

**НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»**

Приладобудівний факультет

Кафедра приладів і систем орієнтації і навігації

«На правах рукопису»
УДК 001.891.573: 519.651: 519.654

«До захисту допущено»

Завідувач кафедри

_____ Н. І., Бурау

«__» _____ 20__ р.

Магістерська дисертація

на здобуття ступеня магістра

**зі спеціальності 151 «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології»
(«Комп'ютерно-інтегровані технології та системи навігації і керування»)**

на тему: «Вдосконалення методу апроксимації даних»

Виконала:

студентка VI курсу, групи ПГ - 71мп
Коменчук Ірина Євгеніївна _____

Керівник:

к.т.н., доцент,
Цибульник С.О. _____

Консультант з Розроблення стартап-проекту:

к.е.н., доцент,
Бояринова К.О. _____

Рецензент: _____

Засвідчую, що у цій магістерській
дисертації немає запозичень з праць інших
авторів без відповідних посилань.
Студентка _____

Київ – 2018 року

РЕФЕРАТ

Завдання застосування тих чи інших методів наближення (апроксимації та інтерполяції) функцій і сигналів досить часто постає перед дослідниками і інженерами в різних областях науки і техніки. Ці області, як і множина методів наближення функцій, є доволі широкими і різноманітними. Вони використовуються при виконанні математичних розрахунків (найчастіше в економіці та соціології), для математичного моделювання (наприклад, прогнозування), при проектуванні обладнання, систем технічного зору, високоякісного медичного обладнання, а також систем багатокласової діагностики.

У зв'язку з цим основними завданнями апроксимації даних у всіх вище перерахованих випадках є:

- знаходження математичного опису для дискретних даних (тобто встановлення аналітичної залежності між вимірними відліками сигналів для подальшого прогнозування можливих значень вимірної величини у майбутньому);
- відновлення втрачених даних при передачі сигналів через наявність опору в електричному дроті або втрата пакетів при передачі через оптичні лінії зв'язку;
- відновлення вихідних даних у процесі кодування та декодування сигналів;
- розпізнавання зображень та їх покращення;
- відновлення при архівації та стисненні даних.

Отже, задача точного наближення вимірних даних є дуже актуальною в наш час.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Проведені в дисертації дослідження пов'язані з науково-дослідними роботами, серед яких: «Методологія багатокласової діагностики складних просторових об'єктів.

Метою дисертаційної роботи є розробка алгоритмічного та програмного забезпечення апроксимації даних вимірювань за допомогою попереднього використання алгоритмів інтерполяції, а також рекомендації щодо його ефективного використання в системах багатокласової діагностики.

Досягнення мети передбачає вирішення наступних задач:

- огляд та вибір методу апроксимації даних для системи багатокласової діагностики;
- огляд існуючих методів інтерполяції;
- дослідження ефективності інтерполяційних алгоритмів при використанні ідеальних (змодельованих) сигналів різної фізичної природи;
- розробка алгоритмічного забезпечення апроксимації даних за рахунок попереднього використання методів інтерполяції;
- розробка програмного забезпечення апроксимації даних в математичному пакеті MATLAB або на інших мовах програмування;
- розробка рекомендацій щодо ефективного використання розробленого програмного забезпечення в системах багатокласової діагностики.

Об'єктом дослідження є процес апроксимації даних вимірювань в системах багатокласової діагностики.

Предметом дослідження є вдосконалення існуючих алгоритмів апроксимації даних, підвищення їх точності за рахунок попереднього використання інтерполяційних алгоритмів.

Методи дослідження – математичне моделювання процесів у програмному середовищі пакета MATLAB для дослідження використання інтерполяційних алгоритмів при апроксимації даних вимірювань в системах багатокласової діагностики.

Наукова новизна дисертації полягає в наступному:

- вдосконалено метод апроксимації даних за рахунок розбиття початкового сигналу на відрізки рівної довжини, коригування апроксимованих

даних на стиках сусідніх відрізків, а також вибору (за допомогою порівняння коефіцієнта детермінації) найкращого поліному (з першого по п'ятий порядок) для апроксимації;

- вдосконалено метод апроксимації даних за рахунок використання алгоритмів інтерполяції для коригування довжини початкового сигналу.

Практичне значення отриманих результатів визначається розробкою алгоритмічного та програмного забезпечення на основі розроблених методик, рекомендацій та математичних моделей, які можуть застосовуватись у складових блоках систем багатокласової діагностики. Розроблено рекомендації щодо ефективного використання розробленого програмного забезпечення в системах багатокласової діагностики. Можливе впровадження результатів у навчальний процес або наукову тему.

Апробація результатів дисертації відбулася на наступних конференціях:

- новые направления развития приборостроения, БНТУ, приборостроительный факультет, Минск, 2017;
- погляд у майбутнє приладобудування, КПІ ім. Ігоря Сікорського, приладобудівний факультет, Київ, 2017;
- VIII Міжнародна Антарктична конференція, присвячена 25-річчю приєднання України до Договору про Антарктику, КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, 2017.

Публікації. За матеріалами дисертації було отримано два авторських свідоцтва України на комп'ютерні програми, опубліковано 3 тези доповідей на науково-практичних конференціях та 3 статті у фахових виданнях України.

Структура дисертації. Дисертаційна робота складається зі вступу, чотирьох розділів, висновків, переліку посилань. Загальний обсяг дисертації становить 102 сторінок, 27 малюнків, 35 таблиць, 54 положення переліку посилань.

СИСТЕМА БАГАТОКЛАСОВОЇ ДІАГНОСТИКИ, ІНТЕРПОЛЯЦІЯ, АПРОКСИМАЦІЯ, МЕТОД НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ, МЕТОД ЛАГРАНЖА

ABSTRACT

The task of applying certain methods of approximation (approximation and interpolation) of functions and signals often appears to researchers and engineers in various fields of science and technology. These areas, as well as the set of methods for the approximation of functions, are quite wide and varied. They are used in mathematical calculations (most often in economics and sociology), for mathematical modeling (for example, prediction), in the design of equipment, systems of technical vision, high-quality medical equipment, as well as systems of multi-class diagnostics.

In connection with this, the main tasks of data approximation in all the above cases are:

- finding a mathematical description for discrete data (establishing an analytical dependence between measured signal samples for further prediction of possible values of the measured value in the future);
- recovery of lost data in the transmission of signals due to the presence of resistance in the electric wire or the loss of packets when transmitted through optical communication lines;
- restoring output data in the process of encoding and decoding signals;
- image recognition and enhancement;
- recovery when archiving and compressing data.

Consequently, the problem of accurate approximation of measured data is very **relevant** in our time.

Relationship of work with scientific programs, plans, themes. Researches carried out in the dissertation are connected with research work, among which: "Methodology of multiclass diagnostics of complex spatial objects.

The **purpose** of the dissertation is to develop algorithms and software for the approximation of measured data with the help of preliminary use of interpolation algorithms, as well as recommendations for its effective use in systems of multi-class diagnostics.

Achieving the goal involves solving the following tasks:

- review and select the method for data approximation for a multi-class diagnostic system;
- review of existing interpolation methods;
- research of the efficiency of interpolation algorithms using ideal (simulated) signals of different physical nature;
- development of algorithmic support for data approximation at the expense of preliminary use of interpolation methods;
- development of data approximation software in the MATLAB mathematical package or in other programming languages;
- development of recommendations for the effective use of the developed software in systems of multi-class diagnostics.

The **object** of the study is the process of approximation of the measured by multi-class diagnostic systems data.

The **subject** of the study is the improvement of existing algorithms for data approximation, increasing their accuracy due to the previous use of interpolation algorithms.

Research methods – mathematical modeling of processes in the software environment of the MATLAB package for the study of the use of interpolation algorithms for the approximation of measured by multiclass diagnostic systems data.

The **scientific novelty** of the dissertation is as follows:

- improved the method of data approximation by splitting the initial signal into segments of equal length, adjusting the approximated data at the junctions of adjacent segments, and also selecting (by comparing the determination coefficient) the best polynomial (from the first to the fifth order) for approximation;
- The method of data approximation is improved by using interpolation algorithms to adjust the length of the original signal.

The **practical significance** of the obtained results is determined by the development of algorithms and software based on the developed techniques, recommendations and mathematical models that can be used in the component blocks

of multi-class diagnostic systems. Recommendations on effective use of the developed software in systems of multiclass diagnostics are developed.

Approbation of the results of the dissertation took place at the following conferences:

- New trends in instrument making development, BNTU, Instrument-making Faculty, Minsk, 2017;
- A look at the future of instrument making, Igor Sikorsky KPI, Instrument-making Faculty, Kyiv, 2017;
- VIII International Antarctic Conference dedicated to the 25th anniversary of Ukraine's accession to the Antarctic Treaty, Igor Sikorsky KPI, Kyiv, 2017.

Publications. On the basis of the dissertation materials, two author's certificates of Ukraine were received on computer programs, 3 reports at scientific-practical conferences and 3 articles in professional editions of Ukraine were published.

Structure of the dissertation. The dissertation consists of an introduction, four sections, conclusions, a list of references. The total volume of the dissertation is 102 pages, 27 drawings, 35 tables, 54 positions of the reference list.

SYSTEM OF MULTICLASS DIAGNOSTICS, INTERPOLATION, APPROXIMATION, METHOD OF LEAST SQUARES, LAGRANGE METHOD

ЗМІСТ

ВСТУП.....	11
1 ОГЛЯД СТАНУ ПРОБЛЕМИ.....	16
1.1 Апроксимація даних вимірювань.....	18
1.2 Багатокласова діагностика.....	20
1.3 Огляд існуючих методів апроксимації даних.....	24
1.4 Методи інтерполяції.....	27
1.5 Огляд досвіду інших авторів.....	29
1.6 Мета і завдання досліджень.....	33
2 ІНТЕРПОЛЯЦІЯ ЗМОДЕЛЬОВАНИХ ІДЕАЛЬНИХ СИГНАЛІВ.....	35
2.1 Інтерполяційний метод Лагранжа.....	35
2.2 Інтерполяція методом Лагранжа.....	38
2.2.1 Дослідження гармонічної функції з частотою 20Гц.....	38
2.2.2 Дослідження гармонічної функції з частотою 200Гц.....	43
2.3 Порівняння результатів досліджень.....	44
2.4 Результати інтерполяції неперіодичного знакозмінного сигналу.....	51
Висновки до розділу 2.....	54
3 ВДОСКОНАЛЕННЯ МЕТОДУ АПРОКСИМАЦІЇ ДАНИХ.....	56
3.1 Метод найменших квадратів.....	56
3.2 Огляд недоліків методу найменших квадратів.....	60
3.3 Вдосконалення методу апроксимації даних.....	63
3.4 Рекомендації щодо використання вдосконаленого методу в системах багатокласової діагностики.....	75
Висновки до розділу 3.....	76
4 РОЗРОБЛЕННЯ СТАРТАП ПРОЕКТУ.....	78
4.1 Опис ідеї проекту.....	78
4.2 Технологічний аудит ідеї проекту.....	80
4.3 Аналіз ринкових можливостей запуску стартап-проекту.....	81

	10
4.4 Розроблення ринкової стратегії проекту.....	88
4.5 Розроблення маркетингової програми стартап-проекту.....	90
Висновки до розділу 4.....	93
ВИСНОВКИ.....	95
ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ.....	97

ВСТУП

В якості основного інструментарію більшості завдань [1], пов'язаних з моніторингом та діагностикою складних будівельних та інженерних об'єктів, моделюванням процесів геофізичного, економічного і технічного характеру, використовуються регресійні методики апроксимації даних вимірювань. При цьому вибір оптимальної формули представлення даних, як емпіричної моделі процесу, відіграє визначальну роль, але є непростим завданням. Особливо ці труднощі характерні для степеневих і показникових нелінійних, аперіодичних і квазіперіодичних коливальних і інших складних видів функції.

Часто в діагностиці виникає необхідність отримувати рішення математичних задач в числовій формі. При цьому для багатьох задач відомо тільки про існування рішення, але не існує кінцевої формули [2]. Тому постає завдання перетворення однієї форми задання функціональної залежності в іншу – перетворення табличної форми задання даних (результатів вимірювань) в аналітичну (побудова математичної моделі) [1]. Навіть при наявності такої аналітичної формули, її використання для дослідження специфічних випадків стану об'єкта може виявитися неефективним. Нарешті, завжди існує необхідність вирішувати і такі математичні завдання, для яких строгі докази існування рішення на даний момент відсутні [2]. У всіх цих випадках використовуються методи наближеного, у першу чергу чисельного, рішення. Як правило, алгоритми наближеного рішення базуються на тому, що вихідна математична задача замінюється деякою більш простою або частіше послідовністю більш простих завдань. Вирішення цих більш простих завдань трактується як наближене рішення задачі вихідної. Тобто, фактично використовується деяка модель вихідної задачі (апроксимація).

Одним з важливих етапів вивчення явища за допомогою його математичної моделі, яка являє собою апроксимацію вимірюваних даних, що описують дане явище, є з'ясування того, чи задовольняє прийнята гіпотетична модель критерію практики, тобто з'ясування питання про те чи узгоджуються результати

спостережень з теоретичними наслідками моделі в межах точності спостережень. У зв'язку з цим необхідна перевірка на адекватність (відповідність властивостям реального об'єкта) даної математичної моделі, причому точність моделі (апроксимації) повинна бути більше точності спостережень (похибка моделі повинна бути меншою, ніж похибка спостережень). Точність вимірювання – характеристика вимірювання, що показує ступінь приближення його результатів до істинного значення вимірюваної величини.

Завдання апроксимації встає досить часто перед дослідниками і інженерами в різних областях науки і техніки. Области, де можна застосувати ті чи інші методи вирішення завдань наближення функцій і сигналів досить широкі і різноманітні [3]. Вони використовуються при виконанні математичних розрахунків, математичного моделювання; при проектуванні комунікаційного обладнання, систем технічного зору, високоякісного звуковідтворювального та медичного обладнання; застосовуються в економіці та соціології, а також в технічній діагностиці. У зв'язку з цим основними завданнями апроксимації даних у всіх вище перерахованих випадках є: знаходження математичного опису для дискретних даних, тобто встановлення залежності між виміряними відліками сигналів для подальшого прогнозування можливих значень вимірної величини у майбутньому; відновлення втрачених даних при передачі сигналів через наявність опору в електричному дроті або втрата пакетів при передачі через оптичні лінії зв'язку; відновлення вихідних даних в процесі кодування та декодування сигналів; розпізнавання зображень та їх покращення; відновлення при архівації та стисненні даних.

Отже, метою використання апроксимації у більшості випадків є відновлення втрачених вихідних даних, але в технічній діагностиці насамперед важливо спрогнозувати поведінку вимірюваного параметру у майбутньому для оцінки залишкового ресурсу. Проте в більшості технічних систем задача прогнозування є невирішеною, оскільки існуючий математичний апарат та алгоритми апроксимації у деяких випадках виявляються неефективними і не

дозволяють знайти аналітичний опис вимірної величини з достатньою швидкістю та точністю.

Тому розробка нових підходів до апроксимації даних вимірювань є надзвичайно важливою і актуальною задачею при прогнозуванні в системах багатокласової діагностики.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Проведені в дисертації дослідження пов'язані з науково-дослідними роботами, серед яких: «Методологія багатокласової діагностики складних просторових об'єктів».

Метою дисертаційної роботи є розробка алгоритмічного та програмного забезпечення апроксимації даних вимірювань за допомогою попереднього використання алгоритмів інтерполяції, а також рекомендації щодо його ефективного використання в системах багатокласової діагностики.

Досягнення мети передбачає вирішення наступних задач:

- огляд та вибір методу апроксимації даних для системи багатокласової діагностики;
- огляд існуючих методів інтерполяції;
- дослідження ефективності інтерполяційних алгоритмів при використанні ідеальних (змодельованих) сигналів різної фізичної природи;
- розробка алгоритмічного забезпечення апроксимації даних за рахунок попереднього використання методів інтерполяції;
- розробка програмного забезпечення апроксимації даних в математичному пакеті MATLAB або на інших мовах програмування;
- розробка рекомендацій щодо ефективного використання розробленого програмного забезпечення в системах багатокласової діагностики.

Об'єктом дослідження є процес апроксимації даних вимірювань в системах багатокласової діагностики.

Предметом дослідження є вдосконалення існуючих алгоритмів апроксимації даних, підвищення їх точності за рахунок попереднього використання інтерполяційних алгоритмів.

Методи дослідження – математичне моделювання процесів у програмному середовищі пакета MATLAB для дослідження використання інтерполяційних алгоритмів при апроксимації даних вимірювань в системах багатокласової діагностики.

Наукова новизна дисертації полягає в наступному:

- вдосконалено метод апроксимації даних за рахунок розбиття початкового сигналу на відрізки рівної довжини, коригування апроксимованих даних на стиках сусідніх відрізків, а також вибору (за допомогою порівняння коефіцієнта детермінації) найкращого поліному (з першого по п'ятий порядок) для апроксимації;
- вдосконалено метод апроксимації даних за рахунок використання алгоритмів інтерполяції для коригування довжини початкового сигналу.

Практичне значення отриманих результатів визначається розробкою алгоритмічного та програмного забезпечення на основі розроблених методик, рекомендацій та математичних моделей, які можуть застосовуватись у складових блоках систем багатокласової діагностики. Розроблено рекомендації щодо ефективного використання розробленого програмного забезпечення в системах багатокласової діагностики. Можливе впровадження результатів у навчальний процес або наукову тему.

Апробація результатів дисертації відбулася на наступних конференціях:

- новые направления развития приборостроения, БНТУ, приборостроительный факультет, Минск, 2017;
- погляд у майбутнє приладобудування, КПІ ім. Ігоря Сікорського, приладобудівний факультет, Київ, 2017;
- VIII Міжнародна Антарктична конференція, присвячена 25-річчю приєднання України до Договору про Антарктику, КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, 2017.

Публікації. За матеріалами дисертації було отримано два авторських свідоцтва України на комп'ютерні програми, опубліковано 3 тези доповідей на науково-практичних конференціях та 3 статті у фахових виданнях України.

РОЗДІЛ 1

ОГЛЯД СТАНУ ПРОБЛЕМИ

В якості основного інструментарію більшості завдань [1], пов'язаних з моніторингом та діагностикою складних будівельних та інженерних об'єктів, моделюванням процесів геофізичного, економічного і технічного характеру, використовуються регресійні методики апроксимації даних вимірювань. При цьому вибір оптимальної формули представлення даних, як емпіричної моделі процесу, відіграє визначальну роль, але є непростим завданням. Особливо ці труднощі характерні для степеневих і показникових нелінійних, аперіодичних і квазіперіодичних коливальних і інших складних видів функції.

Часто в діагностиці виникає необхідність отримувати рішення математичних задач у числовій формі. При цьому для багатьох задач відомо тільки про існування рішення, але не існує кінцевої формули [2]. Тому постає завдання перетворення однієї форми задання функціональної залежності в іншу – перетворення табличної форми задання даних (результатів вимірювань) в аналітичну (побудова математичної моделі) [1]. Навіть при наявності такої аналітичної формули, її використання для дослідження специфічних випадків стану об'єкта може виявитися неефективним. Нарешті, завжди існує необхідність вирішувати і такі математичні завдання, для яких строгі докази існування рішення на даний момент відсутні [2]. У всіх цих випадках використовуються методи наближеного, у першу чергу чисельного, рішення. Як правило, алгоритми наближеного рішення базуються на тому, що вихідна математична задача замінюється деякою більш простою або частіше послідовністю більш простих завдань. Вирішення цих більш простих завдань трактується як наближене рішення задачі вихідної. Тобто, фактично використовується деяка модель вихідної задачі (апроксимація).

Одним з важливих етапів вивчення явища за допомогою його математичної моделі, яка являє собою апроксимацію виміряних даних, що описують дане

явище, є з'ясування того, чи задовольняє прийнята гіпотетична модель критерію практики, тобто з'ясування питання про те чи узгоджуються результати спостережень з теоретичними наслідками моделі в межах точності спостережень. У зв'язку з цим необхідна перевірка на адекватність (відповідність властивостям реального об'єкта) даної математичної моделі, причому точність моделі (апроксимації) повинна бути більше точності спостережень (похибка моделі повинна бути меншою, ніж похибка спостережень). Точність вимірювання – характеристика вимірювання, що показує ступінь приближення його результатів до істинного значення вимірюваної величини.

Завдання апроксимації встає досить часто перед дослідниками і інженерами в різних областях науки і техніки. Області, де можна застосувати ті чи інші методи вирішення завдань наближення функцій і сигналів досить широкі і різноманітні [3]. Вони використовуються при виконанні математичних розрахунків, математичного моделювання; при проектуванні комунікаційного обладнання, систем технічного зору, високоякісного звуковідтворювального та медичного обладнання; застосовуються в економіці та соціології, а також у технічній діагностиці. У зв'язку з цим основними завданнями апроксимації даних у всіх вище перерахованих випадках є: знаходження математичного опису для дискретних даних, тобто встановлення залежності між виміряними відліками сигналів для подальшого прогнозування можливих значень вимірної величини у майбутньому; відновлення втрачених даних при передачі сигналів через наявність опору в електричному дроті або втрата пакетів при передачі через оптичні лінії зв'язку; відновлення вихідних даних у процесі кодування та декодування сигналів; розпізнавання зображень та їх покращення; відновлення при архівації та стисненні даних.

Отже, метою використання апроксимації у більшості випадків є відновлення втрачених вихідних даних, але в технічній діагностиці насамперед важливо спрогнозувати поведінку вимірюваного параметру у майбутньому для оцінки залишкового ресурсу. Проте в більшості технічних систем задача прогнозування є невирішеною, оскільки існуючий математичний апарат та

алгоритми апроксимації у деяких випадках виявляються неефективними і не дозволяють знайти аналітичний опис вимірюваної величини з достатньою швидкістю та точністю.

Тому розробка нових підходів до апроксимації даних вимірювань є надзвичайно важливою і актуальною задачею при прогнозуванні в системах багатокласової діагностики.

1.1 Апроксимація даних вимірювань

У наш час завдання апроксимації є актуальною темою практично для кожного технічного завдання. Від вибору виду апроксимації значною мірою залежать кількісні характеристики і якісні властивості опису досліджуваних об'єктів.

Апроксимація (від лат. *Approximo* – наближаюся) – заміна одного представлення даних на інше [4]. Апроксимація дозволяє досліджувати числові характеристики і якісні властивості об'єкта, зводячи завдання до вивчення більш простих або більш зручних об'єктів (наприклад, таких, характеристики яких легко обчислюються або властивості яких вже відомі).

Як правило, характеристики багатьох складних процесів та явищ отримують експериментально, набагато рідше вдається знайти їх теоретично. Для вивчення процесів, необхідно, насамперед, відобразити характеристики в математичній формі, придатній для розрахунків [5]. Простим і досить точним способом являється представлення характеристики у вигляді таблиці. Цей спосіб зручний для аналізу процесів за допомогою електронно обчислювальної машини (ЕОМ), аргумент і функція створюють в запам'ятовуючому пристрої двовимірний масив чисел. У ряді випадків характеристика реальних процесів і явищ мають складний вигляд і представляються у вигляді графіків.

Дуже часто безпосереднє застосування експериментальних даних у формі таблиць та графіків виявляється незручним, і дані прагнуть описати за допомогою простих аналітичних відношень, які хоча б якісно відображають

характер розглянутих залежностей [6]. У даному випадку необхідно вирішити задачу апроксимації, тобто замінити складну функцію (побудовану по експериментальним даним) наближеними аналітичними виразами.

Таким чином, якщо дослідження повинне проводитись не числовими, а аналітичними методами, то необхідно підібрати таку апроксимуючу функцію, яка буде доволі простою, але відобразатиме всі важливі особливості експериментально отриманої характеристики з достатнім ступенем точності [5].

Загальна задача апроксимації включає в себе два самостійних завдання [6,7]:

- 1) вибір класу апроксимуючої функції, яка найбільш точно описує вихідні дані;
- 2) визначення значень постійних коефіцієнтів, що входять в апроксимуючу функцію (визначення коефіцієнтів апроксимації).

Для вибору класу апроксимуючої функції, необхідно дотримуватись наступних вимог [7]:

- 1) простота функції (у сенсі математичних операцій і реалізації на ЕОМ);
- 2) достатня точність (похибка апроксимації повинна бути одного порядку з розкидом параметрів характеристик окремих реалізацій в ансамблі реалізацій);
- 3) наочність, яка дозволяє судити про зміну коефіцієнтів апроксимації при зміні характеристик процесу;
- 4) ясність розуміння процесів в явищі і виявленні властивостей і характеристик, що представляють інтерес у конкретному випадку.

Таким чином, функцію, яка апроксимує деяку характеристику, обирають або виходячи з фізичних уявлень про досліджуваний процес, або чисто формально, ґрунтуючись на зовнішній схожості характеристики з графічним зображенням тієї чи іншої функції [5]. Вимоги, які пред'являються до апроксимуючої функції, є суперечливими: забезпечуючи гарну якість наближення, вона повинна бути відносно простою і зручною для подальшого використання [8].

Аналітичні вирази, апроксимуючі характеристики процесів, для підвищення точності і достовірності аналізу повинні якомога точніше описувати хід реальних характеристик. Однак підвищення точності апроксимації призводить, як правило, до ускладнення апроксимуючих виразів, при цьому стає неможливим точне визначення значень коефіцієнтів, що входять у ці вирази, а аналіз процесів, де застосовуються ці вирази проходить з деякою похибкою [6].

У зв'язку з тим, що характеристики різних реалізацій (ансамблю реалізацій) процесу відрізняються один від одного за рахунок розкиду параметрів по реалізаціям і похибці вимірювань, недоцільно прагнути отримати апроксимуючі вирази, точність яких значно перевищує точність визначення окремих параметрів і межі їх розкиду по ансамблю реалізацій.

