираз (5) справді є загальним розв’язком рівняння (1). ►

Приклад 1. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y'' - 4y = 8x$$

та його частинний розв'язок, який задовольняє умови

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 6.$$

◀ Відповідне однорідне рівняння має вигляд

$$y'' - 4y = 0.$$

Безпосередньою підстановкою пересвідчуємося, що лінійно незалежними розв'язками цього рівняння є функції $y_1 = e^{-2x}$, $y_2 = e^{2x}$, а тому його загальний розв'язок має вигляд

$$y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{2x}.$$

Оскільки правою частиною лінійного неоднорідного рівняння є многочлен першого степеня, то шукатимемо частинний розв'язок цього рівняння у вигляді $\tilde{y} = Ax + B$. Тоді, підставивши цей вираз у неоднорідне рівняння, матимемо

$$-4Ax - 4B = 8x,$$

звідки випливає, що $A = -2$, $B = 0$. Отже, частинним розв'язком неоднорідного рівняння є $y = -2x$.

Згідно з теоремою 1 загальний розв'язок рівняння має вигляд

$$y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{2x} - 2x.$$

Знайдемо $y' = -2C_1 e^{-2x} + 2C_2 e^{2x} - 2$ і задовольнимо початкові умови:

$$0 = C_1 + C_2, \quad 6 = -2C_1 + 2C_2 - 2.$$

Звідси випливає, що $C_1 = -2$, $C_2 = 2$. Тому шуканий розв'язок задачі Коші $y = -3e^{-2x} + 2e^{2x} - 2$. ►

З викладеного вище випливає, що для розв'язання неоднорідного рівняння досить знати фундаментальну систему

розв'язків відповідного однорідного рівняння і частинний розв'язок неоднорідного рівняння.

Якщо підібрати частинний розв'язок неоднорідного рівняння (1) складно, але знайдено загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння (2)

$$y = C_1 y_1 + \dots + C_n y_n, \quad (8)$$

то можна знайти загальний розв'язок неоднорідного рівняння методом **варіації сталих**.

Функція (8) задовольняє рівняння (2) і, отже, не може задовольняти рівняння (1), якщо $C_i, i \in \{1, \dots, n\}$, – сталі. Поставимо собі за мету дістати розв'язок рівняння (1) у тій самій формі (8), де C_1, \dots, C_n будуть функціями $c_1(x), \dots, c_n(x)$ незалежної змінної x . При цьому ми вводимо n нових невідомих функцій, для визначення яких треба мати n рівнянь. Одне з них дістанемо з умови, що вираз (8) із змінними $c_i, i \in \{1, \dots, n\}$, задовольняє рівняння (1), а інші $n - 1$ рівнянь можна задати довільно. Задаватимемо їх так, щоб вирази для похідних від (8) мали найпростіший вигляд, тобто такий, який вони мали б при сталих $c_i, i \in \{1, \dots, n\}$. Виберемо $c_i, i \in \{1, \dots, n\}$, так, щоб друга сума в правій частині

$$y' = (c_1(x)y_1'(x) + \dots + c_n(x)y_n'(x)) + (c_1'(x)y_1(x) + \dots + c_n'(x)y_n(x))$$

дорівнювала нулю, тобто

$$c_1'(x)y_1(x) + \dots + c_n'(x)y_n(x) = 0$$

і, отже,

$$y' = c_1(x)y_1'(x) + \dots + c_n(x)y_n'(x),$$

тобто y' має такий самий вигляд, як і при сталих $c_i, i \in \{1, \dots, n\}$. У випадку другої похідної

$$y'' = (c_1(x)y_1''(x) + \dots + c_n(x)y_n''(x)) + (c_1'(x)y_1'(x) + \dots + c_n'(x)y_n'(x))$$

вимагатимемо перетворення в нуль другої суми

$$c_1'(x)y_1'(x) + \dots + c_n'(x)y_n'(x) = 0.$$

Продовжуючи аналогічно знаходити похідні до порядку $n - 1$ включно і прирівнюючи до нуля суми

$$c_1'(x)y_1^{(k)}(x) + \dots + c_n'(x)y_n^{(k)}(x) = 0, \quad (9)$$

$k \in \{0, 1, \dots, n - 2\}$, дістанемо

$$\left\{ \begin{array}{l} y = c_1(x)y_1(x) + \dots + c_n(x)y_n(x), \\ y' = c_1(x)y_1'(x) + \dots + c_n(x)y_n'(x), \\ y'' = c_1(x)y_1''(x) + \dots + c_n(x)y_n''(x), \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ y^{(n-1)} = c_1(x)y_1^{(n-1)}(x) + \dots + c_n(x)y_n^{(n-1)}(x), \\ y^{(n)} = (c_1(x)y_1^{(n)}(x) + \dots + c_n(x)y_n^{(n)}(x)) + \\ + (c_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + \dots + c_n'(x)y_n^{(n-1)}(x)). \end{array} \right. \quad (10)$$

В останній рівності не можна вимагати, щоб друга сума дорівнювала нулю, оскільки функції c_i , $i \in \{1, \dots, n\}$, вже підпорядковані $(n - 1)$ -й умові, а ще треба задовольнити рівняння (1). Підставляючи вирази (10), де c_1, \dots, c_n є невідомими функціями від x , у рівняння (1), одержимо

$$c_1(x)L(y_1) + \dots + c_n(x)L(y_n) + \\ c_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + \dots + c_n'(x)y_n^{(n-1)}(x) = f(x).$$

Оскільки $L(y_i) = 0$, $i \in \{1, \dots, n\}$, то звідси дістаємо останнє рівняння для визначення c_i , $i \in \{1, \dots, n\}$:

$$c_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + \dots + c_n'(x)y_n^{(n-1)}(x) = f(x). \quad (11)$$

Разом рівняння (9) і (11) утворюють систему рівнянь для знаходження невідомих $c_i'(x)$, $i \in \{1, \dots, n\}$. Визначник цієї системи є визначником Вронського $W(x_0) \neq 0$, а тому існує єдиний розв'язок цієї системи

$$c_i'(x) = \varphi_i(x), \quad i \in \{1, \dots, n\}.$$

Зінтегрувавши, одержимо

$$c_i(x) = \int \varphi_i(x)dx + \bar{C}_i, \quad i \in \{1, \dots, n\}. \quad (12)$$

Підставивши у (8) замість C_i відповідні вирази (12), одержимо загальний розв'язок неоднорідного рівняння (1).

Приклад 2. Розв'язати рівняння $y'' + y = \operatorname{tg}^2 x$, якщо загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$.

◀ Застосуємо метод варіації сталих. Шукатимемо загальний розв'язок заданого рівняння у вигляді

$$y = c_1(x) \cos x + c_2(x) \sin x$$

і складемо систему рівнянь, аналогічну до (9), (11). Маємо

$$\begin{cases} c_1'(x) \cos x + c_2'(x) \sin x = 0, \\ -c_1'(x) \sin x + c_2'(x) \cos x = \operatorname{tg}^2 x. \end{cases}$$

Звідси

$$c_1'(x) = -\operatorname{tg}^2 x \sin x, \quad c_2'(x) = \operatorname{tg}^2 x \cos x;$$

$$\begin{aligned} c_1(x) &= -\int \operatorname{tg}^2 x \sin x dx + \bar{C}_1 = \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} d \cos x + \bar{C}_1 = \\ &= -\frac{1}{\cos x} - \cos x + \bar{C}_1; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_2(x) &= \int \operatorname{tg}^2 x \cos x dx + \bar{C}_2 = \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos x} dx + \bar{C}_2 = \int \frac{dx}{\cos x} - \\ &- \int \cos x dx + \bar{C}_2 = \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| - \sin x + \bar{C}_2. \end{aligned}$$

Отже, шуканий загальний розв'язок заданого рівняння має вигляд

$$y = \left(-\frac{1}{\cos x} - \cos x + \bar{C}_1 \right) \cos x + \left(\ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| - \sin x + \bar{C}_2 \right) \sin x$$

або

$$y = \bar{C}_1 \cos x + \bar{C}_2 \sin x + \sin x \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| - 2. \blacktriangleright$$

Нехай, далі, відомий один частинний розв'язок y_1 однорідного рівняння (2), що відповідає рівнянню (1). Якщо застосувати підстановку $y = y_1 z$, то дістанемо рівняння, до якого явно не входить шукана функція z . Після цього, покладаючи $z' = u$, дістанемо лінійне неоднорідне рівняння порядку $n - 1$.

У випадку лінійного неоднорідного рівняння другого порядку

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = f(x), \quad (13)$$

якщо відомий частинний розв'язок y_1 відповідного однорідного рівняння, заміна

$$y = C_1 y_1 + y_1 \int \frac{z(x)}{y_1^2(x)} dx, \quad (14)$$

де z – нова невідома функція, зводить рівняння до лінійного неоднорідного рівняння першого порядку.

Приклад 3. Зінтегрувати рівняння

$$(x - 1)y'' - xy' + y = (x - 1)^2,$$

якщо відомий частинний розв'язок $y_1 = e^x$ відповідного однорідного рівняння.

◀ Зробимо заміну (14), в якій $y_1 = e^x$, тобто

$$y = C_1 e^x + e^x \int \frac{z(x)}{e^{2x}} dx, \quad C_1 \in \mathbb{R}.$$

Тоді

$$y' = C_1 e^x + e^x \int \frac{z(x)}{e^{2x}} dx + z(x)e^{-x},$$

$$y'' = C_1 e^x + e^x \int \frac{z(x)}{e^{2x}} dx + z'(x)e^{-x}.$$

Після підстановки цих виразів у задане рівняння, дістанемо лінійне рівняння першого порядку

$$(x - 1)z' - xz = e^x(x - 1)^2$$

або

$$\frac{dz}{dx} - \frac{x}{x - 1}z = e^x(x - 1).$$

Зінтегрувавши це рівняння, знайдемо

$$z = Ce^x(x-1) + e^x(x-1)^2$$

і тому

$$\begin{aligned} y &= C_1e^x + e^x \int (e^{-x}(x-1)^2 + Ce^{-x}(x-1))dx = \\ &= C_1e^x - C_2x - (x-1)^2. \end{aligned}$$

Отже, загальним розв'язком рівняння є вираз

$$y = C_1e^x - C_2x - (x-1)^2, \quad \{C_1, C_2\} \subset \mathbb{R}. \blacktriangleright$$

Вправи

1. Зінтегрувати рівняння $(2x - x^2)y'' + 2(x - 1)y' - 2y = -2$, якщо відомий частинний розв'язок $y_1 = x - 1$ відповідного однорідного рівняння і $\tilde{y} = 1$ - частинний розв'язок неоднорідного рівняння.

2. Розв'язати рівняння $x^2y'' - 2xy' + 2y = 2x^3$, знаючи, що частинним розв'язком відповідного однорідного рівняння є $y_1 = x$.

3. Зінтегрувати рівняння

$$y'' - \frac{2x}{1+x^2}y' + \frac{2}{1+x^2}y = \frac{2}{1+x^2},$$

якщо $\tilde{y} = 1$ є частинним розв'язком неоднорідного рівняння, а $y_1 = x$ - частинним розв'язком відповідного однорідного рівняння.

4. Знайти загальний розв'язок неоднорідного рівняння:

1) $(4x^2 - x)y'' + 2(2x - 1)y' - 4y = 12x^2 - 6x, y_1 = 2x - 1;$

2) $x(x - 1)y'' - (2x - 1)y' + 2y = 2x^3 - 3x^2, y_1 = x^2;$

3) $x^2y'' - xy' - 3y = 5x^4, y_1 = \frac{1}{x};$

4) $(1 + x^2)y'' + xy' - y + 1 = 0, y_1 = x.$

якщо y_1 є частинним розв'язком відповідного однорідного рівняння.

5. Зінтегрувати рівняння за допомогою методу варіації сталих, якщо відома фундаментальна система розв'язків відповідного однорідного рівняння:

- 1) $xy'' - y' = x^2$, $y_1 = 1$, $y_2 = x^2$;
- 2) $y'' + \frac{2}{x}y' + y = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$, $y_1 = \frac{\cos x}{x}$, $y_2 = \frac{\sin x}{x}$;
- 3) $y'' + y' = \frac{1}{\cos x}$, $y_1 = \cos x$, $y_2 = \sin x$;
- 4) $x(2-x)y'' + (x^2-2)y' + 2(1-x)y = x^2(2-x)^2e^x$, $y_1 = e^x$, $y_2 = x^2$;
- 5) $x^3y''' - x^2y'' + 2xy' - 2y = x^3 + 3x$, $y_1 = x$, $y_2 = x^2$, $y_3 = x \ln x$.

Відповіді

1. $y = C_1x^2 + C_2(x-1) + 1$.
2. $y = C_1x + C_2x^2 + x^3$.
3. $y = C_1x + C_2(x^2-1) + 1$.
4. 1) $y = C_1(2x-1) + C_2\frac{1}{x} + x^2$; 2) $y = C_1x^2 + C_2(2x-1) + x^3$;
- 3) $y = C_1\frac{1}{x} + C_2x^3 + x^4$; 4) $y = C_1x + C_2\sqrt{1+x^2} + 1$.
5. 1) $y = C_1 + C_2x^2 + \frac{x^3}{3}$; 2) $y = C_1\frac{\cos x}{x} + C_2\frac{\sin x}{x} + \frac{1}{x}$;
- 3) $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \cos x \ln |\cos x| + x \sin x$; 4) $y = C_1e^x + C_2x^2 + e^x \left(x^2 - \frac{x^3}{3}\right)$; 5) $y = C_1x + C_2x^2 + C_3x \ln x + \frac{x^3}{4} - \frac{3}{2}x(\ln x)^2$.

§ 13. Лінійні рівняння зі сталими коефіцієнтами та звідні до них

13.1. Лінійні однорідні рівняння зі сталими коефіцієнтами. Розглянемо лінійне однорідне рівняння вигляду

$$a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \dots + a_ny = 0, \quad (1)$$

де коефіцієнти a_i , $i \in \{0, 1, \dots, n\}$, – сталі, тобто дійсні числа, причому $a_0 \neq 0$. Буде доведено, що в цьому випадку розв'язування рівняння (1) завжди можливе в елементарних функціях без інтегрування, а за допомогою алгебраїчних операцій.

З попереднього параграфа випливає, що для знаходження загального розв'язку рівняння (1) *досить знайти n лінійно незалежних частинних розв'язків цього рівняння, тобто фундаментальну систему розв'язків.*

З'ясуємо, які елементарні функції змогли б перетворити рівняння (1) у тотожність. Це можливо тоді, коли після підставлення розв'язку в ліву частину рівняння там виявилися подібні члени, які в сумі могли б дати нуль. З диференціального числення відомо, що функцією, яка подібна до своїх похідних у розумінні елементарної алгебри, є функція $y = e^{\lambda x}$, де λ – стала. Отже, шукатимемо частинні розв'язки рівняння (1) у вигляді

$$y = e^{\lambda x}, \quad (2)$$

де λ – стала, яку виберемо відповідним чином. Диференціюючи за x вираз (2) підряд один раз, два рази, ..., n разів, одержимо рівності

$$y' = \lambda e^{\lambda x}, y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}, \dots, y^{(n)} = \lambda^n e^{\lambda x}. \quad (3)$$

Підставляючи вирази (2) і (3) в ліву частину рівняння (1), дістаємо

$$(a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n) e^{\lambda x} = 0. \quad (4)$$

Скоротивши на $e^{\lambda x} \neq 0$, $x \in \mathbb{R}$, матимемо рівняння

$$a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0, \quad (5)$$

яке називається **характеристичним рівнянням**.

Це рівняння n -го степеня визначає ті значення λ , при яких $y = e^{\lambda x}$ є розв'язком рівняння (1). Відомо, що рівняння (5) має n коренів. Можливі такі випадки: 1) усі корені рівняння (5) дійсні та різні; 2) серед дійсних коренів є кратні; 3) серед коренів рівняння є різні комплексні; 4) серед коренів рівняння (5) є кратні комплексні. Розглянемо ці випадки детальніше.

1) Усі корені характеристичного рівняння (5) дійсні та різні. Позначимо їх через $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Кожному з цих коренів відповідає частинний розв'язок рівняння (1):

$$y_1 = e^{\lambda_1 x}, \dots, y_n = e^{\lambda_n x}.$$

У § 10 доведено, що вони є лінійно незалежні на довільному проміжку числової осі, тобто утворюють фундаментальну систему розв'язків. Тому загальним розв'язком рівняння (1) буде функція

$$y = C_1 y_1 + \dots + C_n y_n,$$

де C_1, \dots, C_n – довільні сталі.

Приклад 1. Знайти загальний розв'язок рівняння $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$.

◀ Характеристичним рівнянням є

$$\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = 0.$$

Очевидно, що коренем цього рівняння є $\lambda_1 = 1$. Якщо далі знизити порядок рівняння, то одержимо квадратне рівняння $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$, коренями якого є $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$. Звідси випливає, що лінійно незалежними розв'язками заданого рівняння є $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{2x}$ і $y_3 = e^{3x}$, а загальним розв'язком

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + C_3 e^{3x}, \quad \{C_1, C_2, C_3\} \subset \mathbb{R}. \blacktriangleright$$

2) Розглянемо випадок, коли серед дійсних коренів характеристичного рівняння (5) є кратні. Тоді кількість різних коренів буде меншою, ніж n , а тому число лінійно незалежних частинних розв'язків вигляду (2) буде меншим n , що недосить для одержання загального розв'язку. Це означає, що ті розв'язки, яких не вистачає, треба шукати в іншому вигляді.

Доведено [10, 11], що коли характеристичне рівняння має корінь λ_1 кратності m_1 , то йому в фундаментальній системі розв'язків рівняння відповідає m_1 розв'язків вигляду

$$e^{\lambda_1 x}, x e^{\lambda_1 x}, \dots, x^{m_1-1} e^{\lambda_1 x}, \quad (6)$$

які лінійно незалежні на будь-якому проміжку числової осі.

Аналогічно, якщо маємо інші корені характеристичного рівняння: λ_2 кратності m_2 , \dots , λ_p кратності m_p , де $m_j \geq 1$, $j \in \{2, \dots, p\}$, причому $m_1 + m_2 + \dots + m_p = n$ і всі λ_j , $j \in \{2, \dots, p\}$, різні, то їм відповідають частинні розв'язки

$$e^{\lambda_2 x}, x e^{\lambda_2 x}, \dots, x^{m_2-1} e^{\lambda_2 x},$$

$$\dots\dots\dots$$

$$e^{\lambda_p x}, xe^{\lambda_p x}, \dots, x^{m_p-1} e^{\lambda_p x}. \quad (7)$$

Сукупність розв'язків (6), (7) визначає у випадку кратних коренів n частинних розв'язків рівняння (1). Вони лінійно незалежні на будь-якому проміжку числової осі, про що була мова в §10.

Приклад 2. Розв'язати рівняння

$$y''' - y'' - y' + y = 0.$$

◀ Характеристичне рівняння $\lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1 = 0$ має корені $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -1$. Тому фундаментальною є система розв'язків

$$y_1 = e^x, \quad y_2 = xe^x \quad \text{і} \quad y_3 = e^{-x}.$$

Загальний розв'язок заданого рівняння має вигляд

$$y = (C_1 + C_2x)e^x + C_3e^{-x}, \quad \{C_1, C_2, C_3\} \subset \mathbb{R}. \quad \blacktriangleright$$

3) Розглянемо тепер випадок комплексних коренів.

Оскільки коефіцієнти рівняння (5) є дійсними, то комплексні корені характеристичного рівняння можуть входити лише парами, тобто комплексному кореню $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ відповідає другий корінь $\lambda_2 = \alpha - i\beta$, $i = \sqrt{-1}$. Якщо взяти розв'язок y_1 , що відповідає кореню λ_1 , то він має вигляд

$$y_1 = e^{(\alpha+i\beta)x}. \quad (8)$$

Вираз (8) є, взагалі кажучи, комплексним числом при кожному значенні x , а це означає, що ми маємо справу з комплексною функцією дійсної змінної.

Всяку комплексну функцію $y(x)$ дійсної змінної x можна подати у вигляді

$$y(x) = u(x) + iv(x), \quad (9)$$

де $u(x)$ і $v(x)$ – дві дійсні функції дійсної змінної, і, навпаки, дві довільні дійсні функції $u(x)$ і $v(x)$ визначають за формулою (9) комплексну функцію дійсної змінної.

З попереднього випливає, що коли ϵ комплексний розв'язок вигляду (9) лінійного диференціального рівняння (1) з дійсними коефіцієнтами, то функції $u(x)$ і $v(x)$ кожна окремо є дійсними розв'язками рівняння (1).

Скористаємося цим твердженням для перетворення розв'язку (8). Відокремивши в ньому дійсну частину від уявної і скориставшись **формулою Ейлера**, дістанемо

$$y_1 = e^{\alpha x} e^{i\beta x} = e^{\alpha x} (\cos \beta x + i \sin \beta x) = e^{\alpha x} \cos \beta x + i e^{\alpha x} \sin \beta x.$$

Отже, комплексному кореню $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ відповідають два дійсних розв'язки рівняння (1)

$$y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x, \quad y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x. \quad (10)$$

Зауважимо, що спряженому кореню $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ відповідає комплексний розв'язок

$$y_2 = e^{(\alpha - i\beta)x} = e^{\alpha x} (\cos \beta x - i \sin \beta x),$$

який є лінійною комбінацією дійсних розв'язків (10).

Звідси випливає, що *парі комплексно спряжених коренів* $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ відповідає два дійсних розв'язки вигляду (10).

Приклад 3. Розв'язати рівняння $y''' + 4y'' + 13y' = 0$.

◀ Характеристичне рівняння $\lambda^3 + 4\lambda^2 + 13\lambda = 0$ має корені $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -2 - i3$, $\lambda_3 = -2 + i3$. Цим кореням відповідають лінійно незалежні частинні розв'язки заданого рівняння $y_1 = 1$, $y_2 = e^{-2x} \cos 3x$, $y_3 = e^{-2x} \sin 3x$. Тому загальним розв'язком диференціального рівняння є

$$y = C_1 + C_2 e^{-2x} \cos 3x + C_3 e^{-2x} \sin 3x, \quad \{C_1, C_2, C_3\} \subset \mathbb{R}. \quad \blacktriangleright$$

4) Якщо характеристичне рівняння (5) має кратний комплексний корінь $\alpha + i\beta$ кратності m , то розв'язки рівняння (1), які йому відповідають

$$e^{(\alpha+i\beta)x}, x e^{(\alpha+i\beta)x}, \dots, x^{m-1} e^{(\alpha+i\beta)x}$$

можна перетворити за **формулою Ейлера**

$$e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x} (\cos \beta x + i \sin \beta x)$$

і, відокремивши дійсну та уявну частини, одержати $2m$ дійсних розв'язків

$$\begin{aligned} e^{\alpha x} \cos \beta x, x e^{\alpha x} \cos \beta x, \dots x^{m-1} e^{\alpha x} \cos \beta x, \\ e^{\alpha x} \sin \beta x, x e^{\alpha x} \sin \beta x, \dots x^{m-1} e^{\alpha x} \sin \beta x. \end{aligned} \quad (11)$$

Оскільки комплексні корені входять попарно спряженими, маючи однакову кратність, то кореню $\alpha - i\beta$ кратності m , відповідають розв'язки вигляду (11), тобто ми не дістанемо нових розв'язків. Отже, парі комплексних спряжених коренів $\alpha \pm i\beta$ кратності m відповідають $2m$ лінійно незалежних розв'язків (11).

Приклад 4. Розв'язати рівняння

$$y^{(5)} - y^{(4)} + 8y''' - 8y'' + 16y' - 16y = 0.$$

◀ Характеристичне рівняння $\lambda^5 - \lambda^4 + 8\lambda^3 - 8\lambda^2 + 16\lambda - 16 = 0$ можна записати у вигляді $(\lambda - 1)(\lambda^2 + 4)^2 = 0$. Звідси випливає, що $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \lambda_3 = i2$, $\lambda_4 = \lambda_5 = -i2$. Частинними розв'язками рівняння є функції

$$y_1 = e^x, y_2 = \cos 2x, y_3 = x \cos 2x, y_4 = \sin 2x, y_5 = x \sin 2x.$$

Оскільки вони лінійно незалежні, то загальним розв'язком заданого рівняння є

$$y = C_1 e^x + (C_2 + C_3 x) \cos 2x + (C_4 + C_5 x) \sin 2x,$$

$$\{C_1, C_2, C_3, C_4, C_5\} \subset \mathbb{R}. \blacktriangleright$$

13.2. Лінійні неоднорідні рівняння зі сталими коефіцієнтами. Розглянемо лінійне неоднорідне рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x), \quad x \in X. \quad (12)$$

У попередньому пункті доведено, що відповідне лінійне однорідне рівняння (1) завжди розв'язується, причому без інтегрування. Це дозволяє, використовуючи метод варіації сталих,

знайти загальний розв'язок неоднорідного рівняння (12). Якщо ж вдається підібрати частинний розв'язок неоднорідного рівняння (12), то задача інтегрування зводиться до інтегрування відповідного однорідного рівняння (1).

У цьому пункті вивчимо питання про знаходження частинного розв'язку рівняння (12) у залежності від вигляду його правої частини $f(x)$.

13.2.1. Спочатку розглянемо випадок, коли права частина $f(x)$ є многочленом степеня s , тобто рівняння має вигляд

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = b_0 x^s + b_1 x^{s-1} + \dots + b_s, \quad (13)$$

де всі a_i , $i \in \{0, 1, \dots, n\}$, і b_j , $j \in \{0, 1, \dots, s\}$, – сталі.

1) Доведемо, що при $a_n \neq 0$ існує частинний розв'язок рівняння (13), який є також многочленом степеня s

$$\tilde{y} = A_0 x^s + A_1 x^{s-1} + \dots + A_s. \quad (14)$$

Справді, підставляючи (14) у рівняння (13) і прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x у лівій та правій частинах, одержуємо для визначення коефіцієнтів A_i , $i \in \{0, 1, \dots, s\}$, систему рівнянь, яка однозначно розв'язується при $a_n \neq 0$:

$$a_n A_0 = b_0, \quad A_0 = \frac{b_0}{a_n},$$

$$a_n A_1 + s a_{n-1} A_0 = b_1,$$

звідки визначається A_1 ,

$$a_n A_2 + (s-1) a_{n-1} A_1 + s(s-1) a_{n-2} A_0 = b_2,$$

звідки визначається A_2 і т.д.,

$$a_n A_s + \dots = b_s,$$

звідки визначається A_s .

Умова $a_n \neq 0$ означає, що число $\lambda = 0$ не є коренем характеристичного рівняння (5). Отже, в цьому випадку, як впливає з попереднього, існує частинний розв'язок рівняння (13), який

має вигляд многочлена, степінь якого дорівнює степеню многочлена, що стоїть у правій частині рівняння.

2) Нехай $\lambda = 0$ є коренем характеристичного рівняння (5) кратності l , тобто коефіцієнти $a_n = a_{n-1} = a_{n-2} = \dots = a_{n-l+1} = 0$, але $a_{n-l} \neq 0$. При цьому рівняння (13) набуває вигляду

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-l} y^{(l)} = b_0 x^s + b_1 x^{s-1} + \dots + b_s. \quad (15)$$

Покладаючи $y^{(l)} = z$, ми приходимо до попереднього випадку, і, отже, існує частинний розв'язок рівняння (15), для якого

$$y^{(l)} = \tilde{A}_0 x^s + \tilde{A}_1 x^{s-1} + \dots + \tilde{A}_s,$$

а це означає, що \tilde{y} є многочленом степеня $s + l$, причому, доданки, починаючи зі степеня $l - 1$ і нижче, у цього многочлена матимуть довільні сталі коефіцієнти, які можна, зокрема, взяти рівними нулю. Тоді частинний розв'язок набуде вигляду

$$\tilde{y} = x^l (A_0 x^s + A_1 x^{s-1} + \dots + A_s).$$

Приклад 5. Знайти загальний розв'язок рівняння $y''' - y'' + y' - y = x^2 + x$.

◀ Характеристичне рівняння $\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda - 1 = 0$ має різні корені $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -i$, $\lambda_3 = i$, а, отже, фундаментальну систему утворюють розв'язки $y_1 = e^x$, $y_2 = \cos x$, $y_3 = \sin x$. Тому загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння

$$y_{3.о.} = C_1 x + C_2 \cos x + C_3 \sin x, \quad \{C_1, C_2, C_3\} \subset \mathbb{R}.$$

Оскільки число нуль не є коренем характеристичного рівняння, то частинний розв'язок неоднорідного рівняння шукатимемо у вигляді правої частини, тобто многочлена другого степеня

$$\tilde{y} = A_1 x^2 + A_2 x + A_3,$$

де A_1 , A_2 і A_3 – невідомі коефіцієнти, які треба знайти. Підставляючи \tilde{y} у рівняння, дістаємо

$$-A_1 x^2 + (2A_1 - A_2)x + (A_2 - 2A_1 - A_3) = x^2 + x.$$

Звідси, прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях x в обох частинах рівності, матимемо

$$\begin{cases} A_1 = -1, \\ 2A_1 - A_2 = 1, \\ A_2 - 2A_1 - A_3 = 0. \end{cases}$$

Розв'язуючи цю систему, знайдемо $A_1 = -1$, $A_2 = -3$, $A_3 = -1$. Тому загальний розв'язок неоднорідного рівняння має вигляд

$$y_{з.н.} = C_1 e^x + C_2 \cos x + C_3 \sin x - x^2 - 3x - 1, \{C_1, C_2, C_3\} \subset \mathbb{R}. \blacktriangleright$$

Приклад 6. Знайти загальний розв'язок рівняння $y''' - y'' = 12x^2 + 6x$.

◀ Характеристичне рівняння $\lambda^3 - \lambda^2 = 0$ має корені $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 1$, а тому загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння має вигляд

$$y_{з.о.} = C_1 + C_2 x + C_3 e^x, \{C_1, C_2, C_3\} \subset \mathbb{R}.$$

Оскільки нуль є двократним коренем характеристичного рівняння, то частинний розв'язок неоднорідного рівняння шукатимемо у вигляді

$$\tilde{y} = x^2(A_1 x^2 + A_2 x + A_3) = A_1 x^4 + A_2 x^3 + A_3 x^2.$$

Підставивши \tilde{y} у задане рівняння, матимемо

$$-12A_1 x^2 + (24A_1 - 6A_2)x + (6A_2 - 2A_3) = 12x^2 + 6x,$$

звідки

$$\begin{cases} -12A_1 = 12, \\ 24A_1 - 6A_2 = 6, \\ 6A_2 - 2A_3 = 0. \end{cases}$$

Ця система має розв'язок $A_1 = -1$, $A_2 = -5$, $A_3 = -15$, а, отже,

$$\tilde{y} = -x^4 - 5x^3 - 15x^2.$$

Загальний розв'язок неоднорідного рівняння має вигляд

$$y_{з.н.} = C_1 + C_2 x + C_3 e^x - x^4 - 5x^3 - 15x^2, \{C_1, C_2, C_3\} \subset \mathbb{R}. \blacktriangleright$$

13.2.2. Розглянемо тепер лінійне неоднорідне рівняння вигляду

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = e^{px} (b_0 x^s + b_1 x^{s-1} + \dots + b_s), \quad (16)$$

де $a_i, i \in \{0, 1, \dots, n\}$, $b_j, j \in \{0, 1, \dots, s\}$, – сталі.

Доведено [11], що за допомогою заміни $y = e^{px} z$ рівняння (16) зводиться до вигляду

$$e^{px} (\bar{a}_0 z^{(n)} + \bar{a}_1 z^{(n-1)} + \dots + \bar{a}_n z) = e^{px} (b_0 x^s + b_1 x^{s-1} + \dots + b_s)$$

або

$$\bar{a}_0 z^{(n)} + \bar{a}_1 z^{(n-1)} + \dots + \bar{a}_n z = b_0 x^s + b_1 x^{s-1} + \dots + b_s, \quad (17)$$

де всі $\bar{a}_i, i \in \{0, 1, \dots, n\}$, – сталі.

Частинний розв'язок рівняння (17) при $\bar{a}_n \neq 0$ має вигляд

$$\tilde{z} = A_0 x^s + A_1 x^{s-1} + \dots + A_s,$$

а, отже, частинний розв'язок рівняння (16)

$$\tilde{y} = e^{px} (A_0 x^s + A_1 x^{s-1} + \dots + A_s).$$

Умова $\bar{a}_n \neq 0$ означає, що $\mu = 0$ не є коренем характеристичного рівняння

$$\bar{a}_0 \mu^n + \bar{a}_1 \mu^{n-1} + \dots + \bar{a}_n = 0, \quad (18)$$

а, отже, $\lambda = p$ не є коренем характеристичного рівняння (5), оскільки корені цих рівнянь зв'язані залежністю $\lambda = \mu + p$.

Якщо ж $\mu = 0$ є коренем характеристичного рівняння (18) кратності l , тобто $\lambda = p$ є коренем характеристичного рівняння (5) такої самої кратності, то частинні розв'язки рівнянь (17) і (16) мають відповідно вигляд

$$\tilde{z} = x^l (A_0 x^s + A_1 x^{s-1} + \dots + A_s),$$

$$\tilde{y} = x^l e^{px} (A_0 x^s + A_1 x^{s-1} + \dots + A_s).$$

Отже, якщо права частина лінійного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами має вигляд

$$e^{px}(b_0x^s + b_1x^{s-1} + \dots + b_s),$$

то, коли p не є коренем характеристичного рівняння, частинний розв'язок треба шукати в такому самому вигляді

$$\tilde{y} = e^{px}(A_0x^s + A_1x^{s-1} + \dots + A_s).$$

Якщо ж p є коренем характеристичного рівняння кратності l , то частинний розв'язок треба шукати у вигляді

$$\tilde{y} = x^l e^{px}(A_0x^s + A_1x^{s-1} + \dots + A_s).$$

Приклад 7. Знайти загальний розв'язок рівняння $y'' + y' = 4x^2e^x$.

◀ Характеристичне рівняння $\lambda^2 + \lambda = 0$ має корені $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -1$. Це означає, що загальний розв'язок відповідного лінійного однорідного рівняння має вигляд

$$y_{з.о.} = C_1 + C_2e^{-x}, \quad \{C_1, C_2\} \subset \mathbb{R}.$$

Оскільки $p = 1$ не є коренем характеристичного рівняння, то частинний розв'язок \tilde{y} неоднорідного рівняння шукатимемо у вигляді

$$\tilde{y} = (A_1x^2 + A_2x + A_3)e^x.$$

Тоді

$$\tilde{y}' = (2A_1x + A_2)e^x + (A_1x^2 + A_2x + A_3)e^x,$$

$$\tilde{y}'' = 2A_1e^x + 2(2A_1x + A_2)e^x + (A_1x^2 + A_2x + A_3)e^x.$$

Підставляючи вирази для \tilde{y} , \tilde{y}' , \tilde{y}'' у задане рівняння і скорочуючи обидві частини рівняння на e^x , маємо

$$2A_1x^2 + (6A_1 + 2A_2)x + 2A_1 + 3A_2 + 2A_3 = 4x^2.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x у лівій і правій частинах рівності, дістаємо лінійну систему рівнянь для знаходження коефіцієнтів A_1, A_2, A_3 :

$$\begin{cases} 2A_1 = 4, \\ 6A_1 + 2A_2 = 0, \\ 2A_1 + 3A_2 + 2A_3 = 0. \end{cases}$$

Розв'язавши її, знайдемо $A_1 = 2, A_2 = -6, A_3 = 7$, а тому

$$\tilde{y} = (2x^2 - 6x + 7)e^x.$$

Тоді загальний розв'язок заданого рівняння

$$y_{з.н.} = C_1 + C_2e^{-x} + (2x^2 - 6x + 7)e^x, \{C_1, C_2\} \subset \mathbb{R}. \blacktriangleright$$

Приклад 8. Розв'язати рівняння $y^{(5)} - 2y^{(4)} + y^{(3)} = e^x$.

◀ Характеристичне рівняння $\lambda^5 - 2\lambda^4 + \lambda^3 = 0$ має корені $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ і $\lambda_4 = \lambda_5 = 1$. Тому загальним розв'язком лінійного однорідного рівняння є

$$y_{з.о.} = C_1x^2 + C_2x + C_3 + (C_4 + C_5x)e^x, \{C_1, C_2, C_3, C_4, C_5\} \subset \mathbb{R}.$$

Частинний розв'язок неоднорідного рівняння шукатимемо у вигляді

$$\tilde{y} = Ax^2e^x,$$

бо $p = 1$ є двократним коренем характеристичного рівняння. Тоді

$$\begin{aligned} \tilde{y}' &= 2Axe^x + Ax^2e^x, \\ \tilde{y}'' &= 2Ae^x + 4Axe^x + Ax^2e^x, \\ \tilde{y}^{(3)} &= 6Ae^x + 6Axe^x + Ax^2e^x, \\ \tilde{y}^{(4)} &= 12Ae^x + 8Axe^x + Ax^2e^x, \\ \tilde{y}^{(5)} &= 20Ae^x + 10Axe^x + Ax^2e^x. \end{aligned}$$

Після підстановки $\tilde{y}, \tilde{y}', \dots, \tilde{y}^{(5)}$ у неоднорідне рівняння і відповідного зведення подібних, дістанемо рівняння

$$2A = 1 \quad \text{або} \quad A = \frac{1}{2}.$$

Тому частинний розв'язок неоднорідного рівняння має вигляд

$$\tilde{y} = \frac{1}{2}x^2e^x.$$

Отже, загальний розв'язок заданого рівняння

$$y_{з.п.} = C_1x^2 + C_2x + C_3 + (C_4 + C_5x)e^x + \frac{1}{2}x^2e^x,$$

$$\{C_1, C_2, C_3, C_4, C_5\} \subset \mathbb{R}. \blacktriangleright$$

13.2.3. Нехай права частина рівняння (12) має вигляд

$$f(x) = e^{px}(P_s(x) \cos qx + Q_r(x) \sin qx),$$

де $P_s(x)$ і $Q_r(x)$ є многочленами відповідно степеня s і r .

Доведено [10, 11], що частинний розв'язок неоднорідного рівняння слід шукати у вигляді

$$\tilde{y} = e^{px}(\tilde{P}_m(x) \cos qx + \tilde{Q}_m(x) \sin qx),$$

якщо $p \pm iq$ не є коренем характеристичного рівняння, де $\tilde{P}_m(x)$, $\tilde{Q}_m(x)$ – многочлени степеня $m = \max\{s, r\}$ з невідомими коефіцієнтами, якщо ж $p \pm iq$ є коренем характеристичного рівняння кратності l , то частинний розв'язок шукають у вигляді

$$\tilde{y} = x^l e^{px}(\tilde{P}_m(x) \cos qx + \tilde{Q}_m(x) \sin qx).$$

Приклад 9. Знайти загальний розв'язок неоднорідного рівняння $y''' - 2y'' + 3y' = e^{-x} \cos x$.

◀ Запишемо відповідне однорідне рівняння

$$y''' - 2y'' + 3y' = 0.$$

Його характеристичне рівняння $\lambda^3 - 2\lambda^2 + 3\lambda = 0$ або $\lambda(\lambda^2 - 2\lambda + 3) = 0$ має корені $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1 + i\sqrt{2}$ і $\lambda_3 = 1 - i\sqrt{2}$. Тому загальний розв'язок однорідного рівняння

$$y_{з.о.} = C_1 + e^x(C_2 \cos \sqrt{2}x + C_3 \sin \sqrt{2}x), \{C_1, C_2, C_3\} \subset \mathbb{R}.$$

Неоднорідність рівняння $f(x) = e^{-x} \cos x$, тобто $p = -1$, $q = 1$, $P_0(x) = 1$, $Q_0(x) = 0$. Оскільки $s = 0$, $r = 0$, то $m = 0$.

Числа $p \pm iq = -1 \pm i \cdot 1$ не є коренями характеристичного рівняння, тому $l = 0$. Тоді частинний розв'язок неоднорідного рівняння шукатимемо у вигляді

$$\tilde{y} = x^0 e^{-x} (A \cos x + B \sin x) = e^{-x} (A \cos x + B \sin x).$$

Оскільки

$$\begin{aligned} \tilde{y}' &= -e^{-x} (A \cos x + B \sin x) + e^{-x} (-A \sin x + B \cos x), \\ \tilde{y}'' &= e^{-x} (A \cos x + B \sin x) - e^{-x} (-A \sin x + B \cos x) - \\ &- e^{-x} (-A \sin x + B \cos x) + e^{-x} (-A \cos x - B \sin x) = \\ &= -2e^{-x} (-A \sin x + B \cos x), \\ \tilde{y}''' &= 2e^{-x} (-A \sin x + B \cos x) - 2e^{-x} (-A \cos x - B \sin x), \end{aligned}$$

то, підставивши знайдені вирази в рівняння, одержимо

$$\begin{aligned} &2e^{-x} (-A \sin x + B \cos x) - 2e^{-x} (-A \cos x - B \sin x) + \\ &+ 4e^{-x} (-A \sin x + B \cos x) + 3(-e^{-x} (A \cos x + B \sin x) + \\ &+ e^{-x} (-A \sin x + B \cos x)) = e^{-x} \cos x \end{aligned}$$

або

$$\begin{aligned} &-2A \sin x + 2B \cos x + 2A \cos x + 2B \sin x - 4A \sin x + 4B \cos x - \\ &- 3A \cos x - 3B \sin x - 3A \sin x + 3B \cos x = \cos x. \end{aligned}$$

Прирівнюючи коефіцієнти при $\sin x$ і $\cos x$, одержуємо

$$\begin{array}{l|l} \sin x & -2A + 2B - 4A - 3B - 3A = 0, \\ \cos x & 2B + 2A + 4B - 3A + 3B = 1 \end{array}$$

$$\text{або } \begin{cases} -9A - B = 0, \\ 9B - A = 1. \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему, дістанемо $A = -\frac{1}{82}$, $B = \frac{9}{82}$. Отже, частинний розв'язок рівняння

$$\tilde{y} = e^{-x} \left(-\frac{1}{82} \cos x + \frac{9}{82} \sin x \right),$$

а тому загальний розв'язок неоднорідного рівняння має вигляд

$$\begin{aligned} y_{з.н.} &= y_{з.о.} + \tilde{y} = \\ &= C_1 + e^x (C_2 \cos \sqrt{2}x + C_3 \sin \sqrt{2}x) + e^{-x} \left(-\frac{1}{82} \cos x + \frac{9}{82} \sin x \right), \\ &\{C_1, C_2, C_3\} \subset \mathbb{R}. \blacktriangleright \end{aligned}$$

Приклад 10. Розв'язати рівняння

$$y'' - 6y' + 5y = -3e^x + 5x^2.$$

◀ Загальний розв'язок відповідного лінійного однорідного рівняння $y'' - 6y' + 5y = 0$ має вигляд

$$y_{з.о.} = C_1e^x + C_2e^{5x}, \{C_1, C_2\} \subset R,$$

бо коренями характеристичного рівняння $\lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0$ є $\lambda_1 = 1$ і $\lambda_2 = 5$.

Права частина лінійного неоднорідного рівняння є сумою двох доданків, а тому, згідно з властивістю розв'язків таких рівнянь, частинний розв'язок цього рівняння є сумою частинних розв'язків рівнянь $y'' - 6y' + 5y = -3e^x$ і $y'' - 6y' + 5y = 5x^2$. Цими частинними розв'язками є відповідно:

$$\tilde{y}_1 = Axe^x, A = \frac{3}{4}, \tilde{y}_1 = \frac{3}{4}xe^x,$$

$$\tilde{y}_2 = Bx^2 + Cx + D, B = 1, C = \frac{12}{5}, D = \frac{62}{25}, \tilde{y}_2 = x^2 + \frac{12}{5}x + \frac{62}{25}.$$

Отже,

$$\tilde{y} = \tilde{y}_1 + \tilde{y}_2 = \frac{3}{4}xe^x + x^2 + \frac{12}{5}x + \frac{62}{25},$$

а тому

$$y_{з.н.} = C_1e^x + C_2e^{5x} + \frac{3}{4}xe^x + x^2 + \frac{12}{5}x + \frac{62}{25}. \blacktriangleright$$

13.3. Лінійні рівняння, що зводяться до рівнянь зі сталими коефіцієнтами. Оскільки рівняння зі сталими коефіцієнтами завжди інтегруються, важливо знайти, які з лінійних рівнянь можна звести до рівнянь зі сталими коефіцієнтами.

Відомо, що лінійне диференціальне рівняння зберігає свій вигляд при довільній гладкій заміні незалежної змінної, причому однорідне рівняння при цьому залишається однорідним. Цією властивістю користуються при зведенні рівняння зі змінними коефіцієнтами

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_n(x)y = \varphi(x) \quad (19)$$

до рівняння зі сталими коефіцієнтами. Доведено, що коли рівняння (19) можна звести до рівняння зі сталими коефіцієнтами вигляду (1) за допомогою заміни незалежної змінної, то лише за формулою

$$t = C \int \sqrt[n]{p_n(x)} dx, \quad (20)$$

де C – певна стала, а інтеграл означає деяку первісну.

Зокрема, **рівняння Ейлера**

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_n y = \varphi(x),$$

де a_1, \dots, a_n – сталі, заміною

$$x = e^t \quad \text{при} \quad x > 0 \quad \text{або} \quad x = -e^t \quad \text{при} \quad x < 0$$

зводиться до рівняння зі сталими коефіцієнтами.

Рівняння вигляду

$$(ax + b)^n y^{(n)} + a_1 (ax + b)^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_n y = \varphi(x),$$

де a_1, \dots, a_n – сталі, називається **рівнянням Лагранжа** і також зводиться до рівняння зі сталими коефіцієнтами за допомогою заміни $ax + b = e^t$ при $ax + b > 0$ і $ax + b = -e^t$ при $ax + b < 0$.

Приклад 11. Розв'язати рівняння Ейлера $x^2 y'' + xy' + y = x(6 - \ln x)$.

◀ Задане рівняння має зміст лише при $x > 0$. Тому зробимо заміну $x = e^t$. Тоді $dx = e^t dt$, $\frac{dt}{dx} = e^{-t}$,

$$y' = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} e^{-t},$$

$$y'' = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dt} e^{-t} \right) e^{-t} = e^{-2t} \left(\frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \right)$$

і рівняння набуде вигляду

$$y''(t) + y(t) = (6 - t)e^t.$$

Характеристичне рівняння $\lambda^2 + 1 = 0$ має корені $\lambda_{1,2} = \pm i$, а тому загальним розв'язком однорідного рівняння є $y_{з.о.}(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t$, $\{C_1, C_2\} \subset \mathbb{R}$.

Частинний розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді

$$\tilde{y}(t) = (At + B)e^t,$$

де A та B – деякі сталі.

Після підстановки в рівняння і скорочення на e^t , дістанемо алгебраїчне рівняння $2A + 2At + 2B = 6 - t$, звідки випливає, що $2A + 2B = 6$, $2A = -1$ або $A = -\frac{1}{2}$, $B = \frac{7}{2}$. Отже, частинний розв'язок неоднорідного рівняння

$$\tilde{y}(t) = \frac{1}{2}(7 - t)e^t.$$

Тому загальний розв'язок неоднорідного рівняння $y_{з.н.}(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t + \frac{1}{2}(7 - t)e^t$. Якщо повернутися до змінної x , то дістанемо загальний розв'язок вихідного рівняння

$$y_{з.н.}(x) = C_1 \cos(\ln x) + C_2 \sin(\ln x) + \frac{1}{2}(7 - \ln x)x,$$

$$x > 0, \{C_1, C_2\} \subset \mathbb{R}. \blacktriangleright$$

Приклад 12. Розв'язати рівняння

$$x^4 y'' + 2x^3 y' + n^2 y = 0, \quad x \neq 0,$$

де n – додатна стала.

◀ Знайдемо спочатку заміну незалежної змінної, використовуючи формулу (20):

$$t = C \int \sqrt{\frac{n^2}{x^4}} dx = Cn \int \frac{dx}{x^2} = -Cn \frac{1}{x}.$$

Якщо взяти $C = \frac{1}{n}$, то тоді

$$t = -\frac{1}{x} \text{ або } x = -\frac{1}{t}.$$

Маємо $dx = \frac{1}{t^2} dt$, $\frac{dt}{dx} = t^2$,

$$y' = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} t^2, \quad y'' = \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dt} t^2 \right) t^2 = \frac{d^2 y}{dt^2} t^4 + 2t^3 \frac{dy}{dt}.$$

Підставивши ці вирази в рівняння, дістанемо рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$y''(t) + n^2 y(t) = 0.$$

Характеристичне рівняння для нього $\lambda^2 + n^2 = 0$ має корені $\lambda_{1,2} = \pm in$. Тому загальним розв'язком цього рівняння є функція

$$y(t) = C_1 \cos nt + C_2 \sin nt, \quad \{C_1, C_2\} \subset \mathbb{R}.$$

Після повернення до змінної x , одержимо загальний розв'язок вихідного рівняння

$$y(x) = C_1 \cos \frac{n}{x} - C_2 \sin \frac{n}{x}, \quad \{C_1, C_2\} \subset \mathbb{R}. \blacktriangleright$$

Приклад 13. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y'' + \frac{2xy'}{1+x^2} + \frac{y}{(1+x^2)^2} = 0.$$

◀ Згідно з формулою (20), зробимо заміну незалежної змінної

$$t = C \int \sqrt{\frac{1}{(1+x^2)^2}} dx = C \int \frac{dx}{1+x^2} = C \operatorname{arctg} x$$

або

$$t = \operatorname{arctg} x, \quad x = \operatorname{tg} t, \quad t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),$$

якщо взяти $C = 1$.

Тоді $dx = \frac{dt}{\cos^2 t}$, $\frac{dt}{dx} = \cos^2 t$, $y' = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} \cos^2 t$,
 $y'' = \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dt} \cos^2 t \right) \cos^2 t = \frac{d^2 y}{dt^2} \cos^4 t - 2 \cos^3 t \sin t \frac{dy}{dt}$. Після підстановки цих виразів у рівняння та зведення подібних членів, дістанемо рівняння

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + y = 0.$$

Загальним розв'язком цього рівняння є

$$y(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t, \quad \{C_1, C_2\} \subset \mathbb{R}.$$

Повернувшись до змінної x , матимемо

$$y(x) = C_1 \cos(\operatorname{arctg} x) + C_2 \sin(\operatorname{arctg} x).$$

Якщо скористатися формулами

$$\cos t = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 t}}, \quad \sin t = \frac{\operatorname{tg} t}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 t}},$$

то одержимо, що

$$\cos(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}, \quad \sin(\operatorname{arctg} x) = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

Тому загальний розв'язок можна подати у вигляді

$$y(x) = C_1 \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} + C_2 \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}, \quad \{C_1, C_2\} \subset \mathbb{R}. \blacktriangleright$$

Вправи

1. Коренями характеристичного рівняння деякого однорідного диференціального рівняння є числа $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 4$, $\lambda_4 = 2 + i$, $\lambda_5 = 2 - i$. Знайти загальний розв'язок цього рівняння.

