

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

Приладобудівний факультет

(повна назва інституту/факультету)

Прилади та системи орієнтації і навігації

(повна назва кафедри)

«На правах рукопису»

УДК 001.891.573:519.651:519.654

«До захисту допущено»

Завідувач кафедри

_____ (підпис)

_____ (ініціали, прізвище)

“ _____ ” _____ 20__ р.

Магістерська дисертація

зі спеціальності (спеціалізації) _____

(код і назва спеціальності)

151. Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології

на тему: _____ Вдосконалення методу апроксимації даних вимірювань

Виконала: студентка 6 курсу, групи ПГ-61М

(шифр групи)

Лісікова Карина Олегівна

(прізвище, ім'я, по батькові)

_____ (підпис)

Науковий керівник доцент.к.т.н. к.т.н. Цибульник С.О.

(посада, науковий ступінь, вчене звання, прізвище та ініціали)

_____ (підпис)

Консультант доцент к.т.н.Бояринова К.О.

(назва розділу)

(науковий ступінь, вчене звання, прізвище, ініціали)

_____ (підпис)

Рецензент доцент к.т.н.Маркін М.О

(посада, науковий ступінь, вчене звання, науковий ступінь, прізвище та ініціали)

_____ (підпис)

Засвідчую, що у цій магістерській дисертації немає запозичень з праць інших авторів без відповідних посилань.

Студент _____

(підпис)

РЕФЕРАТ

В магістерській дисертації за напрямком досліджень «Вдосконалення методу апроксимації експериментальних даних» розглянута необхідність подання в зрозумілій та стислій формі емпіричних залежностей між параметрами, що описують поведінку системи. Для цього використовують апроксимацію даних. Адже дані, отримані експериментально, є переважно дискретним поданням функціональних залежностей, що характеризують цю систему. Подальша обробка таких даних у задач, наприклад, математичного моделювання, прогнозування, збереження та передавання великих масивів інформації, знаходження та опису функціональних залежностей вимірювальних приладів, функціональних перетворювачів, може бути проблематичною через наявність шуму. Існують різні методи апроксимації, але не всі вони працюють з високою точністю. Тож виникає проблема до вдосконалення методу апроксимації експериментальних даних, підвищення точності та зменшення впливу складової шуму на результат апроксимації.

Розглянуто різні методи апроксимації, їх переваги та недоліки. Виконано дослідження наближення даних лінійних та знакозмінних функцій методом найменших квадратів та методом розбиття сигналу на відрізки (кусково поліноміальна апроксимація). Проаналізовано отримані результати та виконано пошук підвищення точності цих результатів і зменшення похибки.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Проведені в дисертації дослідження не пов'язані з науково-дослідними роботами.

Метою дисертаційної роботи є вдосконалення методу апроксимації даних вимірювання та рекомендацій щодо використання алгоритму в задачах діагностики та прогнозування.

Досягнення мети передбачає вирішення наступних задач:

- Провести огляд існуючих методів наближення функцій.

- Виконати аналіз робіт інших авторів за темою дисертаційної роботи.
- Розглянути основні методи апроксимації даних вимірювань та обрати один з них для вдосконалення.
- Визначити точність апроксимації з використанням змодельованих (ідеальних) сигналів за допомогою стандартного та вдосконаленого методів.
- Визначити точність апроксимації з використанням моделей реальних сигналів (адитивна суміш ідеального сигналу з білим шумом) за допомогою стандартного та вдосконаленого методів.
- Визначити залежність мінімальної похибки апроксимації від довжини початкового сигналу за допомогою стандартного та вдосконаленого методів.

Об'єктом дослідження є процес апроксимації експериментальних даних вимірювань систем багатокласової діагностики.

Предметом дослідження є вдосконалення методу апроксимації експериментальних даних вимірювань систем багатокласової діагностики за рахунок розбиття сигналу на відрізки обмеженої довжини, їх об'єднання та згладжування.

Методи дослідження – математичне моделювання.

Наукова новизна дисертації полягає в наступному:

Вдосконалено метод апроксимації даних вимірювань для коливальних сигналів (періодичних, неперіодичних, знакозмінних) шляхом розбиття всього сигналу на відрізки однакової довжини та введенням згладжування для зменшення похибки на розривах відрізків.

Практичне значення полягає у розробці алгоритмічного та програмного забезпечення апроксимації даних вимірювань.

Апробація результатів дисертації відбулася на наступних конференціях:

1. Лисікова К.О. Апроксимація сигналів методом най-менших квадратів / С.О. Цибульник, К.О. Лисікова // Збірник тез доповідей. XVI міжнародна науково-технічна конференція “Приладобудування: стан і перспективи”. – Київ НТУУ “КПІ”, 2017. – С. 27.
2. Лисікова К.О. Апроксимація функцій методом найменших квадратів / С.О. Цибульник, К.О. Лисікова // Вісник інженерної академії України. – Київ, 2017. – № 1. – С. 106-110. (фахове видання)
3. Лысикова К.О. Аппроксимация сигналов методом наименьших квадратов [Текст] / С.А. Цибульник, К.О. Лысикова // Новые направления развития приборостроения : материалы 10-й международной научно-технической конференции молодых ученых и студентов (Минск, 26–28 апреля 2017 г., г. Минск, Республика Беларусь)/ БНТУ, Приборостроительный факультет. – Минск, 2017. – Т. 1. - С. 66.
4. Лисікова К.О. Вдосконалення методу апроксимації даних вимірювань/ С.О. Цибульник, К.О. Лисікова // Збірник тез доповідей. XVII міжнародна науково-технічна конференція “Приладобудування: стан і перспективи”. – Київ НТУУ “КПІ” ім. Ігоря Сікорського, 2018. – С. 31.

Публікації. . За матеріалами дисертації було опубліковано в матеріалах конференцій – 3 доповіді, видана 1 стаття.

Структура дисертації. Дисертаційна робота складається зі вступу, чотирьох розділів, висновків, переліку посилань. Загальний обсяг дисертації становить 140 сторінок, 61 малюнок, 25 таблиці, 29 положень переліку посилань.

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ, МЕТОД НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ,
МЕТОДИ АПРОКСИМАЦІЇ, КУСКОВО ПОЛІНОМІАЛЬНА АПРОКСИМАЦІЯ,
MATLAB

ABSTRACT

In the master's thesis in the direction of research "Improvement of the method of approximation experimental data" is considered the need to present in an understandable and concise form the empirical relationships between the parameters describing the behavior of the system. To do this, use the approximation of data. Indeed, the data obtained experimentally, is mainly a discrete representation of the functional dependencies that characterize this system. Further processing of such data in tasks such as mathematical modeling, forecasting, storing and transmitting large amounts of information, finding and describing the functional dependencies of measuring devices, functional converters, can be problematic due to the presence of noise. There are different methods of approximation, but not all of them work with high accuracy. So there is a problem before improving the method of approximation of experimental data, increasing the accuracy and reducing the effect of the noise component on the result of approximation.

Different methods of approximation, their advantages and disadvantages are considered. The study of the approximation of data of linear and alternating functions by the method of least squares and the method of splitting the signal into segments (piecewise polynomial approximation) is performed. The obtained results are analyzed and the search for improvement of accuracy of these results and reduction of error is made.

Communication with the scientific programs, plans, themes. Studies conducted in the dissertation are not related to research work.

The aim of the thesis is to improve the method of measuring data approximation and recommendations on the use of the algorithm in diagnostic and forecasting tasks.

Achieving the goal involves solving the following tasks:

- Review the existing methods of approaching functions.
- Perform an analysis of the work of other authors on the topic of dissertation work.

- Consider the main methods of approximating the measurement data and choose one of them for improvement.

- Determine the accuracy of approximation using simulated (ideal) signals using standard and advanced methods.

- Determine the accuracy of approximation using real-mode models (additive blend of ideal white noise signal) using standard and advanced methods.

- Determine the dependence of the minimum error of approximation on the length of the initial signal using standard and advanced methods.

The object of this research is the process of approximation of experimental data of measurements of systems of multi-class diagnostics.

The subject of the research is to improve the method of approximation of experimental data of measurement of systems of multi-class diagnostics by breaking down the signal into segments of limited length, combining them and smoothing them.

Research methods - mathematical modeling.

The practical significance of the results is as follows: The method of approximating the measurement data for oscillatory signals (periodic, nonperiodic, alternating) has been improved by splitting the entire signal into segments of equal length and introducing smoothing to reduce the error in the segments breaks.

The practical significance is the development of algorithmic and software for measuring data approximation.

Approbation of the results of the dissertation took place at the following conferences:

1. Lysikova K.O. Approximation of signals by the method of least-squares / S.O. Tsybulnik, K.O. Lysikova // Collection of abstracts. XVI International Scientific and Technical Conference "Instrumentation: Status and Prospects". - Kyiv NTUU "KPI", 2017. - P. 27.

2. Lysikova K.O. Approximation of functions by the method of least squares / S.O.Tsybulnik, K.O. Lysikova // Bulletin of the Engineering Academy of Ukraine. - Kyiv, 2017. - No. 1. - P. 106-110. (professional Edition)

3. Lysikova K.O. Approximation of signals by the method of least squares [Text] / S.A. Tsybulnik, K.O. Lysikova // New trends in the development of instrument making: materials of the 10th International Scientific and Technical Conference of Young Scientists and Students (Minsk, April 26-28, 2017, Minsk, Republic of Belarus) / BNTU, Instrument-making Faculty. - Minsk, 2017. - T. 1. - P. 66.

4. Lysikova K.O. Improvement of measurement method approximation method / S.O. Tsybulnik, K.O. Lysikova // Collection of abstracts. XVII International Scientific and Technical Conference "Instrumentation: State and Prospects". - Kyiv NTUU "KPI" them. Igor Sikorsky, 2018. - S. 31.

Publications . On the materials of the dissertation was published in the materials of conferences - 3 reports, published 1 article.

Structure of the thesis. The dissertation consists of an introduction, four sections, conclusions, a list of references. The total volume of the dissertation is 140 pages, 61 figures, 25 tables, 29 positions of the list of references.

MATHEMATICAL MODELING, METHOD OF LINES QUARTERS, METHODS OF APROXIMATION, PIECEWISE POLYNOMIAL APROXIMATION, MATLAB

ЗМІСТ

РОЗДІЛ 1	10
ОГЛЯД МЕТОДІВ АПРОКСИМАЦІЇ ВИМІРЯНИХ ДАНИХ.....	10
1.1 Чисельні методи наближення функцій	11
1.2 Огляд виконаних раніше робіт.....	16
1.3 Мета роботи	22
РОЗДІЛ 2	23
ОСНОВНІ МЕТОДИ АПРОКСИМАЦІЇ ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНИХ ДАНИХ.....	23
2.1 Середньоквадратичне наближення.....	23
2.1.1 Логарифмічна апроксимація	28
2.1.2 Експоненціальна апроксимація.....	29
2.1.3 Степенева апроксимація	30
2.2. Методи апроксимації функцій	31
2.2.1 Рівномірне наближення	31
2.2.2 Поліноміальна апроксимація	35
2.2.3 Кусково-лінійна апроксимація.....	37
2.2.4 Дробово-раціональна апроксимація.....	39
2.2.5 Апроксимація функції багатьох змінних	43
2.3 Використання MatLab для середньоквадратичної апроксимації	46
2.4 Дослідження апроксимації функцій різного виду	49
2.4.1 Синусоїдальна залежність	50
2.4.2 Параболічна функція.....	53
2.4.3 Лінійна залежність.....	54
2.4.4 Затухаюча синусоїда	56
2.5 Визначення розмаху функції	59
2.6 Розриви між відрізками кускової апроксимації	60

ВИСНОВКИ ДО РОЗДІЛУ 2	61
РОЗДІЛ 3	62
ВДОСКОНАЛЕННЯ АПРОКСИМАЦІЇ ДАНИХ	62
3.1 Апроксимація сигналів з шумом	62
3.1.1 Синусоїдальна функція.....	62
3.1.2 Параболічна функція.....	65
3.1.3 Лінійна функція	67
3.1.4 Затухаюча синусоїда	68
3.2 Введення згладжування апроксимації функцій	71
3.2.1 Синусоїдальна функція з шумом $y = 4 + \sin(2\pi \cdot f \cdot t) + \varphi$	71
3.2.2 Параболічна функція з шумом $y = a \cdot t^2 + b \cdot t + c + \varphi$	73
3.2.3 Лінійна функція з шумом $y = a \cdot t + b + \varphi$	75
3.2.4 Затухаюча синусоїда $y = 3 + \exp(-a \cdot t) \cdot \sin(\omega \cdot t) + \varphi$	77
3.3 Дослідження апроксимації функцій при зміні довжини сигналу	79
3.3.1 Довжина сигналу $L = 1024$ точки	80
3.3.2 Довжина сигналу $L = 4096$ точок	88
3.3.3 Довжина сигналу $L = 8192$ точки	96
3.4 Дослідження кускової апроксимації періодичної функції при довжині сигналу в 16384 точки	106
ВИСНОВКИ ДО РОЗДІЛУ 3	111
РОЗДІЛ 4. РОЗРОБЛЕННЯ СТАРТАП ПРОЕКТУ	112
4.1. Опис ідеї проекту	112
4.2 Аналіз потенційних техніко-економічних переваг ідеї порівняно із пропозиціями конкурентів.	114
4.3 Технологічний аудит ідеї проекту	115
4.4 Аналіз ринкових можливостей запуску стартап-проекту	116
4.5 Аналіз ринкового середовища	118
4.6 Аналіз сильних та слабких сторін стартап-проекту	122

4.7 Розроблення ринкової стратегії проекту.....	124
ВИСНОВКИ ДО РОЗДІЛУ 4	131
ВИСНОВКИ.....	133
ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ	134

РОЗДІЛ 1

ОГЛЯД МЕТОДІВ АПРОКСИМАЦІЇ ВИМІРЯНИХ ДАНИХ

Аналітичні вирази, апроксимуючі характеристики процесів, для підвищення точності і достовірності аналізу повинні якомога точніше описувати хід реальних характеристик. Однак підвищення точності апроксимації призводить, як правило, до ускладнення апроксимуючих виразів, що ускладнює як визначення значень коефіцієнтів, що входять в ці вирази, так і застосування цих виразів для аналізу процесів [4].

Після проведення досліджень складних сучасних систем необхідно опрацьовувати та аналізувати великі обсяги інформації. В алгоритмах обробки експериментальної інформації зазвичай виникає необхідність подання в зрозумілій та стислій формі емпіричних залежностей між параметрами, що описують поведінку системи. Адже дані, отримані експериментально, є переважно дискретним поданням функціональних залежностей, що характеризують цю систему [1]. Подальша обробка таких даних у задач, наприклад, математичного моделювання, прогнозування, збереження та передавання великих масивів інформації, знаходження та опису функціональних залежностей вимірювальних приладів, функціональних перетворювачів, може бути проблематичною. Тому виникає необхідність подання експериментальних даних в аналітичному вигляді.

Інженери в практичній діяльності постійно зіштовхуються з необхідністю виявлення зв'язку в процесах та явищах і необхідністю їх математичного опису. Якщо деяка величина y , що характеризує процес, залежить від сукупності незв'язаних між собою величин (x_1, x_2, \dots, x_n) таким чином, що кожному набору (x_1, x_2, \dots, x_n) відповідає значення величини y , така однозначна відповідність величини y сукупності незалежних змінних (x_1, x_2, \dots, x_n) називається *функціональною залежністю* [2], а сама змінна величина y – функцією змінних величин (x_1, x_2, \dots, x_n) ,

що формально записується у вигляді $y = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$. Так, наприклад, вираз $y = x_1^2 + 3\sqrt{x_2} + x_1 x_3^2$ є функцією трьох змінних.

1.1 Чисельні методи наближення функцій

Існує два способи отримання аналітичних виразів [1].

Перший. Значення функції y_i у вузлових точках x_i , в яких визначені дискретні значення функцій або даних, можуть бути отримані різними способами, у результаті експерименту, або обчислені. Якщо при цьому аналітичний вираз будується таким чином, щоб значення функції $y = f(x)$ та шуканого аналітичного виразу співпадали у вузлових точках x_i , то така апроксимація називається «інтерполюванням».

Другий. Функція $y = f(x)$ задана таблично або аналітично. Але в останньому випадку формула може мати дуже складний та громіздкий вигляд, що не дозволяє достатньо просто дослідити функцію методами математичного аналізу. Тоді має сенс знайти більш простий аналітичний опис функції $y = f(x)$, що спростить процедуру її дослідження. У цьому випадку значення функції $y = f(x)$ та шуканого аналітичного виразу необов'язково співпадають у вузлових точках x_i .

Нехай задана функція $y = f(x)$ і необхідно наближено замінити функцію $f(x)$ іншою функцією $\varphi(x)$ таким чином, щоб відхилення $\varphi(x)$ від $f(x)$ (в деякому певному сенсі) було найменшим в заданій області. В цьому випадку функцію $f(x)$ називають апроксимуючою, а функцію $\varphi(x)$ – апроксимованою.

Розв'язок задачі апроксимації тісно пов'язаний з необхідною точністю [3]. Точність визначається критеріями наближення. Зазвичай застосовують критерії рівномірного, середньоквадратичного та інтерполяційного (точкового приближення). Апроксимація, при якій наближення функції будується на заданому проміжку дискретної множини точок $\{x_i\}$, називається точковою. Сутність

апроксимації методом середньоквадратичного наближення полягає в тому, що табличні дані апроксимують кривою, яка не обов'язково повинна пройти через всі вузлові точки, а повинна якби згладити всі випадкові перешкоди табличної функції. Значно ефективнішим та універсальним є чебишевське (рівномірне, мінімаксне) наближення, яке має ряд беззаперечних переваг перед вищеописаними і дає змогу забезпечити задану точність, особливо при переході від експериментальних даних до аналітичних виразів на заданих відрізках. У випадку, якщо наближена функція має особливості в певних точках, які стають причиною поганої апроксимації на всьому відрізку, використовують рівномірні апроксимації на окремих частинах; тобто застосовують розривні мінімаксні поліноміальні сплайни. Вони поєднують позитивні властивості найкращого рівномірного наближення з невеликою кількістю параметрів і наближень класичними сплайнами (стійкість при обчисленні).

На рис.1.1. представлена класифікація відомих методів наближення табличних функцій [2], призначених для пошуку аналітичної залежності $Q(x)$, яка б зв'язувала експериментальні дані $\{(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)\}$, отримані в результаті інженерного або наукового експерименту.



Рисунок 1.1 - Класифікація чисельних методів наближення табличних функцій

Умовно апроксимацію можна розділити на два види [4]:

- 1) сувора теорія математичної апроксимації;
- 2) фізична (технічна) апроксимація.

Суворая теорія математичної апроксимації включає в себе наступні методи апроксимації [4]:

- 1) поліномами (многочленами);
- 2) сплайнами;
- 3) відрізками ряду Фур'є;
- 4) поліномами ортогональних многочленів;
- 5) власними функціями крайових задач.

Менш строга апроксимація - фізична (технічна) апроксимація або математична модель фізичного явища, процесу (фізичної моделі), технічного пристрою (його характеристик), сигналу (його параметрів), середовища, матерії і т. п.

Фізична (технічна) апроксимація включає в себе безліч способів апроксимації і апроксимуючих функцій, які обирають виходячи з конкретно поставленого фізичного (технічного) завдання [4].

Таким чином, за допомогою фізичної (технічної) апроксимації оперативно вирішується широке коло завдань, актуальних на даний момент, пов'язаних з конкретними проблемами і питаннями прикладного (технічного) характеру. Суворая теорія математичної апроксимації будується як фундаментальна, глобальна теорія апроксимації, яка для вирішення поточних прикладних практичних завдань може і не знадобитися. Це може відбутись внаслідок або втрати з плином часу актуальності розв'язуваної задачі, або складності теорії (апроксимуючої функції), або великої кількості коефіцієнтів апроксимації.

На рис.1.2 зображено класифікацію методів апроксимації експериментальних даних.

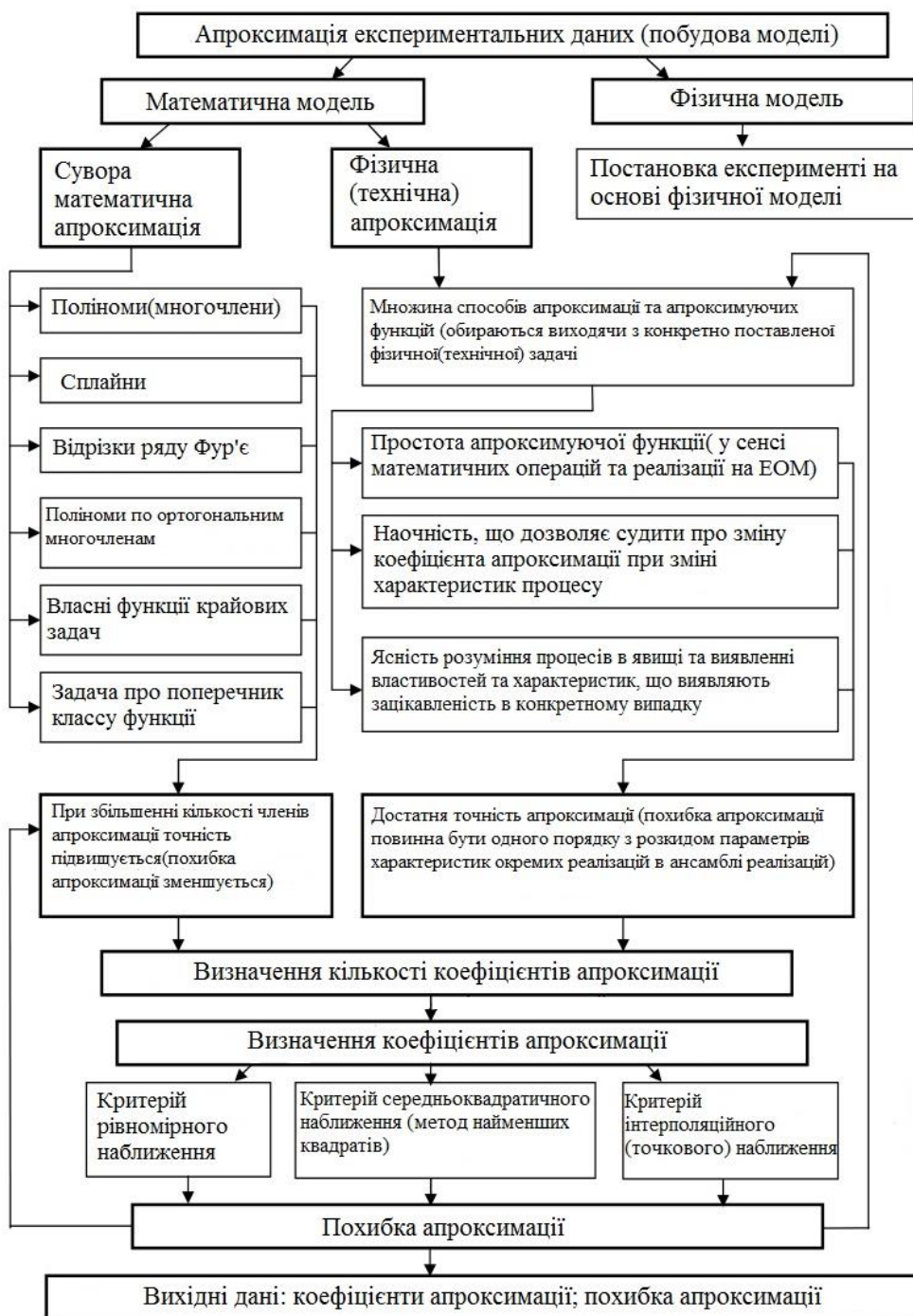


Рисунок 1.2 - Класифікація методів апроксимації експериментальних даних та побудова моделей

Як правило, характеристики багатьох складних процесів і явищ отримують експериментально, набагато рідше вдається знайти їх з теоретичного аналізу. Дуже часто безпосереднє застосування експериментальних даних у формі таблиць або

графіків виявляється незручним, і дані прагнуть описати за допомогою досить простих аналітичних співвідношень, які якісно відображають характер розглянутих залежностей [4]. Таким чином, якщо дослідження має проводитися не чисельними, а аналітичними методами, то потрібно підібрати таку апроксимуючу функцію, яка, будучи досить простою, відображала б усі найважливіші особливості експериментально знятої характеристики з достатнім ступенем точності.

Загальна задача апроксимації включає в себе два самостійні завдання[5]:

- 1) вибір класу апроксимуючої функції;
- 2) визначення коефіцієнтів апроксимації.

Вибір класу апроксимуючої функції. Вирішуючи цю задачу, необхідно дотримуватись таких вимог [4]:

- 1) простота функції (у сенсі математичних операцій і реалізації на комп'ютері);
- 2) достатня точність (помилка апроксимації повинна бути одного порядку з розкидом параметрів характеристик окремих реалізацій в ансамблі реалізацій);
- 3) наочність, що дозволяє судити про зміну коефіцієнтів апроксимації при зміні характеристик процесу;
- 4) ясність розуміння процесів в явищі і виявлення властивостей і характеристик, що представляють інтерес у конкретному випадку.

Таким чином, функцію, що апроксимує якусь характеристику, відбирають або виходячи з фізичних уявлень про досліджуваний процес, або чисто формально, ґрунтуючись на зовнішній схожості характеристики з графічним зображенням тієї чи іншої функції. До апроксимуючої функції пред'являються суперечливі вимоги: забезпечуючи високу якість наближення, вона повинна бути відносно простою і зручною для подальшого використання.

У радіотехніці для апроксимації характеристик найбільш часто використовують такі функції [4]:

- 1) степеневий поліном (ступенева або поліноміальна апроксимація);

- 2) експоненціальний поліном (окремим випадком якого є показникова або експоненціальна апроксимація);
- 3) кусково-лінійна функція (апроксимація);
- 4) кусково-нелінійна функція (апроксимація);
- 5) трансцендентні функції (гіперболічний тангенс і синус, функція Гауса, тригонометричні функції та інші).

1.2 Огляд виконаних раніше робіт

При знаходженні математичних моделей, як правило, використовують різноманітні методи апроксимації і за певними параметрами обирають найоптимальніший (наприклад, за найменшою похибкою чи високою точністю моделі в конкретно взятому проміжку). Але не завжди вдається знайти оптимальну модель з необхідною точністю. У даному випадку використовують способи підвищення точності апроксимації.

Ще у 2007 році Голубинським А.Н. [5] були запропоновані методи підвищення точності апроксимації, які зараз залишаються найбільш відомі та найбільш використовувані:

- 1) підвищення ступеню поліному(для поліномів);
- 2) збільшення кількості членів апроксимації;
- 3) розбиття експериментальних даних на декілька частин;

Однак підвищення точності апроксимації призводить, як правило, до ускладнення апроксимуючих виразів, що ускладнює, як визначення коефіцієнтів апроксимації, так і використання цих виразів для аналізу процесів [7], [8].

Визначення коефіцієнтів апроксимації тісно пов'язано з заданою точністю. За Поповим Б.А. точність визначається коефіцієнтами наближення, зазвичай використовують критерії рівномірного, середньоквадратичного та інтерполяційного (точкового) наближення [3]. Якщо число заданих точок перевищує число

визначених коефіцієнтів апроксимації, то можна використовувати метод найменших квадратів, при якому середньоквадратична похибка мінімальна. Метод найменших квадратів використовується, коли необхідна висока точність апроксимації, громіздкі обчислення, але існує конструктивний підхід для аналітичного визначення коефіцієнтів моделі (апроксимації) [7], [8]. Метод найменших квадратів забезпечує найменшу суму відхилень значень апроксимуючої функції від значень вихідної функції у довільній кількості точок, не пов'язаної з числом невідомих коефіцієнтів [8].

У свою чергу, в Інституті кібернетики ім. Глушкова НАН України розроблено пакет програм [6], який реалізує визначення чебишовського наближення функції однієї та багатьох змінних поліномом, раціональним виразом, узагальненим поліномом. На жаль, у цих пакетах не реалізовано знаходження чебишовського наближення нелінійними виразами, хоча вже розроблено ефективні алгоритми. Водночас для розрахунку параметрів нелінійних моделей за методом найменших квадратів розроблено декілька спеціалізованих пакетів (наприклад, NLREG, CURVEFIT, MatLab). Проте застосування таких пакетів не завжди забезпечує знаходження параметрів шуканих моделей. Така ситуація не тільки обмежує інструментальні можливості програмних засобів – вона зумовлює застосування середньоквадратичного критерію для задач, розв'язком яких є чебишовські апроксимації. Сучасне програмне забезпечення науково-проектного керування повинно містити як відомі, так і нові теоретичні й практичні розробки з методики визначення функціональних залежностей. Спектр задач, що зводиться до знаходження наближення функцій, підтверджує потребу в розробленні доступного програмного забезпечення з апроксимації даних. Отримані теоретичні результати й наявне алгоритмічне забезпечення стосовно чебишевського наближення дають змогу створювати відповідні програмні засоби з широкими функціональними можливостями. Такі програмні засоби можуть бути реалізовані у вигляді як спеціалізованих програмних комплексів, так і окремих можливостей у складі інтегрованих пакетів. У Центрі математичного моделювання Інституту прикладних

проблем механіки та математики НАН України розроблено варіант пакета програм “РАДАН” для розв’язування задач знаходження мінімаксного наближення функцій із найменшою абсолютною та відносною похибкою. Цей пакет відповідає вимогам сучасного програмного забезпечення і є інтуїтивно зрозумілим для використання. Набір апроксимуючих виразів пакета передбачає більше ніж двадцять різних видів функціональних залежностей, зокрема: алгебраїчні, раціональні, експоненційні й тригонометричні поліноми; логарифмічні, експоненційні, степеневі, показникові й інші нелінійні вирази. Побудова мінімаксного сплайн-наближення полягає у визначенні наближення функцій на кожній із ланок сплайну за чебишовським критерієм. У випадку побудови неперервного сплайн-наближення застосовується чебишовське наближення з інтерполюванням у крайніх точках ланок. При цьому довжини усіх ланок сплайну, крім останньої, вибирають максимально можливими для заданої похибки сплайн-наближення. Якщо під час побудови сплайн-наближення із заданою похибкою на одній із поточних ланок мінімально допустимої довжини отримується похибка, більша від заданої, то використовується інтерполяція функції відповідним виразом. Для побудови неперервного й гладкого мінімаксного сплайн-наближення за дослідними даними із заданою абсолютною або відносною похибкою поліномом, експоненційним і логарифмічними виразами, а також сумою полінома й експоненти та степеневого виразу у Центрі математичного моделювання Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України було розроблено спеціалізований пакет програм “АпроКріо” (Апроксимація криогенних температур) [7].

Стаття [10] присвячена методиці розв’язання задач обробки експериментальних даних методом найменших квадратів з використанням математичного пакету MathCAD на основі даних динаміки вмісту діацетилу при зброджуванні сусла. Було визначено, що цей метод дозволяє отримувати коефіцієнти наближеної регресії, працює з нелінійними моделями, а також мінімізує похибку. Але найкращі результати при використанні метода найменших квадратів досягаються тільки при нормальному статистичному розподілі.

М.А. Ломакін у статті [11] стверджує, що при використанні апроксимації методом найменших квадратів варто звернути увагу, що при великих ступенях поліному для вхідних значень може виникнути «втрата значності» (обернення коефіцієнтів при вищих ступенях в нуль). Це загрожує зростанням похибки. З одного боку занадто велика ступінь полінома веде до підвищеної його осциляції [11] (явище поліноміального розгойдування). Тому ступені вище 5 - 6 зазвичай не використовують. Однак, з іншого боку, занадто мала ступінь полінома веде до зростання похибки апроксимації і, як наслідок, збільшення середньоквадратичного значення похибки МЕМС датчиків.

Питанню наближення функцій поліномом найкращого порядку присвячена журнальна [13], монографічна [14], [15], довідкова [16], [17] і навчальна [18] література, алгоритми побудови поліномів найкращого наближення носять ітераційний характер [14], [15], [18], але як виявилось, поліноми найкращого рівномірного приближення погано наближають похідні функцій [17], а поліном найкращого середньоквадратичного наближення, побудований запропонованим у [11] методом, не тільки добре наближає цю функцію на відрізку, але і її похідні.

Декілька алгоритмів дробово-раціонального наближення функцій багатьох змінних [19], [20] створено на основі методу диференціальної корекції для функції однієї змінної [21], в якому розв'язання задачі нелінійної апроксимації зводиться до послідовного розв'язання задач лінійного програмування. Кожний з алгоритмів багатовимірної апроксимації має свої переваги й недоліки, але водночас спільним для них є вузька спеціалізація, тобто наближення апроксимантами тільки певного класу, а також громіздкість чисельної реалізації. Тому на сьогоднішній день актуальна задача створення універсальних і водночас ефективних та нескладних у реалізації алгоритмів найкращої рівномірної апроксимації функцій багатьох змінних.

У статті [22] пропонується підхід, згідно з яким параметри апроксиманта найкращого рівномірного наближення для функції багатьох змінних знаходяться за допомогою методу диференціальної еволюції як розв'язок задачі оптимізації.

Результати обчислювальних експериментів підтвердили ефективність алгоритму для наближення функцій багатьох змінних. Основними перевагами цього алгоритму, порівняно з традиційними алгоритмами найкращої рівномірної апроксимації, є універсальність (наближення лінійними і нелінійними апроксимантами різних типів), відсутність потреби у використанні чисельних методів, простота реалізації, а також можливість застосування (після незначної модифікації) для апроксимації функцій за іншими критеріями, наприклад, за критерієм мінімуму квадратичного відхилення.