Таким чином, при вирішенні задачі апроксимації так само, як і при вирішенні будь-якої задачі, пов'язаної з вибором розрахункової моделі, необхідно йти на компроміс між точністю і складністю моделі [6].

Застосування апроксимації функцій досить різноманітне: знаходження математичного опису для дискретних даних, тобто встановлення залежності між виміряними відліками сигналів для подальшого прогнозування можливих значень вимірної величини у майбутньому; відновлення втрачених даних при передачі сигналів через наявність опору в електричному дроті або втрату пакетів при передачі через оптичні лінії зв'язку; відновлення вихідних даних в процесі кодування та декодування сигналів; розпізнавання зображень та їх покращення; відновлення при архівації та стисненні даних. Також, досить актуальною задачею є розробка нових підходів до апроксимації даних вимірювань при прогнозуванні в системах багатокласової діагностики.

1.2 Багатокласова діагностика

Технічна діагностика – галузь знань, що охоплює теорію, методи і засоби визначення технічного стану об'єкта чи системи [9]. Основним завданням

технічного діагностування є забезпечення безпеки, функціональної надійності та ефективності роботи технічного об'єкта.

Багатокласова діагностика відбувається на базі попереднього аналізу певних параметрів досліджуваного об'єкту. До кожного з цих параметрів відносяться певні ознаки. А також у кожного з них є якийсь клас, який можна передбачити за даними ознаками. Наприклад, нехай для діагностування працездатності виділено три класи:

- I. Допустиме значення параметру.
- II. Граничне значення параметру.
- III. Недопустиме значення параметру.

У залежності від значення параметру, його відносять до певного класу. Але виникає проблема – деякі параметри можуть розподілятися не тільки до одного класу. Тобто одна частина ознак підходить до одного класу, а інша частина – до другого.

Постає задача побудови вирішальної функції, яка по вектору ознак параметра буде вказувати, до якого класу він належить [10]. У більшості випадків необхідна так звана навчальна вибірка. Це набір прикладів, за допомогою яких точно відомо які параметри входять у клас. На основі цієї навчальної вибірки ми можемо побудувати вирішальну функцію, похибка якої мінімальна.

Для реалізації цієї задачі в наш час використовують нейронні мережі. Це автоматичні системи, які мають здатність до навчання [11]. В якості параметрів можуть виступати різні за своєю природою об'єкти: символи тексту, зображення, зразки звуків і т. д. При навчанні мережі пропонуються різні зразки параметрів із зазначенням того, до якого класу вони відносяться. Зразок, як правило, представляється як вектор значень ознак. При цьому сукупність усіх ознак повинна однозначно визначати клас, до якого належить зразок. Після закінчення навчання мережі, їй можна пред'являти невідомі раніше параметри і отримувати відповідь про належність до певного класу. Нейронні мережі з їх чудовою здатністю знаходити зміст у складних або неточних даних можуть

використовуватися для отримання шаблонів і виявлення тенденцій, які занадто складні, щоб їх помітили люди або інші комп'ютерні методи. Навчену нейронну мережу можна розглядати як «експерта» у категорії інформації, яку надано для аналізу. Потім цього «експерта» можна використовувати для створення прогнозів [12].

Нейронні мережі використовують інший підхід до вирішення проблем, ніж звичайні комп'ютери. У звичайних комп'ютерах використовується алгоритмічний підхід, тобто комп'ютер виконує набір інструкцій для вирішення проблеми. Відомо, що комп'ютери не можуть вирішити проблему, якщо не будуть відмічені конкретні кроки, які комп'ютер повинен виконати. Це обмежує можливості вирішення проблем на звичайних комп'ютерах, проблемами, які ми вже розуміємо і вміємо вирішити.

Нейронні мережі обробляють інформацію подібним чином у людському мозку. Мережа складається з великої кількості високо взаємопов'язаних елементів обробки (нейронів), що працюють паралельно для вирішення конкретної проблеми. Нейронні мережі навчаються на прикладі. Вони не можуть бути запрограмовані для виконання конкретного завдання. Недоліком є те, що мережа сама по собі виявляє, як вирішити проблему, тобто її операції можуть бути непередбачуваними [12].

Нейронні мережі можуть навчатися у будь-яких функцій, що дозволяє уникнути використання складного математичного апарату, а використання нелінійних функцій активації дозволяє вирішувати завдання з нелінійностями [13,14].

Нейронні мережі можуть застосовуватися:

- 1) для класифікації образів – вказівка приналежності вхідного образу (мовного сигналу, рукописного символу), представленого вектором ознак до певних класів;
- 2) для апроксимації функцій – знаходження оцінки невідомої функції;
- 3) для прогнозу – передбачення поведінки функції в деякий майбутній момент;

- 4) для оптимізації – знаходження рішення, що задовольняє систему обмежень, і максимізує або мінімізує цільову функцію;
- 5) для керування – розрахунок такого впливу, при якому система слідує по бажаній траєкторії.

Однією з найбільш чудових властивостей нейронних мереж є здатність апроксимувати і, більш того, бути універсальними апроксиматорами. За допомогою нейронних мереж можна апроксимувати як завгодно точно безперервні функції багатьох змінних [15].

У кінці 1980-х років американським математиком В. Крейновичем була доведена узагальнена апроксимаційна теорема: за допомогою лінійних операцій і каскадного з'єднання можна з довільного нелінійного елемента отримати пристрій, який обчислює будь-яку безперервну функцію з деякою наперед заданою точністю. Це означає, що нелінійна характеристика нейрона може бути довільною: від сигмоїдальної до довільного хвильового пакета, синуса або многочлена. Від вибору нелінійної функції може залежати складність конкретної мережі, але з будь-якою нелінійністю мережа залишається універсальним апроксиматором і при правильному виборі структури може досить точно апроксимувати отримані дані.

Таким чином, на основі нейронних мереж, виникає новий клас систем – системи багатокласової діагностики. Багатокласова діагностика широко використовується у вимірювальних системах, де важливу роль відіграє прогнозування технічного стану різноманітних об'єктів або їх найбільш відповідальних частин. Для здійснення прогнозування вихідний сигнал має містити тренд або математичну модель певного типу. Якщо відсутня очевидна аналітична залежність у вимірюваних даних, можна її наближено встановити за допомогою апроксимації. У наш час існує велика кількість методів апроксимації вимірюваних даних, які відрізняються сферою використання та формою кривих, які можна описати з їх допомогою. Тому необхідно провести огляд основних та найбільш використовуваних методів.

1.3 Огляд існуючих методів апроксимації даних

При виборі апроксимації слід виходити з конкретного завдання дослідження [16]. Зазвичай, чим простіше рівняння використовується для апроксимації, тим більш приблизним буде отриманий опис залежності. Тому важливо враховувати, наскільки істотні і чим зумовлені відхилення конкретних значень від отриманого тренду. При описі залежності емпірично визначених значень можна досягти і набагато більшої точності, використовуючи якесь складніше, багатопараметричне рівняння. Однак немає ніякого сенсу прагнути передати випадкові відхилення величин, в конкретних рядах емпіричних даних, з максимальною точністю. Набагато важливіше визначити загальну закономірність, яка в даному випадку найбільш логічно і з прийнятною точністю виражається саме двопараметричним рівнянням статичної функції. Таким чином, вибираючи метод апроксимації, дослідник завжди йде на компроміс: вирішує, чи в даному випадку доцільно і доречно «пожертвувати» деталями і, відповідно, наскільки узагальнено слід описати залежність зіставлюваних змінних. Поряд з виявленням закономірностей, замаскованих випадковими відхиленнями емпіричних даних від загальної закономірності, апроксимація дозволяє також вирішувати багато інших важливих завдань: формалізувати знайдену залежність; знайти невідомі значення залежної змінної шляхом інтерполяції або, якщо це допустимо, екстраполяції.

Умовно апроксимацію можна розділити на два види (рис.1.1) [17]:

- 1) суворі теорії математичної апроксимації;
- 2) фізична (технічна) апроксимація.

Суворі теорії математичної апроксимації включає в себе наступні методи апроксимації [17]:

- 1) поліномами (многочленами);
- 2) сплайнами;
- 3) відрізками ряду Фур'є;
- 4) поліномами по ортогональним многочленам;

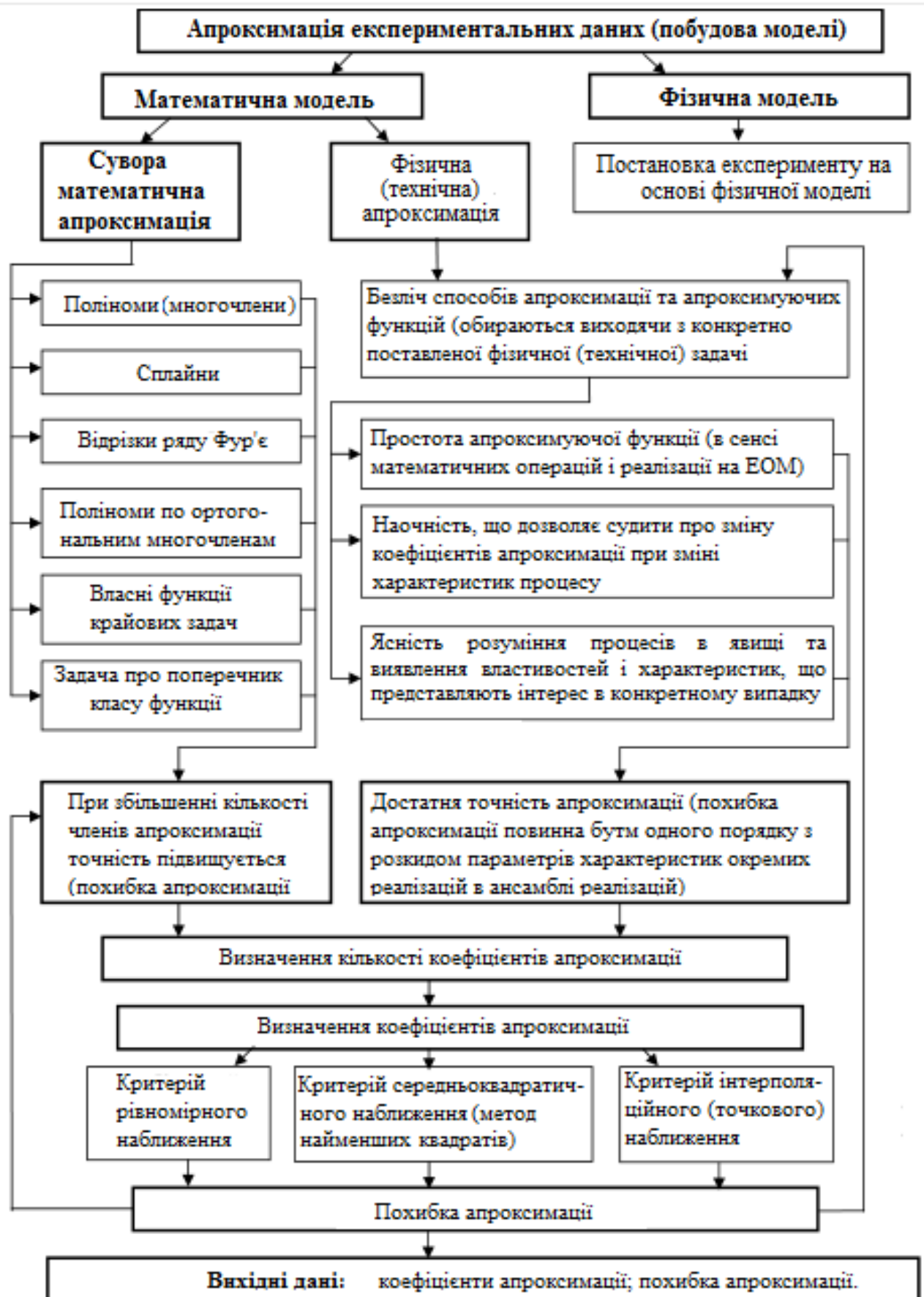


Рисунок 1.1 – Класифікація методів апроксимації експериментальних даних і побудова моделей

5) власними функціями крайових задач.

Суворі теорії математичної апроксимації будуються як фундаментальні, глобальні теорії апроксимації, які для вирішення поточних прикладних практичних завдань може і не знадобитися. Це може статися внаслідок або втрати з плином часу актуальності розв'язуваної задачі, або складності теорії (апроксимуючої функції), або великої кількості коефіцієнтів апроксимації.

Менш строга апроксимація – фізична (технічна) апроксимація або математична модель фізичного явища, процесу (фізичної моделі), технічного пристрою (його характеристик), сигналу (його параметрів), середовища, матерії, тощо. Фізична (технічна) апроксимація включає в себе безліч способів апроксимації і апроксимуючих функцій, які обирають виходячи з конкретно поставленого фізичного (технічного) завдання.

Таким чином, за допомогою фізичної (технічної) апроксимації оперативно вирішується широке коло завдань, актуальних на даний момент часу, пов'язаних з конкретними проблемами і питаннями прикладного (технічного) характеру.

Визначення коефіцієнтів апроксимації тісно пов'язане з необхідною точністю [13]. Точність визначається критеріями наближення, зазвичай застосовують критерії рівномірного, середньоквадратичного і інтерполяційного (точкового наближення). Якщо число заданих точок перевищує число визначених коефіцієнтів апроксимації, то можна використовувати метод найменших квадратів, при якому середньоквадратична помилка мінімальна. Метод найменших квадратів застосовується, коли необхідна висока точність апроксимації, вимагає громіздких обчислень, але має конструктивний підхід для аналітичного визначення коефіцієнтів моделі (апроксимації) [6]. Метод найменших квадратів забезпечує найменшу суму квадратів відхилень значень апроксимуючої функції від значень вихідної функції в довільному числі точок, не пов'язаному з числом невідомих коефіцієнтів.

Слід зазначити, що точність аналітичного уявлення досліджуваного явища буде тим вище, чим точніше модель, що описує дане явище. Очевидні вимоги, що пред'являються до вибору моделі явища при однаковій точності моделі –

найменша кількість коефіцієнтів моделі та її простота, виконання даних вимог сприяє зменшенню систематичної помилки [19] та часу обробки [20] експериментальних даних.

Точність апроксимації можна підвищити за рахунок попереднього використання алгоритмів інтерполяції для отримання більшої кількості відліків.

1.4 Методи інтерполяції

Для обчислення проміжних значень функції використовується апарат інтерполяції. При ньому справжня функція замінюється апроксимуючою функцією, яка в вузлових точках дає точні значення ординат і дозволяє обчислити значення інтерпольованої функції в проміжних точках [21].

Інтерполяція знаходить широке застосування в наукових дослідженнях та інженерній практиці. Областями застосування являються:

- 1) Моделювання.
- 2) Планування і статистична обробка експерименту.
- 3) Визначення значень функції при аргументах, які відсутні в таблиці даних.
- 4) Табулювання функції.
- 5) Подання складної функції в більш простому вигляді в визначених границях значень її аргументів [22].
- 6) У всіх інших випадках, де потрібно виконати наближення одних функцій іншими, більш простими, з допустимою для практики точністю.
- 7) Коли необхідно знайти з високою точністю математичну модель об'єкта, характеристики якої отримані експериментально.

Існує велика кількість методів інтерполяції [23]. Їх можна розділити на локальні і глобальні (рис.1.2). У разі локальної інтерполяції на кожному інтервалі будується окремий поліном. У разі глобальної інтерполяції відшукується єдиний поліном на всьому інтервалі.

Найпростішим і часто використовуваним видом локальної інтерполяції є лінійна (або кусочно-лінійна) інтерполяція [23]. Вона полягає в тому, що вузлові точки з'єднуються відрізками прямих, тобто через кожні дві сусідні точки проводиться пряма.

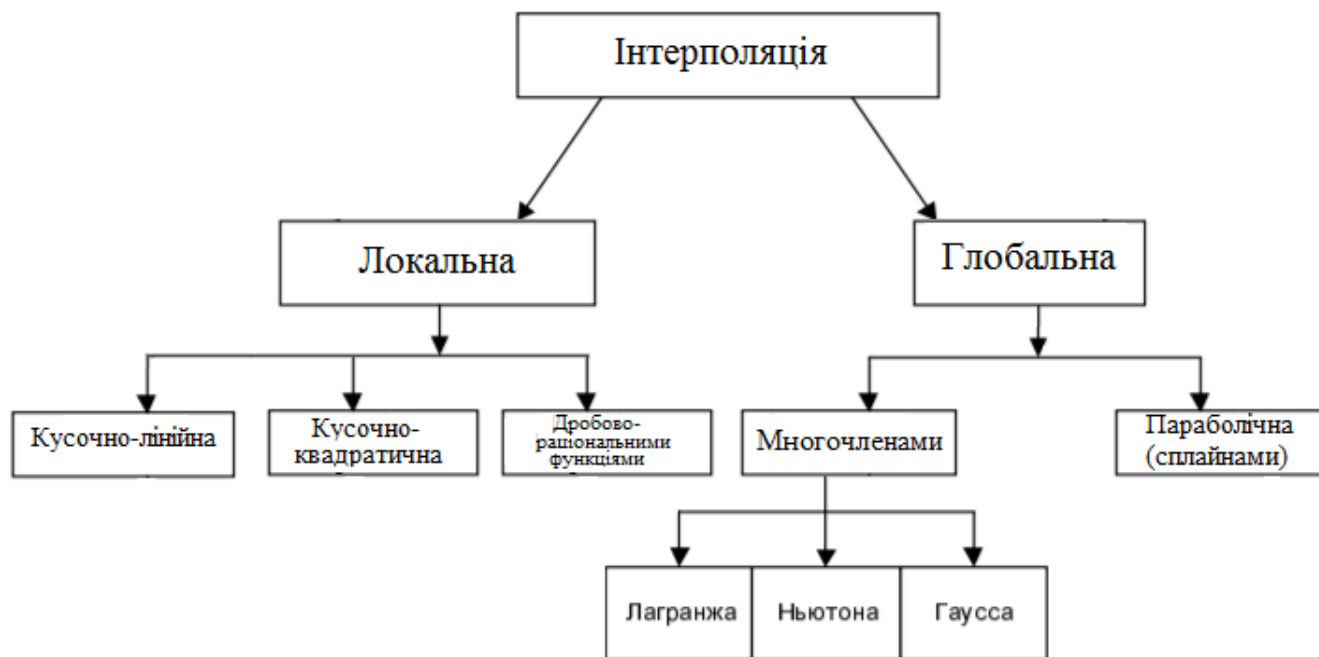


Рисунок 1.2 – Класифікація методів інтерполяції

Квадратична інтерполяція складніше лінійної, але вона забезпечує більш високу якість [24]. В якості інтерполяційної функції приймається квадратний тричлен. Квадратична інтерполяція зважаючи на можливу виродженість параболи (перетворення її в пряму) вимагає обчислень з подвоєною точністю для зменшення машинних помилок, пов'язаних з кінцевою розрядною сіткою ЕОМ.

Для побудови інтерполяційних поліномів на заданих інтерполяційних вузлах застосовуються різні алгоритми [25]. Поліноми, які за цими алгоритмами утворюються, називаються поліномами Лагранжа, Ньютона, Гаусса та ін. Усі вони відносяться до глобальної інтерполяції. Але, незалежно від їх різних конструктивних особливостей, канонічна форма всіх цих поліномів на даних інтерполяційних вузлах і відповідних значеннях функції буде однією і тією ж.

Таким чином, при поліноміальній інтерполяції задача зводиться до найбільш простого випадку – рішення системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

Сплайни мають кращі апроксимаційні властивості, які забезпечують мінімальну похибку [25]. Найбільш відомі сплайни, що складаються з фрагментів алгебраїчних поліномів не вище заданої степені. Як правило, це кубічні поліноми, або поліноми непарних степенів. Лінійний, кубічний, п'ятої степені. Вищі степені застосовуються не часто, зважаючи на ускладнення розрахунків [26]. Доцільність застосування певного виду сплайна ґрунтується на конкретних умовах задачі та обмеженнях реалізації [25]. Як правило основними вимогами є досягнення заданої точності апроксимації за прийнятих затрат часу та ресурсів на реалізацію. Таким чином, сплайн має наступні особливості [27]:

- 1) графік функції інтерполяції проходить точно через вузлові точки кожного сплайну;
- 2) у вузлових точках розриви функції і її похідних відсутні;
- 3) сплайни забезпечують високу точність інтерполяції на всьому діапазоні.

У порівнянні з многочленами і сплайнами існує більш універсальний метод інтерполяції. Це інтерполяція дробово-раціональними функціями. Їх використовують коли варто адекватно відобразити властивості функції, пов'язані з різкими скачками, западинами, якщо функція не є обмеженою на скінченному проміжку.

Це лише невеликий перелік інтерполяційних функцій та їх можливостей. Для більш широкого розуміння стану проблеми необхідно виконати огляд робіт інших авторів.

1.5 Огляд досвіду інших авторів

В останні роки багато сучасних алгоритмів інтерполяції були розроблені і розвинені різними дослідниками. Вони вдосконалювали відомі методи та знаходили нові шляхи для підвищення точності інтерполяції.

Автор роботи [4] почав вивчення нового питання теорії наближень – завдання про знаходження при фіксованому n такої системи функцій $\varphi_1, \dots, \varphi_n$, для якої найкращі наближення функцій заданого класу поліномами $\sum_{k=1}^n a_k \varphi_k(x)$ були б найменшими. У цьому напрямку в подальшому було з'ясовано, наприклад, що для ряду важливих класів періодичних функцій найкращими у вказаному сенсі системами є тригонометричні поліноми.

У джерелі [25] автор доводить, що інтерполяційні формули Лагранжа, Ньютона, Гаусса та ін. при використанні великої кількості вузлів інтерполяції часто призводять до поганого наближення через накопичення похибок в процесі обчислень. Крім того, через розбіжність процесу інтерполяції збільшення числа вузлів не обов'язково призводить до підвищення точності. Суттєво знизити похибку можна шляхом інтерполяції функції множиною поліномів невисокого порядку на вузьких інтервалах всього інтервалу інтерполяції.

У роботі [28] представлено метод інтерполяції даних кубічними сплайнами. Отримані результати розповсюджуються на випадок, коли похідні напрямку і кривизни не сприймаються в якості даних, а отримані деяким локальним наближенням або передбачені вимогами форми.

Автор статті [29] розробив метод інтерполяції з частинами розкладання по двом радіальним базисним функціям, для наближення функцій з полюсами. Метод був розроблений для застосування в антенних конструкціях, показано на прикладах, що матриця розсіювання для патч-антени, як функція деяких конструктивних параметрів може бути точно апроксимована новим методом.

У роботі [30] побудовано двовимірний раціональний метод інтерполяції з використанням як значень функцій, так і часткових похідних інтерпольованої функції в якості даних інтерполяції. Подальші дослідження автори представили у роботах [31-33], де створили нову раціональну інтерполяцію з біквдратичним знаменником, використовуючи тільки значення інтерпольованої функції; розробили двовимірну раціональну інтерполяцію Ерміта для створення просторової поверхні з використанням як значень функцій, так і частинних похідних функції першого порядку; представили зважену раціональну кубічну

сплайн-інтерполяцію з використанням двох видів раціональних кубічних сплайнів з квадратичним знаменником.

Порівняльна характеристика операторів інтерполяції внутрішніх просторів, для нерівномірно розподілених даних, наведена у роботі [34]. Перший – відомий поліноміальний оператор, який у певному сенсі узагальнює класичний інтерполяційний многочлен Лагранжа. Другий – можна отримати шляхом модифікації першого. Чисельні випробування та міркування щодо помилок показують, що обидва оператори мають дуже різні апроксимаційні характеристики і за допомогою відповідних модифікацій обидва можуть забезпечити бажаний результат.

Автори роботи [35] представили метод збереження контурів зображення, на основі адаптивної осциляторної раціональної інтерполяційної функції, яка будується шляхом апроксимації ідеальної інтерполюючої функції ядра безперервними дробами. Це більш точне значення для ідеальної інтерполяції в просторовій або частотній області, ніж інші лінійні поліноміальні інтерполяційні функції ядра. Також представлені результати моделювання, що демонструють чудову продуктивність збільшення чіткості зображення.

У роботі [36] розробники ввели, основані на блоці, зворотні відмінності, щоб розширити точкову інтерполяцію Тіле до раціональної інтерполяції, пов'язаної з блокуванням Тіле-подібним способом. Процес побудови можна охарактеризувати наступним чином: перш за все, розділити вихідний набір опорних точок на деякі підмножини (блоки), потім побудувати кожен блок, використовуючи будь-які засоби інтерполяції, лінійні або раціональні, і, нарешті, зібрати ці блоки методом Тіле сформувати всю інтерполяційну схему. Ясно, що в цьому випадку можна отримати безліч гнучких схем раціональної інтерполяції, включаючи класичну інтерполяцію безперервної фракції Тіле, як її окремий випадок. В якості продовження обговорюється двовимірна аналогія і наводяться чисельні приклади, що показують ефективність цього методу.

У роботі [37] розглядається проблема збереження форми даних. Автори досліджували інтерполяцію, яка використовується для позитивних, монотонних і

опуклих функцій з використанням раціонального кубічного сплайна. Розроблена раціональна сплайн-схема має унікальне представлення, вона має два сімейства параметрів форми. Схема автоматична, користувачеві не потрібно турбуватися про пошук і вибір відповідного набору параметрів, як у випадку звичайного раціонального сплайна.