2. Знайти загальний розв'язок однорідного рівняння:

- | | |
|------------------------------------|-----------------------------------|
| 1) $y'' - 5y' + 6y = 0$; | 2) $y'' - y' - 2y = 0$; |
| 3) $y'' + 2y' - 3y = 0$; | 4) $y'' - 4y = 0$; |
| 5) $y'' = 9y$; | 6) $y''' + y'' + 9y' + 9y = 0$; |
| 7) $y'' + 3y' + 2y = 0$; | 8) $y^{(4)} - 5y'' + 4y = 0$; |
| 9) $y''' + 3y'' - 4y' - 12y = 0$; | 10) $y^{(4)} - 13y'' + 36y = 0$; |
| 11) $y^{(4)} + 2y''' + y'' = 0$; | 12) $y'' + 2y' + 5y = 0$; |
| 13) $y'' + 4y' + 13y = 0$; | 14) $y'' + 6y' + 13y = 0$; |
| 15) $y'' - 4y' + 5y = 0$; | 16) $y'' + 9y = 0$; |
| 17) $y^{(4)} + 5y'' + 6y = 0$; | 18) $y^{(4)} - 8y' = 0$; |
| 19) $y^{(4)} = y$; | 20) $y''' = y$; |

- 21) $y''' + y = 0$; 22) $y'' - 4y' + 4y = 0$;
 23) $y''' - 2y'' = 0$; 24) $y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$;
 25) $y^{(5)} - 6y^{(4)} + 9y''' = 0$; 26) $y^{(7)} + 3y^{(6)} + 3y^{(5)} + y^{(4)} = 0$;
 27) $y^{(5)} + 6y''' + 9y' = 0$; 28) $y^{(5)} + 8y''' + 16y' = 0$;
 29) $y^{(6)} - 2y^{(5)} + 3y^{(4)} - 4y''' + 3y'' - 2y' + y = 0$;
 30) $y^{(5)} + y^{(3)} + y'' + y = 0$.

3. Знайти загальний розв'язок неоднорідного рівняння:

- 1) $y'' + 3y' = 9x$; 2) $y'' - 4y' + 13y = x^2$;
 3) $y^{(4)} + y'' = x^2 + x$; 4) $y'' + 9y = 9$;
 5) $y'' - y' = 5x + 2$; 6) $y'' - 3y' + 2y = x^2 + 1$;
 7) $y'' - 2y = xe^{-x}$; 8) $y'' - 3y' + 2y = e^x$;
 9) $y'' + 2y' + y = e^{-x}$; 10) $y''' + y'' - 5y' + 3y = (x^2 + 4)e^x$;
 11) $y'' - 4y' + 4y = xe^{2x}$; 12) $y'' + 2y' = xe^{-x}$;
 13) $y'' - 2y' = xe^{2x}$; 14) $y'' - 5y' + 6y = 4 \sin 2x$;
 15) $y'' - 7y' + 6y = \sin x$; 16) $y'' + 4y = 3 \sin 2x$;
 17) $y''' + y'' - y' + 15y = \sin 2x$; 18) $y'' + y = x \cos x$;
 19) $y'' - 9y = e^{3x} \cos x$; 20) $y''' + y'' + y' = 4 \sin x$;
 21) $y'' + 4y' + 3y = 65x \cos 2x$; 22) $y'' + 4y = 4(\sin 2x + \cos 2x)$;
 23) $y'' + 5y' + 6y = e^{-x} + e^{-2x}$; 24) $y''' - 4y' = xe^{2x} + \sin x + x^2$;
 25) $y^{(4)} - y = xe^x + \cos x$;
 26) $y''' + y'' = x$.

4. Відомо, що функція попиту $d = 3p'' - p' - 2p + 18$, а функція пропозиції $s = 4p'' + p' + 3p + 3$, де $p(t)$ – ціна товару на момент часу t , $p'(t)$ – тенденція формування ціни, $p''(t)$ – темп зміни ціни. Знайти залежність ціни p від часу, за умови, що попит і пропозиція зрівноважуються, а $p(0) = 4$, $p'(0) = 1$.

5. Знайти загальний розв'язок неоднорідного рівняння за допомогою методу варіації сталих:

- 1) $y'' + y = \operatorname{ctg} x$; 2) $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{2}$;
 3) $y'' - 4y' + 5y = \frac{e^{2x}}{\cos x}$; 4) $y'' + 2y' + 2y = \frac{1}{e^x \sin x}$;
 5) $y''' - 2y'' - y' + 2y = \frac{2x^3 + x^2 - 4x - 6}{x^4}$;
 6) $y'' + y = x + 1$;
 7) $y'' - 6y' + 9y = \frac{9x^2 + 6x + 2}{x^3}$.

6. Розв'язати задачу:

- 1) $y'' - 8y' + 16y = e^{4x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$;
- 2) $y''' - 2y'' + y' = 4(\sin x + \cos x)$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = -1$;
- 3) $y'' - y' = \frac{1}{1 + e^x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.

7. Човну надано початкову швидкість $v_0 = 5$ м/с. Через 70 с після початку руху швидкість човна зменшилась удвоє. Знайти закон руху човна, якщо сила опору води прямо пропорційна швидкості човна (коефіцієнт пропорційності $\lambda > 0$). Яку максимальну відстань може пройти човен?

8. Висота $x(t)$ в момент часу t тіла, яке вільно падає під дією сили земного тяжіння, задовольняє рівняння $x''(t) = -g$, де g – прискорення сили земного тяжіння. Виразити $x(t)$ через висоту $x(0) = x_0$ і початкову швидкість $x'(0) = x'_0$. Якщо тіло падає з висоти h при нульовій початковій швидкості, то з якою швидкістю воно досягає Землі?

9. Знайти загальний розв'язок рівняння зі змінними коефіцієнтами:

- 1) $x^2y'' + 2xy' - 6y = 0$;
- 2) $x^2y''' - 2y' = 0$;
- 3) $(2x + 1)^2y'' - 2(2x + 1)y' + 4y = 0$;
- 4) $x^2y'' + xy' + y = 2 \sin(\ln x)$;
- 5) $(x - 2)^2y'' - 3(x - 2)y' + 4y = x$;
- 6) $x^2y'' - xy' - 3y = 5x^4$;
- 7) $x^3y''' - 9x^2y'' + 37xy' - 64y = x^4(1 + 2 \ln x + 4 \ln^2 x)$;
- 8) $(x + 2)^3y''' + 3(x + 2)^2y'' + (x + 2)y' + y = \frac{\ln(x+2)}{x+2}$.

10. За допомогою заміни змінної звести рівняння зі змінними коефіцієнтами до рівняння зі сталими коефіцієнтами та зінтегрувати:

- 1) $y'' - y' + e^{2x}y = 0$;
- 2) $x^4y'' + 2x^3y' - 4y = \frac{1}{x}$;
- 3) $xy'' - \frac{1}{2}y' - y = 0$;
- 4) $4xy'' + 2y' + y = 0$;
- 5) $(1 - x^2)y'' - xy' + n^2y = 0$;
- 6) $\sin x \cos xy'' - y' + \operatorname{tg} x \sin^2 xy = 0$.

11. Урівноважений розмір популяції деякого виду в заданому середовищі становить 1000 особин. Кількість популяції коливається навколо цього середнього значення і описується рівнянням $y''(t) = 4\pi^2(1000 - y(t))$, де $y(t)$ – кількість популяції в момент часу t (роки). Знайти кількість популяції через 6, 12 і 18 місяців, якщо $y(0) = 1500$, $y'(0) = 0$.

12. Матеріальна точка масою m притягується до нерухомого центра O з силою, яка пропорційна відстані x точки від

центру O (пружна сила). Нехтуючи опором середовища, знайти закон руху цієї точки.

13. Матеріальна точка масою m коливається в середовищі без опору під дією пружної сили, що пропорційна відхиленню x точки від положення рівноваги, при наявності зовнішньої збурюючої сили $F = F_0 \sin pt$. Знайти закон коливань.

Відповіді

1. $y = e^{4x}(C_1 + C_2x + C_3x^2) + e^{2x}(C_4 \cos x + C_5 \sin x)$.
2. 1) $C_1e^{2x} + C_2e^{3x}$; 2) $C_1e^{-x} + C_2e^{2x}$; 3) $C_1e^x + C_2e^{-x}$;
 4) $C_1e^{2x} + C_2e^{-2x}$; 5) $C_1e^{3x} + C_2e^{-3x}$; 6) $C_1e^{-x} + C_2 \cos 3x + C_3 \sin 3x$;
 7) $C_1e^{-x} + C_2e^{-2x}$; 8) $C_1e^x + C_2e^{-x} + C_3e^{2x} + C_4e^{-2x}$;
 9) $C_1e^{-3x} + C_2e^{2x} + C_3e^{-2x}$; 10) $C_1e^x + C_2e^{-3x} + C_3e^{2x} + C_4e^{-2x}$;
 11) $C_1 + C_2x + C_3e^{-x} + C_4xe^{-x}$;
 12) $e^{-x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$; 13) $e^{-2x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$;
 14) $e^{-3x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$; 15) $e^{2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$;
 16) $C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x$; 17) $(C_1 \cos \sqrt{2}x + C_4 \sin \sqrt{2}x) + (C_3 \cos \sqrt{3}x + C_4 \sin \sqrt{3}x)$;
 18) $C_1 + C_2e^{2x} + e^{-x}(C_3 \cos \sqrt{3}x + C_4 \sin \sqrt{3}x)$;
 19) $C_1e^{-x} + C_2e^x + (C_3 \cos x + C_4 \sin x)$;
 20) $C_1e^x + e^{-x/2} + (C_2 \cos \frac{3}{2}x + C_3 \sin \frac{3}{2}x)$; 21) $C_1e^{-x} + e^{x/2} + (C_2 \cos \frac{3}{2}x + C_3 \sin \frac{3}{2}x)$;
 22) $(C_1 + C_2x)e^{2x}$; 23) $C_1 + C_2x + C_3e^{2x}$;
 24) $C_1e^{-x} + C_2xe^{-x} + C_3x^2e^{-x}$; 25) $C_1 + C_2x + C_3x^2 + e^{3x}(C_4 + C_5x)$;
 26) $C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4x^4 + e^{-x}(C_5 + C_6x + C_7x^2)$;
 27) $C_1 + (C_2 \cos \sqrt{3}x + C_3 \sin \sqrt{3}x) + x(C_4 \cos \sqrt{3}x + C_5 \sin \sqrt{3}x)$;
 28) $C_1 + (C_2 \cos 2x + C_3 \sin 2x) + x(C_4 \cos 2x + C_5 \sin 2x)$;
 29) $(C_1 + C_2x)e^x + (C_3 \cos x + C_4 \sin x) + x(C_5 \cos x + C_6 \sin x)$;
 30) $y = C_1e^{-x} + C_2 \cos x + C_3 \sin x + e^{\frac{x}{2}}(C_4 \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + C_5 \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x)$.
3. 1) $C_1 + C_2e^{-3x} + \frac{3}{2}x^2 - x$; 2) $e^{2x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x) + \frac{1}{13}x^2 + \frac{8}{169}x - \frac{6}{2197}$;
 3) $C_1 + C_2x + C_3 \cos x + C_4 \sin x + \frac{x^2}{12}(x^2 + 2x - 12)$;
 4) $C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x + 1$; 5) $C_1e^x + C_2e^{-x} - 5x - 2$;
 6) $C_1e^x + C_2e^{2x} + \frac{1}{2}(x^2 + 3x + \frac{9}{2})$;
 7) $C_1e^{\sqrt{2}x} + C_2e^{-\sqrt{2}x} - (x - 2)e^{-x}$;
 8) $C_1e^{2x} + (C_2 - x)e^x$; 9) $(C_1 +$

$+C_2x + \frac{x^2}{2}e^{-x}$; 10) $e^x(C_1+C_2x) + C_3e^{-3x} + \frac{1}{48}x^2e^x(x^2-x + \frac{99}{4})$;
 11) $e^{2x}(C_1+C_2x) + \frac{1}{6}x^3e^{2x}$; 12) $C_1 + C_2e^{-2x} + (\frac{1}{8}x - \frac{3}{32})e^{2x}$;
 13) $C_1 + C_2e^{2x} + (\frac{x^2}{4} - \frac{x}{4})e^{2x}$; 14) $C_1e^{2x} + C_2e^{3x} + \frac{5}{19}\cos 2x +$
 $+\frac{1}{19}\sin 2x$; 15) $\frac{1}{74}(5x+7\cos x) + C_1e^x + C_2e^{6x}$; 16) $C_1\cos 2x +$
 $+C_2\sin 2x - \frac{3}{4}x\cos 2x$; 17) $C_1e^{-3x} + C_2e^x\cos 2x + C_3e^x\sin 2x +$
 $+\frac{1}{221}(10\cos 2x + 11\sin 2x)$; 18) $C_1\cos x + C_2\sin x +$
 $+\frac{1}{4}x\cos x + \frac{1}{4}x^2\sin x$; 19) $C_1e^{3x} + C_2xe^{-3x} + \frac{1}{37}e^{3x}(6\sin x - \cos x)$;
 20) $C_1 + C_2\cos x + C_3\sin x - 2x\sin x$; 21) $C_1e^{-x} + C_2e^{-3x} +$
 $+(8x + \frac{188}{65})\cos 2x + (-x + \frac{316}{65})\sin 2x$; 22) $C_1\cos 2x + C_2\sin 2x +$
 $+x(\sin 2x - \cos 2x)$; 23) $\frac{1}{2}e^{-x} + xe^{-2x} + C_1e^{-2x} + C_2e^{-3x}$;
 24) $\frac{1}{32}e^{2x}(2x^2 - 3x) + \frac{1}{5}\cos x - \frac{x^3}{12} + \frac{x}{8} + C_1 + C_2e^{2x} + C_3e^{-2x}$;
 25) $C_1e^x + C_2e^{-x} + C_3\sin x + C_4\cos x + \frac{1}{8}(x^2 - 3x)e^x - \frac{1}{4}x\sin x$;
 26) $C_1e^{-x} + C_2x + C_3 + \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2}$.

4. $p'' + 2p' + 5p = 15$, $p(t) = C_1e^{-t}\cos 2t + C_2e^{-t}\sin 2t + 3$,
 $p(t) = e^{-t}(\cos 2t + \sin 2t) + 3$.

5. 1) $C_1\cos x + C_2\sin x + \sin x\cos x + \frac{\sin x}{2}\ln|\frac{\cos x - 1}{\cos x + 1}| - \cos^2 x$;
 2) $e^x(x\ln|x| + C_1x + C_2)$; 3) $(C_1\cos x + C_2\sin x + \ln|\cos x|\cos x +$
 $+x\sin x)e^{2x}$; 4) $(C_1\cos x + C_2\sin x - x\cos x + \sin x\ln|\sin x|)e^{-x}$;
 5) $C_1e^x + C_2e^{-x} + C_3e^{2x} + \frac{1}{x}$; 6) $C_1\cos x + C_2\sin x + x + 1$;
 7) $C_1xe^{3x} + C_2e^x + \frac{1}{x}$.

6. 1) $\frac{1}{2}x(x+2)e^{4x}$; 2) $4 + (3x - 5)e^x + 2(\cos x + \sin x)$;
 3) $(1 + e^x)\ln(1 + e^x) + e^x(3 - \ln 2 - x) - (2 + \ln 2 + x)$.

7. $x(t) = 500(1 - e^{0,01t})$, 500 м, $mx'' + \lambda x' = 0$, $x(0) = 0$,
 $x'(0) = 5$; $x'(70) = 2,5$.

8. $x(t) = x_0 + x_0't - \frac{gt^2}{2}$, $v = \sqrt{2gh}$.

9. 1) $y = C_1x^{-3} + C_2x^2$; 2) $y = C_1 + C_2\ln x + C_3x^3$; 3) $y =$

$= C_1(2x + 1) + C_2(2x + 1) \ln(2x + 1)$; 4) $y = C_1 \cos(\ln x) + C_2 \sin(\ln x) - \ln x \cos(\ln x)$; 5) $y = (x - 2)^2(C_1 + C_2 \ln(x - 2)) + x - \frac{3}{2}$; 6) $y = \frac{C_1}{x} + C_2 x^3 + x^4$; 7) $x^4(C_1 + C_2 \ln x + C_3(\ln x)^2 + \frac{1}{6}(\ln x)^2 + \frac{1}{12}(\ln x)^4 + \frac{1}{15}(\ln x)^5)$; 8) $\frac{1}{x+2}(C_1 + \frac{1}{3} \ln(x+2) + \frac{1}{6}(\ln(x+2))^2 + \sqrt{x+2}(C_2 \cos(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln(x+2)) + C_3 \sin(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln(x+2)))$.

10. 1) $t = e^x$, $y = C_1 \cos e^x + C_2 \sin e^x$; 2) $t = -\frac{1}{x}$, $y = C_1 e^{-\frac{2}{x}} + C_2 e^{\frac{2}{x}} - \frac{1}{4x}$; 3) $t = \sqrt{x}$, $y = C_1 e^{-2\sqrt{x}} + C_2 e^{2\sqrt{x}}$; 4) $t = \sqrt{x}$, $y = C_1 \cos \sqrt{x} + C_2 \sin \sqrt{x}$; 5) $y = C_1 \cos(n \arccos x) + C_2 \sin(n \arccos x)$; 6) $y = C_1 \cos \ln |\cos x| + C_2 \sin \ln |\cos x|$.

11. $y(t) = 500 \cos 2\pi t + 1000$, $y(\frac{1}{2}) = 500$, $y(1) = 1500$, $y(\frac{3}{2}) = 500$.

12. $m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx$ або $\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$, $\omega^2 := \frac{k}{m}$; $x(t) = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t$ або $x(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$, де $C_1 = A \sin \varphi$, $C_2 = A \cos \varphi$, A , φ - деякі сталі.

13. $m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx + F_0 \sin pt$, k - коефіцієнт пропорційності, або $\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = a \sin pt$, $\omega^2 := \frac{k}{m}$, $a = \frac{F_0}{m}$; $x(t) = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t + \frac{a}{\omega^2 - p^2} \sin pt$, якщо $p \neq \omega$; $x(t) = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t - \frac{at}{2\omega} \cos \omega t$, якщо $p = \omega$.

§ 14. Деякі питання теорії лінійних рівнянь другого порядку

14.1. Інваріант рівняння другого порядку. Лінійне однорідне рівняння другого порядку

$$L(y) := y''(x) + 2a(x)y'(x) + b(x)y(x) = 0 \quad (1)$$

за допомогою заміни шуканої функції y на нову функцію z

$$y(x) = \varphi(x)z(x) \quad (2)$$

зводиться до рівняння вигляду

$$z''(x) + 2\left(\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} + a(x)\right)z'(x) + \frac{\varphi''(x) + 2a(x)\varphi'(x) + b(x)\varphi(x)}{\varphi(x)}z(x) = 0. \quad (3)$$

Якщо в заміні (2) взяти

$$\varphi(x) = e^{-\int a(x)dx}, \quad (4)$$

то $\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} + a(x) = 0$ і рівняння (3) набуде вигляду

$$z''(x) + (b(x) - a^2(x) - a'(x))z(x) = 0$$

або

$$z''(x) + I(x)z(x) = 0, \quad (5)$$

де функція

$$I(x) := b(x) - a^2(x) - a'(x)$$

називається **інваріантом** рівняння.

Якщо $I(x) = \text{const}$, то рівняння (5) буде рівнянням зі сталими коефіцієнтами.

При інтегруванні рівняння (1) інколи корисною є комбінація підстановок (20) з §13 і (2) з функцією φ , яка визначається формулою (4). Перша з них зводить наше рівняння до рівняння зі сталими коефіцієнтами при шуканій функції, а друга знищує член, що містить першу похідну від шуканої функції. У результаті можемо одержати рівняння зі сталими коефіцієнтами.

Приклад 1. Зінтегрувати рівняння

$$xy'' + 2y' + xy = 0, \quad x > 0.$$

◀ Зробимо заміну $y = \frac{z}{x}$, бо $\varphi(x) = e^{-\int \frac{dx}{x}} = e^{-\ln x} = \frac{1}{x}$. Вона зведе рівняння до вигляду

$$z'' + z = 0,$$

оскільки $I(x) = 1 - \left(\frac{1}{x}\right)^2 - \left(\frac{1}{x}\right)' = 1 - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} = 1$. Загальним розв'язком цього рівняння є $z = C_1 \cos x + C_2 \sin x$, $\{C_1, C_2\} \subset \mathbb{R}$. Якщо повернутися до змінної y , то дістанемо

$$y(x) = C_1 \frac{1}{x} \cos x + C_2 \frac{1}{x} \sin x, \quad \{C_1, C_2\} \subset \mathbb{R}. \blacktriangleright$$

Приклад 2. Розв'язати рівняння

$$x^4 y'' + k^2 y = 0, \quad x \neq 0,$$

де k – деяка додатна стала.

◀ Зробимо заміну незалежної змінної за формулою (20) з §13:

$$t = C \int \sqrt{-\frac{k^2}{x^4}} dx = Cki \int \frac{dx}{x^2} = Cki \left(-\frac{1}{x}\right).$$

Якщо взяти $C = \frac{1}{ki}$, то дістанемо, що

$$t = -\frac{1}{x} \quad \text{або} \quad x = -\frac{1}{t}.$$

Тоді

$$\begin{aligned} dx &= \frac{1}{t^2} dt, & \frac{dt}{dx} &= t^2, & \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} t^2, \\ \frac{d^2 y}{dt^2} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dt} t^2 \right) t^2 = \frac{d^2 y}{dt^2} t^4 + 2 \frac{dy}{dt} t^3, \end{aligned}$$

а тому, підставивши ці похідні та $x = -\frac{1}{t}$ у рівняння, одержимо

$$\frac{1}{t^4} \left(\frac{d^2 y}{dt^2} t^4 + 2t^3 \frac{dy}{dt} \right) + k^2 y = 0$$

або

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{2}{t} \frac{dy}{dt} + k^2 y = 0.$$

У цьому рівнянні перейдемо до нової невідомої функції z за формулою

$$y = e^{-\int \frac{dt}{t}} z = e^{-\ln t} z = \frac{z}{t}.$$

Оскільки

$$I(t) = k^2 - \frac{1}{t^2} + \frac{1}{t^2} = k^2,$$

то для z отримаємо рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$z''(t) + k^2 z(t) = 0.$$

Загальний розв'язок цього рівняння

$$z(t) = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt, \quad \{C_1, C_2\} \subset \mathbb{R}.$$

Якщо повернутися до змінних x і y , то одержимо загальний розв'язок вихідного рівняння

$$y(x) = x \left(C_1 \cos \frac{k}{x} + C_2 \sin \frac{k}{x} \right), \quad \{C_1, C_2\} \subset \mathbb{R}. \blacktriangleright$$

14.2. Зниження порядку рівняння, якщо відомий частинний розв'язок цього рівняння. Якщо відомий один частинний розв'язок y_1 рівняння (1), то його порядок можна знизити на одиницю або, знайшовши другий частинний розв'язок y_2 за формулою

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int 2a(x)dx}}{y_1^2} dx, \quad (6)$$

записати зразу загальний розв'язок рівняння.

Приклад 3. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$x^2(\ln x - 1)y'' - xy' + y = 0, \quad x > 1,$$

якщо відомо, що воно має частинний розв'язок $y_1 = x$.

◀ Знайдемо другий частинний розв'язок y_2 за формулою (6):

$$y_2 = x \int \frac{e^{\int \frac{dx}{x(\ln x - 1)}}}{x^2} dx = x \int \frac{e^{\int \frac{d(\ln x - 1)}{\ln x - 1}}}{x^2} dx = x \int \frac{e^{\ln(\ln x - 1)}}{x^2} dx =$$

$$\begin{aligned}
&= x \int \frac{\ln x - 1}{x^2} dx = -x \int (\ln x - 1) d\left(\frac{1}{x}\right) = -x \left((\ln x - 1) \frac{1}{x} - \right. \\
&\left. - \int \frac{1}{x} \frac{1}{x} dx \right) = -x \left((\ln x - 1) \frac{1}{x} + \frac{1}{x} \right) = -\ln x + 1 - 1 = -\ln x.
\end{aligned}$$

Оскільки y_1 і y_2 лінійно незалежні на будь-якому відрізку $[\alpha, \beta] \subset (1, \infty)$, то загальним розв'язком рівняння є функція

$$y = C_1 x + C_2 \ln x, \quad \{C_1, C_2\} \subset \mathbb{R}. \blacktriangleright$$

Якщо коефіцієнти a і b рівняння (1) є многочленами, то інколи його частинний розв'язок можна знайти у вигляді многочлена деякого степеня n :

$$y = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n. \quad (7)$$

Підставивши (7) у рівняння (1) і прирівнявши до нуля коефіцієнт при старшому степені x , одержимо рівняння для знаходження n . Потім запишемо многочлен знайденого степеня з невідомими коефіцієнтами, які шукаємо, підставивши цей многочлен у задане рівняння.

Приклад 4. Розв'язати рівняння

$$(x - 1)y'' - (x + 1)y' + 2y = 0, \quad x \neq 1,$$

знайшовши частинний розв'язок у вигляді многочлена.

◀ Підставимо многочлен (7) у наше рівняння:

$$\begin{aligned}
&(x - 1)(n(n - 1)x^{n-2} + \dots) - (x + 1)(nx^{n-1} + \dots) + \\
&+ 2(x^n + a_1 x^{n-1} + \dots) = 0.
\end{aligned}$$

Прирівнявши до нуля коефіцієнт при x^n , отримаємо $-n + 2 = 0$ або $n = 2$. Отже, якщо частинний розв'язок у вигляді многочлена існує, то він може бути лише многочленом другого степеня. Покладаючи

$$y = x^2 + a_1 x + a_2$$

і підставляючи його в рівняння, маємо

$$(x-1)2 - (x+1)(2x+a_1) + 2(x^2 + a_1x + a_2) = 0$$

або

$$a_1x - a_1 + 2a_2 - 2 = 0.$$

Прирівняємо до нуля коефіцієнт при x і вільний член:

$$\begin{array}{l|l} x & a_1 = 0, \\ x^0 & a_1 - 2a_2 + 2 = 0. \end{array}$$

Оскільки ця система сумісна, причому $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, то шукальний розв'язок існує і має вигляд

$$y_1 = x^2 + 1.$$

Другий частинний розв'язок знаходимо за формулою (6):

$$y_2 = (x^2 + 1) \int \frac{e^{\int \frac{x+1}{x-1} dx}}{(x^2 + 1)^2} dx.$$

Оскільки

$$\int \frac{x+1}{x-1} dx = \int \frac{(x-1)+2}{x-1} dx = \int dx + 2 \int \frac{dx}{x-1} = x + 2 \ln|x-1|,$$

то

$$\begin{aligned} y_2 &= (x^2 + 1) \int \frac{e^x (x-1)^2}{(x^2 + 1)^2} dx = (x^2 + 1) \int \frac{e^x ((x^2 + 1) - 2x)}{(x^2 + 1)^2} dx = \\ &= (x^2 + 1) \left(\int \frac{e^x}{x^2 + 1} dx + \int e^x d\left(\frac{1}{1+x^2}\right) \right) = \\ &= (x^2 + 1) \left(\int \frac{e^x}{x^2 + 1} dx + e^x \frac{1}{x^2 + 1} - \int \frac{e^x}{x^2 + 1} dx \right) = e^x. \end{aligned}$$

Оскільки маємо два лінійно незалежні розв'язки заданого рівняння, то загальний розв'язок цього рівняння

$$y = C_1(x^2 + 1) + C_2e^x, \quad \{C_1, C_2\} \subset \mathbb{R}. \blacktriangleright$$

14.3. Самоспряжений вигляд рівняння другого порядку. Рівняння другого порядку

$$L(y) := (p(x)y')' + q(x)y = 0 \quad (8)$$

називається **самоспряженим** рівнянням.

Доведено [10], що кожне рівняння другого порядку (1) можна звести до самоспряженої форми множенням на функцію

$$p(x) = e^{2 \int a(x) dx}.$$

Зазначимо, що коефіцієнти p і q неперервні на проміжку, де неперервними є коефіцієнти a і b рівняння (1), причому $p > 0$ на цьому проміжку.

Якщо в рівнянні (8) зробити заміну

$$\xi = \int \frac{dx}{p(x)},$$

то воно набуде вигляду (5).

Приклад 5. Звести рівняння

$$xy'' + \frac{1}{2}y' - y = 0, \quad x > 0,$$

до самоспряженого вигляду і розв'язати його.

◀ Запишемо рівняння у вигляді

$$y'' + \frac{1}{2x}y' - \frac{1}{x}y = 0.$$

Для зведення цього рівняння до самоспряженого вигляду помножимо його на функцію

$$p(x) = e^{\int \frac{1}{2x} dx} = e^{\frac{1}{2} \ln x} \quad \text{або} \quad p(x) = \sqrt{x}.$$

Тоді одержимо рівняння

$$\sqrt{x}y'' + \frac{1}{2\sqrt{x}}y' - \frac{1}{\sqrt{x}}y = 0$$

або

$$(\sqrt{x}y)' - \frac{1}{\sqrt{x}}y = 0.$$

Введемо нову змінну

$$\xi = \int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}.$$

$$\begin{aligned} \text{Тоді } d\xi &= \frac{1}{\sqrt{x}}dx, \quad \frac{d\xi}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} = \frac{dy}{d\xi} \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \\ &= \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{d\xi} \frac{1}{\sqrt{x}} \right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{d\xi} \right) \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{dy}{d\xi} \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right) = \frac{d^2y}{d\xi^2} \frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \frac{dy}{d\xi}, \end{aligned}$$

а тому рівняння набуде вигляду

$$\frac{d^2y}{d\xi^2} \frac{1}{x} - \frac{1}{2x\sqrt{x}} \frac{dy}{d\xi} + \frac{1}{2x\sqrt{x}} \frac{dy}{d\xi} - \frac{1}{x}y = 0$$

або

$$\frac{d^2y}{d\xi^2} - y = 0.$$

Загальним розв'язком отриманого рівняння є $y(\xi) = C_1e^\xi + C_2e^{-\xi}$, $\{C_1, C_2\} \subset \mathbb{R}$. Повертаючись до змінної x , знаходимо загальний розв'язок заданого рівняння

$$y(x) = C_1e^{\sqrt{x}} + C_2e^{-\sqrt{x}}, \quad \{C_1, C_2\} \subset \mathbb{R}. \blacktriangleright$$

14.4. Крайові задачі для диференціальних рівнянь другого порядку. Функція Гріна задачі. Задача Штурма-Ліувілля. Розв'язок диференціального рівняння (8) повністю визначається початковими умовами $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$. У той же час у багатьох фізичних задачах доводиться шукати розв'язки, які задовольняють інші умови, наприклад, **крайові**.

Розглянемо задачу про знаходження на відрізку $[a, b]$ розв'язку рівняння

$$L(y) := (p(x)y')' + q(x)y = f(x), \quad (9)$$

який задовольняє крайові умови

$$\alpha y(a) + \beta y'(a) = 0, \quad \gamma y(b) + \delta y'(b) = 0, \quad (10)$$

де сталі $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ задовольняють умови $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0, \gamma^2 + \delta^2 \neq 0$.

Задача (9), (10) називається **крайовою задачею**.

Для того щоб розв'язати крайову задачу, треба знайти загальний розв'язок рівняння (9) і підібрати значення довільних сталих так, щоб виконувалися крайові умови (10). Крайова задача не завжди має розв'язок, а якщо й має, то цей розв'язок не обов'язково єдиний.

Приклад 6. Розв'язати крайову задачу

$$y'' + y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(x_0) = y_0.$$

◀ Знайдемо загальний розв'язок рівняння. Оскільки коренями характеристичного рівняння $\lambda^2 + 1 = 0$ є $\lambda_{1,2} = \pm i$, то фундаментальною системою розв'язків є функції $y_1 = \cos x, y_2 = \sin x$. Тоді загальний розв'язок рівняння має вигляд

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x, \quad \{C_1, C_2\} \subset \mathbb{R}.$$

Задовольнимо крайові умови:

$$\begin{cases} C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0 = 0, \\ C_1 \cos x_0 + C_2 \sin x_0 = y_0 \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} C_1 = 0, \\ C_2 \sin x_0 = y_0. \end{cases}$$

Якщо: 1) $x_0 \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}$, то з другої умови знаходимо, що $C_2 = \frac{y_0}{\sin x_0}$. Отже, в цьому випадку задача має єдиний розв'язок

$$y = \frac{y_0}{\sin x_0} \sin x;$$

2) $x_0 = \pi n, n \in \mathbb{Z}$, тоді з другої крайової умови одержуємо, що $C_2 \sin \pi n = y_0$. Звідси випливає, що можливі випадки: а) $y_0 = 0$, тоді C_2 – довільне і крайова задача має безліч розв'язків

$y = C_2 \sin x$, $C_2 \in \mathbb{R}$; б) $y_0 \neq 0$, у цьому випадку система для знаходження C_1 і C_2 несумісна, а це означає, що крайова задача розв'язків не має. ►

Відповідь на питання про інтегральне зображення розв'язку задачі (9), (10) дає таке твердження: *якщо лінійна однорідна задача (8), (10) має лише тривіальний розв'язок, то лінійна задача (9), (10) має єдиний розв'язок, який можна записати в інтегральній формі*

$$y(x) = \int_a^b G(x, s) f(s) ds, \quad (11)$$

де $G(x, s)$ – **функція Гріна задачі**.

Функція Гріна $G(x, s)$ визначена при $x \in [a, b]$, $s \in (a, b)$ і при кожному $s \in (a, b)$ має властивості:

- 1) при $x \neq s$ правильна рівність $L(G(x, s)) = 0$;
- 2) $G(x, s)$ задовольняє крайові умови (10);
- 3) при $x = s$ функція $G(x, s)$ неперервна за x , а її похідна за x має розрив першого роду

$$G_x(s+0, s) - G_x(s-0, s) = \frac{1}{p(s)}. \quad (12)$$

Для того щоб знайти функцію Гріна задачі (9), (10), треба побудувати розв'язок $y_1 \neq 0$ рівняння (8), який задовольняє першу крайову умову з (10), і розв'язок $y_2 \neq 0$, який задовольняє другу крайову умову з (10). Ці розв'язки є лінійно незалежними, бо, якщо $y_1 = Cy_2$, $C \neq 0$, то функція $y_1 \neq 0$ була б нетривіальним розв'язком лінійної однорідної задачі (8), (10), що суперечить умові твердження.

Функцію $G(x, s)$ шукаємо у вигляді

$$G(x, s) = \begin{cases} \varphi(s)y_1(x), & a \leq x \leq s, \\ \psi(s)y_2(x), & s \leq x \leq b, \end{cases} \quad (13)$$

де функції φ і ψ вибираються так, щоб виконувалася властивість 3) з означення функції Гріна, тобто

$$\psi(s)y_2(s) = \varphi(s)y_1(s), \quad \psi(s)y_2'(s) - \varphi(s)y_1'(s) = \frac{1}{p(s)}. \quad (14)$$

Оскільки визначник системи (14) є визначником Вронського, складеним для лінійно незалежних розв'язків y_1 і y_2 рівняння (8) з неперервними коефіцієнтами, то він не дорівнює нулю, а тому система (14) має єдиний розв'язок. Нехай $W(s) = \begin{vmatrix} y_2(s) & -y_1(s) \\ y_2'(s) & -y_1'(s) \end{vmatrix} \neq 0$ – визначник Вронського, тоді з системи (14) випливає, що

$$\varphi(s) = \frac{y_2(s)}{p(s)W(s)}, \quad \psi(s) = \frac{y_1(s)}{p(s)W(s)}.$$

Підставивши ці вирази в (13), одержимо, що

$$G(x, s) = \begin{cases} \frac{y_1(x)y_2(s)}{p(s)W(s)}, & a \leq x \leq s, \\ \frac{y_1(s)y_2(x)}{p(s)W(s)}, & s \leq x \leq b. \end{cases} \quad (15)$$

Приклад 7. Використовуючи функцію Гріна, розв'язати крайову задачу

$$y'' - y = -2e^x, \quad y(0) - y'(0) = 0, \quad y(l) + y'(l) = 0.$$

◀ Спочатку перевіримо, чи існує функція Гріна відповідної однорідної крайової задачі

$$y'' - y = 0, \quad y(0) - y'(0) = 0, \quad y(l) + y'(l) = 0.$$

Оскільки $y_1(x) = e^x$, $y_2(x) = e^{-x}$ є фундаментальною системою розв'язків рівняння, то загальний розв'язок має вигляд

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x}.$$

Задовольнимо крайові умови:

$$\begin{cases} C_1 e^0 + C_2 e^0 - C_1 e^0 + C_2 e^{-0} = 0, \\ C_1 e^l + C_2 e^{-l} + C_1 e^l - C_2 e^{-l} = 0 \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} 2C_2 = 0, \\ 2C_1 e^l = 0. \end{cases}$$

Звідси випливає, що $C_1 = 0$, $C_2 = 0$, тобто $y(x) = 0$, $x \in [0, l]$.
Отже, функція Гріна існує.

Очевидно, що y_1 задовольняє першу крайову умову, а y_2 – другу крайову умову. Знайдемо

$$W(s) = \begin{vmatrix} e^{-s} & -e^s \\ -e^{-s} & -e^s \end{vmatrix} = -e^{-s}e^s - e^{-s}e^s = -2$$

і підставимо його в (15) разом з y_1 і y_2 :

$$G(x, s) = \begin{cases} \frac{e^x e^{-s}}{-2}, & 0 \leq x \leq s, \\ \frac{e^{-x} e^s}{-2}, & 0 \leq s \leq l. \end{cases}$$

Скориставшись формулою (11), одержимо розв'язок задачі

$$\begin{aligned} y(x) &= \int_0^l G(x, s) f(s) ds = \int_0^l G(x, s) (-2e^s) ds = \int_0^x \left(-\frac{1}{2}\right) e^s e^{-x} \times \\ &\times (-2e^s) ds + \int_x^l \left(-\frac{1}{2}\right) e^{-s} e^x (-2e^s) ds = \int_0^x e^{2s} e^{-x} ds + \int_x^l e^x ds = \\ &= e^{-x} \int_0^x e^{2s} ds + e^x \int_x^l ds = e^{-x} \frac{1}{2} e^{2s} \Big|_0^x + e^x s \Big|_x^l = \\ &= \frac{1}{2} e^{-x} (e^{2x} - e^0) + e^x (l - x) = \frac{1}{2} (e^x - e^{-x}) + e^x (l - x), \quad x \in [0, l]. \quad \blacktriangleright \end{aligned}$$

Якщо коефіцієнти рівняння (9) або крайових умов (10) залежать від деякого параметра λ , то за певних умов існують такі значення цього параметра, для яких однорідна крайова задача (8), (10) має ненульовий (нетривіальний) розв'язок. Ці значення параметра λ називаються **власними числами**, а відповідні їм ненульові розв'язки крайової задачі – **власними функціями**.

Важливим окремим випадком задачі на власні числа є **задача Штурма-Ліувілля**:

$$(p(x)y')' - q(x)y + \lambda\rho(x)y = 0,$$

$$\alpha y(a) + \beta y'(a) = 0, \quad \gamma y(b) + \delta y'(b) = 0,$$

де функції p, p', q, ρ неперервні на $[a, b]$, $p(x) > 0, \rho(x) > 0, x \in [a, b]$, сталі α, β, γ і δ задовольняють умови $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0, \gamma^2 + \delta^2 \neq 0$.

Приклад 8. Знайти власні числа і власні функції крайової задачі

$$y'' + \lambda^2 y = 0, \quad \lambda \neq 0,$$

$$y'(0) = 0, \quad y(\pi) = 0.$$

◀ Загальний розв'язок рівняння

$$y(x) = C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x, \quad \{C_1, C_2\} \subset \mathbb{R}.$$

Тоді

$$y'(x) = -C_1 \lambda \sin \lambda x + C_2 \lambda \cos \lambda x.$$

Задовольняючи крайові умови, дістаємо систему рівнянь для знаходження C_1 і C_2 :

$$\begin{cases} -C_1 \lambda \sin(\lambda \cdot 0) + C_2 \lambda \cos(\lambda \cdot 0) = 0, \\ C_1 \cos \lambda \pi + C_2 \sin \lambda \pi = 0 \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} C_2 \lambda = 0, \\ C_1 \cos \lambda \pi + C_2 \sin \lambda \pi = 0. \end{cases}$$

Ця система має ненульові розв'язки тоді й тільки тоді, коли її визначник дорівнює нулю:

$$\begin{vmatrix} 0 & \lambda \\ \cos \lambda \pi & \sin \lambda \pi \end{vmatrix} = 0$$

або

$$\lambda \cos \lambda \pi = 0.$$

Оскільки $\lambda \neq 0$, то $\cos \lambda\pi = 0$. Звідси випливає, що

$$\lambda\pi = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

тобто власними числами є

$$\lambda_n = \frac{2n+1}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Їм відповідають з точністю до сталого множника C_1 , який можна взяти рівним одиниці, власні функції

$$y_n(x) = \cos \frac{2n+1}{2}x, \quad n \in \mathbb{Z}. \blacktriangleright$$

14.5. Коливний характер розв'язків рівняння другого порядку. Розглянемо рівняння

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0. \quad (16)$$

Припустимо, що його коефіцієнти p і q визначені та неперервні, наприклад, на деякому інтервалі (a, b) . Тоді будь-який розв'язок рівняння (16) визначений і двічі неперервно диференційований на всьому інтервалі (a, b) .

Розглядатимемо тільки ненульові розв'язки, тобто розв'язки $y \neq 0$ на (a, b) .

Нулем розв'язку $y(x)$ називається точка x_0 , у якій ця функція перетворюється в нуль, тобто $y(x_0) = 0$. Відомо, що нулі будь-якого ненульового розв'язку рівняння (16) **ізолювані**, і число нулів розв'язку на довільному відрізку $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$ є скінченним.

Якщо розв'язок y перетворюється в нуль на інтервалі (a, b) не менше двох разів, то він називається **коливним** на цьому інтервалі, а в протилежному випадку – **неколивним**.

Рівняння (16) за допомогою заміни

$$y = e^{-\frac{1}{2} \int p(x) dx} z(x)$$

зводиться до рівняння

$$z'' + I(x)z = 0, \quad (17)$$

де $I(x) := -\frac{p'(x)}{2} - \frac{p^2(x)}{4} + q(x)$.

Розв'язки рівнянь (16) і (17) мають один і той самий коливний характер.

Тому надалі ми розглядатимемо рівняння

$$y'' + q(x)y = 0, \quad (18)$$

де q – неперервна функція на (a, b) . Якщо коефіцієнт q задовольняє умову

$$q(x) \leq 0, \quad x \in [a, b], \quad (19)$$

то всі ненульові розв'язки рівняння (18) є неколивними на цьому інтервалі.

Доведено, що нулі двох лінійно незалежних розв'язків одного й того самого однорідного лінійного рівняння другого порядку взаємно відокремлюють один одного, тобто між двома послідовними нулями одного з цих розв'язків лежить один нуль іншого. Наприклад, таку властивість мають розв'язки $y_1 = \sin x$ і $y_2 = \cos x$ рівняння $y'' + y = 0$.

Нехай є два рівняння

$$y'' + q_1(x)y = 0 \quad \text{і} \quad z'' + q_2(x)z = 0, \quad (20)$$

коефіцієнти яких неперервні на (a, b) . Якщо

$$q_2(x) \geq q_1(x), \quad x \in (a, b),$$

то розв'язки другого рівняння коливаються сильніше, ніж розв'язки першого, а саме: між двома послідовними нулями будь-якого розв'язку y першого рівняння знаходиться, принаймні, один нуль будь-якого розв'язку z другого рівняння, якщо в інтервалі між цими нулями є хоча б одна точка x , в якій $q_2(x) > q_1(x)$.

Якщо функція q неперервна і додатна на відрізку $[a, b]$, то для відстані ρ між двома послідовними нулями розв'язків рівняння (18) правильна оцінка

$$\frac{\pi}{\sqrt{M}} \leq \rho \leq \frac{\pi}{\sqrt{m}}, \quad (21)$$

де $M := \max_{x \in [a,b]} q(x)$, $m := \min_{x \in [a,b]} q(x)$.

Приклад 9. Дослідити характер коливальності розв'язків рівняння $x^2 y'' + a^2 y = 0$, $a \neq 0$ на інтервалі $(0, +\infty)$.

◀ Оскільки $q(x) = \frac{a^2}{x^2} > 0$, $x \in (0, \infty)$, то ознака неколивальності (19) не може бути використана.

За допомогою заміни незалежної змінної $x = e^t$ зведемо наше рівняння Ейлера до рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$\frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} + a^2 y = 0.$$

Якщо в одержаному рівнянні зробити заміну функції $y = e^{x/2} z$, то воно набуде вигляду

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \left(a^2 - \frac{1}{4}\right) z = 0.$$

Звідси випливає, що при $a^2 \leq \frac{1}{4}$ всі розв'язки цього рівняння, а отже, й вихідного рівняння будуть неколивними. ▶

Приклад 10. Оцінити відстань між двома сусідніми нулями розв'язків рівняння

$$y'' - 2xy' + (x+1)^2 y = 0, \quad x \in [4, 19].$$

◀ Зведемо спочатку це рівняння до вигляду (18), зробивши заміну

$$y = e^{\int x dx} z$$

або

$$y = e^{\frac{x^2}{2}} z.$$

Оскільки

$$\begin{aligned} I(x) &= -\frac{p'(x)}{2} - \frac{p^2(x)}{4} + q(x) = \frac{2}{2} - \frac{4x^2}{4} + (x+1)^2 = \\ &= 1 - x^2 + x^2 + 2x + 1 = 2 + 2x = 2(1+x), \end{aligned}$$

то одержимо рівняння

$$z'' + 2(1+x)z = 0.$$

Маємо $M = \max_{x \in [4;19]} 2(1+x) = 2(1+19) = 40$, $m = \min_{x \in [4;19]} 2(1+x) = 2(1+4) = 10$, тому

$$\frac{\pi}{\sqrt{40}} \leq \rho \leq \frac{\pi}{\sqrt{10}}$$

або

$$0,5 \leq \rho \leq 1. \quad \blacktriangleright$$

Вправи

1. За допомогою заміни шуканої функції, зінтегрувати рівняння:

- 1) $x^2 y'' + xy' + (x^2 - \frac{1}{4})y = 0$; 2) $xy'' + 2y' - xy = e^x$;
- 3) $y'' + \frac{2}{x}y' - a^2y = 2$.

2. Комбінуючи заміну незалежної змінної і шуканої функції, розв'язати рівняння:

- 1) $x^4 y'' - k^2 y = 0$; 2) $y'' + 2xy' + (\frac{1}{x^2} + 1 + x^2)y = 0$;
- 3) $y'' - 2xy' - (\frac{1}{x^2} + 1 - x^2)y = 0$.

3. Знайти загальний розв'язок рівняння, використовуючи вказаний частинний розв'язок y_1 :

- 1) $y'' + \frac{2}{x}y' + y = 0$, $y_1 = \frac{\sin x}{x}$;
- 2) $(\sin x - \cos x)y'' - 2 \sin xy' + (\cos x + \sin x)y = 0$, $y_1 = e^x$;
- 3) $y'' + 2xy' - 2y = 0$, $y_1 = x$;
- 4) $(1 - x^2)y'' - xy' + \frac{1}{4}y = 0$, $y_1 = \sqrt{1+x}$;
- 5) $(1 - x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$, $-1 < x < 1$, $y_1 = x$;
- 6) $(x^2 + 1)y'' - 2xy' + 2y = 0$, $y_1 = x$.

4. Знайти частинний розв'язок у вигляді многочлена та зінтегрувати рівняння:

- 1) $(x^2 - 1)y'' = 6y$;
- 2) $(x^2 - 3x)y'' + (6 - x^2)y' + (3x - 6)y = 0$;
- 3) $x^2(2 \ln x - 1)y'' - x(2 \ln x + 1)y' + 4y = 0$.

5. Розв'язати крайову задачу:

- 1) $y'' - y' = 0$, $y(0) = -1$, $y'(1) - y(1) = 2$;

- 2) $y'' + y = 1, y(0) = 0, y(\pi) = 0;$
- 3) $y'' + y = 2x - \pi, y(0) = 0, y(\pi) = 0;$
- 4) $y'' - y = 1, y(0) = 0, y(x)$ – обмежена при $x \rightarrow \infty;$
- 5) $y'' - 2y' - 3y = 0, y(0) = 1, \lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = 0;$
- 6) $y'' - y' = 2e^{2x}, y'(0) = 2, y(1) = e^2;$
- 7) $y'' + y' = 2, y(0) = 0, y(1) = 2;$
- 8) $x^2 y'' + 2xy' = \frac{1}{x}, y(1) = 1, y(e) = 0;$
- 9) $x^2 y'' + xy' - y = 2x, y(1) = 0, y(2) = 2 \ln 2;$
- 10) $y'' + \pi^2 y = 1, y(0) = 0, y(1) = 0;$
- 11) $y'' + \pi^2 y = 3\pi^2 \sin 2\pi x, y(0) = 0, y(1) = 0;$
- 12) $y'' - 5y' + 4y = 8, y(0) = 1, y(\ln 2) = 2.$

6. Знайти функцію Гріна крайової задачі:

- 1) $y'' + y = f(x), y'(0) = 0, y(\pi) = 0;$
- 2) $y'' - y = f(x), y'(0) = 0, y'(2) + y(2) = 0;$
- 3) $xy'' + y' = f(x), y(1) = 0, y(x)$ обмежена при $x \rightarrow \infty;$
- 4) $y'' - y' = f(x), y(0) = 0, y(1) = y'(1);$
- 5) $x^2 y'' + 3xy' - 3y = f(x), y(1) = 0, y(2) = 2y'(2).$

7. За допомогою функції Гріна розв'язати задачу:

- 1) $y'' + y = x, y(0) = 0, y(\frac{\pi}{2}) = 0;$
- 2) $xy'' + y' = x, y(1) = 0, y(e) = 0;$
- 3) $y'' + \pi^2 y = \cos \pi x, y(0) = y(1), y'(0) = y'(1);$
- 4) $y'' + y = x^2, y(0) = 0, y(\frac{\pi}{2}) = 0.$

8. Знайти власні числа та власні функції крайової задачі:

- 1) $y'' = \lambda y, y(0) = 0, y'(1) = 0;$
- 2) $y'' = \lambda y, y(0) = y(1), y'(0) = y'(1);$
- 3) $x^2 y'' - xy' + y = \lambda y, y(1) = 0, y(2) = 0;$
- 4) $y'' = \lambda y, y'(0) = 0, y'(l) = 0;$
- 5) $x^2 y'' = \lambda y, y(1) = 0, y(a) = 0.$

9. Дослідити коливний характер розв'язків рівняння Бесселя нульового порядку

$$xy'' + y' + xy = 0$$

на інтервалі $(0, +\infty)$.