Як зазначається в дисертації [23] теоретичні основи методів апроксимації та інтерполяції функцій вивчалися і розвивалися багатьма дослідниками такими, як Самарський А.А., Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Березін І.С., Волков Е.А., Микеладзе Ш.Е., Каханер Д., Моулер К., Ф. Девіс (Philip J. Davis) і іншими авторами. методи, що використовують нові базисні функції для вирішення практичних завдань, розглядаються в книгах Залмансона Л.А., Солодовникова В.В., Баскакова С.І., Дьяконова В. П., Трохименко Я.К., Носача В. В., Длі М. І. та ін. Теорія нового методу - вейвлет перетворення відображена в книгах Чарльза К. Чуї (Chui С.К.) і І. Добеши (Daubechies І.). Основоположні результати в цій області були отримані в 80-і роки представниками французької наукової школи С. Маллом (Mallat S.), І. Мейером (Meyer Y.) та ін. Практична актуальність застосування даного методу визначала інтерес вчених і в інших країнах. Одним з перших в Росії звернув увагу на це новий напрямок академік С. Б. Стечкин і його учні, а також математики Санкт-Петербурга і Москви.

Інші методи не розглядалися, тому що їх реалізація складна і з цієї причини вимагає багато часу на виконання, що зводить нанівець переваги швидкості пошуку через надмірне часу модифікації. Був зроблений висновок, що сплайновий алгоритм має переваги у швидкості апроксимації.

Застосування методів математичного моделювання можливе при оцінці працездатності людини в умовах високих навантажень. Поведінка організму людини в умовах граничних фізичних навантажень представляє великий інтерес для різних

сфер людської діяльності. Для того, щоб виконувати свої обов'язки, люди, що працюють в таких умовах, (наприклад, космонавти, льотчики і рятувальники) повинні мати добру фізичну підготовку. Організм спортсмена адаптується до систематичних високим (іноді близьким до граничних) фізичних навантажень, в зв'язку з чим змінюється і його фізіологія [28]. В даній роботі порівнюється логарифмічна, степенева та лінійна апроксимація даних для різних значень квадрату коефіцієнта кореляції. Зроблено висновок, що для більш високих значень квадрату коефіцієнта кореляції степенева апроксимація набагато краща лінійної та логарифмічної, а логарифмічна краще лінійної.

В роботі [29] виконано порівняльний аналіз методів апроксимації. Найбільшою точністю наближення володіють методи, засновані на апроксимації рядом Фур'є, а найменшим часом обчислень – методи, засновані на експоненційних функціях, проте точність останніх стосовно апроксимації перехідних процесів в залишає бажати кращого. Методи апроксимації статичними поліномами найбільш прийнятні на малих інтервалах, при цьому ступінь полінома небажано робити вище п'ятого порядку.

З огляду робіт інших авторів стає зрозумілим те, що існує досить багато різноманітних методів апроксимації даних, які відрізняються областями використання. Проте, загальновідомим та практично універсальним методом апроксимації є метод найменших квадратів. Існує багато робіт присвячених підвищенню точності даного методу чи його використанню у специфічних областях науки та техніки. Основним недоліком методу найменших квадратів вважається складність апроксимації коливальних процесів. Дуже багато сигналів (особливо сигналів вібрації) є коливальними, а іноді і знакозмінними процесами, для яких апроксимація цим методом не дає результатів необхідної точності.

Усе вищесказане дозволяє сформулювати мету роботи та визначити завдання, необхідні для її досягнення.

1.3 Мета роботи

Метою роботи є вдосконалення методу апроксимації даних вимірювання та рекомендацій щодо використання алгоритму в задачах діагностики та прогнозування.

Досягнення мети передбачає вирішення наступних задач:

- Провести огляд існуючих методів наближення функцій.
- Виконати аналіз робіт інших авторів за темою дисертаційної роботи.
- Розглянути основні методи апроксимації даних вимірювань та обрати один з них для вдосконалення.
 - Визначити точність апроксимації з використанням змодельованих (ідеальних) сигналів за допомогою стандартного та вдосконаленого методів.
 - Визначити точність апроксимації з використанням моделей реальних сигналів (адитивна суміш ідеального сигналу з білим шумом) за допомогою стандартного та вдосконаленого методів.
 - Визначити залежність мінімальної похибки апроксимації від довжини початкового сигналу за допомогою стандартного та вдосконаленого методів.

РОЗДІЛ 2

ОСНОВНІ МЕТОДИ АПРОКСИМАЦІЇ ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНИХ ДАНИХ

2.1 Середньоквадратичне наближення

Метод найменших квадратів використовується при обробці результатів експерименту для апроксимації (наближення) експериментальних даних аналітичною формулою. Певний вид формули вибирається, як правило, з фізичних міркувань. Такими формулами можуть бути [26]:

$$1) y = ax + b,$$

$$2) y = ax^2 + bx + c,$$

$$3) y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0,$$

$$4) y = ae^{bx} + c, y = \frac{a}{x} + b,$$

5) інші.

Сутність метода найменших квадратів полягає в наступному: нехай результати вимірювань представлені у вигляді (табл.1).

Таблиця 1. Результати вимірювання

x	x_1	x_2	...	x_n
y	y_1	y_2	...	y_n

Будемо вважати, що вид апроксимуючої залежності обрано, її можна записати у вигляді:

$$y = f(x, a_0, a_1, \dots, a_m),$$

де f - відома функція; x, a_0, a_1, \dots, a_m - невідомі постійні параметри, значення яких необхідно знайти. Ступінь апроксимуючої функції m не залежить від кількості

вузлових точок, але її розмірність завжди має бути менше розмірності (кількості точок) заданого масиву експериментальних даних $1 \leq m \leq (n-1)$. У методі найменших квадратів наближення функції до експериментальної залежності вважається найкращим, якщо виконується умова:

$$Q = Q(a_0, a_1, \dots, a_m) = \sum_{i=1}^n v_i^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - f(x_i, a_0, a_1, \dots, a_m))^2 = \min,$$

де Q - многочлен найкращого наближення, $\sum_{i=1}^n v_i^2$ - сума квадратів відхилення

між експериментальними та функціональними значеннями.

Тобто сума квадратів відхилень шуканої аналітичної функції від експериментальної залежності має бути мінімальна (рис.2.1).

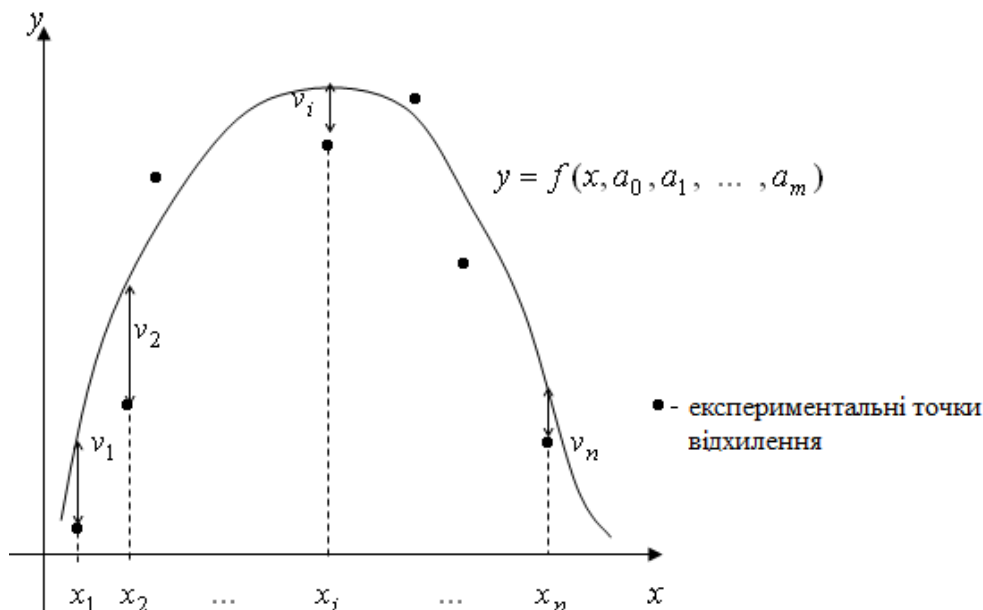


Рисунок 2.1 - Графік середньоквадратичного наближення функції

$$Q = Q(a_0, a_1, \dots, a_m) = \sum_{i=1}^n v_i^2 \geq 0. \quad (2.1)$$

Апроксимована функція Q має мінімум. Необхідною умовою мінімуму функції декількох змінних є рівність нулю всіх частинних похідних цієї функції по

параметрам. Таким чином, пошук найкращих значень параметрів апроксимуючої функції (Рис.2.1), тобто таких їх значень, при яких $Q = Q(a_0, a_1, \dots, a_m)$ мінімальна, зводиться до рішення системи рівнянь [26]:

$$\begin{cases} \frac{\partial Q}{\partial a_0} = 0, \\ \frac{\partial Q}{\partial a_1} = 0, \\ \dots \\ \frac{\partial Q}{\partial a_m} = 0; \end{cases}$$

Метод найменших квадратів має наступне геометричне тлумачення: серед нескінченного сімейства ліній даного виду розшукується одна лінія, для якої сума квадратів різниці ординат експериментальних точок та відповідних їм координат точок, знайдених по рівнянню цієї лінії, буде найменшою.

Знаходження параметрів лінійної функції

Нехай експериментальні дані необхідно представити лінійною функцією: $y = ax + b$. Необхідно підібрати такі значення a та b , для яких функція

$$Q(a, b) = \sum_{i=1}^n (y_i - (ax_i + b))^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b)^2 \quad (2.2)$$

Буде мінімальною. Необхідні умови мінімуму функції (2.2) зводяться до системи рівнянь [26]:

$$\begin{cases} \frac{\partial Q}{\partial a} = 2 \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b) \cdot (-x_i) = -2 \sum_{i=1}^n (x_i y_i - ax_i^2 - bx_i) = 0, \\ \frac{\partial Q}{\partial b} = 2 \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b) \cdot (-1) = -2 \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b) = 0. \end{cases}$$

Після перетворень отримаємо систему двох лінійних рівнянь з двома невідомими:

$$\begin{cases} a \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x_i y_i, \\ a \sum_{i=1}^n x_i + bn = \sum_{i=1}^n y_i; \end{cases}$$

вирішуючи яку, знаходимо значення параметрів a та b .

Знаходження параметрів квадратичної функції

Якщо апроксимуючою функцією є квадратична залежність: $y = ax^2 + bx + c$, то її параметри a , b , c знаходять з умови мінімуму функції [26]:

$$Q(a,b,c) = \sum_{i=1}^n (y_i - (ax_i^2 + bx_i + c))^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i^2 - bx_i - c)^2 \quad (2.3)$$

Умова мінімуму функції (2.3) зводиться до системи рівнянь [26]:

$$\begin{cases} \frac{\partial Q}{\partial a} = 2 \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i^2 - bx_i - c) \cdot (-x_i^2) = -2 \sum_{i=1}^n (x_i^2 y_i - ax_i^4 - bx_i^3 - cx_i^2) = 0, \\ \frac{\partial Q}{\partial b} = 2 \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i^2 - bx_i - c) \cdot (-x_i) = -2 \sum_{i=1}^n (x_i y_i - ax_i^3 - bx_i^2 - cx_i) = 0, \\ \frac{\partial Q}{\partial c} = 2 \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i^2 - bx_i - c) \cdot (-1) = -2 \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i^2 - bx_i - c) = 0. \end{cases}$$

Після перетворення отримаємо систему з трьох лінійних рівнянь з трьома невідомими:

$$\begin{cases} a \sum_{i=1}^n x_i^4 + b \sum_{i=1}^n x_i^3 + c \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 y_i, \\ a \sum_{i=1}^n x_i^3 + b \sum_{i=1}^n x_i^2 + c \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x_i y_i, \\ a \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i + cn = \sum_{i=1}^n y_i. \end{cases}$$

При вирішенні якої знаходимо шукані значення параметрів a , b та c .

Алгоритм реалізації методу найменших квадратів

1. Початкові дані[25]:

- заданий масив експериментальних даних x_i, y_i з кількістю вимірів N ;
- задана ступінь апроксимуючого многочлена (m).

2. Алгоритм обчислення[25]:

2.1. Визначаються коефіцієнти для побудови системи рівнянь розмірністю $(m+1)$:

$$c_{k,j} = \sum_{i=1}^N x_i^{k+j-2},$$

де $c_{k,j}$ - коефіцієнти системи рівнянь (ліва частина рівнянь), $k=1, \dots, m+1$ - індекс номеру рядку квадратної матриці системи рівнянь, $j=1, \dots, m+1$ - індекс номеру стовбця квадратної матриці системи рівнянь.

$$d_k = \sum_{i=1}^N (y_i \cdot x_i^{k-1}),$$

де d_k - вільні члени системи лінійних рівнянь (права частина рівняння).

2.2. Формування системи лінійних рівнянь розмірністю $(m+1)$:

$$\begin{pmatrix} c_{1,1} & \cdots & c_{1,j} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{k,1} & \cdots & c_{k,j} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_k \end{pmatrix}.$$

2.3. Рішення системи лінійних рівнянь з метою визначення невідомих коефіцієнтів апроксимуючого многочлена ступеня m .

2.4. Визначення суми квадратів відхилень апроксимуючого многочлена від вихідних значень по всім вузловим точкам [25]:

$$S = \sum_{i=1}^N (F(x_i) - y_i)^2.$$

$F(x_i)$ - значення розрахункової апроксимуючої функції у вузлових точках,

y_i - заданий масив експериментальних даних в вузлових точках.

Знайдене значення суми квадратів відхилень є мінімально можливим.

Апроксимація за допомогою інших функцій

Слід відмітити, що при апроксимації вихідних даних у відповідності з методом найменших квадратів в якості апроксимуючої функції іноді використовують логарифмічну, експоненціальну та степеневу функцію.

2.1.1 Логарифмічна апроксимація

Розглянемо випадок, коли апроксимуюча функція задана логарифмічною функцією виду: $F(x) = a + b \cdot \ln(x)$.

Пошук невідомих коефіцієнтів виконується за методом найменших квадратів у відповідності з наступною системою рівнянь [25]:

$$\begin{cases} a \cdot N + b \cdot \sum_{i=1}^N \ln(x_i) = \sum_{i=1}^N y_i, \\ a \cdot \sum_{i=1}^N \ln(x_i) + b \cdot \sum_{i=1}^N (\ln(x_i))^2 = \sum_{i=1}^N y_i \cdot \ln(x_i) \end{cases}$$

Розв'язуємо отриману систему лінійних рівнянь. Коефіцієнти апроксимуючої функції в аналітичному вигляді визначаються наступним чином [25]:

$$a = \frac{\sum_{i=1}^N y_i \cdot \sum_{i=1}^N (\ln(x_i))^2 - \sum_{i=1}^N (y_i \cdot \ln(x_i)) \cdot \sum_{i=1}^N \ln(x_i)}{N \cdot \sum_{i=1}^N (\ln(x_i))^2 - \left(\sum_{i=1}^N \ln(x_i) \right)^2},$$

$$b = \frac{N \cdot \sum_{i=1}^N (y_i \cdot \ln(x_i)) - \sum_{i=1}^N y_i \cdot \sum_{i=1}^N \ln(x_i)}{N \cdot \sum_{i=1}^N (\ln(x_i))^2 - \left(\sum_{i=1}^N \ln(x_i) \right)^2}.$$

2.1.2 Експоненціальна апроксимація

Розглянемо випадок, коли апроксимуюча функція задана експоненціальною функцією виду: $F(x) = a \cdot e^{b \cdot x}$.

Для застосування методу найменших квадратів експоненціальна функція лінеаризується: $\ln(F(x)) = \ln(a \cdot e^{b \cdot x}) = \ln(a) + b \cdot x$.

Пошук невідомих коефіцієнтів виконується за методом найменших квадратів у відповідності з наступною системою рівнянь [25]:

$$\begin{cases} \ln(a) \cdot N + b \cdot \sum_{i=1}^N x_i = \sum_{i=1}^N \ln(y_i); \\ \ln(a) \cdot \sum_{i=1}^N x_i + b \cdot \sum_{i=1}^N x_i^2 = \sum_{i=1}^N \ln(y_i) \cdot x_i. \end{cases}$$

Розв'язуємо отриману систему лінійних рівнянь. Коефіцієнти апроксимуючої функції в аналітичному вигляді визначаються наступним чином [25]:

$$\ln(a) = \frac{\sum_{i=1}^N \ln(y_i) \cdot \sum_{i=1}^N x_i^2 - \sum_{i=1}^N (\ln(y_i) \cdot x_i) \cdot \sum_{i=1}^N x_i}{N \cdot \sum_{i=1}^N x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^N x_i \right)^2},$$

$$b = \frac{N \cdot \sum_{i=1}^N (\ln(y_i) \cdot x_i) - \sum_{i=1}^N \ln(y_i) \cdot \sum_{i=1}^N x_i}{N \cdot \sum_{i=1}^N x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^N x_i \right)^2}.$$

2.1.3 Степенева апроксимація

Розглянемо випадок, коли апроксимуюча функція задана степеневою функцією вигляду: $F(x) = a \cdot x^b$.

Для застосування методу найменших квадратів степенева функція лінеаризується:

$$\ln(F(x)) = \ln(a \cdot x^b) = \ln(a) + b \cdot \ln(x)$$

Пошук невідомих коефіцієнтів виконується за методом найменших квадратів у відповідності з наступною системою рівнянь [25]:

$$\begin{cases} \ln(a) \cdot N + b \cdot \sum_{i=1}^N \ln(x_i) = \sum_{i=1}^N \ln(y_i) \\ \ln(a) \cdot \sum_{i=1}^N \ln(x_i) + b \cdot \sum_{i=1}^N (\ln(x_i))^2 = \sum_{i=1}^N \ln(y_i) \cdot \ln(x_i) \end{cases}$$

Розв'язуємо отриману систему лінійних рівнянь. Коефіцієнти апроксимуючої функції в аналітичному вигляді визначаються наступним чином [25]:

$$\ln(a) = \frac{\sum_{i=1}^N \ln(y_i) \cdot \sum_{i=1}^N (\ln(x_i))^2 - \sum_{i=1}^N (\ln(y_i) \cdot \ln(x_i)) \cdot \sum_{i=1}^N \ln(x_i)}{N \cdot \sum_{i=1}^N (\ln(x_i))^2 - \left(\sum_{i=1}^N \ln(x_i) \right)^2}$$

$$b = \frac{N \cdot \sum_{i=1}^N (\ln(y_i) \cdot \ln(x_i)) - \sum_{i=1}^N \ln(y_i) \cdot \sum_{i=1}^N \ln(x_i)}{N \cdot \sum_{i=1}^N (\ln(x_i))^2 - \left(\sum_{i=1}^N \ln(x_i) \right)^2}$$

Вибір найкращої апроксимуючої функції визначається значенням середньоквадратичного відхилення. У зв'язку з цим необхідно за методом найменших квадратів визначити декілька апроксимуючих функцій, а потім по критерію найменшого середньоквадратичного відхилення вибрати найбільш відповідну функцію.

2.2. Методи апроксимації функцій

Труднощі, що виникають при обробці масивів даних при вирішенні таких прикладних задач, як математичне моделювання та прогнозування, зберігання великих об'ємів інформації та їх швидкісна передача по каналам зв'язку, а також отримання необхідних додаткових даних про функціональні залежності, обумовлює необхідність аналітичної обробки масивів з метою їх наближеного представлення (апроксимації) у вигляді аналітичних виразів (апроксимантів) з невеликою кількістю параметрів [26].

2.2.1 Рівномірне наближення

У порівнянні з інтерполяцією та середньоквадратичним наближенням спосіб найкращої чебишевської апроксимації найбільш ефективний та універсальний,

володіє особливою властивістю не тільки отримувати високу точність апроксимації в точках дискретного представлення функціональних залежностей, але й забезпечувати таку точність у всіх точках неперервного інтервалу їх задання [26]. Це дозволяє вирішувати з високою точністю як пряму задачу стиснення масивів даних с великими коефіцієнтами стискання, так і обернену задачу отримання нових значень дискретного представлення вихідних функціональних залежностей.

Основи теорії найкращого рівномірного наближення функцій закладені П.Л. Чебишевим (1821-1894) та розвинуті на початку минулого століття в роботах С.Н. Бернштейна, П. Кірхберга, Ш.-Ж. Валле-Пуссена [26].

Систематична розробка загальних чисельних підходів для рішення задачі чебишевського наближення почалась тільки в 1933-1934 роках з появою фундаментальних робіт Е.Я. Ремеза, який запропонував два теоретично обґрунтованих метода (перший і другий) були засновані на способі послідовних чебишевських наближень. Однак обчислювальна складність міцного апарату чебишевської апроксимації [26], що охопив такі розділи чисельного аналізу, як рішення систем лінійних, нелінійних та диференціальних рівнянь, алгебру матриць, дії з ланцюговими дробами та многочленами, булеву алгебру, з однієї сторони, та обмежені можливості, що існували на той період обчислювальних засобів – з другої, не дозволяли отримувати на практиці найкращі апроксиманти. Можливість чисельної реалізації апарату в цілому з'явилась тільки зі створенням комп'ютерів.

Проблема найкращої (рівномірної) чебишевської апроксимації функції $f(x)$ на інтервалі $[a,b]$ заснована на чебишевському принципі мінімізації величини міри рівномірного наближення $L[H_n] \equiv \max_{x \in [a,b]} |f(x) - H_n(x; A)|$, та полягає в знаходженні такого апроксиманту ступеню n з набором коефіцієнтів $A \equiv (a_0, a_1, \dots, a_n)$ з усієї сукупності апроксимантів H_n ступеню $\leq n$, що задовільняє умові мінімакса $L[H_n] \equiv \min$, де $f(x)$ – неперервна на $[a,b]$ функція, $\min_{H_n} L[H_n]$ - найменш можливе значення міри рівномірного наближення.

В якості $H_n(x; A)$ розглянемо класи P_n усіх поліномів ступеню не вище n виглядку $P_n(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i = P_n(x; A)$ та класи r_n усіх дробово-раціональних виразів порядку $n = l + m$ вигляду $r_n(x) = P_l(x) / Q_m(x) = r_n(x; A; B)$, де $P_l(x)$ та $Q_m(x)$ - поліноми ступеню l та m з наборами відповідно коефіцієнтів $A = \{a_i\}, i = \overline{0, l}$, та $B = \{b_j\}, j = \overline{0, m}$. Тоді постановка задачі знаходження найкращих чебишевських апроксимантів має вигляд:

$$\begin{aligned} \max_{x \in [a, b]} |f(x) - P_n(x; A)| = L[P_n] = \min_{P_n}, & \quad \min_{P_n} L[P_n] = L[\Pi_n(x)] = \rho, \\ \max_{x \in [a, b]} |f(x) - r_n(x; B)| = L[r_n] = \min_{r_n}, & \quad \min_{r_n} L[r_n] = L[R_n(x)] = \delta, \end{aligned} \quad (2.4)$$

де $\Pi_n(x)$ та $R_n(x)$ – поліноміальні та дробово-раціональні найкращі чебишевські апроксиманти, а ρ та δ – відповідно величини та їх найкращі наближення.

Існування, єдність та властивості найкращих апроксимантів витікає з класичних теорем Е. Бореля та П.Л. Чебишева – для поліноміальних апроксимантів та Н.І. Ахієзера та П.Л. Чебишева – для дробово-раціональних. На основі цих теорем єдині розв’язки задач (2.4) співпадають відповідно з рішеннями «елементарних» задач виду

$$\begin{aligned} \max_{x \in X_1} |f(x) - P_n(x; A)| = \dot{\rho}, \\ \min_{x \in X_2} |f(x) - r_n(x; A; B)| = \dot{\delta}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

на таких $(n + 2)$ точкових підмножинах $X_1, X_2 \subset [a, b]$, для яких величини $\dot{\rho}$ та $\dot{\delta}$ досягають своїх найбільших можливих значень, рівних ρ та δ .

Кожна з таких $(n+2)$ точкових задач називається задачею чебишевської інтерполяції функції на множині точок, що являються відповідно чебишевським альтернансом для поліноміальної задачі та екстремальним базисом для дробово-раціональної задачі. Саме ця чудова «властивість чебишевського альтернанса» слугує теоретичною основою для знаходження всіх найкращих чебишевських наближень.

Усі відомі способи рішення чебишевської задачі можна в основному розділі поділити на способи, засновані на розповсюдженні методів Е.Я. Ремеза, та на способи, що використовують апарати лінійного та опуклого програмування. Для рішення дробово-раціональної задачі застосовують різноманітні прийоми послідовної диференційної лінеаризації по параметрам-коефіцієнтам. Синтезом багатьох напрямків в останні роки з'явилась також теорія сплайнової апроксимації.

Переваги методів Ремеза полягають у порівняно швидкій швидкості збіжності (в деяких випадках квадратичної) та можливості стандартизації обчислень, що дуже важливо для ефективності їх чисельних реалізацій.

Метод Ремеза заснований на послідовних чебишевських інтерполяціях, r кроків, що зводяться до знаходження послідовності $(n+2)$ точкових S – наборів $S_r = \{x_v^{(r)}\}$, $v = \overline{0, n+1}$, що збігаються до вихідного чебишевського альтернансу чи екстремального базису, рішення на кожному j -м кроці системи алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{aligned} f(x_v^{(j)}) - P_{n,j}(x_v^{(j)}) &= (-1)^v \rho_j', \\ w(x_v^{(j)}) [f(x_v^{(j)}) - P_{l,j}(x_v^{(j)}) / Q_{m,j}(x_v^{(j)})] &= (-1)^v \delta_j', \end{aligned} \quad (2.6)$$

Відповідно лінійних відносно коефіцієнтів a_k , $k = \overline{0, n}$, поліному $P_{n,j}(x)$ та величини ρ_j' та нелінійних відносно коефіцієнтів a_j , $j = \overline{0, l}$, b_i , $i = \overline{0, m}$ та величини δ_j' в задачі (3), $x \in S_j$, $v = \overline{0, n+1}$.

Зауважимо, що у відмінності від поліноміального випадку збіжність чебишевських інтерполяцій в задачі (2.6) теоретично забезпечується не при будь-якому початковому наборі $(n+2)$ точок, хоча використання відомих в літературі чисельних реалізацій (навіть спрощених варіантів метода Ремеза) показало вкрай рідкісну їх «незбіжність».

Основна складність усіх чисельних реалізацій полягає у виборі $(n+2)$ точкових підмножин області апроксимації, на яких виконуються кроки чебишевських інтерполяцій. Від способу цього вибору залежить не тільки швидкість збіжності методу, але й сам факт його збіжності. Можливі три класи варіантів послідовної заміни вказаних точкових наборів: оптимальний, напівоптимальний та допустимий.

В оптимальному варіанті для деяких класів функцій забезпечується квадратична швидкість збіжності, що на практиці дає, як правило, всього одну-дві ітерації, в напівоптимальному – число ітерацій для отримання аналогічного ефекту виявляється в декілька разів більше, а в допустимому – може бути в багато разів більше. Запропоновані алгоритми засновані на методі Ремеза та перевагами у порівнянні з аналогічними реалізаціями. Перевагою цих алгоритмів є розробка оптимального способу $(n+2)$ заміни точкових наборів при переході до нового S -набору.

2.2.2 Поліноміальна апроксимація

Нехай задана функція $\overline{f(x)}$, неперервна на відрізку $E \equiv [a, b]$, та H_n – множина всіх поліномів $P_n(x)$ ступеню $\leq n$. Нехай також $\overline{P}_n(x) \in H_n$ – поліном найкращої чебишевської апроксимації $f(x)$ на всьому відрізку E , що дає максимальне відхилення $\overline{\rho}$, тобто

$$\bar{\rho} = \min_{H_n} \max_{x \in E} | \bar{f}(x) - P_n(x) | = \max_{x \in E} | \bar{f}(x) - \bar{P}_n(x) | \quad (2.7)$$

Якщо замінити відрізок E деякою сіткою $E_N \subset E$, то по аналогії нехай $P_n(x)$ – поліном найкращої чебишевської апроксимації $f(x)$ на сітці E_N , що дає максимальне відхилення ρ , тобто

$$\bar{\rho} = \min_{H_n} \max_{x \in E_N} | f(x) - P_n(x) | = \max_{x \in E_N} | f(x) - P_n(x) | \quad (2.8)$$

Для неперервної задачі забезпечується квадратична швидкість збіжності. У випадку сіткової задачі кінець всього процесу гарантований тим, що спосіб заміни забезпечує неповторність набору $\{x_i^{(j)}\}_{i=0}^{n+1}$ для різноманітних j , це означає, що число всіх можливих $(n+2)$ точкових наборів на сітці E_N кінцеве.

При виборі кожного наступного набору S_{j+1} виконується повна заміна попереднього, причому беруться точки, що відповідають $n+2$ найбільшим відхиленням апроксиманта від функції з урахуванням чергування знаків, в результаті обирається вихідний набір чебишевського альтернанса, на якому шукається найкращий поліном $P_{n,j(x)}$ з величиною найкращого наближення ρ . Для рішення поліноміальної задачі розроблені два алгоритми («А» та «Б»), що відповідають записам апроксимуючого поліному в формі $\sum_{i=0}^n a_i x^i$ для алгоритму «А»

та $\sum_{i=0}^n b_i T_i(x)$ для алгоритму «Б».

Алгоритм «Б» створений як модифікація алгоритму «А» у зв'язку з роботою Н.С. Бахвалова та застосований для суттєвого покращення алгоритму «А», оскільки

використовувана в алгоритмі «А» звична запис полінома у вигляді $\sum_{i=0}^n a_i x^i$ при великому «розкиді» значень коефіцієнтів a_i може стати джерелом великої похибки округлення при обчисленні значення поліному в точках по схемі Горнера. В запропонованому Н.С. Бахваловим алгоритмі використана запис многочленів у вигляді лінійної комбінації многочленів Чебишева $Q_n(x) = \sum_{i=0}^n b_i T_i(x)$. Це дозволяє суттєво зменшити вказану похибку при обчисленні значень поліному. В результаті аналізу повних похибок алгоритмів «А» та «Б» встановлено, що переваги алгоритму «Б» стають відчутними при ступені $n > 0$; при $n \leq 0$ обидва алгоритми приблизно рівносильні.

Алгоритми можуть працювати як для аналітично заданої, так і для дискретно заданої функції $f(x)$. В обох випадках процедура вибору $(n+2)$ точкового набору на кожному кроці передбачає дискретизацію, тому їх відмінність складається тільки в тому, що в другому з них значення функції в потрібних точках відомі, а в першому передбачається процедура їх обчислення.

2.2.3 Кусково-лінійна апроксимація

Даний метод заснований на заміні характеристики нелінійного елемента відрізками прямих, на підставі чого здійснюється перехід від нелінійного диференціального рівняння до кількох (по числу прямолінійних відрізків) лінійним, які відрізняються один від одного тільки значенням, що входять в них коефіцієнтів. Необхідно пам'ятати, що кожне з лінійних рівнянь справедливо для того тимчасового інтервалу, протягом якого робоча точка переміщується по відповідній лінеаризованій ділянці.

Часові межі для кожної ділянки визначаються виходячи з досягнення однієї з змінних, що визначають характеристику нелінійного елемента, своїх граничних значень для даної прямолінійної ділянки [27].

На кожному інтервалі $[x_{i-1}, x_i]$ функція є лінійною $F_i(x) = k_i x + l_i$. Значення коефіцієнтів знаходяться з виконання умов інтерполяції у кінцях відрізка: $F_i(x_{i-1}) = f_{i-1}, F_i(x_i) = f_i$. Отримуємо систему рівнянь:

$$k_i x_{i-1} + l_i = f_{i-1}, \quad k_i x_i + l_i = f_i, \quad \text{звідки знаходимо} \quad k_i = \frac{f_i - f_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}, \quad l_i = f_i - k_i x_i.$$

функцію $F(x)$ можна записати у вигляді:

$$F(x) = \frac{f_i - f_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} x + f_i - k_i x_i, \quad \text{якщо } x_{i-1} \leq x \leq x_i, \quad \text{тобто}$$

$$F(x) = \begin{cases} \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0} x + f_0 - k_0 x_0, & x_0 \leftarrow x \leftarrow x_1, \\ \frac{f_2 - f_1}{x_2 - x_1} x + f_1 - k_1 x_1, & x_1 \leftarrow x \leftarrow x_2, \\ \dots \\ \frac{f_N - f_{N-1}}{x_N - x_{N-1}} x + f_{N-1} - k_{N-1} x_{N-1}, & x_{N-1} \leftarrow x \leftarrow x_N. \end{cases}$$

$$\text{Або } F(x) = k_i(x - x_{i-1}) + f_{i-1}, \quad k_i = (f_i - f_{i-1}) / (x_i - x_{i-1}), \quad x_{i-1} \leq x \leq x_i, \quad i = 1, 2, \dots, N-1.$$

При використанні лінійної інтерполяції спочатку потрібно визначити інтервал, в який потрапляє значення x , а потім підставити його в формулу.

Підсумкова функція буде неперервною, але похідна буде розривною в кожному вузлі інтерполяції. Похибка такої інтерполяції буде менша, ніж в разі кусочно-постійної інтерполяції. Ілюстрація кусочно-лінійної інтерполяції приведена на рис.2.2.

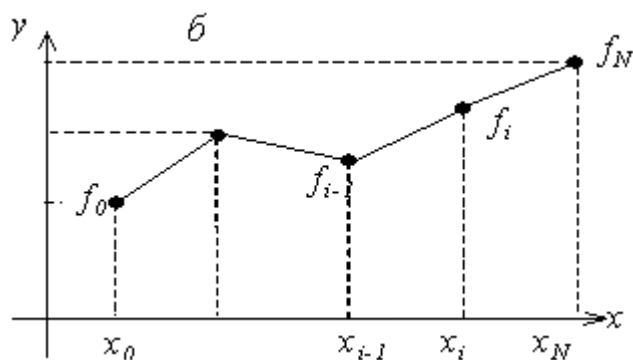


Рисунок 2.2 - Ілюстрація кусково-лінійної інтерполяції

2.2.4 Дробово-раціональна апроксимація

Коли «природа» наближеної функції $f(x)$ така, що вона на деяких ділянках має «сплески», то для підвищення точності наближення доцільно використовувати апроксимацію раціональними дробами, які найбільш точно відображають особливості поведінки функції.