У роботі [38] представлено метод інтерполяції з використанням пари раціональних спіралей для вирішення планарної та двоточнової задачі інтерполяції Ерміта. Спіральні сегменти, які використовуються, обмежені нульовою кривизною на одному кінці. Цей метод доцільний коли виникає необхідність інтерполяції між двома точками монотонної функції, при відомих тангенсах кутів нахилу в цих точках.

Автори роботи [39] використали кусочно-раціональну кубічну функцію для візуалізації даних, розташованих по прямокутній сітці. Схема цього методу отримана шляхом накладання деяких обмежень на параметри при описі раціонального бікубічного сплайна, тоді як інші параметри залишаються у розпорядженні користувачів.

Новий підхід до одновимірної напівкардинальної інтерполяції для природних кубічних сплайнів представлено у роботі [40]. Як результат, отримано рішення основане на методі полінома Лагранжа з відповідними локалізаційними та поліноміальними властивостями.

Автори роботи [41] застосували теорему Нь'єстера про кусочно-алгебраїчні криві на перехресних розділеннях. А також використовуючи інтерполяцію уздовж кусочно-алгебраїчної кривої, вони представили метод побудови інтерполяційних множин Лагранжа для двовимірних сплайн-просторів на перехресних розділеннях.

У роботі [42] автори описали апроксимуюче рішення на основі інтерполяції поліномом Лагранжа та сплайн функції для аналізу функціональних інтегральних рівнянь типу Фредгольма. Цей метод поширюється на функціональні інтегральні рівняння.

У статті [43] автор використовує нейронні мережі для апроксимації складних характеристик, наприклад таких, як частотні залежності параметрів частотно-вибіркових НВЧ пристроїв. Точність такої апроксимації на пряму залежить від належного вибору конфігурації та методу навчання нейронної мережі. Збільшення шарів нейронної мережі призводить до значного покращення її апроксимаційних характеристик.

Отже, огляд робіт інших авторів у сфері апроксимації та інтерполяції функцій показав, що розроблено потужний математичний апарат, який може використовуватися для вирішення широкого кола задач. Але основна маса досліджень – це строга теорія математичної апроксимації, тобто розробка фундаментальних математичних положень. Використання технічної апроксимації зосереджено в основному навколо відновлення втрачених вихідних даних, але в технічній діагностиці насамперед важливо спрогнозувати поведінку вимірюваного параметру у майбутньому для оцінки залишкового ресурсу.

Інтерполяція найчастіше використовується у технічних системах для розпізнавання образів та покращення їх якості. Проте використання інтерполяції також не позбавлене своїх недоліків, пов'язаних з поганим наближенням через накопичення похибок в процесі обчислень при великій кількості вузлів інтерполяції. Досить широко в останній час стали використовуватися нейронні мережі, але у діагностичних системах вони частіше за все виступають у ролі класифікаторів стану об'єкта, а не апроксиматорами.

Усе це дозволило сформулювати мету досліджень та завдання, які необхідно вирішити для досягнення цієї мети.

1.6 Мета і завдання досліджень

Метою роботи є розробка алгоритмічного та програмного забезпечення апроксимації даних вимірювань за допомогою попереднього використання алгоритмів інтерполяції, а також рекомендації щодо його ефективного використання в системах багатокласової діагностики.

Досягнення мети передбачає вирішення наступних задач:

- огляд та вибір методу апроксимації даних для системи багатокласової діагностики;
- огляд існуючих методів інтерполяції;
- дослідження ефективності різних інтерполяційних алгоритмів при використанні ідеальних (змодельованих) сигналів різної фізичної природи;
- розробка алгоритмічного забезпечення апроксимації даних за рахунок попереднього використання методів інтерполяції;
- розробка програмного забезпечення апроксимації даних в математичному пакеті MATLAB або на інших мовах програмування;
- розробка рекомендацій щодо ефективного використання розробленого програмного забезпечення в системах багатокласової діагностики.

РОЗДІЛ 2

ІНТЕРПОЛЯЦІЯ ЗМОДЕЛЬОВАНИХ ІДЕАЛЬНИХ СИГНАЛІВ

Існує багато методів інтерполяції. Деякі з них є дуже гнучкими і можуть застосовуватися до різних даних. Інші є більш обмеженими і вимагають, щоб дані відповідали певним умовам. Кожен з цих методів має власний набір параметрів, що дозволяє його налаштувати для конкретного набору даних [44].

У даному розділі буде розглянуто один з перших та найпростіших методів інтерполяції – метод Лагранжа. Проведено аналіз даного методу, що включає: опис, алгоритм інтерполяції у вигляді блок-схеми, реалізація алгоритму у програмному середовищі математичного пакету Matlab. Також проведено порівняльний аналіз результатів інтерполяції для ідеальних (змодельованих) знакозмінних сигналів різної природи (періодичного та неперіодичного)

2.1 Інтерполяційний метод Лагранжа

Інтерполяційний поліном Лагранжа – многочлен мінімальної степені, що приймає необхідні значення в даному наборі точок. Для $n+1$ пар чисел $(x_0, y_0), (x_1, y_1) \dots (x_n, y_n)$, де всі x_j різні, існує єдиний многочлен $L(x)$ ступеня не більше n , для якого $L(x_i) = y_i$ [45].

Інтерполяційний многочлен будується у вигляді лінійної комбінації многочленів степені n [46]:

$$L(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) + \dots + y_n l_n(x) \quad (2.1)$$

При цьому необхідно, щоб кожен многочлен $l_i(x)$ перетворювався в нуль у всіх вузлах інтерполяції, за виключенням одного (i -го), де він повинен дорівнювати одиниці. Цим умовам при $i=0$ відповідає многочлен виду:

$$l_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\dots(x_0-x_n)} \quad (2.2)$$

По аналогії з (2.2) отримаємо:

$$l_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\dots(x_1-x_n)}$$

$$l_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)\dots(x-x_n)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)\dots(x_2-x_n)}$$

.....

$$l_i(x) = \frac{(x-x_0)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)}$$

.....

$$l_n(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\dots(x_n-x_{n-1})} \quad (2.3)$$

Підставимо в (2.1) вирази (2.2), (2.3), отримаємо:

$$L(x) = \sum_{i=0}^n y_i \frac{(x-x_0)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)} \quad (2.4)$$

Ця формула визначає інтерполяційний многочлен Лагранжа.

Виходячи з вищезазначеної формули, визначимо недоліки методу [47]:

- оскільки степінь многочлена Лагранжа визначається кількістю вузлів (мінус 1), то будь-яка спроба підвищити точність інтерполяції шляхом збільшення кількості вузлів тягне за собою збільшення ступеня полінома;
- формула для розрахунку досить громіздка. Кожна складова формули є многочленом n-го ступеня;
- якщо степінь полінома вище 5, то на кривій з'являється "хвилястість", яка отримала назву ефекту Рунге-Мерей. Можливо поліпшити ситуацію шляхом підбору розташування вузлів в залежності від конкретної функції в інтерактивному режимі, але така процедура досить незручна.

Незважаючи на громіздкість формули (2.4), однією з переваг формули Лагранжа є можливість її запису безпосередньо по заданій таблиці значень функції. Для цього слід врахувати наступне правило: формула містить стільки доданків, скільки вузлів в таблиці; кожен доданок - це добуток дрібного коефіцієнта на відповідне значення y_i ; чисельник коефіцієнта при y_i містить добуток різниць x з усіма вузлами крім x_i а знаменник повністю повторює чисельник при $x=x_i$.

Блок-схема алгоритму інтерполяції поліномом Лагранжа представлена на рис.2.1 [48].

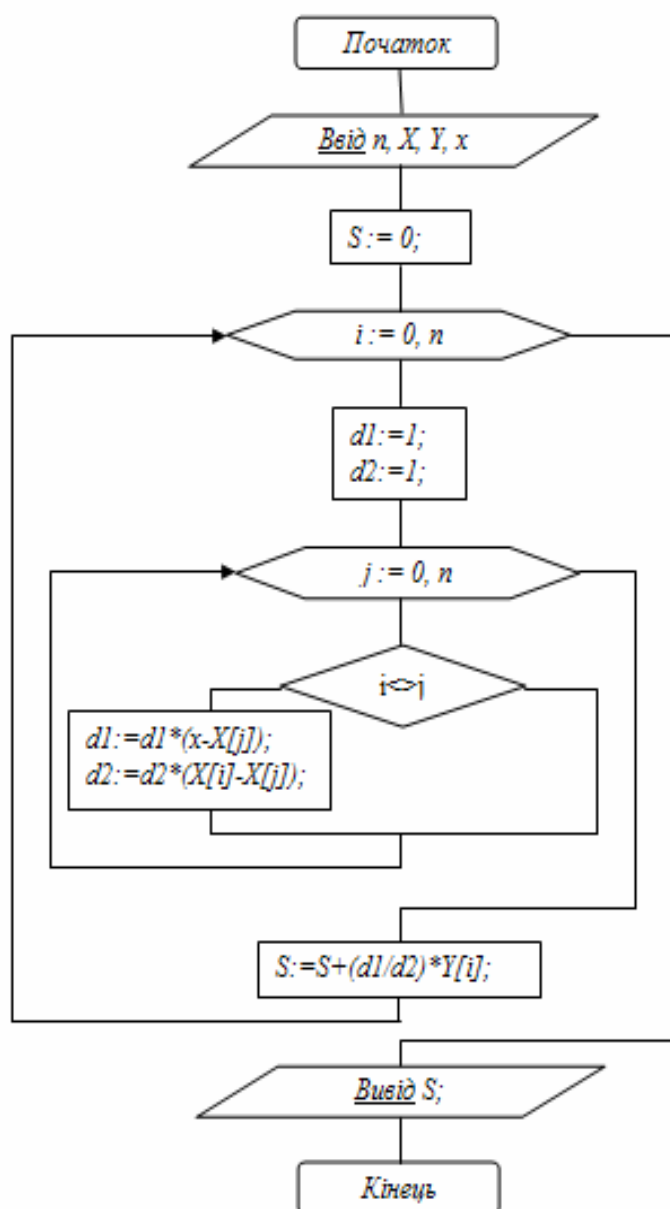


Рисунок 2.1 – Блок-схема алгоритму обчислення многочлена Лагранжа

2.2 Інтерполяція методом Лагранжа

2.2.1 Дослідження гармонічної функції з частотою 20Гц

Для подальших досліджень оберемо метод поліномів Лагранжа. У даному підрозділі буде проведено інтерполяцію поліномами Лагранжа гармонічної функції, як однієї з найбільш складних функцій (за рахунок наявності знакозмінного характеру) для апроксимації, особливо методом найменших квадратів (див. Розділ 3).

Перший етап дослідів включає в себе моделювання гармонічної функції з частотою 20Гц виду:

$$y = a + b \sin(cx) \quad (2.10)$$

де a , b , c – константи;

a – постійна складова сигналу або його математичне сподівання;

b – характеризує амплітуду коливань;

$c = 2\pi f$, де f – циклічна частота сигналу, Гц.

Функція (2.10) буде містити N відліків ($N=512, 1024, 2048, 4096, 8192$). При цьому у вигляді змінних параметрів обрано кількість періодів гармонічного сигналу ($p=1, 2, 3, 4, 5, 6$) та кількість вузлів, необхідних для інтерполяції ($n=5, 9, 17, 33, 65$).

Для початку необхідно визначити оптимальну кількість вузлів інтерполяції. Критерієм вибору оптимального значення вузлів є мінімум максимального значення відносної похибки. Кожне дослідження буде проходити за умови, що у заданій кількості періодів початкового сигналу міститься вказана кількість відліків. Наприклад: а) 1024 відліки в одному періоді; б) 1024 відліки в двох періодах; і так далі.

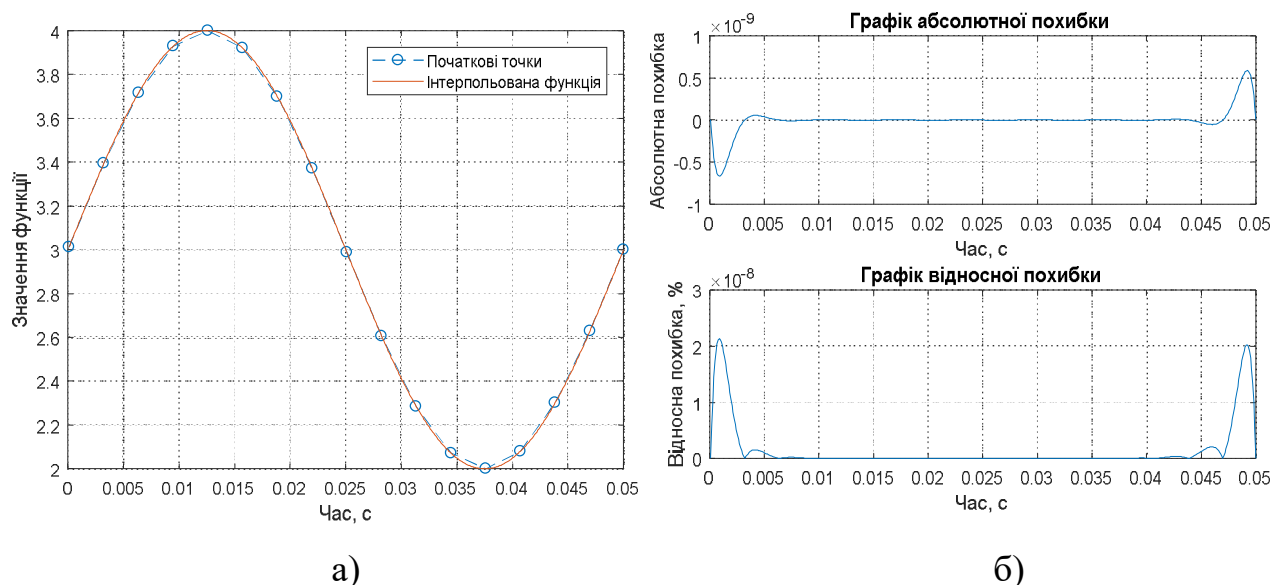
Отримані результати при $p=1$, $N=512$ та частоті дискретизації $f_x=10240$ Гц наведено у табл. 2.1.

Таблиця 2.1 – Дослідження похибки для різної кількості вузлів

Кількість вузлів інтерполяції	Максимальне значення відносної похибки
65	1012,9%
33	$4,5797 \cdot 10^{-7}\%$
17	$2,1372 \cdot 10^{-8}\%$
9	0,0414%
5	7,3052%

З результатів дослідження можна зробити висновок, що для 17 вузлів похибка найменша і складає $2,1372 \cdot 10^{-8}\%$. Графіки інтерпольованого сигналу та отриманих похибок зображено на рис. 2.3.

На графіках буде відображено тільки випадок з найменшим значенням максимуму відносної похибки.

Рисунок 2.3 – Результати моделювання при $p=1$, $N=512$ та частоті дискретизації

$f_x=10240$ Гц: а) графік функції; б) графік похибок

Отримані результати при $p=2$, $N=512$ та частоті дискретизації $f_x=5120$ Гц наведено у табл. 2.2.

Таблиця 2.2 – Дослідження похибки для різної кількості вузлів

Кількість вузлів інтерполяції	Максимальне значення відносної похибки
65	866,0951%
33	$4,9548 \cdot 10^{-7}\%$
17	0,0019%
9	10,5739%
5	50,4108%

З результатів дослідження можна зробити висновок, що для 33 вузлів похибка найменша і складає $4,9548 \cdot 10^{-7}\%$. Графіки інтерпольованого сигналу та отриманих похибок зображено на рис. 2.4.

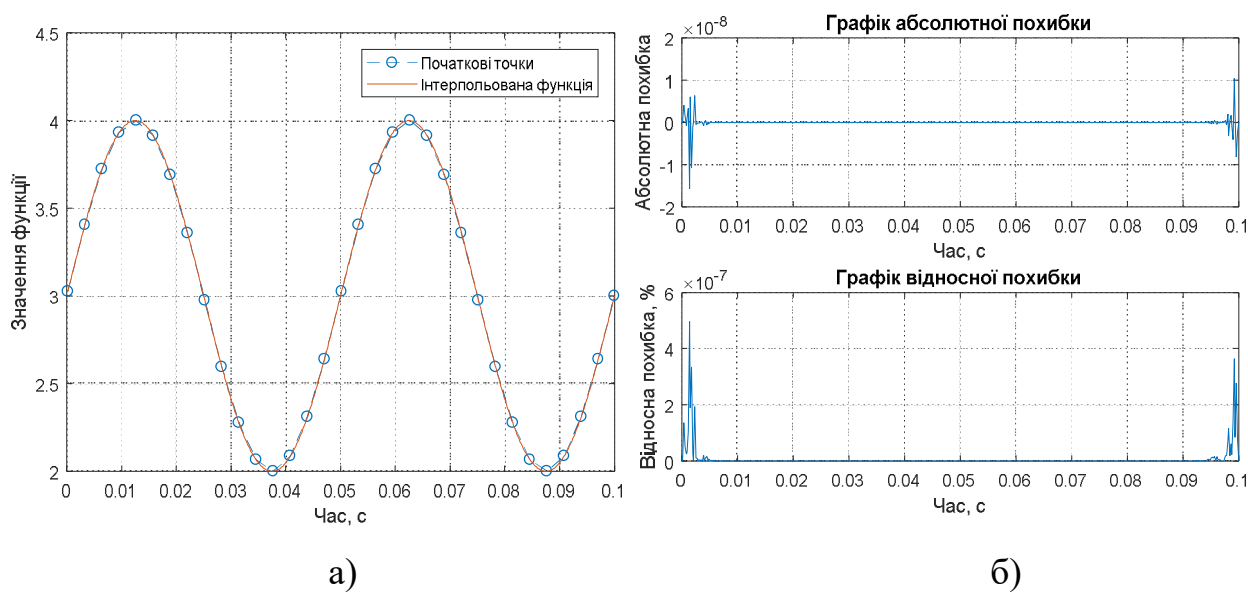


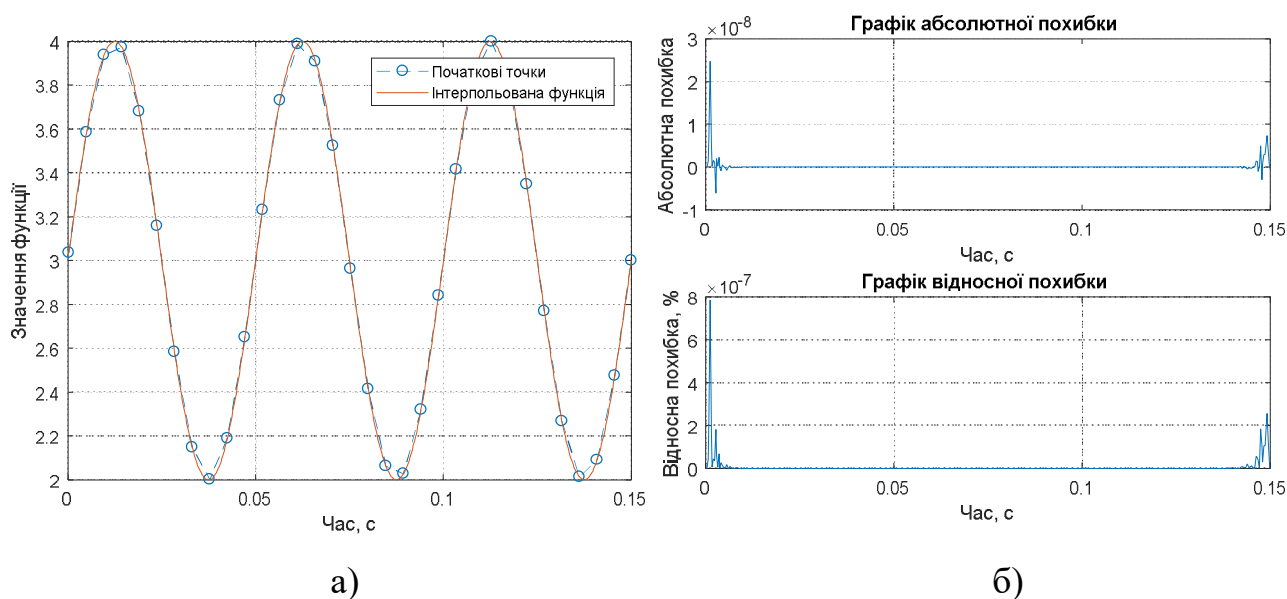
Рисунок 2.4 – Результати моделювання при $p=2$, $N=512$ та частоті дискретизації $f_x=5120$ Гц: а) графік функції; б) графік похибок

Отримані результати при $p=3$, $N=512$ та частоті дискретизації $f_x=3413,33$ Гц наведено у табл. 2.3.

З результатів дослідження можна зробити висновок, що для 33 вузлів похибка найменша і складає $7,8431 \cdot 10^{-7}\%$. Графіки інтерпольованого сигналу та отриманих похибок зображено на рис. 2.5.

Таблиця 2.3 – Дослідження похибки для різної кількості вузлів

Кількість вузлів інтерполяції	Максимальне значення відносної похибки
65	1113%
33	$7,8431 \cdot 10^{-7}\%$
17	1,0449%
9	98,466%
5	86,1196%

Рисунок 2.5 – Результати моделювання при $p=3$, $N=512$ та частоті дискретизації $f_x=3413,33$ Гц: а) графік функції; б) графік похибок

Отримані результати при $p=4$, $N=512$ та частоті дискретизації $f_x=2560$ Гц наведено у табл. 2.4.

Таблиця 2.4 – Дослідження похибки для різної кількості вузлів

Кількість вузлів інтерполяції	Максимальне значення відносної похибки
65	703,6048%
33	$1,1396 \cdot 10^{-5}\%$
17	58,234%

Продовження таблиці 2.4

Кількість вузлів інтерполяції	Максимальне значення відносної похибки
9	56,1656%
5	52,5484%

З результатів дослідження можна зробити висновок, що для 33 вузлів похибка найменша і складає $1,1396 \cdot 10^{-5}\%$. Графіки інтерпольованого сигналу та отриманих похибок зображено на рис. 2.6.

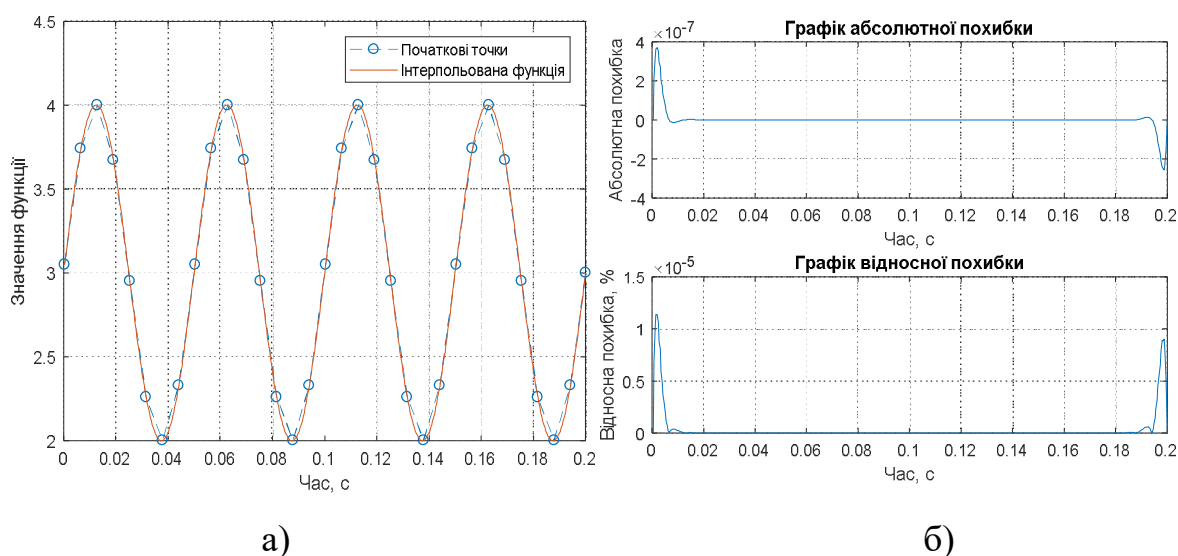


Рисунок 2.6 – Результати моделювання при $p=4$, $N=512$ та частоті дискретизації $f_x=2560$ Гц: а) графік функції; б) графік похибок

Отримані результати при $p=5$, $N=512$ та частоті дискретизації $f_x=2048$ Гц наведено у табл. 2.5.

Таблиця 2.5 – Дослідження похибки для різної кількості вузлів

Кількість вузлів інтерполяції	Максимальне значення відносної похибки
65	1191,7%
33	0,0106%
17	780,2773%

Продовження таблиці 2.5

Кількість вузлів інтерполяції	Максимальне значення відносної похибки
9	215,7521%
5	99,3848%

З результатів дослідження можна зробити висновок, що для 33 вузлів похибка найменша і складає 0,0106%.

Отримані результати при $p=6$, $N=512$ та частоті дискретизації $f_x=1706,67$ Гц наведено у табл. 2.6.

Таблиця 2.6 – Дослідження похибки для різної кількості вузлів

Кількість вузлів інтерполяції	Максимальне значення відносної похибки
65	977,3028%
33	2,2872%
17	3378,7%
9	79,3792%
5	53,3239%

З результатів дослідження можна зробити висновок, що для 33 вузлів похибка найменша і складає 2,2872%.

2.2.2 Дослідження гармонічної функції з частотою 200Гц

Для порівняння збільшимо частоту синусоїди в десять разів, тобто для подальших досліджень використаємо синусоїду з частотою 200 Гц. Оскільки графіки інтерполяції отримані у даному дослідженні мають схожий характер з попереднім випадком, то вони наведені не будуть.

З результатів дослідження, отриманих при $p=1$, $N=512$ та частоті дискретизації $f_x=102400$ Гц, можна зробити висновок, що для 17 вузлів похибка

найменша і складає $2,1391 \cdot 10^{-8}\%$.