10. Знайти відстань між двома сусідніми нулями нетривіального розв'язку рівняння:

- 1) $y'' + 2xy = 0, x \in [20, 45];$

- 2) $xy'' + y = 0, x \in [25, 100]$;
 3) $y'' - 2e^x y' + e^{2x} y = 0, x \in [2, 6]$.

11. Знайти відстань між двома сусідніми послідовними нулями довільного нетривіального розв'язку рівняння $y'' + my = 0$, де $m = \text{const} > 0$. Скільки нулів міститься на відрізку $[a, b]$?

Відповіді

1. 1) $y = C_1 \frac{\cos x}{\sqrt{x}} + C_2 \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$; 2) $y = \frac{1}{2}e^x + C_1 \frac{e^x}{x} + C_2 \frac{e^{-x}}{x}$;
 3) $y = -\frac{2}{a^2} + C_1 \frac{e^{ax}}{x} + C_2 \frac{e^{-ax}}{x}$.
 2. 1) $y = x(C_1 e^{\frac{k}{x}} + C_2 e^{-\frac{k}{x}})$;
 2) $y = e^{-\frac{x^2}{2}} \sqrt{x} (C_1 \cos(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln |x|) + C_2 \sin(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln |x|))$;
 3) $y = e^{\frac{x^2}{2}} (C_1 |x|^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} + C_2 |x|^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}})$.
 3. 1) $y = C_1 \frac{\sin x}{x} - C_2 \frac{\cos x}{x}$; 2) $y = C_1 e^x + C_2 \sin x$;
 3) $y = x(C_1 + C_2 \int \frac{e^{-x^2}}{x^2} dx)$; 4) $y = C_1 \sqrt{1+x} + C_2 \sqrt{1-x}$;
 5) $y = x \left(C_1 + C_2 \left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} \right) \right)$; 6) $y = C_1 x + C_2 (x^2 - 1)$.
 4. 1) $y_1 = x^3 - x, y = C_1 (x^3 - x) + C_2 (6x^2 - 4 - 3(x^2 - x) \ln(\frac{x+1}{x-1}))$; 2) $y_1 = x^3, y = C_1 x^3 + C_2 e^x$; 3) $y_1 = \frac{x^2}{2}, y = C_1 x^2 + C_2 \ln x$.
 5. 1) $y = e^x - 2$; 2) розв'язку немає; 3) $y = \pi \cos x + C_2 \sin x + 2x - \pi$; 4) $y = e^{-x} - 1$; 5) $y = e^{-3x}$; 6) $y = e^{2x}$; 7) $y = 2x$; 8) $y = \frac{1-\ln x}{x}$; 9) $y = x \ln x$; 10) розв'язку немає; 11) $y = C \sin \pi x - \sin 2\pi x$; 12) $y = 2 - \frac{4}{3}e^x + \frac{1}{3}e^{4x}$.
 6. 1) $G(x, s) = \begin{cases} \sin s \cos x, & 0 \leq x \leq s, \\ \cos s \sin x, & s \leq x \leq \pi; \end{cases}$
 2) $G(x, s) = \begin{cases} -e^{-s} \text{ch } x, & 0 \leq x \leq s, \\ -e^{-x} \text{ch } s, & s \leq x \leq 2; \end{cases}$
 3) $G(x, s) = \begin{cases} -\ln x, & 1 \leq x \leq s, \\ -\ln s, & s \leq x \leq +\infty; \end{cases}$
 4) $G(x, s) = \begin{cases} 1 - e^x, & 0 \leq x \leq s, \\ e^x (e^{-s} - 1), & s \leq x \leq 1; \end{cases}$
 5) $G(x, s) = \begin{cases} \frac{1}{4} s^2 (\frac{1}{x^3} - x), & 1 \leq x \leq s, \\ \frac{1}{4} x (\frac{1}{s^2} - s^2), & s \leq x \leq 2. \end{cases}$
 7. 1) $y = x - \frac{\pi}{2} \sin x$; 2) $y = \frac{1}{4} ((1 - e^2) \ln x + x^2 - 1)$; 3) $y = \frac{1}{4\pi} (2x - 1) \sin \pi x$; 4) $y = 2 \cos x + (2 - \frac{\pi^2}{4}) \sin x + x^2 - 2$.

8. 1) $\lambda_n = -(n + \frac{1}{2})^2\pi^2$, $y_n(x) = C_n \sin(n + \frac{1}{2})\pi x$, $C_n \neq 0$, $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$; 2) $\lambda_n = -4n^2\pi^2$, $y_n(x) = C_n \cos 2n\pi x + D_n \sin 2n\pi x$, $|C_n| + |D_n| > 0$, $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$; 3) $\lambda_n = -(\frac{\pi n}{\ln 2})^2$, $y_n(x) = C_n x \sin(\frac{\pi n \ln x}{\ln 2})$, $C_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$; 4) $\lambda_n = -(\frac{n\pi}{l})^2$, $y_n = C_n \cos \frac{\pi n x}{l}$, $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$; 5) $\lambda_n = -\frac{1}{4} - (\frac{n\pi}{\ln a})^2$, $y_n(x) = C_n \sqrt{x} \sin \frac{n\pi \ln x}{\ln a}$, $n \in \mathbb{N}$.

9. Коливні, відстань між сусідніми нулями менша за π .

10. 1) $0, 33 \leq \rho \leq 0, 5$; 2) $15, 7 \leq \rho \leq 32$; 3) $0, 15 \leq \rho < 1, 2$.

11. $\frac{\pi}{\sqrt{m}}$, $\left[\frac{(b-a)\sqrt{m}}{\pi} \right] + 1$, де $[x]$ – ціла частина числа x .

Розділ 4

Системи диференціальних рівнянь

§ 15. Нормальні системи диференціальних рівнянь. Основні поняття і твердження

Сукупність співвідношень вигляду

$$\begin{cases} F_1(x, y_1, \dots, y_n, y'_1, \dots, y'_n) = 0, \\ \dots \dots \dots \\ F_n(x, y_1, \dots, y_n, y'_1, \dots, y'_n) = 0, \end{cases} \quad (1)$$

де $n \geq 2$, y_1, \dots, y_n – шукані функції від незалежної змінної x , а F_1, \dots, F_n – відомі функції своїх аргументів, які визначені в деякій області $Q \subset \mathbb{R}^{2n+1}$, називається **системою звичайних диференціальних рівнянь 1-го порядку**. Вважатимемо, що система (1) розв’язана відносно похідних від шуканих функцій

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, \dots, y_n), \\ \dots \dots \dots \\ \frac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, \dots, y_n), \end{cases} \quad (2)$$

де f_i , $i \in \{1, \dots, n\}$, – відомі функції своїх аргументів, які визначені в деякій області $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Система вигляду (2) називається **нормальною системою диференціальних рівнянь**. Число рівнянь, які входять у систему (2), називається **порядком** цієї системи. Згідно з цим означенням система (2) є системою n -го порядку.

Якщо праві частини системи (2) лінійно залежать від шуканих функцій y_1, \dots, y_n , тобто якщо система (2) має вигляд

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = p_{11}(x)y_1 + \dots + p_{1n}(x)y_n + f_1(x), \\ \dots \dots \dots \\ \frac{dy_n}{dx} = p_{n1}(x)y_1 + \dots + p_{nn}(x)y_n + f_n(x), \end{cases} \quad (3)$$

де $p_{kl}(x)$, $\{k, l\} \subset \{1, \dots, n\}$ і $f_k(x)$, $k \in \{1, \dots, n\}$, – задані функції від x , то вона називається **лінійною системою диференціальних рівнянь** або просто **лінійною системою**.

Якщо праві частини системи (2) не залежать явно від незалежної змінної x , тобто якщо система (2) має вигляд

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = f_1(y_1, \dots, y_n), \\ \dots \dots \dots \\ \frac{dy_n}{dx} = f_n(y_1, \dots, y_n), \end{cases} \quad (4)$$

то вона називається **автономною** або **стаціонарною**.

Сукупність n функцій

$$y_1 = \varphi_1(x), \dots, y_n = \varphi_n(x), \quad (5)$$

які визначені та неперервно диференційовні на проміжку X , називається **розв’язком** системи (2) на цьому проміжку, якщо вона перетворює всі рівняння системи (2) в рівності

$$\begin{cases} \varphi'_1(x) = f_1(x, \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)), \\ \dots \dots \dots \\ \varphi'_n(x) = f_n(x, \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)), \end{cases}$$

які правильні при всіх значеннях $x \in X$.

Приклад 1. Описати розв’язки системи

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = 5y + 4z, \\ \frac{dz}{dx} = 4y + 5z. \end{cases} \quad (6)$$

◀ Безпосередньою підстановкою в рівняння системи переконуємося, що сукупність функцій

$$y_1 = e^x, \quad z_1 = -e^x, \quad x \in \mathbb{R},$$

є розв’язком цієї системи на \mathbb{R} :

$$\begin{cases} e^x = 5e^x - 4e^x, \\ -e^x = 4e^x - 5e^x, \quad x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Система (6) має й інші розв'язки. Наприклад, розв'язком буде

$$y_2 = e^{9x}, \quad z_2 = e^{9x}, \quad x \in \mathbb{R},$$

а також пара функцій

$$\begin{cases} y = C_1 e^x + C_2 e^{9x}, \\ z = -C_1 e^x + C_2 e^{9x}, \end{cases} \quad x \in \mathbb{R}, \quad (7)$$

де C_1, C_2 – довільні сталі. Щоб переконатися в цьому, підставимо (7) в (6):

$$\begin{cases} C_1 e^x + 9C_2 e^{9x} = 5C_1 e^x + 5C_2 e^{9x} - 4C_1 e^x + 4C_2 e^{9x}, \\ -C_1 e^x + 9C_2 e^{9x} = 4C_1 e^x + 4C_2 e^{9x} - 5C_1 e^x + 5C_2 e^{9x}. \end{cases}$$

Очевидно, що ці рівності правильні для всіх $x \in \mathbb{R}$. ►

З наведеного прикладу випливає, що система двох рівнянь має розв'язок, який містить дві довільні сталі. Пізніше ми переконаємося, що за певних умов нормальна система n рівнянь має розв'язок, який містить n довільних сталих.

Процес знаходження розв'язків системи (2) називається **інтегруванням** цієї системи.

Якщо розглядати x, y_1, \dots, y_n як координати точки в $(n+1)$ -вимірному просторі точок (x, y_1, \dots, y_n) , то розв'язку (5) відповідає деяка лінія в цьому просторі. Ця лінія називається **інтегральною лінією** системи (2).

Для системи (2) **задача Коші** ставиться так: *серед усіх розв'язків цієї системи треба знайти розв'язок*

$$y_1 = y_1(x), \dots, y_n = y_n(x), \quad (8)$$

який задовольняє початкові умови

$$y_1(x_0) = y_{10}, \dots, y_n(x_0) = y_{n0}. \quad (9)$$

Задача Коші для системи (2) з початковими умовами (9) геометрично означає, що треба серед усіх інтегральних ліній системи (2) знайти ту, яка проходить через задану точку $(x_0, y_{10}, \dots, y_{n0})$.

Наведемо без доведення **теорему Коші** про існування і єдиність розв'язку задачі Коші (2), (9): якщо функції f_i , $i \in \{1, \dots, n\}$, визначені та неперервні в деякому околі точки $(x_0, y_0, \dots, y_n) \in D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ і мають в цьому околі неперервні й обмежені частинні похідні $\frac{\partial f_i}{\partial y_k}$, $\{i, k\} \subset \{1, \dots, n\}$, то існує єдиний розв'язок системи (2), який задовольняє умови (9) і визначений в деякому околі точки x_0 .

Дамо означення загального розв'язку системи (2) в області D зміни x, y_1, \dots, y_n . За D візьмемо область, у кожній точці якої виконуються умови теореми Коші для системи (2).

Сукупність n функцій

$$y_i = y_i(x, C_1, \dots, C_n), \quad i \in \{1, \dots, n\}, \quad \{C_1, \dots, C_n\} \subset \mathbb{R},$$

називається **загальним розв'язком** системи диференціальних рівнянь (2), якщо:

1) вона є розв'язком цієї системи при довільних допустимих значеннях C_1, \dots, C_n ;

2) для довільних початкових значень (9) можна знайти такі $C_1 = C_1^0, \dots, C_n = C_n^0$, що функції $y_i(x, C_1^0, \dots, C_n^0)$, $i \in \{1, \dots, n\}$, задовольняють ці початкові умови, тобто

$$y_i(x_0, C_1^0, \dots, C_n^0) = y_{i0}, \quad i \in \{1, \dots, n\}.$$

Якщо розв'язок системи (2) складається тільки з точок єдиності розв'язку задачі Коші для цієї системи, то такий розв'язок називатимемо **частинним розв'язком**.

Очевидно, що розв'язок, який одержується з формули для загального розв'язку при конкретних числових значеннях C_1, \dots, C_n , є частинним.

Розв'язок системи (2), в кожній точці якого порушується єдиність розв'язку задачі Коші для цієї системи, називатимемо **особливим розв'язком**.

Приклад 2. Знайти всі розв'язки системи

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = x + \frac{2}{x}y - \sqrt{z}, \\ \frac{dz}{dx} = 2\sqrt{z}, x \neq 0. \end{cases}$$

визначені та диференційовні в деякій n -вимірній області D .

Функція u_k залежить в області D від решти функцій, якщо одночасно для всіх точок $(x_1, \dots, x_n) \in D$ правильна рівність

$$u_k = \Phi(u_1, \dots, u_{k-1}, u_{k+1}, \dots, u_m), \quad (11)$$

де Φ – деяка функція, визначена й диференційовна в області Ω , яка містить всі точки вигляду

$$(\varphi_1(x_1, \dots, x_n), \varphi_2(x_1, \dots, x_n), \dots, \varphi_{k-1}(x_1, \dots, x_n), \\ \varphi_{k+1}(x_1, \dots, x_n); \dots; \varphi_m(x_1, \dots, x_n)),$$

якщо $(x_1, \dots, x_n) \in D$.

Функції u_1, \dots, u_m називаються **залежними в області D** , якщо одна з цих функцій, байдуже яка, залежить в цій області від інших.

Якщо ж не існує диференційовної функції Φ такої, що одночасно для всіх точок області D правильна рівність вигляду $u_k = \Phi(u_1, \dots, u_{k-1}, u_{k+1}, \dots, u_m)$, то функції u_1, \dots, u_m називають **незалежними** в області D .

Очевидно, що коли серед системи функцій u_1, \dots, u_m є стала, наприклад, $u_k = C$, то за функцію Φ можна взяти $\Phi = C$ тоді виконується рівність (11), а тому ці функції залежні.

Розглянемо систему функцій $u_1 = \cos x$ і $u_2 = \sin x$, які визначені на відрізку $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Ця система є залежною на цьому відрізку, бо $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Функцією Φ з тожності (11) є $\Phi(u_2) = \sqrt{1 - u_2^2}$, $0 \leq u_2 \leq 1$. Слід зауважити, що функції $u_1 = \cos x$ і $u_2 = \sin x$ є лінійно незалежними на відрізку $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Тому треба розрізняти поняття незалежності (залежності) системи функцій і лінійної незалежності (залежності) системи функцій.

Якщо відомо n незалежних перших інтегралів $\psi_1 = C_1, \dots, \psi_n = C_n$, то сукупність

$$\psi_i(x, y_1, \dots, y_n) = C_i, \quad i \in \{1, \dots, n\},$$

де C_i – довільні сталі, визначає **загальний інтеграл системи (2)**.

Доведено, що коли функції ψ_1, \dots, ψ_n – ліві частини перших інтегралів – мають неперервні частинні похідні, то вони незалежні тоді й тільки тоді, коли якобіан для цих функцій за змінними y_1, \dots, y_n не перетворюється в нуль, тобто

$$\frac{D(\psi_1, \dots, \psi_n)}{D(y_1, \dots, y_n)} := \begin{vmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial \psi_1}{\partial y_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial \psi_n}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial \psi_n}{\partial y_n} \end{vmatrix} \neq 0.$$

До нормальної системи шляхом введення допоміжних функцій зводиться диференціальне рівняння n -го порядку

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}), \quad (12)$$

яке розв'язане відносно старшої похідної. Справді, покладемо

$$\begin{cases} y =: y_1, \\ y' = y'_1 =: y_2, \\ \dots \\ y^{(n-1)} = y'_{n-1} =: y_n, \end{cases} \quad (13)$$

тоді рівняння (12) набуде вигляду

$$y^{(n)} = y'_n = f(x, y_1, y_2, \dots, y_n).$$

Отже, диференціальне рівняння n -го порядку можна звести до такої нормальної системи диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} y'_1 = y_2, \\ \dots \\ y'_{n-1} = y_n, \\ y'_n = f(x, y_1, \dots, y_n). \end{cases} \quad (14)$$

Згідно з першою рівністю з (13) функція y_1 є розв'язком рівняння (12).

При виконанні певних умов нормальну систему диференціальних рівнянь можна звести до одного диференціального рівняння n -го порядку. Справді, нехай задано нормальну систему (2) з n разів неперервно диференційовними функціями

$f_i, i \in \{1, \dots, n\}$. Продиференціюємо, наприклад, перше рівняння системи за x :

$$y_1'' = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial f_1}{\partial y_k} y_k'.$$

Підставивши в останню рівність значення $y_k', k \in \{1, \dots, n\}$, з системи (2), матимемо

$$y_1'' = \varphi_2(x, y_1, \dots, y_n).$$

Аналогічно, диференціюючи одержану рівність за x , знайдемо

$$y_1''' = \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial \varphi_2}{\partial y_k} y_k' =: \varphi_3(x, y_1, \dots, y_n).$$

Продовжуючи цей процес, дістаємо систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, \dots, y_n), \\ y_1'' = \varphi_2(x, y_1, \dots, y_n), \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ y_1^{(n-1)} = \varphi_{n-1}(x, y_1, \dots, y_n), \\ y_1^{(n)} = \varphi_n(x, y_1, \dots, y_n). \end{cases} \quad (15)$$

Якщо з перших $n - 1$ рівнянь системи (15) вдається виразити функції y_2, \dots, y_n через функцію y_1 та її похідні, то, підставивши одержані вирази в останнє рівняння цієї системи, для функції y_1 матимемо диференціальне рівняння n -го порядку

$$y_1^{(n)} = f(x, y_1, y_1', \dots, y_1^{(n-1)}).$$

На цьому базується один з методів розв'язування систем диференціальних рівнянь, який називається **методом виключення**.

Приклад 3. Методом виключення розв'язати систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = y_2 - y_3, \\ y_3' = y_2 - y_1. \end{cases}$$

◀ Якщо продиференціювати перше рівняння двічі за x і скористатися другим і третім рівняннями системи, то матимемо: $y_1'' = y_2'$ або $y_1'' = y_2 - y_3$, $y_1''' = y_2' - y_3'$ або $y_1''' = y_1 - y_3$. Отже, одержали систему

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_1'' = y_2 - y_3, \\ y_1''' = y_1 - y_3. \end{cases} \quad (16)$$

З першого і другого рівнянь цієї системи знаходимо

$$y_2 = y_1', \quad y_3 = y_1' - y_1''. \quad (17)$$

Підставивши (17) у третє рівняння системи (16), отримаємо лінійне однорідне диференціальне рівняння третього порядку зі сталими коефіцієнтами

$$y_1''' - y_1'' + y_1' - y_1 = 0.$$

Загальним розв'язком цього рівняння є

$$y_1 = C_1 e^x + C_2 \cos x + C_3 \sin x, \{C_1, C_2, C_3\} \subset \mathbb{R}.$$

За допомогою співвідношень (17) визначаємо y_2 і y_3 :

$$\begin{aligned} y_2 &= C_1 e^x - C_2 \sin x + C_3 \cos x, \\ y_3 &= C_2(\cos x - \sin x) + C_3(\cos x + \sin x), \{C_1, C_2, C_3\} \subset \mathbb{R}. \blacktriangleright \end{aligned}$$

Зазначимо, що іноді порядок диференціального рівняння для визначення функції y_1 може бути нижчим, ніж n . Це трапляється у тих випадках, коли функції y_2, \dots, y_n виключаються не з n рівнянь системи (2), а з меншої їхньої кількості.

Приклад 4. Знайти розв'язок системи рівнянь

$$\begin{cases} y_1' = y_2 + y_3, \\ y_2' = y_1 + y_3, \\ y_3' = y_1 + y_2, \end{cases} \quad (18)$$

який задовольняє початкові умови $y_1(0) = 2, y_2(0) = 0, y_3(0) = 1$.

◀ Диференціюючи за x перше рівняння системи (18), одержуємо

$$y_1'' = y_2' + y_3'.$$

Якщо врахувати друге і третє рівняння системи, то матимемо

$$y_1'' = 2y_1 + y_2 + y_3.$$

Звідси, скориставшись першим рівнянням системи, отримаємо для визначення функції y_1 диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами

$$y_1'' - y_1' - 2y_1 = 0.$$

Його загальний розв'язок

$$y_1 = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x}, \quad \{C_1, C_2\} \subset \mathbb{R}. \quad (19)$$

Віднімаючи від другого рівняння системи (18) перше, з урахуванням формули (19) одержуємо лінійне неоднорідне диференціальне рівняння для функції y_2 :

$$y_2' + y_2 = 3C_2 e^{2x}.$$

Загальний розв'язок цього рівняння

$$y_2 = C_3 e^{-x} + C_2 e^{2x}, \quad \{C_2, C_3\} \subset \mathbb{R}.$$

Нарешті, з першого рівняння системи знаходимо

$$y_3 = -(C_1 + C_3)e^{-x} + C_2 e^{2x}, \quad \{C_1, C_2, C_3\} \subset \mathbb{R}.$$

Отже, загальний розв'язок системи (18) має вигляд

$$\begin{cases} y_1 = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x}, \\ y_2 = C_3 e^{-x} + C_2 e^{2x}, \\ y_3 = -(C_1 + C_3)e^{-x} + C_2 e^{2x}. \end{cases} \quad \{C_1, C_2, C_3\} \subset \mathbb{R}.$$

Визначимо сталі C_1 , C_2 і C_3 так, щоб задовольнялись початкові умови. Підставляючи в загальний розв'язок $x = 0$ і враховуючи початкові умови, одержуємо

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 2, \\ C_3 + C_2 = 0, \\ -(C_1 + C_3) + C_2 = 1, \end{cases}$$

звідки $C_1 = C_2 = 1$, $C_3 = -1$.

Отже, сукупність функцій

$$\begin{cases} y_1 = e^{-x} + e^{2x}, \\ y_2 = -e^{-x} + e^{2x}, \\ y_3 = e^{2x}. \end{cases}$$

є шуканим частинним розв'язком системи (18).►

Інтегрування системи (2) значно спрощується, якщо вдається знайти один або декілька незалежних перших інтегралів системи, бо тоді порядок системи знижується.

Перші інтеграли в багатьох випадках знаходяться за допомогою побудови інтегровних комбінацій, тобто диференціальних рівнянь, які легко інтегруються і одержуються з системи (2) за допомогою певних арифметичних операцій. Для утворення інтегровних комбінацій зручно попередньо записати задану систему в симетричній формі:

$$\frac{dy_1}{X_1(y_1, \dots, y_n)} = \dots = \frac{dy_n}{X_n(y_1, \dots, y_n)}.$$

Якщо для системи (2) визначено n незалежних перших інтегралів, то тим самим знайдено загальний інтеграл цієї системи.

Приклад 5. Знайти розв'язок системи рівнянь

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{z + e^y}{z + e^x}, \\ \frac{dz}{dx} = \frac{z^2 - e^{x+y}}{z + e^x}. \end{cases}$$

◀ Якщо помножити обидві частини другого рівняння на e^{-x} і додати до першого, то одержимо

$$\frac{dy}{dx} + \frac{dz}{dx}e^{-x} = \frac{z + e^y}{z + e^x} + \frac{z^2 - e^{x+y}}{z + e^x}e^{-x}.$$

Додаючи до правої і лівої частин цього рівняння вираз $-e^{-x}z$, після певних спрощень отримаємо рівняння $(e^{-x}z)' + y' = 0$, звідки знаходимо перший інтеграл

$$e^{-x}z + y = C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R}.$$

Домножимо тепер обидві частини другого рівняння системи на e^{-y} , першого на $-ze^{-y}$ і додамо їх. Тоді дістанемо рівняння $(e^{-y}z)' = -1$. Звідси отримаємо другий перший інтеграл

$$e^{-y}z + x = C_2, \quad C_2 \in \mathbb{R}.$$

Оскільки якобіан системи з перших інтегралів

$$\begin{cases} e^{-x}z + y = C_1, \\ e^{-y}z + x = C_2, \end{cases} \quad \{C_1, C_2\} \subset \mathbb{R},$$

відмінний від нуля, то ці інтеграли незалежні і тому визначають загальний інтеграл системи. ►

Приклад 6. Знайти загальний інтеграл системи

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{z}{(z-y)^2}, \\ \frac{dz}{dx} = \frac{y}{(z-y)^2}. \end{cases}$$

◀ Для знаходження інтегровних комбінацій доцільно записати систему в симетричній формі

$$\frac{\frac{dy}{z}}{\frac{z}{(z-y)^2}} = \frac{\frac{dz}{y}}{\frac{y}{(z-y)^2}} = \frac{dx}{1}$$

або

$$\frac{dy}{z} = \frac{dz}{y} = \frac{dx}{(z-y)^2}.$$

Однією із інтегровних комбінацій є

$$\frac{dy}{z} = \frac{dz}{y},$$

звідки знаходимо перший інтеграл

$$y^2 - z^2 = C_1.$$

Для утворення другої інтегровної комбінації, віднімемо в одержаній системі від чисельника і знаменника першого відношення відповідно чисельник і знаменник другого відношення, а одержаний результат прирівняємо до третього відношення:

$$\frac{d(y-z)}{z-y} = \frac{dx}{(z-y)^2}.$$

Звідси після інтегрування дістанемо другий перший інтеграл

$$2x + (z-y)^2 = C_2.$$

Можна легко перевірити, що знайдені перші інтеграли незалежні, а тому визначають загальний інтеграл системи. ►

Вправи

1. Розв'язати нелінійну систему:

$$\begin{array}{l}
 1) \left\{ \begin{array}{l} \frac{dy}{dx} = e^{x-y}, \\ \frac{dz}{dx} = \frac{2z}{2x - z^2}; \end{array} \right. \quad 2) \left\{ \begin{array}{l} \frac{dy}{dx} = z, \\ \frac{dz}{dx} = \frac{z^2}{y}; \end{array} \right. \\
 3) \left\{ \begin{array}{l} \frac{dy}{dx} = \frac{x}{z}, \\ \frac{dz}{dx} = -\frac{x}{y}; \end{array} \right. \quad 4) \left\{ \begin{array}{l} \frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{z-x}, \\ \frac{dz}{dx} = 1+y; \end{array} \right. \\
 5) \left\{ \begin{array}{l} t \frac{dx}{dt} = -x + yt, \\ t^2 \frac{dy}{dt} = -2x + yt; \end{array} \right. \quad 6) \left\{ \begin{array}{l} yz \frac{dy}{dx} = x, \\ y^2 \frac{dz}{dx} = x; \end{array} \right. \\
 7) \frac{dx}{x-y} = \frac{dy}{x+y} = \frac{dz}{z}; \quad 8) \frac{dx}{z-y} = \frac{dy}{x-z} = \frac{dz}{y-x}; \\
 9) \frac{dx}{x^2 - y^2 - z^2} = \frac{dy}{2xy} = \frac{dz}{2xz}; \quad 10) \frac{dx}{y} = \frac{dy}{x} = \frac{dz}{z}; \\
 11) \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{xy+z}; \quad 12) \frac{dx}{x+y^2+z^2} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}; \\
 13) \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z - (x^2 + y^2)}; \\
 14) \frac{dx}{x} = \frac{dy}{4y} = \frac{dz}{2z} = \frac{\sqrt{x^2 - z^2} du}{x^2 - 2z^2}; \\
 15) \frac{dx}{1 + \sqrt{z-x-y}} = \frac{dy}{1} = \frac{dz}{2}; \quad 16) \frac{dx}{y} = \frac{dy}{0} = \frac{dz}{z}.
 \end{array}$$

2. Знайти розв'язок системи диференціальних рівнянь, який задовольняє початкові умови:

$$\begin{array}{l}
 1) \left\{ \begin{array}{l} \frac{dy}{dx} = 1 - \frac{1}{z}, \\ \frac{dz}{dx} = \frac{1}{y-x}, \end{array} \right. \quad y(0) = -1, z(0) = 1; \\
 2) \left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = \frac{x}{2x+3y}, \\ \frac{dy}{dt} = \frac{y}{2x+3y}, \end{array} \right. \quad x(0) = 1, y(0) = 2;
 \end{array}$$

$$3) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x^2 + y^2, \\ \frac{dy}{dt} = -2xy, \end{cases} \quad x(0) = 0, y(0) = 1;$$

$$4) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = e^{-x} \cos y, \\ \frac{dy}{dt} = -e^{-x} \sin y, \end{cases} \quad x(0) = 1, y(0) = 0.$$

3. Методом виключення розв'язати систему диференціальних рівнянь:

$$1) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -9y, \\ \frac{dy}{dt} = x; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y + t, \\ \frac{dy}{dt} = x - t; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} \frac{dx}{dt} + 3x + 4y = 0, \\ \frac{dy}{dt} + 2x + 5y = 0, \end{cases} \quad x(0) = 1, y(0) = 4;$$

$$4) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 5y, \\ \frac{dy}{dt} = -x - 3y, \end{cases} \quad x(0) = -2, y(0) = 1;$$

$$5) \begin{cases} 4\frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} + 3x = \sin t, \\ \frac{dx}{dt} + y = \cos t; \end{cases} \quad 6) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y + z, \\ \frac{dy}{dt} = z, \\ \frac{dz}{dt} = -x + z; \end{cases}$$

$$7) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y + z, \\ \frac{dy}{dt} = x + z, \\ \frac{dz}{dt} = x + y; \end{cases} \quad 8) \begin{cases} \frac{dy}{dx} = -5y + 2z + 40e^x, \\ \frac{dz}{dy} = y - 6z + 9e^{-x}; \end{cases}$$

$$9) \begin{cases} \frac{dy}{dx} = -3y - z, \\ \frac{dz}{dx} = y - z; \end{cases} \quad 10) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 5x - 6y + z, \\ \frac{dy}{dt} = x - z, \\ \frac{dz}{dt} = -6z; \end{cases}$$

$$11) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 2y - 2te^t, \\ \frac{dy}{dt} = 5x - y - (2t + 6)e^t. \end{cases}$$

Відповіді

1. 1) $e^y - e^x = C_1$, $x = C_2z - \frac{z^2}{2}$; 2) $y = C_2e^{C_1x}$, $z = C_2C_1e^{C_1x}$; 3) $y = C_2e^{C_1x^2}$, $z = \frac{1}{2C_1C_2}e^{-C_1x^2}$;

4) $y = C_2e^{C_1x}$, $z = x + \frac{C_2}{C_1}e^{C_1x}$; $y = 0$, $z = x + C$;

5) $x = C_1 + C_2t$, $y = C_1\frac{1}{t} + 2C_2$, $t \neq 0$;

6) $z = C_1y$, $zy^2 - \frac{3}{2}x^2 = C_2$; 7) $\operatorname{arctg} \frac{y}{x} - \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) = C_1$, $\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} = C_2$; 8) $x + y + z = C_1$, $x^2 + y^2 + z^2 = C_2$;

9) $\frac{z}{y} = C_1$, $\frac{x^2 + y^2 + z^2}{y} = C_2$; 10) $x^2 - y^2 = C_1$, $x + y = C_2z$;

11) $x = C_1y$, $xy - z = C_2x$; 12) $y = C_1z$, $x - y^2 - z^2 = C_2z$;

13) $\frac{y}{x} = C_1$, $\frac{z + x^2 + y^2}{x} = C_2$; 14) $\frac{x^2}{z} = C_1$, $\frac{y}{z^2} = C_2$, $u - \sqrt{x^2 - z^2} = C_3$; 15) $z - 2y = C_1$, $2\sqrt{z - x - y} + y = C_2$;

16) $y = C_1$, $ze^{-\frac{x}{y}} = C_2$.

2. 1) $y = x - e^x$, $z = e^{-x}$; 2) $x = \frac{t}{8} + 1$, $y = \frac{t}{4} + 2$;

3) $x = \frac{1}{1 + t^2}$, $y = \frac{1}{1 + t^2}$; 4) $x = \ln(t + e)$, $y = 0$.

3. 1) $\begin{cases} x = 3C_1 \cos 3t - 3C_2 \sin 3t, \\ y = C_2 \cos 3t + C_1 \sin 3t; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x = C_1e^t - C_2e^{-t} + t - 1, \\ y = C_1e^t + C_2e^{-t} - t + 1; \end{cases}$

- 3) $\begin{cases} x = -2e^{-t} + 3e^{-7t}, \\ y = e^{-t} + 3e^{-7t}; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x = (\sin t - 2 \cos t)e^{-t}, \\ y = e^{-t} \cos t; \end{cases}$
- 5) $\begin{cases} x = C_1e^{-t} + C_2e^{-3t}, \\ y = C_1e^{-t} + 3C_2e^{-3t} + \cos t; \end{cases}$
- 6) $\begin{cases} x = (C_1 - C_2) \cos t + (C_1 + C_2) \sin t, \\ y = C_1 \sin t - C_2 \cos t + C_3e^t, \\ z = C_1 \cos t + C_2 \sin t + C_3e^t; \end{cases}$
- 7) $\begin{cases} x = C_1e^{-t} + C_2e^{2t}, \\ y = C_3e^{-t} + C_2e^{2t}, \\ z = -(C_1 + C_2)e^{-t} + C_2e^{2t}; \end{cases}$
- 8) $\begin{cases} y = C_1e^{-4x} + C_2e^{-7x} + 7e^x + e^{-x}, \\ z = \frac{C_1}{2}e^{-4x} - C_2e^{-7x} + e^x + 2e^{-x}; \end{cases}$
- 9) $\begin{cases} y = (C_1 + C_2x)e^{-2x} \\ z = -(C_1 + C_2 + C_2x)e^{-2x}; \end{cases}$
- 10) $\begin{cases} x = C_2e^{3t} + C_3e^{2t}, \\ y = \frac{1}{6}(2C_2e^{3t} + 3C_3e^{2t} + C_1e^{-6t}), \\ z = C_1e^{-6t}; \end{cases}$
- 11) $\begin{cases} x = C_1 \cos 3t + C_2 \sin 3t - te^t, \\ y = \frac{1}{2}(C_1 - 3C_2) \cos 3t + \frac{1}{2}(3C_1 + C_2) \sin 3t - te^t. \end{cases}$

§ 16. Системи лінійних диференціальних рівнянь

У цьому параграфі розглянемо частинний випадок нормальних систем диференціальних рівнянь, а саме лінійні системи.

Лінійна система диференціальних рівнянь має вигляд

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = p_{11}(x)y_1 + \dots + p_{1n}(x)y_n + f_1(x), \\ \dots \\ \frac{dy_n}{dx} = p_{n1}(x)y_1 + \dots + p_{nn}(x)y_n + f_n(x) \end{cases} \quad (1)$$

або

$$\frac{dy_k}{dx} = \sum_{l=1}^n p_{kl}(x)y_l + f_k(x), \quad k \in \{1, \dots, n\}. \quad (1')$$

Якщо ввести позначення

$$P(x) := \begin{pmatrix} p_{11}(x) & \dots & p_{1n}(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ p_{n1}(x) & \dots & p_{nn}(x) \end{pmatrix},$$

$$Y(x) := \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix}, \quad \frac{dY(x)}{dx} := \begin{pmatrix} \frac{dy_1(x)}{dx} \\ \vdots \\ \frac{dy_n(x)}{dx} \end{pmatrix}, \quad (3)$$

то систему (2) можна записати у вигляді

$$\frac{dY(x)}{dx} = P(x)Y(x). \quad (4)$$

Нехай **частинним розв'язком системи (2)** є система функцій y_{11}, \dots, y_{n1} , тобто ці функції після підставлення їх у рівняння (2) перетворюють останні в тотожності. Безпосередньою перевіркою переконуємося, що й *система функцій Cy_{11}, \dots, Cy_{n1} також є розв'язком системи (2)*. Далі, якщо y_{11}, \dots, y_{n1} і $y_{12}, y_{22}, \dots, y_{n2}$ є *два частинні розв'язки*, то $y_{11} + y_{12}, \dots, y_{n1} + y_{n2}$ також є *розв'язком системи (2)*.

Нехай маємо n частинних розв'язків системи (2):

$$Y_i(x) = \begin{pmatrix} y_{1i}(x) \\ \dots \\ y_{ni}(x) \end{pmatrix}, \quad i \in \{1, \dots, n\}, x \in X. \quad (5)$$

Називатимемо цю систему розв'язків **фундаментальною**, якщо вони лінійно незалежні або, що те саме, визначник Вронського

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_{11}(x) & \dots & y_{1n}(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ y_{n1}(x) & \dots & y_{nn}(x) \end{vmatrix} \quad (6)$$

не дорівнює тотожно нулю на проміжку X . *Фундаментальні системи розв'язків існують: досить взяти n^2 чисел a_{ik} , $\{i, k\} \subset \{1, \dots, n\}$, таких, щоб визначник W_0 , складений з них,*

не дорівнював нулю, а потім знайти n частинних розв'язків y_{1k}, \dots, y_{nk} , $k \in \{1, \dots, n\}$, які при $x = x_0$, де x_0 – деяка точка з проміжку X , набувають значень $y_{1k}(x_0) = a_{1k}, \dots, y_{nk}(x_0) = a_{nk}$, $k \in \{1, \dots, n\}$. Тоді, завдяки неперервності функцій y_{ik} , $\{i, k\} \subset \{1, \dots, n\}$, визначник Вронського (6) буде відмінним від нуля також у деякому околі точки x_0 . Можна довести сильніше твердження, а саме: якщо $W(x_0) \neq 0$, то $W(x)$ не перетворюється в нуль у жодній точці проміжку X . Тому побудована таким чином сукупність розв'язків Y_1, \dots, Y_n системи (2) утворює фундаментальну систему розв'язків.

Доведено [10], що коли функції $Y_1(x), \dots, Y_n(x)$ утворюють фундаментальну систему частинних розв'язків системи (2), то загальним розв'язком буде

$$Y(x) = \sum_{k=1}^n C_k Y_k(x), x \in X, \quad (7)$$

де C_k , $k \in \{1, \dots, n\}$, – довільні сталі.

У випадку, коли коефіцієнти системи p_{ik} , $\{i, k\} \subset \{1, \dots, n\}$, є сталими, фундаментальна система розв'язків знаходиться за методом Ейлера.

Згідно з цим методом розв'язок системи (2) шукаємо у вигляді:

$$y_1 = \gamma_1 e^{\lambda x}, \quad \dots, \quad y_n = \gamma_n e^{\lambda x}, \quad (8)$$

де $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ і λ – деякі сталі, які треба визначити, причому принаймні одне з чисел $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ повинно бути відмінним від нуля.

Підставивши (8) у (2) і скоротивши на $e^{\lambda x}$, дістанемо систему

$$\begin{cases} (p_{11} - \lambda)\gamma_1 + \dots + p_{1n}\gamma_n = 0, \\ \dots \\ p_{n1}\gamma_1 + \dots + (p_{nn} - \lambda)\gamma_n = 0. \end{cases} \quad (9)$$

Для того щоб ця система мала ненульовий розв'язок, необхідно й досить, щоб її визначник дорівнював нулю, тобто щоб

λ було коренем рівняння

$$\begin{vmatrix} p_{11} - \lambda & \dots & p_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ p_{n1} & \dots & p_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (10)$$

або

$$\det(P - \lambda I) = 0. \quad (10')$$

Рівняння (10) називається **характеристичним рівнянням** для системи (2) зі сталими коефіцієнтами, а його розв'язки – **характеристичними числами**.

Кожному з коренів характеристичного рівняння відповідає принаймні один частинний розв'язок вигляду (8). Розрізняють наступні три випадки.

1) **Усі корені $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ рівняння (10) дійсні та різні.** У цьому випадку, поклавши в системі (9) $\lambda = \lambda_i, i \in \{1, \dots, n\}$, дістанемо систему

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda_i)\gamma_1 + \dots + a_{1n}\gamma_n = 0, \\ \dots \\ a_{n1}\gamma_1 + \dots + (a_{nn} - \lambda_i)\gamma_n = 0. \end{cases} \quad (11)$$

Оскільки ранг системи (11) дорівнює $n - 1$, то одне з рівнянь цієї системи є наслідком решти, тому числа $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ визначаються з точністю до сталого множника. Зокрема, за ці розв'язки $\gamma_{ki}, \{i, k\} \subset \{1, \dots, n\}$, можна взяти алгебраїчні доповнення елементів будь-якого рядка визначника (10) з $\lambda = \lambda_i$, якщо вони не дорівнюють нулю одночасно, скоротивши їх на спільний множник у випадку необхідності. Підставивши знайдені значення $\gamma_{1i}, \dots, \gamma_{ni}$ і $\lambda = \lambda_i$ у формулу (8), одержимо розв'язок системи (2), який відповідає кореневі λ_i :

$$y_{1i} = \gamma_{1i}e^{\lambda_i x}, \quad \dots, \quad y_{ni} = \gamma_{ni}e^{\lambda_i x}.$$

Побудувавши розв'язки, які відповідають усім кореням $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, дістанемо фундаментальну систему розв'язків. Тоді загальний розв'язок системи має вигляд

$$y_k = \sum_{i=1}^n C_i \gamma_{ki} e^{\lambda_i x}, \quad k \in \{1, \dots, n\}.$$

2) **Корені характеристичного рівняння (10) різні, але серед них є комплексні.**

Якщо $a + ib$ – корінь характеристичного рівняння (10), то $a - ib$ так само буде коренем. Побудувавши розв’язок вигляду (8), що відповідає кореневі $a + ib$, і відокремивши в ньому дійсну й уявну частини, дістанемо два дійсних лінійно незалежних частинних розв’язки системи (2). Розв’язки, що відповідають кореневі $a - ib$, будуть лінійно залежними з розв’язками, які відповідають кореневі $a + ib$.

Побудувавши частинні розв’язки, що відповідають усім парам комплексно спряжених коренів і всім дійсним кореням, якщо вони є, і взявши лінійну комбінацію всіх побудованих лінійно незалежних частинних розв’язків з довільними сталими, дістанемо загальний розв’язок системи (2).

3) **Серед коренів характеристичного рівняння є кратні.** Нехай λ_1 є коренем рівняння (10) кратності k . Йому відповідає розв’язок вигляду

$$y_1 = P_1(x)e^{\lambda_1 x}, \quad \dots, \quad y_n = P_n(x)e^{\lambda_1 x}, \quad (12)$$

де $P_1(x), \dots, P_n(x)$ – поліноми від x степеня не вищого $(k - 1)$ -го (вони можуть бути й числами), причому серед коефіцієнтів усіх цих поліномів k коефіцієнтів є довільними, а інші виражаються через них.

Покладаючи по чергово один з цих довільних коефіцієнтів рівним одиниці, а решта – нулю, побудуємо k лінійно незалежних розв’язків. Якщо λ_1 дійсне, то ці частинні розв’язки також дійсні.

Якщо $\lambda_1 = a + ib$, то $\overline{\lambda_1} = a - ib$ так само буде коренем характеристичного рівняння кратності k . Знайшовши описаним вище методом k лінійно незалежних комплексних частинних розв’язків, що відповідають кореневі $a + ib$, і відділивши в них дійсні та уявні частини, дістанемо $2k$ лінійно незалежних дійсних частинних розв’язків. Розв’язки, які відповідають кореню $a - ib$, будуть лінійно залежними з розв’язками, що відповідають кореню $a + ib$.

Якщо поряд з кратним коренем λ_1 є інші кратні або прості

корені, то побудувавши n лінійно незалежних дійсних частинних розв'язків, що відповідають усім кореням, і взявши їхню лінійну комбінацію з довільними сталими, дістанемо загальний розв'язок системи (2).

Приклад 1. Розв'язати систему

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = 4y_1 + y_2, \\ \frac{dy_2}{dx} = 3y_1 + 2y_2, \\ \frac{dy_3}{dx} = 2y_1 + 3y_2 + 4y_3. \end{cases}$$

◀ Характеристичне рівняння системи

$$\begin{vmatrix} 4 - \lambda & 1 & 0 \\ 3 & 2 - \lambda & 0 \\ 2 & 3 & 4 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \text{або} \quad (4 - \lambda)(\lambda^2 - 6\lambda + 5) = 0$$

має дійсні корені $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 4$, $\lambda_3 = 5$. Отже, частинний розв'язок, який відповідає кореню $\lambda_1 = 1$ має вигляд $y_1 = \gamma_{11}e^x$, $y_2 = \gamma_{21}e^x$, $y_3 = \gamma_{31}e^x$, де γ_{11} , γ_{21} , γ_{31} можна визначити із системи (9):

$$\begin{cases} 3\gamma_{11} + \gamma_{21} = 0, \\ 3\gamma_{11} + \gamma_{21} = 0, \\ 2\gamma_{11} + 3\gamma_{21} + 3\gamma_{31} = 0 \end{cases}$$

або знайти їх як алгебраїчні доповнення, наприклад, елементів першого рядка визначника

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 3 \end{vmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \text{Тоді } \gamma_{11} &= (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 3, \quad \gamma_{21} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -9, \\ \gamma_{31} &= (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 7. \end{aligned}$$

Аналогічно для кореня $\lambda_2 = 2$ маємо $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix}$ і $\gamma_{12} = 0$,
 $\gamma_{22} = 0$, $\gamma_{32} = 13$ або $\gamma_{12} = 0$, $\gamma_{22} = 0$, $\gamma_{32} = 1$, а для кореня
 $\lambda_3 = 5$ відповідно $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix}$ і $\gamma_{13} = 3$, $\gamma_{23} = 3$, $\gamma_{33} = 15$
 або $\gamma_{13} = 1$, $\gamma_{23} = 1$, $\gamma_{33} = 5$.

Отже, маємо фундаментальну систему розв'язків

$$Y_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \\ 7 \end{pmatrix} e^x, \quad Y_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{4x}, \quad Y_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} e^{5x}.$$

Тоді загальним розв'язком є

$$Y = C_1 Y_1 + C_2 Y_2 + C_3 Y_3$$

або

$$Y(x) = C_1 \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \\ 7 \end{pmatrix} e^x + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{4x} + C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} e^{5x}, x \in \mathbb{R}.$$

Якщо розписати поелементно, то дістанемо

$$\begin{cases} y_1(x) = 3C_1 e^x + C_3 e^{5x}, \\ y_2(x) = -9C_1 e^x + C_3 e^{5x}, \\ y_3(x) = 7C_1 e^x + C_2 e^{4x} + 5C_3 e^{5x}, x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

де $\{C_1, C_2, C_3\} \subset \mathbb{R}$. ►

Приклад 2. Розв'язати систему

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = y_1 + y_2, \\ \frac{dy_2}{dx} = -2y_1 + 3y_2. \end{cases}$$

◀ Характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & 1 \\ -2 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \text{або} \quad \lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0$$

має комплексно спряжені корені $\lambda_{1,2} = 2 \pm i$. Тоді $y_1 = \gamma_1 e^{(2+i)x}$, $y_2 = \gamma_2 e^{(2+i)x}$, де γ_1 і γ_2 знайдемо аналогічно до попереднього прикладу. Маємо

$$\begin{vmatrix} 1 - 2 - i & 1 \\ -2 & 3 - 2 - i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 - i & 1 \\ -2 & 1 - i \end{vmatrix}$$

і тому $\gamma_1 = 1 - i$, $\gamma_2 = 2$.

Отже,

$$\begin{aligned} y_1 &= (1 - i)e^{(2+i)x} = (1 - i)e^{2x}(\cos x + i \sin x) = e^{2x} \cos x - \\ &- ie^{2x} \cos x + ie^{2x} \sin x + e^{2x} \sin x = (\cos x + \sin x)e^{2x} + \\ &+ i(\sin x - \cos x)e^{2x}; \end{aligned}$$

$$y_2 = 2e^{(2+i)x} = 2e^{2x}(\cos x + i \sin x) = 2e^{2x} \cos x + i2e^{2x} \sin x.$$

Тому частинними розв'язками є функції:

$$\begin{aligned} y_{11} &= e^{2x}(\cos x + \sin x), & y_{12} &= e^{2x}(\sin x - \cos x), \\ y_{21} &= 2e^{2x} \cos x, & y_{22} &= 2e^{2x} \sin x. \end{aligned}$$

Звідси одержуємо, що загальний розв'язок системи має вигляд

$$\begin{cases} y_1 = C_1 e^{2x}(\cos x + \sin x) + C_2 e^{2x}(\sin x - \cos x), \\ y_2 = 2e^{2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x), x \in \mathbb{R}, \{C_1, C_2\} \subset \mathbb{R}, \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} y_1 = e^{2x}((C_1 - C_2) \cos x + (C_1 + C_2) \sin x), \\ y_2 = 2e^{2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x), x \in \mathbb{R}, \{C_1, C_2\} \subset \mathbb{R}. \blacktriangleright \end{cases}$$

Приклад 3. Розв'язати систему

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = 2y_1 + y_2, \\ \frac{dy_2}{dx} = -y_1 + 4y_2. \end{cases}$$

◀ Характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} 2 - \lambda & 1 \\ -1 & 4 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \text{або} \quad \lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$$

має корінь $\lambda = 3$ кратності 2.

Розв'язки, які відповідають цьому кореневі, шукаємо у вигляді

$$y_1 = (Ax + B)e^{3x}, \quad y_2 = (Cx + D)e^{3x},$$

де A, B, C, D невідомі коефіцієнти.

Знайдемо похідні від цих функцій і підставимо їх разом із самими функціями в систему. Після скорочення на e^{3x} матимемо

$$\begin{cases} A + 3(Ax + B) = 2(Ax + B) + (Cx + D), \\ C + 3(Cx + D) = 4(Cx + D) - (Ax + B). \end{cases}$$

Якщо прирівняти коефіцієнти при однакових степенях x в обох рівняннях, то одержимо систему рівнянь для знаходження A, B, C і D :

$$\begin{cases} A + B = D, \\ A = C; \end{cases} \quad \begin{cases} A = C, \\ B + C = D. \end{cases}$$

Оскільки два з чотирьох коефіцієнтів є довільними, то вважатимемо, що A і B довільні, а тоді $C = A, D = A + B$.