Нехай \mathfrak{R}_n - клас всіх раціональних дробів виду

$$r_n(x) = P_l(x) / Q_m(x) = \sum_{i=0}^l a_i x^i / \sum_{j=0}^m b_j x^j, \quad (2.9)$$

де l та m – задані ступені, а $n=l+m$ – порядок $r_n(x)$.

Задача нелінійної найкращої чебишевської апроксимації полягає в знаходженні таких параметрів виразу (6), щоб

$$\min_{\mathfrak{R}_n} \max_{x \in E} |w(x)[f(x) - r_n(x)]| = \max_{x \in E} |f(x) - R_n(x)| = \delta_n. \quad (2.10)$$

Тоді $R_n(x)$ – найкращий дробово-раціональний чебишевський апроксимант з величиною найкращого наближення δ_n .

Вагова функція $w(x)$, що має важливе значення при великих коливаннях $f(x)$ на сітці, передбачається позитивною. Зокрема, коли $l=0$ та $w(x)=1$, маємо поліноміальний випадок.

Оскільки перехід від поліномів до дробово-раціональних функцій розширює клас чебишевських апроксимантів, очевидно, що $\delta_n \leq \rho_n$, де ρ_n - величина найкращого поліноміального наближення тієї ж функції на тому ж самому відрізку E .

Не дивлячись на те, що перехід від поліноміальних апроксимантів до дробово-раціональних не дозволяє збільшити порядок прагнення до нуля величини δ_n для всього класу функцій, можна стверджувати, що завдяки цьому переходу розширюється клас функцій, для яких величина найкращого наближення буде того ж самого порядку, що й для «хороших» функцій.

Зауважимо, що на відміну від поліноміального випадку збіжність для задач (2.9) та (2.10) відповідно роботам А. Ральстона може бути забезпечена тільки за умови наявності початкового наближення $R_n^{(0)}(x)$, «близького» до найкращого дробово-раціонального апроксиманту $R_n(x)$.

В деяких випадках для багатьох математичних функцій, особливо при малих значеннях $n=m+k$, в якості початкового набору точок для знаходження $R_n^{(0)}(x)$ можливо використовувати точки ухилення поліному Чебишева, але для загального випадку чебишевської раціональної задачі немає ніяких практичних рекомендацій відносно вибору «близького» $R_n^{(0)}(x)$. Цей недолік усунений роботами Х. Вернера, який запропонував метод, що завжди збігається з будь-якого початкового наближення. Проте громіздкість обчислень та низька швидкість збіжності (лінійна), по твердженню самого Вернера, не дозволяє використовувати його ефективно на практиці.

Враховуючи вище сказане, а також те, що навіть спрощені варіанти зазвичай збігаються, автором статті розроблений, поєднуючий в собі переваги методів Ремеза та Вернера *комбінований алгоритм*. Ідея цього алгоритму полягає в тому, що на

практиці часто бажано отримати наближення, модуль-максимум відхилення якого не перевищує деякого заданого числа $\gamma > 0$. Тому природньо обчислювати послідовність апроксимантів, починаючи з найменших значень ступенів l та m , підвищувати ці значення до отримання наближення з бажаною точністю. Таким чином, будемо припускати, що завжди перед початком обчислення $R_{l,m}(x)$ вже отриманий найкращий апроксимант $R_{l-1,m-1}(x)$. Для отримання апроксимантів кожної нової ступені спочатку використовується метод п.ч.і. з обов'язковою перевіркою збіжності алгоритму на кожному кроці ітерації. У випадках, коли, збіжність не порушується, метод п.ч.і. працює до кінця, тобто до отримання найкращого апроксиманта поточної ступені. Якщо на якомусь кроці п.ч.і. збіжність порушується (наприклад, число ділянок зміни знаку відхилень менше за $l+m+2$), то для отримання початкового наближення $R_{l,m}^{(0)}(x)$, що має не менше $l+m+2$ екстремуми, вступає в роботу початковий алгоритм метода Вернера. Після цього знову працює метод п.ч.і.. Без урахування випадків виродження, якщо збіжність методу п.ч.і. забезпечено та абсолютне значення максимального відхилення найкращого апроксиманта не перевищує величину бажаної точності, тоді алгоритм закінчує роботу. Інакше ступінь апроксиманта підвищується и знову починає працювати метод п.ч.і..

У комбінованому алгоритмі враховуються випадки виродження, коли у найкращого апроксиманта попередньої ступені відхилень рівній величині та чергувальний знак більше $l+m+2$, і майже виродження, коли ділянки зміни знаки більше $l+m+2$, а модуль-максимумів відхилень рівній величині точно $l+m+2$.

Не дивлячись на те, що випадки виродження, особливо майже виродження, вкрай рідкісні, дуже важливо з обчислювальної точки зору вміти їх впізнавати до початку обчислення виродженого апроксиманта. З цією метою в алгоритмі передбачається, що перед обчисленням $R_{l,m}(x)$ є найкращий апроксимант $R_{l-1,m-1}(x)$. Це рівносильно тому, що обчислення необхідно починати завжди з невироджених апроксимантів $R_{l-m,0}(x)$ для $l \geq m$ або $R_{0,l-m}(x)$ для $l < m$.

Вихідна функція $f(x)$ пропонується заданою на $[a, b]$ як аналітично, так і дискретно, але при пошуку нових екстремумів відхилень використовується дискретна процедура обчислення значень $f(x)$ в точках.

На відміну від поліноміального випадку, коли вхід в алгоритм може починатись або по заданій точності, або по ступеню, у випадку дробово-раціональної апроксимації вхід у комбінований алгоритм виконується тільки по заданій точності γ . Відмінність також в тому, що в цьому випадку система $l + m + n$ алгебраїчних рівнянь з $n + 2$ невідомими являється нелінійною. Її лінеаризація відносно $n + 1$ невідомих коефіцієнтів здійснюється шляхом виключення однієї невідомої δ . Враховуючи легкоусуваючу нелінійність системи, її рішення знаходимо наступним чином. Останнє рівняння (при $\nu = n + 1$) розглядаємо як функцію δ від δ та шукаємо як корінь функції $F[\delta, a_0(\delta), \dots, a_1(\delta), b_1(\delta), \dots, b_m(\delta)] = F(\delta)$, вирішуючи рівняння $F(\delta) = 0$ по методу січної. Потім, задаючи початкові значення $\delta^{(1)}$ та $\delta^{(2)}$, вирішуємо систему перших $l + m + 1$ рівнянь відносно $\{a_i\}_{i=0}^l$ та $\{b_j\}_{j=1}^m$. Підставляючи ці значення послідовно в останнє рівняння отримуємо $F(\delta^{(1)})$ та $F(\delta^{(2)})$. Ітераційний процес $|\delta^{(i+1)} - \delta^{(i)}| / |\delta^{(i+1)} + \delta^{(i)}| < \varepsilon$, де ε - задане число.

Коли для поточного $R_{l,m}(x)$ п.ч.і. не збігається, тобто число NN модуль максимумів екстремумів, знакозмінних та рівних за величиною, менше $l + m + 2$, або не збігається метод січних, починає працювати початковий алгоритм Вернера з найкращого апроксиманта $R_{l-1,m-1}(x)$, послідовно підвищуючи його ступінь до ступеню поточного апроксиманта до тих пір, поки не буде отримано не менше $l + m + 2$ точок, в котрих екстремуми відхилень змінюють знак. Після того як знову починає працювати метод п.ч.і до отримання апроксиманта, що має $l + m + 2$ рівних по модулю та знакозмінних екстремумів відхилень. Цей апроксимант приймається за початкове наближення $R_{l,m}^0(x)$ методу п.ч.і. для знаходження найкращого

наближення $R_{l,m}(x)$ та робота комбінованого алгоритму продовжується до отримання найкращого апроксиманта необхідної точності.

2.2.5 Апроксимація функції багатьох змінних

Задача апроксимації функції будь-якого числа змінних $f(X) = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$

шляхом узагальнених поліномів $F_n(X) = \sum_{i=0}^n a_i \varphi_i(X)$, а саме

$$\max_{x \in E} |f(X) - \sum_{i=0}^n a_i \varphi_i(X)| = L(a_0, a_1, \dots, a_n) = \min, \quad (2.11)$$

де $X = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ – точка m -мірного простору на точковій множині $E = \{X^{(1)}, X^{(2)}, \dots, X^{(N)}\}$, вирішується як частковий випадок задачі побудови рівномірно-наближеного в чебишевському сенсі наближення до рішення системи несумісних лінійних рівнянь

$$\Phi_i(Z) = \sum_{j=1}^n a_{ij} z_j + b_i \quad (i=1, 2, \dots, N, N > n). \quad (2.12)$$

Іншими словами, задача полягає у визначенні таких параметрів z_1, z_2, \dots, z_n , щоб значення величини

$$\max_{i=1, N} |\Phi_i(z)| = \max_{i=1, 2, N} \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} z_j + b_i \right| = L(z_1, z_2, \dots, z_n) \quad (2.13)$$

було найменшим можливим, тобто

$$\max(|\Phi_1(Z)|, |\Phi_2(Z)|, \dots, |\Phi_N(Z)|) = L(Z) (= \rho) \rightarrow \min$$

Алгоритм рішення задачі (2.11) є реалізацією аналога методу послідовних чебишевських інтерполяцій (п. ч. і.) Ремеза для випадку зведення до задачі лінійного програмування з не негативними коефіцієнтами, а саме: приєднуючи в (2.12) до

кожної функції $\Phi_i(Z)$ її «симетричну копію» $\Phi_{N+i}(Z) = -\Phi_i(Z) = -\sum_{j=1}^n a_{ij}z_j - b_i$,

задачу (2.12) та (2.13) представляємо у вигляді задачі алгебраїчного мінімакса:

$$\Phi_i(Z) = \sum_{j=1}^n a_{ij}z_j + b_i \approx 0 \quad (i = \overline{1, 2N}; a_{i\pm N, j} = -a_{ij}; b_{i\pm N} = -b_i), \quad (2.14)$$

$$\max_{i=\overline{1, 2N}} \Phi_i(Z) = \max_{i=\overline{1, 2N}} \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}z_j + b_i \right) = L(Z) = \min = (\rho). \quad (2.15)$$

Задачі (2.12), (2.13), (2.14) та (2.15) еквівалентні задачі лінійного програмування:

$$A = \min, \xi_i = \Lambda - \Phi_i(Z) = -\sum_{j=1}^n a_{ij}z_j - b_i + \Lambda \geq 0 \quad (i = \overline{1, 2N}).$$

Вперше зведення до задачі лінійного програмування для дискретних чебишевських наближень запропоновано Е. Штифелем для випадку виконання «великої детермінованої умови» (відмінність від нуля всіх визначників n -го порядку) для системи функцій $\Phi_i(X) = \sum_{j=1}^n a_{ij}z_j + b_i$, $i = \overline{1, 2N}$ та розвинуто Е.Я.

Ремезом.

Частковим випадком сформульованої задачі є найкраще рівномірне наближення функції однієї змінної $f(x)$ на кінцевій множині точок $E = \{x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(N)}\}$ звичайними поліномами. Однак зведення цієї задачі до задачі лінійного програмування недоцільно, так як використовуваний для її рішення у чебишевській постановці метод п. ч. і. володіє перевагами.

У розробленому алгоритмі реалізована пряма та подвійна задачі лінійного програмування, причому ведуча – подвійна, яка вирішується модифікованим симплекс-методом (м. с. - м.) з урахуванням того, що на практиці число рівнянь значно більше числа невідомих та таблиця «розширеного базису» розміру $(n+2)(n+4)$ при модифікованому симплекс-методу суттєво менше опорної таблиці $(n+2)N$ при прямому симплекс-методі.

В алгоритмі використані також прийоми, що дозволяють скоротити більше ніж на половину симплекс-таблицю (с. - т.) та в процесі рішення подвійної задачі модифікованого симплекс-методу перетворити тільки модифіковану(стислу) симплекс-таблицю, залишаючи при цьому незмінну опорну таблицю. Крім того, алгоритм має такі основні особливості:

- 1) Використання для подвійної задачі м. с. - м., в процесі якого будується опорна с. - т. розмірності $(n+2)N$ та початкова модифікована(стисла) с. - т., що містить обернену матрицю «розширеного» базису розмірності $(n+2)(n+4)$, ключовий стовбець першої заміни та стовбець значень базисних змінних;
- 2) Перетворення по загальним правилам заміни тільки модифікованої с. - т. розмірності $(n+2)(n+4)$, а не розмірності $(n+2)N$ як при прямому симплекс-методі;
- 3) Незмінність опорної таблиці в процесі рішення задачі.

Таким чином, застосовуючи модифікований симплекс-метод, отримуємо оптимальне рішення задач та вираховуємо значення шуканих параметрів z_1, z_2, \dots, z_n вихідної задачі (2.14), (2.15). Підставивши отримані значення z_j в лінійні функції $\Phi_{i_v}(Z)$ ($v = 1, n+1$), отримаємо значення $\Phi_{i_1}(Z), \Phi_{i_2}(Z), \dots, \Phi_{i_{n+1}}(Z)$. Найменша та найбільша по модулю серед цих значень величини A та L є відповідно нижньою та

верхньою границею величини найкращого наближення ρ , тобто $A \leq \rho \leq L$. За критерій кінця роботи алгоритму приймається умова $L - \rho \leq L - A$.

2.3 Використання MatLab для середньоквадратичної апроксимації

В системі MatLab для наближення даних в сенсі найменших квадратів використовується функція *polyfit*, у вхідних аргументах якій зазначаються вектора з даними, а вихідним є вектор коефіцієнтів полінома, починаючи зі старшого ступеня. Функція *polyfit* може бути викликана і з великим числом вхідних і вихідних аргументів, що може знадобитися для поліпшення якості наближення та отримання деякої додаткової інформації про нього.

polyfit (x, y, n) - повертає вектор коефіцієнтів полінома $p(x)$ ступеня n , який з найменшою середньоквадратичною похибкою апроксимує функцію $y(x)$. Результатом є вектор-рядок довжиною $n+1$, що містить коефіцієнти полінома в порядку зменшення ступенів x і y дорівнює $n+1$, то реалізується звичайна поліноміальна апроксимація, при якій графік полінома точно проходить через вузлові точки з координатами (x, y) , що зберігаються в векторах x і y . В іншому випадку точного збігу графіка з вузловими точками не спостерігається;

$[P, S] = \text{polyflt}(x, y, n)$ - повертає коефіцієнти полінома p і структуру S для використання разом з функцією *polyval* з метою оцінювання або передбачення похибки;

$[P, S] = \text{polyflt}(x, y, n, mu)$ повертає коефіцієнти полінома p і структуру S для використання разом з функцією *polyval* з метою оцінювання або передбачення похибки.

Функція $y = \text{polyval}(p, x)$, де $p = [p_1, p_2, \dots, p_n, p_{n+1}]$ - вектор коефіцієнтів полінома $p(x) = p_1 x_n + p_2 x_{n-1} + \dots + p_n x + p_{n+1}$, повертає значення поліному ступеню n , для аргументу в точках x .

Для набору даних:

$$(x_i, y_i)_i = 1, 2, \dots, N$$

Необхідно знайти такий поліном ступеню n :

$$p^{(n)}(x) = p_1 x^n + p_2 x^{n-1} + \dots + p_n x + p_{n+1}$$

Коефіцієнта якого являються рішенням наступної задачі мінімізації:

$$\min_{p_1, p_2, \dots, p_{n+1}} \sum_{i=1}^N (p^{(n)}(x_i) - y_i)^2$$

Тобто, іншими словами, розшукується поліном, який щонайменше відхиляється від заданих даних, у тому сенсі, що сума квадратів відстані від заданих точок $(x_i - y_i)$ до $(x_i, p^{(n)}(x_i))$ буде мінімальною.

Ступінь поліному має бути менша кількості заданих точок для того, щоб такий поліном був єдиним. Наприклад, якщо задані три точки, то їх можна наблизити або поліномом нульової чи першої степені (пряма), або параболою. При чому, парабола буде точно проходити через три задані точки (сума квадратів відстаней дорівнюватиме нулю), оскільки три коефіцієнта квадратичного поліному визначаються з трьох умов проходження через задані точки. В даному випадку, отримано не наближення даних, а їх інтерполяцію. На практиці, зазвичай використовують поліноми не дуже високих степеней.

В MATLAB для наближення даних у сенсі найменших квадратів використовується функція *polyfit*, у вхідних аргументах котрої вказуються вектора з даними, а вихідним є вектор коефіцієнтів поліному, починаючи зі старшого ступеню. Функція *polyfit* може бути й з великим числом вхідних та вихідних

аргументів, що може знадобитися для покращення якості наближення та отримання деякої додаткової інформації про нього.

Наведемо приклад використання наближення даних з використанням функцій *polyfit(x,y,n)* та *polyval(p,x)*. Нехай дано:

<i>X</i>	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9	1.1	1.3	1.5
<i>Y</i>	5.332	4.488	2.432	1.803	2.223	2.467	4.127	5.091

У полі команд задаємо масиви:

» `x = [0.1:0.2:1.5];`

» `y = [5.332 4.488 2.432 1.803 2.223 2.467 4.127 5.091];`

Обчислюємо коефіцієнти поліномів ступеню 8 та 4

» `p8 = polyfit(x, y, 8);`

`p8 = -84.708 361.1 -527.32 265.53 0.0 38.354 -73.197 18.412 4.1822`

» `p4 = polyfit(x, y, 4);`

`p4 = -10.356 32.7 -26.462 0.74862 5.5629`

Обчислюємо значення поліномів:

» `f8 = polyval(p8, x);`

» `f4 = polyval(p4, x);`

Виводимо результат:

» `plot (x, y, 'ob', x, f8, 'k:', x, f4, 'k-'), grid`

» `legend ('Табличні дані', 'n=8', 'n=4', 0)`

» `title ('Наближення табличної функції поліномом ступеню n')`

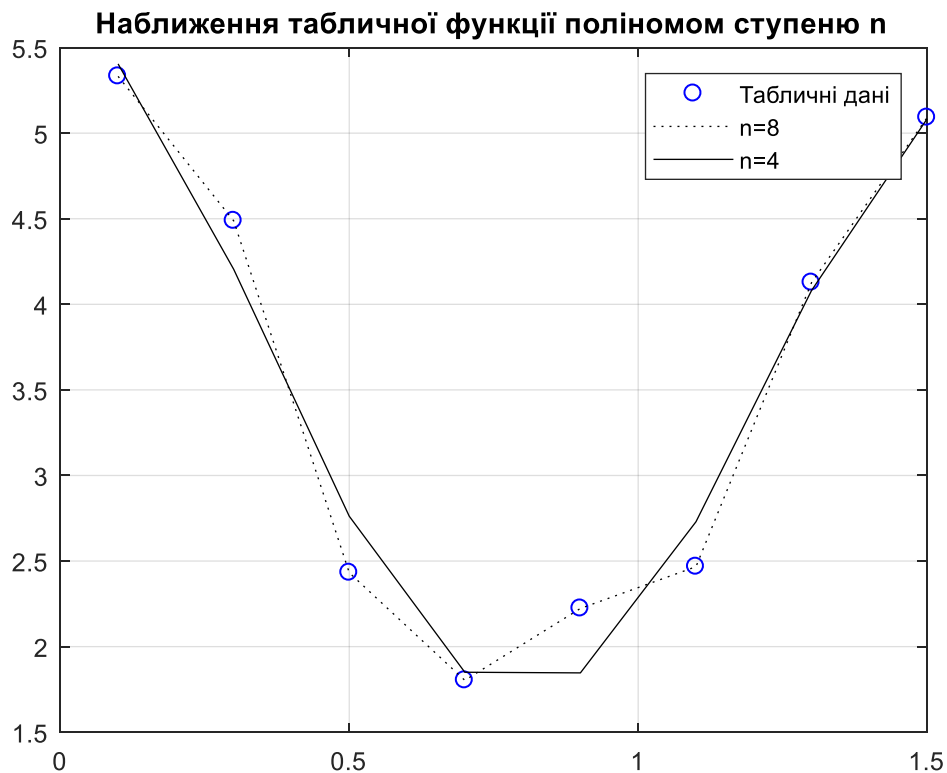


Рисунок 2.3 - Графік апроксимації табличних даних

Як бачимо з графіку, при поліноміальній регресії для $n=4$ (розмірність x та y більша за $n+1$) вузлові точки не співпадають з графіком поліному, оскільки їх наближення до нього є найкращим у сенсі мінімального середньоквадратичного наближення (апроксимації). А для $n=8$ (розмірність x та y менша за $n+1$) вузлові точки точно співпали з графіком поліному (інтерполяція).

2.4 Дослідження апроксимації функцій різного виду

Інформація про стан досліджуваних процесів у природі та суспільстві як результат проведення вимірювання, як правило, дискретним представленням вигляді інформаційних масивів цифрових даних про функціональні залежності, що їх характеризують. Труднощі, а часто неможливість використовувати масиви при рішенні таких прикладних задач, як математичне моделювання та прогнозування,

визначення функціональної закономірності природи досліджуваного процесу (наприклад, у вигляді емпіричної формули), і при вирішенні проблеми економного зберігання великих обсягів масивів даних або швидкісної передачі по каналам зв'язку. Ці труднощі вирішуються шляхом заміни великих масивів аналітичними виразами з невеликою кількістю параметрів. Розглянемо декілька випадків використання апроксимації функції методом найменших квадратів для різних функціональних залежностей.

Для того, щоб виконати апроксимацію, створимо додаткову програму, в якій запишемо функцію, що обчислюватиме наближення функції, її абсолютну та відносну похибку, а також рахуватиме середньоквадратичну похибку. Результати вимірювань будуть записуватись у вектор. Так, як апроксимація методом найменших квадратів для знакозмінних функцій проводиться неточно, через те, що наближення виконується цілого сигналу, скористаємось кусково-поліноміальним методом апроксимації. Цей метод полягає в розбитті сигналу на певну кількість відрізків та точок в кожному відрізьку.

2.4.1 Синусоїдальна залежність

За досліджувану функцію візьмем $y = 4 + \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t)$. Введемо власну частоту синусоїди $f = 5$, період синусоїди $T = \frac{1}{f} = 0.2$, кількість періодів $tk = 2 \cdot T = 0.4$, частоту дискретизації $fd = 1000$, період дискретизації $Td2 = \frac{1}{fd} = 0.001$, вектор часу $t = 0:kr:(0.4 - kr)$, де $kr = 1.9531 \cdot 10^{-4}$. $N = 4$ - кількість точок в одному відрізьку, $L = 2048$ - максимальна кількість точок.

В результаті апроксимації отримано залежності зображені на рис.2.4.

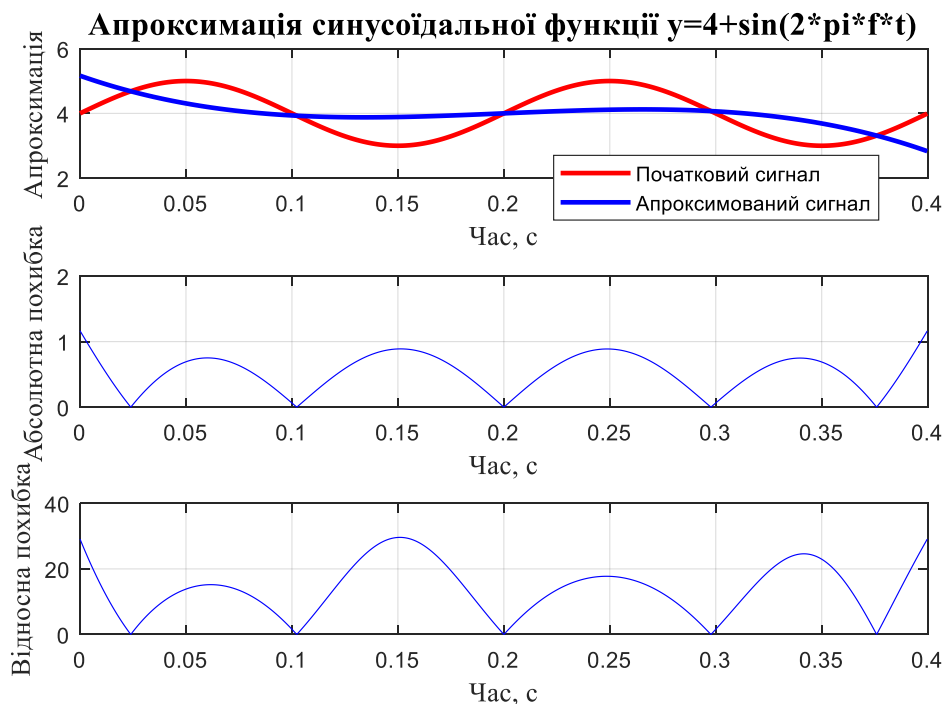


Рисунок 2.4 – Апроксимація синусоїдальної функції по всій довжині сигналу

Окрім апроксимації по повній довжині сигналу також проведено кускову апроксимацію з довжиною відрізка, яка змінюється від 4 точок до $\frac{L}{2}$, тобто для довжини сигналу $L = 2048$ точок отримано 10 апроксимованих сигналів при різних довжинах відрізків апроксимації. Для кожної нової апроксимації довжина відрізка змінювалась за наступною формулою:

$$L_a = L_i \cdot 2,$$

де L_a - це поточна довжина кожного відрізка, на які розбивається сигнал для апроксимації;

L_i - це попередня довжина кожного відрізка, на які розбивався сигнал для апроксимації (для $L = 2048$ точок i змінюється від 1 до 9, а $a_{\max} = 10$, тобто всього отримано 10 апроксимацій при різній кількості точок у кожному відріжку).

Було виявлено, що мінімальна похибка при кусковій апроксимації ідеального змодельованого сигналу без шуму має місце при довжині відрізка в 4 точки (рис.2.5).

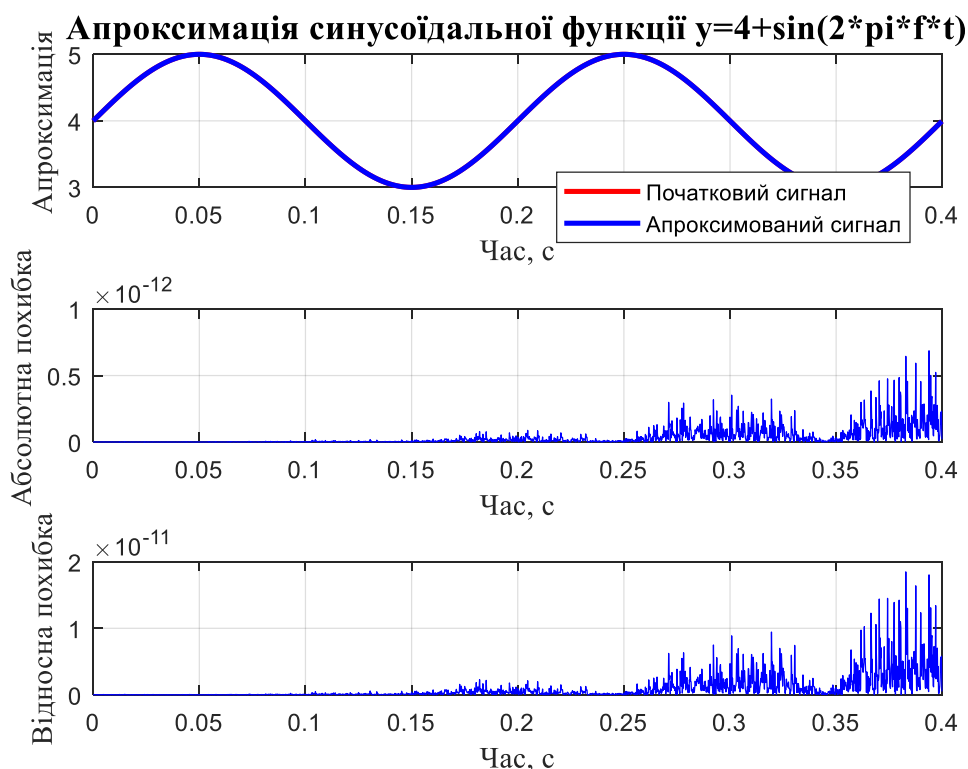


Рисунок 2.5 – Кускова апроксимація синусоїдальної функції при довжині відрізка в 4 точки

В результаті аналізу було виявлено, що при апроксимації сигналу по його всій довжині середня похибка апроксимації складає 13.85%, а максимальна 29.7%. Для кускової апроксимації мінімальна середня похибка, яка отримана при довжині кожного відрізка апроксимації в 4 точки, складає $8.9192^{-13}\%$.

Виконаємо теж саме дослідження для інших функцій.

2.4.2 Параболічна функція

Наступною досліджуваною функцією є $y = a \cdot t^2 + b \cdot t + c$. Нехай $a = 18$, $b = 10$, $c = 3$, вектор часу $t = 0:kr:(0.4 - kr)$, де $kr = 1.9531 \cdot 10^{-4}$. $N = 4$ - кількість точок в одному відрізку, $L = 2048$ - максимальна кількість точок.

В результаті апроксимації отримано залежності зображені на рис.2.6.

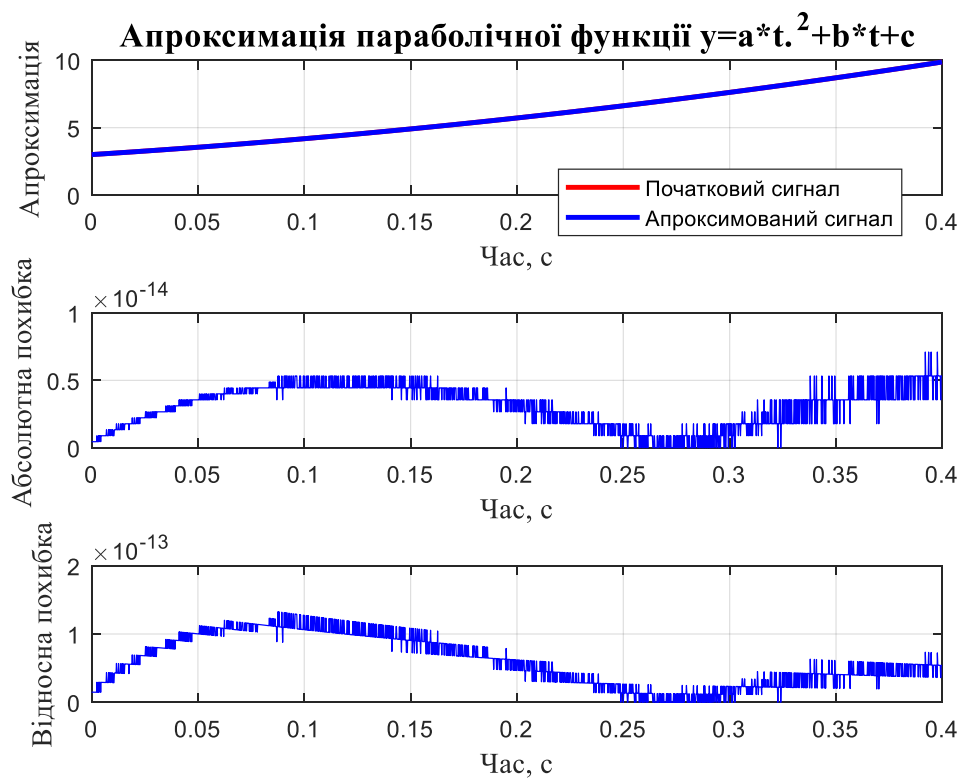


Рисунок 2.6 – Апроксимація параболічної функції по всій довжині сигналу

Мінімальна похибка при кусковій апроксимації ідеального змодельованого сигналу без шуму має місце при довжині відрізка в 16 точок (рис.2.7).

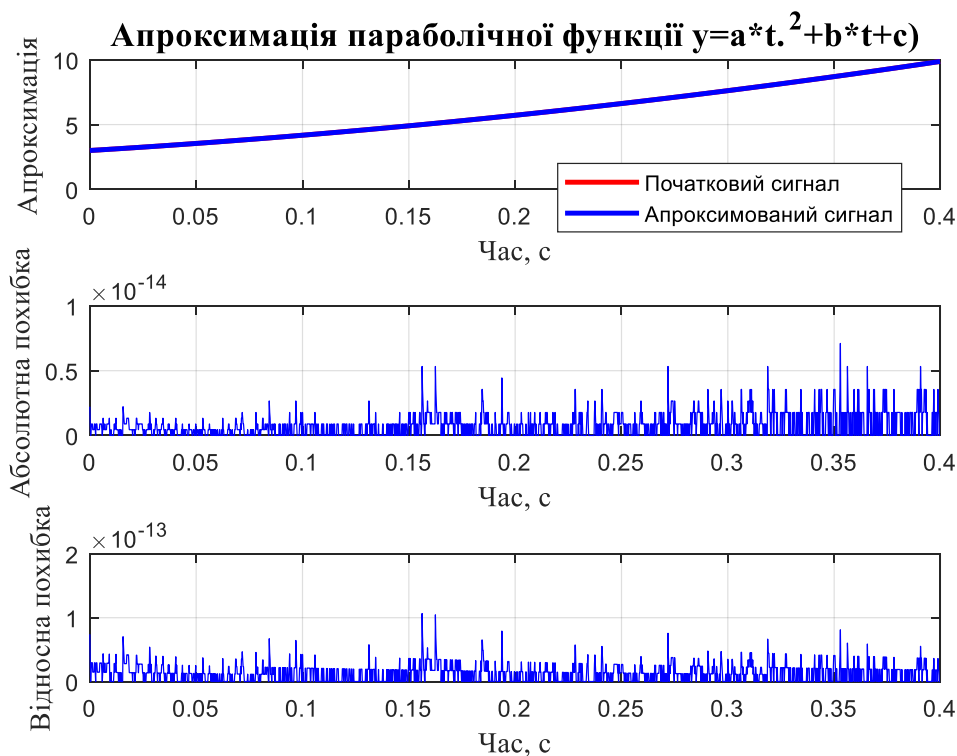


Рисунок 2.7 – Кускова апроксимація параболічної функції при довжині відрізка в 16 точок

В результаті аналізу було виявлено, що при апроксимації сигналу по його всій довжині середня похибка апроксимації складає $5.9569^{-14}\%$, а максимальна $1.35^{-13}\%$. Для кускової апроксимації мінімальна середня похибка, яка отримана при довжині кожного відрізка апроксимації в 16 точок, складає $1.2717^{-14}\%$.