З результатів дослідження, отриманих при $p=2$, $N=512$ та частоті дискретизації $f_x=51200$ Гц, можна зробити висновок, що для 33 вузлів похибка найменша і складає $4,201 \cdot 10^{-7}\%$.

З результатів дослідження, отриманих при $p=3$, $N=512$ та частоті дискретизації $f_x=34133,33$ Гц, можна зробити висновок, що для 33 вузлів похибка найменша і складає $3,97 \cdot 10^{-7}\%$.

З результатів дослідження, отриманих при $p=4$, $N=512$ та частоті дискретизації $f_x=25600$ Гц, можна зробити висновок, що для 33 вузлів похибка найменша і складає $1,1421 \cdot 10^{-5}\%$.

З результатів дослідження, отриманих при $p=5$, $N=512$ та частоті дискретизації $f_x=20480$ Гц, можна зробити висновок, що для 33 вузлів похибка найменша і складає $0,0106\%$.

З результатів дослідження, отриманих при $p=6$, $N=512$ та частоті дискретизації $f_x=17066,67$ Гц, можна зробити висновок, що для 33 вузлів похибка найменша і складає $2,2872\%$.

Враховуючи той факт, що для 512 відліків, у більшості випадків найкращий результат був отриманий (як і у випадку синусоїди з частотою 20Гц) при виборі 33 вузлів інтерполяції, зведемо усі дані в загальну таблицю.

2.3 Порівняння результатів досліджень

Додатково було проведено дослідження гармонічної функції з частотою 2Гц. Усі отримані значення похибок було зведено в таблиці (табл. 2.7-табл. 2.12).

Таблиця 2.7 – Результати моделювання для одного періоду

1	2	3	4	5	6
Кількість вузлів	512	1024	2048	4096	8192
Частота сигналу f , Гц	Відносна похибка (5 вузлів інтерполяції), %				

Продовження таблиці 2.7

1	2	3	4	5	6
2Гц	7.3052	7.4028	7.4518	7.4763	7.4886
200Гц	7.3052	7.4028	7.4518	7.4763	7.4886
Частота сигналу f , Гц	Відносна похибка (9 вузлів інтерполяції), %				
2Гц	0.0414	0.0425	0.0431	0.0434	0.0436
20Гц	0.0414	0.0425	0.0431	0.0434	0.0436
200Гц	0.0414	0.0425	0.0431	0.0434	0.0436
Частота сигналу f , Гц	Відносна похибка (17 вузлів інтерполяції), %				
2Гц	$2.14 \cdot 10^{-8}$	$2.16 \cdot 10^{-8}$	$2.23 \cdot 10^{-8}$	$2.26 \cdot 10^{-8}$	$2.28 \cdot 10^{-8}$
20Гц	$2.14 \cdot 10^{-8}$	$2.16 \cdot 10^{-8}$	$2.23 \cdot 10^{-8}$	$2.26 \cdot 10^{-8}$	$2.28 \cdot 10^{-8}$
200Гц	$2.14 \cdot 10^{-8}$	$2.16 \cdot 10^{-8}$	$2.23 \cdot 10^{-8}$	$2.26 \cdot 10^{-8}$	$2.28 \cdot 10^{-8}$
Частота сигналу f , Гц	Відносна похибка (33 вузлів інтерполяції), %				
2Гц	$5.63 \cdot 10^{-7}$	$3.83 \cdot 10^{-7}$	$5.8 \cdot 10^{-7}$	$6.2 \cdot 10^{-7}$	$7.31 \cdot 10^{-7}$
20Гц	$4.96 \cdot 10^{-7}$	$6.33 \cdot 10^{-7}$	$8.2 \cdot 10^{-7}$	$6.17 \cdot 10^{-7}$	$9.96 \cdot 10^{-7}$
200Гц	$3.98 \cdot 10^{-7}$	$3.6 \cdot 10^{-7}$	$8.68 \cdot 10^{-7}$	$8.01 \cdot 10^{-7}$	$9.75 \cdot 10^{-7}$
Частота сигналу f , Гц	Відносна похибка (65 вузлів інтерполяції), %				
2Гц	1099.3	1167.5	1239.6	1520.5	1373.3
20Гц	866.0951	754.4895	664.4495	1529.9	1333.9
200Гц	1020	709.0207	1213.7	932.7034	1436.3

Таблиця 2.8 – Результати моделювання для двох періодів

1	2	3	4	5	6
Кількість вузлів	512	1024	2048	4096	8192
Частота сигналу f , Гц	Відносна похибка (5 вузлів інтерполяції), %				
2Гц	50.4108	50.2106	50.1066	50.0536	50.0269
20Гц	50.4108	50.2106	50.1066	50.0536	50.0269
200Гц	50.4108	50.2106	50.1066	50.0536	50.0269

Продовження таблиці 2.8

1	2	3	4	5	6
Частота сигналу f , Гц	Відносна похибка (9 вузлів інтерполяції), %				
2Гц	10.5739	10.9346	11.1181	11.2106	11.257
20Гц	10.5739	10.9346	11.1181	11.2106	11.2570
200Гц	10.5739	10.9346	11.1181	11.2106	11.257
Частота сигналу f , Гц	Відносна похибка (17 вузлів інтерполяції), %				
2Гц	0.0019	0.002	0.0021	0.0021	0.0022
20Гц	0.0019	0.002	0.0021	0.0021	0.0022
200Гц	0.0019	0.002	0.0021	0.0021	0.0022
Частота сигналу f , Гц	Відносна похибка (33 вузлів інтерполяції), %				
2Гц	$3.46 \cdot 10^{-7}$	$5.59 \cdot 10^{-7}$	$5.67 \cdot 10^{-7}$	$7.1 \cdot 10^{-7}$	$7.22 \cdot 10^{-7}$
20Гц	$4.95 \cdot 10^{-7}$	$6.33 \cdot 10^{-7}$	$8.2 \cdot 10^{-7}$	$6.17 \cdot 10^{-7}$	$9.96 \cdot 10^{-7}$
200Гц	$4.2 \cdot 10^{-7}$	$4.12 \cdot 10^{-7}$	$7.83 \cdot 10^{-7}$	$6.89 \cdot 10^{-7}$	$8.51 \cdot 10^{-7}$
Частота сигналу f , Гц	Відносна похибка (65 вузлів інтерполяції), %				
2Гц	1054.6	1050.4	964.7692	1394.2	1544.5
20Гц	866.0951	754.4895	664.4495	1529.9	1333.9
200Гц	930.8113	595.3004	1363.1	1007.6	1163.9

Таблиця 2.9 – Результати моделювання для трьох періодів

1	2	3	4	5	6
Кількість вузлів	512	1024	2048	4096	8192
Частота сигналу f , Гц	Відносна похибка (5 вузлів інтерполяції), %				
2Гц	86.1196	85.6318	85.3818	85.2552	85.1912

Продовження таблиці 2.9

1	2	3	4	5	6
20Гц	86.1196	85.6318	85.3818	85.2552	85.1912
200Гц	86.1196	85.6318	85.3818	85.2552	85.1912
Частота сигналу f , Гц	Відносна похибка (9 вузлів інтерполяції), %				
2Гц	98.466	103.4896	106.0601	107.3592	108.0114
20Гц	98.466	103.4896	106.0601	107.3592	108.0114
200Гц	98.466	103.4896	106.0601	107.3592	108.0114
Частота сигналу f , Гц	Відносна похибка (17 вузлів інтерполяції), %				
2Гц	1.0449	1.1228	1.1634	1.1843	1.1948
20Гц	1.0449	1.1228	1.1634	1.1843	1.1948
200Гц	1.0449	1.1228	1.1634	1.1843	1.1948
Частота сигналу f , Гц	Відносна похибка (33 вузлів інтерполяції), %				
2Гц	$5.28 \cdot 10^{-7}$	$4.22 \cdot 10^{-7}$	$7.31 \cdot 10^{-7}$	$9.5 \cdot 10^{-7}$	$7.91 \cdot 10^{-7}$
20Гц	$7.84 \cdot 10^{-7}$	$8.53 \cdot 10^{-7}$	$5.92 \cdot 10^{-7}$	$9.23 \cdot 10^{-7}$	$7.92 \cdot 10^{-7}$
200Гц	$3.97 \cdot 10^{-7}$	$4.09 \cdot 10^{-7}$	$4.78 \cdot 10^{-7}$	$7.15 \cdot 10^{-7}$	$1.15 \cdot 10^{-7}$
Частота сигналу f , Гц	Відносна похибка (65 вузлів інтерполяції), %				
2Гц	532.8756	847.2001	1762.8	1702.4	1738.5
20Гц	1113	1069.6	986.1128	1529.9	1540.9
200Гц	962.4274	1394.9	1214.4	1059.2	1560.6

Таблиця 2.10 – Результати моделювання для чотирьох періодів

1	2	3	4	5	6
Кількість вузлів	512	1024	2048	4096	8192

Продовження таблиці 2.10

1	2	3	4	5	6
Частота сигналу f , Гц	Відносна похибка (5 вузлів інтерполяції), %				
2Гц	52.5484	51.2739	50.6368	50.3184	50.1592
20Гц	52.5484	51.2739	50.6368	50.3184	50.1592
200Гц	52.5484	51.2739	50.6368	50.3184	50.1592
Частота сигналу f , Гц	Відносна похибка (9 вузлів інтерполяції), %				
2Гц	56.1656	53.0890	51.5456	50.7731	50.3866
20Гц	56.1656	53.089	51.5456	50.7731	50.3866
200Гц	56.1656	53.089	51.5456	50.7731	50.3866
Частота сигналу f , Гц	Відносна похибка (17 вузлів інтерполяції), %				
2Гц	58.234	63.2751	65.8840	67.2187	67.8956
20Гц	58.234	63.2751	65.884	67.2187	67.8956
200Гц	58.234	63.2751	65.884	67.2187	67.8956
Частота сигналу f , Гц	Відносна похибка (33 вузлів інтерполяції), %				
2Гц	$1.16 \cdot 10^{-5}$	$1.17 \cdot 10^{-5}$	$1.22 \cdot 10^{-5}$	$1.26 \cdot 10^{-5}$	$1.32 \cdot 10^{-5}$
20Гц	$1.14 \cdot 10^{-5}$	$1.14 \cdot 10^{-5}$	$1.22 \cdot 10^{-5}$	$1.28 \cdot 10^{-5}$	$1.28 \cdot 10^{-5}$
200Гц	$1.14 \cdot 10^{-5}$	$1.17 \cdot 10^{-5}$	$1.22 \cdot 10^{-5}$	$1.28 \cdot 10^{-5}$	$1.32 \cdot 10^{-5}$
Частота сигналу f , Гц	Відносна похибка (65 вузлів інтерполяції), %				
2Гц	958.8199	1071.6	967.508	1637.2	1625.1
20Гц	703.6048	749.5981	854.4877	1455.3	1512.3
200Гц	788.8204	668.9573	1427.1	1062.3	1180.5

Таблиця 2.11 – Результати моделювання для п'яти періодів

1	2	3	4	5	6
Кількість вузлів	512	1024	2048	4096	8192
Частота сигналу f , Гц	Відносна похибка (5 вузлів інтерполяції), %				
2Гц	99.3848	98.5572	98.1212	97.9007	97.7903
20Гц	99.3848	98.5572	98.1212	97.9007	97.7903
200Гц	99.3848	98.5572	98.1212	97.9007	97.7903
Частота сигналу f , Гц	Відносна похибка (9 вузлів інтерполяції), %				
2Гц	215.7521	212.8211	211.2239	210.3783	209.9427
20Гц	215.7521	212.8211	211.2239	210.3783	209.9427
200Гц	215.7521	212.8211	211.2239	210.3783	209.9427
Частота сигналу f , Гц	Відносна похибка (17 вузлів інтерполяції), %				
2Гц	780.2773	862.5810	905.9279	928.1638	939.424
20Гц	780.2773	862.581	905.9279	928.1638	939.424
200Гц	780.2773	862.581	905.9279	928.1638	939.424
Частота сигналу f , Гц	Відносна похибка (33 вузлів інтерполяції), %				
2Гц	0.0106	0.0106	0.0113	0.0118	0.012
20Гц	0.0106	0.0106	0.0113	0.0118	0.012
200Гц	0.0106	0.0106	0.0113	0.0118	0.012
Частота сигналу f , Гц	Відносна похибка (65 вузлів інтерполяції), %				
2Гц	1197.7	1393.7	1518.8	1553	1361
20Гц	1191.7	895.2954	1595.9	1353.9	1759.6
200Гц	855.1122	601.9304	1115.4	1377.4	1864.3

Таблиця 2.12 – Результати моделювання для шести періодів

1	2	3	4	5	6
Кількість вузлів	512	1024	2048	4096	8192
Частота сигналу f , Гц	Відносна похибка (5 вузлів інтерполяції), %				
2Гц	53.3239	51.6681	50.8389	50.4198	50.2102

Продовження таблиці 2.12

1	2	3	4	5	6
20Гц	53.3239	51.6681	50.8389	50.4198	50.2102
200Гц	53.3239	51.6681	50.8389	50.4198	50.2102
Частота сигналу f , Гц	Відносна похибка (9 вузлів інтерполяції), %				
2Гц	79.3792	77.4538	77.2793	77.7934	78.0488
20Гц	79.3792	77.4538	77.2793	77.7934	78.0488
200Гц	79.3792	77.4538	77.2793	77.7934	78.0488
Частота сигналу f , Гц	Відносна похибка (17 вузлів інтерполяції), %				
2Гц	3378.7	3885.1	4155.5	4294.3	4364.7
20Гц	3378.7	3885.1	4155.5	4294.3	4364.7
200Гц	3378.7	3885.1	4155.5	4294.3	4364.7
Частота сигналу f , Гц	Відносна похибка (33 вузлів інтерполяції), %				
2Гц	2.2872	2.2835	2.4814	2.5867	2.64
20Гц	2.2872	2.2835	2.4814	2.5867	2.64
200Гц	2.2872	2.2835	2.4814	2.5867	2.64
Частота сигналу f , Гц	Відносна похибка (65 вузлів інтерполяції), %				
2Гц	529.5996	1500.8	1254.8	1173.6	1849.7
20Гц	977.3028	883.551	965.8064	1353.9	1586
200Гц	818.5981	1241.4	1090.2	1308.5	1633.6

Неправильний вибір кількості відліків інтерполяції поліномами Лагранжа призводить до появи методичних похибок, які, у свою чергу, проявляються у вигляді екстремумів на краях відрізка інтерполяції. Один з прикладів даної похибки зображено на рис. 2.7.

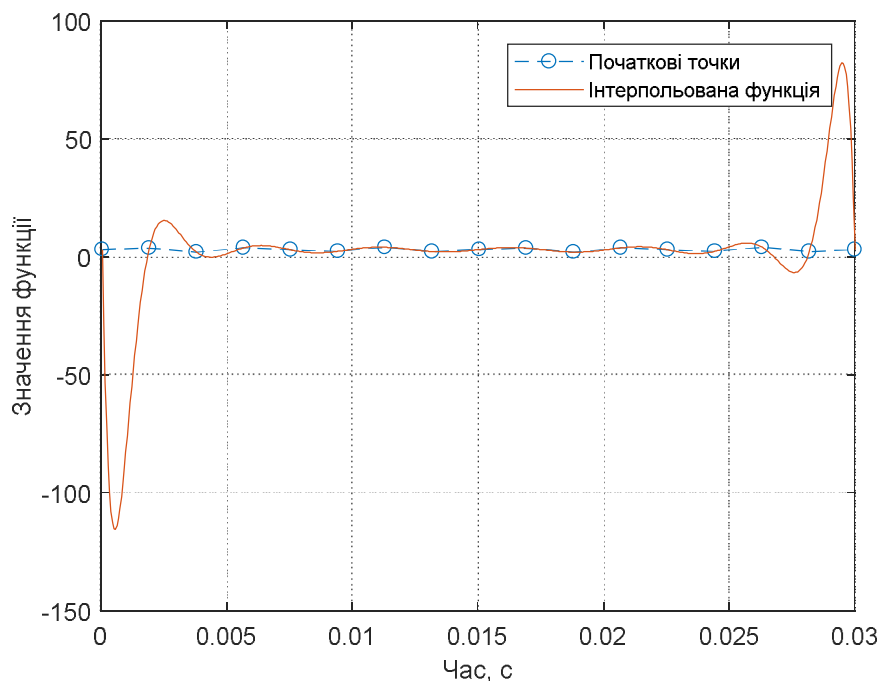


Рисунок 2.7 – Результати моделювання при $p=6$, $N=512$ та частоті дискретизації $f_x=17066,67$ Гц

2.4 Результати інтерполяції неперіодичного знакозмінного сигналу

Для інтерполяції неперіодичного знакозмінного сигналу обрано перехідну функцію виду:

$$y = a + b \sin(cx) \cdot e^{-x} \quad (2.11)$$

де a , b , c – константи;

a – постійна складова сигналу або його математичне сподівання;

b – характеризує амплітуду коливань;

$c = 2\pi f$, де f – циклічна частота сигналу, Гц.

Результати інтерполяції наведено у таблиці 2.13.

Таблиця 2.13 – Результати моделювання

1	2	3	4	5	6
Кількість вузлів	512	1024	2048	4096	8192
Частота сигналу f , Гц	Відносна похибка (5 вузлів інтерполяції), %				

Продовження таблиці 2.13

1	2	3	4	5	6
2Гц	0.0028	55.3057	55.1369	55.0515	55.0081
20Гц	0.0101	93.0471	92.6664	92.4685	92.3689
200Гц	0.0106	97.9942	97.5632	97.3461	97.2364
Частота сигналу f , Гц	Відносна похибка (9 вузлів інтерполяції), %				
2Гц	78.7848	79.8514	80.3635	80.6143	80.7387
20Гц	154.4951	151.8775	150.4431	149.6923	149.3096
200Гц	208.3777	205.4823	203.9013	203.0676	202.6384
Частота сигналу f , Гц	Відносна похибка (17 вузлів інтерполяції), %				
2Гц	355.7374	360.0767	361.9151	362.8146	363.2718
20Гц	694.1681	680.3734	672.9684	682.9004	691.8195
200Гц	755.8367	836.2039	878.5442	900.29	911.295
Частота сигналу f , Гц	Відносна похибка (33 вузлів інтерполяції), %				
2Гц	0.0028	0.0033	0.0035	0.0037	0.0037
20Гц	0.0101	0.0102	0.0102	0.0102	0.0102
200Гц	0.0106	0.0106	0.011	0.0115	0.0117
Частота сигналу f , Гц	Відносна похибка (65 вузлів інтерполяції), %				
2Гц	1113.4	1119.6	1351.2	1285.3	1214.6
20Гц	1119.8	1000.1	1616.7	1373.3	1680.3
200Гц	900.8418	646.9831	1189.3	1440.3	1.868.4

Для такого типу функції притаманні ті ж самі недоліки, як і при інтерполюванні гармонічної функції(рис.2.8), а саме:

1. При неправильному виборі кількості вузлів інтерполяції (як занадто малому так і занадто великому) проявляються методичні похибки, які призводять до значного збільшення максимального значення відносної похибки.

2. При виборі занадто великої кількості вузлів інтерполяції розрахунок за допомогою цифрових пристроїв (наприклад, персонального комп'ютера) стає неможливим через вихід розрахованих значень за межі відповідних типів даних.

У результаті такого розрахунку отримується величина NaN (Not a Number, рис. 2.10).

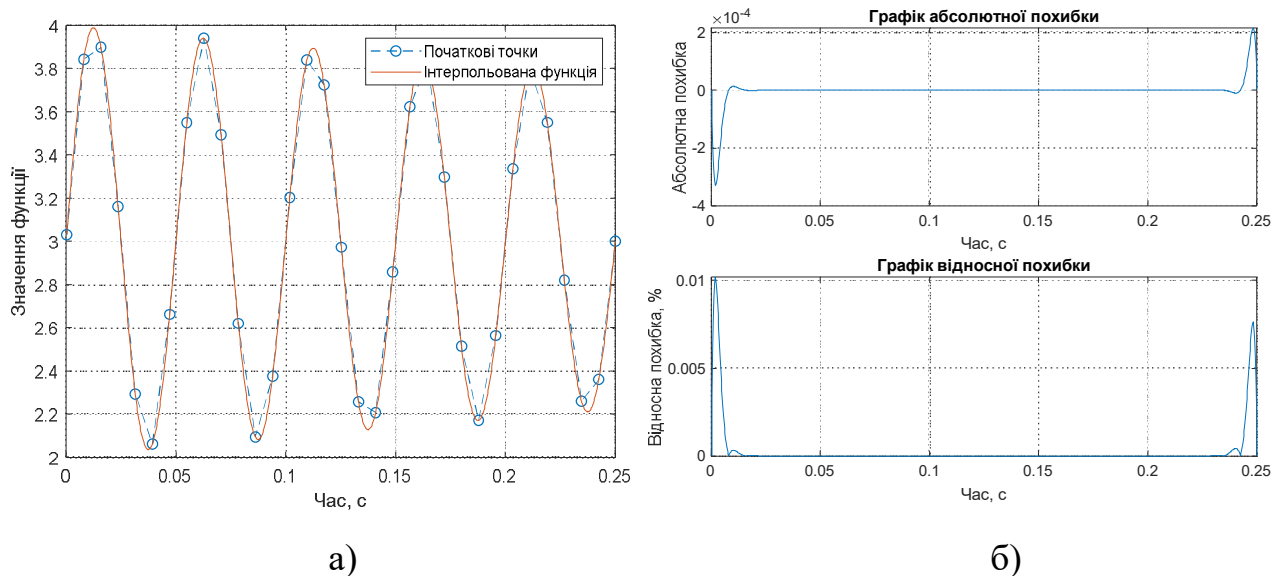


Рисунок 2.8 – Результати моделювання при $N=512$ та частоті дискретизації $f_x=4096$ Гц: а) графік функції; б) графік похибок

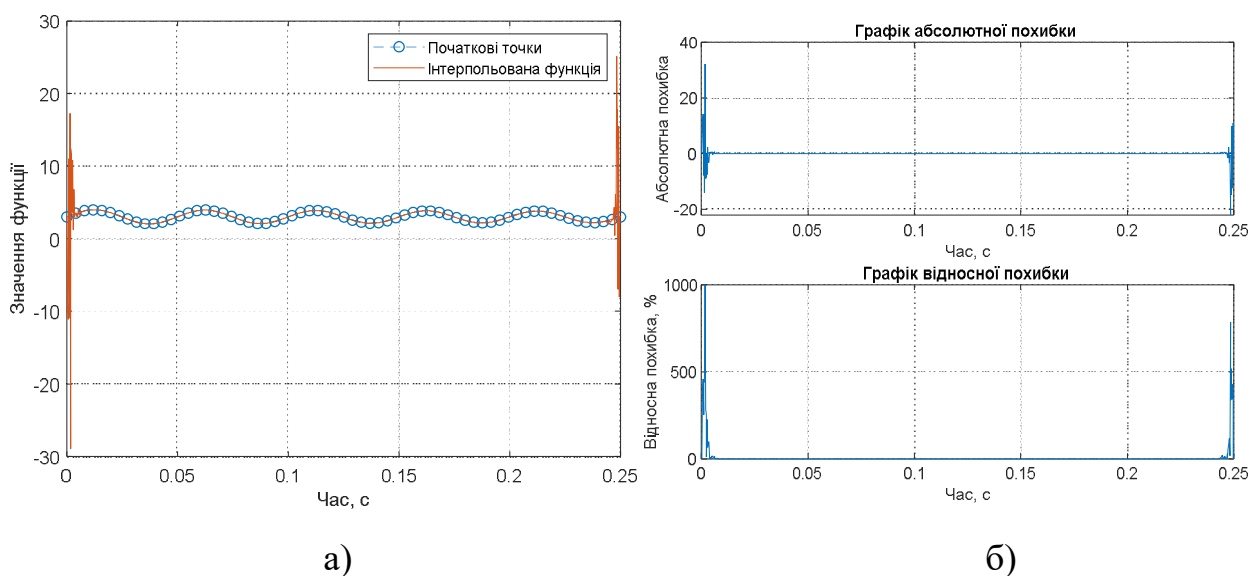
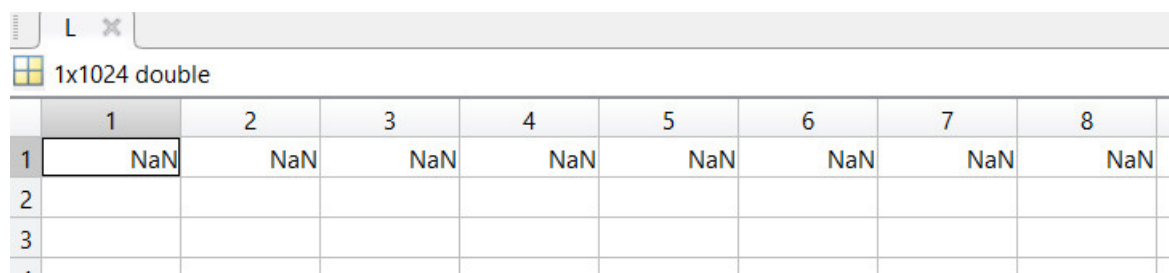


Рисунок 2.9 – Результати моделювання при $N=512$ та частоті дискретизації $f_x=4096$ Гц: а) графік функції; б) графік похибок

Отже, проаналізувавши результати інтерполяції поліномами Лагранжа, як для періодичних, так і для неперіодичних функцій, можна зробити висновок, що

точність методу у значній мірі залежить від кількості коливань в межах розглянутих довжин сигналу.