Тому загальний розв'язок системи запишеться у вигляді

$$\begin{cases} y_1 = (Ax + B)e^{3x}, \\ y_2 = (Ax + A + B)e^{3x}, \quad \{A, B\} \subset \mathbb{R}. \blacktriangleright \end{cases}$$

16.2. Неоднорідні системи лінійних рівнянь. Розглянемо неоднорідну систему (1), яка в матричній формі має вигляд

$$\frac{dY(x)}{dx} = P(x)Y(x) + F(x), \quad (13)$$

де

$$F(x) := \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix}.$$

Аналогічно до випадку одного лінійного рівняння доводиться, що загальний розв'язок неоднорідної системи (13) є сумою

загального розв'язку відповідної однорідної системи (4) і деякого частинного розв'язку неоднорідної системи (13), тобто

$$Y_{\text{з.н.}} = Y_{\text{з.о.}} + Y_{\text{ч.н.}} \quad (14)$$

Якщо відомий загальний розв'язок відповідної однорідної системи (4), то загальний розв'язок неоднорідної системи можна знайти методом варіації сталих. Для цього в формулі (7) загального розв'язку однорідної системи треба замінити довільні сталі C_k , $k \in \{1, \dots, n\}$, на невідомі функції $c_k(x)$, $k \in \{1, \dots, n\}$. Підставивши

$$Y(x) = \sum_{k=1}^n c_k(x) Y_k(x) \quad (15)$$

в (13), одержимо систему рівнянь

$$\sum_{k=1}^n c'_k(x) Y_k(x) = F(x), \quad (16)$$

з якої знайдемо $c'_k(x) = \varphi_k(x)$, $k \in \{1, \dots, n\}$, а потім і $c_k(x) = \int \varphi_k(x) dx + C_k$, $k \in \{1, \dots, n\}$.

Приклад 4. Знайти загальний розв'язок неоднорідної системи

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = z + \operatorname{tg}^2 x - 1, \\ \frac{dz}{dx} = -y + \operatorname{tg} x, x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

◀ Розв'яжемо спочатку відповідну лінійну однорідну систему

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = z, \\ \frac{dz}{dx} = -y. \end{cases}$$

Корені характеристичного рівняння

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \text{або} \quad \lambda^2 + 1 = 0$$

комплексно спряжені $\lambda_{1,2} = \pm i$. Тоді $y = \gamma_1 e^{ix}$, $z = \gamma_2 e^{ix}$, де γ_1 і γ_2 знайдемо як алгебраїчні доповнення елементів, наприклад, першого рядка визначника

$$\begin{vmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{vmatrix}, \quad \gamma_1 = -i, \quad \gamma_2 = 1$$

або $\gamma_1 = i$, $\gamma_2 = -1$.

Отже,

$$y = i e^{ix} = i(\cos x + i \sin x) = -\sin x + i \cos x,$$

$$z = -e^{ix} = -(\cos x + i \sin x) = -\cos x - i \sin x.$$

Звідси випливає, що фундаментальна система розв'язків має вигляд

$$y_1 = -\sin x, \quad y_2 = \cos x,$$

$$z_1 = -\cos x, \quad z_2 = -\sin x.$$

Тому загальний розв'язок лінійної однорідної системи

$$\begin{cases} y_{з.о.} = -C_1 \sin x + C_2 \cos x, \\ z_{з.о.} = -C_1 \cos x - C_2 \sin x, \end{cases} \{C_1, C_2\} \subset \mathbb{R}.$$

Шукатимемо загальний розв'язок лінійної неоднорідної системи у вигляді

$$\begin{cases} y_{з.н.} = -c_1(x) \sin x + c_2(x) \cos x, \\ z_{з.н.} = -c_1(x) \cos x - c_2(x) \sin x. \end{cases}$$

Підставимо ці функції у неоднорідну систему:

$$\begin{cases} -c_1'(x) \sin x - c_1(x) \cos x + c_2'(x) \cos x - c_2(x) \sin x = \\ \quad = -c_1(x) \cos x - c_2(x) \sin x + \operatorname{tg}^2 x - 1, \\ -c_1'(x) \cos x + c_1(x) \sin x - c_2'(x) \sin x - c_2(x) \cos x = \\ \quad = c_1(x) \sin x - c_2(x) \cos x + \operatorname{tg} x \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} c_1'(x) \sin x + c_2'(x) \cos x = \operatorname{tg}^2 x - 1, \\ -c_1'(x) \cos x - c_2'(x) \sin x = \operatorname{tg} x. \end{cases}$$

З цієї системи знаходимо, що

$$c_1'(x) = -\frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}, \quad c_2'(x) = -\cos x, x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Після інтегрування одержимо, що

$$\begin{aligned} c_1(x) &= -\int \frac{\sin x(1 - \cos^2 x)}{\cos^2 x} dx + C_1 = \int \frac{d \cos x}{\cos^2 x} - \int d \cos x + C_1 = \\ &= -\frac{1}{\cos x} - \cos x + C_1, \\ c_2(x) &= -\int \cos x dx + C_2 = -\sin x + C_2, \\ &x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}, \{C_1, C_2\} \subset \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Тоді загальний розв'язок неоднорідної системи

$$\begin{aligned} y_{з.н.} &= -\left(-\frac{1}{\cos x} - \cos x + C_1\right) \sin x + (-\sin x + C_2) \cos x, \\ z_{з.н.} &= -\left(-\frac{1}{\cos x} - \cos x + C_1\right) \cos x - (-\sin x + C_2) \sin x \end{aligned}$$

або

$$\begin{aligned} y_{з.н.} &= -C_1 \sin x + C_2 \cos x + \operatorname{tg} x, \\ z_{з.н.} &= -C_1 \cos x - C_2 \sin x + 2, x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}, \{C_1, C_2\} \subset \mathbb{R}. \blacktriangleright \end{aligned}$$

Частинний розв'язок лінійної неоднорідної системи (13) можна шукати методом невизначених коефіцієнтів, якщо функції $f_i(x)$, $i \in \{1, \dots, n\}$, складаються із сум і добутоків функцій $b_0 + b_1 x + \dots + b_m x^m$, $e^{\alpha x}$, $\cos \beta x$, $\sin \beta x$. Робимо це за такими самими правилами, як і у випадку одного лінійного неоднорідного рівняння, але з певними змінами. Якщо, наприклад, $f_i(x) = P_{m_i}(x)e^{\gamma x}$, де $P_{m_i}(x)$ – многочлен степеня m_i , то частинний розв'язок системи (13) шукаємо не у вигляді $x^s Q_m(x)e^{\gamma x}$, як у випадку рівняння, а у вигляді

$$y_i = Q_{m+s}^i(x)e^{\gamma x}, \quad i \in \{1, \dots, n\}, \quad (17)$$

де $Q_{m+s}^i(x)$ – многочлен степеня $m + s$ з невідомими коефіцієнтами, $m = \max m_i$ і $s = 0$, якщо γ не є коренем характеристичного рівняння, а якщо γ – корінь характеристичного рівняння, то s беруть рівним кратності цього кореня або, точніше, s на одиницю більше найбільшого зі степенів многочленів, на які множиться $e^{\gamma x}$ у загальному розв’язку однорідної системи. Коефіцієнти многочленів $Q_{m+s}^i(x)$ визначаються через підстановку (17) у (13) і прирівнювання коефіцієнтів у подібних членах.

Аналогічно визначаються степені многочленів і у випадку, коли $f_i(x)$ містить $e^{\alpha x} \cos \beta x$ і $e^{\alpha x} \sin \beta x$, а число $\gamma = \alpha \pm i\beta$ є коренем характеристичного рівняння.

Приклад 5. Знайти загальний розв’язок системи

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = z + 2e^x, \\ \frac{dz}{dx} = y + x^2. \end{cases}$$

◀ Знайдемо спочатку загальний розв’язок відповідної лінійної однорідної системи

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = z, \\ \frac{dz}{dx} = y. \end{cases}$$

Коренями характеристичного рівняння

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \text{або} \quad \lambda^2 - 1 = 0$$

є $\lambda_1 = -1$ і $\lambda_2 = 1$. Тоді $y_1 = \gamma_1 e^{-x}$, $z_1 = \gamma_2 e^{-x}$, де γ_1 і γ_2 є алгебраїчними доповненнями елементів будь-якого рядка визначника

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix},$$

тобто $\gamma_1 = 1$, $\gamma_2 = -1$. Отже, $y_1 = e^{-x}$, $z_1 = -e^{-x}$.

Аналогічно маємо $y_2 = \gamma_1 e^x$, $z_2 = \gamma_2 e^x$. Знайшовши алгебраїчні доповнення елементів першого рядка визначника $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$, одержимо, що $\gamma_1 = -1$, $\gamma_2 = -1$ або $\gamma_1 = 1$, $\gamma_2 = 1$, тому $y_2 = e^x$, $z_2 = e^x$.

Звідси випливає, що загальний розв'язок однорідної системи

$$\begin{cases} y_{з.о.} = C_1 e^{-x} + C_2 e^x, \\ z_{з.о.} = -C_1 e^{-x} + C_2 e^x, \{C_1, C_2\} \subset \mathbb{R}. \end{cases}$$

Частинний розв'язок неоднорідної системи шукатимемо у вигляді

$$y_{ч.н.} = Ax^2 + Bx + C + (Dx + E)e^x,$$

$$z_{ч.н.} = ax^2 + bx + c + (dx + l)e^x,$$

де $A, B, C, D, E, a, b, c, d, l$ – невідомі коефіцієнти.

Підставляючи ці функції в неоднорідну систему, дістаємо систему рівнянь для знаходження невідомих коефіцієнтів:

$$\begin{cases} 2Ax + B + De^x + (Dx + E)e^x = ax^2 + bx + c + (dx + l)e^x + 2e^x, \\ 2ax + b + de^x + (dx + l)e^x = Ax^2 + Bx + C + (Dx + E)e^x + x^2 \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} 0 = a, \\ 2A = b, \\ B = c, \\ D = d, \\ D + E = l + 2; \end{cases} \quad \begin{cases} 0 = A + 1, \\ 2a = B, \\ b = C, \\ d = D, \\ d + l = E. \end{cases}$$

Звідси знаходимо, що $a = 0$, $b = -2$, $c = 0$, $d = 1$, $A = -1$, $B = 0$, $C = -2$, $D = 1$, $E = 0$, якщо взяти $l = -1$.

Отже,

$$\begin{cases} y_{ч.н.} = -x^2 - 2 + xe^x, \\ z_{ч.н.} = -2x + xe^x - e^x, \end{cases}$$

а тому загальний розв'язок лінійної неоднорідної системи має вигляд

$$\begin{cases} y_{з.н.} = C_1 e^{-x} + C_2 e^x + xe^x - x^2 - 2, \\ z_{з.н.} = -C_1 e^{-x} + C_2 e^x + (x - 1)e^x - 2x, \{C_1, C_2\} \subset \mathbb{R}. \quad \blacktriangleright \end{cases}$$

Вправи

1. Знайти загальний розв'язок методом Ейлера і, де вказано, виділити з нього розв'язок, який задовольняє задані початкові умови:

$$1) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + y, \\ \frac{dy}{dt} = 3x + 4y; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} \frac{dy}{dx} = y + z, & y(0) = 0, \\ \frac{dz}{dx} = -2y + 4z, & z(0) = -1; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} \frac{dy}{dx} = 2y - 3z, \\ \frac{dz}{dx} = 3y + 2z; \end{cases} \quad 4) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - y + z, \\ \frac{dy}{dt} = x + 2y - z, \\ \frac{dz}{dt} = x - y + 2z; \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + y, \\ \frac{dy}{dt} = x + 3y - z, \\ \frac{dz}{dt} = -x + 2y + 3z; \end{cases} \quad 6) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -3x + 2y, \\ \frac{dy}{dt} = -2x + y; \end{cases}$$

$$7) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4x - y - z, \\ \frac{dy}{dt} = x + 2y - z, \\ \frac{dz}{dt} = x - y + 2z; \end{cases} \quad 8) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - y - z, \\ \frac{dy}{dt} = 2x - y - 2z, \\ \frac{dz}{dt} = -x + y + 2z; \end{cases}$$

$$9) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y + z, \\ \frac{dy}{dt} = z, & x(0) = 1, y(0) = \frac{1}{2}, z(0) = \frac{1}{2}; \\ \frac{dz}{dt} = -x + z, \end{cases}$$

$$10) \begin{cases} \frac{dy}{dx} = -y + z, \\ \frac{dz}{dx} = -y - 3z; \end{cases} \quad 11) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - y, \\ \frac{dy}{dt} = 4x - 3y; \end{cases}$$

$$12) \begin{cases} \frac{dy}{dx} = -y + 2z, \\ \frac{dz}{dx} = -y + z. \end{cases}$$

2. Знайти розв'язок системи за допомогою методу варіації

сталих:

$$1) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -4x - 2y + \frac{2}{e^t - 1}, \\ \frac{dy}{dt} = 6x + 3y - \frac{3}{e^t - 1}; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + y - \cos t, \\ \frac{dy}{dt} = -2x - y + \sin t + \cos t, \end{cases} \quad x(0) = 1, y(0) = -2;$$

$$3) \begin{cases} \frac{dy}{dx} = -2y + z - e^{2x}, \\ \frac{dz}{dx} = -3y + 2z + 6e^{2x}; \end{cases} \quad 4) \begin{cases} \frac{dy}{dx} = 2y - z + 2e^x, \\ \frac{dz}{dx} = 3y - 2z + 4e^x; \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - y + 4 \cos 2t, \\ \frac{dy}{dt} = 3x - 2y + 8 \cos 2t + 5 \sin 2t; \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + y - \cos t, \\ \frac{dy}{dt} = -2x - y + \sin t + \cos t, \end{cases} \quad \begin{matrix} x(0) = 1, \\ y(0) = -2. \end{matrix}$$

3. Знайти частинний розв'язок методом невизначених коефіцієнтів і побудувати загальний розв'язок системи:

$$1) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4x + y - e^{2t}, \\ \frac{dy}{dt} = -2x + y; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 2y, \\ \frac{dy}{dt} = x - 5 \sin t; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - y + 2 \sin t, \\ \frac{dy}{dt} = 2x - y; \end{cases} \quad 4) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - y, \\ \frac{dy}{dt} = -x + 2y - 5e^t \sin t; \end{cases}$$

$$\begin{array}{l}
5) \left\{ \begin{array}{l} \frac{dy}{dx} = 2y + z - 4, \\ \frac{dz}{dx} = y + 2z + 3x - 6; \end{array} \right. \quad 6) \left\{ \begin{array}{l} \frac{dy}{dx} = 2y - z - \sin x, \\ \frac{dz}{dx} = 3y - 2z - \cos x; \end{array} \right. \\
7) \left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = -y + \sin t, \\ \frac{dy}{dt} = x + \cos t; \end{array} \right. \quad 8) \left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = x + y + e^t, \\ \frac{dy}{dt} = x + y - e^t; \end{array} \right. \\
9) \left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = 4x - 5y + 4t - 1, \\ \frac{dy}{dt} = x - 2y + t, \end{array} \right. \quad x(0) = 0, y(0) = 0 \\
10) \left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} + y = t^2 + 6t + 1, \\ \frac{dy}{dt} - x = -3t^2 + 3t + 1. \end{array} \right.
\end{array}$$

4. Якщо $x(t)$ – кількість особин виду “хижак”, а $y(t)$ – кількість особин виду “жертва” на момент часу t , то при певних припущеннях можна вважати, що швидкість росту їхніх популяцій описується системою лінійних диференціальних рівнянь

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = x + y, \\ \frac{dy}{dt} = -x + y. \end{array} \right.$$

Знайти кількість популяцій обох видів у момент часу t , якщо $x(0) = y(0) = 1000$ особин. Коли наступить вимирання “жертви”?

5. Речовина S розпадається на дві речовини S_1 і S_2 зі швидкістю утворення кожної з них, яка пропорційна кількості речовини, що розпалася. Знайти закон зміни кількості x і y речовини S_1 і S_2 в залежності від часу t , якщо $x(0) = 0$, $y(0) = 0$, а $x(1) = \frac{m}{8}$, $y(1) = \frac{3m}{8}$, де m – початкова кількість речовини S .

6. Система

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = 2x - y, \\ \frac{dy}{dt} = -x + 2y \end{array} \right.$$

описує взаємовплив популяцій двох видів на швидкість їхнього росту. Знайти кількість $x(t)$ і $y(t)$ особин обох видів у довільний момент часу t , якщо $x(0) = 100$, $y(0) = 200$ особин. Проаналізувати еволюцію кількості особин обох видів при зростанні часу t .

Відповіді

1. 1) $x = C_1 e^{5t} + C_2 e^t$, $y = 3C_1 e^{5t} - C_2 e^t$;
 2) $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$, $z = C_1 e^{2x} + 2C_2 e^{3x}$; $y = e^{2x} - e^{3x}$, $z = e^{2x} - 2e^{3x}$; 3) $y = e^{2x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$, $z = e^{2x}(C_1 \sin 3x - C_2 \cos 3x)$; 4) $x = C_2 e^{2t} + C_3 e^{3t}$, $y = C_1 e^t + C_2 e^{2t}$, $z = C_1 e^t + C_2 e^{2t} + C_3 e^{3t}$; 5) $x = C_1 e^{2t} + e^{3t}(C_2 \cos t + C_3 \sin t)$, $y = e^{3t}((C_2 + C_3) \cos t + (C_3 - C_2) \sin t)$, $z = C_1 e^{2t} + e^{3t}((2C_2 - C_3) \cos t + (2C_3 + C_2) \sin t)$; 6) $x = e^{-t}(C_1 t + C_2)$, $y = e^{-t}(C_1 t + C_2 + \frac{1}{2}C_1)$; 7) $x = (C_1 + C_2)e^{3t} + C_3 e^{2t}$, $y = C_1 e^{3t} + C_3 e^{2t}$, $z = C_2 e^{3t} + C_3 e^{2t}$; 8) $x = (C_1 + C_3 t)e^t$, $y = (C_2 + 2C_3 t)e^t$, $z = (C_1 - C_2 - C_3 - C_3 t)e^t$; 9) $x = (C_2 + C_3) \cos t + (-C_2 + C_3) \sin t$, $y = C_1 e^t + C_2 \cos t + C_3 \sin t$, $z = C_1 e^t - C_2 \sin t + C_3 \cos t$; $x = \cos t$, $y = \frac{1}{2}(\cos t + \sin t)$, $z = \frac{1}{2}(\cos t - \sin t)$; 10) $y = e^{-2x}(C_1 + C_2 x)$, $z = e^{-2x}(-C_1 x + C_2(1 - x))$; 11) $x = e^{-t}(C_1 + C_2 t)$, $y = e^{-t}(2C_1 + C_2(2t - 1))$; 12) $y = (C_1 + C_2) \cos x + (C_1 - C_2) \sin x$, $y = C_1 \cos x - C_2 \sin x$.

2. 1) $x = C_1 + 2C_2 e^{-t} + 2e^{-t} \ln |e^t - 1|$, $y = -2C_1 - 3C_2 e^{-t} - 3e^{-t} \ln |e^t - 1|$; 2) $x = C_1(\cos t - \sin t) + C_2(\cos t + \sin t) - t \cos t$, $y = -2C_1 \cos t - 2C_2 \sin t + t \cos t + t \sin t$; $x = (1 - t) \cos t - \sin t$, $y = (t - 2) \cos t + t \sin t$; 3) $y = 2e^{2x} + C_1 e^x + C_2 e^{-x}$, $z = 9e^{2x} + 3C_1 e^x + C_2 e^{-x}$; 4) $y = x e^x + C_1 e^x + C_2 e^{-x}$, $z = (x + 1)e^x + C_1 e^x + 3C_2 e^{-x}$; 5) $x = 2 \cos 2t + 3 \sin 2t + 2e^{-\frac{t}{2}}(C_1 \cos \frac{\sqrt{3}}{2}t + C_2 \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t)$, $y = 7 \sin 2t + e^{-\frac{t}{2}}((3C_1 - \sqrt{3}C_2) \cos \frac{\sqrt{3}}{2}t + (\sqrt{3}C_1 + 3C_2) \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t)$; 6) $x = -t \cos t + C_1 \cos t + C_2 \sin t$, $y = t(\cos t + \sin t) - (C_1 - C_2) \cos t - (C_1 + C_2) \sin t$; $x = (-t + 1) \cos t - \sin t$, $y = (t - 2) \cos t + t \sin t$.

3. 1) $x = C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t} + (t+1)e^{2t}$, $y = -2C_1 e^{2t} - C_2 e^{3t} - 2te^{2t}$; 2) $x = C_1 e^{-t} + 2C_2 e^{2t} - \cos t + 3 \sin t$, $y = -C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t} + 2 \cos t - \sin t$; 3) $x = C_1(\cos t - \sin t) + C_2(\cos t + \sin t) + t \sin t - t \cos t$, $y = 2C_1 \cos t + 2C_2 \sin t - 2t \cos t + \cos t + \sin t$; 4) $x = C_1 e^t + C_2 e^{3t} + 2e^t \cos t - e^t \sin t$, $y = C_1 e^t - C_2 e^{3t} + 3e^t \cos t + e^t \sin t$; 5) $y = x + 2 + C_1 e^x + C_2 e^{3x}$, $z = -2x + 1 - C_1 e^x + C_2 e^{3x}$; 6) $y = \sin x + C_1 e^x + C_2 e^{-x}$, $z = \sin x - \cos x + C_1 e^x + 3C_2 e^{-x}$; 7) $x = -C_1 \sin t + C_2 \cos t - \cos t$, $y = C_1 \cos t + C_2 \sin t$; 8) $x = C_1 e^{2t} + C_2 + e^t$, $y = C_1 e^{2t} - C_2 - e^t$; 9) $x = -t$, $y = 0$; 10) $x = C_1 \cos t + C_2 \sin t + 3t^2 - t - 1$, $y = C_1 \sin t - C_2 \cos t + t^2 + 2$.

4. $x(t) = 1000e^t(\cos t + \sin t)$, $y(t) = 1000e^t(\cos t - \sin t)$; вимирання “жертви” наступить при $t_0 = \frac{\pi}{4}$.

$$5. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = k_1(m - x - y), \\ \frac{dy}{dt} = k_2(m - x - y); \end{cases} \quad k_1 = \frac{1}{4} \ln 2, \quad k_2 = \frac{3}{4} \ln 2,$$

$$\begin{cases} x(t) = \frac{m}{4}(1 - 2^{-t}), \\ y(t) = \frac{3m}{4}(1 - 2^{-t}) \end{cases} \quad (\text{див. приклад 2 з § 24}).$$

6. $\begin{cases} x(t) = C_1 e^t + C_2 e^{3t}, \\ y(t) = C_1 e^t - C_2 e^{3t}; \end{cases} \quad \begin{cases} x(t) = 150e^t - 50e^{3t}, \\ y(t) = 150e^t + 50e^{3t}; \end{cases} \quad 0 \leq t \leq t_0 = \frac{1}{2} \ln 3$. Перший вид вимирає, коли $150e^{t_0} - 50e^{3t_0} = 0$, тобто $t_0 = \frac{1}{2} \ln 3 \approx 0,552$ од. часу, а другий вид ніколи не вимре. При $t \geq t_0$ ріст популяції другого виду описується функцією $y(t) = 100\sqrt{3}e^{2t}$.

Розділ 5 Елементи теорії стійкості

§ 17. Основні поняття теорії стійкості за Ляпуновим

Якщо деяке явище або процес описується системою диференціальних рівнянь

$$\frac{dy_k(t)}{dt} = f_k(t, y_1(t), \dots, y_n(t)), \quad k \in \{1, \dots, n\} \quad (1)$$

з початковими умовами

$$y_k(t_0) = y_{k0}, \quad k \in \{1, \dots, n\},$$

які, як правило, є результатами вимірювань і, отже, неминуче одержані з деякою похибкою, то постає питання про вплив малої зміни початкових значень на шуканий розв'язок.

Якщо з'ясується, що як завгодно малі зміни початкових даних сильно змінюють розв'язок, то розв'язок, який визначається вибраними неточними початковими даними, не має жодного прикладного значення і навіть наближено не може описувати явище або процес, який досліджуємо.

Отже, виникає важливе для застосувань питання про знаходження умов, за яких достатньо мала зміна початкових значень викликає як завгодно малу зміну розв'язку. Якщо t змінюється на скінченному відрізку $[t_0, T]$, то відповідь на це питання дає теорема про неперервну залежність розв'язку від початкових значень [11, с. 54]. Якщо ж t набуває як завгодно великих значень, то цим питанням займається теорія стійкості.

Нехай задано систему звичайних диференціальних рівнянь (1), де похідні $\frac{\partial f_i}{\partial y_k}$, $\{i, k\} \subset \{1, \dots, n\}$, існують та неперервні в області $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$, і нехай $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ є розв'язком цієї системи, який задовольняє умови $\varphi_i(t_0) = \varphi_{i0}$, $i \in \{1, \dots, n\}$.

Розв'язок $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ системи (1) називається **стійким за Ляпуновим**, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$ таке, що

для будь-якого розв'язку (y_1, \dots, y_n) цієї самої системи, початкові значення якого задовольняють нерівності

$$|y_i(t_0) - \varphi_{i0}| < \delta, \quad i \in \{1, \dots, n\}, \quad (2)$$

для всіх $t > t_0$ справджуються нерівності

$$|y_i(t) - \varphi_i(t)| < \varepsilon, \quad i \in \{1, \dots, n\}, \quad (3)$$

тобто близькі за початковими значеннями розв'язки залишаються близькими для всіх $t > t_0$. Якщо ж при як завгодно малому $\delta > 0$ принаймні для одного розв'язку (y_1, \dots, y_n) нерівності (3) не виконуються, то розв'язок $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ називається **нестійким**.

Якщо ж розв'язок $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ не тільки стійкий, але, крім того, задовольняє умови

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |y_i(t) - \varphi_i(t)| = 0, \quad i \in \{1, \dots, n\}, \quad (4)$$

при виконанні умови (2), то він називається **асимптотично стійким**.

Дослідження на стійкість довільного розв'язку $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ системи (1) можна звести до дослідження на стійкість тривіального (нульового) розв'язку $(0, \dots, 0)$ або **точки спокою** $(0, \dots, 0)$ системи

$$\frac{dx_i}{dt} = \psi_i(t, x_1, \dots, x_n), \quad i \in \{1, \dots, n\}, \quad (5)$$

де $\psi_i(t, 0, \dots, 0) = 0$, $i \in \{1, \dots, n\}$.

Точка спокою $(0, \dots, 0)$ системи (5) називається **стійкою за Ляпуновим**, якщо для кожного $\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$ таке, що з нерівностей $|x_i(t_0)| < \delta$, $i \in \{1, \dots, n\}$, випливають нерівності $|x_i(t)| < \varepsilon$, $i \in \{1, \dots, n\}$, при $t > t_0$.

Приклад 1. Дослідити на стійкість розв'язок рівняння

$$\frac{dx(t)}{dt} = 1 + t - x(t), \quad t > 0, \quad (6)$$

який задовольняє умову $x(0) = 0$.

◀ Рівняння (6) є лінійним неоднорідним рівнянням першого порядку. Його загальним розв'язком є $x(t) = Ce^{-t} + t$, $C \in \mathbb{R}$. Початкову умову $x(0) = 0$ задовольняє розв'язок

$$x(t) := \varphi(t) = t, \quad t > 0. \quad (7)$$

Якщо збурити початкову умову, тобто взяти $x(0) = x_0$, де $x_0 \neq 0$, то цю умову задовольняє розв'язок

$$x(t) = x_0 e^{-t} + t, \quad t > 0. \quad (8)$$

Розглянемо різницю розв'язків (7) і (8) і запишемо її у вигляді

$$x(t) - \varphi(t) = x_0 e^{-t} + t - t = (x_0 - 0)e^{-t}, \quad t > 0.$$

Звідси видно, що для довільного $\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$, наприклад, $\delta = \varepsilon$ таке, що для будь-якого розв'язку x рівняння (6), початкове значення якого задовольняє умову $|x_0 - 0| < \delta$, виконується нерівність $|x(t) - \varphi(t)| = |x_0 - 0|e^{-t} < \varepsilon$ для всіх $t > 0$. Отже, розв'язок $\varphi(t) = t$, $t > 0$, є стійким. Оскільки $\lim_{t \rightarrow +\infty} |x(t) - \varphi(t)| = \lim_{t \rightarrow +\infty} |x_0 - 0|e^{-t} = 0$, то цей розв'язок є асимптотично стійким. ►

Приклад 2. Дослідити на стійкість розв'язок рівняння

$$\frac{dy}{dt} = a^2 y, \quad a \neq 0,$$

який задовольняє початкову умову $y(t_0) = y_0$.

◀ Очевидно, що розв'язком цієї задачі Коші є $y(t) = y_0 e^{a^2(t-t_0)}$, $t \geq t_0$. Він нестійкий, оскільки не можна підібрати таке число $\delta > 0$, щоб з нерівності $|\tilde{y}_0 - y_0| < \delta$ випливала нерівність

$$|\tilde{y}_0 e^{a^2(t-t_0)} - y_0 e^{a^2(t-t_0)}| = |\tilde{y}_0 - y_0| e^{a^2(t-t_0)} < \varepsilon$$

для всіх $t > t_0$, бо $e^{a^2(t-t_0)} \rightarrow +\infty$ при $t \rightarrow +\infty$. ►

Приклад 3. Дослідити на стійкість розв'язок системи

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y, \\ \frac{dy}{dt} = x, \end{cases} \quad (9)$$

який задовольняє умову $x(0) = 0, y(0) = 0$.

◀ Загальний розв'язок системи має вигляд $(x = C_1 \cos t + C_2 \sin t; y = C_1 \sin t - C_2 \cos t), t \in \mathbb{R}, \{C_1, C_2\} \subset \mathbb{R}$. Якщо задовольнити початкові умови $x(0) = 0, y(0) = 0$, то одержимо, що $C_1 = 0$ і $C_2 = 0$, а тому розв'язком, який задовольняє ці умови, є нульовий розв'язок $(0, 0)$.

Розв'язок системи, який задовольняє умови $x(0) = x_0, y(0) = y_0$, має вигляд

$$(x(t) = x_0 \cos t - y_0 \sin t; \quad y(t) = x_0 \sin t + y_0 \cos t), t > 0.$$

Візьмемо довільне $\varepsilon > 0$ і знайдемо δ таке, щоб при $|x_0 - 0| < \delta, |y_0 - 0| < \delta$ справджувались нерівності

$$|x(t) - 0| = |x_0 \cos t - y_0 \sin t| < \varepsilon,$$

$$|y(t) - 0| = |x_0 \sin t + y_0 \cos t| < \varepsilon$$

для всіх $t > 0$. Це й означатиме, згідно з означенням стійкості, що нульовий розв'язок $(0, 0)$ системи стійкий за Ляпуновим.

Маємо

$$|x_0 \cos t - y_0 \sin t| \leq |x_0 \cos t| + |y_0 \sin t| \leq |x_0| + |y_0|,$$

$$|x_0 \sin t + y_0 \cos t| \leq |x_0 \sin t| + |y_0 \cos t| \leq |x_0| + |y_0| \quad (10)$$

для всіх $t > 0$. Тому, якщо $|x_0| + |y_0| < \varepsilon$, то

$$|x_0 \cos t - y_0 \sin t| < \varepsilon, \quad |x_0 \sin t + y_0 \cos t| < \varepsilon \quad (11)$$

для всіх $t > 0$.

Отже, якщо, наприклад, взяти $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$, то при $|x_0| < \delta$ і $|y_0| < \delta$ згідно з (10) матимемо нерівності (11) для всіх $t > 0$, тобто нульовий розв'язок системи (9) стійкий за Ляпуновим, але ця стійкість не є асимптотичною. ►

§ 18. Метод функцій Ляпунова (другий метод Ляпунова)

О.М. Ляпунов розробив достатньо загальний метод дослідження на стійкість тривіального розв'язку системи диференціальних рівнянь

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, \dots, x_n), \quad i \in \{1, \dots, n\}, \quad (1)$$

де $f_i(t, 0, \dots, 0) = 0$, $i \in \{1, \dots, n\}$, який називається **другим методом Ляпунова** або **методом функцій Ляпунова**.

Теорема Ляпунова [11]. Якщо існує диференційовна функція $V(x_1, \dots, x_n)$, яка називається функцією Ляпунова, що задовольняє в околі початку координат умови:

1) $V(x_1, \dots, x_n) \geq 0$, причому $V(x_1, \dots, x_n) = 0$ лише при $x_i = 0$, $i \in \{1, \dots, n\}$, тобто функція V має строгий мінімум в початку координат;

2) $\frac{dV}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i(t, x_1, \dots, x_n) \leq 0$ при $t > t_0$, то точка спокою $(0, \dots, 0)$ системи (1) стійка.

Якщо додатково виконується така умова:

3) поза як завгодно малим околom початку координат, тобто при $\sum_{i=1}^n x_i^2 \geq \delta_1^2 > 0$, $t \geq T > t_0$, похідна $\frac{dV}{dt} \leq -\beta < 0$, де β – додатна стала, то точка спокою $(0, \dots, 0)$ системи (1) асимптотично стійка.

Похідна $\frac{dV}{dt}$ в умовах 2) і 3) взята вздовж інтегральної лінії, тобто вона знайдена в припущенні, що аргументи x_i , $i \in \{1, \dots, n\}$, функції $V(x_1, \dots, x)$ замінені компонентами розв'язку $x_i(t)$, $i \in \{1, \dots, n\}$, системи диференціальних рівнянь (1).

Справді, при цьому припущенні

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt}$$

або, замінюючи $\frac{dx_i}{dt}$ правими частинами системи (1), остаточно дістаємо

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i(t, x_1, \dots, x_n).$$

Не існує загального методу побудови функції Ляпунова. Часто її вдається побудувати у вигляді лінійної комбінації парних степенів x_1, \dots, x_n або у вигляді квадратичної форми

$$V = \sum_{i,j=1}^n b_{ij} x_i x_j.$$

Приклад 1. Дослідити на стійкість тривіальний розв'язок системи

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -5y - 2x^3, \\ \frac{dy}{dt} = 5x - 3y^3. \end{cases}$$

◀ Візьмемо за функцію Ляпунова $V(x, y) = x^2 + y^2$. Маємо:
 1) $V(x, y) \geq 0$ і $V(0, 0) = 0$; 2) $\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{dy}{dt} = 2x(-5y - 2x^3) + 2y(5x - 3y^3) = -4x^4 - 6y^4 = -(4x^4 + 6y^4) \leq 0$ для $t > 0$ і $(x; y) \in \mathbb{R}^2$; 3) $\frac{dV}{dt} = -(4x^4 + 6y^4) \leq -4(x^4 + y^4) \leq -4 \frac{1}{2} (x^2 + y^2)^2 = -2(x^2 + y^2)^2 \leq -2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{1}{2}$, якщо $t > 0$, $x^2 + y^2 \geq \frac{1}{2}$. Отже, виконуються умови 1) і 2), а також умова 3) з $\delta_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ і $\beta = \frac{1}{2}$. Згідно з теоремою Ляпунова тривіальний розв'язок системи асимптотично стійкий. ▶

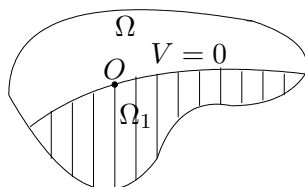
Приклад 2. За допомогою функції Ляпунова дослідити на стійкість тривіальний розв'язок системи

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x - 2y + x^2 y^2, \\ \frac{dy}{dt} = x - \frac{y}{2} - \frac{x^2 y}{2}. \end{cases}$$

◀ Шукатимемо функцію Ляпунова у вигляді $V(x, y) = ax^2 + by^2$, де $a > 0$, $b > 0$ – невідомі параметри. Очевидно, що перша умова з теореми Ляпунова виконується. Перевіримо виконання другої і третьої умов. Маємо $\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{dy}{dt} = 2ax(-x - 2y + x^2y^2) + 2by(x - \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}x^2y) = -(2ax^2 + by^2) + (2xy - x^3y^2)(b - 2a)$. Поклавши $b = 2a$, одержимо, що $\frac{dV}{dt} = -2a(x^2 + y^2) \leq 0$ для $t > 0$ і $(x; y) \in \mathbb{R}^2$. Якщо $x^2 + y^2 \geq 1$, то $\frac{dV}{dt} \leq -2a$. Отже, при кожному $a > 0$ функція $V(x, y) = ax^2 + 2ay^2$ задовольняє всі умови теореми Ляпунова, а тому тривіальний розв'язок системи асимптотично стійкий. ▶

При дослідженні нульового (тривіального) розв'язку на нестійкість використовують **теорему Четаєва**: нехай для системи (1) існує диференційовна функція $V(x_1, \dots, x_n)$, яка в деякому замкненому околі точки $(0, \dots, 0)$ задовольняє умови:

1) в як завгодно малому околі Ω точки $(0, \dots, 0)$ існує область Ω_1 , в якій $V(x_1, \dots, x_n) > 0$, причому $V = 0$ у тих точках межі Ω_1 , які є внутрішніми для Ω ;



2) точка $O(0, \dots, 0)$ є точкою межі області Ω_1 ;

3) в області Ω_1 похідна $\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x_1}\psi_1 + \dots + \frac{\partial V}{\partial x_n}\psi_n$ є додатно визначеною.

Тоді точка спокою $(0, \dots, 0)$ системи (5) є нестійкою.

Приклад 3. Дослідити на стійкість точку спокою (тривіальний розв'язок) системи

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y^3 + x^5, \\ \frac{dy}{dt} = x^3 + y^5. \end{cases}$$

◀ Функція $V(x, y) = x^4 - y^4$ задовольняє умови теореми Четаєва:

- 1) $V(x, y) > 0$ при $|x| > |y|$;
- 2) $\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{dy}{dt} = 4x^3(y^3 + x^5) - 4y^3(x^3 + y^5) = 4(x^8 - y^8) > 0$ в області $|x| > |y|$, тому тривіальний розв'язок $(0, 0)$ нестійкий. ▶

§ 19. Дослідження на стійкість за першим наближенням

При дослідженні на стійкість точки спокою $(0, \dots, 0)$ системи диференціальних рівнянь

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = f_i(t, x_1, \dots, x_n), \quad i \in \{1, \dots, n\}, \quad (1)$$

де $f_i, i \in \{1, \dots, n\}$, – диференційовні в околі початку координат функції, часто застосовується **метод дослідження на стійкість за першим наближенням**, який полягає в такому: користуючись диференційовністю функцій $f_i, i \in \{1, \dots, n\}$, записують систему (1) в околі початку координат у вигляді

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t)x_j(t) + R_i(t, x_1, \dots, x_n), \quad i \in \{1, \dots, n\}, \quad (2)$$

де $R_i, i \in \{1, \dots, n\}$, мають порядок вище першого відносно $\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$, i замість точки спокою $(0, \dots, 0)$ системи (1) досліджують на стійкість ту саму точку спокою лінійної системи

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t)x_j, \quad i \in \{1, \dots, n\}, \quad (3)$$

яка називається **системою рівнянь першого наближення**.

Дослідження на стійкість системи першого наближення є задачею значно легшею, ніж дослідження вихідної, взагалі кажучи, нелінійної системи. Однак навіть дослідження лінійної системи (3) при змінних коефіцієнтах $a_{ij}(t)$, $\{i, j\} \subset \{1, \dots, n\}$, є достатньо складним. Якщо ж всі a_{ij} , $\{i, j\} \subset \{1, \dots, n\}$, сталі, тобто **система стаціонарна в першому наближенні**, то дослідження на стійкість тривіального розв'язку лінійної системи (3) є відносно простим.

Теорема про стійкість за першим наближенням. Нульовий розв'язок $(0, \dots, 0)$ системи (1) є асимптотично стійким, якщо виконуються умови:

1) система першого наближення (3) стаціонарна, тобто $a_{ij} = \text{const}$, $\{i, j\} \subset \{1, \dots, n\}$, і всі корені її характеристичного рівняння

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (4)$$

мають від'ємні дійсні частини;

2) для всіх $t \geq t_0$ і $|x_i| < \varepsilon$, $i \in \{1, \dots, n\}$, де $\varepsilon > 0$ – досить мале число, правильні нерівності

$$|R_i(t, x_1, \dots, x_n)| \leq M \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{\frac{1}{2} + \alpha}, \quad M > 0, \alpha > 0. \quad (5)$$

Якщо ж система (3) стаціонарна та виконується умова 2), але принаймні один корінь рівняння (4) має додатну дійсну частину, то розв'язок $(0, \dots, 0)$ нестійкий за Ляпуновим.

Використовуючи цю теорему, проводимо дослідження на стійкість нульового розв'язку системи (1). У випадку, коли дійсні частини всіх коренів характеристичного рівняння (4) недодатні, причому дійсна частина принаймні одного із коренів дорівнює нулю, то дослідження на стійкість за першим наближенням, взагалі кажучи, неможливе, бо починають впливати нелінійні члени R_i , $i \in \{1, \dots, n\}$.

Приклад 1. Дослідити на стійкість точку спокою $(0, 0)$ системи

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x + y + 2x^4 - y^6, \\ \frac{dy}{dt} = x - 3y + 11y^4. \end{cases}$$

◀ Система першого наближення має вигляд

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x + y, \\ \frac{dy}{dt} = x - 3y, \end{cases}$$

а $R_1(x, y) = 2x^4 - y^6$, $R_2(x, y) = 11y^4$.

Очевидно, що для малих $|x|$ і $|y|$ правильні нерівності $|R_1(x, y)| \leq 11(x^2 + y^2)$; $|R_2(x, y)| \leq 11(x^2 + y^2)$.

Характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} -1 - \lambda & 1 \\ 1 & -3 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \text{або} \quad \lambda^2 + 4\lambda + 2 = 0$$

має корені $\lambda_{1,2} = -2 \pm \sqrt{2} < 0$.

Отже, всі умови теореми про стійкість за першим наближенням виконуються, а тому точка спокою є асимптотично стійкою. ▶

Приклад 2. Дослідити на стійкість тривіальний розв'язок системи

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4y - x^3, \\ \frac{dy}{dt} = -3x - y^3. \end{cases}$$

◀ Тут системою першого наближення є

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4y, \\ \frac{dy}{dt} = -3x, \end{cases}$$

а $R_1(x, y) = -x^3$, $R_2(x, y) = -y^3$.

Коренями характеристичного рівняння

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 4 \\ -3 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \text{або} \quad \lambda^2 + 12 = 0$$

є $\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{12}$. Отже, маємо критичний випадок, бо дійсні частини цих коренів дорівнюють нулю. За першим наближенням тривіальний розв'язок цієї системи дослідити на стійкість не можна. Спробуємо провести дослідження на стійкість за допомогою функції Ляпунова. Нехай $V(x, y) = ax^2 + by^2$. Очевидно, що $V(x, y) \geq 0$ і $V(0, 0) = 0$ при $a > 0$, $b > 0$, а $\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{dy}{dt} = 2ax(4y - x^3) + 2by(-3x - y^3) = 8axy - 2ax^4 - 6bxy - 2by^4$. Якщо взяти $a = 3$, $b = 4$, то матимемо $\frac{dV}{dt} = -(6x^4 + 8y^4) < 0$ і $\frac{dV}{dt} = 0$ лише в точці $(0, 0)$. Отже, нульовий розв'язок системи асимптотично стійкий. ►

Вправи

1. Користуючись означенням стійкості за Ляпуновим, дослідити на стійкість розв'язки поданих нижче рівнянь і систем:

$$1) \frac{dx}{dt} = x + t, \quad x(0) = 1; \quad 2) \frac{dx}{dt} = -x + t^2, \quad x(1) = 1;$$

$$3) \frac{dx}{dt} = x(x^2 - 1), \quad x(0) = 0;$$

$$4) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 13y, \\ \frac{dy}{dt} = \frac{1}{4}x - 2y, \end{cases} \quad x(0) = 0, \quad y(0) = 0;$$

$$5) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x - 9y, \\ \frac{dy}{dt} = x - y, \end{cases} \quad x(0) = 0, \quad y(0) = 0.$$

2. За допомогою функції Ляпунова дослідити на стійкість тривіальний розв'язок системи:

$$\begin{array}{l}
1) \left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = 2y^3 - x^5, \\ \frac{dy}{dt} = -x - y^3 + y^5; \end{array} \right. \quad 2) \left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = x, \\ \frac{dy}{dt} = -y; \end{array} \right. \\
3) \left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = x^2 + y, \\ \frac{dy}{dt} = y^2 + x; \end{array} \right. \quad 4) \left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = x^3 - y, \\ \frac{dy}{dt} = x + y^3; \end{array} \right. \\
5) \left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = x - y - xy^2, \\ \frac{dy}{dt} = 2x - y - y^3; \end{array} \right. \quad 6) \left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = -3y - 2x^3, \\ \frac{dy}{dt} = 2x - 3y^3; \end{array} \right. \\
7) \left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = x + 2xy^2, \\ \frac{dy}{dt} = -2y + 4x^2y; \end{array} \right. \quad 8) \left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = xy - x^3 + y, \\ \frac{dy}{dt} = x^4 - x^2y - x^3. \end{array} \right.
\end{array}$$

3. Дослідити на стійкість за першим наближенням тривіальний розв'язок системи:

$$\begin{array}{l}
1) \left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = 2x + y - 5y^2, \\ \frac{dy}{dt} = 3x + y + \frac{x^3}{2}; \end{array} \right. \quad 2) \left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = -x + 3y + x^2 \sin y, \\ \frac{dy}{dt} = -x - 4y + 1 - \cos y^2; \end{array} \right. \\
3) \left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = -2x + 8 \sin^2 y, \\ \frac{dy}{dt} = x - 3y + 4x^3; \end{array} \right. \quad 4) \left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = e^{x+2y} - \cos 3x, \\ \frac{dy}{dt} = \sqrt{4 + 8x} - 2e^y; \end{array} \right. \\
5) \left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = \frac{1}{4}(e^x - 1) - 9y + x^4, \\ \frac{dy}{dt} = \frac{1}{5}x - \sin y + y^{14}; \end{array} \right. \quad 6) \left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = x^2 + y^2 - 2x, \\ \frac{dy}{dt} = 3x^2 - x + 3y; \end{array} \right. \\
7) \left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = -2y - x^5, \\ \frac{dy}{dt} = 2x - y^5. \end{array} \right.
\end{array}$$

Відповіді

1. 1) Нестійкий; 2) стійкий; 3) асимптотично стійкий; 4) стійкий; 5) стійкий.

2. 1) $V = ax^2 + by^4$, стійкий; 2) $V = x^2 - y^2$, нестійкий; 3) $V = \frac{1}{3}x^3 + xy + \frac{1}{3}y^3$, нестійкий; 4) нестійкий; 5) стійкий; 6) $V = 2x^2 + 3y^3$, асимптотично стійкий; 7) $V = x^2 - \frac{1}{2}y^2$, нестійкий; 8) $V = x^4 + 2y^2$, стійкий.

3. 1) Нестійкий; 2) стійкий; 3) стійкий; 4) нестійкий; 5) асимптотично стійкий; 6) нестійкий; 7) $V = x^2 + y^2$, асимптотично стійкий.

Розділ 6

Поняття про рівняння з частинними похідними першого порядку

У цьому розділі розглянемо основні поняття про рівняння з частинними похідними першого порядку. Теорія цих рівнянь тісно пов'язана з інтегруванням систем звичайних диференціальних рівнянь.

Рівність, яка містить невідому функцію від декількох незалежних змінних, незалежні змінні і частинні похідні від невідомої функції за цими змінними, називається **рівнянням із частинними похідними**. Найвищий порядок частинної похідної, що входить у рівняння, називається **порядком** рівняння. Рівняння з частинними похідними так само, як і звичайне диференціальне рівняння, може бути неповним, але воно обов'язково повинно містити принаймні одну з частинних похідних від невідомої функції.

З попереднього випливає, що диференціальне рівняння з частинними похідними першого порядку має вигляд

$$F\left(x_1, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) = 0, \quad (1)$$

де F – відома функція своїх аргументів.

Розв'язком цього рівняння називається функція

$$u = \varphi(x_1, \dots, x_n), \quad (2)$$

яка визначена й неперервна разом з частинними похідними в деякій області Ω зміни x_1, \dots, x_n і перетворює рівняння (1) у тотожність в області Ω . При цьому передбачається, що значення x_1, \dots, x_n , для яких визначена функція (2), і значення, яких набуває ця функція та її частинні похідні, знаходяться в області визначення функції F .

впливає з того, що система (3) рівносильна такій нормальній системі рівнянь:

$$\frac{dx_1}{dx_n} = \frac{X_1(x_1, \dots, x_n)}{X_n(x_1, \dots, x_n)}, \quad \dots, \quad \frac{dx_{n-1}}{dx_n} = \frac{X_{n-1}(x_1, \dots, x_n)}{X_n(x_1, \dots, x_n)}, \quad (5)$$

для якої виконуються умови теореми Коші, а отже, існують незалежні перші інтеграли.

Між першими інтегралами системи (5) і розв'язками рівняння (1) існує зв'язок, який опишемо нижче.

Нехай знайдено систему $n-1$ незалежних перших інтегралів (4) системи (5). У просторі точок (x_1, \dots, x_n) ця система визначає $(n-1)$ -параметричну сім'ю ліній, які називаються **характеристиками** рівняння (1).

Теорема 1. *Ліва частина першого інтеграла $\psi(x_1, \dots, x_n) = C$ системи (3) є розв'язком лінійного однорідного рівняння з частинними похідними (1).*

◀ Справді, нехай $\psi(x_1, \dots, x_n) = C$ є першим інтегралом системи (3), визначеним у деякому околі точки (x_{10}, \dots, x_{n0}) . Тоді повний диференціал функції ψ тотожно дорівнює нулю на розв'язках системи (3) або (5), тобто

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial \psi}{\partial x_n} dx_n \equiv 0,$$

де диференціали dx_1, \dots, dx_n треба замінити їхніми значеннями із системи (5), а саме:

$$dx_1 = \frac{X_1}{X_n} dx_n, \dots, dx_{n-1} = \frac{X_{n-1}}{X_n} dx_n.$$

Тому матимемо тотожність

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial x_1} \frac{X_1}{X_n} + \dots + \frac{\partial \psi}{\partial x_n} \right) dx_n \equiv 0$$

або після скорочення на dx_n і множення на X_n

$$X_1 \frac{\partial \psi}{\partial x_1} + \dots + X_n \frac{\partial \psi}{\partial x_n} \equiv 0.$$

Ця тотожність й означає, що функція $u = \psi(x_1, \dots, x_n)$ є розв'язком рівняння (1). ►

Теорема 2. *Будь-який несталий розв'язок рівняння (1), прирівняний до довільної сталої C , є першим інтегралом системи (3).*

◀ Нехай $u = \psi(x_1, \dots, x_n)$ – несталий розв'язок рівняння (1). Тоді

$$X_1 \frac{\partial \psi}{\partial x_1} + \dots + X_n \frac{\partial \psi}{\partial x_n} \equiv 0. \quad (6)$$

Обчислюючи повний диференціал функції ψ , аргументами якої є компоненти розв'язків системи (3) або, що те саме, системи (5), маємо

$$\begin{aligned} d\psi &= \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial \psi}{\partial x_n} dx_n \right) = \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_1} \frac{X_1}{X_n} + \dots + \frac{\partial \psi}{\partial x_n} \right) dx_n = \\ &= \left(X_1 \frac{\partial \psi}{\partial x_1} + \dots + X_n \frac{\partial \psi}{\partial x_n} \right) \frac{1}{X_n} dx_n, \end{aligned}$$

звідки згідно з тотожністю (6) матимемо рівність $d\psi = 0$, тобто ψ є першим інтегралом системи (3). ►

20.2. Побудова загального розв'язку однорідного лінійного рівняння. Правильною є наступна теорема.