2.4.3 Лінійна залежність

В якості лінійної функції візьмем $y = a \cdot t + b$. Нехай $a = 5$, $b = 3$, вектор часу $t = 0:kr:(0.4 - kr)$, де $kr = 1.9531 \cdot 10^{-4}$. $N = 4$ - кількість точок в одному відрізку, $L = 2048$ - максимальна кількість точок.

В результаті апроксимації отримано залежності зображені на рис.2.8.

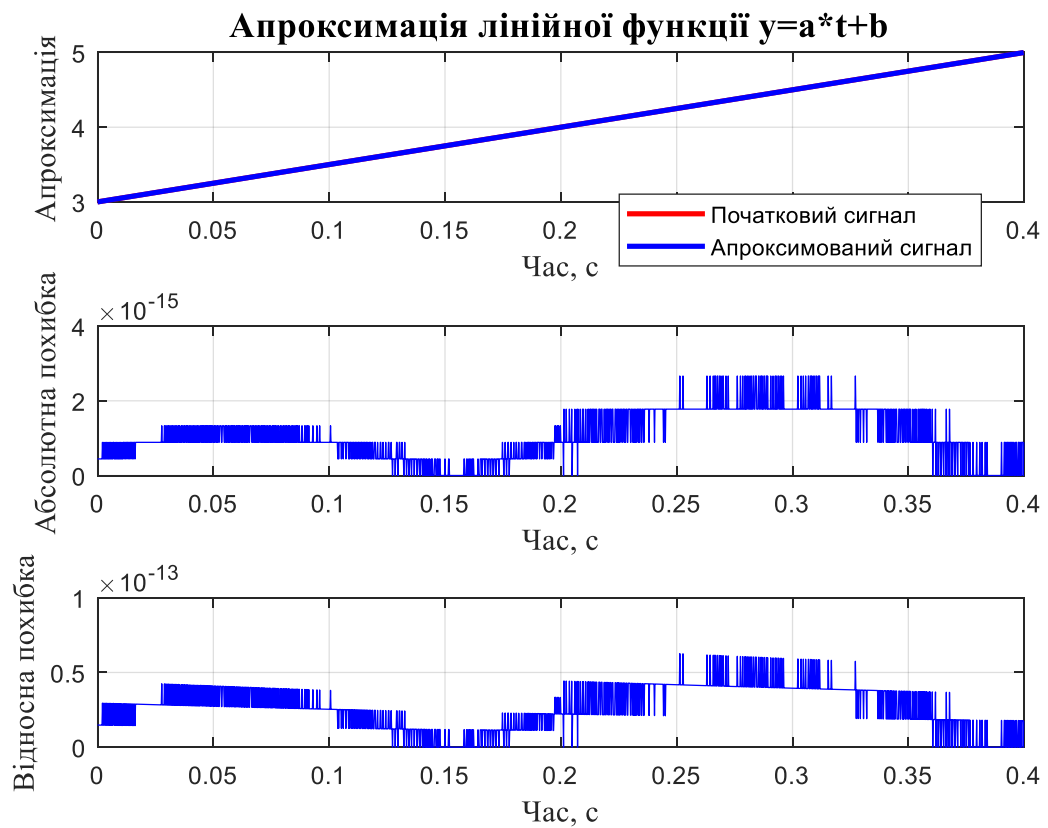


Рисунок 2.8 – Апроксимація лінійної функції по всій довжині сигналу

Мінімальна похибка при кусковій апроксимації ідеального змодельованого сигналу без шуму має місце при довжині відрізка в 32 точки (рис.2.9).

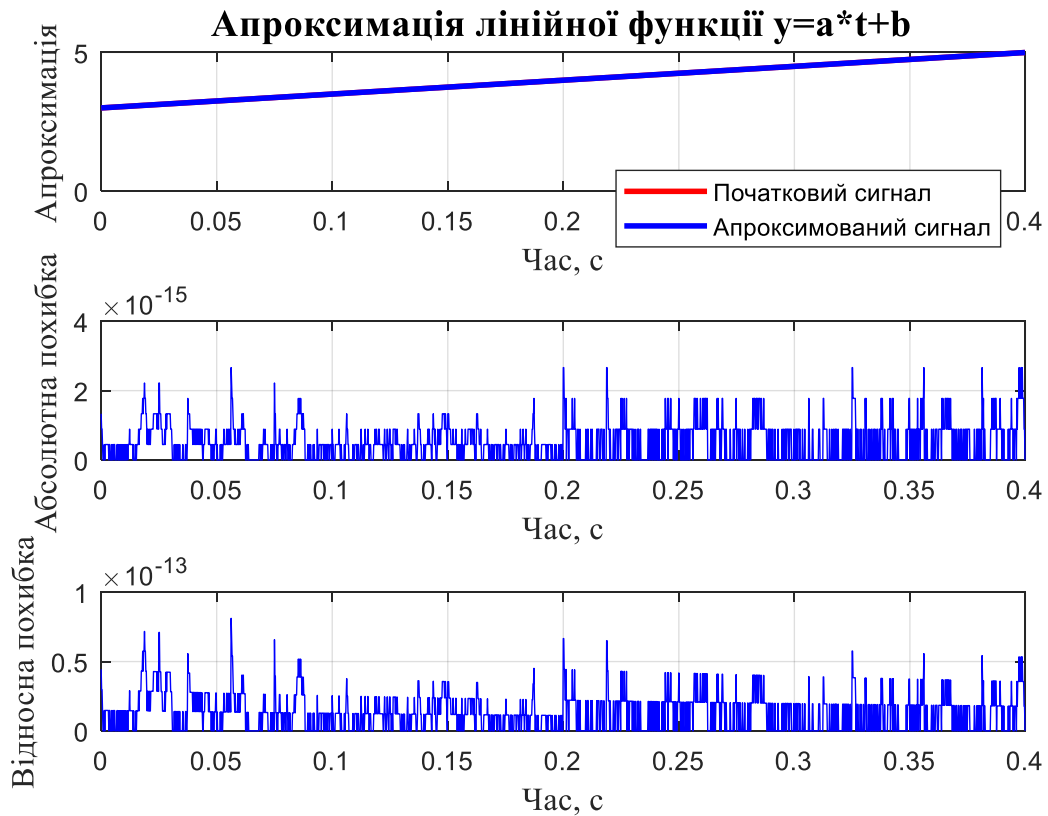


Рисунок 2.9 – Кускова апроксимація лінійної функції при довжині відрізка в 32 точки

В результаті аналізу було виявлено, що при апроксимації сигналу по його всій довжині середня похибка апроксимації складає $5.9569 \cdot 10^{-14} \%$, а максимальна $6.8646 \cdot 10^{-13} \%$. Для кускової апроксимації мінімальна середня похибка, яка отримана при довжині кожного відрізка апроксимації в 32 точки, складає $1.3114 \cdot 10^{-14} \%$.

2.4.4 Затухаюча синусоїда

В якості експоненціальної функції візьмем $y = 3 + \exp(-a \cdot t) \cdot \sin(\omega \cdot t)$. Нехай $a=8$; $\omega=2 \cdot \pi \cdot f$, $f=5$, вектор часу $t = 0:kr:(0.4 - kr)$, де $kr = 1.9531 \cdot 10^{-4}$.

$N=4$ - кількість точок в одному відрізку, $L=2048$ - максимальна кількість точок.

В результаті апроксимації отримано залежності зображені на рис.2.10.

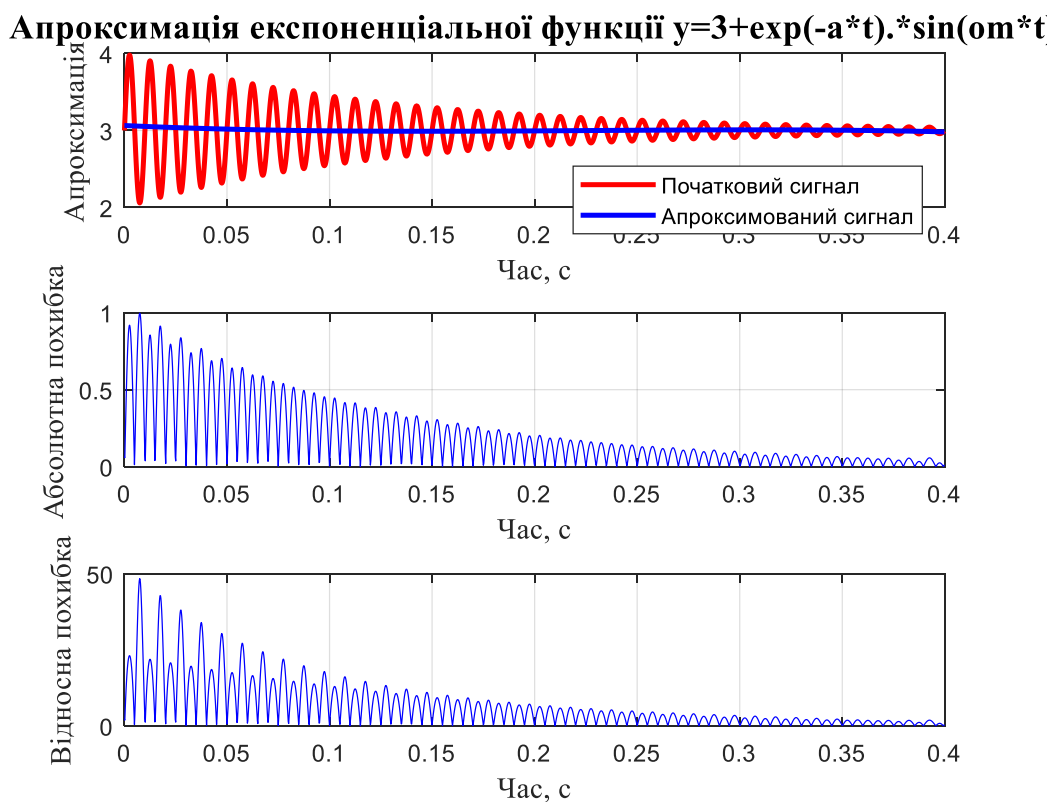


Рисунок 2.10 – Апроксимація експоненціальної функції по всій довжині сигналу

Мінімальна похибка при кусковій апроксимації ідеального змодельованого сигналу без шуму має місце при довжині відрізка в 4 точки (рис.2.11).

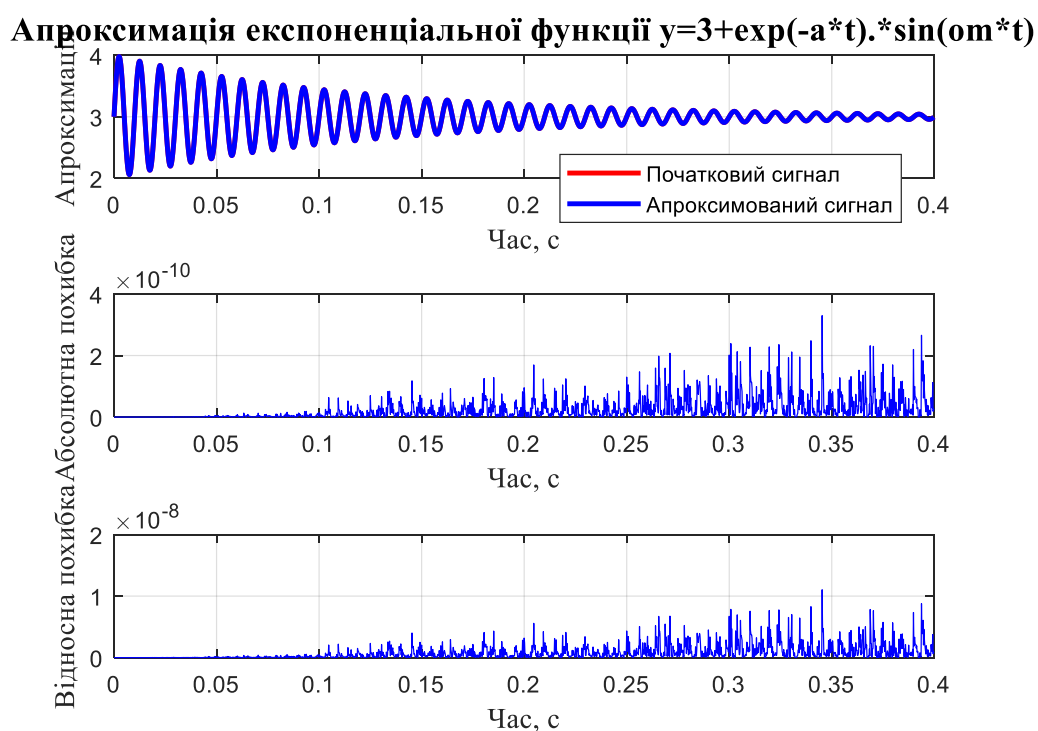


Рисунок 2.11 – Кускова апроксимація експоненціальної функції при довжині відрізка в 4 точки

В результаті аналізу було виявлено, що при апроксимації сигналу по його всій довжині середня похибка апроксимації складає 6.5160%, а максимальна 48.5%. Для кускової апроксимації мінімальна середня похибка, яка отримана при довжині кожного відрізка апроксимації в 4 точки, складає $7.9821 \cdot 10^{-10}$ %.

Таблиця 2 Порівняльна таблиця середньоквадратичних похибок функцій

Вид апроксимуючої функції	Середньоквадратична похибка апроксимації		
	по всій довжині сигналу	максимальна	мінімальна, при кусковій апроксимації
$y = 4 + \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t)$	13.85 %	29.7 %	$8.9192 \cdot 10^{-13}$ %
$y = a \cdot t^2 + b \cdot t + c$	$5.9569 \cdot 10^{-14}$ %	$1.35 \cdot 10^{-13}$ %	$1.2717 \cdot 10^{-14}$ %

$y = a \cdot t + b$	$2.6614^{-14}\%$	6.2^{-14}	1.3114^{-14}
$y = 3 + e^{-a \cdot t} \cdot \sin(\omega \cdot t)$	6.1560%	48.5 %.	$7.9821^{-10}\%$

2.5 Визначення розмаху функції

Згідно з рис 2.12 бачимо, що для сигналів, які проходять через нуль, на графіках відносних похибок виникають небажані скачки.

Апроксимація синусоїдальної функції з шумом $y = \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t)$

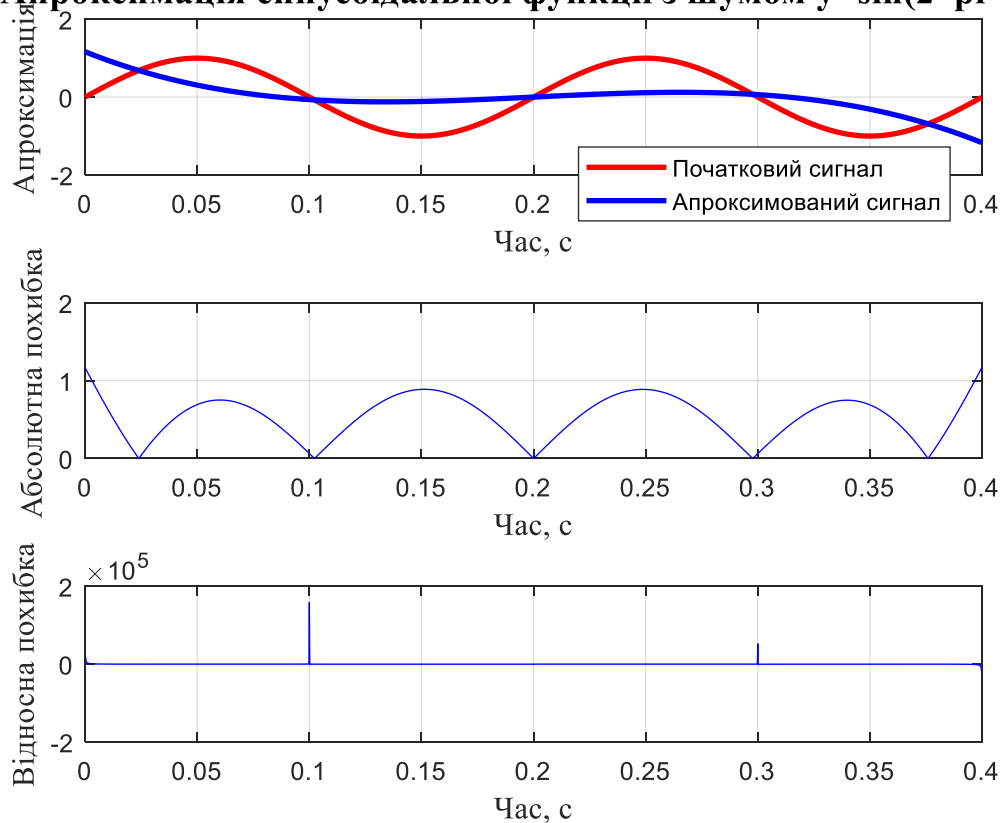


Рис 2.12 – Похибки апроксимації синусоїдальної функції цілого сигналу

Тому через особливості розрахунку відносної похибки для аналізу результатів необхідно, щоб усі функції, що проходять через 0, були підняті на величину розмаху функції. Такими функціями є синусоїдальна залежність $y = 4 + \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t)$, яку

підняли на 4 одиниці, та затухаючу синусоїду $y = 3 + e^{-a \cdot t} \cdot \sin(\omega \cdot t) + \varphi$, яку підняли на 3 одиниці. Завдяки чому позбулись від ділення на нуль.

2.6 Розриви між відрізками кускової апроксимації

Так, як при кусково поліноміальній апроксимації між відрізками виникають розриви (рис.2.13), відповідно збільшується похибка, виникає необхідність компенсувати ці розриви.

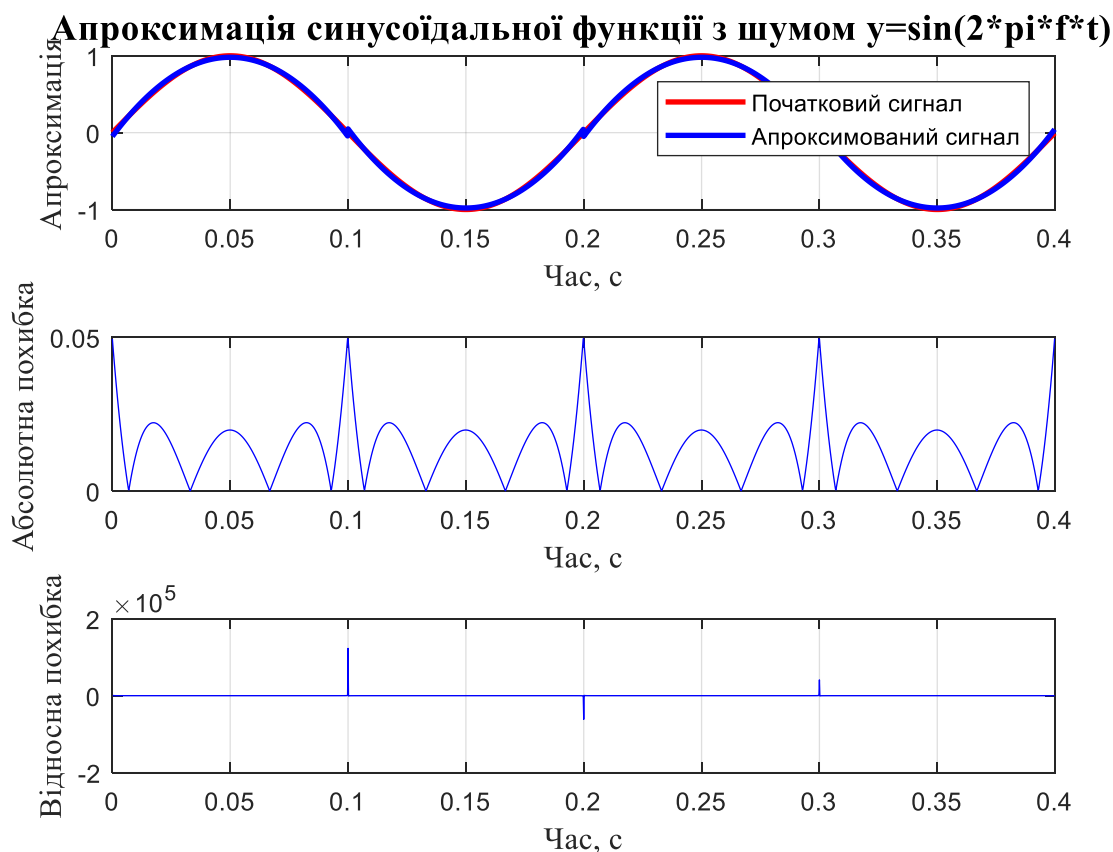


Рис 2.13 – Похибки кускової апроксимації синусоїдальної функції при довжині відрізка 4 точки

ВИСНОВКИ ДО РОЗДІЛУ 2

В цьому розділі було досліджено апроксимацію функцій різного виду методом найменших квадратів у середовищі MatLab. В якості ідеальних сигналів було обрано функції: - синусоїдальна функція, - степенева та - лінійна, - експоненціальна.

Показано, що метод найменших квадратів найкраще працює для лінійних функцій. Відхилення апроксимованої функції від початкового сигналу найменше, похибка має -14 порядок.

Показано, що кусково поліноміальна апроксимація для знакозмінних сигналів має більшу похибку порівняно з лінійними функціями, виникають різкі скачки амплітуди, що призводить до збільшення середньої похибки. Для параболічної ідеальна довжина відрізка – 16 точок, для лінійної – 32 точки. Для синусоїди та експоненціальної функції навпаки, чим менша довжина відрізка тим краща апроксимація. Ідеальне розбиття функцій – по 4 точки у відрізка.

Визначено, що кусково поліноміальна апроксимація краща за апроксимацію сигналу відразу по всій його довжині. Але при розбитті сигналу на відрізки, і апроксимації кожного з них, між цими відрізками виникають розриви, відповідно збільшується середня похибка апроксимації.

РОЗДІЛ 3

ВДОСКОНАЛЕННЯ АПРОКСИМАЦІЇ ДАНИХ

3.1 Апроксимація сигналів з шумом

У природі, зазвичай, не існує ідеальних сигналів, кожен сигнал має додаткову складову шуму. Тому в цьому розділі ми досліджуватимемо апроксимацію сигналів з шумом. В якості ідеальних сигналів є функції: $y = 4 + \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t) + \varphi$ - синусоїдальна функція, $y = a \cdot t^2 + b \cdot t + c + \varphi$ - степенева та $y = a \cdot t + b + \varphi$ - лінійна, $y = 3 + e^{-a \cdot t} \cdot \sin(\omega \cdot t) + \varphi$ - експоненціальна. Складова білого шуму нехай має вигляд: $\varphi = A \cdot \text{randn}(1, \text{length}(t))$. Виконаємо апроксимацію функції з шумом, методом розбиття сигналу на певну кількість відрізків та точок в кожному відрізку (кусково-лінійна апроксимація). Нехай кількість точок дорівнює $N = 4$, $L = 2048$ - максимальна кількість точок. Виконаємо апроксимацію цільного та кускового сигналу для заданих функцій.

3.1.1 Синусоїдальна функція

Функція зі складовою шуму має вигляд:
 $y = 4 + \sin(2\pi \cdot f \cdot t) + \varphi$, де $\varphi = A \cdot \text{randn}(1, \text{length}(t))$, $A = 0.7$. Власна частота
 синусоїди $f = 5$, період синусоїди $T = \frac{1}{f} = 0.2$, кількість періодів $tk = 2 \cdot T = 0.4$,
 частота дискретизації $fd = 1000$, період дискретизації $Td2 = \frac{1}{fd} = 0.001$, вектор часу

$t = 0:kr:(0.4 - kr)$, де $kr = 1.9531 \cdot 10^{-4}$. $N = 4$ - кількість точок в одному відрізку, $L = 2048$ - максимальна кількість точок.

В результаті апроксимації отримано залежності зображені на рис.3.1.

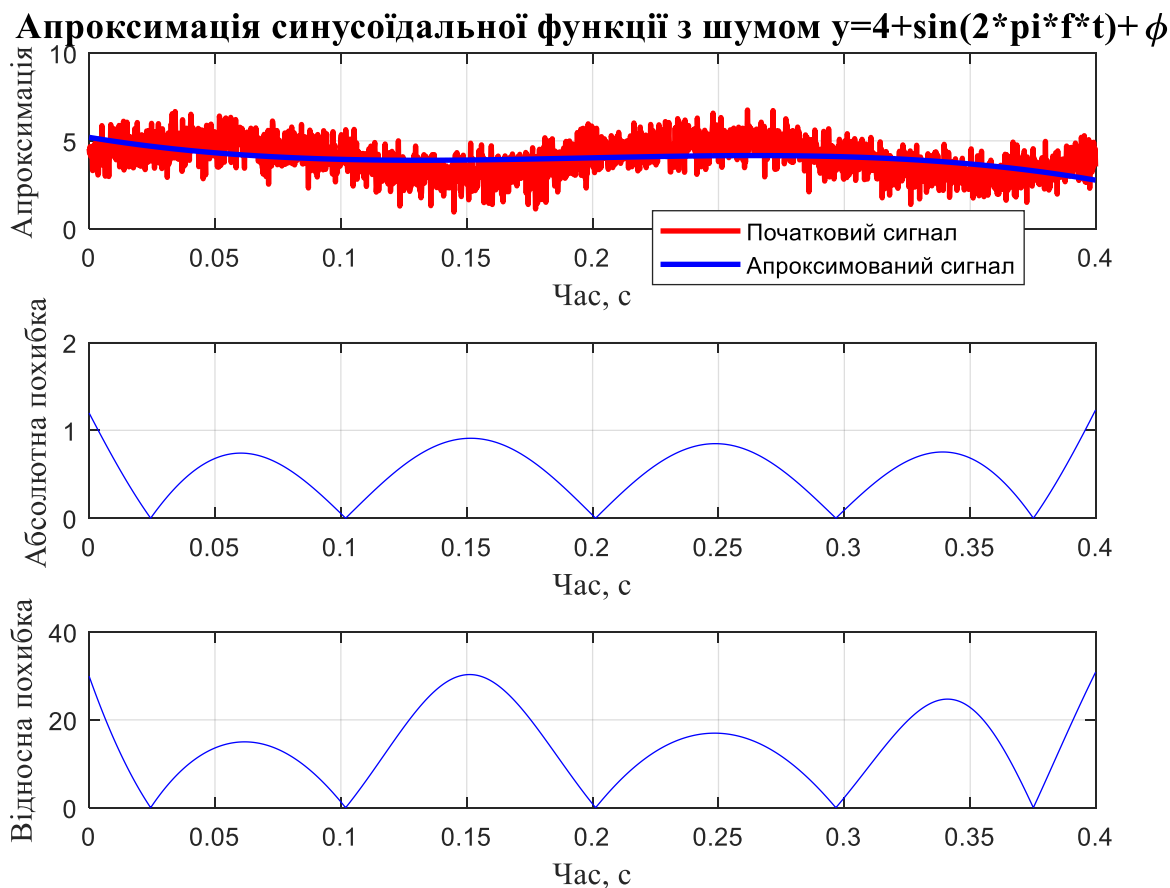


Рисунок 3.1 – Апроксимація синусоїдальної функції з шумом по всій довжині сигналу

Мінімальна похибка при кусковій апроксимації змодельованого сигналу з шумом має місце при довжині відрізка в 512 точок (рис.3.2).

Апроксимація синусоїдальної функції з шумом $y=4+\sin(2*\pi*f*t)+\phi$

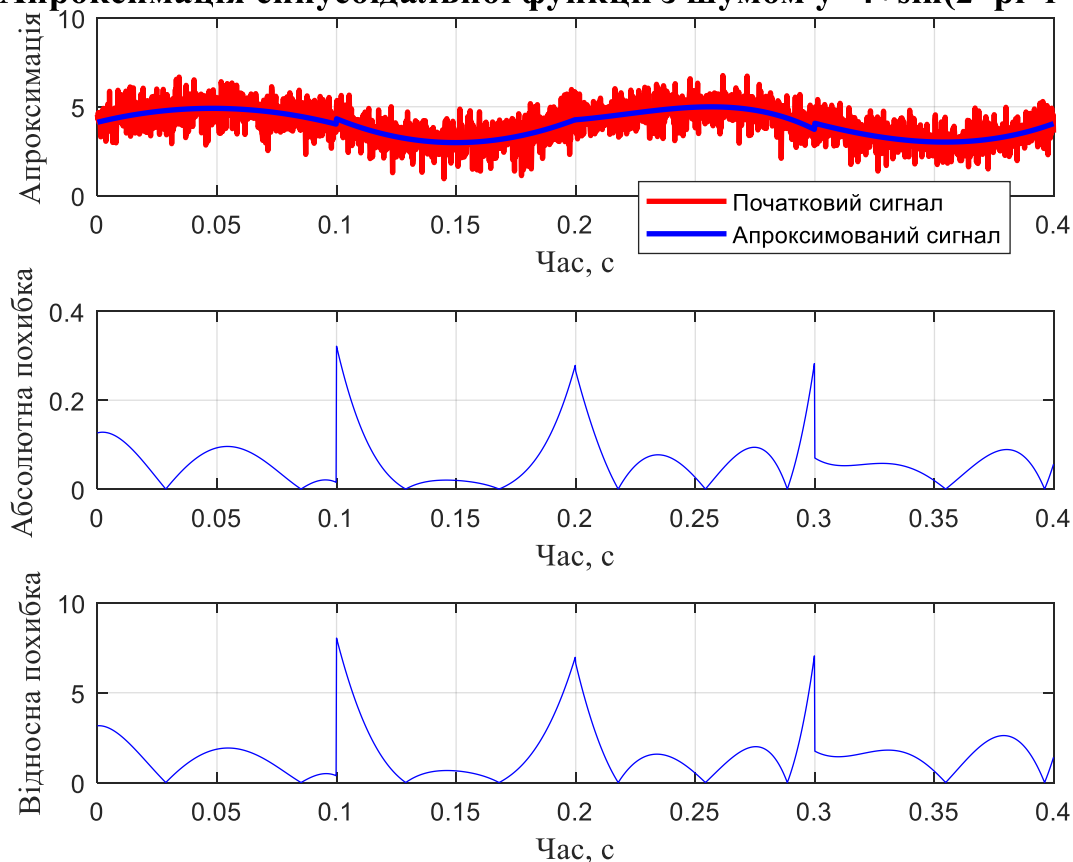


Рисунок 3.2 – Кускова апроксимація синусоїдальної функції з шумом при довжині відрізка в 512 точок

В результаті аналізу було виявлено, що при апроксимації сигналу по його всій довжині середня похибка апроксимації складає 14.5344%, а максимальна 30%. Для кускової апроксимації мінімальна середня похибка, яка отримана при довжині кожного відрізка апроксимації в 512 точок, складає 1.5802%.

Для того, щоб оцінити у скільки разів кількість небажаного шуму більше за силу сигналу, необхідно розрахувати відношення сигнал/шум (SNR – ‘signal-to-noise ratio’). В MatLab є спеціальна функція, що обчислює це відношення – $snr(x,y)$. Ця функція повертає співвідношення сигнал-шум (SNR) у децибелах сигналу x , шляхом обчислення співвідношення його сумарної квадратичної величини до рівня шуму y . y має бути такими ж розмірами, як x . Цю формулу можливо використовувати, коли

вхідний сигнал не обов'язково синусоїдальний. Для синусоїдальної зашумленої функції відношення сигнал/шум дорівнює $snr = 1.0118$.

3.1.2 Параболічна функція

Наступною досліджуваною функцією є $y = a \cdot t^2 + b \cdot t + c + \varphi$, де $\varphi = A \cdot \text{randn}(1, \text{length}(t))$, $A = 6.3$. Нехай $a = 18$, $b = 10$, $c = 3$, вектор часу $t = 0:kr:(0.4 - kr)$, де $kr = 1.9531 \cdot 10^{-4}$. $N = 4$ - кількість точок в одному відрізку, $L = 2048$ - максимальна кількість точок.

В результаті апроксимації отримано залежності зображені на рис.3.3.