	1	2	3	4	5	6	7	8
1	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN
2								
3								

Рисунок 2.10 – Результати моделювання при виборі занадто великої кількості вузлів інтерполяції

Висновки до розділу 2

У ході виконання другого розділу було отримано наступні результати:

1. Проведено огляд та математичний опис методу інтерполяційних поліномів Лагранжа.

2. Враховуючи аналітичний опис методу інтерполяційних поліномів Лагранжа та блок схему його алгоритму, розроблено програмне забезпечення для інтерполяції дискретних сигналів у програмному середовищі математичного пакету MatLab.

3. У якості досліджуваних сигналів було обрано гармонічну функцію вигляду $y = a + b\sin(cx)$ (де a , b , c – константи; a – постійна складова сигналу або його математичне сподівання; b – характеризує амплітуду коливань; $c = 2\pi f$, де f – циклічна частота сигналу, Гц), а також перехідний процес виду $y = a + b\sin(cx) \cdot e^{-x}$ (де a , b , c – константи; a – постійна складова сигналу або його математичне сподівання; b – характеризує амплітуду коливань; $c = 2\pi f$, де f – циклічна частота сигналу, Гц). Розглянуто наступні умови: а) довжина сигналу 512, 1024, 2048, 4096, 8192 відліків; б) кількість періодів (тільки для періодичних сигналів) від 1 до 6; в) кількість вузлів інтерполяції 5, 9, 17, 33, 65.

4. Проведено порівняння результатів інтерполяції синусоїд з частотами 2Гц, 20Гц та 200Гц. Показано, що для більшості випадків використання інтерполяційних поліномів Лагранжа дає найкращий результат при виборі 33 вузлів інтерполяції. Показано, що при виборі 33 вузлів інтерполяції мінімум максимальної відносної похибки для періодів 1,2 та 3 знаходиться в межах $10^{-7}\%$, для усіх інших порядок похибки зростає і для 6 періодів знаходиться в межах 3%.

5. Проведено порівняння результатів інтерполяції перехідного процесу з частотами 2Гц, 20Гц та 200Гц. Показано, що для більшості випадків використання інтерполяційних поліномів Лагранжа дає найкращий результат при виборі 33 вузлів інтерполяції. Показано, що при виборі 33 вузлів інтерполяції мінімум максимальної відносної похибки знаходиться в межах $10^{-2}\%$.

6. Показано, що для обраних періодичної та не періодичної функцій результат інтерполяції поліномами Лагранжа практично не залежить від частоти дискретизації, частоти сигналу та його довжини.

7. Показано, що зі збільшенням кількості коливань у досліджуваному проміжку збільшується похибка інтерполяції.

РОЗДІЛ 3

ВДОСКОНАЛЕННЯ МЕТОДУ АПРОКСИМАЦІЇ ДАНИХ

Метод найменших квадратів (МНК) – один з найбільш широко використовуваних методів при вирішенні багатьох завдань відновлення регресійних залежностей [49]. Вперше МНК був використаний Лежандром в 1806 році для вирішення завдань небесної механіки на основі експериментальних даних астрономічних спостережень. У 1809 році Гаусс виклав статистичну інтерпретацію МНК і тим самим дав початок широкого застосування статистичних методів при вирішенні завдань відновлення регресійних залежностей. Суворе математичне обґрунтування і встановлення меж змістовної застосовності методу найменших квадратів дані А.А. Марковим і А.Н. Колмогоровим. Нині спосіб являє собою один з найважливіших розділів математичної статистики і широко використовується для статистичних висновків в різних областях науки і техніки.

Саме тому у даному розділі обрано МНК, як метод для вдосконалення.

3.1 Метод найменших квадратів

Метод найменших квадратів – це математичний метод, що використовується для знаходження наближеної функції по набору даних (точок), яка мінімізує суму квадратів відхилень точок від знайденої функції [50].

Необхідно відзначити, що методом найменших квадратів можна назвати метод вирішення задачі в будь-якій області, якщо рішення полягає або задовольняє певним критеріям мінімізації суми квадратів деяких функцій від шуканих змінних. Тому МНК може застосовуватися також для наближеного представлення (апроксимації) заданої функції іншими (простішими) функціями,

при знаходженні сукупності величин, що задовольняють рівнянням або обмеженням, кількість яких перевищує кількість цих величин і т. д. [51].

МНК вважається найпоширенішим і часто використовується для нових розробок та досліджень. Перевагою даного методу являється його простота та ефективність оцінки параметрів лінійних економетричних моделей. Водночас, серед недоліків виділяють чутливість оцінки до різких скачків, які трапляються у вихідних даних, а також громіздкість обчислень.

Коли шукана величина може бути виміряна безпосередньо, як, наприклад, довжина відрізка або кут, то, для збільшення точності, вимірювання проводиться багато разів, і за остаточний результат беруть арифметичне середнє з усіх окремих вимірювань [52]. Це правило арифметичної середини ґрунтується на міркуваннях теорії ймовірностей; легко показати, що сума квадратів відхилень окремих вимірювань від арифметичної середини буде менше, ніж сума квадратів відхилень окремих вимірювань від якої б то не було іншої величини. Саме правило арифметичної середини представляє найпростіший випадок методу найменших квадратів.

Найчастіше виміряна за допомогою систем багатокласової діагностики інформація являє собою дані у вигляді таблиці $\varphi(x)$, де x – аргумент; φ – функція. У вигляді аргументу має бути ряд, в якому кожен наступний член більший за попередній, а також не може бути однакових значень. Оскільки у більшості випадків виміряні дані являють собою випадковий процес або процес з невідомим аналітичним описом, виникає необхідність знаходження аналітичної формули для подальшої роботи з даними (наприклад, прогнозування або створення теоретичних основ для опису певного явища чи процесу). У такому разі використовують апроксимацію, тобто шукають функцію y , яка найкращим чином описує виміряні дані.

Вважатимемо, що тип емпіричної формули обраний і його можна представити у вигляді [46]:

$$y = \varphi(x, a_0, a_1, \dots, a_m) \quad (3.1)$$

де, φ – відома функція, a_0, a_1, \dots, a_m – невідомі постійні параметри.

Запишемо суму квадратів відхилень для всіх точок x_0, x_1, \dots, x_n [46]:

$$S = \sum_{i=0}^n \varepsilon_i^2 = \sum_{i=0}^n [\varphi(x_i, a_0, a_1, \dots, a_m) - y_i]^2, \quad (3.2)$$

де, параметри a_0, a_1, \dots, a_m емпіричної формули (3.1) будемо знаходити з умови мінімуму функції $S = S(a_1, \dots, a_m)$. У цьому полягає метод найменших квадратів.

У теорії ймовірності доводиться, що отримані таким методом значення параметрів найбільш ймовірні, якщо відхилення ε_i підпорядковується нормальному закону розподілення.

Оскільки параметри a_0, a_1, \dots, a_m виконують роль незалежних змінних функцій S , то її мінімум знайдемо, прирівнюючи до нуля часткові похідні по цим змінним [46]:

$$\frac{\partial S}{\partial a_0} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial a_1} = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial S}{\partial a_m} = 0 \quad (3.3)$$

Отримані співвідношення – система рівнянь для визначення a_0, a_1, \dots, a_m .

Розглянемо використання метода найменших квадратів для окремого випадку, коли функція φ являється лінійною по невідомим параметрам a_0, a_1, \dots, a_m [46]:

$$\varphi(x, a_0, a_1, \dots, a_m) = \sum_{j=0}^m a_j \varphi_j(x), \quad (3.4)$$

де, φ_0, φ_m – відомі функції x .

Формула (3.2) для визначення суми квадратів відхилень S буде мати вигляд [46]:

$$S = \sum_{i=0}^n [\sum_{j=0}^m a_j \varphi_j(x_i) - y_i]^2 \quad (3.5)$$

Для складання системи (3.3) продиференціюємо S по змінним a_k ($k = 0, 1, \dots, m$) [46]:

$$\frac{\partial S}{\partial a_k} = \frac{\partial}{\partial a_k} \sum_{i=0}^n [\sum_{j=0}^m a_j \varphi_j(x_i) - y_i]^2 = \sum_{i=0}^n \frac{\partial}{\partial a_k} [\sum_{j=0}^m a_j \varphi_j(x_i) - y_i]^2 = \sum_{i=0}^n 2[\sum_{j=0}^m a_j \varphi_j(x_i) - y_i] \varphi_k(x_i) = 2 \sum_{i=0}^n \varphi_k(x_i) [\sum_{j=0}^m a_j \varphi_j(x_i) - y_i] \quad (3.6)$$

Прирівнюючи знайдені похідні до нуля, отримаємо наступну систему рівнянь [46]:

$$\sum_{i=0}^n \varphi_k(x_i) [\sum_{j=0}^m a_j \varphi_j(x_i) - y_i] = 0, \quad k = 0, 1, \dots, m \quad (3.7)$$

Система (3.7) являється системою лінійних алгебраїчних рівнянь, її можна записати в наглядному векторно-матричному вигляді. Для цього введемо вектори дослідних даних y і невідомих параметрів a , а також матрицю Φ наступним чином [46]:

$$y = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \dots \\ a_m \end{pmatrix}, \quad \Phi = \begin{pmatrix} \varphi_0(x_0) & \varphi_1(x_0) \dots \varphi_m(x_0) \\ \varphi_0(x_1) & \varphi_1(x_1) \dots \varphi_m(x_1) \\ \dots & \dots \\ \varphi_0(x_n) & \varphi_1(x_n) \dots \varphi_m(x_n) \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

Тут вектори y і a мають розмірності $(n+1)$ і $(m+1)$ відповідно, а матриця Φ має розмірність $(n+1) \times (m+1)$. Для її елементів справедливий вираз [46]:

$$\Phi_{ij} = \varphi_j(x_i) \quad (3.9)$$

Неважко переконатися, що вираз, який стоїть у квадратних дужках формули (3.7), являється i -ю компонентою вектора $\Phi a - y$, а кожне рівняння (3.7) представляє собою рівність нулю k -ї компоненти вектора $\Phi^T(\Phi a - y)$, де Φ^T – транспонована матриця. Таким чином, вираз (3.7) можна записати у вигляді [46]:

$$\Phi^T(\Phi a - y) = 0 \quad \text{або} \quad (\Phi^T \Phi)a = \Phi^T y \quad (3.10)$$

Матриця цієї системи $\Phi^T \Phi$ має розмірність $(m+1) \times (m+1)$, вектор a – шуканий.

У випадку використання в якості емпіричної функції многочлена [46]:

$$\varphi(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_m x^m \quad (3.11)$$

елементи матриці $\Phi^T \Phi$ і компоненти вектора $\Phi^T y$ можна обчислити за формулами [46]:

$$(\Phi^T \Phi)_{ij} = \sum_{k=0}^n x_k^{i+j}, \quad (\Phi^T \Phi)_i = \sum_{k=0}^n x_k^i y_k, \quad i, j = 0, 1, \dots, m. \quad (3.12)$$

Зокрема, рівні всі елементи $(\Phi^T \Phi)_{ij}$ при $i+j=const$.

Головними перевагами методу є доступність написання математичних висновків, а також те, що всі обчислювальні процедури можна звести до простого визначення невідомих коефіцієнтів.

3.2 Огляд недоліків методу найменших квадратів

МНК найкраще підходить для сигналів які плавно наростають, але недолік цього методу в тому, що він погано апроксимує знакозмінні сигнали.

Квадратична функція має вигляд:

$$y = ax^2 + bx + c, \quad (3.13)$$

де, a, b, c - числа, при чому $a \neq 0$.

Нехай $a=1$, $b=0$, $c=0$, кількість відліків (точок) у сигналі $N=1024$. Графік апроксимованого сигналу та отриманих похибок зображено на рис. 3.1.

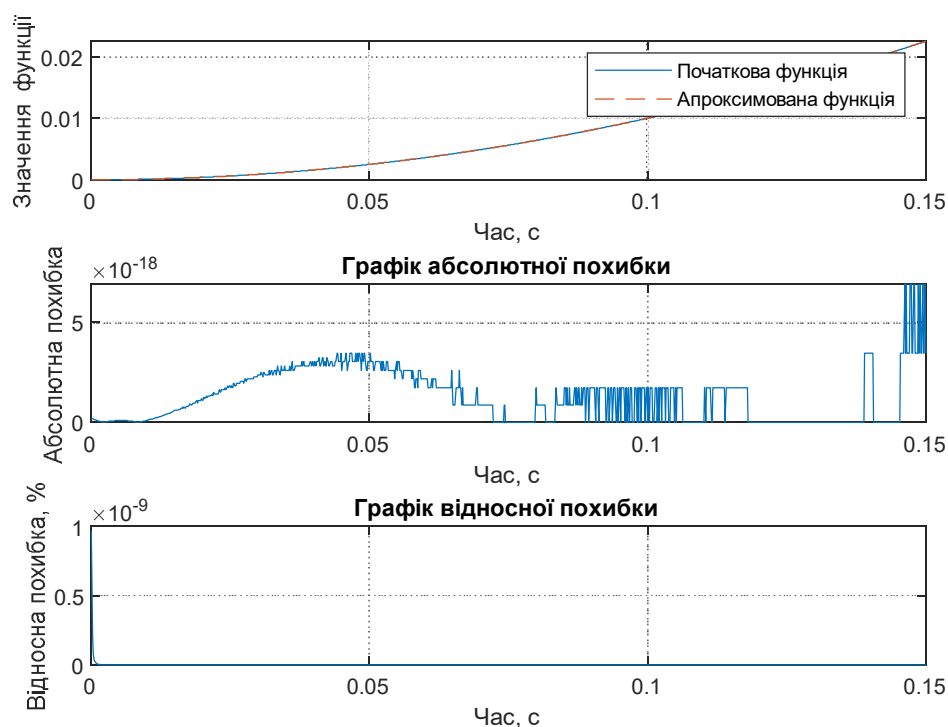


Рисунок 3.1 – Результати апроксимації квадратичної функції при $N=1024$

Для порівняння наведемо результати апроксимації гармонічної функції, яка має вигляд:

$$y = a + b \sin(cx), \quad (3.14)$$

де a , b , c – константи;

a – постійна складова сигналу або його математичне сподівання;

b – характеризує амплітуду коливань;

$c = 2\pi f$, де f – циклічна частота сигналу, Гц.

Нехай $a=3$, $b=1$, $c=1$, кількість відліків (точок) у сигналі $N=1024$, кількість періодів $p=3$, частота $f=20$ Гц. Графік апроксимованого сигналу та отриманих похибок зображено на рис. 3.2.

Також для порівняння проведемо апроксимацію перехідного процесу вигляду

$$y = a + b \sin(cx) \cdot e^{-7x}, \quad (3.15)$$

де a, b, c – константи;

a – постійна складова сигналу або його математичне сподівання;

b – характеризує амплітуду коливань;

$c = 2\pi f$, де f – циклічна частота сигналу, Гц.

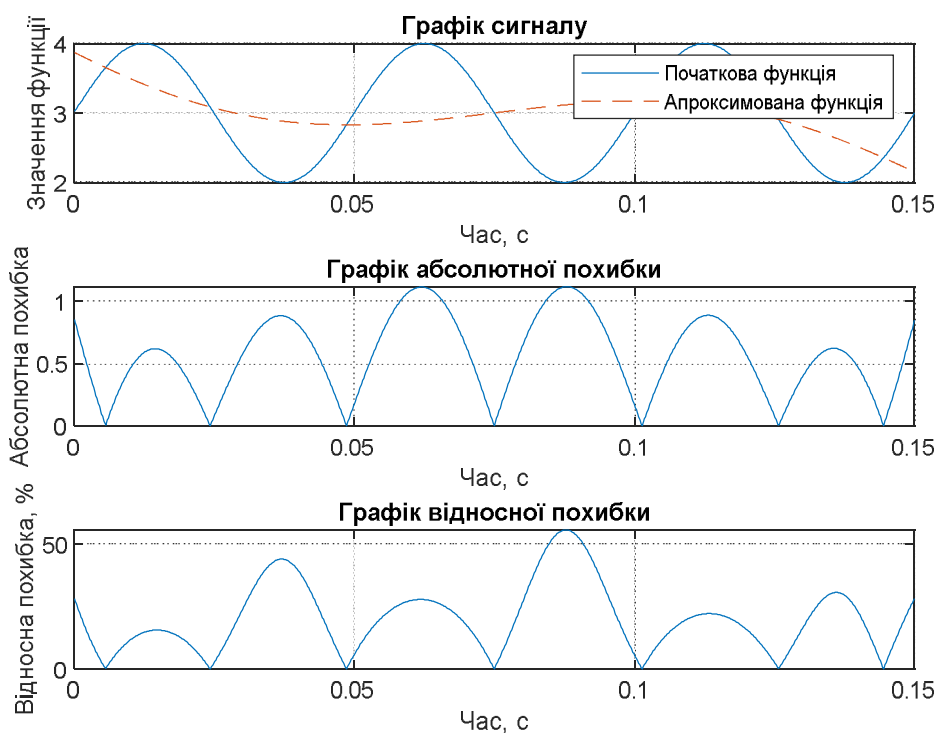


Рисунок 3.2 – Результати апроксимації гармонічної функції при $N=1024$, $p=3$,
 $f=20$ Гц

Нехай $a=3$, $b=1$, $c=1$, кількість відліків (точок) у сигналі $N=1024$, частота $f=20$ Гц. Графік апроксимованого сигналу та отриманих похибок зображено на рис. 3.3.

Як видно з рис.3.2-3.3, дійсно, апроксимація знакозмінних сигналів (періодичного гармонічного та перехідного процесу) є дуже поганою у випадку, коли вона відбувається по всій довжині сигналу.

Таким чином, як метод для вдосконалення, було обрано метод найменших квадратів.

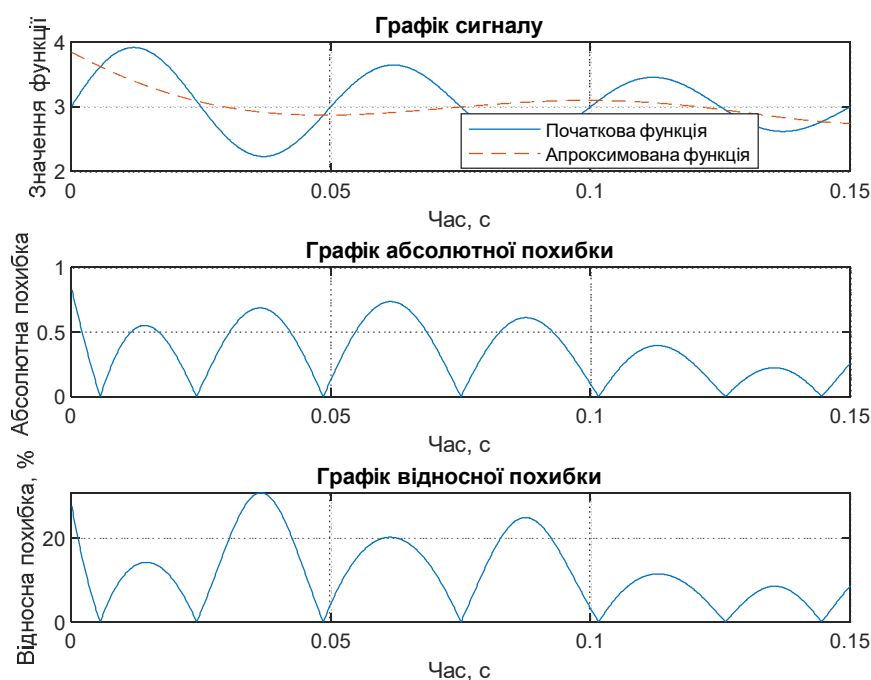


Рисунок 3.3 – Результати апроксимації перехідного процесу при $N=1024$, $f=20$ Гц

3.3 Вдосконалення методу апроксимації даних

Багато методів цифрової обробки даних базуються на тому, що довжина оброблюваного сигналу має бути рівною 2^i , де i – натуральне число. Це дозволяє використовувати швидкі алгоритми (тобто, частина операцій, наприклад, множення замінюються операцією суми і виконуються паралельно, а не послідовно).

Такі алгоритми в багатьох випадках скорочують довжину сигналу до довжини 2^i , відкидаючи зайві відліки. Проте ці відліки можуть містити в собі дуже важливу інформацію, особливо в системах багатокласової діагностики, де у подальшому по вимірним сигналам буде визначатися поточний технічний стан і робитися прогноз.

Отже, для вдосконалення методу найменших квадратів було запропоновано проводити апроксимацію не по повному сигналу, а розбивати його на частити, кожну з цих частин окремо апроксимувати, а потім збирати в єдиний сигнал. Такі дослідження було проведено у роботі [53].

Із основних недоліків, які було виявлено при такому підході можна назвати наступні:

- 1) Стрибки у місцях з'єднання сусідніх відрізків.
- 2) Автори робіт [53] та [54] розглядають у запропонованому методі апроксимацію поліномами до 80го порядку, що значно ускладнює алгоритм і збільшує час моделювання.

Дані проблеми проілюстровано на рис. 3.4-3.5.

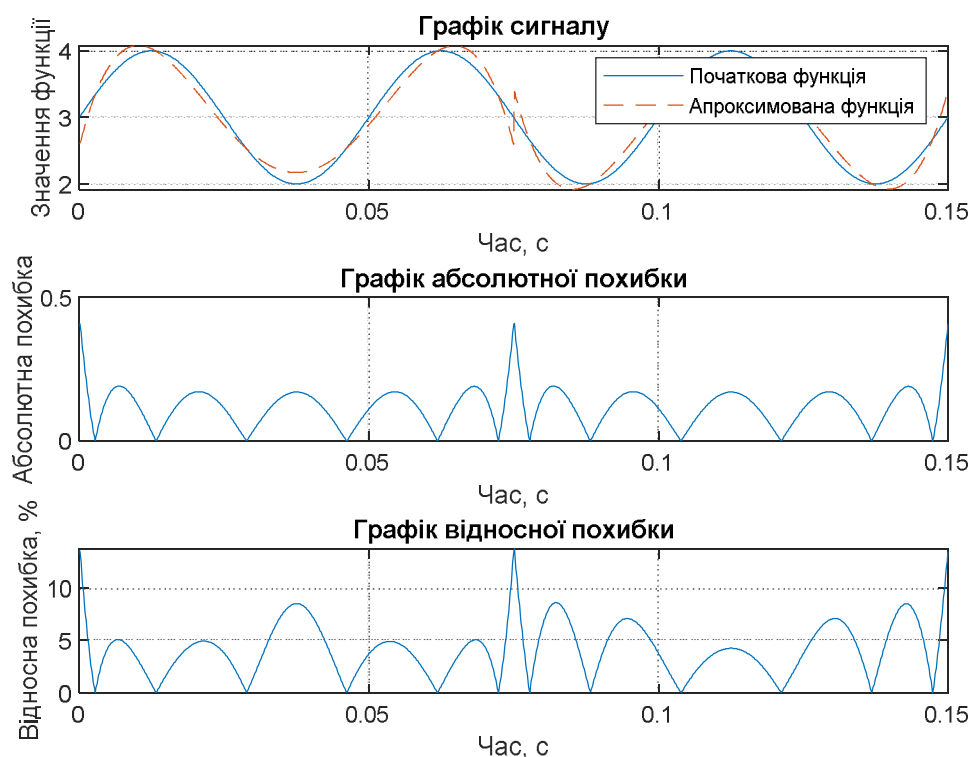


Рисунок 3.4 – Результати апроксимації гармонічної функції при $N=1024$, $p=3$,
 $f=20\text{Гц}$

Щоб зменшити вплив цих стрибків на стиках сусідніх сегментів, запропоновано проводити так зване згладжування (рис. 3.6-рис. 3.7), тобто проводити додаткову кускову апроксимацію в області з'єднання двох сусідніх сегментів. Кількість точок для згладжування обирається відповідно до кількості точок сегментів за певним алгоритмом. Кількість точок (відліків), узятих для кускової апроксимації, складає п'яту частину від довжини кожного відрізка, який приймає участь у процесі згладжування.