Теорема 3. *Якщо $\psi_1(x_1, \dots, x_n) = C_1, \dots, \psi_{n-1}(x_1, \dots, x_n) = C_{n-1}$ – незалежні перші інтеграли системи (3), то сукупність функцій, що визначається рівністю*

$$u = \Phi(\psi_1, \dots, \psi_{n-1}), \quad (7)$$

де Φ – довільна функція, яка має неперервні частинні похідні за $\psi_1, \dots, \psi_{n-1}$, є загальним розв'язком рівняння (1).

◀ Доведемо, що функція (7), де Φ – довільна фіксована неперервно диференційовна функція, є розв'язком рівняння (1). Підставивши (7) в (1) і скориставшись тим, що $\psi_1, \dots, \psi_{n-1}$ є розв'язками рівняння (1), дістанемо тотожність

$$X_1 \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + \dots + X_n \frac{\partial \Phi}{\partial x_n} = X_1 \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial \Phi}{\partial \psi_i} \frac{\partial \psi_i}{\partial x_1} + \dots + X_n \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial \Phi}{\partial \psi_i} \frac{\partial \psi_i}{\partial x_n} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial \Phi}{\partial \psi_i} \left(X_1 \frac{\partial \psi_i}{\partial x_1} + \dots + X_n \frac{\partial \psi_i}{\partial x_n} \right) \equiv 0.$$

Доведення того, що вираз (7) визначає всі розв'язки рівняння (1), тобто будь-який розв'язок рівняння (1) одержується із (7) при відповідному виборі функції Φ , міститься в [11].►

Зауважимо, що на відміну від звичайних диференціальних рівнянь, загальний розв'язок (7) рівняння (1) із частинними похідними містить не довільну сталу, а довільну функцію.

Отже, задача побудови загального розв'язку рівняння (1) рівносильна задачі про знаходження $n - 1$ незалежних перших інтегралів системи звичайних диференціальних рівнянь у симетричній формі (3), яка відповідає рівнянню (1).

Нехай є тільки дві незалежні змінні. У цьому випадку, позначаючи шукану функцію через z , а незалежні змінні через x і y , матимемо рівняння

$$X(x, y) \frac{\partial z}{\partial x} + Y(x, y) \frac{\partial z}{\partial y} = 0. \quad (8)$$

Відповідна система (3) звичайних диференціальних рівнянь у симетричній формі містить тільки одне диференціальне рівняння

$$\frac{dx}{X(x, y)} = \frac{dy}{Y(x, y)}. \quad (9)$$

Якщо $\psi(x, y) = C$ є першим інтегралом цього рівняння, то

$$z = \Phi(\psi(x, y)), \quad (10)$$

де Φ – довільна неперервно диференційовна функція від ψ , визначає загальний розв'язок рівняння (8).

Якщо розглядати x , y і z як прямокутні координати точки тривимірного простору, то розв'язку $z = z(x, y)$ рівняння (8) відповідає деяка поверхня, яку називають **інтегральною поверхнею** рівняння (8).

Приклад 1. Розв'язати рівняння

$$(z - y) \frac{\partial u}{\partial x} + (x - z) \frac{\partial u}{\partial y} + (y - x) \frac{\partial u}{\partial z} = 0. \quad (11)$$

◀ Система звичайних диференціальних рівнянь, що відповідає заданому рівнянню, має вигляд

$$\frac{dx}{z-y} = \frac{dy}{x-z} = \frac{dz}{y-x}. \quad (12)$$

Додаючи чисельники і знаменники, дістаємо

$$\frac{dx}{z-y} = \frac{dy}{x-z} = \frac{dz}{y-x} = \frac{dx+dy+dz}{0}.$$

Звідси випливає, що $dx+dy+dz=0$ або $d(x+y+z)=0$. Отже, першим інтегралом є

$$\psi_1(x, y, z) := x + y + z = C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R}.$$

Для знаходження другого першого інтеграла помножимо чисельники та знаменники відношень (12) відповідно на $2x$, $2y$, $2z$ і додамо чисельники та знаменники одержаних відношень:

$$\frac{2xdx}{2x(z-y)} = \frac{2ydy}{2y(x-z)} = \frac{2zdz}{2z(y-x)} = \frac{d(x^2+y^2+z^2)}{0}.$$

Звідси отримуємо, що

$$\psi_2(x, y, z) := x^2 + y^2 + z^2 = C_2, \quad C_2 \in \mathbb{R},$$

є другим першим інтегралом.

Легко можна пересвідчитися, що знайдені перші інтеграли є незалежними, а тому загальним розв'язком заданого рівняння є вираз

$$u = \Phi(x + y + z, x^2 + y^2 + z^2),$$

де Φ – довільна неперервно диференційовна функція двох змінних.

Наприклад, розв'язками рівняння (11) є функції $u = x + y + z$, $u = x^2 + y^2 + z^2$, $u = (x + y + z)^2$ і т. п. ►

Приклад 2. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = 0. \quad (13)$$

◀ Система звичайних диференціальних рівнянь у симетричній формі для заданого рівняння (13) складається з одного рівняння

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{-x}.$$

Відокремивши змінні та зінтегрувавши, дістанемо перший інтеграл

$$\psi(x, y) = x^2 + y^2, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Тому загальний розв'язок рівняння має вигляд

$$z = \Phi(x^2 + y^2)$$

і є, як відомо, сім'єю поверхонь обертання з віссю обертання Oz . Зокрема, при $\Phi(\psi) = \psi$ дістаємо параболоїд обертання

$$z = x^2 + y^2,$$

при $\Phi(\psi) = \sqrt{R^2 - \psi}$ матимемо сферу

$$z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2},$$

при $\Phi(\psi) = \sqrt{\psi}$ – конус

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}. \blacktriangleright$$

20.3. Розв'язування задачі Коші для однорідного лінійного рівняння. Задача Коші для рівняння (1) полягає в тому, що треба знайти той розв'язок цього рівняння

$$u = f(x_1, \dots, x_n), \quad (14)$$

який задовольняє початкову умову

$$u = \varphi(x_1, \dots, x_{n-1}) \quad \text{при} \quad x_n = x_{n0}$$

або

$$u|_{x_n=x_{n0}} = \varphi(x_1, \dots, x_{n-1}), \quad (15)$$

де φ – задана неперервно диференційовна функція змінних x_1, \dots, x_{n-1} . Це означає, що при фіксованому значенні одного з

Якщо за функцію Φ взяти

$$\begin{aligned} \Phi(\psi_1, \dots, \psi_{n-1}) = \varphi(\omega_1(\psi_1, \dots, \psi_{n-1}), \dots, \psi_{n-1}), \\ \dots, \omega_{n-1}(\psi_1, \dots, \psi_{n-1}), \end{aligned} \quad (22)$$

то умова (18) виконуватиметься. Справді,

$$\begin{aligned} \Phi(\bar{\psi}_1, \dots, \bar{\psi}_{n-1}) = \varphi(\omega_1(\bar{\psi}_1, \dots, \bar{\psi}_{n-1}), \dots, \omega_{n-1}(\bar{\psi}_1, \dots, \bar{\psi}_{n-1})) = \\ = \varphi(x_1, \dots, x_{n-1}). \end{aligned}$$

Отже, функція

$$u = \varphi(\omega_1(\psi_1, \dots, \psi_{n-1}), \dots, \omega_{n-1}(\psi_1, \dots, \psi_{n-1})) \quad (23)$$

є шуканим розв'язком задачі Коші.

З доведеного вище випливає таке правило розв'язування задачі Коші:

1) треба скласти відповідну систему звичайних диференціальних рівнянь і знайти $n - 1$ незалежних перших інтегралів

$$\begin{cases} \psi_1(x_1, \dots, x_n) = C_1, \\ \dots, \dots, \dots, \\ \psi_{n-1}(x_1, \dots, x_n) = C_{n-1}; \end{cases} \quad (24)$$

2) замінити в (24) незалежну змінну x_n заданим її значенням x_{n0}

$$\begin{cases} \psi_1(x_1, \dots, x_{n-1}, x_{n0}) = \bar{\psi}_1, \\ \dots, \dots, \dots, \\ \psi_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}, x_{n0}) = \bar{\psi}_{n-1} \end{cases} \quad (25)$$

і розв'язати систему (25) відносно x_1, \dots, x_{n-1} :

$$\begin{cases} x_1 = \omega_1(\bar{\psi}_1, \dots, \bar{\psi}_{n-1}), \\ \dots, \dots, \dots, \\ x_{n-1} = \omega_{n-1}(\bar{\psi}_1, \dots, \bar{\psi}_{n-1}); \end{cases}$$

3) побудувати функцію

$$u = \varphi(\omega_1(\psi_1, \dots, \psi_{n-1}), \dots, \omega_{n-1}(\psi_1, \dots, \psi_{n-1})),$$

яка і є розв'язком задачі Коші.

Приклад 3. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$(1+x^2)\frac{\partial z}{\partial x} + xy\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

та визначити інтегральну поверхню, що проходить через криву $z = y^2$ у площині $x = 0$.

◀ Складемо систему звичайних диференціальних рівнянь у симетричній формі

$$\frac{dx}{1+x^2} = \frac{dy}{xy}.$$

Інтегруючи це рівняння, знаходимо перший інтеграл

$$\frac{dy}{y} = \frac{xdx}{1+x^2}, \quad \ln|y| = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \ln|C_1|, \quad C_1 \neq 0,$$

$$y = C\sqrt{x^2+1}, \quad \frac{y}{\sqrt{x^2+1}} = C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Отже, загальним розв'язком заданого рівняння є

$$z = \Phi\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+1}}\right),$$

де Φ – довільна неперервно диференційовна функція. З цієї сукупності треба виділити ту інтегральну поверхню, яка проходить через лінію $z = y^2$ в площині $x = 0$. Якщо покласти $x = 0$ у функцію $\psi = \frac{y}{\sqrt{x^2+1}}$, яка є лівою частиною першого інтеграла, то одержимо $y = \sqrt{\psi}$. Підставивши це значення в рівність $z = y^2$ і знявши риску над ψ , дістанемо розв'язок задачі Коші

$$z = \frac{y^2}{x^2+1}. \blacktriangleright$$

Приклад 4. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{z}{2}\frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

і розв'язок, який задовольняє початкову умову

$$u = y + z^2 \quad \text{при} \quad x = 1.$$

◀ Складемо систему звичайних диференціальних рівнянь у симетричній формі

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}$$

і знайдемо два незалежні перші інтеграли. Маємо

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}, \quad \ln|x| = \ln|y| - \ln|\bar{C}_1|, \quad \bar{C}_1 \neq 0,$$

або

$$\frac{y}{x} = C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R},$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{2dz}{z}, \quad \ln|x| = 2\ln|z| - \ln|\bar{C}_2|, \quad \bar{C}_2 \neq 0,$$

або

$$\frac{z^2}{x} = C_2, \quad C_2 \in \mathbb{R}.$$

Знайдено два незалежні перші інтеграли

$$\psi_1(x, y) := \frac{y}{x} = C_1, \quad \psi_2(x, y) := \frac{z^2}{x} = C_2,$$

а тому загальним розв'язком рівняння є

$$u = \Phi\left(\frac{y}{x}, \frac{z^2}{x}\right),$$

де Φ – довільна неперервно диференційовна функція.

Знайдемо розв'язок, який задовольняє поставлену початкову умову. Покладаючи в перших інтегралах $x = 1$, дістаємо

$$y = \bar{\psi}_1, \quad z^2 = \bar{\psi}_2$$

або

$$y = \bar{\psi}_1, \quad z = \pm\sqrt{\bar{\psi}_2}.$$

Отже, шуканим розв'язком рівняння є

$$u = \psi_1 + \psi_2$$

або

$$u = \frac{y + z^2}{x}. \blacktriangleright$$

Вправи

1. Зінтегрувати рівняння і, де вказано, знайти розв'язок, який задовольняє поставлену початкову умову:

- 1) $x \frac{\partial u}{\partial x} + yz \frac{\partial u}{\partial z} = 0$, $u = x^y$ при $z = 1$;
- 2) $(x + 2y) \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} = 0$;
- 3) $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z} = 0$;
- 4) $x(y^2 - z^2) \frac{\partial u}{\partial x} - y(x^2 + z^2) \frac{\partial u}{\partial y} + z(x^2 + y^2) \frac{\partial u}{\partial z} = 0$;
- 5) $\frac{\partial z}{\partial x} + (2e^x - y) \frac{\partial z}{\partial y} = 0$, $z = y$ при $x = 0$;
- 6) $(x - z) \frac{\partial u}{\partial x} - (y - z) \frac{\partial u}{\partial y} + 2z \frac{\partial u}{\partial z} = 0$;
- 7) $x(y - z) \frac{\partial u}{\partial x} - y(y + z) \frac{\partial u}{\partial y} + z(y + z) \frac{\partial u}{\partial z} = 0$, $u = y^2 - x$ при $z = 1$;
- 8) $y \frac{\partial u}{\partial x} - xz \frac{\partial u}{\partial y} = 0$;
- 9) $x \frac{\partial u}{\partial x} - y \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z} = 0$, $u = y + z$ при $x = 1$;
- 10) $\frac{\partial u}{\partial x} - (y + 2z) \frac{\partial u}{\partial y} + (3y + 4z) \frac{\partial u}{\partial z} = 0$;
- 11) $(z - y)^2 \frac{\partial u}{\partial x} + z \frac{\partial u}{\partial y} + y \frac{\partial u}{\partial z} = 0$, $u = 2y(y - z)$ при $x = 0$;
- 12) $y \frac{\partial u}{\partial x} + z \frac{\partial u}{\partial z} = 0$, $u = \ln z - \frac{1}{y}$ при $x = 1$;
- 13) $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + (z - \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) \frac{\partial u}{\partial z} = 0$;
- 14) $2xy \frac{\partial z}{\partial x} + (y^2 - x^2) \frac{\partial z}{\partial y} = 0$, $z = \sqrt{2ax}$ при $y = 0$.

Відповіді

1. 1) $u = \Phi\left(y, \frac{x^y}{z}\right)$, $u = \frac{x^y}{z}$; 2) $z = \Phi(xy + y^2)$; 3) $u = \Phi\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right)$; 4) $u = \Phi\left(x^2 + y^2 + z^2, \frac{zy}{x^2}\right)$; 5) $z = \Phi(ye^{-x} - e^{2x})$, $z =$

$$\begin{aligned}
&= ye^x - e^{2x} + 1; \text{ 6) } u = \Phi\left(\frac{x-y}{z}, \frac{(x+y+2z)^2}{z}\right); \text{ 7) } u = \\
&= \Phi(yz, x(y+z)), u = y^2z^2 - \frac{x(y+z)}{1+yz}; \text{ 8) } u = \Phi(z, zx^2 + y^2); \\
&\text{ 9) } u = \Phi\left(xy, \frac{x}{z}\right), u = xy + \frac{z}{x}; \text{ 10) } u = \Phi(e^{-2x}(y+z), e^{-x}(3y+2z)); \\
&\text{ 11) } u = \Phi(y^2 - z^2, 2x + (z-y)^2), u = 2(y(y-z) + x); \text{ 12) } u = \\
&= \Phi\left(y, \ln z - \frac{x}{y}\right), u = \ln z - \frac{x}{y}; \text{ 13) } u = \Phi\left(\frac{y}{x}, z + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right); \\
&\text{ 14) } z = \Phi\left(x + \frac{y^2}{x}\right), z^2x = 2a(x^2 + y^2).
\end{aligned}$$

§ 21. Лінійне неоднорідне рівняння з частинними похідними першого порядку

21.1. Побудова загального розв'язку неоднорідного лінійного рівняння. Рівняння вигляду

$$\begin{aligned}
X_1(x_1, \dots, x_n, u) \frac{\partial u}{\partial x_1} + \dots + X_n(x_1, \dots, x_n, u) \frac{\partial u}{\partial x_n} = \\
= R(x_1, \dots, x_n, u)
\end{aligned} \tag{1}$$

називається **неоднорідним лінійним рівнянням із частинними похідними першого порядку**. Це рівняння називається також **квазілінійним**. Рівняння (1) відрізняється від рівняння, яке розглядалося в попередньому параграфі, тим, що коефіцієнти X_k , $k \in \{1, \dots, n\}$, можуть залежати від u і, крім того, є вільний член R . До цього ж типу відноситься рівняння, в якого $R \equiv 0$, але принаймні один з коефіцієнтів X_k , $k \in \{1, \dots, n\}$, обов'язково залежить від u .

Шукатимемо розв'язок рівняння (1) у неявному вигляді

$$v(x_1, \dots, x_n, u) = 0, \tag{2}$$

де функція v неперервна і має неперервні частинні похідні за всіма аргументами. Припустимо, що $\frac{\partial v}{\partial u} \neq 0$ в області визначення коефіцієнтів і вільного члена рівняння (1). Це гарантує розв'язність рівняння (2) відносно u .

Вважаючи, що в рівності (2) функція u є розв'язком рівняння (1), продиференціюємо (2) за змінною x_k , $k \in \{1, \dots, n\}$.
 Маємо

$$\frac{\partial v}{\partial x_k} + \frac{\partial v}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x_k} = 0, \quad k \in \{1, \dots, n\}, \quad (3)$$

звідки

$$\frac{\partial u}{\partial x_k} = -\frac{\frac{\partial v}{\partial x_k}}{\frac{\partial v}{\partial u}}, \quad k \in \{1, \dots, n\}. \quad (4)$$

Підставивши ці значення частинних похідних $\frac{\partial u}{\partial x_k}$, $k \in \{1, \dots, n\}$, у рівняння (1) і перенісши всі члени в ліву частину, одержимо

$$\begin{aligned} X_1(x_1, \dots, x_n, u) \frac{\partial v}{\partial x_1} + \dots + X_n(x_1, \dots, x_n, u) \frac{\partial v}{\partial x_n} + \\ + R(x_1, \dots, x_n, u) \frac{\partial v}{\partial u} = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Рівняння (5) є лінійним однорідним рівнянням із частинними похідними першого порядку відносно функції v .

Складемо систему звичайних диференціальних рівнянь у симетричній формі, що відповідає рівнянню (5),

$$\frac{dx_1}{X_1} = \dots = \frac{dx_n}{X_n} = \frac{du}{R}. \quad (6)$$

Якщо знайдемо n незалежних перших інтегралів цієї системи

$$\begin{cases} \psi_1(x_1, \dots, x_n, u) = C_1, \\ \dots \dots \dots \\ \psi_n(x_1, \dots, x_n, u) = C_n, \end{cases} \quad (7)$$

то загальний розв'язок рівняння (5) визначається формулою

$$v = \Phi(\psi_1(x_1, \dots, x_n, u), \dots, \psi_n(x_1, \dots, x_n, u)), \quad (8)$$

де Φ – довільна неперервно диференційовна функція аргументів ψ_1, \dots, ψ_n .

Прирівнявши функцію (8) до нуля, отримаємо, згідно з (2), вираз

$$\Phi(\psi_1(x_1, \dots, x_n, u), \dots, \psi_n(x_1, \dots, x_n, u)) = 0. \quad (9)$$

який називається **загальним розв'язком** рівняння (1).

Систему (6) називають **системою звичайних диференціальних рівнянь у симетричній формі, що відповідає рівнянню (1)**.

Отже, для знаходження загального розв'язку рівняння (1) складаємо відповідну йому систему звичайних диференціальних рівнянь (6), знаходимо її n незалежних перших інтегралів і прирівнюємо до нуля довільну диференційовну функцію від лівих частин цих інтегралів. Одержана рівність (9) і визначає загальний розв'язок рівняння (1) у неявному вигляді. Якщо його можна розв'язати відносно u , то дістанемо загальний розв'язок у явному вигляді.

Приклад 1. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$(z - y) \frac{\partial z}{\partial x} + (x - z) \frac{\partial z}{\partial y} = y - x.$$

◀ Складемо систему звичайних диференціальних рівнянь у симетричній формі, що відповідає заданому рівнянню,

$$\frac{dx}{z - y} = \frac{dy}{x - z} = \frac{dz}{y - x}. \quad (10)$$

Утворимо першу очевидну інтегровну комбінацію, додавши чисельними і знаменниками цих відношень :

$$\frac{dx}{z - y} = \frac{dy}{x - z} = \frac{dz}{y - x} = \frac{dx + dy + dz}{0}.$$

Звідси випливає, що $dx + dy + dz = 0$ або $d(x + y + z) = 0$, а тому першим інтегралом є

$$\psi_1(x, y, z) := x + y + z = C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R}.$$

Для утворення другої інтегровної комбінації помножимо чисельники та знаменники відношень (10) відповідно на $x, y,$

z і додамо чисельники та знаменники одержаних відношень. Тоді одержимо

$$\frac{dx}{z-y} = \frac{dy}{x-z} = \frac{dz}{y-x} = \frac{xdx + ydy + zdz}{0}.$$

Це означає, що $xdx + ydy + zdz = 0$ або $d(x^2 + y^2 + z^2) = 0$. Звідси знаходимо другий перший інтеграл системи

$$\psi_2(x, y, z) := x^2 + y^2 + z^2 = C_2, \quad C_2 \in \mathbb{R}.$$

Згідно з (9) загальний розв'язок заданого рівняння визначається рівністю

$$\Phi(x + y + z, x^2 + y^2 + z^2) = 0,$$

де Φ – довільна неперервно диференційовна функція. ►

Приклад 2. Розв'язати рівняння

$$(1 + \sqrt{z - x - y}) \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 2.$$

◀ Складемо систему звичайних диференціальних рівнянь (6):

$$\frac{dx}{1 + \sqrt{z - x - y}} = \frac{dy}{1} = \frac{dz}{2}. \quad (11)$$

З рівняння

$$\frac{dy}{1} = \frac{dz}{2}$$

одержуємо, що першим інтегралом є

$$\psi_1(x, y, z) := z - 2y = C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R}.$$

Якщо відняти в системі (11) від чисельника та знаменника останнього відношення чисельники та знаменники перших двох відношень, то дістанемо

$$\frac{d(z - x - y)}{-\sqrt{z - x - y}} = \frac{dy}{1}.$$

Ця інтегрована комбінація дає другий перший інтеграл

$$\psi_2(x, y, z) := 2\sqrt{z - x - y} + y = C_2, \quad C_2 \in \mathbb{R}.$$

Тому загальний розв'язок заданого рівняння має вигляд

$$\Phi(z - 2y, 2\sqrt{z - x - y} + y) = 0, \quad (12)$$

де Φ – довільна неперервно диференційовна функція.

Безпосередньою перевіркою переконуємося, що функція

$$z = x + y$$

також є розв'язком заданого рівняння. Цей розв'язок не одержується з формули (12) і називається **спеціальним**. Отже, рівняння з частинними похідними так само, як і звичайні диференціальні рівняння, можуть мати розв'язки, які не містяться в загальному розв'язку. ►

21.2. Задача Коші для неоднорідного лінійного рівняння. Задача Коші для неоднорідного рівняння (1) ставиться так само, як і для однорідного рівняння. Вона полягає в тому, що серед усіх розв'язків рівняння (1) треба вибрати такий розв'язок

$$u = f(x_1, \dots, x_n), \quad (13)$$

який задовольняє початкову умову

$$u = \varphi(x_1, \dots, x_{n-1}) \quad \text{при} \quad x_n = x_{n0}, \quad (14)$$

де φ – задана неперервно диференційовна функція від x_1, \dots, x_{n-1} .

Покажемо, як із загального розв'язку (9) виділити розв'язок задачі Коші, тобто вибрати відповідним чином функцію Φ . Перепишемо початкову умову (14) у вигляді

$$u - \varphi(x_1, \dots, x_{n-1}) = 0 \quad \text{при} \quad x_n = x_{n0} \quad (15)$$

і порівняємо з (9). Тоді одержимо, що функцію Φ треба вибрати так, щоб

$$\Phi(\bar{\psi}_1, \dots, \bar{\psi}_n) = u - \varphi(x_1, \dots, x_{n-1}), \quad (16)$$

У ці перші інтеграли

$$\psi_1(x, y, z) = C_1, \quad \psi_2(x, y, z) = C_2 \quad (24)$$

підставимо замість x, y, z їхні вирази (22). Тоді дістанемо два рівняння вигляду

$$\Psi_1(t) = C_1, \quad \Psi_2(t) = C_2. \quad (25)$$

Виключивши з них t , одержимо співвідношення

$$\Phi(C_1, C_2) = 0. \quad (26)$$

Підставивши сюди замість C_1 і C_2 ліві частини перших інтегралів (24), отримаємо шуканий розв'язок .

У тому випадку, коли в обидва рівняння (25) не входить t , лінія (22) є інтегральною лінією системи (23), тобто характеристикою рівняння (21), і задача Коші має безліч розв'язків.

Приклад 3. Знайти інтегральну поверхню рівняння

$$y^2 \frac{\partial z}{\partial x} + xy \frac{\partial z}{\partial y} = x,$$

яка проходить через лінію $z = y^2, x = 0$.

◀ Складемо систему звичайних диференціальних рівнянь у симетричній формі

$$\frac{dx}{y^2} = \frac{dy}{xy} = \frac{dz}{x}.$$

З першого і другого відношень знаходимо перший інтеграл

$$\frac{dx}{y^2} = \frac{dy}{xy}, \quad xdx = ydy,$$

$$\psi_1(x, y, z) := y^2 - x^2 = C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R}.$$

Для знаходження другого першого інтеграла розглянемо перше і третє відношення і скористаємося знайденим вище першим інтегралом:

$$\frac{dx}{y^2} = \frac{dz}{x}, \quad \frac{dx}{C_1 + x^2} = \frac{dz}{x}, \quad dz = \frac{xdx}{C_1 + x^2},$$

$$z = \frac{1}{2} \ln |x^2 + C_1| + \ln |\bar{C}_2|, \quad \bar{C}_2 \neq 0, \quad z = \ln |\bar{C}_2 \sqrt{x^2 + C_1}|,$$

$$z = \ln |\bar{C}_2 \sqrt{x^2 + y^2 - x^2}|, \quad z = \ln |\bar{C}_2 y|, \quad \bar{C}_2 \neq 0,$$

або

$$\psi_2(x, y, z) := \frac{e^z}{y} = C_2, \quad C_2 \in \mathbb{R}.$$

Отже, загальний розв'язок заданого рівняння має вигляд

$$\Phi\left(y^2 - x^2, \frac{e^z}{y}\right) = 0,$$

де Φ – довільна неперервно диференційовна функція.

Для того щоб знайти розв'язок, який задовольняє задану початкову умову, покладемо в перші інтеграла $x = 0$:

$$\bar{\psi}_1 = y^2, \quad \bar{\psi}_2 = \frac{e^z}{y}.$$

Звідси дістаємо, що

$$\bar{\psi}_2 \sqrt{\bar{\psi}_1} = e^z \quad \text{або} \quad z = \ln \bar{\psi}_2 + \frac{1}{2} \ln \bar{\psi}_1.$$

Оскільки згідно з умовою $z = y^2$ або $z = \bar{\psi}_1$, то маємо співвідношення

$$\bar{\psi}_1 = \ln \bar{\psi}_2 + \frac{1}{2} \ln \bar{\psi}_1.$$

Опустивши риси над ψ_1 і ψ_2 і підставивши замість ψ_1 і ψ_2 вирази для них, одержимо розв'язок задачі

$$y^2 - x^2 = \ln \frac{e^z}{y} + \frac{1}{2} \ln(y^2 - x^2)$$

або

$$z = y^2 - x^2 - \frac{1}{2} \ln(y^2 - x^2) + \ln y. \blacktriangleright$$

Приклад 4. Знайти інтегральну поверхню рівняння

$$z \frac{\partial z}{\partial x} + (z^2 - x^2) \frac{\partial z}{\partial y} + x = 0,$$

яка проходить через криву $y = x^2$, $z = 2x$.

◀ Система звичайних диференціальних рівнянь у симетричній формі, яка відповідає заданому рівнянню, має вигляд

$$\frac{dx}{z} = \frac{dy}{z^2 - x^2} = \frac{dz}{-x}.$$

Якщо взяти перше і третє відношення, то одержимо перший інтеграл

$$\frac{dx}{z} = \frac{dz}{-x}, \quad xdx + zdz = 0,$$
$$\psi_1(x, y, z) := x^2 + z^2 = C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R}.$$

Для знаходження другого першого інтеграла утворимо інтегровну комбінацію. З цією метою помножимо чисельник і знаменник першого відношення на z , третього – на x , додамо і прирівняємо до другого відношення:

$$\frac{zdx + xdz}{z^2 - x^2} = \frac{dy}{z^2 - x^2} \quad \text{або} \quad d(xz) = dy,$$

звідки

$$\psi_2(x, y, z) := xz - y = C_2, \quad C_2 \in \mathbb{R}.$$

Отже, загальний розв'язок вихідного рівняння

$$\Phi(x^2 + z^2, xz - y) = 0,$$

де Φ – довільна неперервно диференційовна функція.

Для того щоб знайти розв'язок задачі Коші, запишемо початкові умови в параметричній формі

$$x = t, \quad y = t^2, \quad z = 2t.$$

Підставимо ці вирази в перші інтеграли і виключимо параметр t :

$$C_1 = 5t^2, \quad C_2 = t^2, \quad \text{звідки} \quad C_1 = 5C_2.$$

Повернувшись до перших інтегралів, одержимо

$$x^2 + z^2 = 5(xz - y).$$

Це і є розв'язок нашої задачі. ▶

Вправи

1. Знайти загальний розв'язок рівняння:

- 1) $x \frac{\partial z}{\partial x} + 2y \frac{\partial z}{\partial y} = x^2 y + z;$
- 2) $2y^4 \frac{\partial z}{\partial x} - xy \frac{\partial z}{\partial y} = x \sqrt{z^2 + 1};$
- 3) $\cos y \frac{\partial z}{\partial x} + \cos x \frac{\partial z}{\partial y} = \cos x \cos y;$
- 4) $yz \frac{\partial z}{\partial x} - xz \frac{\partial z}{\partial y} = e^z;$
- 5) $(y^2 + z^2 - x^2) \frac{\partial z}{\partial x} - 2xy \frac{\partial z}{\partial y} + 2xz = 0;$
- 6) $\sin^2 x \frac{\partial z}{\partial x} + \operatorname{tg} z \frac{\partial z}{\partial y} = \cos^2 z;$
- 7) $(x^3 + 3xy^2) \frac{\partial z}{\partial x} + 2y^3 \frac{\partial z}{\partial y} = 2y^2 z;$
- 8) $(y + z + u) \frac{\partial u}{\partial x} + (x + z + u) \frac{\partial u}{\partial y} + (x + y + u) \frac{\partial u}{\partial z} = x + y + z;$
- 9) $(x + z) \frac{\partial z}{\partial x} + (y + z) \frac{\partial z}{\partial y} = x + y;$
- 10) $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z} = x^2 + 2u;$
- 11) $\sqrt{x} \frac{\partial z}{\partial x} + \sqrt{y} \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2};$
- 12) $(z - y) \frac{\partial z}{\partial x} + (x - z) \frac{\partial z}{\partial y} + x - y = 0.$

2. Знайти загальний розв'язок і поверхню, яка проходить через задану лінію:

- 1) $yz \frac{\partial z}{\partial x} + x \frac{\partial z}{\partial y} = 0, z = x^2, y = 0;$
- 2) $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z - xy, z = y^2 + 1, x = 2;$
- 3) $x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} = z, z = x^3, y = x;$
- 4) $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 2z, z = y, x = 1;$
- 5) $z(x + z) \frac{\partial z}{\partial x} - y(y + z) \frac{\partial z}{\partial y} = 0, z = \sqrt{y}, x = 1;$

- 6) $x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} = z^2(x - 3y), yz + 1 = 0, x = 1;$
 7) $x \frac{\partial z}{\partial x} + (xz + y) \frac{\partial z}{\partial y} = z, x + y = 2z, xz = 1;$
 8) $x \frac{\partial z}{\partial x} + z \frac{\partial z}{\partial y} = y, y = 2z, x + 2y = z;$
 9) $(x - z) \frac{\partial z}{\partial x} + (y - z) \frac{\partial z}{\partial y} = 2z, x - y = 2, z + 2x = 1.$

Відповіді

1. 1) $\Phi\left(\frac{x^2}{y}, \frac{3z}{x} - xy\right) = 0;$ 2) $\Phi(x^2 + y^4, y(z + \sqrt{z^2 + 1})) = 0;$ 3) $z = \sin y + F(\sin x - \sin y);$ 4) $\Phi\left(x^2 + y^2, \arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + (z + 1)e^{-z}\right) = 0;$ 5) $z^2 = yF\left(\frac{y}{x}\right) - x^2 - y^2;$ 6) $\Phi\left(\operatorname{tg} z + \operatorname{ctg} x, y - \frac{1}{2 \cos^2 z}\right) = 0;$ 7) $z = yF\left(\frac{y^3}{x^2} + y\right);$ 8) $\Phi((x - u)\sqrt[3]{x + y + z + u}, (y - u)\sqrt[3]{x + y + z + u}, (z - u)\sqrt[3]{x + y + z + u}) = 0;$ 9) $\Phi\left(\frac{x + y + z}{(y - x)^2}, (y - x)(x + y - 2z)\right) = 0;$ 10) $u^2 = x^2 \ln x + x^2 F\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right);$ 11) $\Phi(z - \sqrt{x}, \sqrt{x} - \sqrt{y}) = 0$ або $z = \sqrt{x} + F(\sqrt{x} - \sqrt{y});$ 12) $\Phi(x + y + z, x^2 + y^2 + z^2) = 0.$

2. 1) $\Phi(z, x^2 - y^2 z) = 0, z = \frac{x^2}{y^2};$ 2) $\Phi\left(\frac{x}{y}, \frac{z}{x} + y\right) = 0, 2x(z + xy) = (x + 2y)^2;$ 3) $z = xF(xy), z = x^2 y;$ 4) $\Phi\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x^2}\right) = 0$ або $z = x^2 F\left(\frac{y}{x}\right), z = xy;$ 5) $z = F\left(\frac{y(x + z)}{y + z}\right), z^2 = xy;$ 6) $\Phi\left(xy, x + 3y + \frac{1}{z}\right) = 0, x + 3y + \frac{1}{z} = 1 + 2xy;$ 7) $\Phi\left(\frac{x}{z}, \frac{y - zx}{x}\right) = 0, xz = (2z - x - y + zx)^2;$ 8) $\Phi\left(y^2 - z^2, \frac{y + z}{x}\right) = 0, 2x + y + z = 0;$ 9) $\Phi\left(\frac{(x - y)^2}{2}, \frac{z}{(x + z)^2}\right) = 0, (x - y)(z + y) = 4z.$

Розділ 7

Застосування диференціальних рівнянь до задач економіки, техніки і природознавства

§ 22. Задачі, моделі яких описуються диференціальними рівняннями першого порядку

22.1. Економічні моделі.

Приклад 1 (модель ринку з прогнозованими цінами). Нехай p – ціна товару в момент часу t , тоді $p'(t)$ – тенденція ціноутворення. Відомо, що як попит d , так і пропозиція s є функціями від p і p' . Зокрема, в багатьох конкретних задачах вони є лінійними функціями від p і p' :

$$d = a_1 p' + b_1 p + c_1, \quad s = a_2 p' + b_2 p + c_2.$$

Знайти закон зміни ціни p від часу t .

◀ З умови рівності попиту і пропозиції випливає, що

$$a_1 p' + b_1 p + c_1 = a_2 p' + b_2 p + c_2$$

або

$$(a_1 - a_2)p' + (b_1 - b_2)p + c_1 - c_2 = 0.$$

Отже, одержали лінійне рівняння

$$ap' + bp + c = 0, \tag{1}$$

де $a := a_1 - a_2$, $b := b_1 - b_2$, $c := c_1 - c_2$.

Якщо, наприклад,

$$d = 4p' - 2p + 39, \quad s = 44p' + 2p - 1,$$

то рівняння (1) набуде вигляду

$$40p' + 4p - 40 = 0$$

або

$$10p' + p - 10 = 0. \tag{2}$$

Відокремимо змінні в рівнянні (2) та зінтегруємо одержану рівність. Тоді матимемо

$$\frac{dp}{p-10} = -0,1dt, \quad \ln|p-10| = -0,1t + \ln|C_1|, \quad C_1 \neq 0,$$

$$p-10 = \pm C_1 e^{-0,1t} \quad \text{або} \quad p = C e^{-0,1t} + 10, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Отже, ціна на товар повинна змінюватися за законом

$$p = C e^{-0,1t} + 10, \quad C \in \mathbb{R}, \quad (3)$$

якщо вимагати, щоб між попитом і пропозицією весь час зберігалася рівновага.

У випадку, коли початкова ціна становила p_0 гр. од., тобто $p(0) = p_0$, то з формули (3) одержуємо, що

$$p_0 = C + 10 \quad \text{або} \quad C = p_0 - 10.$$

Тому закон зміни ціни описується функцією

$$p = (p_0 - 10)e^{-0,1t} + 10, \quad t > 0. \blacktriangleright$$

Приклад 2 (модель динаміки діяльності малого підприємства). Вважатимемо, що мале підприємство може розвиватися як за рахунок внутрішніх ресурсів (прибутку), так і за рахунок зовнішньої фінансової підтримки у вигляді інвестицій. Основні виробничі фонди – єдиний чинник, який обмежує і визначає випуск продукції, а підприємство функціонує при незмінній технології. При цьому, як доведено, темпи розвитку підприємства визначаються динамікою основних виробничих фондів $A(t)$, а саме

$$\frac{dA(t)}{dt} = aA(t) + I(t),$$

де $I(t)$ – зовнішні інвестиції, одержувані підприємством на безповоротній основі, a – коефіцієнт, який залежить від параметрів, що характеризують діяльність малого підприємства.

Знайти залежність основних виробничих фондів від часу при різних типах інвестицій.

◀ Розглянемо рівняння динаміки для трьох видів інвестицій $I(t)$: 1) $I(t) = I_0$, I_0 – стала; 2) $I(t) = \beta t$; 3) $I(t) = Be^{\beta t}$. Ці випадки відповідають трьом можливим стратегіям державної фінансової підтримки малого підприємства: 1) постійної з фіксованими обсягами інвестицій для всіх періодів; 2) зростаючої лінійно з темпом зростання інвестицій $\beta > 0$; 3) експоненціально зростаючою з темпом приросту $\beta > 0$ і з мінімальним рівнем гарантованої державної підтримки $I(0) = B$.

Вивчимо кожний з цих випадків окремо, вважаючи, що $A(0) = A_0$.

1) Якщо $I(t) = I_0$, то маємо задачу Коші

$$\frac{dA(t)}{dt} = aA(t) + I_0, \quad A(0) = A_0.$$

Загальний розв'язок рівняння має вигляд

$$A(t) = Ce^{at} - \frac{I_0}{a}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Задовольнивши початкову умову, дістанемо, що $C = A_0 + \frac{I_0}{a}$, а тому розв'язком задачі є функція

$$A(t) = \left(A_0 + \frac{I_0}{a}\right)e^{at} - \frac{I_0}{a}, \quad t > 0.$$

2) Нехай $I(t) = \beta t$, тоді маємо задачу Коші

$$\frac{dA(t)}{dt} = aA(t) + \beta t, \quad A(0) = A_0.$$

Загальний розв'язок відповідного лінійного однорідного рівняння має вигляд

$$A(t) = Ce^{at}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Частинний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння шукатимемо у вигляді

$$\tilde{A}(t) = Mt + N.$$

Після підстановки цієї функції в рівняння, одержимо, що $M = -\frac{\beta}{a}$, $N = -\frac{\beta}{a^2}$, і тому

$$\tilde{A}(t) = -\frac{\beta}{a^2}(at + 1).$$

Отже, загальним розв'язком лінійного неоднорідного рівняння є функція

$$A(t) = Ce^{at} - \frac{\beta}{a^2}(at + 1).$$

Скориставшись початковою умовою знайдемо, що $C = A_0 + \frac{\beta}{a^2}$, і тому розв'язок задачі Коші має вигляд

$$A(t) = \left(A_0 + \frac{\beta}{a^2}\right)e^{at} - \frac{\beta}{a^2}(at + 1), \quad t > 0.$$

3) Якщо $I(t) = Be^{\beta t}$, то маємо задачу

$$\frac{dA(t)}{dt} = aA(t) + Be^{\beta t}, \quad A(0) = A_0.$$

Розв'язком цієї задачі при $a \neq \beta$ є функція

$$A(t) = \left(A_0 + \frac{B}{a - \beta}\right)e^{at} - \frac{B}{a - \beta}e^{\beta t}, \quad t > 0.$$

Порівнюючи темпи зростання основних фондів для цих варіантів інвестування, бачимо, що вони вищі тоді, коли інтенсивніша фінансова підтримка, чого й слід було очікувати. Ці темпи, крім того, залежать і від a , тобто від параметрів, які характеризують діяльність заданого економічного об'єкта.

Очевидно, що економічний зміст змінних і параметрів, які входять до одержаних вище розв'язків, різний для кожного конкретного підприємства і визначається умовами, в яких воно працює. ►

Приклад 3 (динамічна модель Кейнса). Нехай $Y(t)$ – національний доход, $I(t)$ – інвестиції, $E(t)$ – державні витрати,

$C(t)$ – споживання на момент часу t . У макроекономіці правильні співвідношення

$$Y(t) = C(t) + I(t) + E(t),$$

$$C(t) = a(t)Y(t) + b(t),$$

$$I(t) = m(t)Y'(t),$$

де $a(t) \in (0, 1)$ – коефіцієнт схильності до споживання, $b(t)$ – автономне споживання, $m(t)$ – норма акселерації.

Якщо підставити $C(t)$ і $I(t)$ з другого і третього співвідношень у перше, то одержимо

$$Y(t) = a(t)Y(t) + b(t) + m(t)Y'(t) + E(t)$$

або

$$m(t)Y'(t) + (a(t) - 1)Y(t) = -b(t) - E(t). \quad (4)$$

Треба знайти залежність національного доходу від часу.

◀ Розглянемо випадок, коли m , a , b і E – сталі. Тоді рівняння (4) набуде вигляду

$$mY'(t) + (a - 1)Y(t) = -(b + E).$$

Знайдемо спочатку загальний розв'язок відповідного лінійного однорідного рівняння

$$m \frac{dY(t)}{dt} = (1 - a)Y(t).$$

Відокремивши змінні та зінтегрувавши, дістанемо

$$\frac{dY}{Y} = \frac{1 - a}{m} dt, \quad Y \neq 0,$$

$$\ln Y = \frac{1 - a}{m} t + \ln |C_1|, \quad Y(t) = C_1 e^{\frac{1-a}{m} t}, \quad C_1 \neq 0,$$

або

$$Y(t) = C e^{\frac{1-a}{m} t}, \quad C \in \mathbb{R},$$

якщо врахувати ще й розв'язок $Y = 0$.

Частинний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння шукатимемо у вигляді

$$\tilde{Y}(t) = A.$$

Після підстановки цієї функції в рівняння, дістанемо, що

$$\tilde{Y}(t) = \frac{b + E}{1 - a}.$$

Тому загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння має вигляд

$$Y(t) = Ce^{\frac{1-a}{m}t} + \frac{b + E}{1 - a}, \quad t > 0, C \in \mathbb{R}.$$

Якщо $Y(0) = Y_0$, то маємо

$$Y_0 = C + \frac{b + E}{1 - a}, \quad C = Y_0 - \frac{b + E}{1 - a}.$$

Тоді

$$Y(t) = \left(Y_0 - \frac{b + E}{1 - a} \right) e^{\frac{1-a}{m}t} + \frac{b + E}{1 - a}, \quad t > 0. \blacktriangleright$$

Приклад 4 (модель Харрода–Домара). Розглянемо модель макроекономічної динаміки, запропоновану Харродом і Домаром. Вона описує динаміку доходу $Y(t)$, який розглядається як сума споживання $C(t)$ та інвестицій $I(t)$, тобто $Y(t) = C(t) + I(t)$. Вважатимемо, що економіка замкнута, а тому чистий експорт дорівнює нулю і державні витрати не виокремлюються. Крім того, припускати будемо, що швидкість зростання доходу пропорційна інвестиціям:

$$\frac{dY(t)}{dt} = \frac{1}{B}I(t),$$

де B – коефіцієнт капіталомісткості приросту доходу, а $\frac{1}{B}$ – віддача приросту капіталу. Тоді одержимо модель макроекономічної динаміки у вигляді

$$Y(t) = B \frac{dY(t)}{dt} + C(t). \quad (5)$$

Ця модель дозволяє аналізувати зміну національного доходу залежно від зміни динаміки його споживання.

Розглянути різні випадки функції $C(t)$: 1) $C(t) = 0$; 2) $C(t) = C_0$; 3) $C(t) = C_0 e^{rt}$.

◀ 1) Якщо $C(t) = 0$, то рівняння (5) має вигляд

$$B \frac{dY(t)}{dt} = Y(t). \quad (6)$$

Відокремивши змінні та зінтегрувавши, одержимо

$$\frac{dY}{Y} = \frac{1}{B} dt, Y \neq 0, \ln |Y| = \frac{1}{B} t + \ln |C_1|, C_1 \neq 0,$$

або

$$Y(t) = C_1 e^{\frac{t}{B}}, \quad C_1 \in \mathbb{R}, \quad (7)$$

якщо врахувати і розв'язок $Y(t) = 0$.

Припустимо, що в початковий момент часу $t = 0$ дохід Y становив Y_0 , тобто

$$Y(0) = Y_0. \quad (8)$$

Задовольнивши функцією $Y(t)$ з рівності (7) початкову умову (8), дістанемо, що $C_1 = Y_0$, а тому

$$Y(t) = Y_0 e^{\frac{t}{B}}, \quad t > 0. \quad (9)$$

Величину $y(t) = \frac{Y'(t)}{Y(t)}$ називають **неперервним темпом приросту**. У нашому випадку маємо

$$y(t) = \frac{\frac{1}{B} Y_0 e^{\frac{t}{B}}}{Y_0 e^{\frac{t}{B}}} = \frac{1}{B},$$

тобто $\frac{1}{B}$ є максимально можливий технологічний темп росту.

2) Нехай $C(t) = C_0$ – стала. Тоді рівняння (5) набуде вигляду

$$\frac{dY(t)}{dt} - \frac{1}{B} Y(t) = -\frac{C_0}{B}. \quad (10)$$

Рівняння (10) є лінійним неоднорідним рівнянням першого порядку. Розв'яжемо спочатку відповідне лінійне однорідне рівняння (6). Його загальний розв'язок має вигляд (7). Загальний розв'язок рівняння (10) шукатимемо у вигляді

$$Y(t) = c_1(t)e^{\frac{1}{B}t}.$$

Підставивши цю функцію разом з похідною в рівняння (10), одержимо

$$c_1'(t)e^{\frac{1}{B}t} = -\frac{C_0}{B}$$

або

$$c_1'(t) = -\frac{C_0}{B}e^{-\frac{t}{B}}.$$

Зінтегрувавши, дістанемо, що

$$c_1(t) = C_0e^{-\frac{t}{B}} + C_2, \quad C_2 \in \mathbb{R},$$

а тому загальний розв'язок рівняння (10) має вигляд

$$Y(t) = C_2e^{\frac{t}{B}} + C_0, \quad C_2 \in \mathbb{R}. \quad (11)$$

Якщо задовольнити початкову умову (8), то одержимо з (11), що $Y_0 = C_2 + C_0$ або $C_2 = Y_0 - C_0$. Тому розв'язок задачі Коші (10), (8) визначається формулою

$$Y(t) = (Y_0 - C_0)e^{\frac{t}{B}} + C_0, \quad t > 0. \quad (12)$$

Неперервний темп приросту доходу

$$y(t) \equiv \frac{Y'(t)}{Y(t)} = \frac{\frac{1}{B}(Y_0 - C_0)e^{\frac{t}{B}}}{(Y_0 - C_0)e^{t/B} + C_0}.$$

У початковий момент часу $t = 0$ маємо, що $y(0) = \frac{1}{B}\left(1 - \frac{C_0}{Y_0}\right)$, а при $t \rightarrow +\infty$ неперервний темп приросту $y(t)$, зростаючи, прямує до $\frac{1}{B}$ при $t \rightarrow +\infty$, що є зрозумілим, оскільки дохід зростає, а обсяг споживання становить все меншу його частку.

3) Нарешті розглянемо варіант моделі з показником споживання $C(t)$, який зростає зі сталим темпом r , тобто $C(t) = C_0 e^{rt}$.

У цьому випадку рівняння (5) має вигляд

$$\frac{dY(t)}{dt} - \frac{1}{B}Y(t) = -\frac{C_0}{B}e^{rt}. \quad (13)$$

Загальним розв'язком цього рівняння є функція

$$Y(t) = C_1 e^{\frac{1}{B}t} + \frac{1}{1-rB} e^{rt}, \quad C_1 \in \mathbb{R}, \quad rB \neq 1. \quad (14)$$

Якщо задовольнити початкову умову (8), то одержимо, що $C_1 = Y_0 - \frac{C_0}{1-rB}$, $rB \neq 1$. Тому розв'язком задачі (13), (8) є функція

$$Y(t) = \left(Y_0 - \frac{C_0}{1-rB} \right) e^{\frac{t}{B}} + \frac{C_0}{1-rB} e^{rt}, \quad t > 0, \quad rB \neq 1. \quad (15)$$

У розв'язку (15) керуючим параметром є темп приросту споживання r .

Розглянемо три випадки.

1) Темп приросту споживання r вищий за технологічний темп $\frac{1}{B}$ приросту національного доходу, тобто $r > \frac{1}{B}$ або $Br > 1$. У цьому випадку перший доданок у формулі (15) додатний, а другий – від'ємний. При цьому темп зростання другого доданка вищий, ніж першого.

У початковий момент часу $t = 0$ темп приросту національного доходу дорівнює $y(0) = \frac{1}{B} \left(1 - \frac{C_0}{Y_0} \right)$. Потім темп неперервно зменшується і в момент t_1 дорівнює нулю. Величина t_1 визначається з рівняння $\frac{dy(t)}{dt} = 0$. На відрізку $[0, t_1]$ частка споживання зростає від $\frac{C_0}{Y_0}$ до 1. Далі накопичення стає від'ємним, а обсяг національного доходу зменшується. У деякий момент t_2 національний дохід дорівнює нулю.

Отже, розв'язок (15) має економічний зміст тільки на відрізку $[0, t_1]$, який має малу довжину.