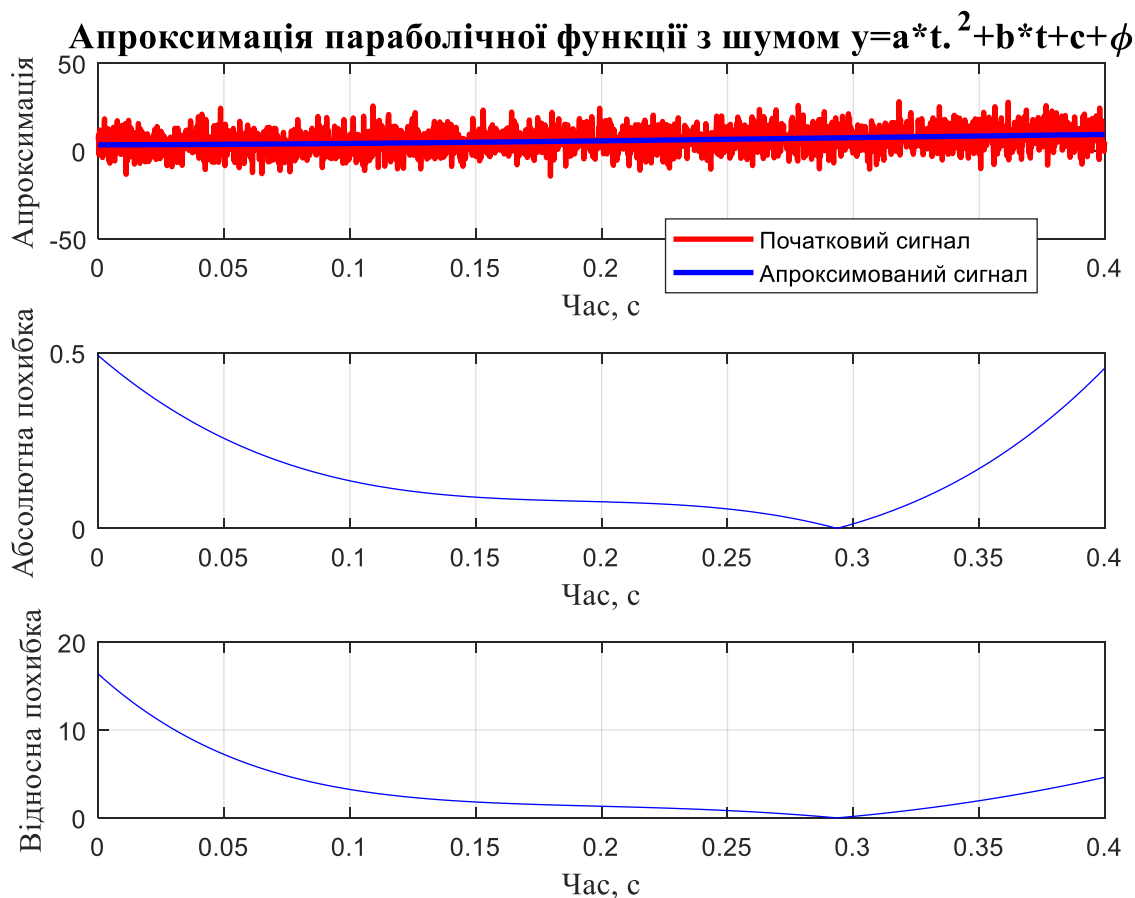


Рисунок 3.3 – Апроксимація параболічної функції з шумом по всій довжині сигналу

Мінімальна похибка при кусковій апроксимації змодельованого сигналу з шумом має місце при довжині відрізка в 2048 точки (рис.3.4).

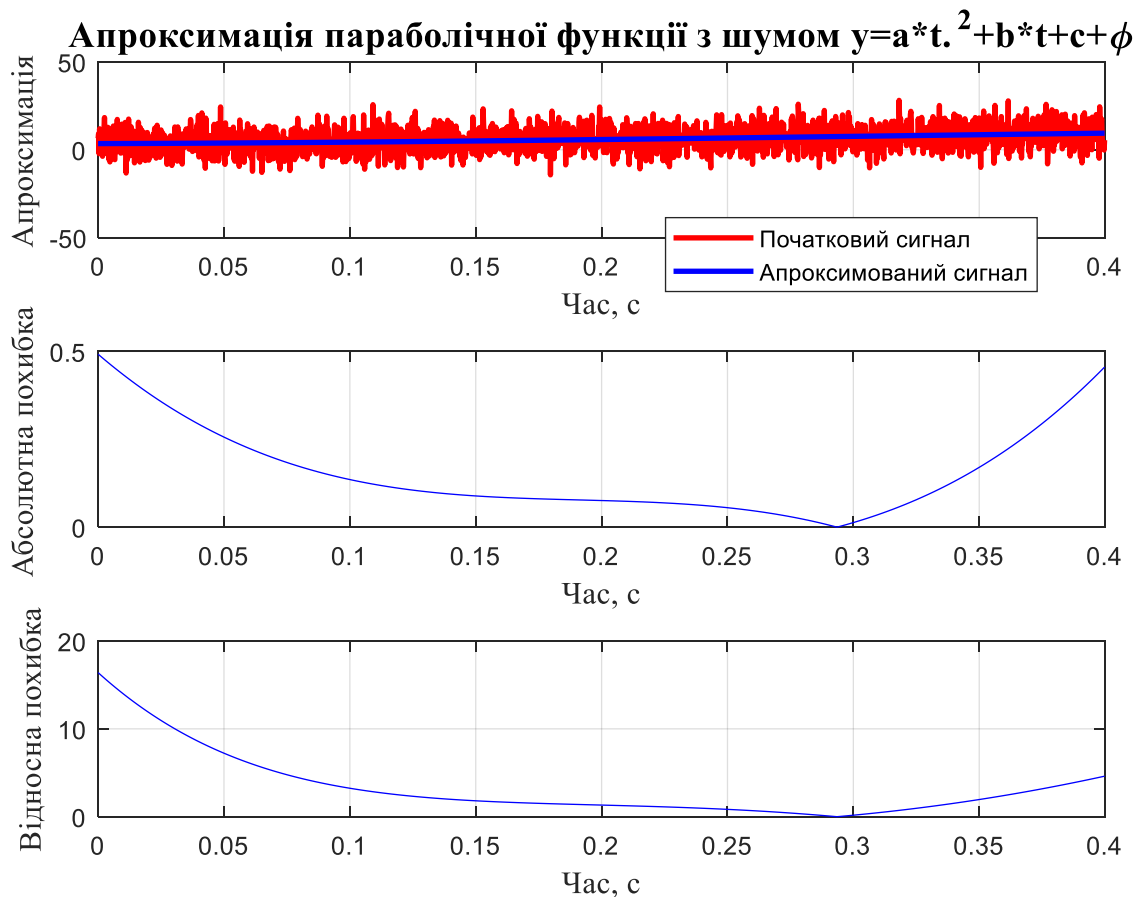


Рисунок 3.4 – Кускова апроксимація параболічної функції з шумом при довжині відрізка в 2048 точки

В результаті аналізу було виявлено, що при апроксимації сигналу по його всій довжині середня похибка апроксимації складає 96.9060%, а максимальна 16.4%. Для кускової апроксимації мінімальна середня похибка, яка отримана при довжині кожного відрізка апроксимації в 2048 точок, складає 3.2305%.

Відношення сигнал/шум дорівнює $snr = 0.6558$.

3.1.3 Лінійна функція

Наступною досліджуваною функцією є $y = a \cdot t + b + \varphi$ де $\varphi = A \cdot \text{randn}(1, \text{length}(t))$, $A = 4.2$. Нехай $a = 5$, $b = 3$, вектор часу $t = 0:kr:(0.4 - kr)$, де $kr = 1.9531 \cdot 10^{-4}$. $N = 4$ - кількість точок в одному відрізку, $L = 2048$ - максимальна кількість точок.

В результаті апроксимації отримано залежності зображені на рис.3.5.

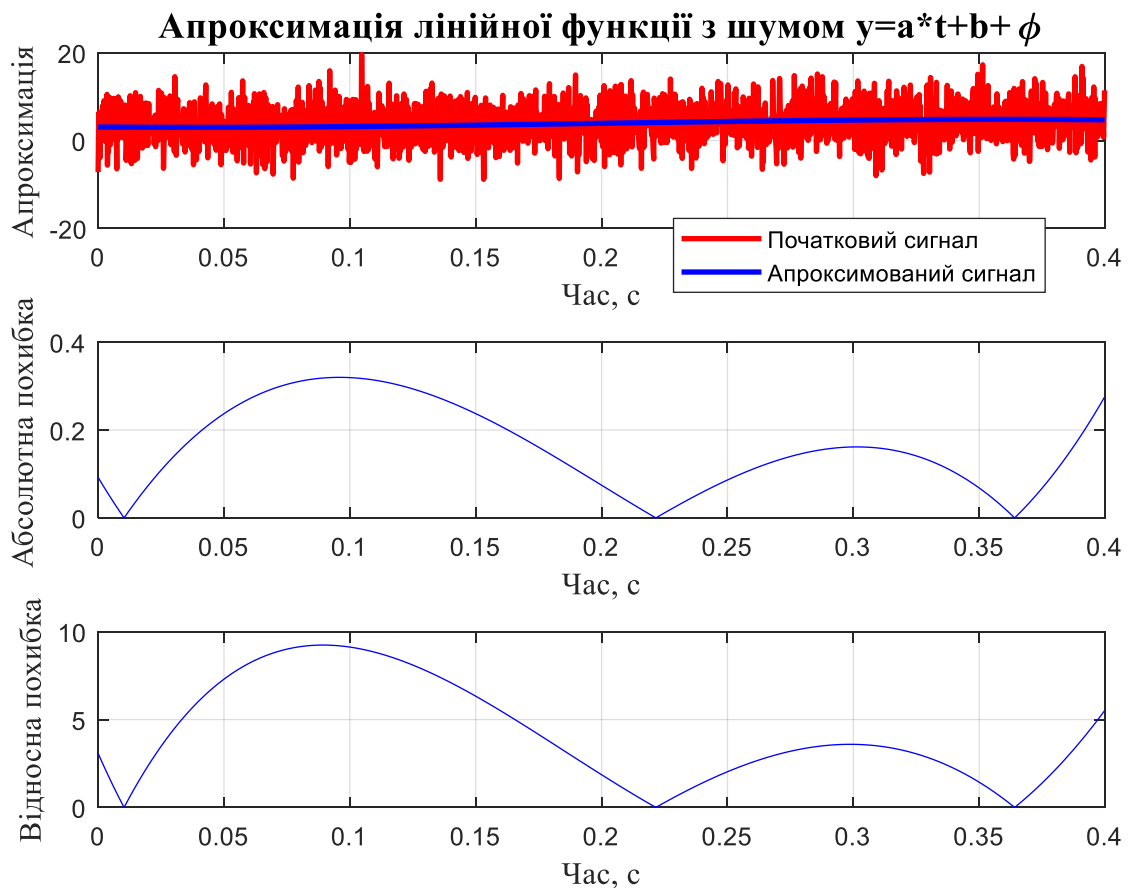


Рисунок 3.5 – Апроксимація лінійної функції з шумом по всій довжині сигналу

Мінімальна похибка при кусковій апроксимації змодельованого сигналу з шумом має місце при довжині відрізка в 2048 точки (рис.3.6).

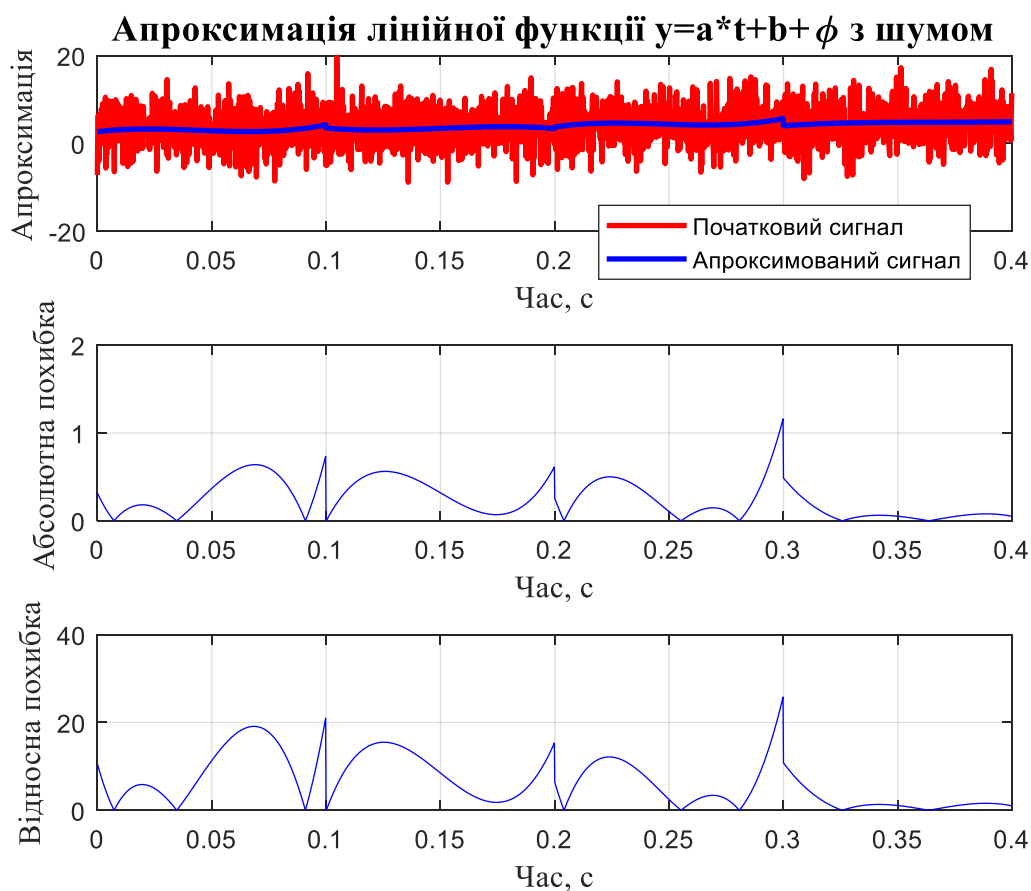


Рисунок 3.6 – Кускова апроксимація лінійної функції з шумом при довжині відрізка в 512 точок

В результаті аналізу було виявлено, що при апроксимації сигналу по його всій довжині середня похибка апроксимації складає 83.7038%, а максимальна 9.2%. Для кускової апроксимації мінімальна середня похибка, яка отримана при довжині кожного відрізка апроксимації в 512 точок, складає 4.1824%.

Відношення сигнал/шум дорівнює $snr = 0.6926$.

3.1.4. Затухаюча синусоїда

Функція	зі	складовою	шуму	має	вигляд:
$y = 3 + \exp(-a \cdot t) \cdot \sin(\omega \cdot t) + \phi$, де $\phi = A \cdot \text{randn}(1, \text{length}(t))$, $A = 0.35$.					Нехай

$a=8$; $\omega=2 \cdot \pi \cdot f$, вектор часу $t=0:kr:(0.4-kr)$, де $kr=1.9531 \cdot 10^{-4}$. $N=4$ - кількість точок в одному відрізку, $L=2048$ - максимальна кількість точок.

В результаті апроксимації отримано залежності зображені на рис.3.7.

Апроксимація затухаючої синусоїди з шумом $y=3+\exp(-a \cdot t) \cdot \sin(\omega \cdot t)+q$

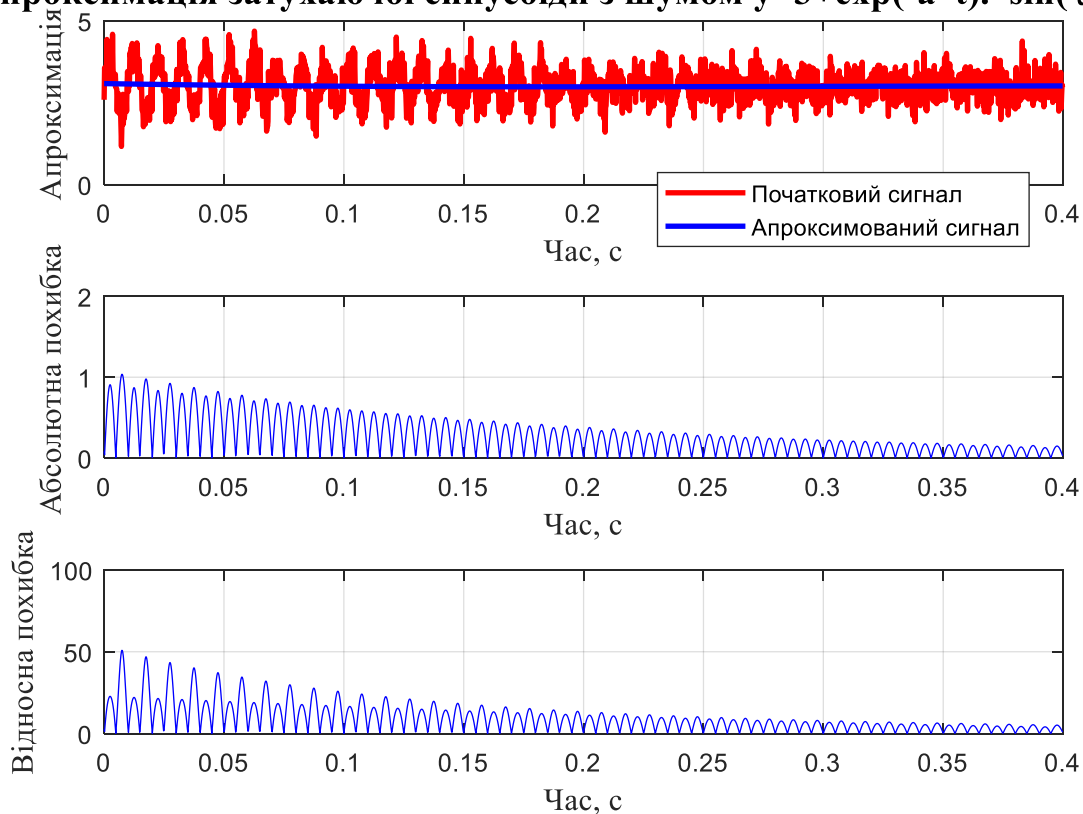


Рисунок 3.7 – Апроксимація затухаючої синусоїди з шумом по всій довжині сигналу

Мінімальна похибка при кусковій апроксимації змодельованого сигналу з шумом має місце при довжині відрізка в 32 точки (рис.3.8).

Апроксимація затухаючої синусоїди з шумом $y=3+\exp(-a*t)*\sin(\omega*t)+$

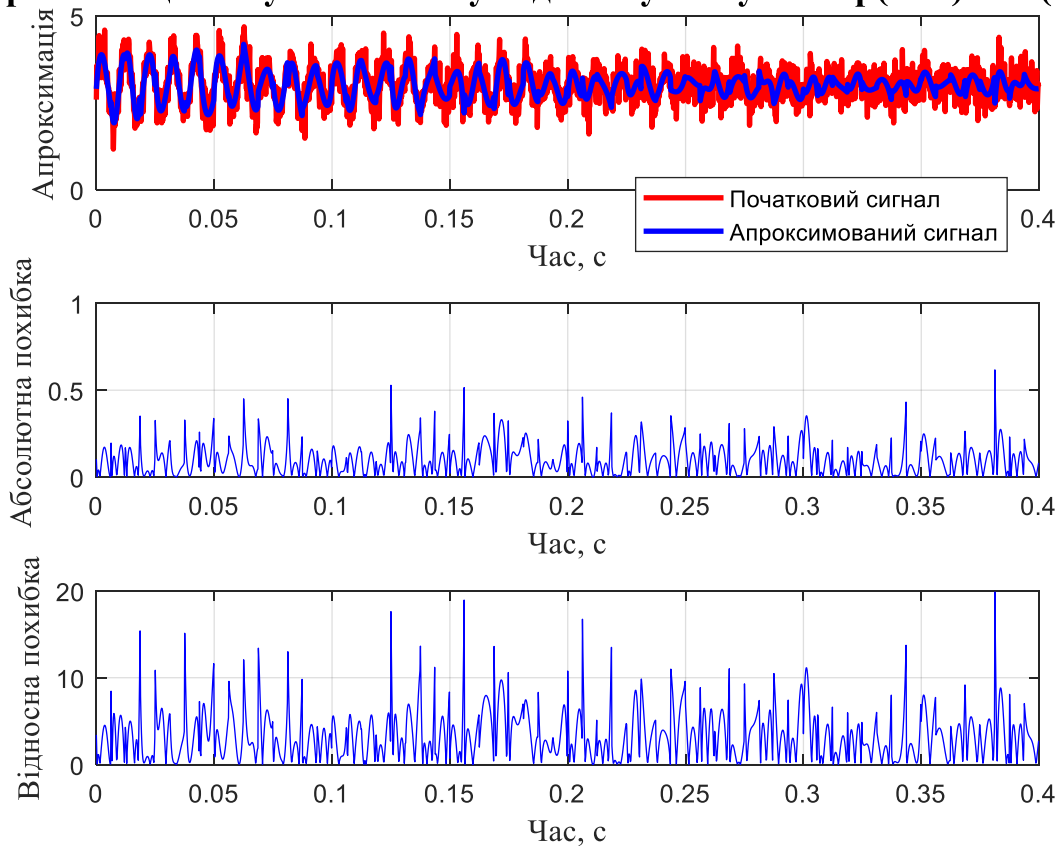


Рисунок 3.8 – Кускова апроксимація затухаючої синусоїди з шумом при довжині відрізка в 32 точки

В результаті аналізу було виявлено, що при апроксимації сигналу по його всій довжині середня похибка апроксимації складає 9.5393%, а максимальна 50%. Для кускової апроксимації мінімальна середня похибка, яка отримана при довжині кожного відрізка апроксимації в 32 точки, складає 3.3897%.

Відношення сигнал/шум дорівнює $snr = 0.6755$.

Згідно з отриманими результатами, можна зробити висновок, що для лінійних сигналів метод найменших квадратів працює з мінімальною похибкою, та розбиття сигналу на відрізки ніяк не змінює отриману апроксимовану функцію. Для нелінійних сигналів (синусоїда, експоненціальна функція) розбиття на відрізки сигналу та апроксимація кожного призводить до підвищення точності результатів.

Але при кусково поліноміальній апроксимації в місцях поєднання відрізків виникають розриви (стрибки на графіках похибок), відповідно збільшується похибка.

3.2 Введення згладжування апроксимації функцій

Для того, щоб збільшити точність апроксимації функцій, необхідно позбавитись від небажаних розривів. Спробуємо ввести згладжування функції. Для цього переробимо алгоритм так, щоб сигнал при розбитті на відрізки, кожену нову ітерацію виконував апроксимацію вже апроксимованого відрізка сигналу. Для кожної нової апроксимації довжина відрізка змінювалась за наступною формулою:

$$L_a = L_a \cdot 2,$$

де L_a - це поточна довжина кожного відрізка, на які розбивається сигнал для апроксимації.

Виконаємо дослідження для 4 видів функцій.

3.2.1 Синусоїдальна функція з шумом $y = 4 + \sin(2\pi \cdot f \cdot t) + \varphi$

Функція зі складовою шуму має вигляд:
 $y = 4 + \sin(2\pi \cdot f \cdot t) + \varphi$, де $\varphi = A \cdot \text{randn}(1, \text{length}(t))$, $A = 0.7$. Нехай
 $a=8$; $\text{om}=2 \cdot \pi \cdot f$; , вектор часу $t = 0:kr:(0.4 - kr)$, де $kr = 1.9531 \cdot 10^{-4}$. $N = 4$ -
 кількість точок в одному відрізку, $L = 2048$ - максимальна кількість точок.

В результаті апроксимації зі згладжуванням отримано залежності зображені на рис.3.9.

Апроксимація синусоїдальної функції з шумом $y=4+\sin(2*\pi*f*t)+\phi$

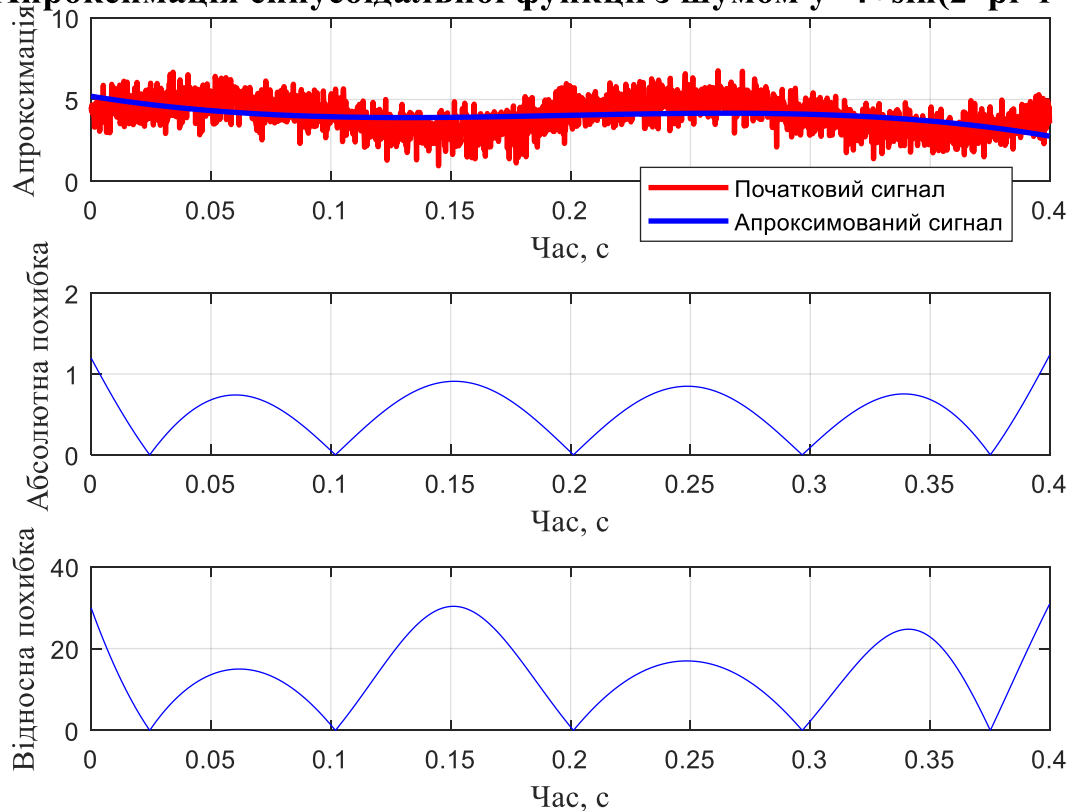


Рисунок 3.9 – Апроксимація синусоїдальної функції з шумом по всій довжині сигналу зі згладжуванням

Мінімальна похибка при кусковій апроксимації змодельованого сигналу з шумом має місце при довжині відрізка в 512 точок (рис.3.10).

Апроксимація синусоїдальної функції з шумом $y=4+\sin(2\cdot\pi\cdot f\cdot t)+\phi$

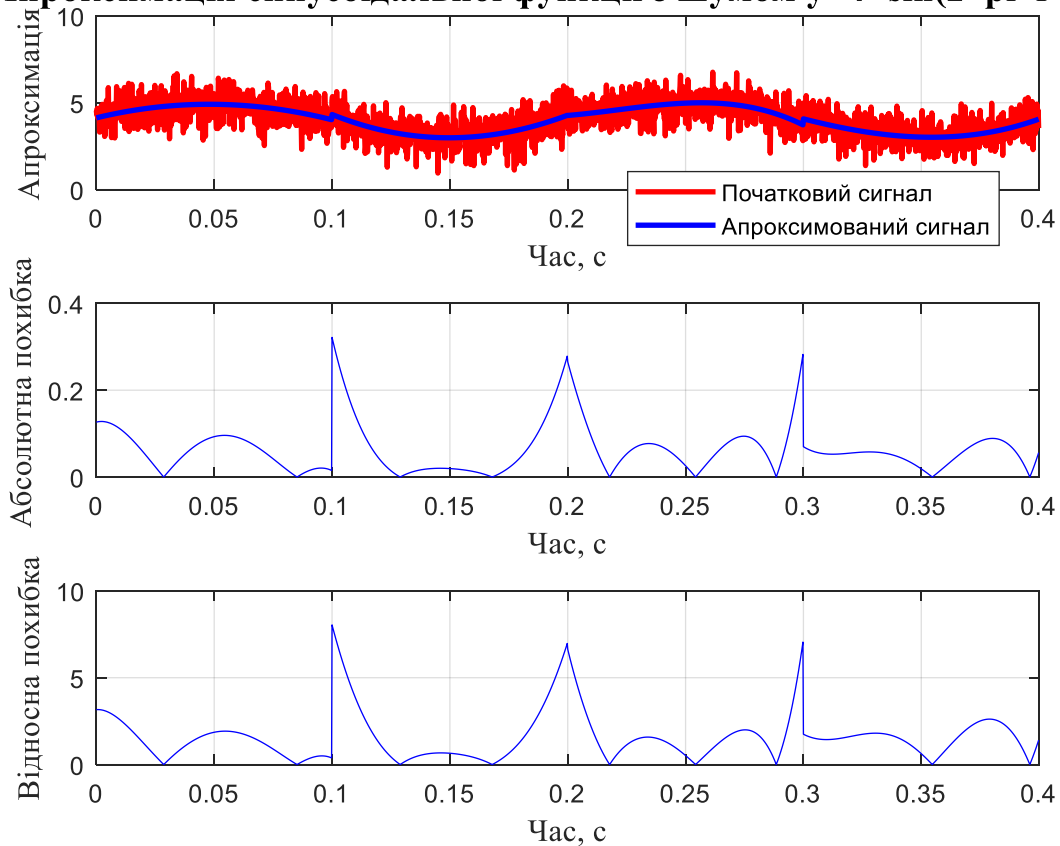


Рисунок 3.10 – Кускова апроксимація синусоїдальної функції з шумом при довжині відрізка в 512 точок

В результаті аналізу було виявлено, що при апроксимації сигналу по його всій довжині середня похибка апроксимації складає 14.5344%, а максимальна 30%. Для кускової апроксимації мінімальна середня похибка, яка отримана при довжині кожного відрізка апроксимації в 512 точок, складає 1.5802%.

Відношення сигнал/шум дорівнює $snr = 1.0118$.

3.2.2 Параболічна функція з шумом $y = a \cdot t^2 + b \cdot t + c + \phi$

Наступною досліджуваною функцією є $y = a \cdot t^2 + b \cdot t + c + \phi$, де $\phi = A \cdot \text{randn}(1, \text{length}(t))$, $A = 6.3$. Нехай $a = 18$, $b = 10$, $c = 3$,

вектор часу $t = 0:kr:(0.4 - kr)$, де $kr = 1.9531 \cdot 10^{-4}$. $N = 4$ - кількість точок в одному відрізку, $L = 2048$ - максимальна кількість точок.

В результаті апроксимації отримано залежності зображені на рис.3.11.

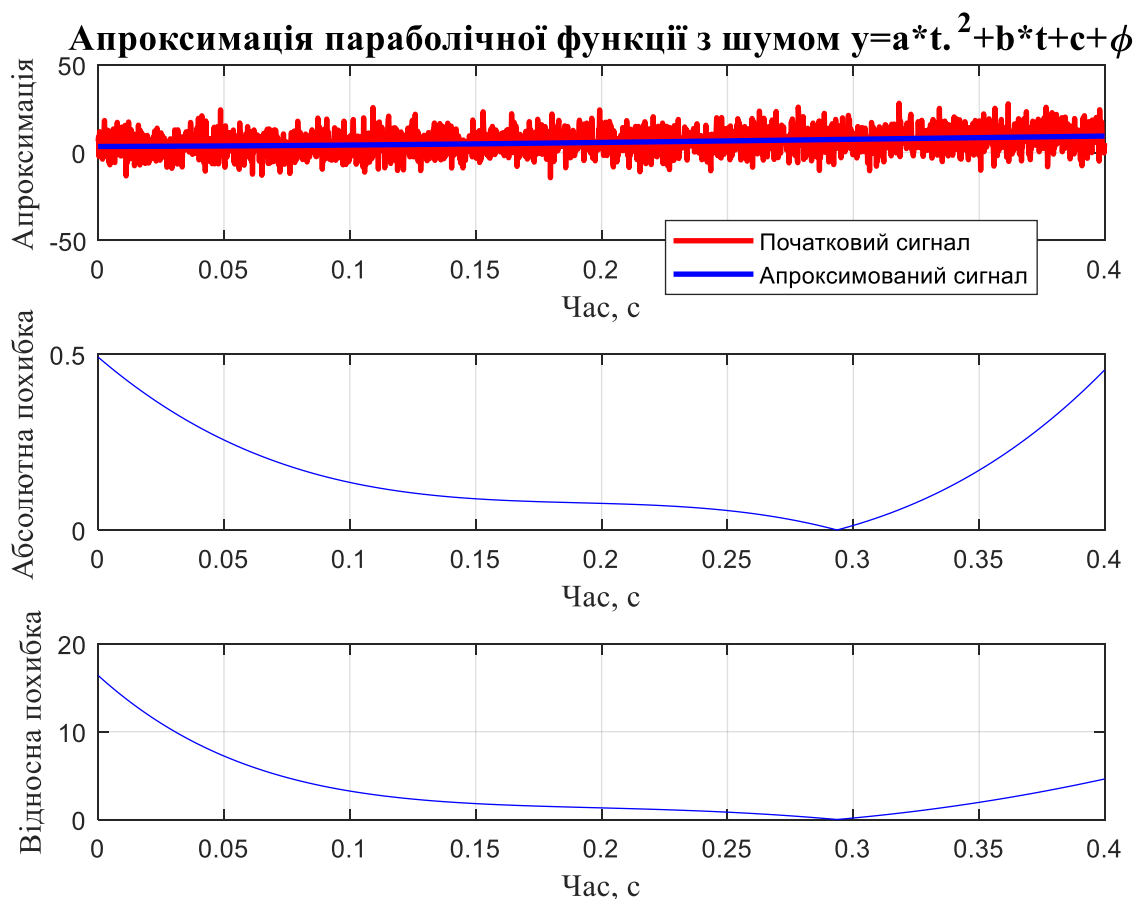


Рисунок 3.11 – Апроксимація параболічного сигналу з шумом по всій довжині сигналу зі згладжуванням

Мінімальна похибка при кусковій апроксимації змодельованого сигналу з шумом має місце при довжині відрізка в 2048 точок (рис.3.12).