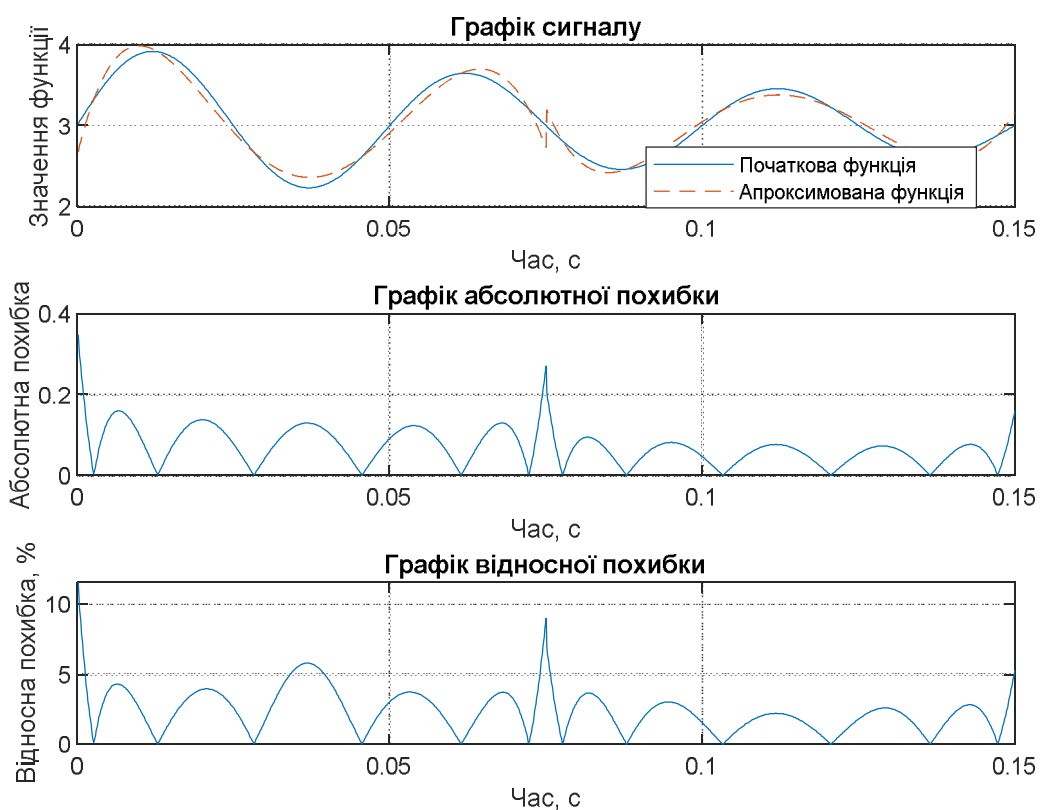


Рисунок 3.5 – Результати апроксимації перехідного процесу при $N=1024$, $f=20$ Гц

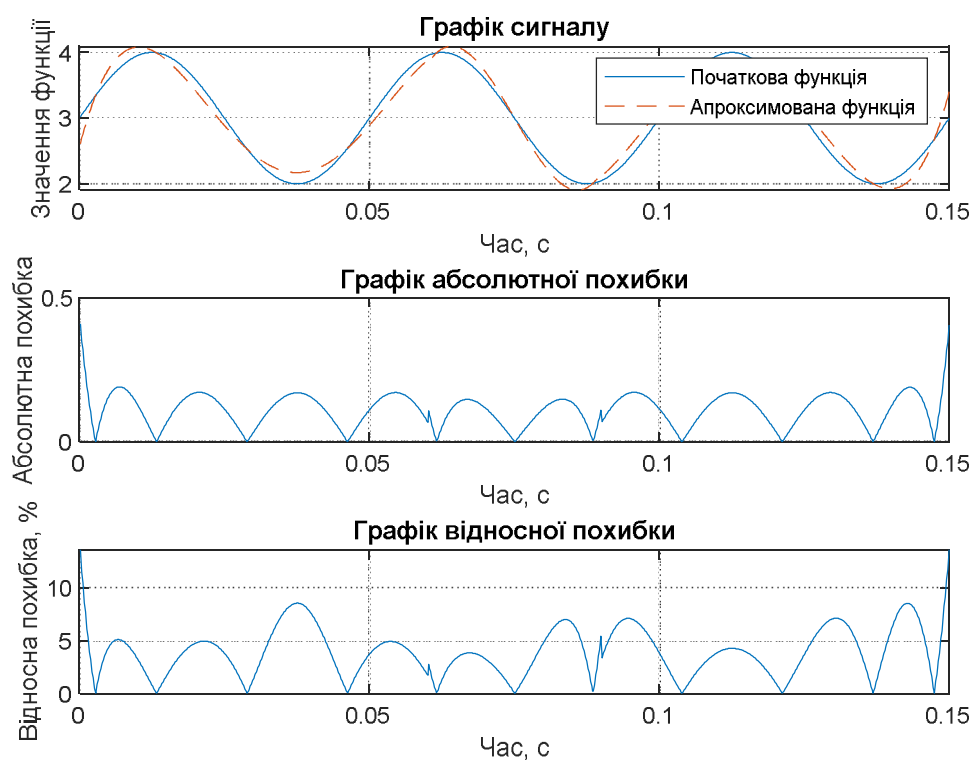


Рисунок 3.6 – Результати апроксимації гармонічної функції при $N=1024$, $p=3$,
 $f=20$ Гц

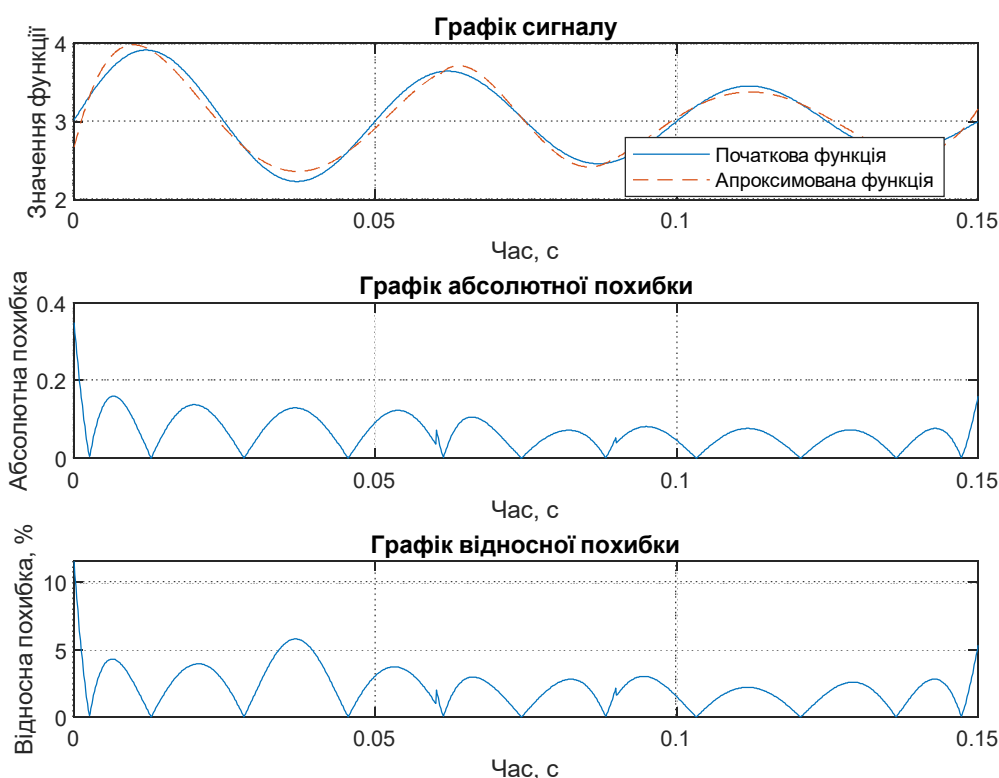


Рисунок 3.7 – Результати апроксимації перехідного процесу при $N=1024$, $f=20$ Гц

Як видно з рис. 3.6-3.7, похибка у місці де був стик двох сусідніх сегментів значно знизилась, але на рівень загальної похибки це не вплинуло. Розіб'ємо вхідний сигнал на більшу кількість відрізків, тобто не на 2, як було у попередньому випадку, а, наприклад, на 8.

Для початку покажемо випадок розділення вхідного сигналу на 8 частин, але без згладжування. Результати представлені на рис. 3.8-рис. 3.9.

Загалом, похибку апроксимації можна знизити якщо збільшити кількість сегментів на які буде розділено вихідний сигнал. Наприклад, для двох сегментів відносна похибка сягала 15%, а для восьми – знаходиться в межах 0,009%. Проте, як видно з рис. 3.8-рис. 3.9 на графіках присутні екстремуми в місцях з'єднання сегментів. Ці екстремуми не змінюють порядок похибки, але збільшують значення середньої відносної похибки апроксимації. Для випадку ідеальних сигналів зміни незначні, але у випадку апроксимації сигналів, в яких міститься так званий шум, ці зміни можуть мати значно більший вплив на значення похибки.

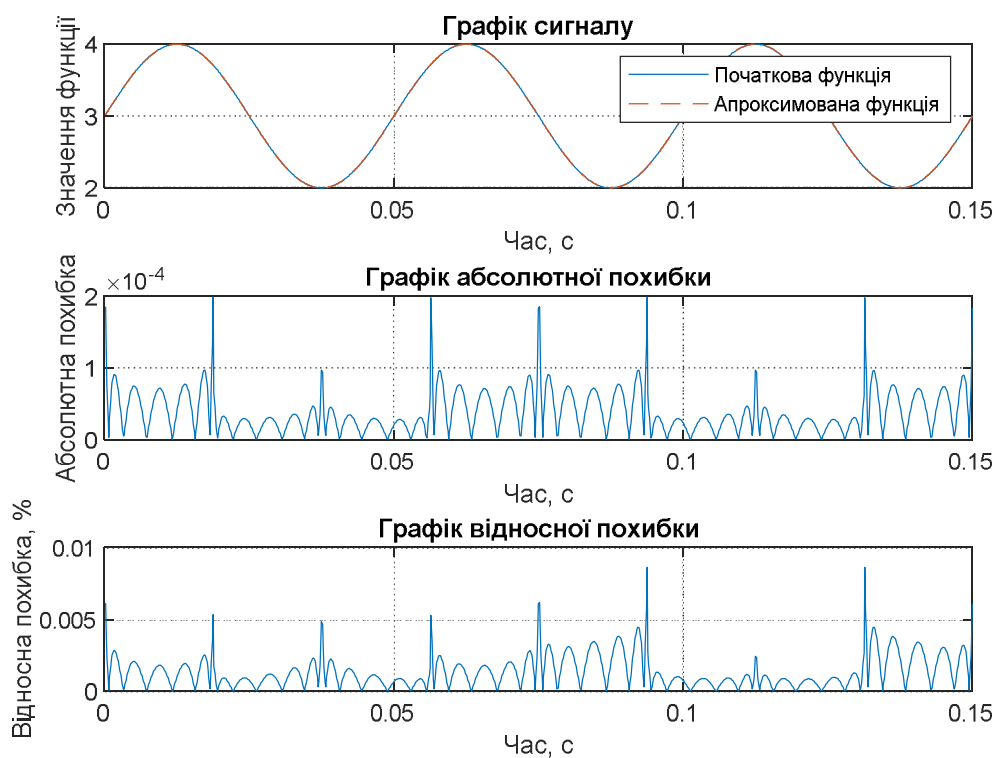


Рисунок 3.8 – Результати апроксимації гармонічної функції при $N=1024$, $p=3$, $f=20\text{Гц}$

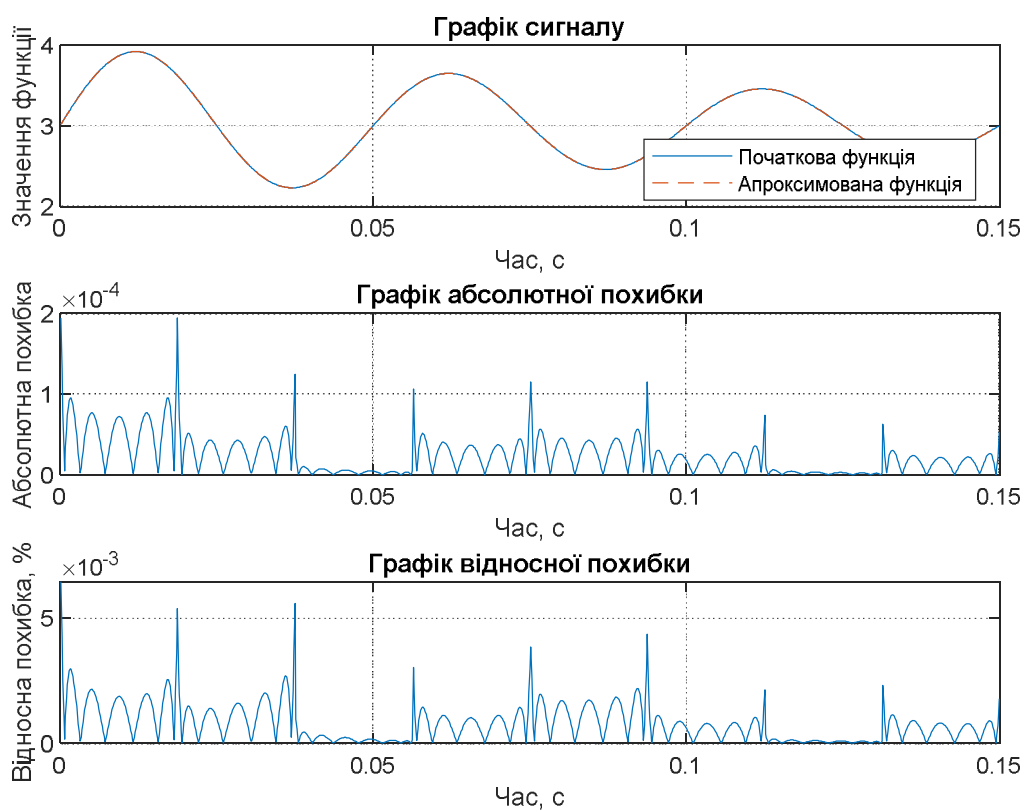


Рисунок 3.9 – Результати апроксимації перехідного процесу при $N=1024$, $f=20\text{Гц}$

На рис. 3.10-рис. 3.11 представлений той самий випадок, але з використанням алгоритму згладжування.

Таким чином, за рахунок згладжування (рис. 3.10-рис. 3.11) вдалось позбавитись від екстремумів, які були присутні на графіках рис. 3.8-рис. 3.9, що дозволило зменшити відносну похибку.

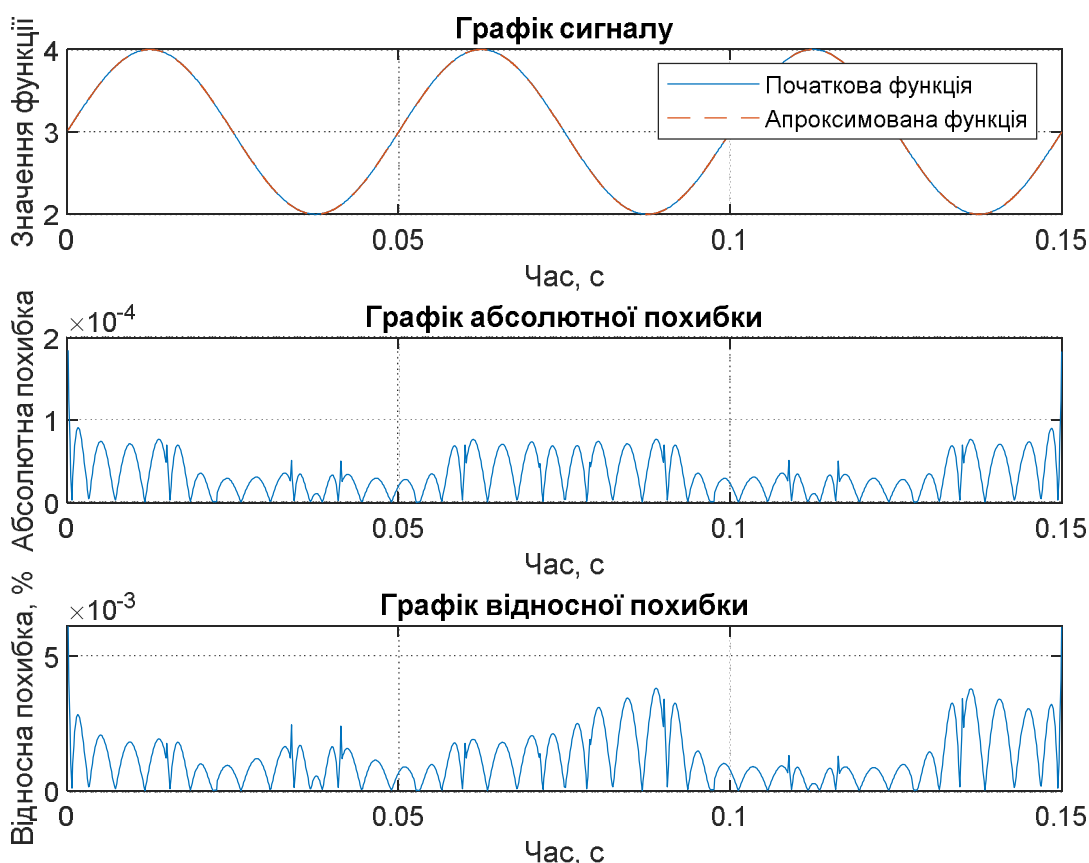


Рисунок 3.10 – Результати моделювання гармонічної функції при $N=1024$, $p=3$,
 $f=20\text{Гц}$

Перший недолік апроксимації, розглянутої у роботах [53] та [54] вирішено, залишилось усунути другий, який проявляється у складності розрахункового алгоритму, через необхідність використання поліномів з першого по восьмидесятий порядок.

Як і в роботах [53] та [54] показником достовірності апроксимації обрано коефіцієнт детермінації, який характеризує так звану частку «поясненої» дисперсії і визначається як [54]:

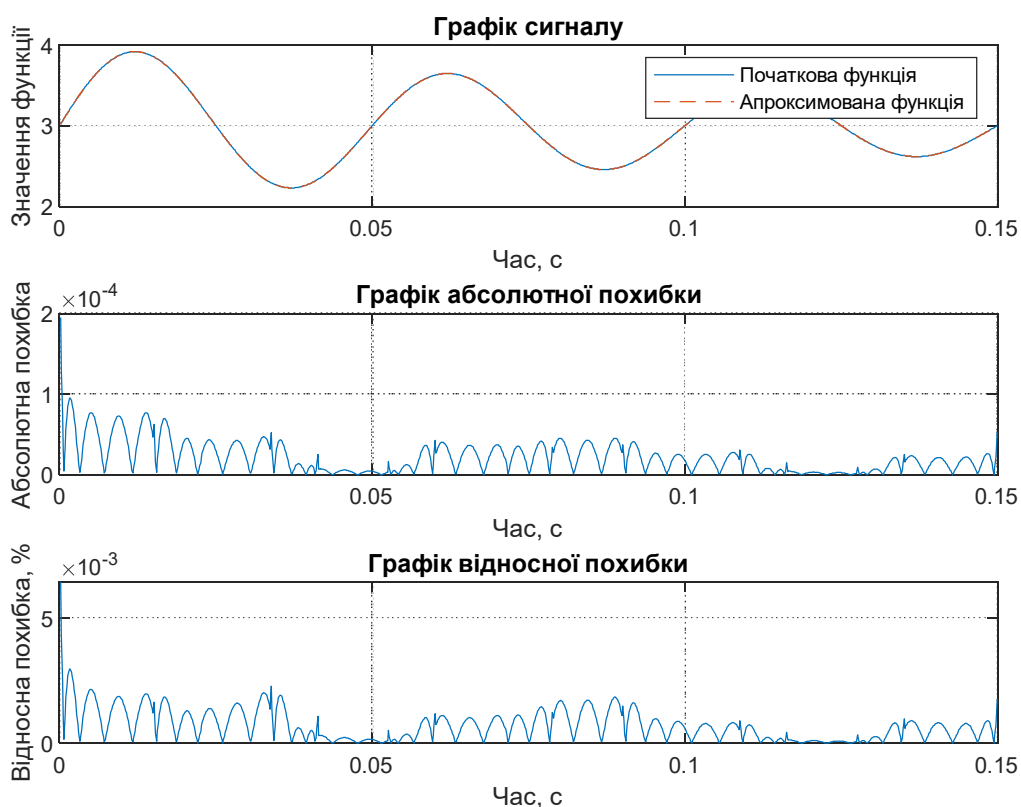


Рисунок 3.11 – Результати апроксимації перехідного процесу при $N=1024$, $f=20$ Гц

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^k (f_i(t) - \phi_i(t))^2}{\sum_{i=1}^k (f_i(t) - \bar{f}(t))^2}, \quad (3.16)$$

де R^2 – коефіцієнт детермінації; $f_i(t)$ – вихідний вектор даних вимірювань; $\bar{f}(t)$ – математичне сподівання (середнє значення) вихідного ряду; $\phi_i(t)$ – апроксимовані значення.

Для спрощення розрахункового алгоритму та зменшення часу розрахунку було прийнято рішення зменшити порядок полінома, який використовується при апроксимації з восьмидесятого до п'ятого. Це дозволило спростити та прискорити розрахунок. Точність використання поліномів вище п'ятого порядку не дає значного зниження похибки апроксимації, що буде показано далі.

Проведемо моделювання для різних значень максимального порядку полінома та наведемо графіки тільки відносних похибок:

- а) поліном 80-го порядку (рис. 3.12);



Рисунок 3.12 – Результати моделювання гармонічної функції при $N=1024$, $p=3$,
 $f=20$ Гц

b) поліном 5-го порядку (рис. 3.13);

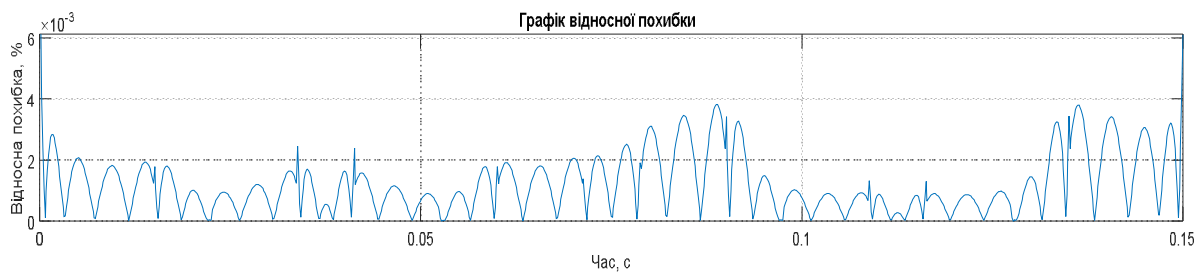


Рисунок 3.13 – Результати моделювання гармонічної функції при $N=1024$, $p=3$,
 $f=20$ Гц

c) поліном 4-го порядку (рис. 3.14);

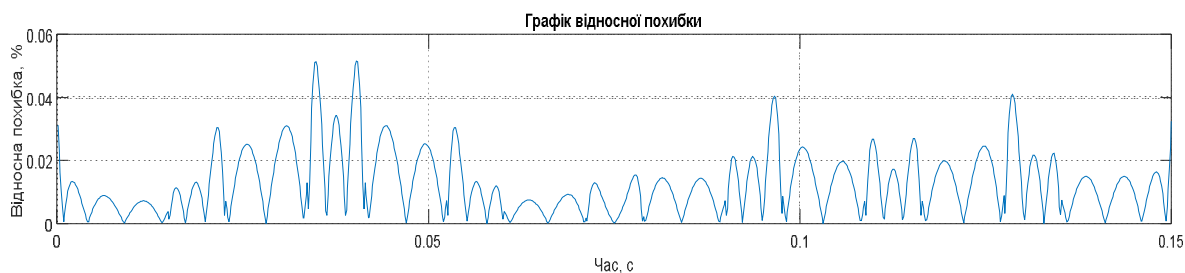


Рисунок 3.14 – Результати моделювання гармонічної функції при $N=1024$, $p=3$,
 $f=20$ Гц

d) поліном 3-го порядку (рис. 3.15).

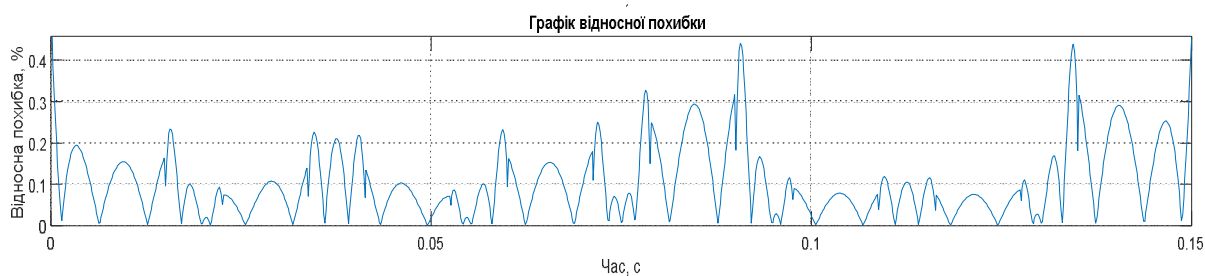


Рисунок 3.15 – Результати моделювання гармонічної функції при $N=1024$, $p=3$,
 $f=20\text{Гц}$

Як видно з рис. 3.12-3.13 збільшення порядку полінома з п'яти до восьмидесяти практично не впливає на похибку, тобто порядок похибки не змінюється. Проте зменшення максимального порядку полінома нижче 5-го, може призвести до зростання похибки в декілька разів, як це показано на рис. 3.14-3.15.

Так як, описані вище два основні недоліки були вирішені, то можна приступати до вдосконалення методу найменших квадратів, шляхом введення інтерполяційних алгоритмів для коригування довжини сигналу.

Як було зазначено вище, при обробці даних існує дуже багато швидких алгоритмів обробки, які працюють лише у тому випадку, коли довжина сигналу є рівною 2^i , де i – натуральне число. Більшість цих алгоритмів скорочує сигнал до довжини 2^i за рахунок відкидання останніх відліків. Проте ці відкинуті відліки можуть містити важливу інформацію, особливо в системах багатокласової діагностики, де оцінюється і прогнозується технічний стан об'єктів. Завдання прогнозування технічного стану об'єктів в експлуатації вирішується тим точніше, чим більше є інформації про стан об'єкта. Саме тому необхідно вдосконалити алгоритм апроксимації таким чином, щоб відліки не було втрачено при використанні швидких алгоритмів обробки даних.

Оскільки довжина початкового сигналу у загальному випадку може бути довільною, було запропоновано перед апроксимацією попередньо проводити інтерполяцію початкового сигналу до довжини 2^i . У даному алгоритмі це

здійснюється за допомогою інтерполяційних поліномів Лагранжа (див. РОЗДІЛ 2).

Алгоритм апроксимації при наявності процесу інтерполяції виглядає наступним чином:

- 1) Оцінюється довжина сигналу.
- 2) Визначається найближча степінь двійки « i ».
- 3) Визначається остача від ділення на 2^i .
- 4) Якщо присутня остача, то проводиться інтерполяція сигналу до довжини 2^{i+1} , остача відсутня – проводиться апроксимація.
- 5) Сигнал розбивається на окремі відрізки.
- 6) Кожен з цих відрізків апроксимується по всій довжині поліномами з першого по п'ятий порядок і обирається найбільш точне наближення (показником точності апроксимації виступає коефіцієнт детермінації).
- 7) Формується новий сигнал із апроксимованих відрізків.
- 8) У місцях з'єднання відрізків проводиться згладжування для зменшення похибки.