2) Темп приросту споживання дорівнює технологічному темпу приросту національного доходу, тобто $r = \frac{1}{B}$ або $Br = 1$.

У цьому випадку частинний розв'язок рівняння (13) має вигляд $\tilde{Y}(t) = -\frac{C_0}{B}te^{\frac{t}{B}}$, а тому загальним розв'язком є функція

$$Y(t) = \left(C_1 - \frac{C_0}{B}t\right)e^{\frac{t}{B}}, \quad C_1 \in \mathbb{R}. \quad (16)$$

Якщо задовольнити функцією (16) початкову умову (8), то одержимо, що функція, яка описує динаміку національного доходу, має вигляд

$$Y(t) = \left(Y_0 - \frac{C_0}{B}t\right)e^{\frac{t}{B}}, \quad t > 0. \quad (17)$$

Поведінка цієї функції аналогічна тій, яка описана у випадку 1). Тут так само присутні моменти часу t_1 і t_2 , які дорівнюють відповідно $t_1 = \left(\frac{Y_0}{C_0} - 1\right)B$, $t_2 = \frac{BY_0}{C_0}$.

3) Темп приросту споживання менший за технологічний темп приросту національного доходу, тобто $r < \frac{1}{B}$ або $Br < 1$. Функція $Y(t)$ у цьому випадку залежить від знака коефіцієнта першого доданка у розв'язку (15). Перетворимо цей коефіцієнт до вигляду

$$Y_0 - \frac{C_0}{1 - Br} = \frac{BY_0}{1 - Br} \left(\frac{1}{B} \left(1 - \frac{C_0}{Y_0}\right) - r\right)$$

і введемо позначення $\frac{1}{B} \left(1 - \frac{C_0}{Y_0}\right) =: \rho_0$. Величина $1 - \frac{C_0}{Y_0} =: \alpha_0$ є нормою накопичення у початковий момент часу $t = 0$. Звідси випливає, що ρ_0 дорівнює добутку норми накопичення на технологічний темп приросту або відношенню норми виробничого накопичення до капіталомісткості приросту національного доходу, тобто

$$\rho_0 = \frac{\alpha_0}{B}.$$

Підставивши ρ_0 в (15), одержимо

$$Y(t) = BY_0 \frac{\rho_0 - r}{1 - Br} e^{\frac{t}{B}} + \frac{C_0}{1 - Br} e^{rt}, \quad t > 0. \quad (18)$$

З формули (18) випливає, що поведінка розв'язку залежить від співвідношення між r і ρ_0 . Зокрема, якщо $r = \rho_0$, то темп приросту доходу дорівнює темпу приросту споживання, і розв'язком є

$$Y(t) = Y_0 e^{\frac{\alpha_0}{B} t}, \quad t > 0.$$

Норма накопичення $\alpha(t)$ у цьому випадку не залежить від t і дорівнює α_0 . Саме ця модифікація моделі економічного зростання, в якій норма накопичення стала, називається **моделлю Харрода-Домара**. Відхилення r від ρ_0 означає, що дохід зростає з монотонно змінною нормою накопичення. ►

22.2. Диференціальні моделі в екології. Екологія вивчає взаємовідношення людини і взагалі живих організмів з оточуючим середовищем. Основним об'єктом екології є еволюція популяцій. Нижче розглянемо математичні моделі популяцій, які пов'язані з розмноженням або вимиранням останніх, а також зі співіснуванням різних видів тварин у ситуації "хижак-жертва".

Приклад 5. Нехай $x(t)$ – число особин у популяції на момент часу t . Тоді якщо A – число особин у популяції, що народжуються за одиницю часу, а B – кількість особин, що гинуть за одиницю часу, то, очевидно, що швидкість зміни x з часом визначається формулою

$$\frac{dx}{dt} = A - B. \quad (19)$$

Треба знайти x при простих залежностях A і B від x .

◀ Найпростішим випадком є ситуація, коли

$$A = ax, \quad B = bx,$$

де a – коефіцієнт народжуваності, а b – коефіцієнт смертності особин за одиницю часу. Тоді рівняння (19) набуде вигляду

$$\frac{dx}{dt} = (a - b)x. \quad (20)$$

Якщо в початковий момент часу t_0 число особин у популяції дорівнювало x_0 , тобто

$$x(t_0) = x_0, \quad (21)$$

то маємо задачу Коші (20), (21).

Знайдемо загальний розв'язок рівняння (20):

$$\frac{dx}{x} = (a - b)dt, x \neq 0, \int \frac{dx}{x} = (a - b) \int dt + \ln |C_1|, C_1 \neq 0,$$

$$\ln |x| = (a - b)t + \ln |C_1|, x = \pm C_1 e^{(a-b)t}$$

або

$$x = C e^{(a-b)t}, \quad C \in \mathbb{R}, \quad (22)$$

якщо врахувати розв'язок $x = 0$.

Задовольнивши функцією (22) початкову умову (20), одержимо

$$x_0 = C e^{(a-b)t_0}$$

або

$$C = x_0 e^{-(a-b)t_0}.$$

Тому розв'язком задачі (20), (21) є функція

$$x(t) = x_0 e^{(a-b)(t-t_0)}, \quad t > t_0. \quad (23)$$

З одержаної рівності випливає, що коли $a > b$, то при $t \rightarrow +\infty$ число особин $x \rightarrow +\infty$. З іншого боку, якщо $a < b$, то $x \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$ і популяція вимирає. ►

Приклад 6. Розглянути задачу з прикладу 5, коли $A = ax$, $B = bx^2$, $a > 0$, $b > 0$.

◀ У цьому випадку рівняння (19) має вигляд

$$\frac{dx}{dt} = ax - bx^2 \quad (24)$$

або

$$\frac{dx}{dt} = x(a - bx).$$

Після відокремлення змінних та інтегрування одержимо:

$$\frac{dx}{x(a - bx)} = dt, \quad x(a - bx) \neq 0,$$

$$\frac{1}{a} \int \frac{dx}{x} + \frac{b}{a} \int \frac{dx}{a-bx} = \int dt + \frac{1}{a} \ln |C_1|,$$

$$\frac{1}{a} \ln \left| \frac{x}{a-bx} \right| = t + \frac{1}{a} \ln |C_1|, \frac{x}{a-bx} = \pm C_1 e^{at}, C_1 \neq 0,$$

або

$$\frac{x}{a-bx} = C e^{at}, a-bx \neq 0, C \in \mathbb{R},$$

якщо врахувати розв'язок $x = 0$.

Скориставшись початковою умовою $x(t_0) = x_0$, де $x_0 \neq \frac{b}{a}$, знаходимо, що

$$\frac{x_0}{a-bx_0} = C e^{at_0}, \quad C = \frac{x_0}{a-bx_0} e^{-at_0}.$$

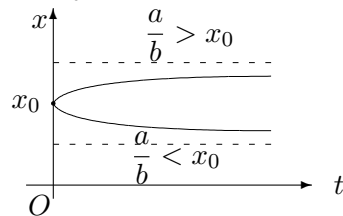
Тоді

$$\frac{x}{a-bx} = \frac{x_0}{a-bx_0} e^{a(t-t_0)}$$

або

$$x(t) = \frac{\frac{a}{b}x_0}{x_0 + \left(\frac{a}{b} - x_0\right)e^{-a(t-t_0)}}, \quad t > t_0. \quad (25)$$

Звідси одержуємо, що при $t \rightarrow +\infty$ число особин в популяції $x(t) \rightarrow \frac{a}{b}$. При цьому можливі два випадки: $\frac{a}{b} > x_0$ і $\frac{a}{b} < x_0$.



Різницю між цими випадками добре видно з рисунка.

Функція (25) описує, зокрема, популяції фруктових шкідників і деяких видів бактерій. ►

22.3. Потік наукової інформації. При вивченні росту інформаційних потоків у науці, тобто числа наукових публікацій, припускають, що швидкість росту пропорційна добутку досягнутого рівня y числа публікацій і різниці $b-y$, де b – максимально можливе значення величини y . Треба знайти закон, який визначає залежність числа публікацій від часу.

◀ Якщо $y(t)$ – число публікацій на момент часу t , то рівняння, яке описує ріст числа публікацій має вигляд

$$\frac{dy}{dt} = ky(b - y), 0 < y < b, \quad (26)$$

де $k > 0$ – коефіцієнт пропорційності.

Маємо рівняння з відокремленими змінними. Відокремимо змінні і знайдемо інтеграли від обох частин рівняння:

$$\frac{dy}{y(b - y)} = k dt \quad \text{або} \quad \int \frac{dy}{y(b - y)} = k \int dt + \ln |C_1|, C_1 \neq 0.$$

Оскільки

$$\int \frac{dy}{y(b - y)} = \frac{1}{b} \int \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{b - y} \right) dy = \frac{1}{b} \ln \frac{y}{b - y},$$

то розв'язок рівняння (26) має вигляд

$$\frac{1}{b} \ln \frac{y}{b - y} = kt + \ln |C_1|$$

або

$$\frac{y}{b - y} = C e^{bkt}, \quad C \in \mathbb{R}, \quad (27)$$

якщо врахувати розв'язок $y = 0$ і не враховувати розв'язку $y = b$.

Якщо в початковий момент часу $t = 0$ число публікацій дорівнювало $y_0 < b$, тобто $y(0) = y_0$, то з рівності (27) одержуємо

$$\frac{y_0}{b - y_0} = C e^{b \cdot k \cdot 0} \quad \text{або} \quad C = \frac{y_0}{b - y_0}.$$

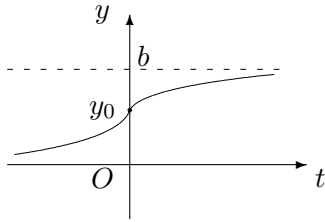
Тому

$$\frac{y}{b - y} = \frac{y_0}{b - y_0} e^{bkt}$$

або

$$y(t) = \frac{by_0}{y_0 + (b - y_0)e^{-bkt}}, \quad t > 0. \quad (28)$$

Графік функції, яка визначається рівністю (28), називається **логістичною кривою** (див. рисунок). ▶



22.4. Математичні моделі в хімії.

Приклад 7 (задача про суміші). Посудина об'ємом 20 літрів містить 80% азоту і 20% кисню. У посудину вливають кожної секунди 0,1 літра азоту, який неперервно перемішується, і витікає така сама кількість суміші. Через який час в посудині буде 99% азоту?

◀ Нехай $x(t)$ – кількість літрів азоту в посудині через t секунд після початку досліду. За час Δt в посудину вливають $0,1 \cdot \Delta t$ літрів азоту. В одному літрі суміші міститься $\frac{x}{20}$ літрів азоту, а тому в кількості $0,1 \cdot \Delta t$ містилося б $\frac{x}{20} \cdot 0,1 \Delta t$ літрів азоту, якби кількість азоту не змінювалася з часом. Оскільки вона змінюється з часом, то маємо $\frac{x(t)}{20} \cdot 0,1 \Delta t + O((\Delta t)^2)$ літрів азоту, де $O((\Delta t)^2)$ – нескінченно мала величина порядку $(\Delta t)^2$ при $\Delta t \rightarrow 0$.

Приріст кількості азоту за час від t до $t + \Delta t$, тобто $x(t + \Delta t) - x(t)$ дорівнює

$$x(t + \Delta t) - x(t) = 0,1 \Delta t - \left(\frac{x(t)}{20} \cdot 0,1 \Delta t + O((\Delta t)^2) \right).$$

Поділимо цю рівність на Δt і перейдемо до границі при $\Delta t \rightarrow 0$. Тоді одержимо

$$\frac{dx(t)}{dt} = 0,1 - \frac{x(t)}{20} \cdot 0,1$$

або

$$\frac{dx}{dt} = \frac{20 - x}{200}.$$

Відокремивши змінні та зінтегрувавши, дістанемо

$$\frac{dx}{x - 20} = -\frac{1}{200} dt, x \neq 20, \ln |x - 20| = -\frac{1}{200} t + \ln |C_1|, C_1 \neq 0,$$

$$x - 20 = \pm C_1 e^{-\frac{t}{200}} \quad \text{або} \quad x = 20 + C e^{-\frac{t}{200}}, C \in \mathbb{R},$$

якщо врахувати розв'язок $x = 20$.

Згідно з умовою $x(0) = 16$, тому $16 = 20 + C$, тобто $C = -4$.

Отже,

$$x(t) = 20 - 4e^{-\frac{t}{200}}, \quad t > 0.$$

Тепер знайдемо, через який час t в посудині буде 99% азоту, тобто 19,8 літрів:

$$19,8 = 20 - 4e^{-\frac{t}{200}}, \quad e^{-\frac{t}{200}} = 0,05, \quad e^{\frac{t}{200}} = 20, \quad t = 200 \ln 20.$$

З таблиці для натуральних логарифмів, знаходимо, що $\ln 20 = 2,9957 \approx 3,00$. Тому

$$t = 200 \cdot 3,00 = 600 \text{ с} \quad \text{або} \quad t = 10 \text{ хв.} \blacktriangleright$$

Приклад 8 (закон взаємодіючих мас). Дві рідкі хімічні речовини A і B об'ємом 10 і 20 літрів відповідно в процесі хімічної реакції утворюють нову рідку хімічну речовину C . Вважаючи, що температура під час реакції не змінюється, а також, що з двох об'ємів речовини A і одного об'єму речовини B утворюється три об'єми речовини C , знайти кількість речовини C в довільний момент часу t , якщо за 20 хв її утвориться 6 літрів.

◀ Позначимо через x об'єм (в літрах) речовини C , що утворився на момент часу t (в годинах). Тоді з умов задачі випливає, що до цього моменту часу в хімічну реакцію вступило $\frac{2x}{3}$ літрів речовини A і $\frac{x}{3}$ літрів речовини B . Останнє означає, що на момент часу t залишилося $10 - \frac{2x}{3}$ літрів речовини A і $20 - \frac{x}{3}$ літрів речовини B . Отже, згідно з законом діючих мас одержуємо диференціальне рівняння

$$\frac{dx}{dt} = k_1 \left(10 - \frac{2x}{3}\right) \left(20 - \frac{x}{3}\right),$$

яке можна переписати у вигляді

$$\frac{dx}{dt} = k(15 - x)(60 - x), \quad k := \frac{2k_1}{9}.$$

Оскільки в початковий момент часу $t = 0$ речовини C ще не було, то $x(0) = 0$. У момент часу $t = \frac{1}{3}$ маємо, згідно з умовою, $x\left(\frac{1}{3}\right) = 6$. Остаточно маємо крайову задачу

$$\frac{dx}{dt} = k(15 - x)(60 - x), \quad x(0) = 0, \quad x\left(\frac{1}{3}\right) = 6.$$

Знайдемо загальний інтеграл рівняння:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{(15 - x)(60 - x)} &= k dt, \quad (15 - x)(60 - x) \neq 0, \\ \frac{1}{45} \int \left(\frac{1}{15 - x} - \frac{1}{60 - x} \right) dt &= kt + \ln |C_2|, \quad C_2 \neq 0, \\ \frac{1}{45} \ln \left| \frac{60 - x}{15 - x} \right| &= kt + \ln |C_2|, \\ \ln \left| \frac{60 - x}{15 - x} \right| &= 45kt + \ln |C_1|, \\ \frac{60 - x}{15 - x} &= \pm C_1 e^{45kt}, \quad \text{або} \\ \frac{60 - x}{15 - x} &= C e^{45kt}, \quad C \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

якщо врахувати розв'язок $x = 60$ і не врахувати розв'язок $x = 15$.

Скориставшись умовою $x(0) = 0$, дістанемо $4 = C$, тому

$$\frac{60 - x}{15 - x} = 4e^{45kt}, \quad t > 0.$$

Оскільки $x\left(\frac{1}{3}\right) = 6$, то звідси випливає, що $(60 - 6) : (15 - 6) = 4e^{15k}$, $54 : 9 = 4e^{15k}$ або $\frac{3}{2} = e^{15k}$.

Тому

$$\frac{60 - x}{15 - x} = 4 \left(\frac{3}{2} \right)^{3t}$$

або

$$x = 15 \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{3t}}{1 - \frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^{3t}}, \quad t > 0. \quad (29)$$

Остання рівність і визначає кількість речовини C , яка в результаті реакції утворилася на момент часу t .

З практичних міркувань зрозуміло, що в процесі хімічної реакції 10 л речовини A і 20 л речовини B може утворитися речовини C лише скінченна кількість. У той же час з формули (29) випливає, що при $\left(\frac{2}{3}\right)^{3t} = 4$ змінна x перетворюється у нескінченність. Цей факт, однак, не суперечить практичним міркуванням, бо остання рівність можлива тільки при від'ємному значенні t , а процес хімічної реакції розглядається лише при $t \geq 0$. ►

Приклад 9 (розчинність твердих тіл у рідині). Якщо припустити, що речовини, які містяться в розчині, хімічно не діють одна на одну, і розчин не насичений, то при сталій температурі швидкість розчинення твердого тіла в рідині пропорційна кількості цієї речовини, що може ще розчинитися в рідині до насичення останньої. Треба знайти залежність від часу кількості речовини, що розчинилася.

◀ Нехай m – кількість речовин, що дає насичений розчин, а $x(t)$ – кількість речовини, яка розчинилася. Тоді одержимо диференціальне рівняння

$$\frac{dx}{dt} = k(m - x),$$

де k – коефіцієнт пропорційності, який відомий з досліду. Відкоремлюючи змінні, знайдемо

$$\frac{dx}{m - x} = k dt, \quad x \neq m.$$

Зінтегрувавши, дістанемо

$$\ln|x - m| = \ln|C_1 - kt|, \quad C_1 \neq 0, \quad x - m = \pm C_1 e^{-kt}$$

або

$$x = m + Ce^{-kt}, \quad C \in \mathbb{R},$$

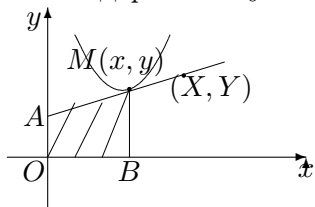
якщо врахувати розв'язок $x = m$.

Оскільки в початковий момент часу $t = 0$ маємо $x = 0$, то $C = -m$, а тому

$$x(t) = m(1 - e^{-kt}), \quad t > 0. \blacktriangleright$$

22.5. Геометричні задачі.

Приклад 10. Знайти лінії, для яких площа трапеції, обмеженої осями координат, дотичною і ординатою точки дотику, є сталою і дорівнює S_0 .



◀ Нехай $M(x, y)$ – довільна точка на шуканій лінії, а (X, Y) – точка на дотичній до цієї лінії в точці M . Тоді для площі S трапеції маємо

$$S = \frac{1}{2}(OA + BM)OB, \quad \text{де } BM = y, OB = x.$$

Знайдемо OA . Рівняння дотичної до шуканої лінії в точці M має вигляд

$$Y - y = y'(X - x).$$

Оскільки точка $A(0, \bar{Y})$ лежить на дотичній, то $\bar{Y} - y = -y'x$, тобто $OA = \bar{Y} = y - y'x$. Отже, $S = \frac{1}{2}(2y - xy')x$.

Згідно з умовою задачі

$$\frac{1}{2}(2y - xy')x = S_0$$

або

$$y' - \frac{2}{x}y = -\frac{2S_0}{x^2}. \quad (30)$$

Отже, одержали лінійне неоднорідне диференціальне рівняння першого порядку. Спочатку розглянемо відповідне лінійне однорідне рівняння

$$y' - \frac{2}{x}y = 0.$$

Відокремивши змінні та зінтегрувавши, дістанемо:

$$\frac{dy}{y} = \frac{2}{x} dx, y \neq 0, \quad \int \frac{dy}{y} = 2 \int \frac{dx}{x} + \ln |C_1|, C_1 \neq 0,$$

$$\ln |y| = 2 \ln |x| + \ln |C_1|, y = \pm C_1 x^2,$$

або

$$y = Cx^2, \quad C \in \mathbb{R},$$

якщо врахувати розв'язок $y = 0$.

Загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння шукатимемо у вигляді

$$y = c(x)x^2.$$

Тоді $y' = c'(x)x^2 + 2c(x)x$ і після підстановки y і y' у рівняння (30), дістанемо

$$c'(x)x^2 + 2c(x)x - \frac{2}{x}c(x)x^2 = -\frac{2S_0}{x^2},$$

$$c'(x)x^2 = -\frac{2S_0}{x^2}, \quad c'(x) = -\frac{2S_0}{x^4},$$

звідки

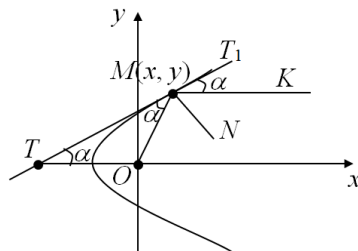
$$c(x) = -\frac{2S_0}{3x^3} + C_2.$$

Тому

$$y = C_2 x^2 - \frac{2S_0}{3x}, \quad x > 0, C_2 \in \mathbb{R}. \blacktriangleright$$

Приклад 11 (параболічне дзеркало). Знайти форму дзеркала, яке збирає всі паралельні промені в одну точку.

◀ Очевидно, що дзеркало повинно мати форму поверхні обертання, вісь обертання якої паралельна напрямку падаючих променів. Візьмемо цю вісь за вісь Ox і знайдемо рівняння лінії $y = f(x)$, обертанням якої утворюється шукана поверхня. Початок координат помістимо в точку, де збираються відбиті промені.



Позначимо падаючий промінь через KM , а відбитий через MO . Проведемо дотичну TT_1 і нормаль MN в точці M до шуканої лінії. Тоді трикутник OMT є рівнобедреним з вершиною в точці O , оскільки $\angle OMT = \angle KMT_1 = \angle OTM$. Тому $OM = OT$, де $OM = \sqrt{x^2 + y^2}$, а OT знайдемо з рівняння дотичної $Y - y = y'(X - x)$, покладаючи $Y = 0$, тобто $X = x - \frac{y}{y'}$, звідки $OT = -X = -x + \frac{y}{y'}$.

Отже, маємо однорідне диференціальне рівняння першого порядку

$$\sqrt{x^2 + y^2} = -x + \frac{y}{y'}$$

або

$$(x + \sqrt{x^2 + y^2})y' = y.$$

Для його інтегрування доцільно ввести підстановку $x = ty$, взявши за аргумент y , а x і t за функції цього аргументу. Тоді дістанемо

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dy} &= \frac{x}{y} + \sqrt{\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 1}, & \frac{dx}{dy} &= t + y \frac{dt}{dy}, \\ t + y \frac{dt}{dy} &= t + \sqrt{t^2 + 1}, & y \frac{dt}{dy} &= \sqrt{t^2 + 1}, \\ & & \frac{dt}{\sqrt{t^2 + 1}} &= \frac{dy}{y}. \end{aligned}$$

Зінтегрувавши, отримаємо

$$\ln |y| = \ln(t + \sqrt{t^2 + 1}) + \ln |C|, \quad C \neq 0,$$

$$y = C(t + \sqrt{t^2 + 1})$$

або, повернувшись до змінних x і y ,

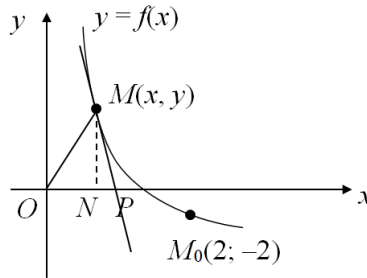
$$x + \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{y^2}{C}.$$

Після спрощення, одержимо

$$y^2 = 2C\left(x + \frac{C}{2}\right).$$

Шукана крива є параболою, а дзеркало має форму параболоїда обертання $y^2 + z^2 = 2C\left(x + \frac{C}{2}\right)$. ►

Приклад 12. Площа трикутника, утвореного радіус-вектором OM довільної точки $M(x, y)$ лінії, дотичною MP у цій точці і віссю Ox , дорівнює 2. Лінія проходить через точку $M_0(2, -2)$. Знайти її рівняння.



◀ Площа трикутника визначається за формулою $S = \frac{1}{2}OP \cdot MN$, де $MN = y$ – ордината точки M , а $OP = x - \frac{y}{y'}$. Згідно з умовою $S = 2$, тому

$$\left(x - \frac{y}{y'}\right)y = 4$$

або

$$\frac{dx}{dy} - \frac{1}{y}x = -\frac{4}{y^2}. \quad (31)$$

Це лінійне неоднорідне диференціальне рівняння відносно невідомої функції x аргументу y .

Розв'яжемо спочатку лінійне однорідне рівняння:

$$\frac{dx}{dy} - \frac{1}{y}x = 0, \quad \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}, \quad x \neq 0,$$

$$\ln |x| = \ln |y| + \ln |C_1|, \quad x = C_1 y, C_1 \neq 0.$$

Якщо врахувати розв'язок $x = 0$, то одержимо

$$x = Cy, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння (31) шукаємо у вигляді

$$x = c(y)y. \quad (32)$$

Оскільки

$$x' = c'(y)y + c(y), \quad (33)$$

то, підставивши (32) і (33) в рівняння (31), одержимо

$$c'(y)y + c(y) - c(y) = -\frac{4}{y^2}$$

або

$$c'(y) = -\frac{4}{y^3}.$$

Звідси отримуємо, що

$$c(y) = \frac{2}{y^2} + C_2, \quad C_2 \in \mathbb{R}. \quad (34)$$

Підставивши (34) в (32), дістанемо

$$x = y\left(\frac{2}{y^2} + C_2\right).$$

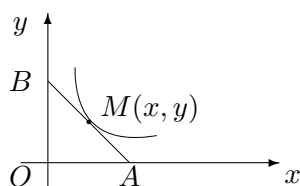
Скориставшись початковою умовою $x(-2) = 2$, матимемо

$$2 = -2\left(\frac{2}{4} + C_2\right) \quad \text{або} \quad C_2 = -\frac{3}{2}.$$

Тоді

$$x = y\left(\frac{2}{y^2} - \frac{3}{2}\right) \quad \text{або} \quad 3y^2 + 2xy - 4 = 0. \blacktriangleright$$

Приклад 13. Знайти лінії, які проходять через точку $(\frac{1}{4}, 1)$ і дотична до яких у кожних їх точках відтинає на осях координат відрізки, добуток довжин яких дорівнює одиниці.



◀ Рівняння дотичної до лінії $y = y(x)$ має вигляд

$$Y - y = y'(X - x),$$

де X, Y – змінні координати точки дотичної. Абсцису точки A перетину дотичної з віссю Ox знайдемо з цього рівняння, поклавши $Y = 0$, а ординату точки B перетину її з віссю Oy – поклавши $X = 0$. Маємо $X_A = x - \frac{y}{y'}$ і $Y_B = y - xy'$. Згідно з умовою задачі $X_A Y_B = 1$ або

$$\left(x - \frac{y}{y'}\right)(y - xy') = 1.$$

Після перетворення дістанемо $(y - xy')^2 = -y'$ або

$$(y - xy') = \pm\sqrt{-y'}, y' < 0. \quad (35)$$

Це рівняння Клеро. Його загальний розв'язок

$$y = Cx \pm \sqrt{-C}, C < 0, \quad (36)$$

є сім'єю прямих. Виділимо ту пряму, яка проходить через точку $(\frac{1}{4}, 1)$. Маємо $1 = \frac{C}{4} \pm \sqrt{-C}$, $(1 - \frac{C}{4})^2 = -C$, $1 - \frac{C}{2} + \frac{C^2}{16} = -C$, $(1 + \frac{C}{4})^2 = 0$, $C = -4$. Тому пряма $y = -4x + 2$ задовольняє умови задачі.

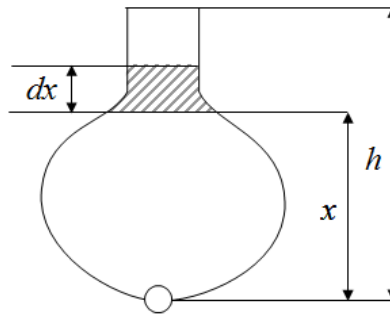
Продиференціюємо (36) за C і складемо систему рівнянь

$$\begin{cases} y = Cx \pm \sqrt{-C}, \\ x = \pm \frac{1}{2\sqrt{-C}}. \end{cases} \quad (37)$$

Звідси випливає, що $y = \frac{1}{2x} - \frac{1}{4x}$ або $y = \frac{1}{4x}$ є особливим розв'язком рівняння (35). Ця лінія також задовольняє умови задачі. ►

22.6. Диференціальні моделі у фізиці й техніці.

Приклад 14 (витікання рідини з посудини). Нехай висота рівня рідини в посудині у початковий момент часу $t = 0$ дорівнює h метрів. Вважатимемо, що площа перерізу посудини на висоті x дорівнює $S(x)$, а площа отвору на дні посудини дорівнює σ . Визначити залежність рівня води в посудині від часу t , а також знайти час t_0 , за який витече вся вода, якщо швидкість v зміни об'єму рідини в посудині є відомою функцією $v = v(x)$ рівня x рідини в посудині.



◀ Нехай висота рівня рідини в посудині на момент часу t дорівнює $x(t)$. Кількість рідини du , що витікає з посудини за проміжок часу dt від моменту t до $t + dt$, можна знайти як об'єм циліндра з площею основи σ і висотою $v(x)$, тобто $du = \sigma v(x)dt$.

З іншого боку, через те, що рівень x рідини в посудині знизиться на величину dx , то ця сама кількість dx виражається рівністю $du = -S(x)dx$.

Прирівнюючи ці вирази для du , дістанемо

$$\sigma v(x)dt = -S(x)dx$$

або

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\sigma v(x)}{S(x)}.$$

Отже, одержали диференціальне рівняння першого порядку, розв'язавши яке, знайдемо функцію $x(t)$, що описує залежність рівня води в посудині від часу t .

Оскільки нам треба знайти час t_0 , за який витече вся рідина з посудини, то розглянемо рівність

$$dt = -\frac{S(x)}{\sigma v(x)} dx,$$

звідки

$$t = -\frac{1}{\sigma} \int_h^x \frac{S(\xi)}{v(\xi)} d\xi = \frac{1}{\sigma} \int_x^h \frac{S(\xi)}{v(\xi)} d\xi. \quad (39)$$

При повному витіканні рідини $x = 0$, а тому час t_0 , за який це відбудеться,

$$t_0 = \frac{1}{\sigma} \int_0^h \frac{S(\xi)}{v(\xi)} d\xi. \quad (40)$$

Зауваження Якщо витікання рідини відбувається через малий отвір або через короткий патрубок, то згідно з законом Торічеллі $v = k\sqrt{2gx}$, де $g = 9,8$ м/с² – прискорення сили земного тяжіння, k – емпіричний коефіцієнт. У цьому випадку

$$t = \frac{1}{\sigma k \sqrt{2g}} \int_x^h \frac{S(\xi)}{\sqrt{\xi}} d\xi, \quad (41)$$

$$t_0 = \frac{1}{\sigma k \sqrt{2g}} \int_0^x \frac{S(\xi)}{\sqrt{\xi}} d\xi. \quad (42)$$

Розглянемо конкретний випадок, коли посудина – циліндричний резервуар висотою h і діаметром d , наповнений водою. Треба знайти час, за який вся вода витече з посудини через круглий отвір в її дні діаметром d_1 . У даному випадку $S(\xi) = \frac{\pi d^2}{4}$, $\sigma = \frac{\pi d_1^2}{4}$, а тому

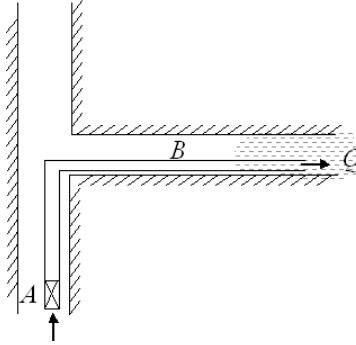
$$t_0 = \frac{d^2}{d_1^2 k \sqrt{2g}} \int_0^h \frac{d\xi}{\sqrt{\xi}} = \frac{2d^2 \sqrt{h}}{d_1^2 k \sqrt{2g}}.$$

Зокрема, при $d = 1$ м, $h = 1,5$ м, $d_1 = 0,05$ м, врахувавши, що для води $k = 0,62$, одержимо

$$t_0 = \frac{2 \cdot 1^2 \cdot \sqrt{1,5}}{0,05^2 \cdot 0,62 \cdot \sqrt{19,6}} = \frac{2,45}{0,007} \approx 250 \text{ с} = 5 \text{ хв } 50 \text{ с. } \blacktriangleright$$

Приклад 15 (привітрювання шахтної виробки).

Нехай шахтна виробка привітрюється за допомогою вентилятора місцевого привітрювання A , встановленого на струмені чистого повітря, і вентиляційного трубопроводу B , що зображено на рисунку. У момент часу $t = 0$ об'єм загазованої частини виробки дорівнює v_0 з концентрацією газу x_0 . Умикається вентилятор, який подає Q м³ чистого повітря за секунду. Шкідливі гази виділяються в кількості q м³ за секунду. Знайти концентрацію шкідливих газів у виробці в довільний момент часу t .



◀ Нехай $x(t)$ – концентрація шкідливих газів у шахті в момент часу t . За проміжок часу dt із загазованого об'єму v_0 свіжий струмінь винесе об'єм шкідливих газів $xQdt$, але за цей час оточуючі породи добавлять об'єм газу qv_0dt . Тому об'єм шкідливих газів зменшиться на величину $dq_1 = xQdt - qv_0dt$. Це приведе до зниження концентрації шкідливих газів на величину dx в об'ємі v_0 , тобто $dq_2 = -v_0dx$.

Згідно із законом збереження речовини $dq_1 = dq_2$, тобто

$$(xQ - qv_0)dt = -v_0dx$$

або

$$\frac{dx}{dt} + x \frac{Q}{v_0} = q.$$

Отже, маємо лінійне неоднорідне рівняння першого порядку. Зінтегрувавши його за допомогою методу варіації довільної

сталі, матимемо

$$x(t) = \left(C + \int q(t) e^{\int \frac{Q}{v_0} dt} dt \right) e^{-\int \frac{Q}{v_0} dt}, C \in \mathbb{R}.$$

Якщо $q = q_0$ і $\frac{Q}{v_0} = Q_0$, q_0 , Q_0 – сталі, то

$$x(t) = \left(C + q_0 \int e^{Q_0 t} dt \right) e^{-Q_0 t}$$

або

$$x(t) = \left(C + \frac{q_0}{Q_0} e^{Q_0 t} \right) e^{-Q_0 t} = C e^{-Q_0 t} + \frac{q_0}{Q_0}, C \in \mathbb{R}.$$

Оскільки $x(0) = x_0$, то

$$x_0 = C + \frac{q_0}{Q_0} \quad \text{або} \quad C = x_0 - \frac{q_0}{Q_0}.$$

Тоді

$$x(t) = \left(x_0 - \frac{q_0}{Q_0} \right) e^{-Q_0 t} + \frac{q_0}{Q_0}, \quad t > 0.$$

Для того щоб знайти проміжок часу, протягом якого треба провітрювати виробку, коли концентрація шкідливого газу дорівнюватиме допустимій концентрації x_1 , скористаємося умовою $x(t_0) = x_1$. Тоді

$$x_1 = \left(x_0 - \frac{q_0}{Q_0} \right) e^{-Q_0 t_0} + \frac{q_0}{Q_0},$$

$$e^{-Q_0 t_0} = \frac{x_1 - \frac{q_0}{Q_0}}{x_0 - \frac{q_0}{Q_0}}$$

або

$$t_0 = -\frac{1}{Q_0} \ln \left(\frac{x_1 - \frac{q_0}{Q_0}}{x_0 - \frac{q_0}{Q_0}} \right). \blacktriangleright$$

Приклад 16 (рух човна). Моторний човен рухається в стоячій воді зі швидкістю $v_0 = 20$ км/год. На повному ході його мотор вимикають і через 40 с після цього швидкість човна

зменшується до 8 км/год. Вважаючи опір води пропорційним швидкості руху човна, знайти його швидкість через 2 хв після зупинки мотора.

◀ На човен, який рухається, діє сила $F = -kv$, де k – коефіцієнт пропорційності, v – швидкість човна в даний момент часу. Згідно із законом Ньютона ця сила дорівнює добутку маси на прискорення, тобто $F = m \frac{dv}{dt}$. Звідси одержуємо диференціальне рівняння руху

$$m \frac{dv}{dt} = -kv.$$

Відокремивши змінні та зінтегрувавши, дістанемо

$$\frac{dv}{v} = -\frac{k}{m} dt, v \neq 0, \quad \ln |v| = -\frac{k}{m} t + \ln |C_1|, C_1 \neq 0,$$

або

$$v = C e^{-\frac{k}{m} t}, C \geq 0,$$

якщо врахувати розв'язок $v = 0$.

Скориставшись початковою умовою $v(0) = 20$, матимемо

$$20 = C e^{-\frac{k}{m} \cdot 0} \quad \text{або} \quad C = 20.$$

Тоді закон руху при заданих умовах задачі має вигляд

$$v(t) = 20 e^{-\frac{k}{m} t}.$$

З додаткової умови $v\left(\frac{1}{90}\right) = 8$ одержуємо

$$8 = 20 e^{-\frac{k}{m} \frac{1}{90}} \quad \text{або} \quad e^{\frac{k}{m}} = \left(\frac{5}{2}\right)^{90}.$$

Отже, остаточно отримуємо

$$v(t) = 20 \left(\frac{5}{2}\right)^{-90t}, \quad t > 0.$$

Тепер знайдемо швидкість човна після 2 хв, коли було зупинено мотор:

$$v = 20 \left(\left(\frac{5}{2} \right)^{90} \right)^{-\frac{1}{30}} = 20 \left(\frac{5}{2} \right)^{-3} = \frac{32}{25} \approx 1,28 \text{ км/год. } \blacktriangleright$$

Приклад 17 (очищення газу). Для очищення газу від деякої газоподібної домішки його пропускають через посудину, яка містить певний поглинач. Кількість газоподібної домішки, що поглинається тонким шаром поглинача при встановленому режимі апарата, пропорційна концентрації домішки, а також товщині і площі поперечного перерізу шару. Посудина має форму конуса з радіусом основи R і висотою H . Газ надходить через вершину конуса. Знайти залежність концентрації газоподібної суміші в посудині як функцію відстані шару від вершини конуса, якщо концентрація домішки в газі, що надходить, дорівнює a %, а в тому, що виходить – b %.

◀ Позначимо концентрацію домішки через y , а відстань шару від вершини конуса через x і складемо диференціальне рівняння

$$\frac{dy}{dx} = ky\pi r^2,$$

де r – радіус перерізу тонкого шару конуса, який зв'язаний з розмірами конуса співвідношенням $r = \frac{Rx}{H}$. Тому

$$\frac{dy}{dx} = ky\pi \frac{R^2}{H^2} x^2$$

або

$$\frac{dy}{dx} = k_1 x^2 y, \quad (43)$$

де $k_1 := \pi k \frac{R^2}{H^2}$.

Згідно з умовою задачі

$$y(0) = a, \quad y(H) = b. \quad (44)$$

Тому маємо задачу Коші, розв'язок якої й визначатиме залежність концентрації газоподібної суміші в посудині.

Знайдемо загальний розв'язок рівняння (43). Для цього відокремимо змінні та зінтегруємо

$$\frac{dy}{y} = k_1 x^2, y \neq 0, \ln y = k_1 \frac{x^3}{3} + \ln |C_1|, C_1 \neq 0,$$

або

$$y = C e^{k_1 \frac{x^3}{3}}, \quad C \in \mathbb{R}, \quad (45)$$

якщо врахувати ще розв'язок $y = 0$.

Задовольнимо цією функцією першу умову з (44):

$$a = C e^{\frac{k_1}{3} \cdot 0^3}, \quad C = a.$$

Тоді

$$y = a e^{k_1 \frac{x^3}{3}}. \quad (46)$$

З другої умови (44) одержимо

$$b = a e^{k_1 \frac{H^3}{3}},$$

звідки

$$e^{k_1 \frac{H^3}{3}} = \frac{b}{a}$$

або

$$e^{\frac{k_1}{3}} = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{H^3}}. \quad (47)$$

Підставивши (47) у (46), дістанемо

$$y(x) = a \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{x^3}{H^3}}. \blacktriangleright$$

Зауваження. Якщо посудина має форму кулі радіуса R , то рівняння має вигляд

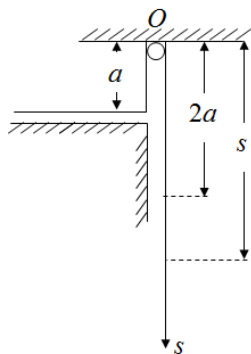
$$\frac{dy}{dx} = k y \pi r^2,$$

де $r^2 = R^2 - (y - R)^2$, тобто

$$\frac{dy}{dx} = k \pi y (R^2 - (x - R)^2).$$

Приклад 18 (ковзання мотузки). Мотузка лежить на столі, причому один із її кінців перекинуто через гладкий блок на висоті a над столом. У початковий момент часу частина мотузки довжиною $2a$ звисає вільно з другого боку блока. Знайти швидкість v руху цього кінця у залежності від шляху s , якщо опір тертя при русі дорівнює квадрату швидкості, а початкова швидкість дорівнює нулю.

◀ Нехай вісь Ox напрямлена вниз, а початок координат збігається з точкою кріплення блока.



У будь-який момент часу на мотузку діє сила F_1 , яка дорівнює вазі мотузки, що звисає з блока, тобто $F_1 = (s - a)g$, де g – прискорення сили земного тяжіння, а також сила опору $F_2 = -v^2$. Отже, сумарна сила, яка діє на мотузку, дорівнює $F = (s - a)g - v^2$. Згідно з другим законом динаміки $m \frac{dv}{dt} = F$, а тому

$$(s + a) \frac{dv}{dt} = (s - a)g - v^2.$$

Оскільки $\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = v \frac{dv}{ds}$, то рівняння можна переписати так:

$$(s + a)v \frac{dv}{ds} + v^2 = (s - a)g. \quad (48)$$

Маємо рівняння Бернуллі. Тому зробимо підстановку $z =$

v^2 . Тоді $v \frac{dv}{ds} = \frac{1}{2} \frac{dz}{ds}$ і рівняння (46) набуде вигляду

$$\frac{dz}{ds} + \frac{2}{s+a}z = \frac{2g(s-a)}{s+a}. \quad (49)$$

Рівняння (49) є лінійним неоднорідним рівнянням. Розглянемо спочатку лінійне однорідне рівняння

$$\frac{dz}{ds} + \frac{2}{s+a}z = 0.$$

Відокремивши змінні та зінтегрувавши, дістанемо

$$\frac{dz}{z} = -\frac{2}{s+a}ds, z \neq 0, \ln |z| = -2 \ln(s+a) + \ln |C_1|, C_1 \neq 0,$$

$$z = C_1 \frac{1}{(s+a)^2}$$

або

$$z = \frac{C}{(s+a)^2}, \quad C \in \mathbb{R},$$

якщо врахувати ще розв'язок $z = 0$.

Розв'язок лінійного неоднорідного рівняння (49) шукаємо у вигляді

$$z = \frac{c(s)}{(s+a)^2}. \quad (50)$$

Тоді

$$\frac{dz}{ds} = c'(s)(s+a)^{-2} - 2c(s)(s+a)^{-3}, \quad (51)$$

а тому після підстановки (50), (51) у (49), одержимо

$$c'(s)(s+a)^{-2} - 2c(s)(s+a)^{-3} + 2c(s)(s+a)^{-3} = \frac{2g(s-a)}{s+a},$$

$$c'(s) = 2g(s-a)(s+a),$$

звідки

$$c(s) = 2g \left(\frac{s^3}{3} - a^2 s \right) + C_2.$$

Тому

$$z(s) = \frac{2g}{(s+a)^2} \left(\frac{s^3}{3} - a^2s \right) + \frac{C_2}{(s+a)^2}.$$

Повернувшись до функції v , дістанемо

$$v^2 = \frac{1}{(s+a)^2} \left(2g \left(\frac{s^3}{3} - a^2s \right) + C_2 \right), \quad C_2 \in \mathbb{R}. \quad (52)$$

Скориставшись умовою, що $v(2a) = 0$, знаходимо

$$0 = \frac{1}{(3a)^2} \left(2g \left(\frac{8a^3}{3} - 2a^3 \right) + C_2 \right)$$

або

$$C_2 = -\frac{4ga^3}{3}.$$

Отже,

$$v^2 = \frac{2g}{3(s+a)^2} (s^3 - 3a^2s - 2a^2)$$

є частинним інтегралом рівняння (49).

Вираз у дужках можна розкласти на множники

$$\begin{aligned} s^3 - 3a^2s - 2a^2 &= s^2 - 2as^2 + 2as^2 - 4a^2s + a^2s - 2a^3 = \\ &= s^2(s-2a) + 2as(s-2a) + a^2(s-2a) = (s-2a)(s+a)^2, \end{aligned}$$

тому

$$v^2 = \frac{2g}{3(s+a)^2} (s-2a)(s+a)^2$$

або

$$v = \sqrt{\frac{2g}{3}(s-2a)}. \blacktriangleright$$

Приклад 19 (нагрівання злитка). Стальний злиток з температурою u_1 перед прокатом поміщений в піч, температура якої рівномірно підвищується протягом години від u_1 до u_2 . Знайти закон нагрівання злитка, якщо при різниці температур печі і злитка в T градусів він нагрівається зі швидкістю kT .

◀ Позначимо температуру печі в момент часу t через $u(t)$. Тоді температура $y(t)$ злитка дорівнюватиме різниці $y(t) = u(t) - T(t)$. З умови задачі випливає, що $u(t) = At + B$, де сталі A і B визначаються з умов $u(0) = u_1, u(60) = u_2$, тобто $A = \frac{u_2 - u_1}{60}, B = u_1$.

Диференціальне рівняння задачі має вигляд

$$\frac{dy}{dt} = kT.$$

Оскільки $\frac{dy}{dt} = \frac{d(u-T)}{dt} = \frac{d(At+B-T)}{dt} = A - \frac{dT}{dt}$, то рівняння набуває вигляду

$$A - \frac{dT}{dt} = kT$$

або

$$\frac{dT}{dt} + kT - A = 0.$$

Це рівняння з відокремленими змінними, загальний інтеграл якого

$$\frac{1}{k} \ln(kT - A) + t = \frac{1}{k} \ln |C|$$

або

$$kT - A = Ce^{-kt}, C \in \mathbb{R}.$$

З початкової умови $T(0) = 0$ знаходимо, що $C = -A$ і, отже, $T = \frac{A}{k}(1 - e^{-kt})$. Оскільки $T(t) = At + B - y(t)$, то

$$y(t) = At + B - \frac{A}{k}(1 - e^{-kt})$$

або

$$y(t) = u_1 - \frac{u_2 - u_1}{60k}(1 - e^{-kt} - kt).$$

Знайдемо температуру злитка через годину, тобто $y(60)$.

Маємо

$$y(60) = u_1 - \frac{u_2 - u_1}{60k}(1 - e^{-60k} - 60k).$$

або

$$y(60) = u_2 - \frac{u_2 - u_1}{60k}(1 - e^{-60k}). \blacktriangleright$$

Вправи

1. Згідно з психофізичним законом співвідношення між відчуттям y і подразненням x виражається рівнянням $\frac{dy}{dx} = \frac{k}{x}$. Знайти $y(x)$, якщо k – стала.

2. Швидкість y виділення сірки з відпрацьованої газоочищеної маси в киплячому бензолі визначається рівнянням $\frac{dy}{dt} = k(13 - y)(11,7 - y)$, де k – коефіцієнт пропорційності. Знайти $y(t)$, якщо $y(0) = 0$.

3. Температура повітря y в залежності від висоти x змінюється за законом $\frac{dy}{dx} = -\alpha y_0$, де y_0 – температура повітря на поверхні Землі, α – стала. Визначити температуру повітря на висоті x .

4. Волога, що міститься в пористій речовині, випаровується в навколишній простір зі швидкістю, яка пропорційна кількості вологи в даній речовині і різниці між вологістю оточуючого повітря s і вологістю насиченого повітря b . Деяка кількість речовини, що містить 3 кг вологи, була поміщена в кімнаті об'ємом 100 м^3 , повітря якої мало вологість 25%. Насичене повітря при тій же температурі містить 0,12 кг вологи на 1 м^3 . Якщо протягом першої доби речовина втратила половину своєї вологи, то скільки вологи в ній залишиться після двох діб ?

5. При відстоюванні суспензії відбувається повільний осад твердих частинок під дією сили тяжіння, де опір пропорційний швидкості. Знайти закон руху частин, що осідають у рідині без початкової швидкості.

6. Вантаж масою 4 кг підвішаний на пружині і збільшує її довжину на 1 см. Знайти закон руху вантажу, якщо верхній кінець пружини здійснює вертикальні гармонічні коливання $y = 2 \sin 30t$ (см) і в початковий момент часу вантаж знаходився у стані спокою. Опором середовища знехтувати.

7. Знайти лінію, що проходить через точку $M_0(0, 1)$, для якої трикутник, утворений віссю Oy , дотичною до лінії в довільній її точці і радіусом-вектором точки дотику, є рівнобедрений, причому його основою є відрізок дотичної від точки до-

тику до осі Oy .

8. Точка масою m рухається прямолінійно. На неї діє сила, пропорційна часу з коефіцієнтом пропорційності k_1 . Крім того, точка зазнає опору середовища, який пропорційний швидкості з коефіцієнтом пропорційності k_2 . Знайти залежність швидкості від часу, вважаючи, що в початковий момент часу швидкість дорівнює нулю.

9. Поглинання світлового потоку тонким шаром води пропорційне товщині шару і потоку, що падає на його поверхню. Знаючи, що при проходженні через шар товщиною 2 м поглинається $1/3$ початкового світлового потоку, знайти, який відсоток його дійде до глибини 12 м.

10. У приміщенні цеху об'ємом 10800 м^3 повітря містить $0,12\%$ вуглекислоти. Вентилятори подають свіже повітря, що містить $0,04\%$ вуглекислоти, в кількості $a \text{ м}^3/\text{хв}$. Припускаючи, що концентрація вуглекислоти в усіх частинах приміщення у кожний момент часу одна й та сама, тобто перемішування чистого повітря із забрудненим відбувається миттєво, знайти, якою повинна бути потужність вентиляторів, щоб після 10 хв вміст вуглекислоти не перевищував $0,06\%$.

11. Скласти рівняння лінії, що проходить через початок координат, якщо середина відрізка її нормалі від будь-якої точки до осі Ox знаходиться на параболі $y^2 = ax$.

12. Знайти лінію, для якої різниця піддотичної і піднормалі в довільній точці дорівнює двом абсцисам точки дотику.

13. Суму 1000 гр.од. покладено в банк на терміновий вклад у 3% річних. Через скільки років сума подвоїться, якщо відсотки нараховуються неперервно?

14. Парашутист спускається на парашуті. Сила ваги парашута $F_1 = mg$, а сила опору повітря $F_2 = kv^2$, k – стала. Знайти швидкість v парашута через t_0 секунд після початку спуску і шлях пройдений за той самий час.