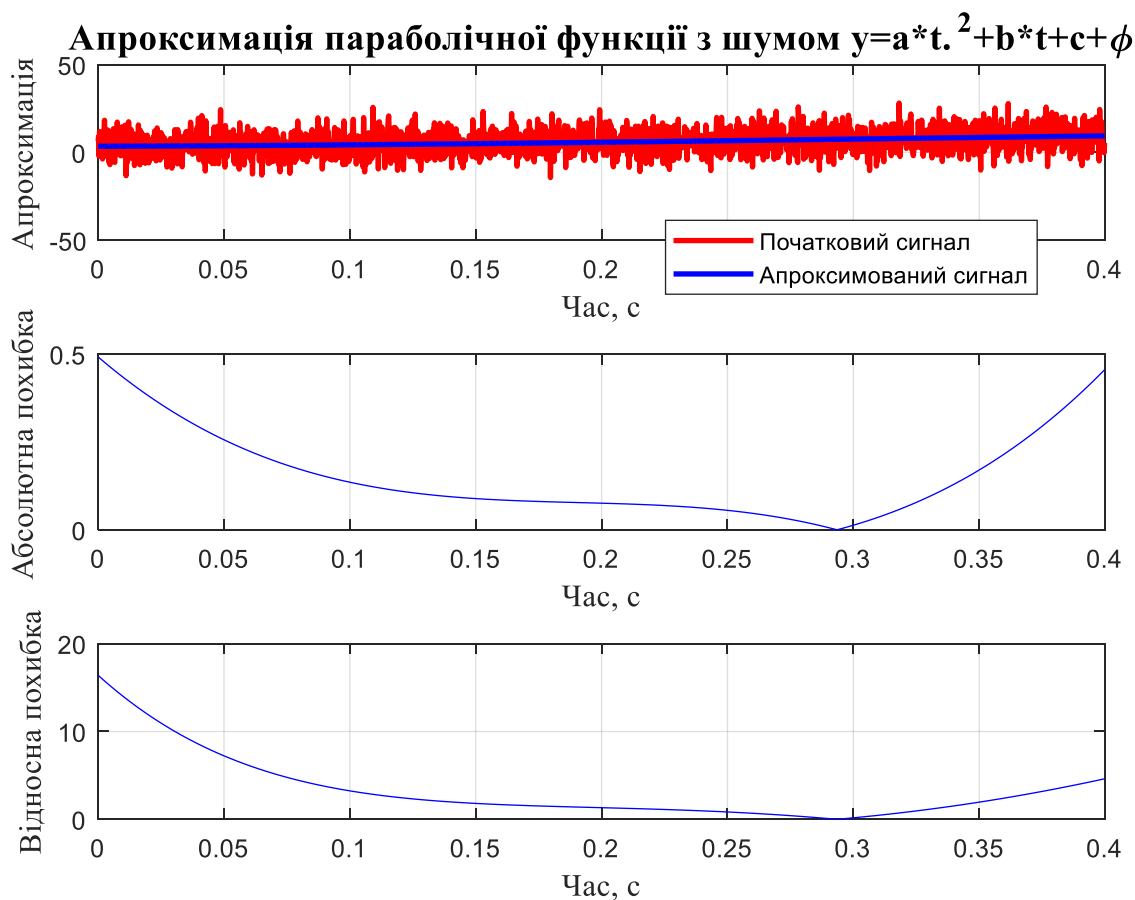


Рисунок 3.12 – Кускова апроксимація параболічної функції з шумом при довжині відрізка в 2048 точок

В результаті аналізу було виявлено, що при апроксимації сигналу по його всій довжині середня похибка апроксимації складає 96.9060%, а максимальна 16.4%. Для кускової апроксимації мінімальна середня похибка, яка отримана при довжині кожного відрізка апроксимації в 2048 точок, складає 3.2305%.

Відношення сигнал/шум дорівнює $snr = 0.6558$.

3.2.3 Лінійна функція з шумом $y = a \cdot t + b + \phi$

Наступною досліджуваною функцією є $y = a \cdot t + b + \phi$, де $\phi = A \cdot randn(1, length(t))$, $A = 4.2$. Нехай $a = 5$, $b = 3$, вектор часу

$t = 0:kr:(0.4 - kr)$, де $kr = 1.9531 \cdot 10^{-4}$. $N = 4$ - кількість точок в одному відрізку, $L = 2048$ - максимальна кількість точок.

В результаті апроксимації отримано залежності зображені на рис.3.1

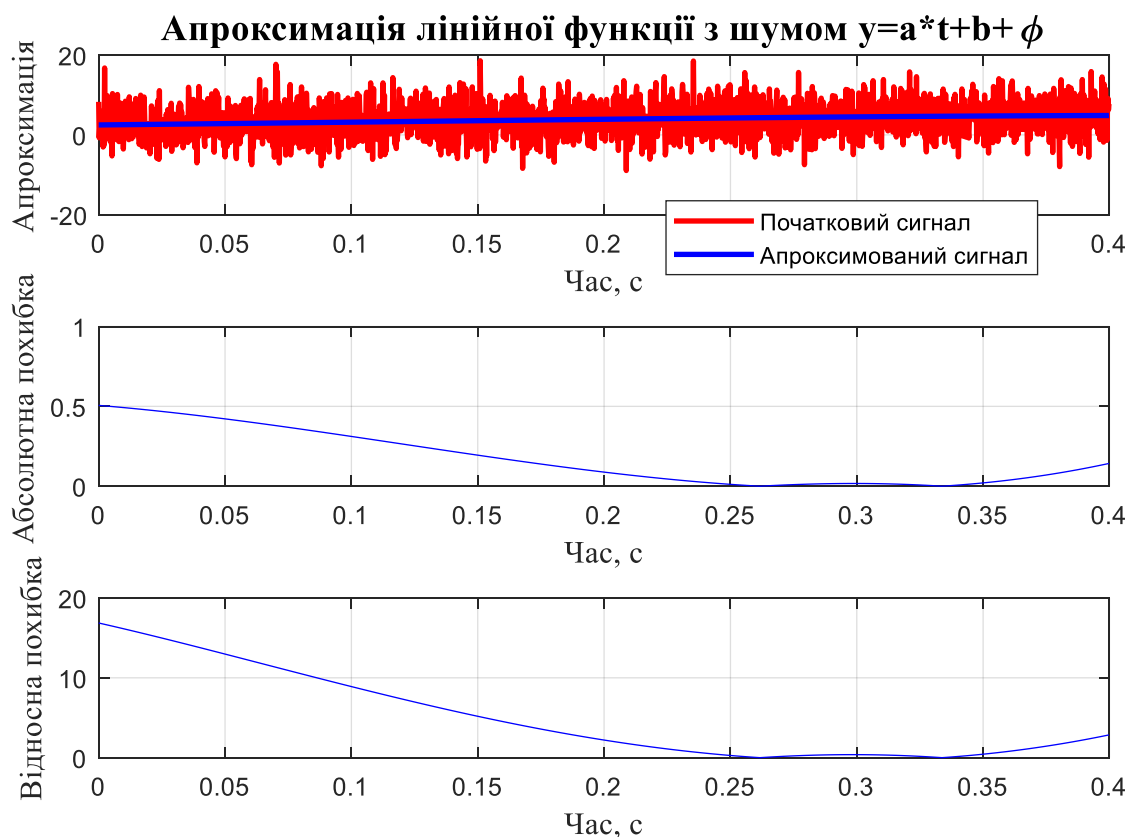


Рисунок 3.13 – Апроксимація лінійного сигналу з шумом по всій довжині сигналу зі згладжуванням

Мінімальна похибка при кусковій апроксимації змодельованого сигналу з шумом має місце при довжині відрізка в 2048 точок (рис.3.14).

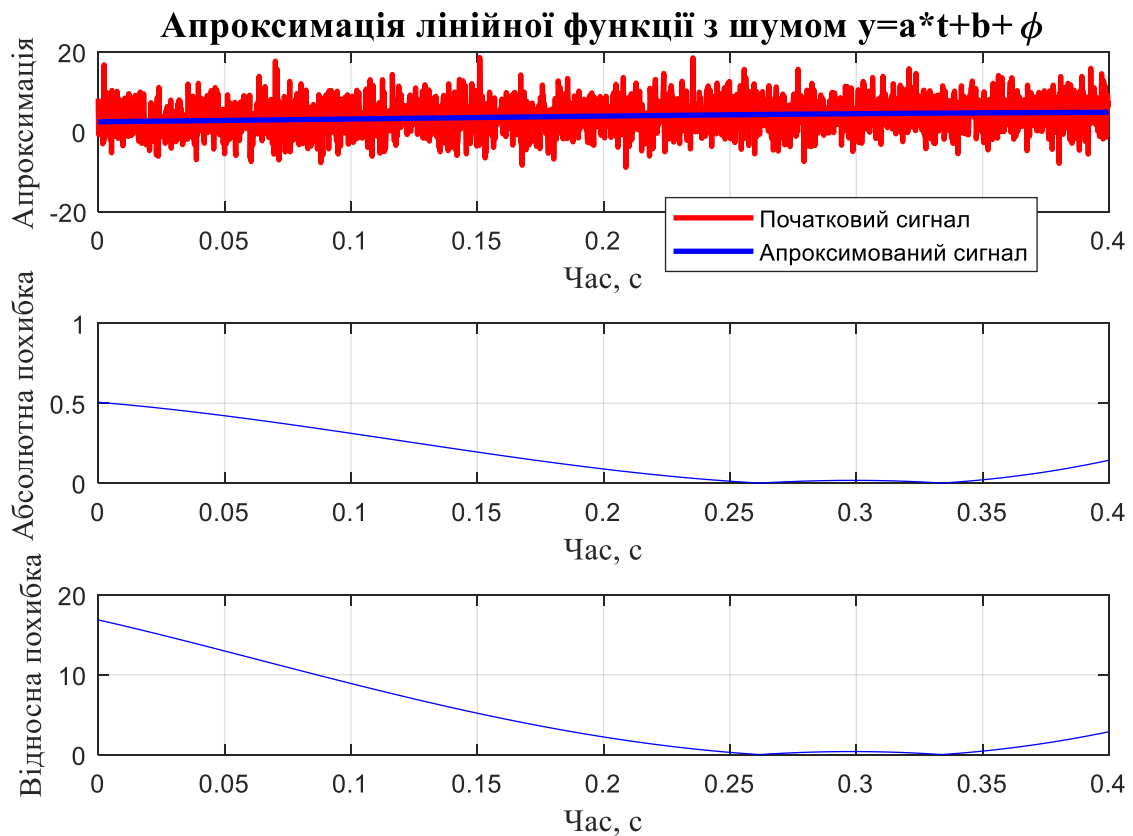


Рисунок 3.14 – Кускова апроксимація лінійної функції з шумом при довжині відрізка в 2048 точок

В результаті аналізу було виявлено, що при апроксимації сигналу по його всій довжині середня похибка апроксимації складає 83.7038%, а максимальна 16.8%. Для кускової апроксимації мінімальна середня похибка, яка отримана при довжині кожного відрізка апроксимації в 2048 точок, складає 4.1824%.

Відношення сигнал/шум дорівнює $snr = 0.6926$.

3.2.4 Затухаюча синусоїда $y = 3 + \exp(-a \cdot t) \cdot \sin(\omega \cdot t) + \phi$

Функція зі складовою шуму має вигляд:
 $y = 3 + \exp(-a \cdot t) \cdot \sin(\omega \cdot t) + \phi$, де $\phi = A \cdot \text{randn}(1, \text{length}(t))$, $A = 0.35$.
 Нехай

$a=8$; $\omega=2 \cdot \pi \cdot f$; , вектор часу $t = 0:kr:(0.4 - kr)$, де $kr = 1.9531 \cdot 10^{-4}$. $N = 4$ - кількість точок в одному відрізку, $L = 2048$ - максимальна кількість точок.

В результаті апроксимації отримано залежності зображені на рис.3.15.

Апроксимація затухаючої синусоїди з шумом $y=3+\exp(-a \cdot t) \cdot \sin(\omega \cdot t)+\eta$

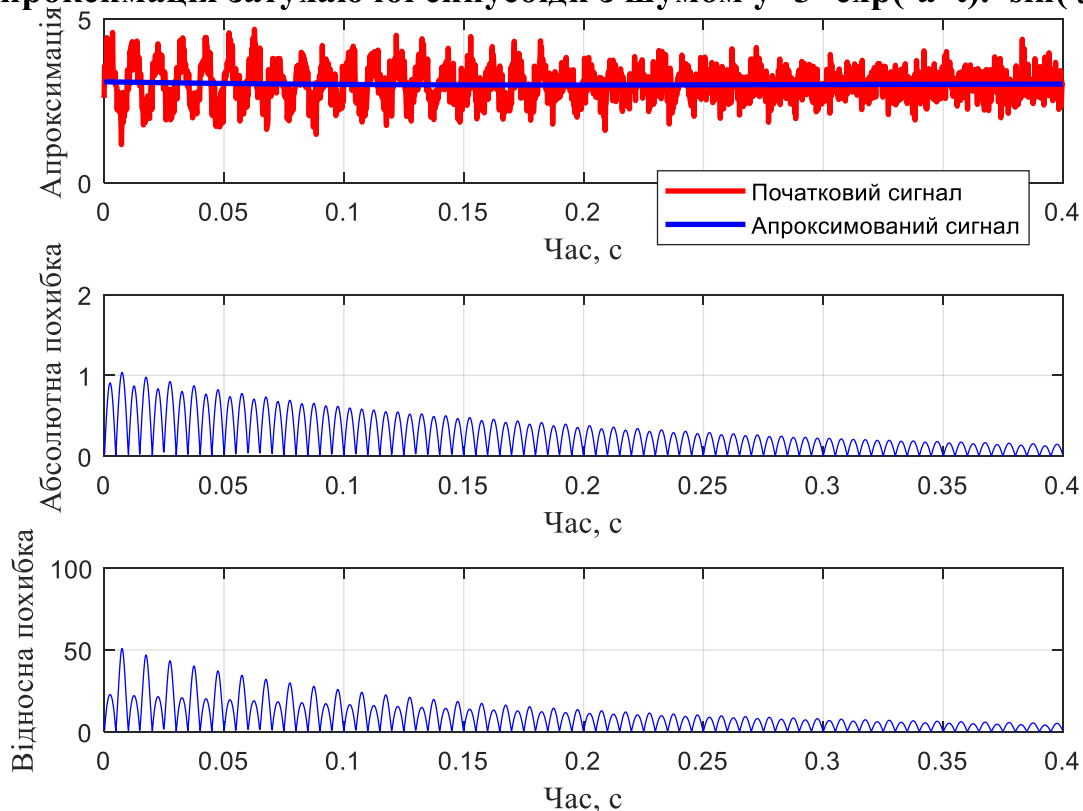


Рисунок 3.15 – Апроксимація експоненціальної функції з шумом по всій довжині сигналу зі згладжуванням

Мінімальна похибка при кусковій апроксимації змодельованого сигналу з шумом має місце при довжині відрізка в 32 точки (рис.3.16).

Апроксимація затухаючої синусоїди з шумом $y=3+\exp(-a*t)*\sin(\omega*t)+$

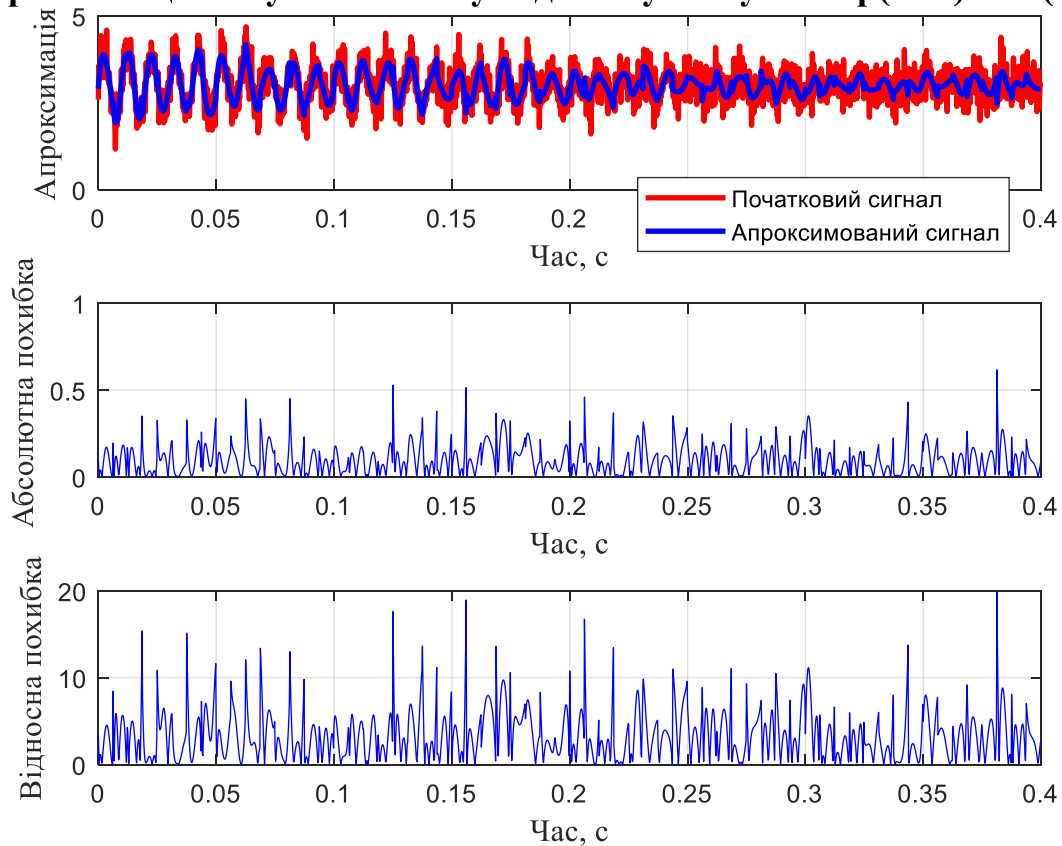


Рисунок 3.16 – Кускова апроксимація експоненціальної функції з шумом при довжині відрізка в 32 точки

В результаті аналізу було виявлено, що при апроксимації сигналу по його всій довжині середня похибка апроксимації складає 9.5393%, а максимальна 50%. Для кускової апроксимації мінімальна середня похибка, яка отримана при довжині кожного відрізка апроксимації в 32 точки, складає 3.3897%.

Відношення сигнал/шум дорівнює $snr = 0.6755$.

3.3 Дослідження апроксимації функцій при зміні довжини сигналу

Перевіримо достовірність апроксимації функцій при зміні довжини сигналу. Візьмемо ще три значення L (довжини сигналу): 1024, 4096, 8192 точки. Проведемо

дослідження для різних довжин сигналу (з приблизно однаковим співвідношенням сигнал/шум) та порівняємо отримані результати апроксимації цілого сигналу та з найменшою похибкою.

3.3.1 Довжина сигналу $L = 1024$ точки

1.) $y = 4 + \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t) + \varphi$ - синусоїдальна функція,

де $\varphi = A \cdot \text{randn}(1, \text{length}(t))$, $A = 0.7$. Власна частота синусоїди $f = 5$, період

синусоїди $T = \frac{1}{f} = 0.2$, кількість періодів $tk = 2 \cdot T = 0.4$, частота дискретизації

$fd = 1000$, період дискретизації $Td2 = \frac{1}{fd} = 0.001$, вектор часу $t = 0:kr:(0.4 - kr)$, де

$kr = 1.9531 \cdot 10^{-4}$. $N = 4$ - кількість точок в одному відрізку, $L = 1024$ - максимальна кількість точок.

В результаті апроксимації отримано залежності зображені на рис.3.17.

Апроксимація синусоїдальної функції з шумом $y=4+\sin(2*\pi*f*t)+\phi$

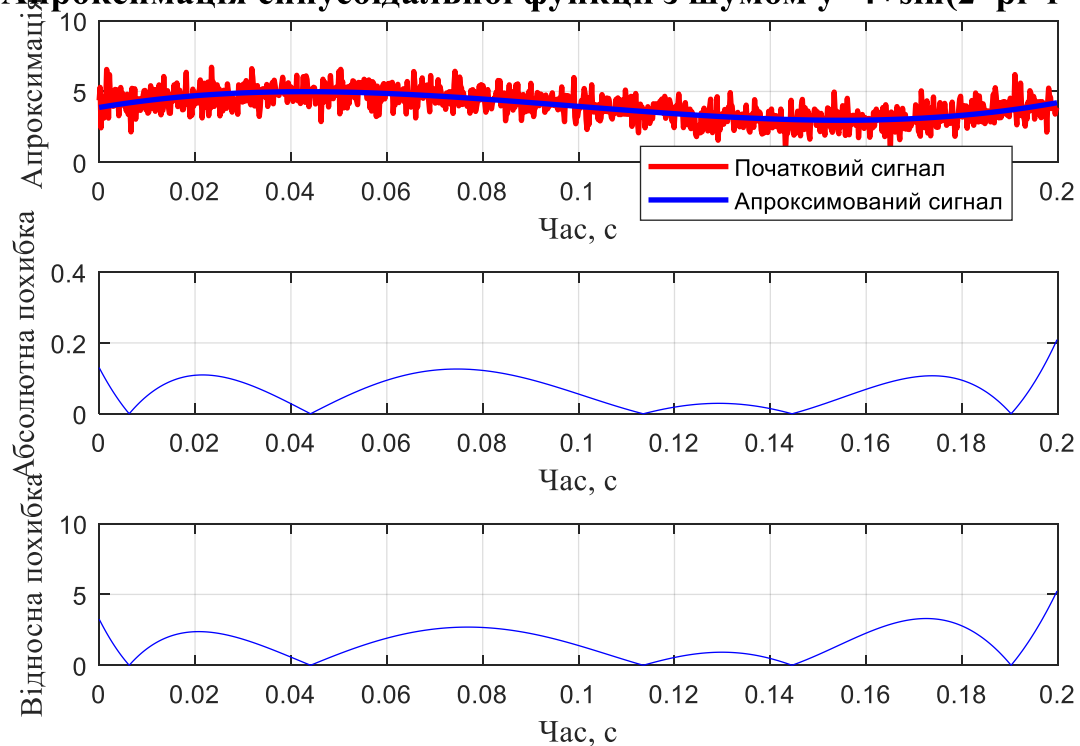


Рисунок 3.17 - Апроксимація синусоїдальної функції з шумом по всій довжині сигналу зі згладжуванням

Мінімальна похибка при кусковій апроксимації змодельованого сигналу з шумом має місце при довжині відрізка в 512 точок (рис.3.18).

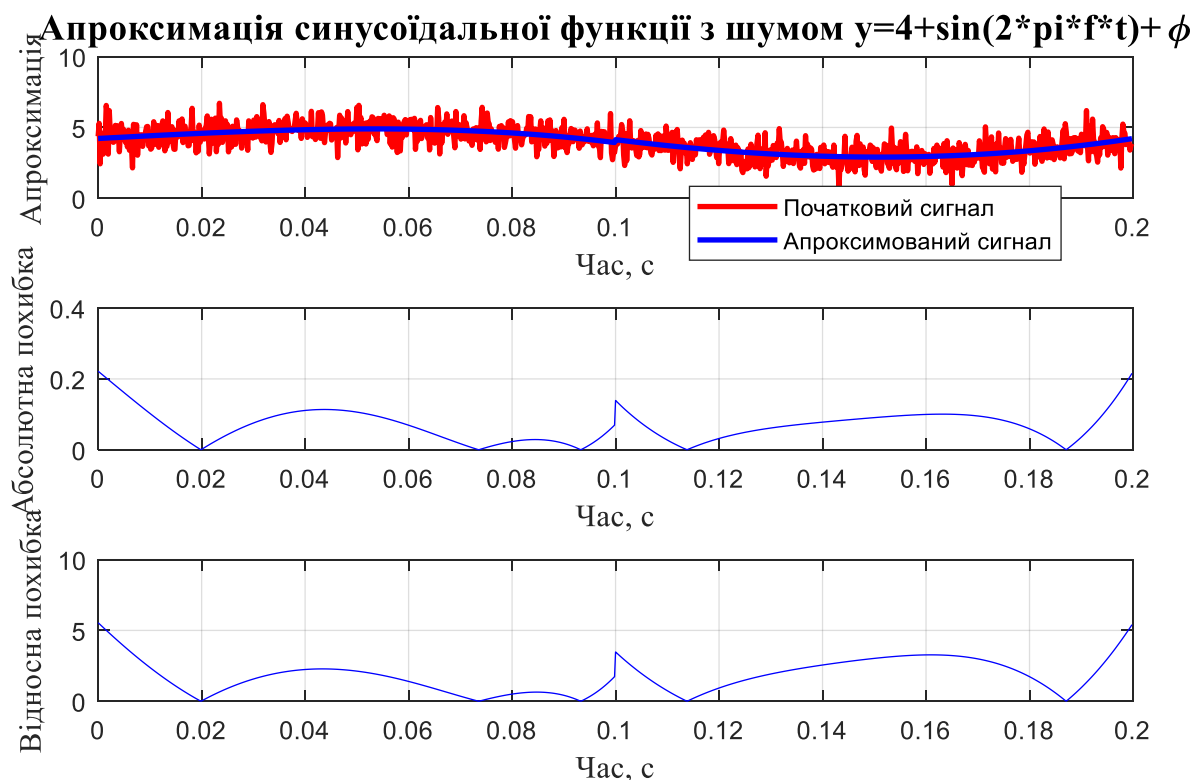


Рисунок 3.18 – Кускова апроксимація синусоїдальної функції з шумом при довжині відрізка в 512 точок

В результаті аналізу було виявлено, що при апроксимації сигналу по його всій довжині середня похибка апроксимації складає 14.1602%, а максимальна 4.8%. Для кускової апроксимації мінімальна середня похибка, яка отримана при довжині кожного відрізка апроксимації в 512 точок, складає 1.5753%.

Відношення сигнал/шум дорівнює $snr = 1.33$.

2.) $y = a \cdot t^2 + b \cdot t + c + \phi$ - параболічна функція, де $\phi = A \cdot \text{randn}(1, \text{length}(t))$, $A = 4.42$.
 Нехай $a = 18$, $b = 10$, $c = 3$, вектор часу $t = 0:kr:(0.4 - kr)$, де $kr = 1.9531 \cdot 10^{-4}$.
 $N = 4$ - кількість точок в одному відрізку, $L = 1024$ - максимальна кількість точок.

В результаті апроксимації отримано залежності зображені на рис.3.19.

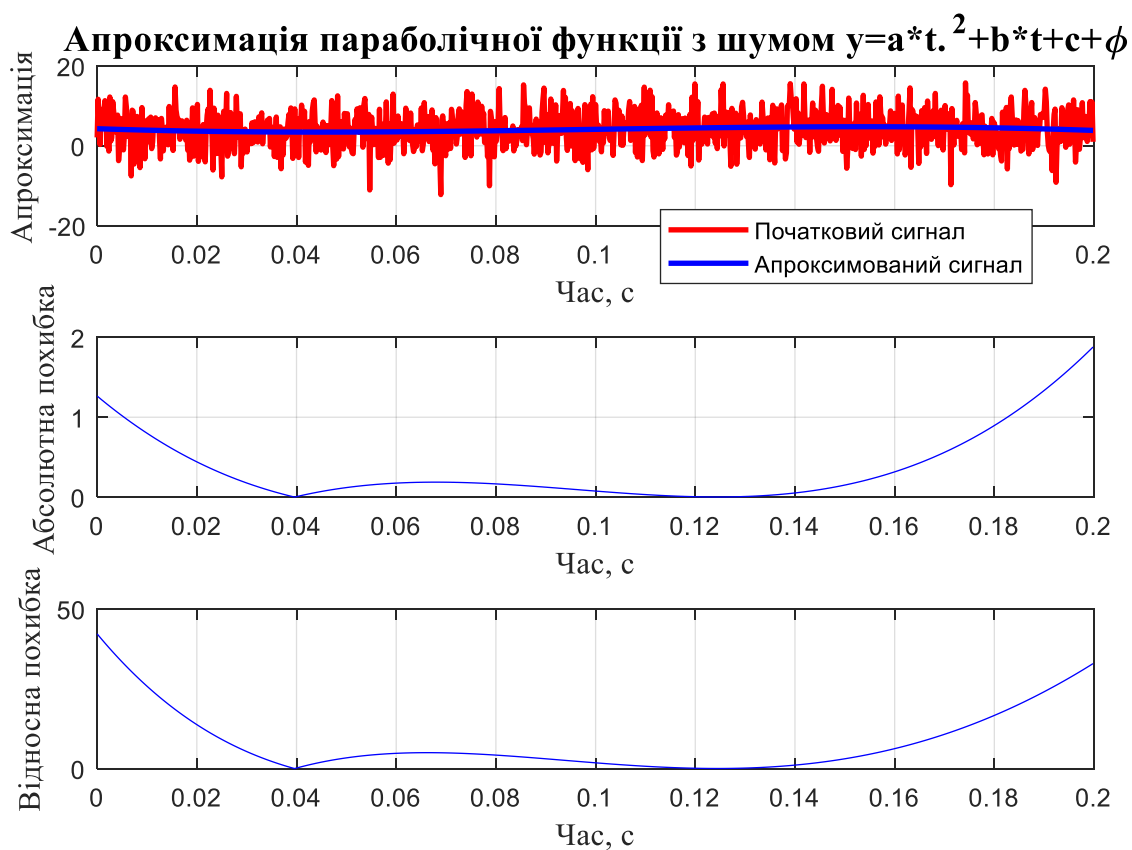


Рисунок 3.19 - Апроксимація параболічної функції з шумом по всій довжині сигналу зі згладжуванням

Мінімальна похибка при кусковій апроксимації змодельованого сигналу з шумом має місце при довжині відрізка в 1024 точки (рис.3.20).

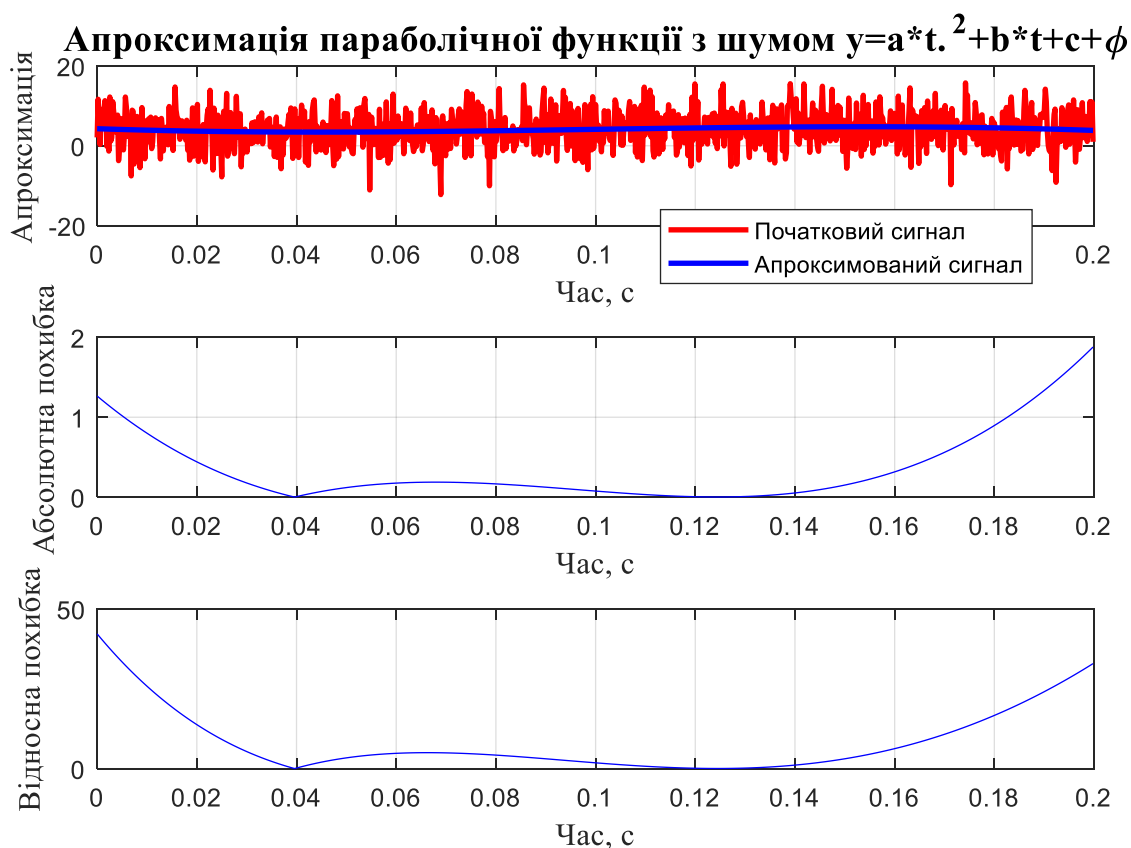


Рисунок 3.20 – Кускова апроксимація зі згладжуванням параболічної функції з шумом при довжині відрізка в 1024 точки

В результаті аналізу було виявлено, що при апроксимації сигналу по його всій довжині середня похибка апроксимації складає 84.9365% , а максимальна 42%. Для кускової апроксимації мінімальна середня похибка, яка отримана при довжині кожного відрізка апроксимації в 1024 точки, складає 8.2935% .

Відношення сигнал/шум дорівнює $snr = 0.7238$.

3.) $y = a \cdot t + b + \varphi$ - лінійна, де $\varphi = A \cdot \text{randn}(1, \text{length}(t))$, $A = 3.6$. Нехай $a = 5$, $b = 3$, вектор часу $t = 0:kr:(0.4 - kr)$, де $kr = 1.9531 \cdot 10^{-4}$. $N = 4$ - кількість точок в одному відрізку, $L = 1024$ - максимальна кількість точок.

В результаті апроксимації отримано залежності зображені на рис.3.21.