Основною проблемою використання інтерполяції поліномами Лагранжа, як було показано у попередньому розділі, являється правильний вибір кількості вузлів інтерполяції. При неправильному виборі кількості вузлів інтерполяції у методі інтерполяційних поліномів Лагранжа виникають значні методичні похибки, які спотворюють результат. Як було показано, одним з найкращих варіантів для інтерполяції поліномами Лагранжа являється вибір від 16 до 32 вузлів інтерполяції. Саме тому було прийнято рішення розбивати сигнал на окремі сегменти для інтерполяції. Кожен з цих сегментів інтерполюється до певної довжини, а потім всі відрізки поєднуються в один сигнал.

Таким чином, в основу вдосконаленого алгоритму було закладено пошук дільника довжини початкового сигналу, який знаходиться в межах від 15 до 40 відліків і розділяє початкову довжину на ціле число окремих відрізків для інтерполяції. Кожен з цих відрізків окремо інтерполюється до необхідної довжини і всі ці відрізки об'єднуються у єдиний сигнал. У даному випадку

похибка при об'єднанні відрізків відсутня, так як інтерполяція не змінює форму сигналу, а проходить через усі базові відліки.

Отже, довжина початкового сигналу розбивається на відрізки від 15 до 40 відліків за алгоритмом програми. Це означає, що для визначення кількості проміжків інтерполяції, за алгоритмом проходить ділення початкової довжини сигналу по черзі на значення від 15 до 40, до того моменту поки не визначиться ціле число відрізків інтерполяції. Якщо при діленні від 15 до 40 ціле число відрізків не буде знайдено, то вводиться алгоритм коригування довжини початкового сигналу, який полягає в наступному:

- 1) Довжина сигналу ділиться на 32 відліки.
- 2) Округлюється до поточного цілого числа (тобто до цілого числа зліва від коми).
- 3) Отриману кількість відрізків інтерполяції множимо на 32 відліки, таким чином отримуємо нову довжину сигналу.
- 4) Знаходимо різницю між першочерговою довжиною сигналу та тією, до якої необхідно його привести. Отримаємо ту кількість відліків, яку необхідно виключити з початкового сигналу.
- 5) Якщо виключати відліки які йдуть підряд один за одним, то це може призвести до похибки інтерполяції, що, у свою чергу, призведе до збільшення похибки апроксимації. Тому було прийнято рішення виключати необхідну кількість відліків через однаковий крок, який розраховується наступним чином: довжину початкового сигналу ділимо на кількість відліків, які треба виключити, округлюємо до поточного цілого числа і від цього цілого числа віднімаємо одиницю (необхідно для того щоб не вийти за межі довжини початкового сигналу).
- 6) У циклі видаляється потрібна кількість елементів через визначений крок.
- 7) Повторно ведеться перевірка ділення націло нової довжини сигналу на значення від 30 до 40 відліків, якщо ділення націло не присутнє, то процес

повторюється. Даний крок використано, як запобіжник від можливих помилок, наприклад, при округленні.

8) При умові, що помилок при розрахунках не було, довжина одного відрізка інтерполяції складатиме 32 відліки.

Оскільки початковий сигнал може містити будь-яку кількість відліків, навіть при коригуванні його довжини до умови ділення на 32 вузла інтерполяції, кожного разу необхідно буде додавати різну кількість відліків, щоб провести інтерполяцію до довжини 2^{i+1} .

Оскільки кожного разу під час інтерполяції, як було показано вище, сигнал розбивається на фіксовану кількість точок від 15 до 40, то іноді може залишатись певна кількість відліків, які спочатку не можна повністю і рівномірно розподілити по усім відрізкам інтерполяції. Це означає, що ці зайві відліки можна включити не у всі відрізки.

Необхідно розробити алгоритм, який би розподіляв усі додаткові точки по відповідним відрізкам інтерполяції за певним правилом. Наприклад, розділити додаткові точки на дві категорії: перша категорія включає в себе ті точки, якими можна заповнити кожен відрізок інтерполяції без виключення. Друга категорія – це та кількість точок, яка менша за кількість відрізків інтерполяції. Тобто, не в кожен відрізок інтерполяції можна включити додаткову точку, наприклад, початковий сигнал містить 1099 точок, найближче значення 2^i це 1024 точки, тобто інтерполяцію необхідно проводити до 2048 відліків, але 1099 не ділиться націло на жодне число з проміжку від 15 до 40. Після коригування довжини (умова ділення на 32) у початковому сигналі залишається 1088 відліків і при інтерполяції необхідно додати 960 відліків у 34 проміжки інтерполяції, оскільки $1088/32=34$. Проте 960 не ділиться націло на 34, залишається 8 відліків остачі ($960-34*28=8$). Це означає, що у кожен з 34 відрізків буде додано по 28 відліків при інтерполяції і залишиться 8 відліків, які необхідно додати у сигнал за певним правилом.

Спочатку було розглянуто два варіанти: додавати по одному відліку у необхідну кількість відрізків (необхідна кількість відрізків співпадає з кількістю

відліків остачі, оскільки в кожен відрізок додаватиметься лише 1 відлік з остачі), починаючи з останнього та починаючи з першого відрізків. Нажаль, ні в рамках першого, ні в рамках другого варіантів не було знайдено єдиного алгоритму, який би правильно працював для усіх можливих довжин початкового сигналу.

Саме тому було запропоновано у разі наявності остачі додавати по одному відліку в кожен відрізок інтерполяції і зайві відліки (для описаного прикладу в 34 відрізки треба додати не 8, а 34 відліки; зайвими вважаються $34-8=26$ відліків) видаляти з сигналу, починаючи з кінця через певний крок, який відповідає довжині одного відрізка.

Таким чином, удалося розробити універсальний алгоритм інтерполяції, який коректно працює для усіх довжин початкового сигналу. За наведеними алгоритмами розроблено відповідне програмне забезпечення в математичному пакеті MatLab.

3.4 Рекомендації щодо використання вдосконаленого методу в системах багатокласової діагностики

Єдине обмеження вдосконаленого методу, яке було встановлено при розробці алгоритмічного та програмного забезпечення – початковий сигнал не може бути меншим за 15 відліків. Дане обмеження не є суттєвим при обробці вимірних масивів даних, які були попередньо записані у файл. При наявності необхідності роботи програмного забезпечення у режимі реального часу для оцінки та прогнозування технічного стану об'єктів системами багатокласової діагностики алгоритм програми легко вдосконалити для використання початкових сигналів довжиною від 2 відліків. Для 1 відліку існує нескінченна кількість можливих варіантів апроксимації, тому апроксимація при наявності лише одного відліку не є раціональним кроком.

Також для використання розробленого програмного забезпечення в системах багатокласової діагностики необхідно мати відповідне програмне

забезпечення, включаючи патематичний пакет MatLab і апаратну частину, яка задовольняє мінімальним системним вимогам для використання названого математичного пакету.

За необхідності дане програмне забезпечення може бути адаптоване під будь-яку мову програмування для зняття обмежень, щодо операційної системи, які накладає використання математичного пакету MatLab.

Висновки до розділу 3

1. Наведено теоретичний опис методу найменших квадратів, а також його переваги й недоліки.

2. Показано основні недоліки використання методу найменших квадратів при апроксимації знакозмінних сигналів (періодичного гармонічного та неперіодичного перехідного) по умій довжині сигналу: максимальна похибка апроксимації від 30% до 53%.

3. Запропоновано шляхи вдосконалення методу найменших квадратів для можливості застосування до знакозмінних сигналів.

4. Вдосконалено відомий метод кускової апроксимації даних на основі методу найменших квадратів шляхом введення згладжування у місцях з'єднання сусідніх сегментів. Усунено екстремуми похибок, які були присутніми в місцях з'єднання сусідніх сегментів.

5. Вдосконалено відомий метод кускової апроксимації даних на основі методу найменших квадратів шляхом зменшення порядку використовуваних поліномів з 80-го до 5-го. Показано, що похибка не змінює свій порядок у вищеописаному випадку, але подальше зниження порядку полінома призводить до зміни порядку похибки, а саме: при кожному зменшенні порядку (нижче п'ятого) полінома на одиницю призводить до збільшення похибки на один порядок.

6. Вдосконалено метод найменших квадратів шляхом введення в нього попередньої інтерполяції початкового сигналу до довжини 2^i для можливості використання швидких алгоритмів обробки даних.

7. Надано рекомендації щодо застосування вдосконаленого методу апроксимації у системах багатокласової діагностики.

РОЗДІЛ 4

РОЗРОБЛЕННЯ СТАРТАП ПРОЕКТУ

Вдосконалений алгоритм апроксимації даних

4.1 Опис ідеї проекту

Завдання апроксимації встає досить часто перед дослідниками і інженерами в різних областях науки і техніки. Области, де можна застосувати ті чи інші методи вирішення завдань наближення функцій і сигналів досить широкі і різноманітні. Вони використовуються при виконанні математичних розрахунків, математичного моделювання; при проектуванні комунікаційного обладнання, систем технічного зору, високоякісного звуковідтворювального та медичного обладнання; застосовуються в економіці та соціології, а також у технічній діагностиці.

Алгоритми апроксимації в основному застосовуються в будівельних компаніях інженерних споруд для забезпечення стійкості та передбачення зносу або поломки конструкції. Окрім цього даний алгоритм можливо використовувати задля діагностики поточного стану людини та її майбутній розвиток, а також в державних установах (наприклад, Національний банк України) задля передбачення різких скоків курсу валют.

В межах підпункту послідовно проаналізовано та подано у вигляді таблиць: зміст ідеї; можливі напрямки застосування; основні вигоди, що може отримати користувач товару та чим відрізняється від існуючих аналогів та заміників.

В таблиці 4.1 наведено цілісне уявлення про зміст ідеї та можливі базові потенційні ринки, в межах яких потрібно шукати потрібні групи потенційних клієнтів.

Таблиця 4.1 Опис ідеї стартап-проекту

Зміст ідеї	Напрямки застосування	Вигоди для користувача
Використання вдосконаленого методу апроксимації експериментальних даних у різних областях техніки та науки	1. Будівництво	Попередження зносу конструкції, поломки або її руйнуванню Зменшення витрат на ремонтне обслуговування Визначення терміну придатності Визначення умов небезпеки експлуатації Висока точність отриманих даних
	2. Економіка	Прогнозування зростання чи спадання економічних показників Зменшення витрат на обслуговування Визначення ймовірності процесу Висока точність отриманих даних
	3. Медицина	Передбачення результату лікування Визначення ймовірності процесу Висока точність отриманих даних
	4. Політика	Політичні прогнози(результати виборів, міжнародні відношення) Визначення ймовірності процесу Висока точність отриманих даних
	5. Військова справа	Прогнозування поведінки супротивника чи потенційного супротивника Визначення ймовірності процесу Висока точність отриманих даних
	6. Психологія	Прогнозування стійкості подружніх відносин Визначення ймовірності процесу Висока точність отриманих даних
	7.Ресурсозабезпеченість	Прогнозування споживання електроенергії, води, корисних копалин і т.п. Зменшення витрат на обслуговування Визначення ймовірності процесу Висока точність отриманих даних

Висновок: В більшості технічних систем задача прогнозування є невирішеною, оскільки існуючий математичний апарат та алгоритми апроксимації у деяких випадках виявляються неефективними і не дозволяють знайти аналітичний опис вимірної величини з достатньою швидкістю та точністю. Тому знаходження нових підходів є актуальним на ринку послуг. Головними напрямками застосування є будівництво, медицина, економіка.

Аналіз потенційних техніко-економічних переваг ідеї порівняно із пропозиціями конкурентів наведено в таблиці 4.2.

Таблиця 4.2 Визначення сильних, слабких та нейтральних характеристик

№ п/п	Техніко-економічні характеристики ідеї	(потенційні) товари/концепції конкурентів				W (слабка сторона)	N (нейтральна сторона)	S (сильна сторона)
		Мій проект	Balfour Beat	Pipedrive	Falcon			
1	Низькі витрати	25	50	45	30			+
2	Точність	висока	середня	середня	середня		+	
3	Швидкість проведення результату	висока	середня	середня	середня			+
4	Гнучкість	+	-	-	-			+
5	Простота	77%	50%	60%	80%			+

Висновки: Як видно з таблиці головною перевагою проекту для користувачів являється збільшення точності вимірювання та зменшення часу на проведення аналізу. Не менш важливим, є такі техніко-економічні характеристики, як ціна та простота алгоритму. Слабку позицію займає простота програми, так як для виконання апроксимації складних функцій необхідний більш складний алгоритм.

4.2 Технологічний аудит ідеї проекту

У таблиці 4.3 проводиться аудит технології, за допомогою якої можна реалізувати ідею проекту.

Таблиця 4.3 Технологічна здійсненність ідеї проекту

1	2	3	4	5
№ п/п	Ідея проекту	Технології її реалізації	Наявність технологій	Доступність технологій
1	Підвищення точності методу	Використання нових датчиків	Наявна	Доступна

Продовження таблиці 4.3

1	2	3	4	5
2	Зменшення впливу складових шуму	Впровадження алгоритмів фільтрації та компенсування похибок	Необхідно розробити	Теоретично доступна
3	Використання алгоритму задля прогнозування експериментальних даних	Створення алгоритму, що буде підходити для різних напрямків застосування	Наявна	Доступна
4	Інтеграція алгоритму в реальні прилади	Використання передових технологій виробництва приладів	Наявна	Доступна
Обрана технологія реалізації ідеї проекту: Створення нових алгоритмів у системі MatLab. MatLab – це пакет прикладних програм для чисельного аналізу, а також мова програмування, що використовується в даному пакеті.				

Висновки: Проаналізувавши таблицю, можна зробити висновок, що даний проект можливо реалізувати за рахунок впровадження нових датчиків, алгоритмів фільтрації, створення алгоритму, що підійде для різних напрямків застосування) компенсування похибок та використання передових технологій виробництва приладів.

4.3 Аналіз ринкових можливостей запуску стартап-проекту

Визначення ринкових можливостей, які можна використати під час ринкового впровадження проекту, та ринкових загроз, які можуть перешкодити реалізації проекту, дозволяє спланувати напрями розвитку проекту із урахуванням стану ринкового середовища, потреб потенційних клієнтів та пропозицій проектів-конкурентів.

Таблиця 4.4 Попередня характеристика потенційного ринку стартап-проекту

1	2	3
№ п/п	Показники стану ринку (найменування)	Характеристика
1	Кількість головних гравців, од	6
2	Загальний обсяг продаж, грн/ум.од	80000
3	Динаміка ринку (якісна оцінка)	зростає

Продовження таблиці 4.4

1	2	3
4	Наявність обмежень для входу (вказати характер обмежень)	Ціна
5	Специфічні вимоги до стандартизації та сертифікації	відсутні
6	Середня норма рентабельності в галузі (або по ринку), %	75%

Висновки: головними перевагами показників стану ринку є те, що динаміка стрімко зростає на попит даного продукту, це призведе до підвищення обсягу продаж. Присутні також фактори загрози для виходу на ринок. Такими факторами є високе ціноутворення та рівень знань у спеціалістів, що виконують правильне введення даних та реалізацію алгоритму. Середня норма рентабельності на ринку є досить високою – 75%, це означає, що проект рентабельний для входження на ринок.

Для отримання більш чіткої картини ситуації на ринку визначимо потенційні групи клієнтів (табл.4.5), їх характеристики, сформуємо орієнтовний перелік вимог до товару для кожної групи.

Таблиця 4.5 Характеристика потенційних клієнтів стартап-проекту

№ п/п	Потреба, що формує ринок	Цільова аудиторія (цільові сегменти ринку)	Відмінності у поведінці різних потенційних цільових груп клієнтів	Вимоги споживачів до товару
1	Попередження пошкодженню та руйнуванню об'єкту під час нормативного строку експлуатації	Будівельні компанії	Особливості, викликані зі специфікою проведення дослідів, необхідність модифікування програмно-алгоритмічного забезпечення, інтеграція з існуючими системами	Швидкість роботи Можливість комплексування з іншими системами Висока точність результатів
2	Прогнозування стану здоров'я людини	Медицина		
3	Апроксимація та прогнозування економічних показників	Економіка		

Висновки: Проаналізувавши таблицю, виділимо дві головні потреби, що формує ринок. Перша це: пошкодження та руйнування об'єкту під час

нормативного строку експлуатації; друга: визначення строку експлуатації продукції, прогнозування її зносу. В даному випадку, головною перевагою є те, що за допомогою продукту (програмного моделювання у системі MatLab) можливо вирішення даних потреб.

Проведемо аналіз факторів ринкового середовища що сприяють ринковому впровадженню (табл. 4.6.) проекту, та факторів, що йому перешкоджають (табл. 4.7.). Результати наведено у таблицях 4.6-4.7.

Таблиця 4.6 Фактори можливостей

№ п/п	Фактор	Зміст можливості	Можлива реакція компанії
1	Збільшення попиту	Різде збільшення зацікавленості до системи	Підвищення виробництва
2	Необхідність до інтеграції	Необхідність додати можливість розширення системи	Компанія може створити додаткові можливості системи на замовлення
3	Освоєння нових сфер	Система використовується у сферах, що не розглядалися виробником	Створення спеціальної робочої групи задля модернізації приладу для виконання поставлених вимог
4	Індивідуальне замовлення	Клієнт потребує додання нових специфічних додатків	Оцінка затрат і вигоди компанії в даній ситуації. Погодження умов можливого контракту.
5	Співпраця з конкурентами	Конкурент запропонував кооперацію	Оцінки можливих ризиків

Висновки: Такі системи використовуються в досить нових та прогресивних сферах, тому попит на них постійно зростає, тим самим збільшуючи ринок клієнтів. Збільшення попиту на товар – призведе до різкого збільшення об'єму виробництва та продажу, що дасть поштовх до нових вдосконалень. Це досягається шляхом реклами та освоєння нових сфер використання.

Таблиця 4.7 Фактори загроз

№ n/n	Фактор	Зміст загрози	Можлива реакція компанії
1	Конкуренція	Менша ціна у конкурента при однаковій якості продукту	Відтік клієнтів

Продовження таблиці 4.7

2	Економічний	Економічний стан країни-виробника	Відмова від продукту
3	Якість	Неналежна якість зібраного приладу	Відмова від продукту
4	Некомпетентність робітників	Неточність інженерних розрахунків	Відмова від продукту

Висновки: Головним фактором загроз є конкуренція. Вже існуючі товари на ринку мають певну репутацію та великі об'єми виробництва. Конкуренти здатні демпінгувати ціни для отримання нових клієнтів свого товару.

Надалі проведемо аналіз пропозиції (табл. 4.8.), де визначимо загальні риси конкуренції на ринку.

Таблиця 4.8 Ступеневий аналіз конкуренції на ринку

Особливості конкурентного середовища	В чому проявляється дана характеристика	Вплив на діяльність підприємства (можливі дії компанії, щоб бути конкурентоспроможною)
1. Тип конкуренції - чиста конкуренція	Мала кількість постачальників даного продукту	Відповідність ринку прогнозування випереджати існуючі технології
2. За рівнем конкурентної боротьби - міжнародний	Наявність замовників із інших держав	Міжнародний ринок
3. За галузевою ознакою - міжгалузева	Використання у різних галузях	Робота менеджменту і реклами по залученню клієнтів
4. Конкуренція за видами товарів: - товарно-видова	Товар, що пропонується є одного виду	Клієнто-орієнтована стратегія розвитку Адаптивність до умов ринку
5. За характером конкурентних переваг - цінова	Вартість залежить від комплектації та функціоналу	Пошук вигідного постачальника компонентів
6. За інтенсивністю - марочна	Вибір постачальника по бренду	Розкрутка бренду, його рекламування

Висновки: На ринку присутня чиста конкуренція через те, що окремі гравці не можуть впливати на ціну товару. За рівнем конкурентної боротьби – міжнародна з міжгалузевою ознакою, так як можливі іноземні замовники.

Конкуренція за видами товарів – видова. Вартість товару напряду залежить від комплектації та функціоналу, тому за характером конкурентних переваг – цінова.

Після аналізу конкуренції проводиться більш детальний аналіз умов конкуренції в галузі за моделлю п'яти сил М. Портера (табл. 4.9.)

Таблиця 4.9 Аналіз конкуренції в галузі за М. Портером

	Прямі конкуренти в галузі	Потенційні конкуренти	Постачальники	Клієнти	Товари-замінники
Складові аналізу	ProBuild Falcon V&B	AETS Dakota Houghton Mifflin Company	Akengineering Perfect-Group	Building company Клініки Державні установи	Алгоритм Excel
Висновки: ринок не є насиченим, але конкуренція висока, оскільки компанії які являються конкурентами мають високу репутацію. Завадою являється необхідний високий рівень капіталовкладень	Конкуренція є відносно не великою	Вихід на ринок відносно простий. Наявні потенційні конкуренти	Постачальники мають не диктувати ціни на ринку	Клієнти не диктують умови через велику зацікавленість до товару	Обмежень практично немає, оскільки існують різні обмеження по використанню

На основі аналізу конкуренції, проведеного наведеного в табл. 4.9, а також із урахуванням характеристик ідеї проекту, що наведені в табл. 4.2, вимог споживачів до товару (табл. 4.5.) та факторів маркетингового середовища (табл. 4.6, 4.7) визначимо та обґрунтуємо перелік факторів конкурентоспроможності. Аналіз наведено в таблиці 4.10.

Таблиця 4.10 Обґрунтування факторів конкурентоспроможності

№ п/п	Фактор конкурентоспроможності	Обґрунтування (наведення чинників, що роблять фактор для порівняння конкурентних проектів значущим)
1	Надійність	Використання алгоритму з високою точністю. Чим вище точність розрахунку, тим вище попит на товар
2	Простота	Простота у використанні для користувача робить систему привабливою для клієнта.
3	Адаптивність	Можливість гнучкого налаштування під конкретні задачі
4	Готовий алгоритм	Зменшення часу очікування для покупця
5	Обслуговування	Потреба в консультації з технічних питань

Висновки: Для підвищення надійності системи необхідно використовувати алгоритми з високою точністю. Простота у використанні та налаштуванні приладу робить його більш привабливим для клієнта через те, що необхідно витратити мінімум часу на налагодження та запуск. Адаптивність та простота відкривають широкий спектр використання приладу у поєднанні із іншими системами.

За визначеними факторами конкурентоспроможності (табл. 4.10) проводиться аналіз сильних та слабких сторін стартап-проекту (табл. 4.11).

Таблиця 4.11 Порівняльний аналіз сильних та слабких сторін проекту

№ п/п	Фактор конкурентоспроможності	Бали 1-20	Рейтинг товарів-конкурентів						
			-3	-2	-1	0	+1	+2	+3
1	Надійність	18							+3
2	Простота	20			-1				
3	Адаптивність	17						+2	
4	Готовий алгоритм	16				0			
5	Обслуговування	18						+2	

Висновки: спираючись на фактори конкурентоспроможності (

Таблиця 4.11) та підсумовуючи рейтинг товару відносно головного конкурента, запропонована система має більший рейтинг відносно прямих конкурентів. Дана таблиця показує якими саме особливостями розроблена система відрізняються від аналогів та в яку саме сторону. Детальний аналіз показує, що сильними сторонами є простота, можливість до адаптації з роботою із іншими системами.

Фінальним етапом ринкового аналізу можливостей впровадження проекту є складання SWOT-аналізу (матриці аналізу сильних (Strength) та слабких (Weak) сторін, загроз (Troubles) та можливостей (Opportunities), що наведено в таблиці 4.12. на основі виділених ринкових загроз та можливостей, та сильних і слабких сторін в таблиці 4.11.

Таблиця 4.12 SWOT- аналіз стартап-проекту

<p>Сильні сторони:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. простота використання; 2. адаптивність; 3. стабільна робота; 4. універсальність; 5. портативність; 6. можливість до комплексування 	<p>Слабкі сторони:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. низька репутація підприємства на початку впровадження проекту в життя; 2. необхідність значного початкового капіталовкладення; 3. висока вартість за послуги
<p>Можливості:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. вихід на міжнародний ринок; 2. збільшення попиту; 3. необхідність до інтеграції; 4. освоєння нових сфер; 5. індивідуальне замовлення; 6. співпраця з конкурентами 	<p>Загрози:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. винайдення кращих програмних комплексів; 2. кваліфікованість спеціалістів; 3. мінливість ринку та низька швидкість розрахунку складних процесів.

На основі SWOT-аналізу розробимо альтернативи ринкової поведінки (перелік заходів) для виведення стартап-проекту на ринок та орієнтовний оптимальний час їх ринкової реалізації з огляду на потенційні проекти конкурентів, що можуть бути виведені на ринок. Визначені альтернативи аналізуються з точки зору строків та ймовірності отримання ресурсів (табл. 4.13).

Таблиця 4.13 Альтернативи ринкового впровадження стартап-проекту

№ п/п	Альтернатива (орієнтовний комплекс заходів) ринкової поведінки	Ймовірність отримання ресурсів	Строки реалізації
1	Індивідуалізм (максимізація власного виграшу)	Середня	8міс
1	2	3	4
2	Кооперація (максимізація спільного виграшу)	Висока	11міс
3	Суперництво	Нижче середнього	13міс.

Висновки: в результаті аналізу обрано кооперацію, як альтернативну ринкову поведінку через те, що за відносно короткий термін існує велика ймовірність отримання ресурсів.