15. У посудину, що містить 10 л води, неперервно вливають із швидкістю 2 л за хвилину розчин, кожний літр якого містить $0,3 \text{ кг}$ солі. Розчин, який надходить у посудину, перемішується з водою і суміш витікає з посудини з тією ж швидкістю.

Скільки солі буде в посудині через 5 хвилин ?

16. Знайти час, за який спорожніє заповнена гасом залізна цистерна довжини l і діаметром d через короткий патрубок у нижній її частині, площа поперечного перерізу якого σ . Провести обчислення, коли $l = 12$ м, $d = 2,6$ м, $\sigma = 0,01$ м², $k = 0,6$.

17. За який час спорожніє заповнений водою конічний резервуар з діаметром d_1 верхньої (більшої) основи, d_2 – нижньої (меншої) основи і висотою h через круглий отвір діаметром d у дні цього резервуара? Обчислення провести, коли $d_1 = 0,8$ м, $d_2 = 0,3$ м, $h = 1$ м, $d = 0,03$ м, $k = 0,62$.

18. Знайти лінію, яка проходить через точку $M_0(2, 4)$ таку, що, провівши через будь-яку її точку дві прямі, паралельні координатним осям до перетину з ними, одержимо прямокутник, який ділиться лінією на дві частини, з яких та, що прилягає до осі Ox , за площею вдвічі більша за другу.

19. Знайти час t_0 с, за який рідина, що заповнює конічну посудину висотою h см і кутом 2α при вершині, витікає з неї через малий отвір площею σ см², вирізаний у вершині конуса, якщо відомо, що швидкість v см/с витікання рідини визначається формулою $v = k\sqrt{2gx}$, де k – сталий коефіцієнт, g см/с² – прискорення сили земного тяжіння, x см – висота стовпчика рідини над отвором. Розрахунки провести для випадку, коли рідина – це вода, $2\alpha = 60^\circ$, $h = 10$ см, $\sigma = 0,5$ см², $k = 0,6$.

20. Моторний човен рухається у воді, сила опору якої пропорційна квадрату швидкості човна. Початкова швидкість човна 3 м/с, а через 4 с вона зменшується до 1 м/с. Знайти час, за який швидкість човна зменшиться до 1 см/с.

21. Ракета масою m стартує вертикально з Землі, маючи нульову початкову швидкість. Гази виходять з неї рівномірно масою a кг/с зі сталою швидкістю v_0 . Нехтуючи опором повітря і зміною прискорення сили тяжіння в залежності від висоти підйому ракети, знайти: 1) рівняння руху ракети; 2) швидкість руху ракети в довільний момент часу $t < \frac{m}{a}$ після старту; 3) висоту підйому в довільний момент часу $t < \frac{m}{a}$.

Відповіді

1. $y = k \ln x + C$.

2. $0,769 \ln \frac{11,7(y-13)}{13(y-11,7)} = kt$.

3. $y = y_0(1 - \alpha x)$.

4. $\frac{ds}{dt} = ks(s - b)$, 0,82 кг.

5. За законом Ньютона $F = m \frac{dv}{dt}$. Тоді $m \frac{dv}{dt} = mg - kv$, де k – коефіцієнт пропорційності, $v = \frac{mg}{k}(1 - e^{-\frac{kt}{m}})$; $h = \frac{m^2g}{k^2}(e^{-\frac{kt}{m}} - 1) + \frac{mgt}{k}$.

6. Якщо x відраховувати від положення спокою вантажу, то $4 \frac{d^2x}{dt^2} = 4g - k(x_0 + x - y - l)$, де x_0 – відстань точки спокою вантажу від початкової точки кріплення пружини, l – довжина пружини в стані спокою, тому $k(x_0 - l) = 4g$ і, отже, $4 \frac{d^2x}{dt^2} = -k(x - y)$, де $k = 4g$, $g = 981$ см/с²; $x(t) = \frac{2g \sin 30t - 6\sqrt{g} \sin \sqrt{gt}}{g-900}$ см.

7. $\sqrt{x^2 + y^2} = y - xy'$, $x^2 = C(C - 2y)$, $y = 1 - \frac{x^2}{4}$.

8. $m \frac{dv}{dt} = k_1t - k_2v$, $v(0) = 0$; $v = \frac{k_1}{k_2} \left(t - \frac{m}{k_2} + \frac{m}{k_2} e^{-\frac{k_2t}{m}} \right)$.

9. Якщо $Q(h)$ – світловий потік, який падає на поверхню на глибині h , то при проходженні через шар води товщиною dh світловий потік dQ , який поглинається при цьому, дорівнює $dQ = -kQdh$, де $k > 0$ – коефіцієнт пропорційності, $Q = Q_0 e^{-kh}$, $Q = Q_0 \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{h}{3}}$, $Q_1 = Q_0 \left(\frac{2}{3}\right)^6 \approx 0,0878Q_0$.

10. Нехай $x(t)$ – вміст вуглекислоти в повітрі на момент часу t . За час dt вентилятори подали в приміщення $0,0004adt$ м³ вуглекислоти, а вийшло з приміщення $0,01xadt$ м³ вуглекислоти. Тому за dt хв кількість вуглекислоти в повітрі зменшилася на $dq = (0,01x - 0,0004)adt$ м³. Позначивши через dx відсоткове зменшення вмісту вуглекислоти в повітрі, знайдемо, що $dq = -10800 \cdot 0,01dx$ м³. Прирівнюючи ці два вирази для dq , знайдемо диференціальне рівняння процесу

$$(0,01x - 0,0004)adt = -10800 \cdot 0,01dx.$$

Розв'язавши це рівняння і скориставшись початковою умовою

$x(0) = 0,12$, одержимо, що

$$x - 0,04 = 0,08e^{-\frac{at}{10800}}.$$

Для знаходження потужності a вентилятора скористаємося тим, що $x(10) = 0,06$. Тоді $0,02 = 0,08e^{-\frac{a}{1080}}$ або $e^{-\frac{a}{1080}} = \frac{1}{4}$, звідки випливає, що $a = 1080 \ln 4 \approx 1500 \text{ м}^3/\text{хв}$.

11. Якщо $M(x, y)$ – довільна точка лінії, а P – точка перетину нормалі в точці M кривої з віссю Ox , то її координатами є $x + yy'$ і 0 . Тоді середина N відрізка MP нормалі має координати $x_N = x + \frac{yy'}{2}$ і $y_N = \frac{y}{2}$. Оскільки точка N лежить на параболі $y^2 = ax$, то її координати задовольняють рівняння параболи, а тому

$$\frac{y^2}{4} = a\left(x + \frac{yy'}{2}\right) \quad \text{або} \quad y' - \frac{y}{2a} = -\frac{2x}{y}.$$

Розв'язавши це рівняння Бернуллі, одержимо, що $y^2 = 4ax + 4a^2 + Ce^{\frac{x}{a}}$. Скориставшись початковою умовою $y(0) = 0$, знайдемо, що шуканою лінією є $y^2 = 4ax + 4a^2\left(1 - e^{\frac{x}{a}}\right)$.

12. Якщо $M(x, y)$ – довільна точка лінії, то $\frac{y}{y'} - yy' = 2x$ або $y = \frac{2y'}{1-(y')^2}x$. Це рівняння Лагранжа. Для інтегрування його зручно записати у вигляді

$$x = \frac{1 - (y')^2}{2y'}y \quad \text{або} \quad x = \frac{yx'}{2} - \frac{y}{2x'},$$

вважаючи x функцією від y . Загальний інтеграл у параметричній формі має вигляд

$$\begin{cases} x = \frac{Cp}{2}\left(p - \frac{1}{p}\right), \\ y = Cp, \end{cases}$$

де $x' = p$. Якщо виключити параметр p , то дістанемо рівняння сім'ї парабол $2Cx = y^2 - C^2$.

13. Нехай $S(t)$ – сума вкладу через t років. Тоді $\frac{dS}{dt} = 0,03S$, $S(0) = 1000$, $S(t_0) = 2000$; $S(t) = 1000e^{0,03t}$, $2 = e^{0,03t_0}$, $t_0 = \frac{\ln 2}{0,03} \approx 23,1$ року.

14. $m \frac{dv}{dt} = mg - kv^2$ або $\frac{dv}{dt} = g - \alpha v^2$, $\alpha = \frac{k}{m}$, $v(0) = 0$,
 $S(0) = 0$, $v = \sqrt{\frac{g}{\alpha} \frac{e^{2\sqrt{g\alpha}t_0} - 1}{e^{2\sqrt{g\alpha}t_0} + 1}}$, $S = \frac{1}{\alpha} \ln \frac{e^{\sqrt{g\alpha}t_0} + e^{-\sqrt{g\alpha}t_0}}{2}$.

15. Нехай $x(t)$ – кількість солі в посудині на момент часу t . За проміжок часу $[t, t + \Delta t]$ в посудину надійде $2\Delta t$ л розчину, який містить $0,3 \cdot 2\Delta t = 0,6$ кг солі. За цей же час з посудини витікає $2\Delta t$ літрів розчину, в якому міститься $0,2 \cdot \Delta t \cdot (x(t) + \alpha(\Delta t))$ кг солі, де $\alpha(\Delta t) \rightarrow 0$ при $\Delta t \rightarrow 0$. Приріст солі за проміжок часу $[t, t + \Delta t]$ становитиме $x(t + \Delta t) - x(t) = 0,6\Delta t - 0,2\Delta t(x(t) + \alpha(\Delta t))$. Поділивши цей вираз на Δt і перейшовши до границі при $\Delta t \rightarrow 0$, дістанемо диференціальне рівняння

$$x'(t) = 0,6 - 0,2x(t),$$

загальним розв'язком якого є

$$x(t) = 3 - Ce^{-0,2t}, C \in \mathbb{R}.$$

Оскільки $x(0) = 0$, то $C = 3$, а тому $x(t) = 3(1 - e^{-0,2t})$. Тоді $y(5) = 3(1 - e^{-1}) \approx 1,9$ кг солі.

16. $t_0 = \frac{2l}{\sigma k \sqrt{2g}} \int_0^d \frac{\sqrt{(d-x)x}}{\sqrt{x}} dx = \frac{4ld\sqrt{d}}{3\sigma k \sqrt{2g}}$, $t_0 = \frac{4 \cdot 12 \cdot 2,6 \sqrt{2,6}}{3 \cdot 0,01 \cdot 0,6 \sqrt{19,6}} \approx$
 ≈ 2520 с = 42 хв. Скористатись рівністю (42), де $S(x) =$
 $= 2l\sqrt{r^2 - (x-r)^2} = 2l\sqrt{(d-x)x}$, $d = 2r$.

17. Оскільки площа горизонтального перерізу $S(x) =$
 $= \frac{\pi}{4}(d_2 + (d_1 - d_2)\frac{x}{h})^2$, $\sigma = \frac{\pi d^2}{4}$, то згідно з формулою (42)
 $t_0 = \frac{1}{d^2 k \sqrt{2g}} \int_0^h \frac{(d_2 + (d_1 - d_2)\frac{x}{h})^2}{\sqrt{x}} dx = \frac{2\sqrt{h}}{15d^2 k \sqrt{2g}} (3d_1^2 + 4d_1d_2 + 8d_2)^2$.
 $t_0 = \frac{2(3 \cdot 0,8^2 + 4 \cdot 0,8 \cdot 0,3 + 8 \cdot 0,3^2)}{15 \cdot 0,03^2 \cdot 0,62 \cdot \sqrt{19,6}} \approx 194$ с = 3 хв 14 с.

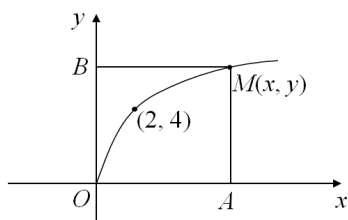
18. Згідно з умовою пл. $OCMA = 2$ пл. CBM . Оскільки пл. $OCMA = \int_0^x y(\xi) d\xi$, а пл. $CBM =$ пл. $OBMA -$ пл. $OCMA = xy - \int_0^x y(\xi) d\xi$, то дістанемо рівняння

$$\int_0^x y(\xi) d\xi = 2(xy - \int_0^x y(\xi) d\xi)$$

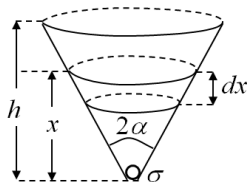
або

$$3 \int_0^x y(\xi) d\xi = 2xy.$$

Продиференціювавши за x обидві частини цього рівняння, одержимо рівняння з відокремленими змінними $3y = 2y + 2xy'$ або $2xy' = y$. Загальним розв'язком цього рівняння є сім'я парабол $y^2 = Cx$. Нас цікавить та з них, що проходить через точку $M_0(2, 4)$, тому $C = 8$. Отже, шуканою лінією є парабола $y^2 = 8x$ з вершиною в точці $O(0, 0)$ і віссю симетрії Ox .



19. Вважатимемо, що x – висота води в момент часу t . Розглянемо об'єм води, що витікає за проміжок часу від t до $t + dt$. З одного боку, через нижній отвір витече об'єм рідини $dv = k\sigma\sqrt{2gx}dt$. З другого боку, внаслідок витікання води висота x дістане від'ємний приріст dx , тому об'єм витікаючої рідини $dv = -\pi x^2 \operatorname{tg}^2 \alpha dx$. Прирівнявши ці вирази, одержимо $\pi x^2 \operatorname{tg}^2 \alpha dx = -k\sigma\sqrt{2gx}dt$ або $\frac{dx}{dt} = -\mu x^{-\frac{3}{2}}$, де $\mu = \frac{k\sigma\sqrt{2g}}{\pi \operatorname{tg}^2 \alpha}$. Отже, маємо диференціальне рівняння з відокремленими змінними і початкову умову $x(0) = h$.



Загальний інтеграл рівняння $\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} = -\mu t + C, C \in \mathbb{R}$. За допомогою початкової умови знаходимо, що $C = \frac{2}{5}h^{\frac{5}{2}}$, а тому $\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} = -\mu t + \frac{2}{5}h^{\frac{5}{2}}$. Звідси випливає, що $t = \frac{2}{5\mu}(h^{\frac{5}{2}} - x^{\frac{5}{2}})$. Якщо за час t_0 витече вся рідина, то $x(t_0) = 0$, і тому $t_0 = \frac{2}{5\mu}h^{\frac{5}{2}}$. Оскільки $\alpha = 30^\circ$, $h = 10$ см, $\sigma = 0,5$ см², $k = 0,6$, $g = 9,8$ см/с², то $\mu = \frac{0,6 \cdot 0,5 \cdot \sqrt{19,6}}{3,14 \cdot \frac{1}{3}} = \frac{0,9 \cdot 4,43}{3,14} = 1,27$, $t_0 = \frac{2}{5 \cdot 1,27} 10^{\frac{5}{2}} \approx$

$0,315 \cdot 10^{\frac{5}{2}} = 100 \text{ с} = 1 \text{ хв } 40 \text{ с}$.

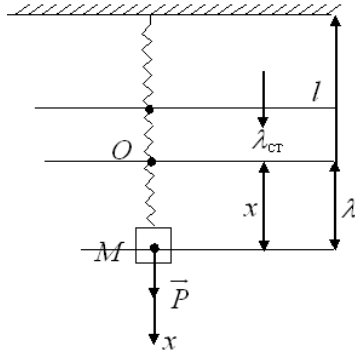
20. Диференціальне рівняння руху човна $m \frac{dv}{dt} = kv^2$, де m – маса човна, v – його швидкість, а k – коефіцієнт пропорційності. Загальний розв’язок рівняння $v = -\frac{m}{kt+C}$. З умови $v(0) = 3$ знаходимо $C = -\frac{1}{3}$, а з умови $v(4) = 1$ випливає, що $\frac{m}{k} = -6$. Тому $v(t) = \frac{6}{t+2}$. Підставивши в цю рівність $t = t_0$ і $v = 0,01$, одержимо, що $t_0 = 598 \text{ с}$.

21. Якщо $v(t)$ – швидкість ракети в момент часу t , то рівняння руху має вигляд $(m - at) \frac{dv}{dt} - av_0 = -g(m - at)$, а початкова умова $v(0) = 0$. Розв’язком цієї задачі Коші є $v = v_0 \ln \frac{m}{m-at} - gt$. Оскільки $v = \frac{ds}{dt}$, де s – висота підйому ракети, то для знаходження s маємо задачу $\frac{ds}{dt} = v_0 \ln \frac{m}{m-at} - gt$, $s(0) = 0$, розв’язком якої є функція $s = \frac{v_0}{a}(m - at) \ln \frac{m-at}{m} + v_0 t - \frac{gt^2}{2}$. Очевидно, що $t < \frac{m}{a}$, бо в протилежному випадку $\frac{m}{m-at}$ буде від’ємним числом.

§ 23 Моделі, які описуються диференціальними рівняннями другого порядку

Приклад 1 (гармонічні коливання). Тягар вагою P підвішано на вертикальній пружині, довжина якої в природному стані дорівнює l . Тягар злегка відтягують донизу і потім відпускають. Знайти закон руху тягара, нехтуючи масою пружини і опором повітря.

◀ Напрямимо вісь Ox униз вздовж вертикальної прямої, що проходить через точку кріплення тягара. Початок координат O виберемо в положенні рівноваги тягара, тобто в точці, в якій вага тягара зрівноважується силою реакції пружини.



Нехай λ – видовження пружини в даний момент, а $\lambda_{\text{ст}}$ – статичне видовження, тобто від кінця нерозтягнутої пружини до положення рівноваги. Тоді $\lambda = \lambda_{\text{ст}} + x$ або $\lambda - \lambda_{\text{ст}} = x$.

Диференціальне рівняння руху одержимо, скориставшись другим законом механіки $\vec{F} = m \vec{a}$, де $m = \frac{P}{g}$ – маса тягаря, \vec{a} – прискорення руху, \vec{F} – рівнодійна прикладених до тягаря сил. У нашому випадку рівнодійна складається з сили натягу пружини і сили ваги.

Згідно з законом Гука сила натягу пружини пропорційна її видовженню, тобто дорівнює $-c\lambda$, де c – коефіцієнт пропорційності, який називається жорсткістю пружини. Тому диференціальне рівняння руху має вигляд

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -c\lambda + P.$$

Оскільки в положенні рівноваги сила натягу пружини зрівноважується вагою, то $P = -c\lambda_{\text{ст}}$. Підставивши в диференціальне рівняння вираз для P і замінивши $\lambda - \lambda_{\text{ст}}$ через x , дістанемо рівняння у вигляді $m \frac{d^2 x}{dt^2} = -cx$ або, позначивши $\frac{c}{m}$ через ω^2

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = 0. \quad (1)$$

Одержане рівняння описує **вільні коливання** тягаря. Воно називається **рівнянням гармонічного осцилятора**. Це

лінійне однорідне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Його характеристичне рівняння $k^2 + \omega^2 = 0$ має уявні корені $k = \pm i\omega$, відповідно до цього загальним розв'язком є функція

$$x = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t.$$

Для з'ясування фізичного змісту розв'язку зручно звести його до іншої форми, ввівши нові довільні сталі. Помноживши і поділивши на $\sqrt{C_1^2 + C_2^2}$, дістанемо

$$x = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} \left(\frac{C_1}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}} \cos \omega t + \frac{C_2}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}} \sin \omega t \right).$$

Якщо покласти

$$\sqrt{C_1^2 + C_2^2} = A, \quad \frac{C_1}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}} = \sin \varphi, \quad \frac{C_2}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}} = \cos \varphi,$$

то розв'язок зводиться до вигляду

$$x = A \sin(\omega t + \varphi). \quad (2)$$

Отже, тягар здійснює гармонічне коливання навколо положення рівноваги.

Величину A називають **амплітудою** коливання, а аргумент $\omega t + \varphi$ – **фазою** коливання. Значення фази при $t = 0$, тобто величина φ , називається **початковою фазою** коливання. Величина $\omega = \sqrt{\frac{c}{m}}$ є **частотою** коливання. **Період** коливання $T = \frac{2\pi}{\omega}$ і частота ω залежать тільки від жорсткості пружини й маси системи.

Швидкість руху тягаря одержується диференціюванням розв'язку за t :

$$v = \frac{dx}{dt} = A\omega \cos(\omega t + \varphi).$$

Для знаходження амплітуди і початкової фази необхідно задати початкові умови. Нехай, наприклад, у початковий момент часу $t = 0$ положення тягаря $x = x_0$ і швидкість $v = v_0$.

Тоді $x_0 = A \sin \varphi$, звідки $A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}$, $\varphi = \arctg \frac{\omega x_0}{v_0}$.

Якщо ж коливання відбуваються в середовищі, опір якого пропорційний швидкості руху і, крім того, на тягар діє зовнішня збурююча сила, напрямлена вздовж осі Ox , величина якої $F(t)$, то тоді рівняння коливань має вигляд

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + k \frac{dx}{dt} + c(x) = F(t)$$

або

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2b \frac{dx}{dt} + \omega^2 x = f(t), \quad (3)$$

де

$$2b := \frac{k}{m}, \omega^2 := \frac{c}{m}, f(t) := \frac{F(t)}{m}.$$

Випадок, коли $b = 0$ і $f(t) \equiv 0$ озглянуто вище. Тому розглянемо два інші випадки.

1) Нехай є опір середовища, тобто $b \neq 0$, але відсутня зовнішня збурююча сила $f(t) \equiv 0$. У цьому випадку рівняння (3) набуде вигляду

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2b \frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0. \quad (4)$$

Коренями його характеристичного рівняння $\lambda^2 + 2b\lambda + \omega^2 = 0$ є $\lambda_{1,2} = -b \pm \sqrt{b^2 - \omega^2}$.

Якщо опір середовища малий, тобто $b < \omega$, то корені характеристичного рівняння комплексні $\lambda_{1,2} = -b \pm \bar{\omega}i$, де $\bar{\omega} := \sqrt{\omega^2 - b^2}$, тому загальний розв'язок рівняння (4) має вигляд

$$x(t) = e^{-bt}(C_1 \cos \bar{\omega}t + C_2 \sin \bar{\omega}t)$$

або

$$x(t) = e^{-bt} A \sin(\bar{\omega}t + \varphi).$$

Звідси випливає, що тягар здійснює коливання, амплітуда яких Ae^{-bt} прямує до нуля при $t \rightarrow +\infty$. Такі коливання називаються **затухаючими**.

При $b > \omega$ корені характеристичного рівняння дійсні та різні, а тому розв'язок рівняння (3) має вигляд

$$x(t) = C_1 e^{(-b + \sqrt{b^2 - \omega^2})t} + C_2 e^{(-b - \sqrt{b^2 - \omega^2})t}.$$

У цьому випадку тягар, не здійснюючи коливань, наближається до положення рівноваги ($x \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$). Така сама ситуація і при $b = \omega$.

2) Розглянемо випадок, коли опір середовища відсутній ($b = 0$) але на тягар діє зовнішня періодична збурююча сила $f(t) = a \sin pt$. Рівняння (2) набуде вигляду

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = a \sin pt. \quad (5)$$

Маємо лінійне неоднорідне рівняння. Для знаходження його загального розв'язку треба знайти загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння (1) і частинний розв'язок рівняння (5). Загальний розв'язок однорідного рівняння (1) визначається формулою (2). Залишилось знайти частинний розв'язок рівняння (5). Вважатимемо спочатку, що частота p зовнішньої періодичної збурюючої сили не збігається з частотою власних коливань ω . У цьому випадку частинний розв'язок шукатимемо у вигляді

$$\tilde{x} = B \sin pt + C \cos pt. \quad (6)$$

Підставивши (6) у рівняння (5), знайдемо, що $B = \frac{a}{\omega^2 - p^2}$, $C = 0$. Отже, частинний розв'язок рівняння (5) має вигляд

$$\tilde{x} = \frac{a}{\omega^2 - p^2} \sin pt,$$

а загальний розв'язок цього рівняння

$$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi) + \frac{a}{\omega^2 - p^2} \sin pt.$$

З цієї формули випливає, що коли частота p зовнішньої збурюючої сили близька до власної частоти коливань тягаря, то різниця $\omega^2 - p^2$ близька до нуля і амплітуда коливань сильно зростає.

Якщо ж $p = \omega$, то частинний розв'язок рівняння (5) треба шукати у вигляді

$$\tilde{x} = t(B \sin pt + C \cos pt).$$

Після підстановки цієї функції в рівняння (5) знаходимо, що $B = 0$, $C = -\frac{a}{2\omega}$. Тому частинним розв'язком є функція

$$\tilde{x} = -\frac{at}{2\omega} \cos \omega t,$$

а загальний розв'язок рівняння (5) запишеться так:

$$x(t) = A \sin \omega t + \frac{at}{2\omega} \cos \omega t.$$

Наявність множника t у другому доданку вказує на те, що амплітуда коливань з часом необмежено зростає. У цьому випадку кажуть, що має місце **резонанс**. ►

Приклад 2 (падіння метеорита на Землю). Знайти швидкість, з якою метеорит вдаряється об Землю, припускаючи, що він падає прямолінійно з нескінченно великої висоти і стану спокою, якщо прискорення руху обернено пропорційне квадрату відстані від центра Землі.

◀ Позначимо відстань метеорита від центра Землі через x . Тоді згідно з умовою задачі

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{k}{x^2},$$

де k – коефіцієнт пропорційності.

Оскільки прискорення $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt}$, де v – швидкість руху метеорита, то рівняння набуде вигляду

$$\frac{dv}{dt} = \frac{k}{x^2}$$

або

$$v \frac{dv}{dx} = \frac{k}{x^2},$$

через те, що $\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = v \frac{dv}{dx}$.

Зінтегрувавши його, дістанемо

$$\frac{v^2}{2} = -\frac{k}{x} + C,$$

де C визначається з початкової умови $v = 0$ при $x \rightarrow +\infty$, тобто $C = 0$. Отже,

$$v^2 = -\frac{2k}{x}.$$

Швидкість при падінні на Землю дістанемо, підставивши замість x радіус Землі $R \approx 6,377 \cdot 10^6$ м, а коефіцієнт пропорційності k виразимо через прискорення сили тяжіння на поверхні Землі $g = 9,8$ м/с² і через R . Маємо

$$-g = \frac{k}{R^2} \quad \text{або} \quad k = -gR^2,$$

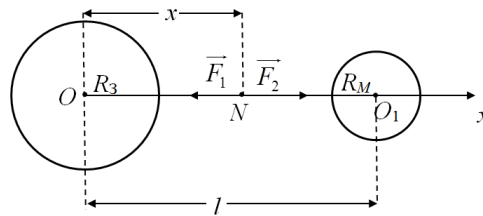
де знак мінус взято тому, що відстань x відраховується від початку $x = 0$, а прискорення напрямлене до початку.

Отже, шукана швидкість дорівнює

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{\frac{2gR^2}{R}} = \sqrt{2gR} = \sqrt{2 \cdot 9,8 \cdot 6,377 \cdot 10^6} = \\ &= 11180 \text{ м/с} \approx 11 \text{ км/с.} \blacktriangleright \end{aligned}$$

Приклад 3. Визначити, яку початкову швидкість v_0 слід надати ракеті космічного корабля маси m для старту з поверхні Землі і досягнення Місяця.

◀ Нехай корабель стартує з поверхні Землі з початковою швидкістю v_0 , причому ракета розміщена вертикально і напрямлена строго до центра Місяця. Вважатимемо, що Земля і Місяць – кулі радіусами відповідно $R_3 \approx 6377$ км і $R_M \approx 1728$ км, прискорення падіння на Землі $g \approx 9,81$ м/с², на Місяці $g_M \approx 1,62$ м/с² $\approx \frac{1}{6}g$, відстань Місяця від Землі $l \approx 384395$ км. При розв'язуванні задачі враховуватимемо лише дії сил тяжіння Землі і Місяця на корабель і нехтуватимемо впливом Сонця та інших планет.



Вісь Ox спрямуємо від центра Землі до центра Місяця (див. рисунок). Нехай x – змінна відстань корабля від поверхні Землі. На корабель діють сили \vec{F}_1 і \vec{F}_2 – сили взаємодії відповідно із Землею і Місяцем, величини яких

$$F_1 = \frac{km_3m}{(x + R_3)^2}, F_2 = \frac{km_Mm}{(l + R_M - x)^2},$$

а напрямки протилежні. Отже, величина загальної сили \vec{F} , яка діє на корабель

$$F = -\frac{km_3m}{(x + R_3)^2} + \frac{km_Mm}{(l + R_M - x)^2}.$$

Згідно з другим законом механіки

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{km_3m}{(x + R_3)^2} + \frac{km_Mm}{(l + R_M - x)^2} \quad (7)$$

або

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{km_3}{(x + R_3)^2} + \frac{km_M}{(l + R_M - x)^2},$$

де k – коефіцієнт пропорційності або стала тяжіння.

Оскільки на поверхні Землі $\frac{km_3m}{R_3^2} = mg$, а на поверхні Місяця $\frac{km_Mm}{R_M^2} = mg_M$, тобто $km_3 = gR_3^2$, а $km_M = g_MR_M^2$, то одержане вище рівняння руху корабля набуде вигляду

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{gR_3^2}{(x + R_3)^2} + \frac{g_MR_M^2}{(l + R_M - x)^2}.$$

Очевидно, що

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = \frac{dx}{dt} \frac{dv}{dx} = v \frac{dv}{dx},$$

тому для визначення швидкості космічного корабля матимемо диференціальне рівняння

$$v dv = \left(-\frac{gR_3^2}{(x + R_3)^2} + \frac{g_MR_M^2}{(l + R_M - x)^2} \right) dx,$$

нтегруючи яке, одержимо

$$\frac{v^2}{2} = \frac{gR_3^2}{x + R_3} + \frac{g_M R_M^2}{l + R_M - x} + C, C \in \mathbb{R}.$$

На початку руху корабля, тобто при $x = 0$ швидкість $v = v_0$, а тому

$$C = \frac{v_0^2}{2} - gR_3 - \frac{g_M R_M^2}{l + R_M}.$$

Отже,

$$v^2 = \frac{2gR_3^2}{x + R_3} + \frac{2g_M R_M^2}{l + R_M - x} + v_0^2 - 2gR_3 - \frac{2g_M R_M^2}{l + R_M}. \quad (8)$$

З цього співвідношення знайдемо початкову швидкість \tilde{v}_0 , яку слід надати космічному кораблю для досягнення ним зі швидкістю $v = 0$ точки між Землею і Місяцем, у якій сумарна сила тяжінь Землі й Місяця на корабель дорівнює нулю. Нехай положення цієї точки $x = \rho$. У ній $v = 0$, а отже, прискорення також нульове. З рівняння (7) дістаємо для визначення ρ рівняння

$$\frac{m_3}{(\rho + R_3)^2} + \frac{m_M}{(l + R_M - \rho)^2}. \quad (9)$$

Урахувавши те, що відношення $\frac{m_3}{m_M} \approx 81,53$, з (9) знаходимо $\rho \approx 346990$ км.

При $x = \rho$ швидкість $v = 0$, тоді з (8) випливає, що

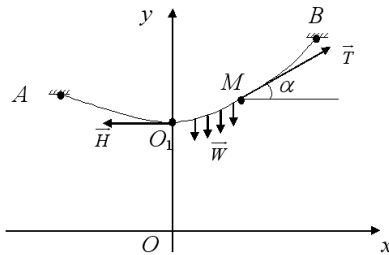
$$v_0^2 = 2gR_3 + \frac{2g_M R_M^2}{l + R_M} - \frac{2gR_3^2}{\rho + R_3} - \frac{2g_M R_M^2}{l + R_M - \rho}. \quad (10)$$

Підставивши в праву частину цієї рівності числові значення величин і врахувавши для спрощення обчислень, що $g_M = \frac{g}{6}$, а $R_M \approx \frac{R_3}{4}$, дістанемо $\tilde{v}_0 \approx 11,1$ км/с.

Початкова швидкість космічного корабля v_0 за умови досягнення поверхні Місяця має бути, очевидно, більшою за значення початкової швидкості \tilde{v}_0 , необхідної для досягнення точки $x = \rho$, тобто $v_0 > 11,1$ км/с.

Якщо в (10) взяти $g_M = 0$ і $l \rightarrow +\infty$, то знайдемо стартову швидкість міжпланетного корабля $v_{cm}^2 = 2gR_3$ або $v_{cm} = \sqrt{2gR_3} \approx 11,18$ км/с. ►

Приклад 4 (ланцюгова лінія). Гнучкий однорідний нерозтяжний канат, який закріплено кінцями в двох точках, провисає під дією власної ваги. Знайти форму рівноваги канату, якщо вага одиниці довжини канату дорівнює p .



◀ Припустимо, що лінія, вздовж якої розміщується канат, лежить у площині, яку візьмемо за координатну площину Oxy . Виберемо систему координат так, щоб вісь Ox була розміщена горизонтально, а вісь Oy проходила через найнижчу точку O_1 канату.

Виділимо частину канату O_1M між точкою O_1 і довільною точкою $M(x, y)$. Ця частина канату знаходиться під дією таких сил:

- 1) натягу \vec{H} , прикладеного в точці O_1 , напрямленого по дотичній в цій точці (горизонтально) і створюваного частиною AO_1 канату;
- 2) натягу \vec{T} , прикладеного в точці M , напрямленого по дотичній в цій точці і створюваного частиною MB канату;
- 3) навантаження \vec{W} на частину O_1M канату, напрямленого вниз.

Оскільки канат знаходиться в рівновазі, то згідно з законом статки, сума проекцій всіх цих сил на координатні осі дорівнює нулю. Отже,

$$T \cos \alpha - H = 0, \quad T \sin \alpha - W = 0,$$

де α – кут між натягом \vec{T} і додатним напрямком осі Ox , а H , T , W – величини відповідних сил.

Якщо в цих рівностях перенести направо H і W та поділити обидві частини другої рівності на відповідні частини першої, то дістанемо

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{W}{H}.$$

Оскільки $\operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx}$, то одержимо диференціальне рівняння

$$\frac{dy}{dx} = \frac{W}{H}. \quad (11)$$

Розв'язок цього рівняння є графіком функції, форму якого набуває канат у положенні рівноваги.

Горизонтальний натяг H – величина стала. Тому якщо відоме навантаження W , то рівняння (11) можна зінтегрувати.

Продиференціювавши за x обидві частини рівняння (11), дістанемо диференціальне рівняння

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{H} \frac{dW}{dx}. \quad (12)$$

У нас $W = pS$, де S – довжина дуги $\overset{\frown}{O_1M}$. З курсу математичного аналізу відомо, що $S = \int_0^x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dt$. Тому

$$W = p \int_0^x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt, \text{ а отже, } \frac{dW}{dx} = p \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Підставивши цей вираз у рівняння (12), одержимо диференціальне рівняння другого порядку, що не містить аргументу x і шуканої функції y :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{p}{H} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}. \quad (13)$$

Підстановкою $\frac{dy}{dx} = u$ це рівняння зводиться до рівняння першого порядку з відокремленими змінними

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{a} \sqrt{1 + u^2},$$

де $a := \frac{H}{p}$. Після відокремлення змінних та інтегрування, одержимо

$$\ln(u + \sqrt{1 + u^2}) = \frac{x}{a} + \ln C_1,$$

звідки

$$u + \sqrt{1 + u^2} = C_1 e^{\frac{x}{a}}, \quad C_1 > 0,$$

або

$$\sqrt{1 + u^2} = C_1 e^{\frac{x}{a}} - u. \quad (14)$$

Піднісши до квадрата обидві частини рівності (14), після спрощення дістанемо

$$1 = C_1^2 e^{\frac{2x}{a}} - 2C_1 u e^{\frac{x}{a}},$$

звідки випливає, що

$$\frac{dy}{dx} = \frac{C_1}{2} e^{\frac{x}{a}} - \frac{1}{2C_1} e^{-\frac{x}{a}}, \quad (15)$$

оскільки $u = \frac{dy}{dx}$.

Маємо диференціальне рівняння першого порядку. Його загальний розв'язок

$$y = \frac{aC_1}{2} e^{\frac{x}{a}} + \frac{a}{2C_1} e^{-\frac{x}{a}} + C_2.$$

Для знаходження сталих C_1 і C_2 скористаємося тим, що

$$y(0) = a, \quad y'(0) = 0. \quad (16)$$

Маємо

$$\begin{cases} 0 = \frac{C_1}{2} - \frac{1}{2C_1}, \\ a = \frac{aC_1}{2} + \frac{a}{2C_1} + C_2, \end{cases}$$

звідки випливає, що $C_1 = 1$, $C_2 = 0$.

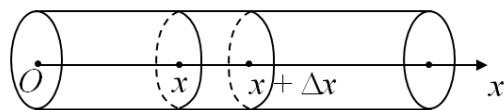
Отже, шуканим розв'язком є функція

$$y = \frac{a}{2} (e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}),$$

графік якої називається **ланцюговою лінією**. Легко можна довести, що величина $a := \frac{H}{p}$ є радіусом кривини ланцюгової лінії в нижній точці O_1 . ►

Приклад 5. Тонкий однорідний стержень довжиною l , знаходиться в стані теплової рівноваги, тобто температура його точок не змінюється з часом. Через поверхню стержня відбувається теплообмін за законом Ньютона з навколишнім середовищем, температура якого u_0 . Вважаючи, що температура в усіх точках поперечного перерізу однакова, знайти її залежність від координати точки перерізу, якщо на лівому кінці вона дорівнює u_1 , а на правому $u_2 < u_1$.

◀ Нехай вісь Ox збігається з віссю стержня, σ – периметр поперечного перерізу, S – площа цього перерізу, χ – коефіцієнт зовнішньої теплопровідності, k – коефіцієнт внутрішньої теплопровідності, $u(x)$ – температура в точках поперечного перерізу в точці з координатою x .



Візьмемо елемент стержня $[x, x + \Delta x]$ (див. рисунок) і підрахуємо зміну кількості тепла в ньому за час Δt .

Через бічні перерізи відбувається випромінювання тепла за **законом Фур'є**: *кількість тепла, яка випромінюється за одиницю часу тілом, що знаходиться в стані теплової рівноваги, температура якого в кожній точці є функцією тільки однієї координати x , визначається формулою*

$$Q = -\chi S(x) \frac{du}{dx},$$

де $S(x)$ – площа поперечного перерізу, перпендикулярного напрямку поширення тепла, χ – коефіцієнт теплопровідності.

Згідно з цим законом за час Δt через ліву межу перерізу пройде кількість тепла $-\chi S \frac{du(x)}{dx} \Delta t$, а через праву $-\chi S \frac{du(x+\Delta x)}{dx} \Delta t$. Отже, за час Δt , виділений елемент стержня

набуде кількість тепла

$$\begin{aligned} & \chi S \frac{du(x)}{dx} \Delta t - (-\chi S \frac{du(x + \Delta x)}{dx} \Delta t) = \\ & = \chi S \left(\frac{du(x + \Delta x)}{dx} - \frac{du(x)}{dx} \right) \Delta t \approx \chi S \frac{d^2 u(x)}{dx^2} \Delta x \Delta t. \end{aligned}$$

Через бічну поверхню елемента, згідно з законом Ньютона, проходить кількість тепла

$$k\sigma(u(x) - u_0)\Delta x \Delta t.$$

Оскільки процес стаціонарний, то ці кількості тепла однакові, тобто

$$\chi S \frac{d^2 u(x)}{dx^2} \Delta x \Delta t = k\sigma(u(x) - u_0)\Delta x \Delta t$$

або

$$\frac{d^2 u(x)}{dx^2} - a^2(u(x) - u_0) = 0 \quad (17)$$

де $a^2 := \frac{k\sigma}{\chi S}$.

Заміною $z(x) = u(x) - u_0$ зведемо рівняння до вигляду

$$\frac{dz(x)}{dx} - a^2 z(x) = 0.$$

Загальний розв'язок цього рівняння $z(x) = C_1 e^{ax} + C_2 e^{-ax}$. Тому

$$u(x) = u_0 + C_1 e^{ax} + C_2 e^{-ax}. \quad (18)$$

Згідно з умовою $u(0) = u_1$, $u(l) = u_2$, тому маємо крайову задачу для рівняння (17). Задовольнивши функцією (8) крайові умови, дістанемо

$$\begin{cases} u_1 - u_0 = C_1 + C_2, \\ u_2 - u_0 = C_1 e^{al} + C_2 e^{-al}. \end{cases}$$

Звідси випливає, що

$$C_1 = \frac{(u_2 - u_0) - (u_1 - u_0)e^{-al}}{2 \operatorname{sh} al},$$

$$C_2 = \frac{(u_1 - u_0)e^{al} - (u_2 - u_0)}{2 \operatorname{sh} al}. \quad (19)$$

Якщо підставити (19) у (18), то матимемо

$$u(x) = u_0 + \frac{(u_2 - u_0) \operatorname{sh} ax - (u_1 - u_0) \operatorname{sh} a(l - x)}{\operatorname{sh} al}, \quad (20)$$

де $\operatorname{sh} t := \frac{e^t - e^{-t}}{2}$, $a =: \sqrt{\frac{k\sigma}{\chi S}}$.

Аналіз виразу (20) приводить до такого висновку: мінімальна температура точок стержня нижча, ніж та, яка підтримується на правому холоднішому кінці. Цей мінімум буде тим різкішим, чим більша величина a . При a , близькому до нуля, розв'язок буде близьким до лінійного і мінімуму не матиме. ►

Приклад 6. Розглянемо модель ринку з прогнозованими цінами, коли попит d і пропозиція s залежать від ціни $p(t)$, тенденція формування ціни $p'(t)$ і темпу зміни ціни $p''(t)$, яка описується рівностями

$$\begin{aligned} d(t) &= 3p''(t) - p'(t) - 2p(t) + 18, \\ s(t) &= 4p''(t) + p'(t) + 3p(t) + 3. \end{aligned} \quad (21)$$

Треба знайти залежність ціни p від часу t .

◀ Обґрунтуємо рівності (21). Очевидно, що попит підігрівається темпом зміни ціни: якщо $p'' > 0$, то на ринку зростає інтерес до товару, а якщо $p'' < 0$, то падає. Швидке зростання ціни відлякує покупців, а тому доданок з першою похідною p' входить у $d(t)$ зі знаком мінус.

Пропозиція $s(t)$ пришвидшується темпом зміни ціни, а тому коефіцієнт при $p''(t)$ в $s(t)$ більший, ніж в $d(t)$. Зростання ціни також збільшує пропозицію, а тому доданок з p' входить у вираз для $s(t)$ із знаком плюс.

З умови рівноваги ринку $d(t) = s(t)$, випливає, що

$$p''(t) + 2p'(t) + 5p(t) = 15. \quad (22)$$

Рівняння (22) є лінійним неоднорідним рівнянням другого порядку.

Розглянемо спочатку відповідне лінійне однорідне рівняння

$$p''(t) + 2p'(t) + 5p(t) = 0. \quad (23)$$

Оскільки характеристичне рівняння $\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$ має корені $\lambda_{1,2} = -1 \pm 2i$, то загальний розв'язок рівняння (23) визначається формулою

$$p_{3.0.}(t) = e^{-t}(C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t), \{C_1, C_2\} \subset \mathbb{R}.$$

Частинний розв'язок \tilde{p} неоднорідного рівняння (22) шукаємо у вигляді $\tilde{p}(t) = p_0$, де p_0 – стала, яка є усталеною ціною товару. Підставивши \tilde{p} в рівняння (22), дістанемо, що $p_0 = 3$.

Отже, загальний розв'язок рівняння (22) має вигляд

$$p(t) = 3 + e^{-t}(C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t). \quad (24)$$

Очевидно, що $p(t) \rightarrow p_0 = 3$ при $t \rightarrow +\infty$, тому всі інтегральні лінії мають горизонтальну асимптоту $p = 3$ і коливаються навколо неї. Це означає, що всі ціни прямують до ціни $p_0 = 3$, коливаючись навколо неї, причому амплітуда цих коливань затухає з часом.

Наведемо частинні випадки, коли задано деякі додаткові умови, а саме задачу Коші та мішану задачу.

Задача Коші. Нехай в початковий момент часу $t = 0$ відомі ціна і тенденція її зміни, тобто

$$p(0) = 4, p'(0) = 1. \quad (25)$$

Підставляючи першу з цих умов в (24), дістаємо $C_1 + 3 = 4$ або $C_1 = 1$. Тому

$$p(t) = 3 + e^{-t}(\cos 2t + C_2 \sin 2t). \quad (26)$$

Продиференціювавши, одержимо

$$p'(t) = e^{-t}((2C_2 - 1) \cos 2t - (C_2 + 2) \sin 2t). \quad (27)$$

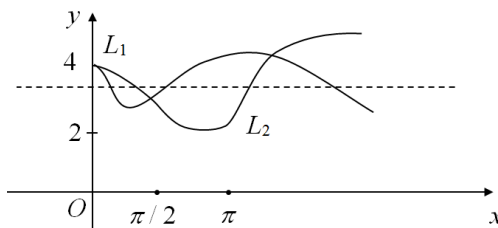
Задовольнивши другу з умов (25), знайдемо, що $2C_2 - 1 = 1$ або $C_2 = 1$. Отже, розв'язок задачі (22), (25) має вигляд

$$p(t) = 3 + e^{-t}(\cos 2t + \sin 2t)$$

або

$$p(t) = 3 + \sqrt{2}e^{-t} \cos\left(2t - \frac{\pi}{4}\right). \quad (28)$$

На рисунку лінія L_1 є графіком розв'язку (28).



Мішана задача. У початковий момент часу $t = 0$ відомі ціна і попит, тобто

$$p(0) = 4, d(0) = 16. \quad (29)$$

Перша умова у (29) така сама, як і у випадку (25), тому $p(t)$ виражається формулою (26). Тоді p' знаходиться з формули (27), а

$$p''(t) = -e^{-t}((4C_2 - 3) \cos 2t + (3C_2 - 5) \sin 2t).$$

Тоді $p'(0) = 2C_2 - 1$, $p''(0) = -4C_2 - 3$. Підставивши значення $p(0)$, $p'(0)$ і $p''(0)$ в умову $d(0) = 16$, матимемо, скориставшись виглядом $d(t)$ першої з формул (21), що $C_2 = -1$. Тому розв'язок мішаної задачі має вигляд

$$p(t) = 3 + e^{-t}(\cos 2t - \sin 2t)$$

або

$$p(t) = 3 - \sqrt{2}e^{-t} \cos\left(2t - \frac{\pi}{4}\right).$$

На рисунку графіком цієї функції є лінія L_2 . ▶

Вправи

1. Тіло маси m кинуте вертикально вгору з початковою швидкістю v_0 . Припускаючи, що опір повітря пропорційний квадрату швидкості, знайти швидкість руху тіла і час досягнення найбільшої висоти.

2. Матеріальна точка маси m притягується кожним з двох центрів із силою, пропорційною віддалі. Відстань між центрами дорівнює $2b$. У початковий момент точка перебуває в стані спокою на віддалі c від її середини. Знайти закон руху точки.

3. Знайти час, необхідний для того, щоб упасти тілу на Землю з висоти 400000 км (приблизно відстань Місяця від центра Землі), якщо ця висота обчислюється від центра Землі і радіус Землі дорівнює приблизно 6400 км.

4. **Затухаючі коливання.** Знайти закон руху тягаря в умовах прикладу 1 з урахуванням опору середовища, який пропорційний швидкості руху.

5. Ланцюг довжиною 6 м сповзає зі стола без тертя. Якщо рух починається з моменту, коли звисає 1 м ланцюга, то за який час сповзе весь ланцюг?

6. Знайти закон руху $s(t)$ точки, якщо прискорення залежить від часу за формулою $a = 1,2t$, причому $s(0) = 0$, а $s(5) = 20$.

7. Тіло маси m ковзає по горизонтальній площині під дією поштовху, який надав тілу початкову швидкість v_0 . На тіло діє сила тертя, що дорівнює $-km$. Знайти відстань, яку тіло може пройти.

8. Тягар вагою P підвішано на вертикальній пружині, довжина якої в природному стані дорівнює l . На вантаж діє періодична збурююча сила $Q \sin pt$, де Q і p – сталі. Знайти закон руху вантажу, нехтуючи масою пружини і опором середовища.

9. Знайти закон руху матеріальної точки маси m , яка рухається по прямій під дією сили величиною $F = ke^{-\alpha t}$, де k – коефіцієнт пропорційності, $\alpha > 0$, якщо початкові положення та швидкість дорівнюють нулю.

10. Матеріальна точка маси m рухається по прямій під дією сили величиною $A \sin wt$ у середовищі, опір якого пропорційний швидкості точки. Знайти закон руху $x(t)$ точки, якщо її початкові положення та швидкість нульові.

11. Матеріальна точка маси m рухається вздовж прямої до центра, що притягує її з силою, обернено пропорційною третьому степеню відстані. Знайти закон руху, якщо він починається

з точки $(a, 0)$, яка перебуває в стані спокою.

12. У моторного човна, що рухається прямолінійно зі швидкістю 10 км/год, вимикають мотор. При русі човен зазнає опору води, сила якого пропорційна швидкості руху. Знайти швидкість човна через одну хвилину після вимкнення мотору і шлях, пройдений за цей час, якщо через 20 с після вимкнення мотора його швидкість знизилась до 6 км/год.

13. Вузька трубка обертається зі сталою кутовою швидкістю ω навколо перпендикулярної до неї вертикальної осі. У початковий момент на відстані x_0 від осі всередині трубки лежить кулька масою m . Вважаючи, що тертя відсутнє і в початковий момент швидкість кульки в трубці дорівнювала нулю, знайти закон руху кульки в трубці.

14. Автомобіль масою m рухається зі швидкістю v горизонтальною слизькою дорогою. Знайти гальмівний шлях автомобіля при аварійному гальмуванні, якщо сила опору повітря пропорційна другому степеню швидкості, коефіцієнт тертя коліс об дорогу μ , горизонтальна складова сили тертя k_1 , а вертикальна $-k_2$.

Відповіді

1. Диференціальне рівняння руху тіла $m \frac{d^2 s}{dt^2} = -mg - k \left(\frac{ds}{dt}\right)^2$ або $\frac{dv}{dt} = -g - \alpha v^2$, де $v = \frac{ds}{dt}$, $\alpha = \frac{k}{m}$, $v(0) = v_0$. Розв'язок задачі має вигляд $\operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\alpha}{g}} v = -\sqrt{g\alpha} t + \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\alpha}{g}} v_0$. У момент $t = t_0$, досягнення найбільшої висоти, швидкість v дорівнює нулю, а тому $t_0 = \frac{\operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\alpha}{g}} v_0}{\sqrt{g\alpha}}$ або $t_0 = \frac{\operatorname{arctg} \sqrt{\frac{k}{mg}} v_0}{\sqrt{\frac{kg}{m}}}$.

2. Якщо початок координат вибрати посередині віддалі між центрами, то рівняння руху матиме вигляд $\frac{d^2 x}{dt^2} = k(b-x) - k(b+x)$ або $\frac{d^2 x}{dt^2} = -2kx$, $k > 0$. Початкові умови: $x(0) = c$, $\frac{dx(0)}{dt} = 0$. Розв'язком задачі є функція $x = c \cos \sqrt{\frac{2k}{m}} t$.