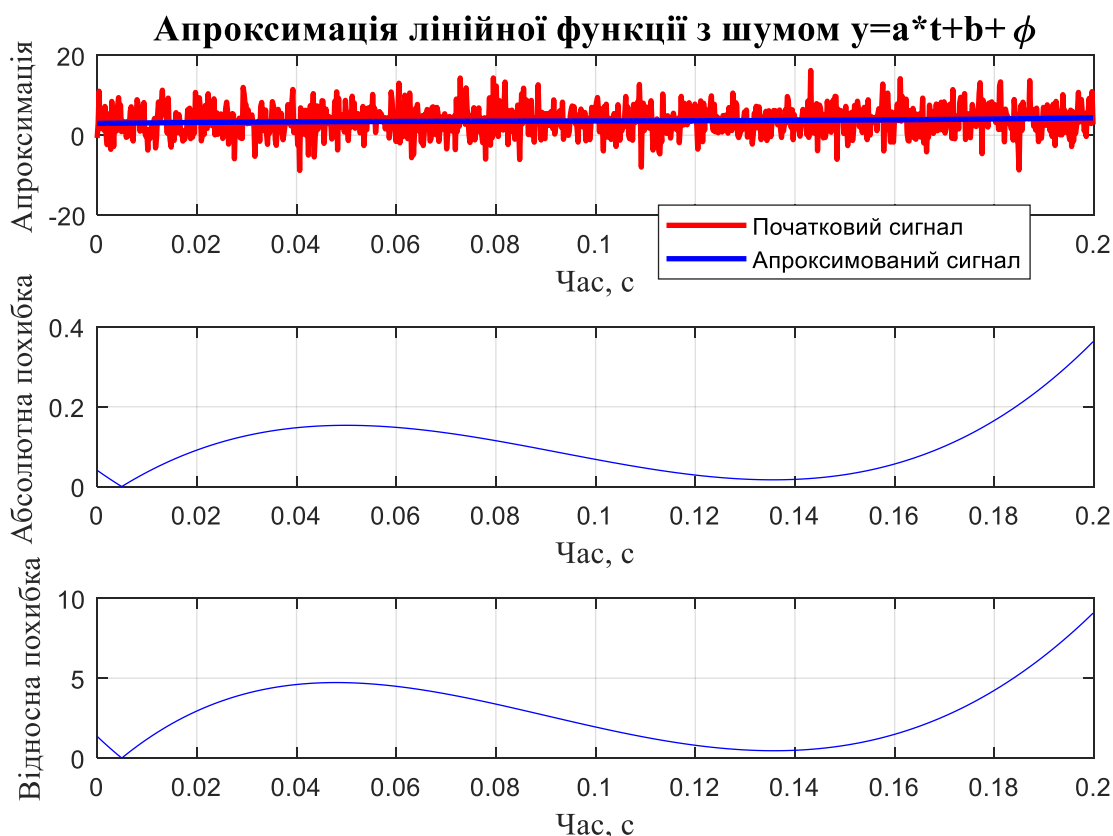


Рисунок 3.21 – Апроксимація лінійної функції з шумом по всій довжині сигналу зі згладжуванням

Мінімальна похибка при кусковій апроксимації змодельованого сигналу з шумом має місце при довжині відрізка в 1024 точки (рис.3.22).

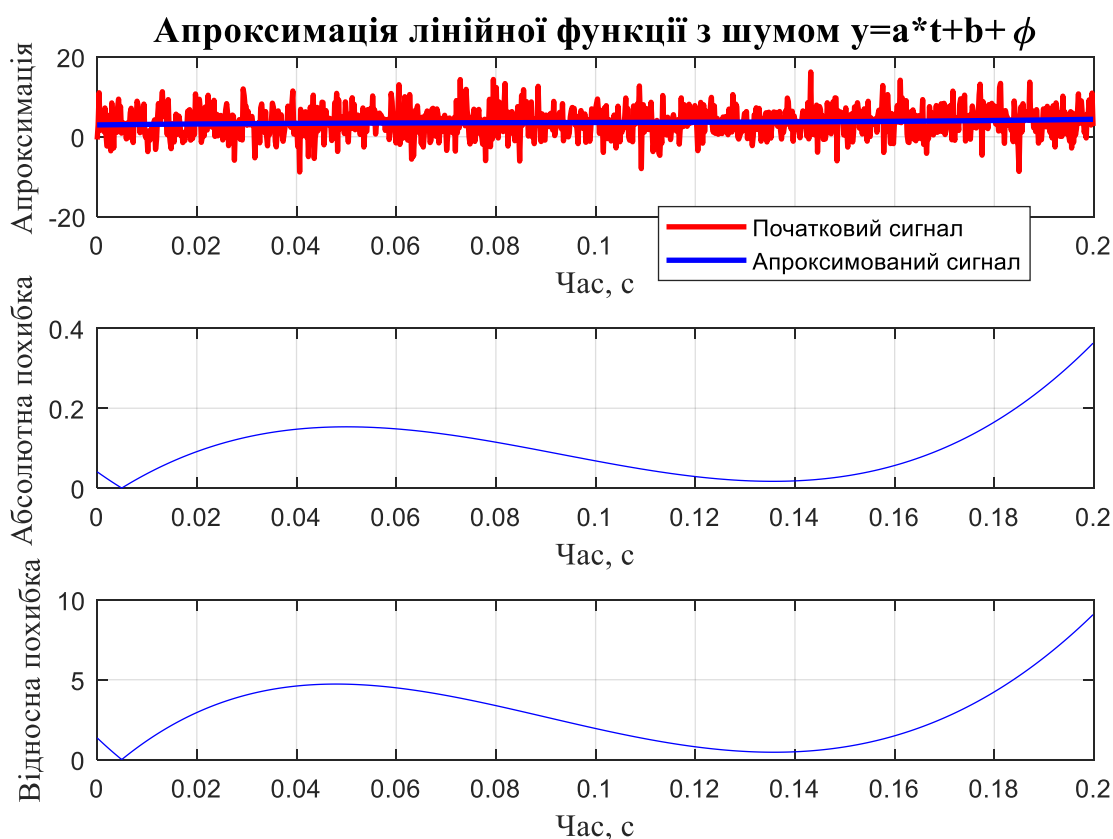


Рисунок 3.22 – Кускова апроксимація зі згладжуванням лінійного сигналу з шумом при довжині відрізка в 1024 точки

В результаті аналізу було виявлено, що при апроксимації сигналу по його всій довжині середня похибка апроксимації складає 79.5174% , а максимальна 9%. Для кускової апроксимації мінімальна середня похибка, яка отримана при довжині кожного відрізка апроксимації в 1024 точки, складає 2.8554% .

Відношення сигнал/шум дорівнює $snr = 0.9113$.

4.) $y = 3 + e^{-a \cdot t} \cdot \sin(\omega \cdot t) + \phi$ - затухаюча синусоїда,

де $\phi = A \cdot \text{randn}(1, \text{length}(t))$, $A = 0.47$. Нехай $a = 8$; $\omega = 2 \cdot \pi \cdot f$; , вектор часу $t = 0 : kr : (0.4 - kr)$, де $kr = 1.9531 \cdot 10^{-4}$. $N = 4$ - кількість точок в одному відрізку, $L = 1024$ - максимальна кількість точок.

В результаті апроксимації отримано залежності зображені на рис.3.23.

Апроксимація затухаючої синусоїди з шумом $y=3+\exp(-a*t)*\sin(\omega*t)+\phi$

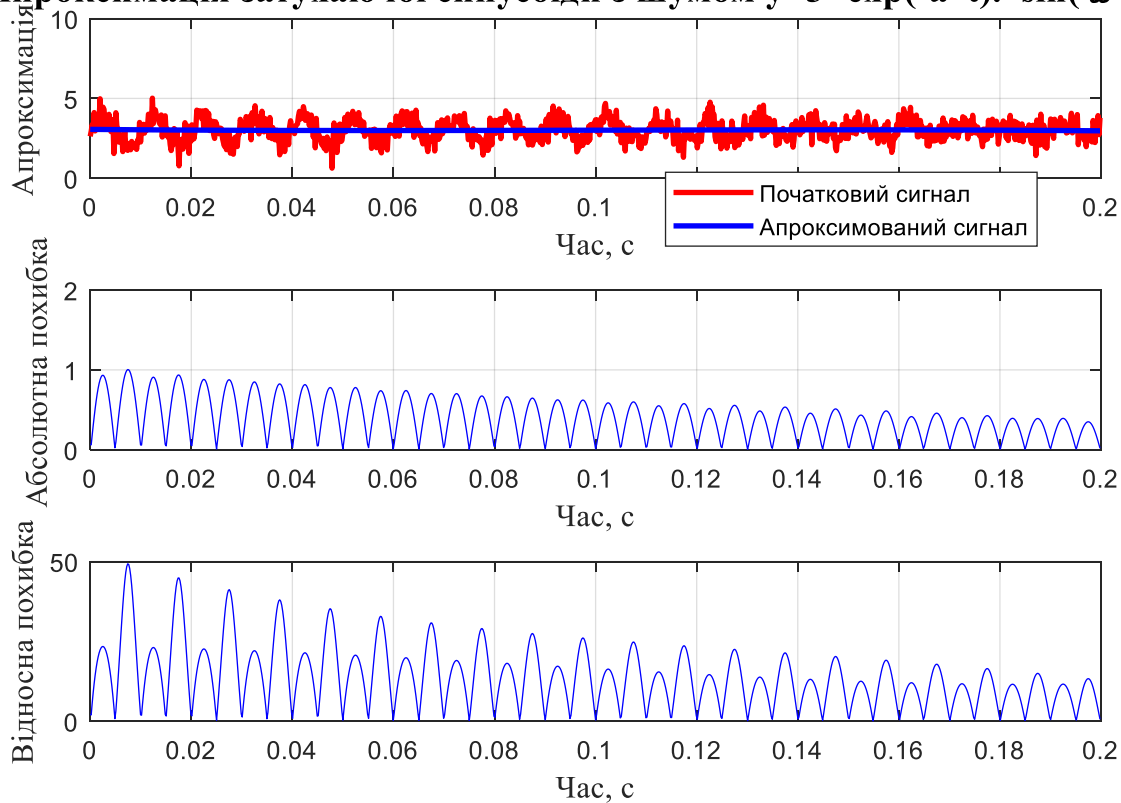


Рисунок 3.23– Апроксимація затухаючої синусоїди з шумом по всій довжині сигналу зі згладжуванням

Мінімальна похибка при кусковій апроксимації змодельованого сигналу з шумом має місце при довжині відрізка в 32 точки (рис.3.24).

Апроксимація затухаючої синусоїди з шумом $y=3+\exp(-a*t)*\sin(\omega*t)+\phi$

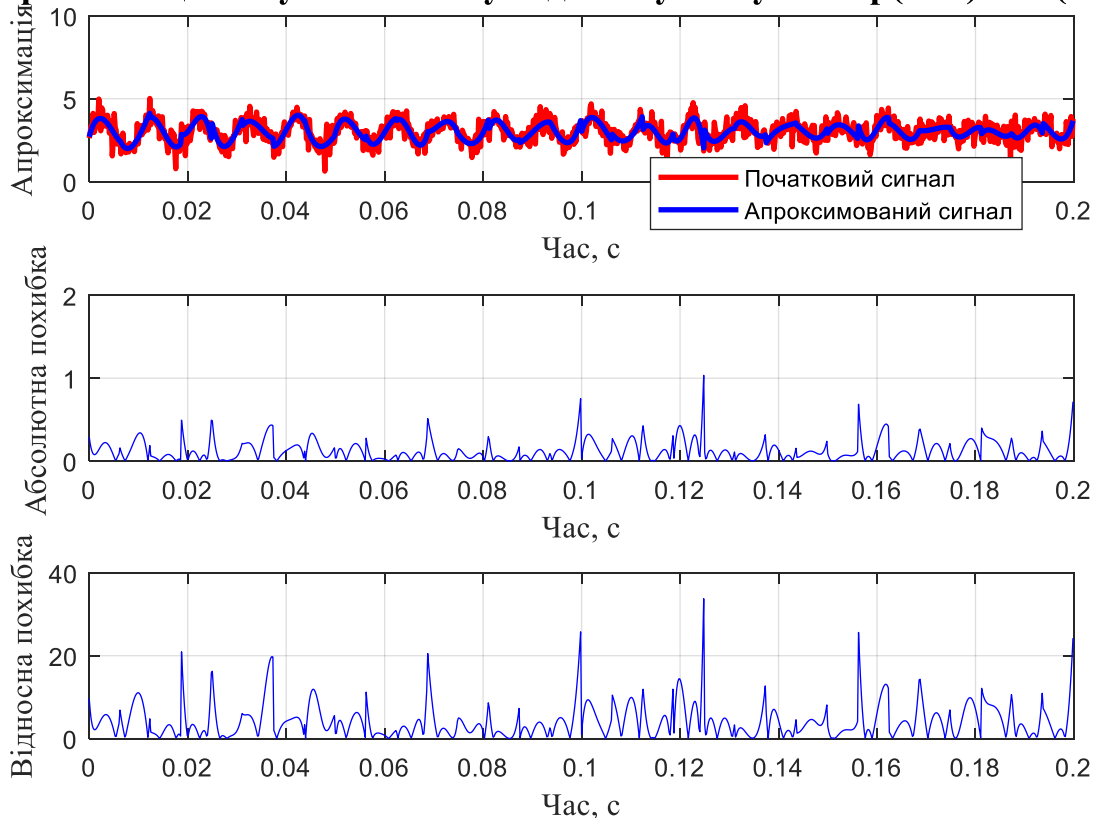


Рисунок 3.24 – Кусково апроксимація зі згладжуванням затухаючої синусоїди з шумом при довжині відрізка в 32 точки

В результаті аналізу було виявлено, що при апроксимації сигналу по його всій довжині середня похибка апроксимації складає 12.7948%, а максимальна 50%. Для кускової апроксимації мінімальна середня похибка, яка отримана при довжині кожного відрізка апроксимації в 32 точки, складає 4.2168%.

Відношення сигнал/шум дорівнює $snr = 0.7618$.

3.3.2. Довжина сигналу $L = 4096$ точок

1.) $y = 4 + \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t) + \phi$ - синусоїдальна функція,
де $\phi = A \cdot \text{randn}(1, \text{length}(t))$, $A = 0.7$. Власна частота синусоїди $f = 5$, період

синусоїди $T = \frac{1}{f} = 0.2$, кількість періодів $tk = 2 \cdot T = 0.4$, частота дискретизації $fd = 1000$, період дискретизації $Td2 = \frac{1}{fd} = 0.001$, вектор часу $t = 0:kr:(0.4 - kr)$, де $kr = 1.9531 \cdot 10^{-4}$. $N = 4$ - кількість точок в одному відрізку, $L = 4096$ - максимальна кількість точок.

В результаті апроксимації отримано залежності зображені на рис.3.25.

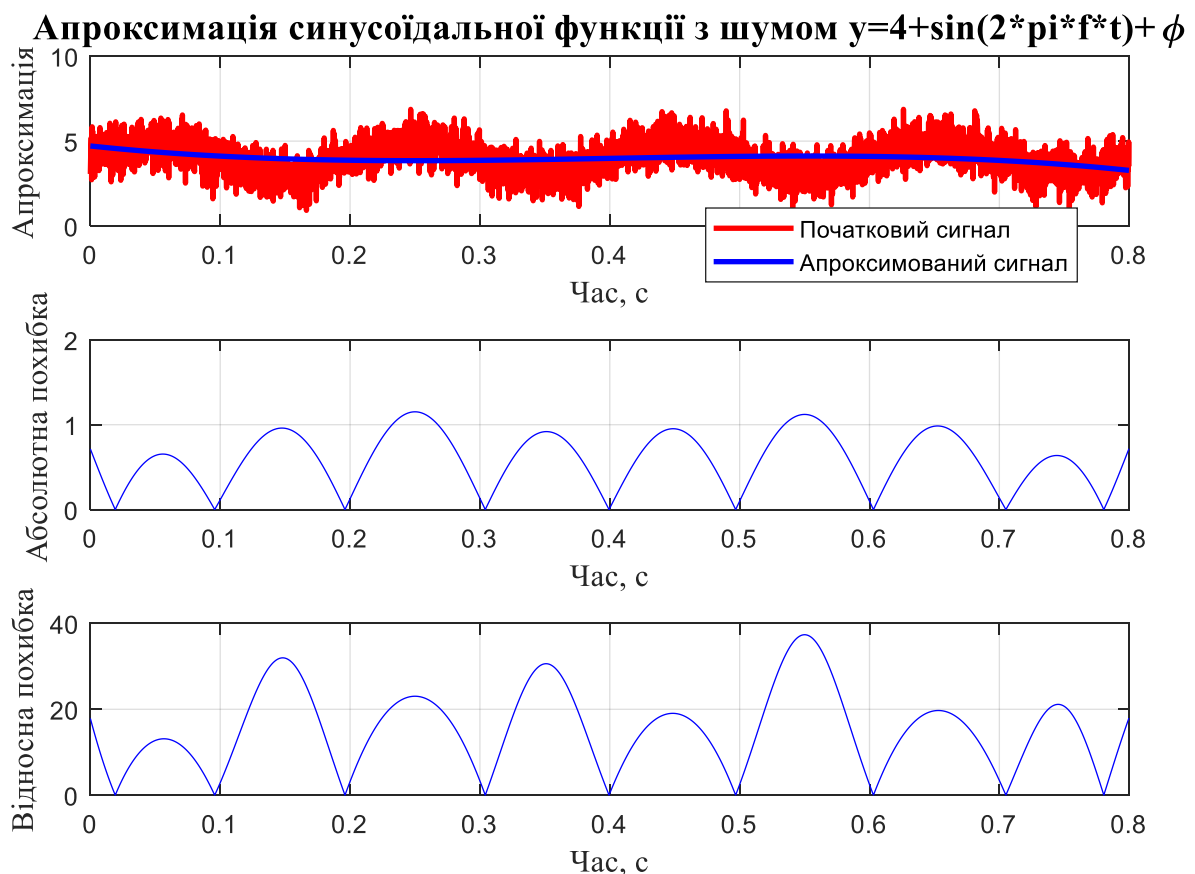


Рисунок 3.25 - Апроксимація синусоїдальної функції з шумом по всій довжині сигналу зі згладжуванням

Мінімальна похибка при кусковій апроксимації змодельованого сигналу з шумом має місце при довжині відрізка в 512 точок (рис.3.26).

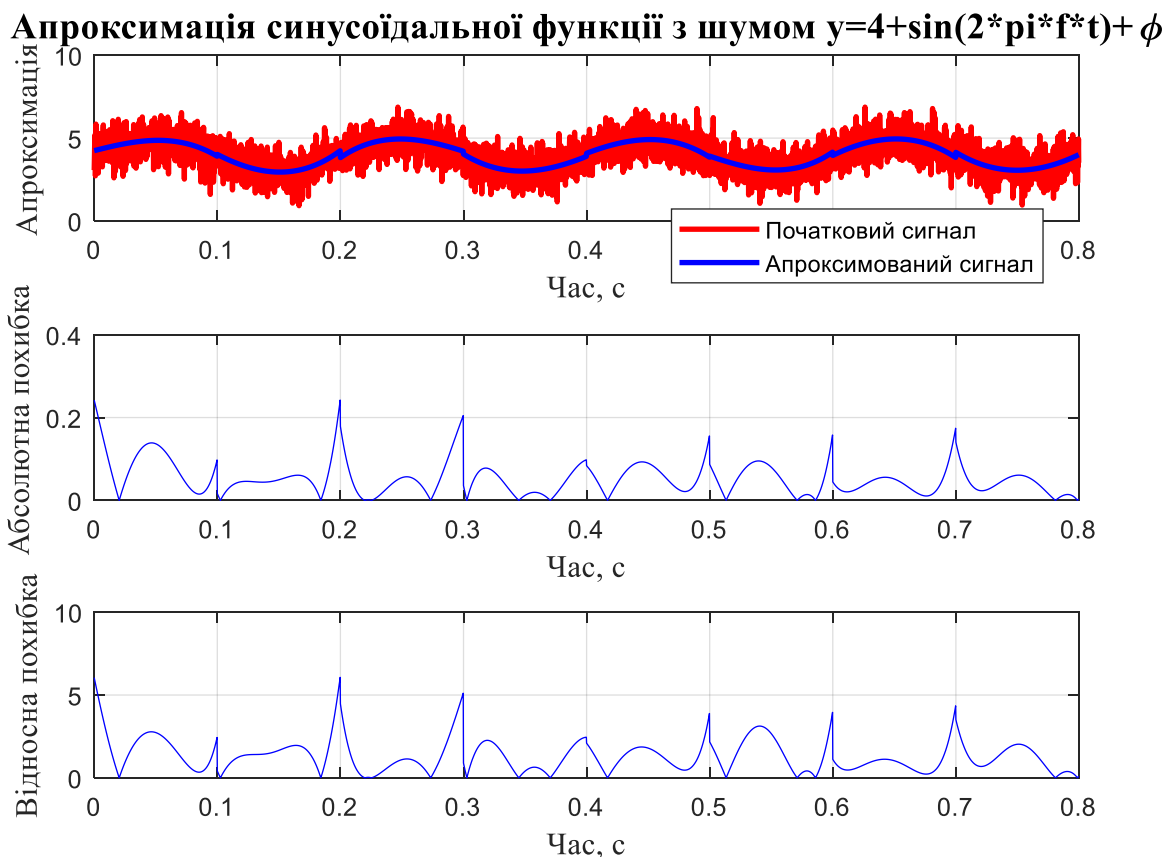


Рисунок 3.26 – Кускова апроксимація зі згладжуванням синусоїдальної функції з шумом при довжині відрізка в 512 точок

В результаті аналізу було виявлено, що при апроксимації сигналу по його всій довжині середня похибка апроксимації складає 14.7119%, а максимальна 37%. Для кускової апроксимації мінімальна середня похибка, яка отримана при довжині кожного відрізка апроксимації в 512 точок, складає 1.3240%.

Відношення сигнал/шум дорівнює $snr = 0.8354$.

2.) $y = a \cdot t^2 + b \cdot t + c + \phi$ - параболічна функція, де $\phi = A \cdot \text{randn}(1, \text{length}(t))$, $A = 12.3$.

Нехай $a = 18$, $b = 10$, $c = 3$, вектор часу $t = 0:kr:(0.4 - kr)$, де $kr = 1.9531 \cdot 10^{-4}$.

$N = 4$ - кількість точок в одному відрізку, $L = 4096$ - максимальна кількість точок.

В результаті апроксимації отримано залежності зображені на рис.3.27.

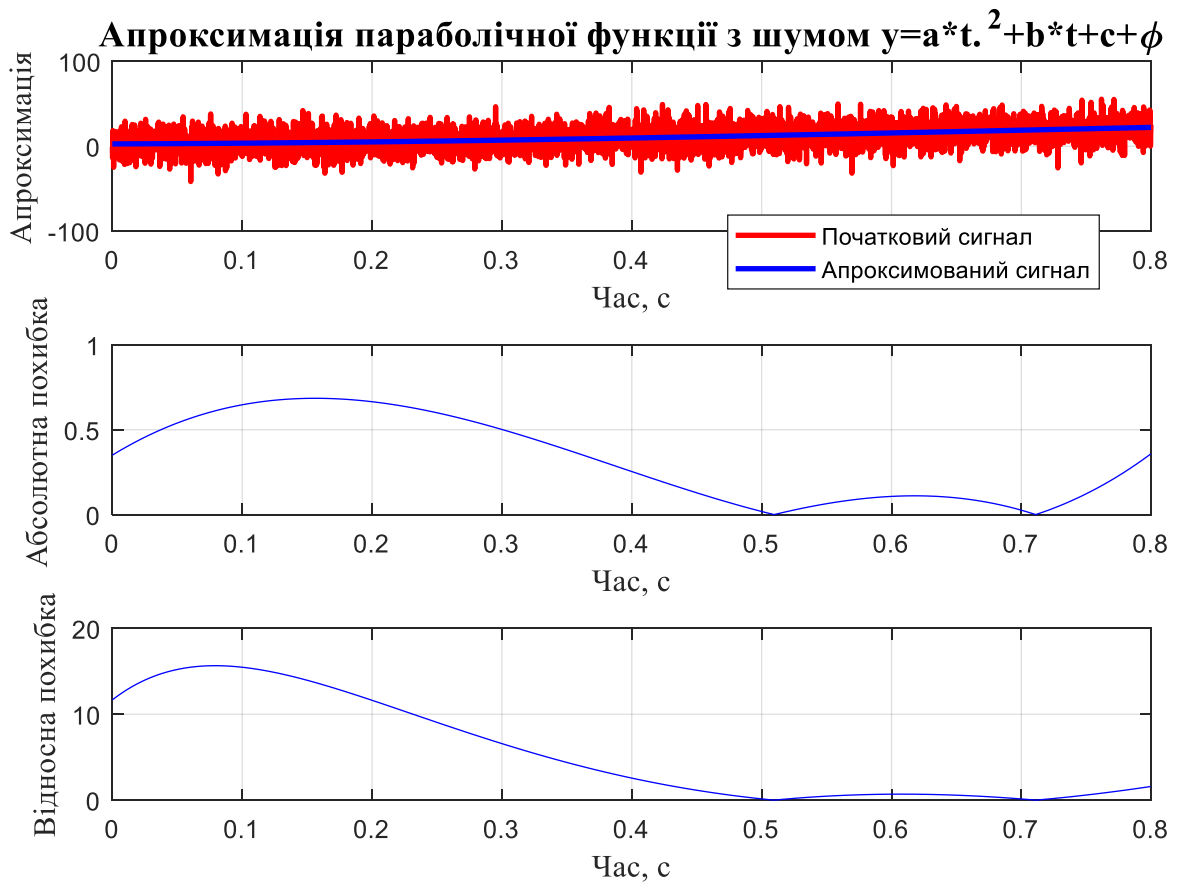


Рисунок 3.27 - Апроксимація параболічної функції з шумом по всій довжині сигналу зі згладжуванням

Мінімальна похибка при кусковій апроксимації змодельованого сигналу з шумом має місце при довжині відрізка в 4096 точок (рис.3.28).

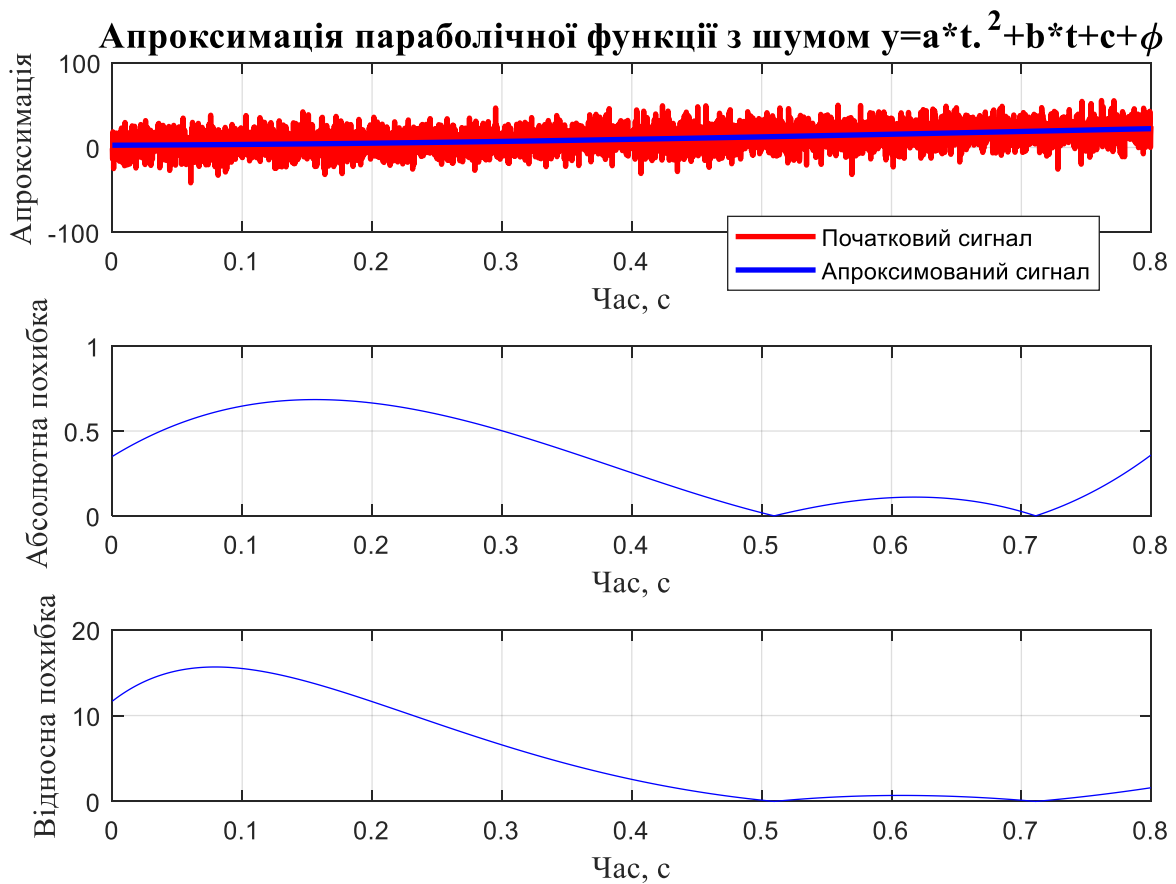


Рисунок 3.28 – Кускова апроксимація зі згладжуванням параболічної функції з шумом при довжині відрізка в 4096 точок

В результаті аналізу було виявлено, що при апроксимації сигналу по його всій довжині середня похибка апроксимації складає 126.2554%, а максимальна 15%. Для кускової апроксимації мінімальна середня похибка, яка отримана при довжині кожного відрізка апроксимації в 4096 точок, складає 5.6054%.

Відношення сигнал/шум дорівнює $snr = 0.9310$.

3.) $y = a \cdot t + b + \phi$ - лінійна, де $\phi = A \cdot \text{randn}(1, \text{length}(t))$, $A = 5.2$. Нехай $a = 5$, $b = 3$, вектор часу $t = 0:kr:(0.4 - kr)$, де $kr = 1.9531 \cdot 10^{-4}$. $N = 4$ - кількість точок в одному відрізку, $L = 4096$ - максимальна кількість точок.

В результаті апроксимації отримано залежності зображені на рис.3.29.

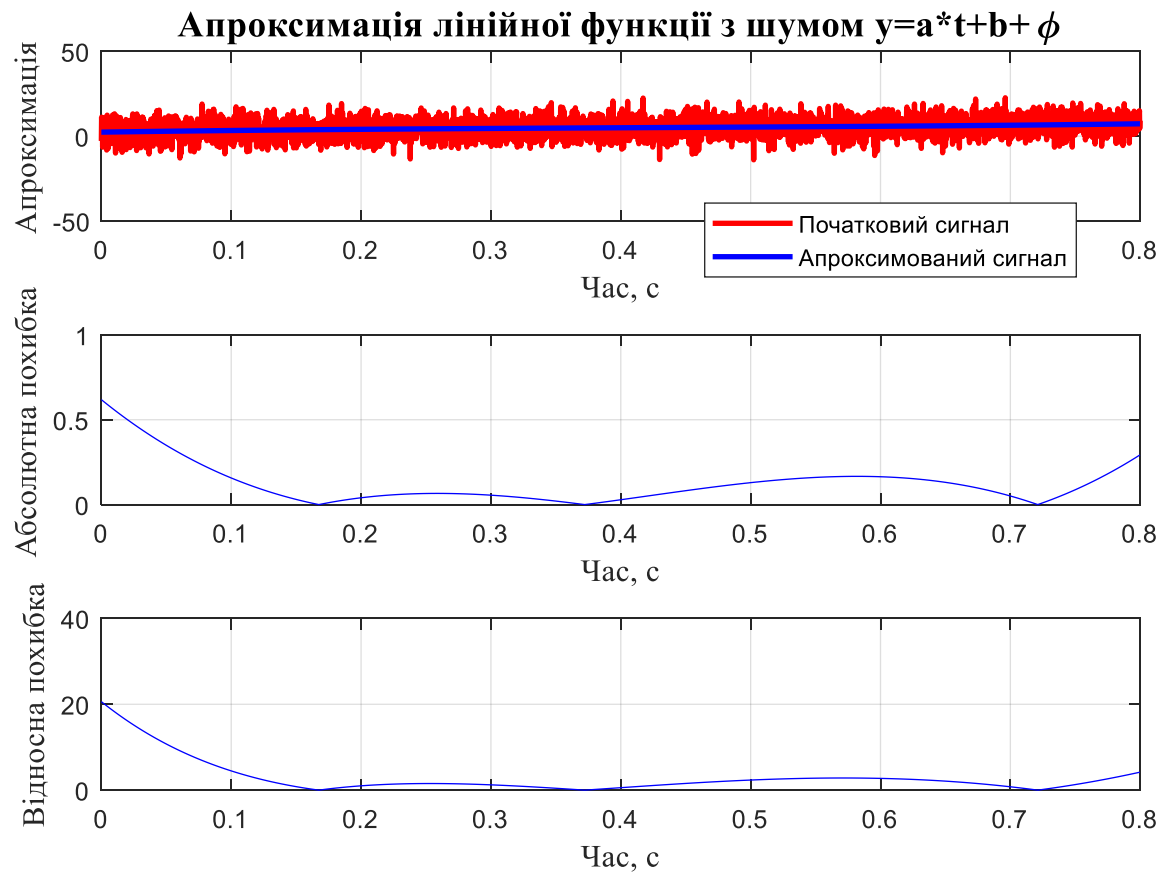


Рисунок 3.29 – Апроксимація лінійної функції з шумом по всій довжині сигналу зі згладжуванням

Мінімальна похибка при кусковій апроксимації змодельованого сигналу з шумом має місце при довжині відрізка в 4096 точок (рис.3.30).