4.4 Розроблення ринкової стратегії проекту

Розробка ринкової стратегії першим кроком передбачає визначення стратегії охоплення ринку: опис цільових груп потенційних споживачів (табл. 4.14).

Таблиця 4.14 Вибір цільових груп потенційних споживачів

№ п/п	Опис профілю цільової групи потенційних клієнтів	Готовність споживачів сприйняти продукт	Орієнтовний попит в межах цільової групи (сегменту)	Інтенсивність конкуренції в сегменті	Простота входу у сегмент
1	Будівництво інженерних споруд(будинків, мостів)	+	+	низька	+
2	Державні установи	-	+	низька	-
3	Медичні центри діагностики	+	+	низька	+
4	Національний банк України	+	+	висока	+
5	Центри психології	+	+	низька	-
Які цільові групи обрано: під час вибору цільової групи до уваги бралось в першу чергу готовність споживача сприйняти продукт. Будівельні компанії потребують більш популярних роз'яснень щодо можливостей використання таких систем. У випадку успішної реклами є можливість зайняти нішу.					

Висновки: За результатами аналізу потенційних груп споживачів ми обрали ті, які серед усіх інших груп, існуючих у даному суспільному середовищі, найбільше потерпають від тієї проблеми, на розв'язання якої переважно спрямований проект та групи які можуть найбільше вплинути на характеристики цієї проблеми – зміст, структуру, масштабність, характер, соціальну значимість тощо.

Для роботи в обраних сегментах ринку необхідно сформулювати базову стратегію розвитку (табл. 4.15.).

Висновки: Кожне підприємство, залежно від ситуації, може обирати для себе різні «стратегічні набори», які допомагають йому більш ефективно реагувати на зміни у навколишньому середовищі. Обрана стратегія розвитку – спеціалізації, спричинена існуванням на ринку більш сильніших гравців. На перших кроках існування проекту доцільніше обрати стратегію спеціалізації та зайняти певну стабільну нішу на ринку.

Таблиця 4.15 Визначення базової стратегії розвитку

№ п/п	Обрана альтернатива розвитку проекту	Стратегія охоплення ринку	Ключові конкурентоспроможні позиції відповідно до обраної альтернативи	Базова стратегія розвитку*
1	Індивідуалізм	Стратегія недиференційованого маркетингу	Адаптація до вимог ринку Використання новацій Генерування ноу-хау	Стратегія спеціалізації

Наступним кроком є вибір стратегії конкурентної поведінки (табл. 4.16).

Таблиця 4.16 Визначення базової стратегії конкурентної поведінки

№ п/п	Чи є проект «першопрохідцем» на ринку?	Чи буде компанія шукати нових споживачів, або забирати існуючих у конкурентів?	Чи буде компанія копіювати основні характеристики товару конкурента, і які?	Стратегія конкурентної поведінки*
1	Не є першопрохідцем	Шукати нових споживачів із поступовим переманюванням від конкурентів	Компанія буде вдосконалювати наявні зразки	Стратегія виклику лідера

Висновок: оскільки проект не є першопрохідцем та має суттєві переваги по відношенню до свого прямого конкурента, можливо обрати стратегію виклику лідера. Це є можливим на фоні використання інноваційних методів підвищення точності алгоритмічного забезпечення, впровадження інновацій і технологій для вдосконалення продукту з метою ускладнення задачі конкурентів;

На основі вимог споживачів з обраних сегментів до постачальника та до продукту, а також в залежності від обраної базової стратегії розвитку та стратегії конкурентної поведінки розробимо стратегію позиціонування (табл. 4.17).

Таблиця 4.17 Визначення стратегії позиціонування

№ п/п	Вимоги до товару цільової аудиторії	Базова стратегія розвитку	Ключові конкурентоспроможні позиції власного стартап-проекту	Вибір асоціацій, які мають сформувати комплексну позицію власного проекту (три ключових)
1	Швидкість роботи	Стратегія спеціалізації	Дослідження та розвиток	Високошвидкісна, легкість, надійність
2	Можливість комплексування з іншими системами	Стратегія спеціалізації	Обслуговування	Здатна до комплексування
3	Висока стабільність результатів	Стратегія спеціалізації	Якість	високоточна

Висновки: Обравши конкретний сегмент, фірма має визначити для себе, як проникнути на нього й здобути конкурентні переваги. Перед цим потрібно дослідити позиції всіх наявних на ринку конкурентів і визначити своє місце на ринку. На ряду з використанням інноваційних методів підвищення точності, проект повинен викликати асоціації у клієнта у гнучкості налаштування та комплексування, високої якості виготовлення.

4.5 Розроблення маркетингової програми стартап-проекту

Першим кроком є формування маркетингової концепції товару, який отримає споживач, наведено у таблиці 4.18.

Таблиця 4.18 Визначення ключових переваг концепції потенційного товару

№ п/п	Потреба	Вигода, яку пропонує товар	Ключові переваги перед конкурентами (існуючі або такі, що потрібно створити)
1	Необхідність наближення експериментальних даних будь-якого вигляду для майбутнього прогнозування	Відносно дешева та надійна система	Ціна, надійність, простота, підтримка, обслуговування, універсальність

Висновки: в результаті визначення переваг концепції товару можливо створення цільової реклами товару та донесення цільового повідомлення до кінцевого споживача. Наш товар має відносно дешеву та надійну систему.

Розробимо трирівневу маркетингову модель товару (табл. 4.19).

Таблиця 4.19 Опис трьох рівнів моделі товару

Рівні товару	Сутність та складові		
I. Товар за задумом	Засіб дає можливість користувачеві оцінити отримані експериментальні дані, виконати їх наближення (апроксимацію). В повній мірі провести апроксимацію функцій різного вигляду у різних областях науки та техніки. Відтворення поточного стану здоров'я людини, поточного курсу або інших економічних показників, стану конструкції для подальшого прогнозування цих показників.		
II. Товар у реальному виконанні	Властивості/характеристики	М/Нм	Вр/Тх /Тл/Е/Ор
	Малогабаритність	15г	Тх
	Швидкість роботи	70Гц	Тх
	Точність	0,1° СКВ	Тх
	Надійність	IP67	Тх
	Вартість	50	Е
	Якість: сертифікати відповідності якості ISO, сертифікація для використання в медичних закладах, сертифікація ІЕЕЕ.		
	Пакування		
	Марка:		
III. Товар із підкріпленням	До продажу Максимальна комплектація, необхідна для замовника		
	Після продажу Після продажна підтримка, сервіс, гарантія, сервісне обслуговування		
Захист товару проводиться шляхом патентування приладу, проведення заходів захисту програмного та апаратного забезпечення, .			

Висновки: основними засобами захисту від копіювання є патентування програмних та апаратних рішень. Окрім того, захист програмного коду повинен

запобігти копіювання програми. Закладені характеристики на другому та третьому рівнях товару робить його унікальним серед конкурентів.

Наступним кроком визначимо цінові межі (табл. 4.20).

Таблиця 4.20 Визначення меж встановлення ціни

№ п/п	Рівень цін на товари-замінники	Рівень цін на товари-аналоги	Рівень доходів цільової групи споживачів	Верхня та нижня межі встановлення ціни на товар/послугу
1	90-120 у.о.	50-80 у.о.	1200-2000 у.о.	50-90 у.о.

Висновки: Для даного товару обрано середню цінову категорію, оскільки занадто висока ціна по-перше не вигідна для споживача, а по-друге дасть перевагу над товарами-конкурентами.

Наступним кроком є визначення оптимальної системи збуту, в межах якого приймається рішення (табл. 4.21).

Таблиця 4.21 Формування системи збуту

№ п/п	Специфіка закупівельної поведінки цільових клієнтів	Функції збуту, які має виконувати постачальник товару	Глибина каналу збуту	Оптимальна система збуту
1	Продаж	Повний супровід товару до замовника	Нульового рівня	Безпосередній (прямий)
2	Оренда	Надання консультацій та оренди обладнання	Нульового рівня	Безпосередній (прямий)

Висновки: Ефективною вважається така система підібраних каналів збуту і методів, яка доводить товар до місця реалізації за дуже короткий термін, затрати на організацію мінімальні. Обсяги продажу та прибутки максимально високі основними каналами збуту є оренда та продаж. Через відносно не великі об'єми виробництва немає сенсу використовувати підрядників для реалізації товару. Тому обрано нульовий рівень глибини каналу збут та прямої системи збуту.

Таблиця 4.22 Концепція маркетингових комунікацій

№ п/п	Специфіка поведінки цільових клієнтів	Канали комунікацій, якими користуються цільові клієнти	Ключові позиції, обрані для позиціонування	Завдання рекламного повідомлення	Концепція рекламного звернення
1	Зовнішні обставини спонукають споживача до пошуку рішення	Реклама SMM сайт виробника	Висока швидкість роботи Легкість Надійність	Донесення можливостей отримання прибутку за допомогою цього засобу	Показ можливостей даної системи та можливість застосування

Висновки: Маркетингова комунікація проходить через рекламу приладу в соціальних мережах, рекламі будівельних компаній чи медичних установ. Метою цих оголошень є донесення можливостей даної системи та вигоди від використання. Вся медіа реклама спрямована на створення «вау» - ефекту.

Висновки до розділу 4

Даний розділ присвячений розробленню першого етапу створення стартап-проекту. Найголовнішим в проведенні будь-якої наукової роботи є подальша комерціалізація отриманих результатів та можливість застосування розробленої концепції в промисловості. Більшість ідей в тій чи іншій мірі впливають на економічну складову підприємства. Тому розроблена ідея може бути використана як бізнес модель та може бути продана зацікавленим особам.

Першим кроком було відбір та висвітлення самої ідеї проекту. Для цього в Таблиця 4.1 приведено назву проекту та можливі зацікавлені сторони, котрі будуть потенційними споживачами продукту та які саме ризики можуть бути під час реалізації. Аналіз слабких та сильних сторін дають можливість автору проекту визначити аспекти, на яких слід зробити ставку. Перелік слабких, сильних та нейтральних характеристик ідеї дає можливість до уявлення конкурентоспроможності запропонованого рішення. Для даного проекту було

обрано не зайняту нішу товару у сфері будівництва інженерних споруд. Сильними сторонами проекту являються можливість до інтеграції з іншими приладами та підвищення стійкості та надійності системи.

Наступним кроком проводився технологічний аудит проекту. Під час аудиту автор отримує можливість до розуміння кращої технології виконання. Виявлено що більшість технологій вже існує, однак використання останніх не дасть можливості мати переваги над конкурентами. Саме ставка на інноваційні методи підвищення точності можуть зробити пристрій унікальним та незамінним. Загалом, створення проекту можливе, однак необхідно провести доволі сильну рекламну компанію, щоб отримати покупців.

Зважаючи на стрімкий розвиток технологій, для швидкого отримання ресурсів та прибутків, слід обрати кооперацію, як форму ринкового впровадження проекту. Тобто, для того щоб встигнути за ринком, слід не розроблювати систему з нуля, оскільки це займе доволі багато часу, а запропонувати лідерам ринку використання запропонованих програмних рішень. Звісно, це є альтернативою, оскільки в такому випадку ні одна зі сторін не отримає повного прибутку.

Після аналізу всіх аспектів ринку, подальша імплементація проекту можлива. Але є одна важлива умова. Слід провести доволі сильну рекламну компанію, та донести до споживачів необхідність використання системи саме з високою точністю та чому саме обрати нашу систему.

ВИСНОВКИ

Використання вдосконалених алгоритмів апроксимації даних при обробці вимірних сигналів у системах багатокласової діагностики є важливим і актуальним завданням у зв'язку з необхідністю не тільки точно класифікувати поточний технічний стан об'єкта, а й спрогнозувати майбутній. Тому в дисертації було проведено вдосконалення відомого методу апроксимації даних і отримано наступні науково-технічні результати:

1. Проведено огляд методів апроксимації даних вимірювань. Для використання в системах багатокласової діагностики обрано метод найменших квадратів. Описано основні аналітичні залежності обраного методу, а також його недоліки і переваги. Показано, що використання методу найменших квадратів при апроксимації одразу по всій довжині знакозмінних сигналів призводить до значних похибок від 30% до 53%.

2. Проведено огляд існуючих методів інтерполяції сигналів. Наведено відмінності методів інтерполяції та апроксимації, які полягають в тому, що, на відміну від апроксимації, інтерполяційний поліном обирається таким чином, щоб проходити через кожен відлік початкового сигналу без винятків. Для вдосконалення обраного методу апроксимації даних було прийнято рішення використати метод інтерполяційних поліномів Лагранжа. Описано основні аналітичні залежності обраного методу, а також його недоліки і переваги.

3. Проведено дослідження ефективності інтерполяційних алгоритмів при використанні ідеальних (змодельованих) сигналів різної фізичної природи, а саме: періодичного гармонічного з частотами 2Гц, 20Гц, 200Гц та неперіодичного перехідного з частотою 20Гц. Показано, що при використанні занадто великої кількості вузлів інтерполяції проявляються методичні похибки обраного методу, що призводить до значного росту похибки інтерполяції. Показано, що найкращим із розглянутих варіантів є використання 33 (або 32) вузлів інтерполяції. Показано, що точність інтерполяції розглянутих періодичних і неперіодичних процесів методом Лагранжа не залежить від частоти сигналу, частоти дискретизації, а також довжини сигналу.

4. Розроблено алгоритмічне та програмне забезпечення проксимації даних методом найменших квадратів у математичному пакеті MatLab. Вдосконалено стандартний алгоритм апроксимації методом найменших квадратів шляхом використання кускової апроксимації поліномами до п'ятого порядку. Показано, що похибки апроксимації знизилися від 53% до $10^{-3}\%$. Вдосконалено алгоритм кускової апроксимації шляхом введення згладжування в місцях з'єднання сусідніх відрізків. Показано, що згладжування дозволило прибрати екстремуми похибок у місцях з'єднання сусідніх відрізків.

5. Розроблено алгоритмічне та програмне забезпечення апроксимації даних за рахунок попереднього використання методів інтерполяції для зміни довжини початкового сигналу до значення 2^i (i – натуральне число) для можливості використання швидких алгоритмів обробки даних у системах багатокласової діагностики, а також можливого підвищення точності прогнозування технічного стану об'єктів такими системами.

6. Надано рекомендації щодо використання розробленого алгоритмічного та програмного забезпечення в системах багатокласової діагностики, які полягають в тому, що: єдине обмеження вдосконаленого методу, яке було встановлено при розробці алгоритмічного та програмного забезпечення – початковий сигнал не може бути меншим за 15 відліків; при наявності необхідності роботи програмного забезпечення у режимі реального часу для оцінки та прогнозування технічного стану об'єктів системами багатокласової діагностики алгоритм програми легко вдосконалити для використання початкових сигналів довжиною від 2 відліків; для використання розробленого програмного забезпечення в системах багатокласової діагностики необхідно мати відповідне програмне та апаратне забезпечення.

ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

1. Некрасов О.Н. Интерполирование и аппроксимация данных полиномами степенного, экспоненциального и тригонометрического вида / О.Н. Некрасов, Э.Г. Мирмович // Научные и образовательные проблемы гражданской защиты. – 2010. – №4. – С. 23.
2. Корлёв В.Д. Вычислительная математика: Методические указания к лабораторным работам 1,2 / В.Д. Корлёв. – Рязань: Рязан. гос. радиотехн. акад. – 2008. – 8 с.
3. Решение задач аппроксимации функций в системах компьютерной математики [Электронный ресурс]. – Доступ: <http://www.dissercat.com/content/reshenie-zadach-aproksimatsii-funktsii-v-sistemakh-kompyuterno-i-matematiki>. Дата звернення: Груд. 10, 2018р.
4. Математика: Энциклопедия / под ред. Ю.В. Прохорова. – М.: Большая Российская энциклопедия, 2003.
5. Баскаков С.И. Радиотехнические цепи и сигналы / С.И. Баскаков. – М.: Высшая школа, 2000. – 446 с.
6. Попов В.П. Основы теории цепей / В.П. Попов.— М.: Высшая школа, 1998. – 575 с.
7. Радиотехнические цепи и сигналы. Задачи и задания / под ред. Я.Н. Яковлева. – М.: ИНФРА-М; Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2003.
8. Иванов М.Т. Теоретические основы радиотехники / М.Т. Иванов, А.Б. Сергиенко, В.Н. Ушаков; под ред. В.Н. Ушакова. – М.: Высшая школа, 2002.
9. Техническая диагностика [Электронный ресурс]. – Доступ: https://ru.wikipedia.org/wiki/Техническая_диагностика. Дата звернення: Груд. 10, 2018р.
10. Самое главное о нейронных сетях [Электронный ресурс]. – Доступ: <https://habrahabr.ru/company/yandex/blog/307260/> Дата звернення: Груд. 10, 2018р.

11. Искусственная нейронная сеть [Электронный ресурс]. – Доступ: https://ru.wikipedia.org/wiki/Искусственная_нейронная_сеть Дата звернения: Груд. 10, 2018р.
12. Neural networks [Электронный ресурс]. – Доступ: https://www.doc.ic.ac.uk/~nd/surprise_96/journal/vol4/cs11/report.html Дата звернения: Груд. 10, 2018р.
13. Медведев В.С., Потёмкин В.Г. Нейронные сети. MATLAB 6 / Под ред. В.Г.Потёмкина. – М.: Диалог-МИФИ, 2002. – 496 с.
14. Хайкин С. Нейронные сети. Полный курс / С. Хайкин. – М., 2006. – 1105 с.
15. В.И. Гализдра. Нейронные сети и аппроксимация данных / В.И. Гализдра, Ш.Б. Бабаев // Научные и образовательные проблемы гражданской защиты – 2011. – №3. – С. 36.
16. Апроксимация [Электронный ресурс]. – Доступ: <https://studfiles.net/preview/380226/> Дата звернения: Груд. 10, 2018р.
17. Ахиезер Н.И. Лекции по теории аппроксимации / Н.И. Ахиезер. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1965.
18. Голубинский А.Н. Методы аппроксимации экспериментальных данных и построения моделей / А.Н. Голубинский // Вестник Воронежского института МВД России. – №2. – 2007. – С.1-6.
19. Метрология и радиоизмерения / В.И. Нефедов [и др.] / под ред. В.И. Нефедова. – М.: Высшая школа, 2003.
20. Бендат Дж. Прикладной анализ случайных данных / Дж. Бендат, А. Пирсол. – М.: Мир, 1989.
21. Интерполяция, аппроксимация и регрессия [Электронный ресурс]. – Доступ: <http://lib.qrz.ru/node/10661> Дата звернения: Груд. 10, 2018р.
22. Половко А.М. Интерполяция. Методы и компьютерные технологии их реализации / Половко А.М., Бутусов П.О. – СПб.: БХВ-Петербург, 2004. – С.17-48.

23. Интерполяция [Электронный ресурс]. – Доступ: https://studopedia.ru/14_111504_postanovka-zadachi-interpolyatsii.html Дата звернення: Груд. 10, 2018р.
24. Квадратичная интерполяция. [Электронный ресурс]. – Доступ: <http://www.ngpedia.ru/id62266p1.html> Дата звернення: Груд. 10, 2018р.
25. Москалець О.Ф. Метод найменших квадратів для сплайнів непарних степенів / Москалець О.Ф., Шутко В.М. // Bulletin of Engineering Academy Of Ukraine. – №2. – 2010. – С. 224
26. Сплайн [Электронный ресурс]. – Доступ: <https://ru.wikipedia.org/wiki/Сплайн> Дата звернення: Груд. 10, 2018р.
27. Интерполирование сплайнами [Электронный ресурс]. – Доступ: http://www.simumath.net/library/book.html?code=Interpol_splines Дата звернення: Груд. 10, 2018р.
28. Interpolation Scheme for Planar Cubic Spline Curves / Marjeta Krajnc // Acta Applicandae Mathematicae. – 2011 – С. 129.
29. Stefan Jakobsson. Rational radial basis function interpolation with applications to antenna design / Stefan Jakobsson, Björn Andersson, Fredrik Edelvik. // Journal of Computational and Applied Mathematics. – Volume 233. – Issue 4. – 2009. – С.889.
30. Qi Duan. A bivariate rational interpolation and the properties / Qi Duan, Yunfeng Zhang, E.H. Twizell. // Applied Mathematics and Computation. – Volume 179. – Issue 1. – 2006. – С. 190.
31. Qi Duan. A new rational interpolation based on function values and constrained control of the interpolant curves / Qi Duan, Yunfeng Zhang, E.H. Twizell. // Applied Mathematics and Computation. – Volume 161. – Issue 1. – 2005. – С. 311.
32. Qi Duan. Hermite interpolation by piecewise rational surface / Qi Duan, Yunfeng Zhang, E.H. Twizell. // Applied Mathematics and Computation. – Volume 198. – Issue 1. – 2008. – С. 59

33. Qi Duan. A new weighted rational cubic interpolation and its approximation / Qi Duan, Yunfeng Zhang, E.H. Twizell. // *Applied Mathematics and Computation*. – Volume 168. – Issue 2. – 2005. – C. 990.
34. MinHu. Adaptive osculatory rational interpolation for image processing / MinHu, Jieqing Tan. // *Journal of Computational and Applied Mathematics*. – Volume 195. – Issues 1–2. – 2006. – C. 46.
35. Giampietro Allasia. Two interpolation operators on irregularly distributed data in inner product spaces / Giampietro Allasia, CesareBracco. // *Journal of Computational and Applied Mathematics*. – Volume 235. – Issue 7. – 2011. – C. 1763.
36. Qian-Jin Zhaoa. Block-based Thiele-like blending rational interpolation / Qian-Jin Zhaoa, Jieqing Tan. // *Journal of Computational and Applied Mathematics*. – Volume 195. – Issues 1–2. – 2006. – C. 312.
37. M.Sarfraza. Data visualization using rational spline interpolation / M.Sarfraza, Malik Zawwar Hussain. // *Journal of Computational and Applied Mathematics*. – Volume 189. – Issues 1–2. – 2006. – C. 513.
38. T.N.T. Goodman. Planar interpolation with a pair of rational spirals / T.N.T.Goodman, D.S.Meek. // *Journal of Computational and Applied Mathematics*. – Volume 201. – Issue 1. – 2007. – C. 112.
39. Malik Zawwar Hussain. Positivity-preserving interpolation of positive data by rational cubics / Malik Zawwar Hussain, Muhammad Sarfraz // *Journal of Computational and Applied Mathematics*. – Volume 218. – Issue 2. – 2008. – C. 446.
40. Aurelian Bejancu. Semi-cardinal interpolation and difference equations: From cubic B-splines to a three-direction box-spline construction Aurelian Bejancu. // *Journal of Computational and Applied Mathematics*. – Volume 197. – Issue 1. – 2006. – C. 62.
41. C. G. Zhu. Lagrange interpolation by bivariate splines on cross-cut partitions / C. G. Zhu, R. H. Wang. // *Journal of Computational and Applied Mathematics*. – vol. 195. – no. 1-2. – 2006. – C. 326.
42. K. Maleknejad. Numerical solution of Hammerstein integral equations by using combination of spline-collocation method and Lagrange interpolation / K.

Maleknejad, H. Derili *Applied // Mathematics and Computation*. – vol. 190. – no. 2. – 2007. – С. 1557.

43. Адаменко В. О. Штучні нейронні мережі як апроксимаційний апарат в задачах проектування радіотехнічних пристроїв / Вісник Національного технічного університету України "КПІ", №51, 2012. – С.

44. Введение в методы интерполяции [Электронный ресурс]. – Доступ: <https://desktop.arcgis.com/ru/arcmap/10.4/extensions/geostatistical-analyst/an-introduction-to-interpolation-methods.htm> Дата звернення: Груд. 10, 2018р.

45. Интерполяционный многочлен Лагранжа https://ru.wikipedia.org/wiki/Интерполяционный_многочлен_Лагранжа Дата звернення: Груд. 10, 2018р.

46. Турчак Л.И. Основы численных методов/ Л.И. Турчак, П.В. Плотников – Физматлит, 2003.

47. Интерполяционные методы Лагранжа и Ньютона [Электронный ресурс]. – Доступ: http://posibnyky.vntu.edu.ua/k_g/zmg/zmg/142.htm Дата звернення: Груд. 10, 2018р.

48. Интерполяційні формули Лагранжа для нерівновіддалених вузлів інтерполяції [Електронний ресурс]. – Доступ: <http://www.mathros.net.ua/interpoljacijni-formuly-lagranzha-dlja-nerivnoviddalenyh-vuzliv-interpoljicii.html> Дата звернення: Груд. 10, 2018р.

49. Классический метод наименьших квадратов [Электронный ресурс]. – Доступ: <https://works.doklad.ru/view/LTI1Xp37Hbc.html> Дата звернення: Груд. 10, 2018р.

50. Метод наименьших квадратов [Электронный ресурс]. – Доступ: http://ru.math.wikia.com/wiki/Метод_наименьших_квадратов Дата звернення: Груд. 10, 2018р.

51. Метод наименьших квадратов [Электронный ресурс]. – Доступ: <https://dic.academic.ru/dic.nsf/ruwiki/95517> Дата звернення: Груд. 10, 2018р.

52. Метод наименьших квадратов [Электронный ресурс]. – Доступ: http://help.prognoz.com/ru/mergedProjects/Lib/01_regression_models/uimodelling_linearregr_lsm.htm Дата звернення: Груд. 10, 2018р.

53. Лисікова К.О. Вдосконалення методу апроксимації даних вимірювання. [Текст] : дис. ... магістр : 151 – Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології / Лисікова Карина Олегівна. – К., 2018.

54. Цибульник С.О. Апроксимація функцій методом найменших квадратів / С.О. Цибульник, К.О. Лисікова // Вісник Інженерної академії України. – 2017. – №1. – С. 106-110.