3. $\frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{k}{x^2}$, де x – відстань тіла від центра Землі; $t_0 \approx 122$ год.

4. До сил, які діють на тягар, треба додати силу опору сировища $\vec{R} = -\mu \vec{v}$. Диференціальне рівняння руху в проекції

на вісь Ox має вигляд

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -cx - \mu \frac{dx}{dt}$$

або

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2r \frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0,$$

де $2r = \frac{\mu}{m}$, $\omega^2 = \frac{c}{m}$. Характеристичне рівняння $k^2 + 2rk + \omega^2 = 0$ має корені $k_{1,2} = -r \pm \sqrt{r^2 - \omega^2}$. Характер руху повністю визначається цими коренями. Можливі три випадки.

1) Якщо $r^2 - \omega^2 < 0$, тобто опір середовища невеликий, то загальним розв'язком рівняння є

$$x = e^{-rt}(C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t), \quad \{C_1, C_2\} \subset \mathbb{R},$$

де $\beta = \sqrt{\omega^2 - r^2}$. Ввівши позначення $C_1 =: A \sin \varphi$, $C_2 =: A \cos \varphi$, одержимо

$$x = Ae^{-rt} \sin(\beta t + \varphi).$$

Тут Ae^{-rt} – амплітуда, β – частота, φ – фаза коливань, а $T = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2 - r^2}}$ – період коливань. У цьому випадку частота стала, а амплітуда коливань зменшується з часом, що можна оцінити за допомогою **декременту затухання**, тобто відношення амплітуд коливань, відділених одним періодом,

$$\Delta := \frac{Ae^{-rt}}{Ae^{-r(t+T)}} = e^{rT},$$

чи **логарифмічним декрементом** $\ln \Delta = rT$.

2) Якщо опір середовища великий і $r^2 - \omega^2 > 0$, то поклавши $r^2 - \omega^2 = h^2$, дістанемо загальний розв'язок рівняння

$$x = C_1 e^{-(r+h)t} + C_2 e^{-(r-h)t}, \quad \{C_1, C_2\} \subset \mathbb{R}.$$

Звідси видно, що рух аперіодичний і не має коливного характеру.

3) У випадку, коли $r^2 - \omega^2 = 0$, загальний розв'язок має вигляд

$$x = e^{-rt}(C_1 + C_2 t).$$

Очевидно, що коли $t \rightarrow +\infty$, то $x \rightarrow 0$ у випадках 2) і 3).

5. $6 \frac{d^2 s}{dt^2} = gs$, де s – довжина ланцюга, що звисає, $t_0 = \sqrt{\frac{6}{g}} \ln(6 + \sqrt{35})$.

6. Нехай $s(t)$ – залежність шляху від часу, тоді диференціальне рівняння руху $\frac{d^2 s}{dt^2} = 1,2t$. Загальним розв'язком цього рівняння є $s(t) = 0,2t^3 + C_1t + C_2$, $\{C_1, C_2\} \in \mathbb{R}$. Розв'язком задачі є $s(t) = 0,2t^3 - t$.

7. Якщо $s(t)$ – залежність шляху від часу, то рівняння руху $m \frac{d^2 s}{dt^2} = -km$ або $\frac{d^2 s}{dt^2} = -k$. Загальним розв'язком цього рівняння є $s(t) = -\frac{kt^2}{2} + C_1 + C_2$. Оскільки $s(0) = 0$, $s'(0) = v_0$, то $s(t) = -\frac{kt^2}{2} + v_0t$. Якщо тіло зупинилось, то $s'(t_0) = 0$, тобто $-kt_0 + v_0 = 0$, $t_0 = \frac{v_0}{k}$. Тому $s(t_0) = -\frac{k \frac{v_0^2}{k^2}}{2} + \frac{v_0^2}{k}$ або $S(t_0) = \frac{v_0^2}{2k}$.

8. Аналогічно до прикладу 1, дістанемо рівняння $m \frac{d^2 x}{dt^2} = -cx + Q \sin pt$, де $m = \frac{P}{g}$ – маса тягаря, c – коефіцієнт пропорційності, який називається жорсткістю пружини. Ввівши позначення $w^2 := \frac{c}{m}$, $q := \frac{Q}{m}$, одержимо рівняння $\frac{d^2 x}{dt^2} + w^2 x = q \sin pt$. Розв'язавши це лінійне неоднорідне рівняння зі сталими коефіцієнтами, отримаємо:

1) $x(t) = \frac{q}{w^2 - p^2} \sin pt + A \sin(wt + \varphi)$, якщо $p \neq w$. Тут перший доданок визначає вимушені коливання, викликані збурюючою силою $Q \sin pt$, другий – вільні коливання;

2) $x(t) = -\frac{q}{2w} t \cos wt + A \sin(wt + \varphi)$, якщо $p = w$. Як і вище перший доданок визначає вимушені коливання. Амплітуда цих коливань $\frac{q}{2w} t$ може стати достатньо великою навіть тоді, коли q невелике, тобто можна одержати як завгодно велику амплітуду при малих збурюючих силах. Це явище називається **резонансом**. Отже, резонанс настає тоді, коли частота збурюючої сили збігається з частотою власних коливань.

9. Згідно з другим законом Ньютона $mx''(t) = ke^{-\alpha t}$ або $x''(t) = \frac{k}{m} e^{-\alpha t}$, де $x(t)$ – закон руху точки. Загальний розв'язок одержаного диференціального рівняння $x(t) = \frac{k}{m\alpha^2} e^{-\alpha t} + C_1 t + C_2$. Оскільки згідно з умовою задачі $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$, то $C_1 = \frac{k}{m\alpha}$, $C_2 = -\frac{k}{m\alpha^2}$, а тому $x(t) = \frac{k}{m\alpha^2} (e^{-\alpha t} + \alpha t - 1)$.

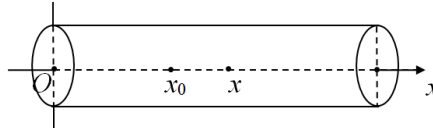
10. Диференціальне рівняння руху має вигляд $mx''(t) +$

+ $kx'(t) = A \sin wt$, де k – коефіцієнт пропорційності, а початкові умови $x(0) = 0, x'(0) = 0$. Розв'язавши рівняння і задовольнивши початкові умови, одержимо закон руху $x(t) = \frac{A}{kw} - \frac{Am}{k^2+w^2m^2}(\frac{mw}{k}e^{-\frac{k}{m}t} + \frac{k}{mw} \cos wt + \sin wt)$.

11. Математична модель задачі така: $m \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{x^3}$, де k – коефіцієнт пропорційності, $x(0) = a, \frac{dx(0)}{dt} = 0$. Для інтегрування рівняння, помножимо його на $2x'$. Тоді одержимо $2x'x'' = -\frac{2k}{m} \frac{x'}{x^3}$ або $((x')^2)' = \frac{k}{m} (\frac{1}{x^2})'$. Звідси знаходимо, що $(x')^2 = \frac{k}{m} (\frac{1}{x^2} + \frac{1}{C_1})$. Скориставшись початковими умовами, матимемо $C_1 = -a^2$. Отже, $\frac{dx}{dt} = \pm \frac{k\sqrt{a^2-x^2}}{amx}$. Зінтегрувавши це рівняння і врахувавши початкову умову, дістанемо закон руху $a^2 - x^2 = (\frac{k}{am})^2 t^2$.

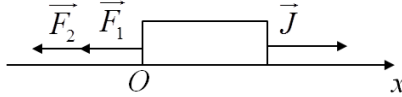
12. Математична модель руху човна така: $m \frac{d^2x}{dt^2} = -k \frac{dx}{dt}, x(0) = 0, x'(0) = 10$ км/год. Розв'язком цієї задачі Коші є функція $x(t) = \frac{10m}{k}(1 - e^{-\frac{k}{m}t})$. Оскільки $x'(t) = 10e^{-\frac{k}{m}t}$, а $x'(\frac{1}{180}) = 6$, то $6 = 10e^{-\frac{k}{180m}}$, $e^{-\frac{k}{m}} = (0,6)^{180}, \frac{k}{m} = -180 \ln 0,6, \frac{k}{m} = 180 \cdot 0,5108 = 91,944$. Отже, $x'(\frac{1}{60}) = 10(0,6)^{\frac{180}{60}} = 10(0,6)^3 = 2,16$ км/год, $x(\frac{1}{60}) = \frac{10-2,16}{91,944} = \frac{7,84}{91,944} \approx 85,3$ м.

13. Нехай $x(t)$ – положення кульки в трубці у момент часу t .



Оскільки кулька рухається в трубці без тертя, то на неї діє лише відцентрова сила величиною $F = mw^2x$. Скориставшись другим законом Ньютона, одержимо диференціальне рівняння $mx''(t) = mw^2x(t)$ або $x'' - w^2x = 0$. Розв'язавши це рівняння і задовольнивши початкові умови, дістанемо закон руху кульки $x(t) = \frac{x_0}{2}(e^{-wt} + e^{wt})$.

14. Нехай $x(t)$ – шлях, який пройшов автомобіль за час t від початку гальмування, а $x'(t)$ – його швидкість. З умови задачі випливає, що $x(0) = 0, x'(0) = v$.



Згідно з другим законом механіки $mx''(t) = -k_1x'^2(t) - \mu(mg - k_2x'^2(t))$, де $I := mx''(t)$ – сила інерції, $F_1 := -k_1x'^2(t)$, $F_2 := \mu(mg - k_2x'^2(t))$ – сили тертя, $g = 9,8$ м/с² – прискорення сили земного тяжіння. Отже, маємо диференціальне рівняння $mx'' + (k_1 - \mu k_2)x'^2 = -\mu mg$ або $x'' + kx'^2 = -\mu g$, де $k := \frac{k_1 - \mu k_2}{m}$. Розв'язавши одержане рівняння і врахувавши початкові умови, знайдемо гальмівний шлях автомобіля $x = \frac{m}{2(k_1 - \mu k_2)} \ln(1 + \frac{mv^2}{k_1 - \mu k_2})$.

§ 24. Задачі, які описуються системами диференціальних рівнянь

Приклад 1 (екологічна модель розвитку суспільства). Швидкість зміни кількості населення збільшується пропорційно його кількості x і зменшується пропорційно до кількості y шкідливих викидів, які потрапляють у навколишнє середовище. Крім того, швидкість виділення шкідливих речовин також пропорційна x . Скласти математичну модель задачі і визначити залежність кількості населення від часу.

◀ Згідно з умовою задачі маємо

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = k_1x - k_2y, \\ \frac{dy}{dt} = k_3x, \end{cases}$$

де k_1 , k_2 і k_3 – сталі.

Для того щоб розв'язати цю систему, зведемо її до одного диференціального рівняння другого порядку, продиференціювавши перше рівняння і підставивши в нього друге. Маємо

$$\frac{d^2x}{dt^2} = k_1 \frac{dx}{dt} - k_2k_3x$$

або

$$\frac{d^2x}{dt^2} - k_1 \frac{dx}{dt} + k_2 k_3 x = 0.$$

Одержали лінійне однорідне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Характеристичне рівняння для нього має вигляд

$$\lambda^2 - k_1 \lambda + k_2 k_3 = 0,$$

а його коренями є

$$\lambda_{1,2} = \frac{k_1}{2} \pm \sqrt{\frac{k_1^2}{4} - k_2 k_3}.$$

При цьому можливі три випадки.

1) Якщо $k_1^2 > 4k_2 k_3$, то λ_1, λ_2 різні й дійсні. Тоді

$$x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}, \quad t > 0,$$

тобто x необмежено зростає зі зростанням t .

2) Якщо $k_1^2 = 4k_2 k_3$, то $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{k_1}{2}$. Тоді

$$x(t) = (C_1 + C_2 t) e^{\frac{k_1}{2} t}, \quad t > 0,$$

а це означає, що швидкість зростання знижується, але зростання ще залишається необмеженим.

3) Якщо $k_1^2 < 4k_2 k_3$, то $\lambda_{1,2} = \frac{k_1}{2} \pm i\beta$, де $\beta = \sqrt{k_2 k_3 - \frac{k_1^2}{4}}$. Тоді

$$x(t) = e^{\frac{k_1}{2} t} (C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t), \quad t > 0.$$

Оскільки фактично k_1, k_2, k_3 змінюються повільно з часом, то наближено розв'язки в усіх трьох випадках можна порівнювати на одній кривій. Спочатку матимемо інтенсивне експоненціальне зростання кількості людей, потім через погіршення умов воно починає сповільнюватися і, нарешті, спадати до нуля, бо x не може бути від'ємним. ►

Приклад 2 (розпад речовини). Деяка речовина A розпадається на дві речовини B і C . Швидкість утворення кожної

з цих речовин пропорційна кількості речовини, що не розкла-лася. Нехай $x(t)$ і $y(t)$ – кількість речовин B і C , які утворилися на момент часу t . Знайти закон їхньої зміни, знаючи, що в початковий момент часу x і y дорівнюють нулю, а через годину $x = \frac{3}{8}m_0$, $y = \frac{1}{8}m_0$, де m_0 – початкова кількість речовини.

◀ Згідно з умовою задачі маємо

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = k_1(m_0 - x - y), \\ \frac{dy}{dt} = k_2(m_0 - x - y), \end{cases} \quad (1)$$

бо на момент часу t залишилося $m_0 - x - y$ речовини A , яка не розкла-лася. Отже, процес описується системою двох лінійних рівнянь першого порядку.

Розв'яжемо систему (1), звівши її до одного рівняння друго-го порядку. Продиференціювавши перше рівняння, дістанемо

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -k_1\left(\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt}\right). \quad (2)$$

Підставляючи в рівність (2) значення $\frac{dy}{dt}$ з другого рівняння системи (1), одержуємо

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -k_1\left(\frac{dx}{dt} + k_2(m_0 - x - y)\right). \quad (3)$$

Виключивши y з рівняння (3) і першого рівняння системи (1), знаходимо

$$\frac{d^2x}{dt^2} + (k_1 + k_2)\frac{dx}{dt} = 0. \quad (4)$$

Рівняння (4) є лінійним однорідним рівнянням другого поряд-ку. Характеристичне рівняння для нього має вигляд

$$\lambda^2 + (k_1 + k_2)\lambda = 0.$$

Його коренями є $\lambda_1 = 0$ і $\lambda_2 = -(k_1 + k_2)$, тому загальним розв'язком рівняння (4) є функція

$$x(t) = C_1 + C_2e^{-(k_1+k_2)t}, \quad \{C_1, C_2\} \subset \mathbb{R}.$$

Для знаходження y підставимо x і $\frac{dx}{dt}$ у перше рівняння системи (1) і розв'яжемо його відносно y :

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -C_2(k_1 + k_2)e^{-(k_1+k_2)t}, \\ -C_2(k_1 + k_2)e^{-(k_1+k_2)t} &= k_1(m_0 - C_1 - C_2e^{-(k_1+k_2)t} - y),\end{aligned}$$

звідки

$$y = m_0 + \frac{k_2}{k_1}C_2e^{-(k_1+k_2)t} - C_1.$$

Отже, розв'язок системи має вигляд

$$\begin{cases} x(t) = C_1 + C_2e^{-(k_1+k_2)t}, \\ y(t) = m_0 + \frac{k_2}{k_1}C_2e^{-(k_1+k_2)t} - C_1, \end{cases} \quad \{C_1, C_2\} \subset \mathbb{R}. \quad (5)$$

Знайдемо C_1 і C_2 , скориставшись початковими умовами $x(0) = 0$, $y(0) = 0$:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0, \\ C_1 - \frac{k_2}{k_1}C_2 = m_0, \end{cases}$$

звідки

$$C_1 = \frac{k_1m_0}{k_1 + k_2}, \quad C_2 = -\frac{k_2m_0}{k_1 + k_2}.$$

Підставляючи ці значення в (5), дістаємо

$$\begin{cases} x(t) = \frac{k_1m_0}{k_1 + k_2}(1 - e^{-(k_1+k_2)t}), \\ y(t) = \frac{k_2m_0}{k_1 + k_2}(1 - e^{-(k_1+k_2)t}), \end{cases} \quad t > 0. \quad (6)$$

Невідомі коефіцієнти k_1 і k_2 знайдемо з додаткових умов $x(1) = \frac{3}{8}m_0$, $y(1) = \frac{1}{8}m_0$. Маємо

$$\begin{cases} \frac{3m_0}{8} = \frac{k_1m_0}{k_1 + k_2}(1 - e^{-(k_1+k_2)}), \\ \frac{m_0}{8} = \frac{k_2m_0}{k_1 + k_2}(1 - e^{-(k_1+k_2)}). \end{cases} \quad (7)$$

Із системи (7) знайдемо, що

$$\frac{k_1}{k_2} = 3, \quad k_1 = 3k_2$$

і тому

$$\frac{m_0}{8} = \frac{m_0}{4}(1 - e^{-4k_2})$$

або

$$e^{-4k_2} = \frac{1}{2}.$$

Звідси випливає, що

$$4k_2 = \ln 2$$

або

$$k_2 = \frac{1}{4} \ln 2.$$

Оскільки

$$k_1 = \frac{3}{4} \ln 2,$$

то

$$k_1 + k_2 = \ln 2$$

або

$$e^{k_1+k_2} = 2. \quad (8)$$

Тоді

$$\frac{k_1}{k_1 + k_2} = \frac{3}{4}, \quad \frac{k_2}{k_1 + k_2} = \frac{1}{4}. \quad (9)$$

Підставляючи (8), (9) в рівності (6), остаточно знаходимо

$$\begin{cases} x = \frac{3m_0}{4}(1 - 2^{-t}), \\ y = \frac{m_0}{4}(1 - 2^{-t}) \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} x(t) = \frac{3m_0}{4} \left(1 - \frac{1}{2^t}\right), \\ y = \frac{m_0}{4} \left(1 - \frac{1}{2^t}\right), \end{cases} \quad t > 0. \blacktriangleright$$

Приклад 3 (розмноження бактерій). Деякі бактерії розмножуються зі швидкістю, пропорційною наявній їхній кількості, але одночасно виробляють отруту, яка знищує їх пропорційно кількості бактерій. Швидкість вироблення отрути пропорційна наявній кількості бактерій. Довести, що число бактерій y спочатку зростає до деякого найбільшого значення M , а потім спадає до нуля.

◀ Позначимо кількість бактерій на момент часу t через $y(t)$, а кількість отрути на цей момент часу через $x(t)$. Згідно з умовою задачі маємо систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = ky - k_1xy, \\ \frac{dx}{dt} = k_2y, \end{cases} \quad (10)$$

де $\frac{dy}{dt}$ і $\frac{dx}{dt}$ – відповідно швидкість розмноження бактерій і швидкість вироблення отрути, а k , k_1 , k_2 – коефіцієнти пропорційності.

Поділивши обидві частини першого рівняння з (10) на відповідні частини другого, матимемо диференціальне рівняння

$$\frac{dy}{dx} = \frac{k}{k_2} - \frac{k_1}{k_2}x,$$

звідки, після інтегрування, дістанемо

$$y = \frac{k}{k_2}x - \frac{k_1}{2k_2}x^2 + C_1.$$

Оскільки $x = 0$ при $y = 0$, то $C_1 = 0$, а тому зв'язок між числом бактерій і кількістю отрути визначається формулою

$$y = ax - bx^2, \quad (11)$$

де

$$a := \frac{k}{k_2}, \quad b := \frac{k_1}{2k_2}. \quad (12)$$

Графік функції, яка визначається рівністю (11), є параболою, що проходить через початок координат і через точку

$A\left(\frac{a}{b}, 0\right)$, з віссю симетрії, паралельною до осі Oy , і з вершиною в точці $O_1\left(\frac{a}{2b}, \frac{a^2}{4b}\right)$. Отже,

$$y_{\max} = \frac{a^2}{4b} = \frac{k^2}{2k_1k_2} \quad (13)$$

або

$$M = \frac{k^2}{2k_1k_2}.$$

Знайдемо тепер залежність кількості бактерій від часу t . Для цього перетворимо рівність (11) до вигляду

$$bx^2 - ax + y = 0$$

і розв'яжемо відносно x :

$$x = \frac{a}{2b} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4b^2} - \frac{y}{b}}. \quad (14)$$

Поставимо цей вираз у перше рівняння з (10):

$$\frac{dy}{dt} = ky - \frac{k_1a}{2b}y \mp k_1y\sqrt{\frac{a^2}{4b^2} - \frac{y}{b}}. \quad (15)$$

Взявши до уваги співвідношення (12) і (13), побачимо, що перший і другий доданки в правій частині (15) взаємно знищуються, а третій дорівнює $\pm ky\sqrt{1 - \frac{y}{M}}$. Тому рівняння (15) набуде вигляду

$$\frac{dy}{dt} = \mp ky\sqrt{1 - \frac{y}{M}}, \quad (16)$$

яке є рівнянням з відокремлюваними змінними. Відокремивши змінні, зведемо його до вигляду

$$\frac{dy}{y\sqrt{1 - \frac{y}{M}}} = \mp kdt.$$

Інтеграл $I := \int \frac{dy}{y\sqrt{1-\frac{y}{M}}}$ знайдемо за допомогою підста-
 новки

$$\sqrt{1-\frac{y}{M}} = z,$$

з якої випливає, що $y = M(1-z^2)$, а $dy = -2Mzdz$. Тому

$$I = -2 \int \frac{dz}{1-z^2} = \ln \left| \frac{1-z}{1+z} \right| + C_2.$$

Отже, загальний інтеграл рівняння (16) має вигляд

$$\ln \left| \frac{1-z}{1+z} \right| + C_2 = \mp kt.$$

Сталу C_2 визначимо з початкової умови $y = M$ при $t = 0$, з якої випливає, що $z = 0$, а тому, $C_2 = 0$, і, отже, частинний інтеграл рівняння (16) має вигляд

$$\frac{1-z}{1+z} = e^{\mp kt},$$

звідки

$$z = \frac{e^{\pm \frac{kt}{2}} - e^{\mp \frac{kt}{2}}}{e^{\pm \frac{kt}{2}} + e^{\mp \frac{kt}{2}}}.$$

Повертаючись до попередніх величин y і M , дістанемо

$$\sqrt{1-\frac{y}{M}} = \frac{e^{\pm \frac{kt}{2}} - e^{\mp \frac{kt}{2}}}{e^{\pm \frac{kt}{2}} + e^{\mp \frac{kt}{2}}}.$$

Піднісши обидві частини цієї рівності до квадрата і розв'язавши одержане рівняння відносно y , дістанемо

$$y = M \left(1 - \left(\frac{e^{\pm \frac{kt}{2}} - e^{\mp \frac{kt}{2}}}{e^{\pm \frac{kt}{2}} + e^{\mp \frac{kt}{2}}} \right)^2 \right), \quad t > 0. \blacktriangleright$$

Приклад 4 (рівновага газів у сполучених посудинах). У двох посудинах об'ємами v_1 і v_2 відповідно міститься один і той самий газ. Тиск газу в початковий момент часу

дорівнює p_1 у першій посудині і p_2 – у другій. Посудини з'єднані трубкою, якою газ перетікає з однієї посудини в другу, причому кількість цього газу пропорційна різниці квадратів тисків. Знайти тиски p_1 і p_2 в обох посудинах на момент часу t після того, як посудини було з'єднано.

◀ Нехай a – кількість газу, яка перетікає за одиницю часу при різниці тисків, що дорівнює одиниці. Тоді за час dt з однієї посудини в другу перетече кількість газу $a(p_1^2 - p_2^2)dt$. Ця кількість дорівнює зменшенню газу за час dt в одній посудині і збільшенню за цей же час – в другій. Тому маємо систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} bv_2 \frac{dp_2}{dt} = a(p_1^2 - p_2^2), \\ bv_1 \frac{dp_1}{dt} = -a(p_1^2 - p_2^2), \end{cases} \quad (17)$$

де b – маса одиниці об'єму, коли тиск дорівнює одиниці.

Віднявши почленно рівняння системи (17), одержимо

$$v_1 \frac{dp_1}{dt} + v_2 \frac{dp_2}{dt} = 0,$$

звідки

$$v_1 p_1 + v_2 p_2 = C_1. \quad (18)$$

Помножимо обидві частини першого рівняння системи (17) на $v_1 p_1$, а другого – на $v_2 p_2$ і додамо почленно:

$$a(p_1^2 - p_2^2)(v_1 p_1 + v_2 p_2) = bv_1 v_2 (p_1 \frac{dp_2}{dt} - p_2 \frac{dp_1}{dt}). \quad (19)$$

Враховувавши (18) і поділивши обидві частини (19) на p_1^2 , дістанемо

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{p_2}{p_1} \right) = k \left(1 - \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^2 \right), \quad (20)$$

де $k := \frac{aC_1}{bv_1 v_2}$.

Нехай $\frac{p_2}{p_1} = z$, тоді рівняння, після відокремлення змінних, набуде вигляду

$$\frac{dz}{1 - z^2} = k dt,$$

звідки

$$\ln \left| \frac{1+z}{1-z} \right| = 2kt + \ln |\bar{C}_2|, \bar{C}_2 \neq 0,$$

або

$$\frac{1+z}{1-z} = C_2 e^{2kt}, C_2 \in \mathbb{R}. \quad (21)$$

Повернувшись у (21) до заміни $\frac{p_2}{p_1} = z$, одержимо

$$\frac{p_1 + p_2}{p_1 - p_2} = C_2 e^{2kt}. \quad (22)$$

Сукупність рівностей (18) і (22) визначає загальний розв'язок системи (17).

Якщо в початковий момент часу $t = 0$ $p_1 = p_{10}$, а $p_2 = p_{20}$, то з рівності (18) отримуємо

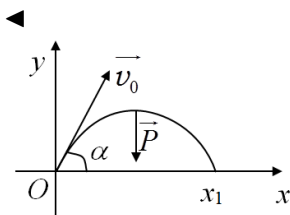
$$C_1 = p_{10}v_1 + p_{20}v_2, \quad (23)$$

а з рівності (22) –

$$C_2 = \frac{p_{10} + p_{20}}{p_{10} - p_{20}}. \quad (24)$$

З рівностей (18) і (22) знаходимо шукані тиски $p_1(t)$ і $p_2(t)$ в довільний момент часу t , при цьому сталі C_1 і C_2 визначаються формулами (23) і (24). ►

Приклад 5 (рух снаряда). Снаряд вилітає з гармати з початковою швидкістю v_0 під кутом α до горизонту. Знайти рівняння руху снаряда, вважаючи опір повітря пропорційним швидкості руху.



На снаряд діє сила ваги \vec{P} величиною $P = mg$ і сила опору повітря. Якщо позначити через $x(t)$ і $y(t)$ координати снаряда в момент часу t , то легко можна записати диференціальні рівняння руху снаряда стосовно координатних осей. Во-

ни, згідно з умовою задачі, мають вигляд

$$\begin{cases} m \frac{d^2 x}{dt^2} = -k \frac{dx}{dt}, \\ m \frac{d^2 y}{dt^2} = -k \frac{dy}{dt} - mg, \end{cases}$$

де k – коефіцієнт пропорційності.

Очевидно, що $v_x := \frac{dx}{dt}$ і $v_y := \frac{dy}{dt}$ – проекції вектора швидкості \vec{v} відповідно на осі Ox і Oy . У цих позначеннях одержану вище систему можна подати у вигляді

$$\begin{cases} m \frac{dv_x}{dt} = -kv_x, \\ m \frac{dv_y}{dt} = -kv_y - mg. \end{cases} \quad (25)$$

Оскільки початкова швидкість снаряда v_0 , то

$$\begin{cases} v_x(0) = v_0 \cos \alpha, \\ v_y(0) = v_0 \sin \alpha. \end{cases} \quad (26)$$

Якщо розв'язати кожне з рівнянь системи (25), то одержимо

$$\begin{cases} v_x(t) = C_1 e^{-\frac{k}{m}t}, \\ v_y(t) = C_2 e^{-\frac{k}{m}t} - \frac{mg}{k}. \end{cases}$$

Якщо скористатись умовами (26), то матимемо, що $C_1 = v_0 \cos \alpha$, $C_2 = v_0 \sin \alpha + \frac{mg}{k}$, а отже,

$$\begin{cases} v_x(t) = v_0 \cos \alpha e^{-\frac{k}{m}t}, \\ v_y(t) = (v_0 \sin \alpha + \frac{mg}{k}) e^{-\frac{k}{m}t} - \frac{mg}{k}. \end{cases}$$

Звідси отримується така система рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = v_0 \cos \alpha e^{-\frac{k}{m}t}, \\ \frac{dy}{dt} = (v_0 \sin \alpha + \frac{mg}{k}) e^{-\frac{k}{m}t} - \frac{mg}{k}. \end{cases} \quad (27)$$

Окрім того, згідно з умовою,

$$x(0) = 0, y(0) = 0. \quad (28)$$

Зінтегрувавши систему (27), матимемо, що

$$\begin{cases} x(t) = -\frac{m}{k} v_0 \cos \alpha e^{-\frac{k}{m}t} + C_3, \\ y(t) = -\frac{m}{k} (v_0 \sin \alpha + \frac{mg}{k}) e^{-\frac{k}{m}t} - \frac{mg}{k} t + C_4. \end{cases} \quad (29)$$

Якщо задовольнити функціями (29) початкові умови (28), то одержимо, що

$$C_3 = \frac{mv_0}{k} \cos \alpha, \quad C_4 = \frac{m}{k} \left(v_0 \sin \alpha + \frac{mg}{k} \right),$$

а тому рівняння руху має вигляд

$$\begin{cases} x(t) = \frac{mv_0 \cos \alpha}{k} (1 - e^{-\frac{k}{m}t}), \\ y(t) = \frac{m}{k^2} (kv_0 \sin \alpha + mg) (1 - e^{-\frac{k}{m}t}) - \frac{mg}{k}t. \blacktriangleright \end{cases}$$

Вправи

1. За певної хімічної реакції речовина A , кількість якої на початку дорівнює a , перетворюється в речовину B , кількість якої на початку дорівнює b , зі швидкістю, пропорційною кількості речовини A . Водночас утворена речовина B переходить у речовину A зі швидкістю, пропорційною кількості речовини B . Визначити залежність речовин A і B від часу.

2. Процес вилучення речовини з розчину описується системою диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \frac{dc}{dt} = k_1 \left(\frac{x}{\alpha} - c \right), \\ \frac{dx}{dt} = -k_2 \left(\frac{x}{\alpha} - c \right), \end{cases}$$

де c – концентрація речовини в розчині, $\frac{x}{\alpha}$ – концентрація речовини на поверхні маси, яка обробляється, k_1 і k_2 – коефіцієнти пропорційності, t – час, x – вміст речовини в масі, α – стала. Знайти $c(x)$.

3. Розпад радіоактивної речовини відбувається зі швидкістю, пропорційною наявній кількості даної речовини. Період піврозпаду речовини B у речовину C дорівнює T_1 . У свою чергу речовина C , перетворюючись в іншу речовину, має період піврозпаду T_2 . Визначити, яку кількість речовини B і речовини C матимемо в момент часу t , якщо початкова кількість речовини B дорівнює одиниці.

4. Скласти математичну модель динаміки бою, якщо угруповання червоних має в своєму розпорядженні N_1 , а угруповання синіх N_2 однорідних бойових одиниць, наприклад, танків, літаків, кораблів, ракетних установок і т.п., причому їхній характер у кожного з угруповань може бути різним, тобто можна розглядати бій літаків з танками або ракетних установок з кораблями тощо. Швидкість зменшення кількості бойових одиниць кожного з угруповань пропорційна кількості бойових одиниць другого угруповання, що бере участь у бою. Знайти залежність кількості бойових одиниць x червоних і y одиниць синіх від часу.

5. Снаряд вилітає з гармати з початковою швидкістю v_0 під кутом α до горизонту. Знайти рівняння руху, вважаючи, що опір повітря відсутній, і визначити при якому значенні кута α дальність польоту снаряда буде найбільшою.

6. Матеріальна точка маси m притягується центром O із силою, пропорційною відстані. Рух починається з точки A на відстані a від центра з початковою швидкістю v_0 , перпендикулярною до відрізка OA . Знайти траєкторію руху точки.

7. Матеріальна точка маси m відштовхується від центра O із силою пропорційною відстані. Рух починається з точки A на відстані a від центра з початковою швидкістю v_0 , перпендикулярною до відрізка OA . Знайти траєкторію руху точки.

Відповіді

1. Маємо

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -k_1x + k_2y, \\ \frac{dy}{dt} = -k_2y + k_1x, \end{cases} \quad x(0) = a, y(0) = b,$$

де x і y – наявна кількість речовин A і B в момент часу t відповідно. Додаючи рівняння, дістаємо $\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} = 0$ або $x + y = C$, де C – довільна стала, яка згідно з початковими умовами дорівнює $a + b$. Отже, $x + y \equiv a + b$. Визначивши x і підставивши його в друге рівняння системи, отримаємо диференціальне рівняння $\frac{dy}{dt} + (k_1 + k_2)y = (a + b)k_1$. Розв'язавши це рівняння з

урахуванням початкових умов, маємо

$$y = \frac{(a+b)k_1}{k_1+k_2}(1 - e^{-(k_1+k_2)t}),$$

$$x = \frac{a+b}{k_1+k_2}(k_2 + k_1 e^{-(k_1+k_2)t}).$$

2. $c(x) = -\frac{k_1}{k_2}x + C, C \in \mathbb{R}.$

3. Для визначення кількості x речовини B та y речовини C в момент часу t маємо задачу Коші для системи диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -k_1x, \\ \frac{dy}{dt} = k_1x - k_2y, \quad x(0) = 1, y(0) = 0 \end{cases}$$

де $k_1 = \frac{\ln 2}{T_1}, k_2 = \frac{\ln 2}{T_2}$ – коефіцієнти пропорційності. Розв'язавши перше рівняння, дістанемо $x = C_1 e^{-k_1 t}$, де C_1 – стала, яка згідно з початковою умовою дорівнює одиниці. Отже, $x = e^{-k_1 t}$. Підставивши цей вираз в друге рівняння, дістанемо лінійне рівняння $\frac{dy}{dt} + k_2 y = k_1 e^{-k_1 t}$, розв'язком якого є $y = C_2 e^{-k_2 t} + \frac{k_1}{k_2 - k_1} e^{-k_1 t}$, де C_2 – довільна стала, яку знайдемо з початкової умови, а саме, $C_2 = -\frac{k_1}{k_2 - k_1}$. Отже, $y = \frac{k_1}{k_2 - k_1} (e^{-k_1 t} - e^{-k_2 t})$.

4. Система рівнянь, яка описує динаміку бою (**рівняння Ланчестера**), має вигляд

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -k_2 y, \\ \frac{dy}{dt} = -k_1 x, \end{cases}$$

а початковими умовами є $x(0) = N_1, y(0) = N_2$. Продиференціювавши перше рівняння за t і замінивши в правій частині $\frac{dy}{dt}$ його виразом з другого рівняння, дістанемо диференціальне рівняння другого порядку $\frac{d^2 x}{dt^2} = k_1 k_2 x$, загальним розв'язком якого є $x = C_1 e^{\sqrt{k_1 k_2} t} + C_2 e^{-\sqrt{k_1 k_2} t}$. Тоді $y = -\frac{1}{k_2} \frac{dx}{dt} =$

$-\sqrt{\frac{k_1}{k_2}}(C_1 e^{\sqrt{k_1 k_2} t} - C_2 e^{-\sqrt{k_1 k_2} t})$. Сталі C_1 і C_2 знайдемо, скориставшись початковими умовами.

5. Якщо скористатися міркуваннями, використаними в прикладі 5, то одержимо систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \frac{d^2 x}{dt^2} = 0, \\ \frac{d^2 y}{dt^2} = -g. \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} \frac{dv_x}{dt} = 0, \\ \frac{dv_y}{dt} = -g. \end{cases}$$

Початкові умови $v_x(0) = v_0 \cos \alpha$, $v_y(0) = v_0 \sin \alpha$. Розв'язавши одержану задачу Коші, дістанемо

$$\begin{cases} v_x(t) = v_0 \cos \alpha, \\ v_y(t) = v_0 \sin \alpha - gt \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = v_0 \cos \alpha, \\ \frac{dy}{dt} = v_0 \sin \alpha - gt. \end{cases}$$

Зінтегрувавши цю систему і скориставшись тим, що $x(0) = 0$, $y(0) = 0$, одержимо рівняння руху снаряда

$$\begin{cases} x(t) = v_0 t \cos \alpha, \\ y(t) = v_0 t \sin \alpha - g \frac{t^2}{2}. \end{cases}$$

або

$$y = -\frac{gx^2}{2v_0 \cos^2 \alpha} + x \operatorname{tg} \alpha.$$

Очевидно, що дальність польоту відповідає випадку $y = 0$, а тому

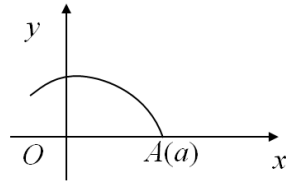
$$x \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx^2}{2v_0 \cos^2 \alpha} = 0$$

або

$$x_1 = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}.$$

Максимальна дальність польоту відповідає тому випадку, коли $\sin 2\alpha = 1$, тобто $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

6.



Якщо $x(t)$ і $y(t)$ – координати матеріальної точки в момент t , а F_x, F_y – проекції сили \vec{F} , що діє на точку, то скориставшись другим законом механіки, одержимо таку математичну модель задачі:

$$\begin{cases} m \frac{d^2 x}{dt^2} = -k^2 x, \\ m \frac{d^2 y}{dt^2} = -k^2 y, \end{cases}$$

де k^2 – коефіцієнт пропорційності, $x(0) = a, x'(0) = 0, y(0) = 0, y'(0) = v_0$. Зінтегрувавши диференціальні рівняння і задовольнивши початкові умови, одержимо рівняння траєкторії руху точки

$$\begin{cases} x = a \cos \frac{k}{\sqrt{m}} t, \\ y = \frac{\sqrt{m}}{k} v_0 \sin \frac{k}{\sqrt{m}} t \end{cases}$$

або

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ – еліпс}$$

де $b^2 := \frac{m v_0^2}{k^2}$.

7. Скориставшись рисунком і позначеннями з попередньої задачі, одержимо таку математичну модель задачі:

$$\begin{cases} m \frac{d^2 x}{dt^2} = k^2 x, \\ m \frac{d^2 y}{dt^2} = k^2 y, \end{cases}$$

$x(0) = a, x'(0) = 0, y(0) = 0, y'(0) = v_0$. Розв'язавши цю задачу, отримаємо траєкторію руху в формі гіперболи

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

де $b^2 := \frac{m v_0^2}{k^2}$.

Література

1. *Гудименко Ф.С.* Збірник задач з диференціальних рівнянь / Ф.С. Гудименко, І.А. Павлюк, В.О. Волкова. – Київ: Вид-во Київ. ун-ту, 1962. – 168 с.
2. *Гутер Р. С.* Дифференциальные уравнения /Р. С. Гутер, А. Р. Янпольский. – Москва: Высшая школа, 1976. – 304 с.
3. *Івасишен С. Д.* Диференціальні рівняння: методи та застосування / С. Д. Івасишен, В. П. Лавренчук, П. П. Настасієв, І. І. Дрінь. – Чернівці: Чернівецький нац. ун-т, 2010. – 288 с.
4. *Краснов М.Л.* Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям: Учеб. пособие для вузов / М.Л. Краснов, А.И. Киселев, Г.И. Макаренко. – Москва: Высшая школа, 1978. – 287 с.
5. *Матвеев Н.М.* Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Н.М. Матвеев. – Минск.: Вышэйшая шк., 1970. – 357 с.
6. *Призва Г.Й.* Диференціальні рівняння та їх застосування / Г.Й. Призва. – Київ: Вища школа, 1978. – 104 с.
7. *Романко В.К.* Курс дифференциальных уравнений и вариационного исчисления / В.К. Романко. – Москва: Лаборатория базовых знаний, 2000. – 344 с.
8. *Романко В.К.* Сборник задач по дифференциальным уравнениям и вариационному исчислению / В.К. Романко, Н.Х. Агаханов, В.В. Власов., Л.И. Коваленко. – Москва: ЮНИМЕДИАСТАЙЛ, 2002. – 256 с.
9. *Самойленко А.М.* Диференціальні рівняння у прикладах і задачах / А.М. Самойленко, С.А. Кривошея, М.О. Перестюк. – Київ: Вища школа, 1994. - 454 с.
10. *Степанов В.В.* Курс дифференциальных уравнений / В.В. Степанов. – Київ: Радянська школа, 1953. – 444 с.

11. *Эльсгольц Л.Э.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление / Л.Э. Эльсгольц. – Москва: Наука, 1965. – 424 с.

Предметний покажчик

- Автономна система диференціальних рівнянь 170
Асимптотично стійкий розв'язок системи диференціальних рівнянь 205
- Власні числа крайової задачі 160
– функції крайової задачі 160
Визначник Вронського системи функцій 110
- Диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними 16
– – першого порядку 9
– – розв'язане відносно похідної 9
- Єдиність розв'язку 13, 66
- Загальний інтеграл в параметричній формі 87
– – рівняння 16, 86
– – системи диференціальних рівнянь 175
– – рівняння Клеро 65
- Загальний розв'язок диференціального рівняння 5, 15, 74, 86, 231
– – системи диференціальних рівнянь 172
- Задача інтегрування диференціального рівняння 4
– Коші 13, 66, 84, 171, 223, 233
- Закон Гука 283
– Фур'є 294
- Залежність системи функцій 173
- Звичайне диференціальне рівняння 4
– – – n -го порядку 88
- Ізокліна диференціального рівняння 11
- Інваріант лінійного диференціального рівняння другого порядку 150
- Інтегральна лінія диференціального рівняння 5, 10, 65
– – системи диференціальних рівнянь 171
– поверхня диференціального рівняння з частинними похідними 221
- Інтегрувальний множник 54
- Інтегрування диференціального рівняння 10
– системи диференціальних рівнянь 171
- Інтегрування в квадратурах 15
- Квазілінійне рівняння з частинними похідними першого порядку 229
- Коливний розв'язок диференціального рівняння 162
- Крайова задача 157
- Лінійна неоднорідна системи диференціальних рівнянь 185
– однорідна система диференціальних рівнянь 185
– система диференціальних рівнянь 111
- Лінійне диференціальне рівняння n -го порядку 104
– – – першого порядку 35
– неоднорідне диференціальне рівняння n -го порядку 104
– – – – першого порядку 36
– однорідне диференціальне рівняння n -го порядку 88
– – – – першого порядку 36
- Лінійно залежні функції 109
- Лінійно незалежні функції 109
- Логістична крива 253

- Метод варіації сталої** 36
- виключення розв'язування систем диференціальних рівнянь 176
 - дослідження на стійкість розв'язку системи диференціальних рівнянь за першим наближенням 211
 - Ейлера знаходження фундаментальної системи розв'язків 187
 - p -дискримінантної лінії 77
 - C -дискримінантної лінії 77
 - функції Ляпунова дослідження на стійкість розв'язку системи диференціальних рівнянь 208
- Модель динаміки діяльності малого підприємства** 241
- Еванса встановлення рівноважної ціни на ринку 38
 - Кейнса 243
 - ринку з прогнозованими цінами 240
 - рівноважного зростання випуску продукції 19
 - Харрода-Домара динаміки суспільного продукту і національного доходу 245
- Незалежність системи функцій** 174
- Неколивний розв'язок диференціального рівняння** 162
- Неоднорідне лінійне рівняння з частинними похідними першого** 229
- Неперервний темп приросту** 246
- Нестійкий розв'язок системи диференціальних рівнянь** 205
- Нормальна система диференціальних рівнянь** 169
- Нуль розв'язку диференціального рівняння** 162
- Однорідна функція m -го виміру** 27
- Однорідне диференціальне рівняння першого порядку** 27
- Особлива точка диференціального рівняння** 13, 62
- Особливий розв'язок диференціального рівняння** 63, 52
- – рівняння Клеро 74
 - – системи диференціальних рівнянь 172
- Перший інтеграл диференціального рівняння** 87
- – системи диференціальних рівнянь 173
- Поле напрямків диференціального рівняння** 11, 65
- Порядок диференціального рівняння** 4, 217
- Початкова умова** 13, 223
- Принцип суперпозиції** 118
- Проміжний інтеграл k -го порядку** 87
- Рівняння Бернуллі** 41
- в повних диференціалах 51
 - Ейлера 141
 - з частинними похідними 4, 217
 - Клеро 73
 - Лагранжа 72, 141
 - Ріккати 44
- Розв'язок диференціального рівняння** 4, 9, 65, 84
- – – з частинними похідними 217
 - системи диференціальних рівнянь 170
- Самоспряжене лінійне диференціальне рівняння другого порядку** 155
- Система звичайних диференціальних рівнянь** 169
- – – – у симетричній формі 218, 231

– рівнянь першого наближення 211
 Стационарна система диференціальних рівнянь 170
 Стійкість розв'язку системи диференціальних рівнянь 204
 Теорема Коші 13, 66, 84, 105, 172
 Точка спокою системи диференціальних рівнянь 205
Формула Ліувілля 113
Фундаментальна система розв'язків лінійного диференціального рівняння n -го порядку 112
 – – – системи диференціальних рівнянь 186
Функція Гріна 158
Характеристики рівняння з частинними похідними 235
Характеристичне рівняння лінійного однорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами 127
 – – системи лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами 188
Характеристичні числа системи лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами 188
Частинний розв'язок диференціального рівняння 5, 15, 66, 86
 – – системи диференціальних рівнянь 172
Четаєва теорема 210

Зміст

Передмова.....	3
Вступ.....	4
Розділ 1. Диференціальні рівняння першого порядку	9
§ 1. Загальні поняття про диференціальне рівняння першого порядку.....	9
§ 2. Рівняння з відокремлюваними змінними.....	16
Вправи.....	22
Відповіді.....	25
§ 3. Однорідні рівняння першого порядку.....	27
Вправи.....	33
Відповіді.....	34
§ 4. Лінійні рівняння першого порядку та звідні до них..	35
4.1. Лінійне рівняння першого порядку.....	35
4.2. Модель Еванса встановлення рівноважної ціни на ринку одного товару.....	38
4.3. Рівняння Бернуллі.....	41
4.4. Рівняння Ріккати.....	44
Вправи.....	46
Відповіді.....	48
§ 5. Рівняння в повних диференціалах. Інтегрувальний множник.....	51
5.1. Рівняння в повних диференціалах.....	51
5.2. Інтегрувальний множник.....	53
Вправи.....	61
Відповіді.....	62
§ 6. Особливі розв'язки.....	62
Вправи.....	65
Відповіді.....	65
§ 7. Рівняння першого порядку, не розв'язані відносно похідної. Рівняння Лагранжа і Клеро.....	65
Вправи.....	80
Відповіді.....	81

Розділ 2. Диференціальні рівняння вищого порядку.	
Рівняння, що допускають зниження порядку	84
§ 8. Загальні поняття та означення	84
§ 9. Деякі типи рівнянь, які допускають зниження порядку	88
9.1. Рівняння вигляду $F(x, y^{(n)}) = 0$	88
9.2. Рівняння, яке не містить явно шуканої функції і кількох послідовних похідних	91
9.3. Рівняння, яке не містить явно незалежної змінної	92
9.4. Рівняння, однорідне відносно $y, y', \dots, y^{(n)}$	94
9.5. Узагальнено однорідне рівняння	96
9.6. Рівняння, ліва частина якого є точною похідною	98
Вправи	100
Відповіді	101
Розділ 3. Лінійні диференціальні рівняння вищих порядків	104
§ 10. Означення та загальні властивості	104
§ 11. Загальна теорія лінійних однорідних рівнянь	106
Вправи	116
Відповіді	116
§ 12. Лінійні неоднорідні рівняння	117
Вправи	125
Відповіді	126
§ 13. Лінійні рівняння зі сталими коефіцієнтами та звідні до них	126
13.1. Лінійні однорідні рівняння зі сталими коефіцієнтами	126
13.2. Лінійні неоднорідні рівняння зі сталими коефіцієнтами	131
13.3. Лінійні рівняння, що зводяться до рівнянь зі сталими коефіцієнтами	140
Вправи	144
Відповіді	147
§ 14. Деякі питання теорії лінійних рівнянь другого порядку	149
14.1. Інваріант рівняння другого порядку	149

14.2. Зниження порядку рівняння, якщо відомий частинний розв'язок цього рівняння	152
14.3. Самоспряжений вигляд рівняння другого порядку	155
14.4. Крайові задачі для диференціальних рівнянь другого порядку. Функція Гріна задачі. Задача Штурма-Ліувілля	156
14.5. Коливний характер розв'язків рівняння другого порядку	162
Вправи	165
Відповіді	167
Розділ 4. Системи диференціальних рівнянь	169
§ 15. Нормальні системи диференціальних рівнянь. Основні поняття і твердження	169
Вправи	181
Відповіді	183
§ 16. Системи лінійних диференціальних рівнянь	184
16.1. Лінійні однорідні системи	185
16.2. Неоднорідні системи лінійних рівнянь	193
Вправи	199
Відповіді	202
Розділ 5. Елементи теорії стійкості	204
§ 17. Основні поняття теорії стійкості за Ляпуновим	204
§ 18. Метод функцій Ляпунова (другий метод Ляпунова)	208
§ 19. Дослідження на стійкість за першим наближенням	211
Вправи	214
Відповіді	216
Розділ 6. Поняття про рівняння з частинними похідними першого порядку	217
§ 20. Лінійне однорідне рівняння з частинними похідними першого порядку	218
20.1. Зв'язок між однорідним лінійним рівнянням із частинними похідними першого порядку і системою звичайних диференціальних рівнянь у	

симетричній формі, яка йому відповідає	218
20.2. Побудова загального розв'язку однорідного лінійного рівняння	220
20.3. Розв'язування задачі Коші для однорідного лінійного рівняння	223
Вправи	228
Відповіді	228
§ 21. Лінійне неоднорідне рівняння з частинними похідними першого порядку	229
21.1. Побудова загального розв'язку неоднорідного лінійного рівняння	229
21.2. Задача Коші для неоднорідного лінійного рівняння	233
Вправи	238
Відповіді	239

Розділ 7. Застосування диференціальних рівнянь до задач економіки, техніки і природознавства

природознавства	240
§ 22. Задачі, моделі яких описуються диференціальними рівняннями першого порядку	240
22.1. Економічні моделі	240
22.2. Диференціальні моделі в екології	250
22.3. Потік наукової інформації	252
22.4. Математичні моделі в хімії	254
22.5. Геометричні задачі	258
22.6. Диференціальні моделі у фізиці й техніці	264
Вправи	275
Відповіді	278
§ 23. Моделі, які описуються диференціальними рівняннями другого порядку	282
Вправи	298
Відповіді	300
§ 24. Задачі, які описуються системами диференціальних рівнянь	304
Вправи	315
Відповіді	316

Література	320
Предметний покажчик	322