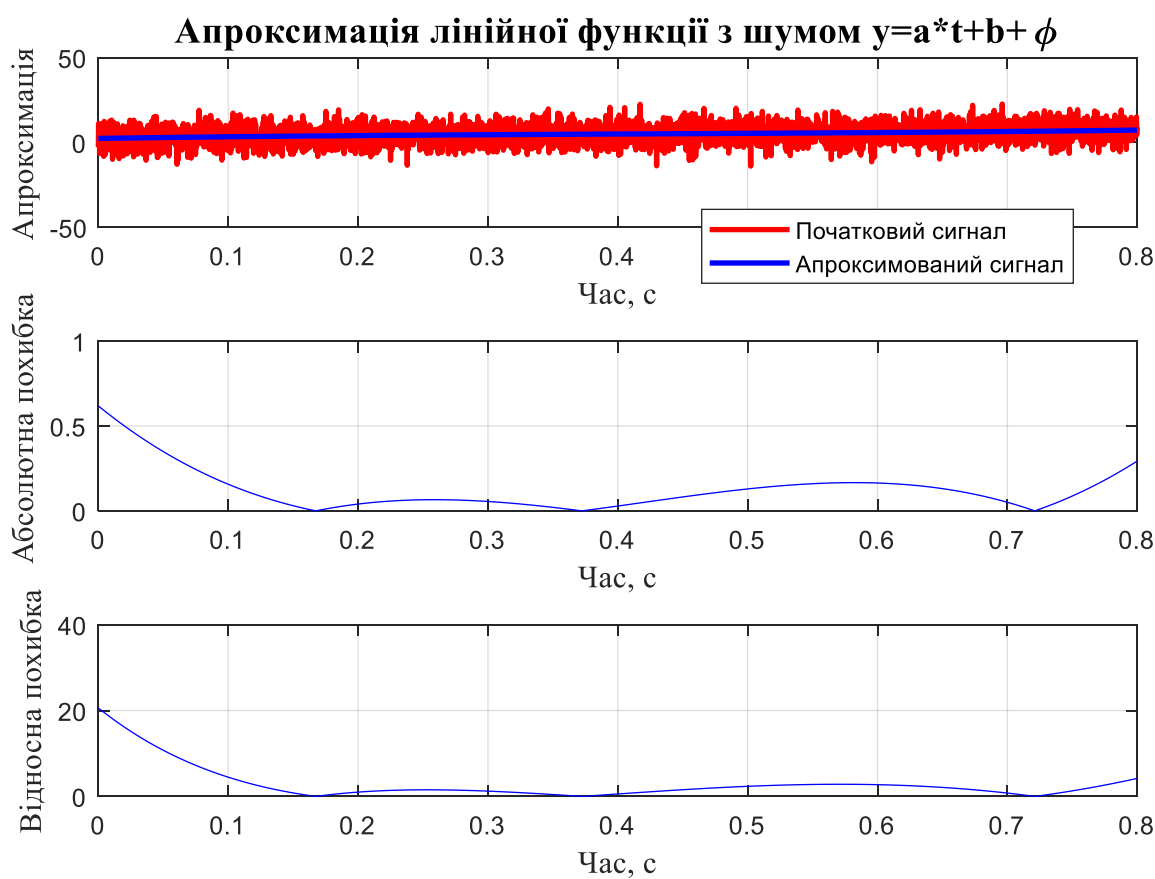


Рисунок 3.30 – Кускова апроксимація зі згладжуванням лінійного сигналу з шумом при довжині відрізка в 4096 точок

В результаті аналізу було виявлено, що при апроксимації сигналу по його всій довжині середня похибка апроксимації складає 86.8555%, а максимальна 20%. Для кускової апроксимації мінімальна середня похибка, яка отримана при довжині кожного відрізка апроксимації в 4096 точок, складає 2.8272%.

Відношення сигнал/шум дорівнює $snr = 1.1123$.

4.) $y = 3 + e^{-a \cdot t} \cdot \sin(\omega \cdot t) + \varphi$ - затухаюча синусоїда,
де $\varphi = A \cdot \text{randn}(1, \text{length}(t))$, $A = 0.25$. Нехай $a = 8$; $\omega = 2 \cdot \pi \cdot f$; , вектор часу
 $t = 0 : kr : (0.4 - kr)$, де $kr = 1.9531 \cdot 10^{-4}$. $N = 4$ - кількість точок в одному відрізку,
 $L = 4096$ - максимальна кількість точок.

В результаті апроксимації отримано залежності зображені на рис.3.31.

Апроксимація затухаючої синусоїди з шумом $y = 3 + \exp(-a \cdot t) \cdot \sin(\omega \cdot t) + \varphi$

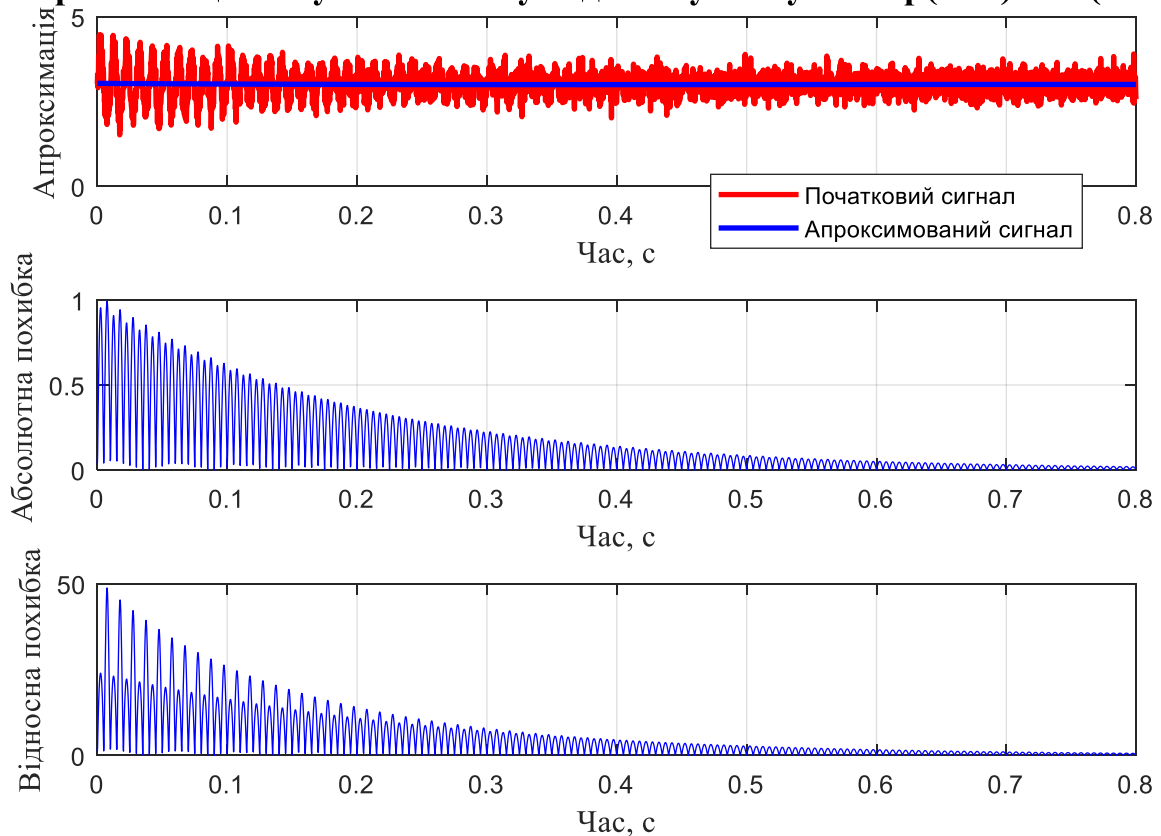


Рисунок 3.31 – Апроксимація затухаючої синусоїди з шумом по всій довжині сигналу зі згладжуванням

Мінімальна похибка при кусковій апроксимації змодельованого сигналу з шумом має місце при довжині одного відрізка в 32 точки (рис.3.32).

Апроксимація затухаючої синусоїди з шумом $y=3+\exp(-a*t)*\sin(\omega*t)+\phi$

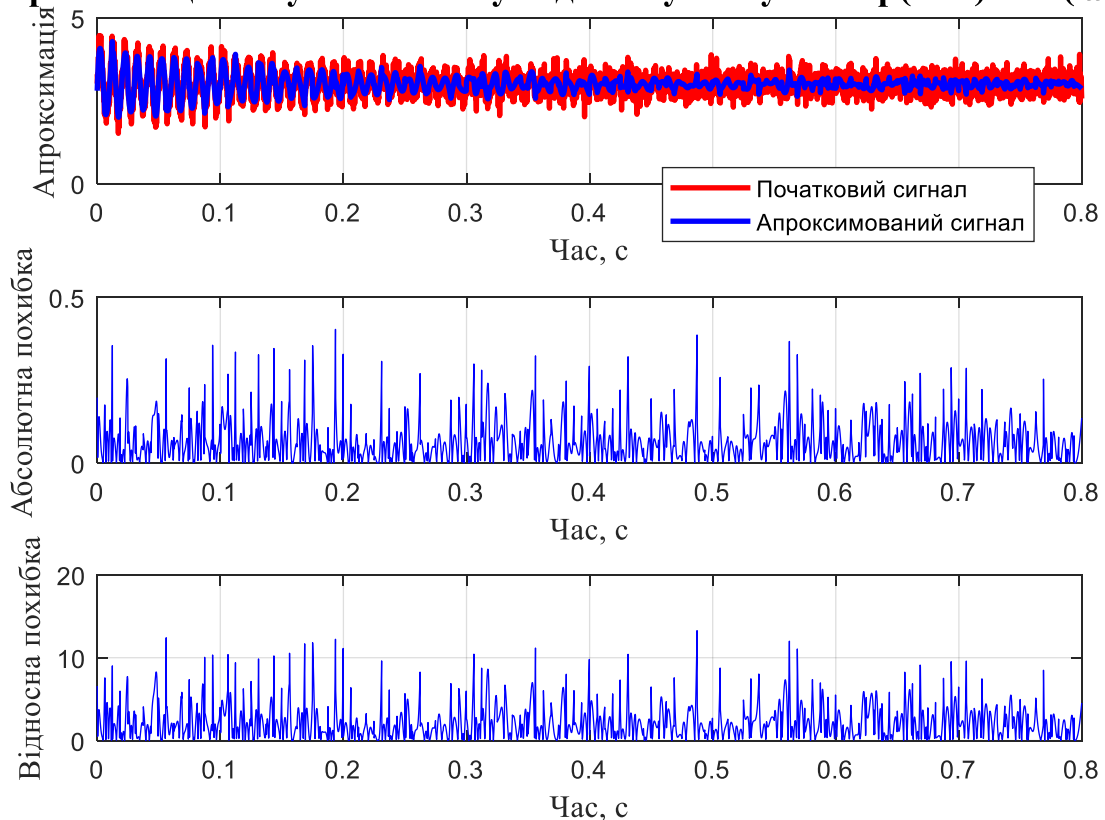


Рисунок 3.32 – Кускова апроксимація зі згладжуванням затухаючої синусоїди з шумом при довжині одного відрізка в 32 точки

В результаті аналізу було виявлено, що при апроксимації сигналу по його всій довжині середня похибка апроксимації складає 6.6527% , а максимальна 48%. Для кускової апроксимації мінімальна середня похибка, яка отримана при довжині кожного відрізка апроксимації в 32 точки, складає 2.2114% .

Відношення сигнал/шум дорівнює $snr = 1.1359$.

3.3.3. Довжина сигналу $L = 8192$ точки

1.) $y = 4 + \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t) + \phi$ - синусоїдальна функція, де $\phi = A \cdot \text{randn}(1, \text{length}(t))$, $A = 0.7$. Власна частота синусоїди $f = 5$, період

синусоїди $T = \frac{1}{f} = 0.2$, кількість періодів $tk = 2 \cdot T = 0.4$, частота дискретизації

$fd = 1000$, період дискретизації $Td2 = \frac{1}{fd} = 0.001$, вектор часу $t = 0:kr:(0.4 - kr)$, де

$kr = 1.9531 \cdot 10^{-4}$. $N = 4$ - кількість точок в одному відрізку, $L = 8192$ - максимальна кількість точок.

В результаті апроксимації отримано залежності зображені на рис.3.33.

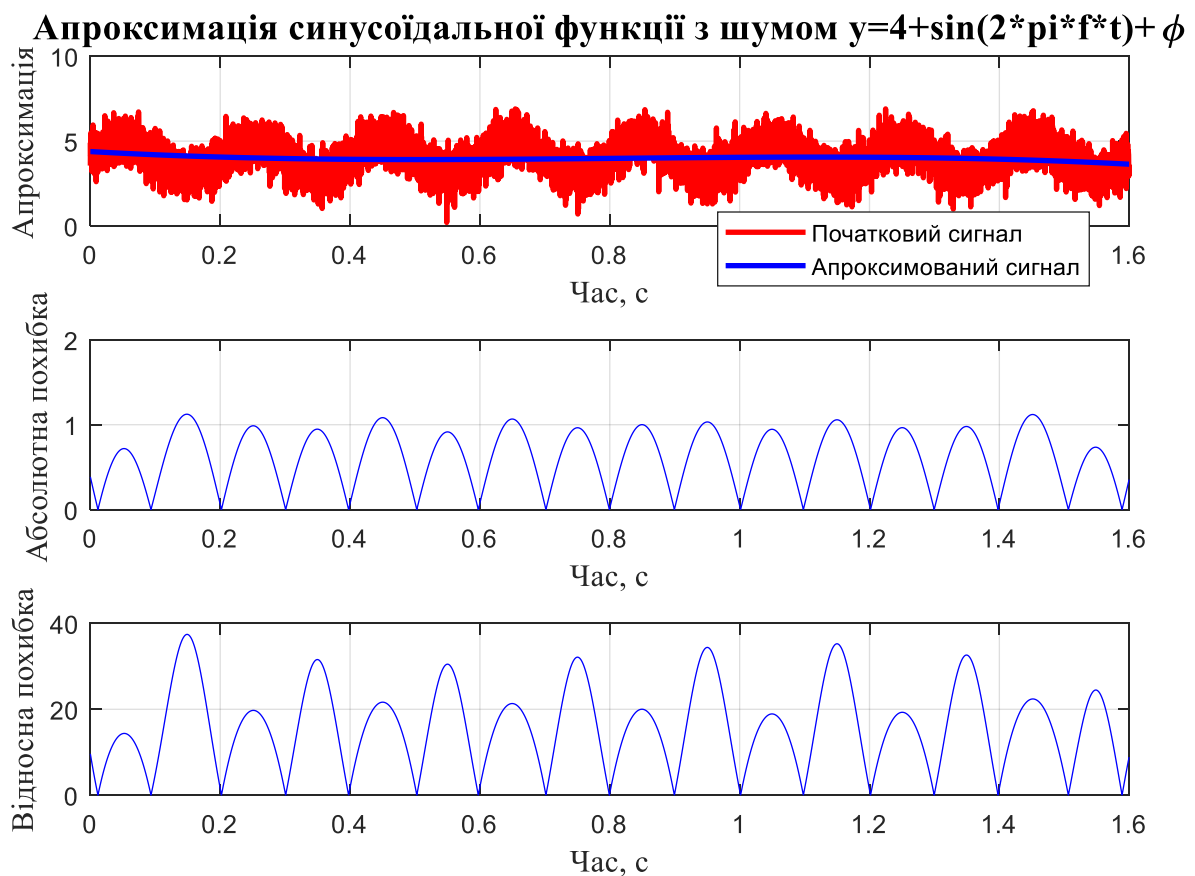


Рисунок 3.33 - Апроксимація синусоїдальної функції з шумом по всій довжині сигналу зі згладжуванням

Мінімальна похибка при кусковій апроксимації змодельованого сигналу з шумом має місце при довжині відрізка в 512 точок (рис.3.34).

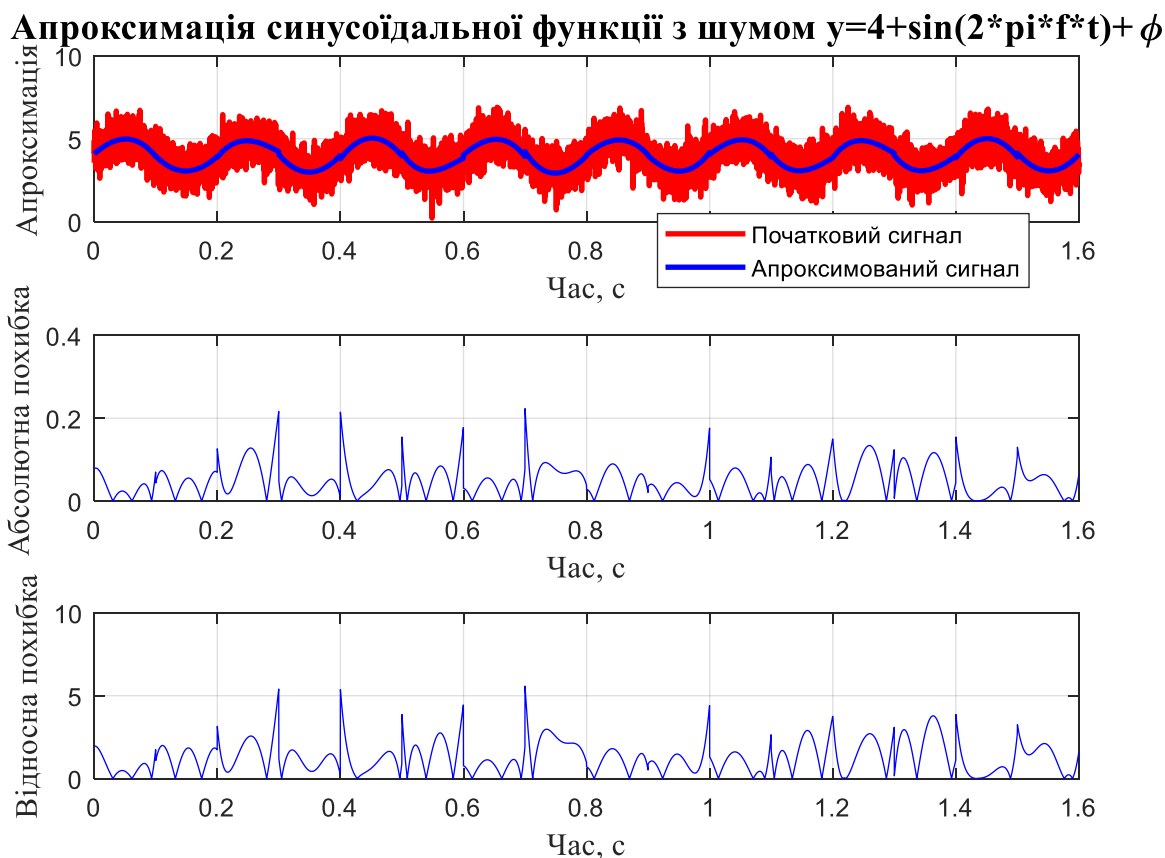


Рисунок 3.34 – Кускова апроксимація зі згладжуванням синусоїдальної функції з шумом при довжині відрізка в 512 точок

В результаті аналізу було виявлено, що при апроксимації сигналу по його всій довжині середня похибка апроксимації складає 14.3810%, а максимальна 38%. Для кускової апроксимації мінімальна середня похибка, яка отримана при довжині кожного відрізка апроксимації в 512 точок, складає 1.2797%.

Відношення сигнал/шум дорівнює $snr = 1.2715$.

2.) $y = a \cdot t^2 + b \cdot t + c + \phi$ - параболічна функція,
де $\phi = A \cdot \text{randn}(1, \text{length}(t))$, $A = 32$. Нехай $a = 18$, $b = 10$, $c = 3$, вектор часу $t = 0:kr:(0.4 - kr)$, де $kr = 1.9531 \cdot 10^{-4}$. $N = 4$ - кількість точок в одному відрізку, $L = 8192$ - максимальна кількість точок.

В результаті апроксимації отримано залежності зображені на рис.3.35.

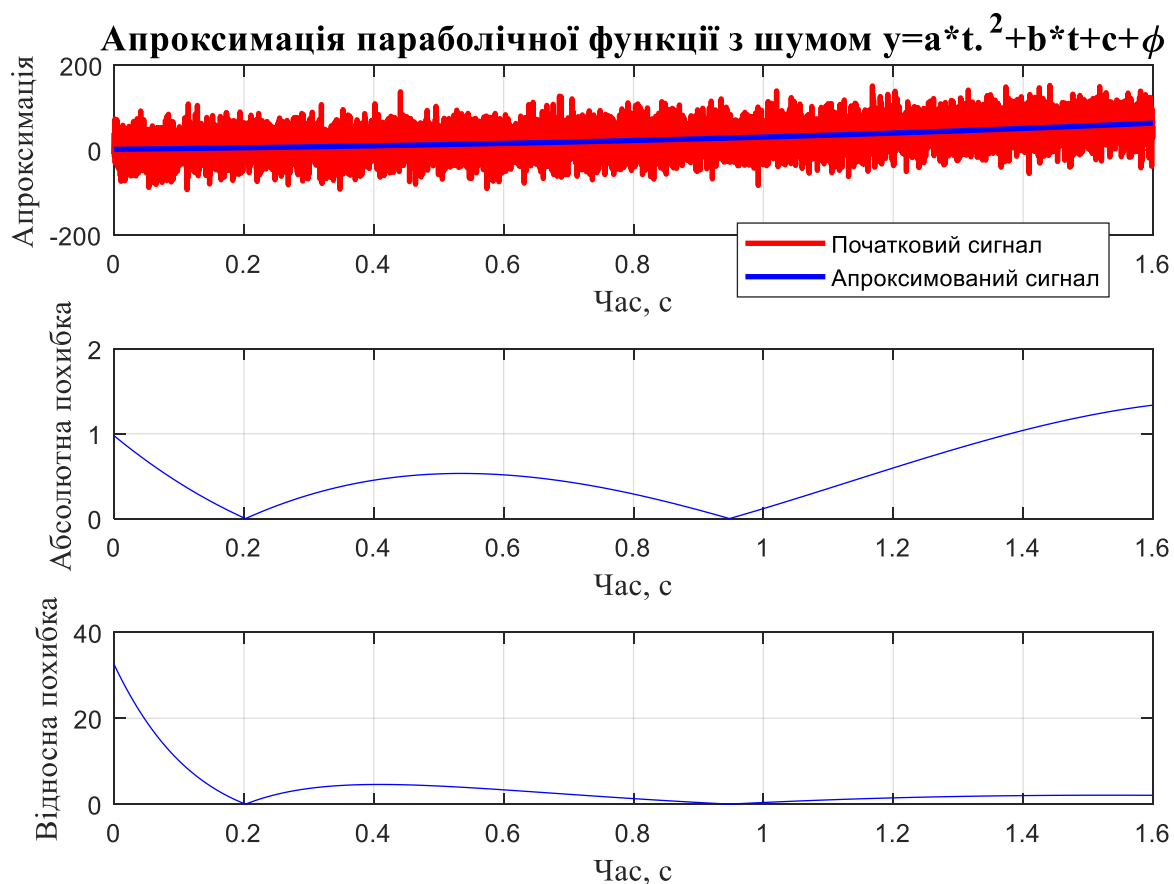


Рисунок 3.35 - Апроксимація параболічної функції з шумом по всій довжині сигналу зі згладжуванням

Мінімальна похибка при кусковій апроксимації змодельованого сигналу з шумом має місце при довжині відрізка в 8192 точок (рис.3.36).

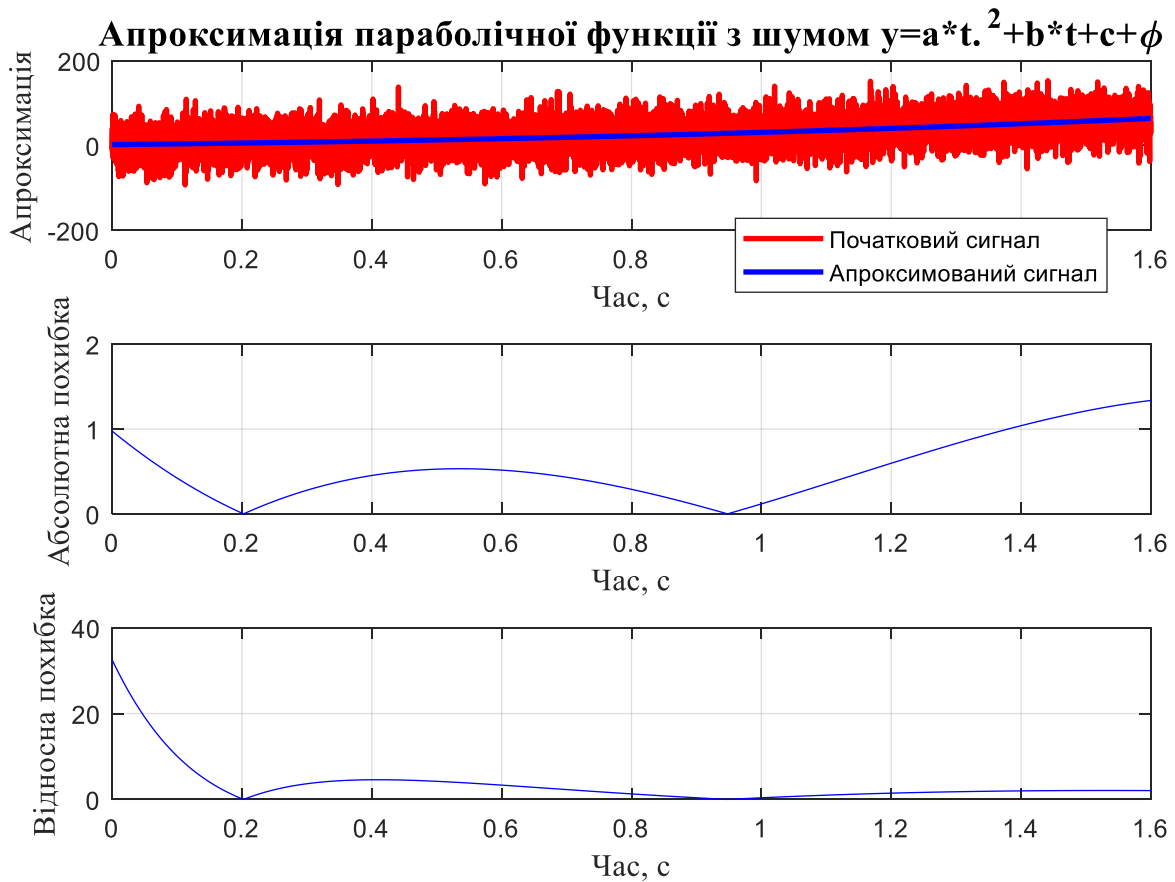


Рисунок 3.36 – Кускова апроксимація параболічної функції з шумом при довжині відрізка в 8192 точки

В результаті аналізу було виявлено, що при апроксимації сигналу по його всій довжині середня похибка апроксимації складає 198.4386%, а максимальна 36%. Для кускової апроксимації мінімальна середня похибка, яка отримана при довжині кожного відрізка апроксимації в 8192 точки, складає 3.3859%.

Відношення сигнал/шум дорівнює $snr = 0.8567$.

3.) $y = a \cdot t + b + \phi$ - лінійна, де $\phi = A \cdot \text{randn}(1, \text{length}(t))$, $A = 7.3$, $a = 5$, $b = 3$, вектор часу $t = 0:kr:(0.4 - kr)$, де $kr = 1.9531 \cdot 10^{-4}$. $N = 4$ - кількість точок в одному відрізку, $L = 8192$ - максимальна кількість точок.

В результаті апроксимації отримано залежності зображені на рис.3.37.

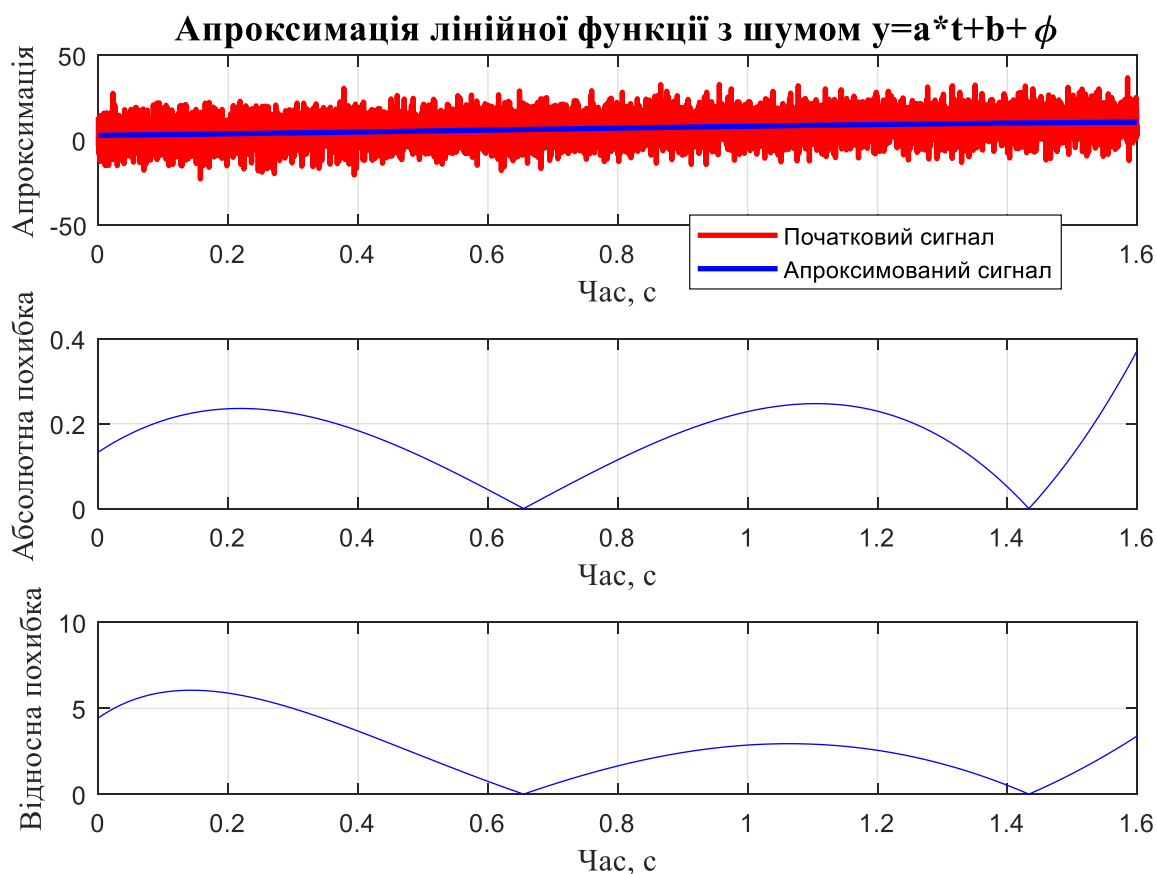


Рисунок 3.37 – Апроксимація лінійної функції з шумом по всій довжині сигналу зі згладжуванням

Мінімальна похибка при кусковій апроксимації змодельованого сигналу з шумом має місце при довжині відрізка в 8192 точки (рис.3.38).

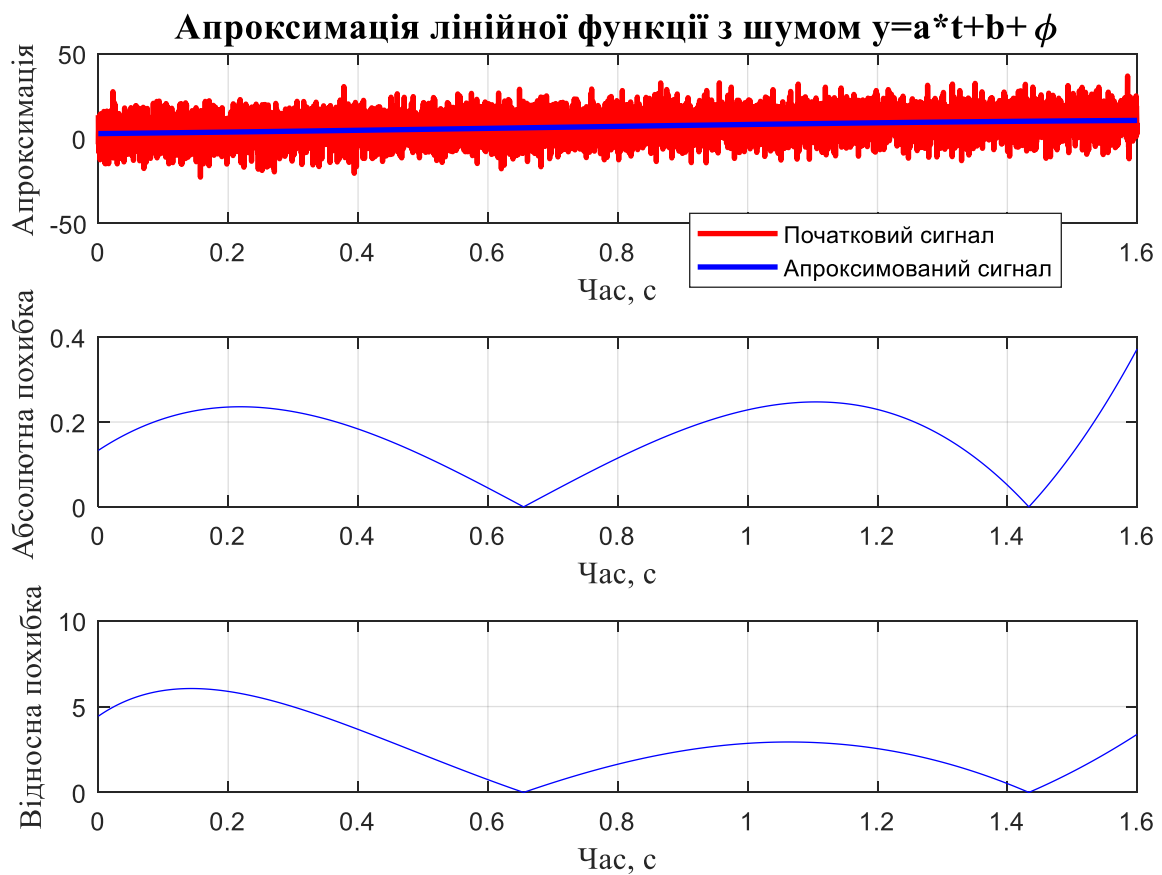


Рисунок 3.38 – Кускова апроксимація зі згладжуванням лінійного сигналу з шумом при довжині відрізка в 8192 точки

В результаті аналізу було виявлено, що при апроксимації сигналу по його всій довжині середня похибка апроксимації складає 95.7676%, а максимальна 6%. Для кускової апроксимації мінімальна середня похибка, яка отримана при довжині кожного відрізка апроксимації в 8192 точки, складає 2.7222%.

Відношення сигнал/шум дорівнює $snr = 1.0560$.

4.) $y = 3 + e^{-at} \cdot \sin(\omega \cdot t) + \phi$ - затухаюча синусоїда з шумом, де $\phi = A \cdot \text{randn}(1, \text{length}(t))$, $A = 0.175$. Нехай $a=8$; $\omega = 2 \cdot \pi \cdot f$; , вектор часу $t = 0:kr:(0.4 - kr)$, де $kr = 1.9531 \cdot 10^{-4}$. $N = 4$ - кількість точок в одному відрізку, $L = 8192$ - максимальна кількість точок.

В результаті апроксимації отримано залежності зображені на рис.3.39.

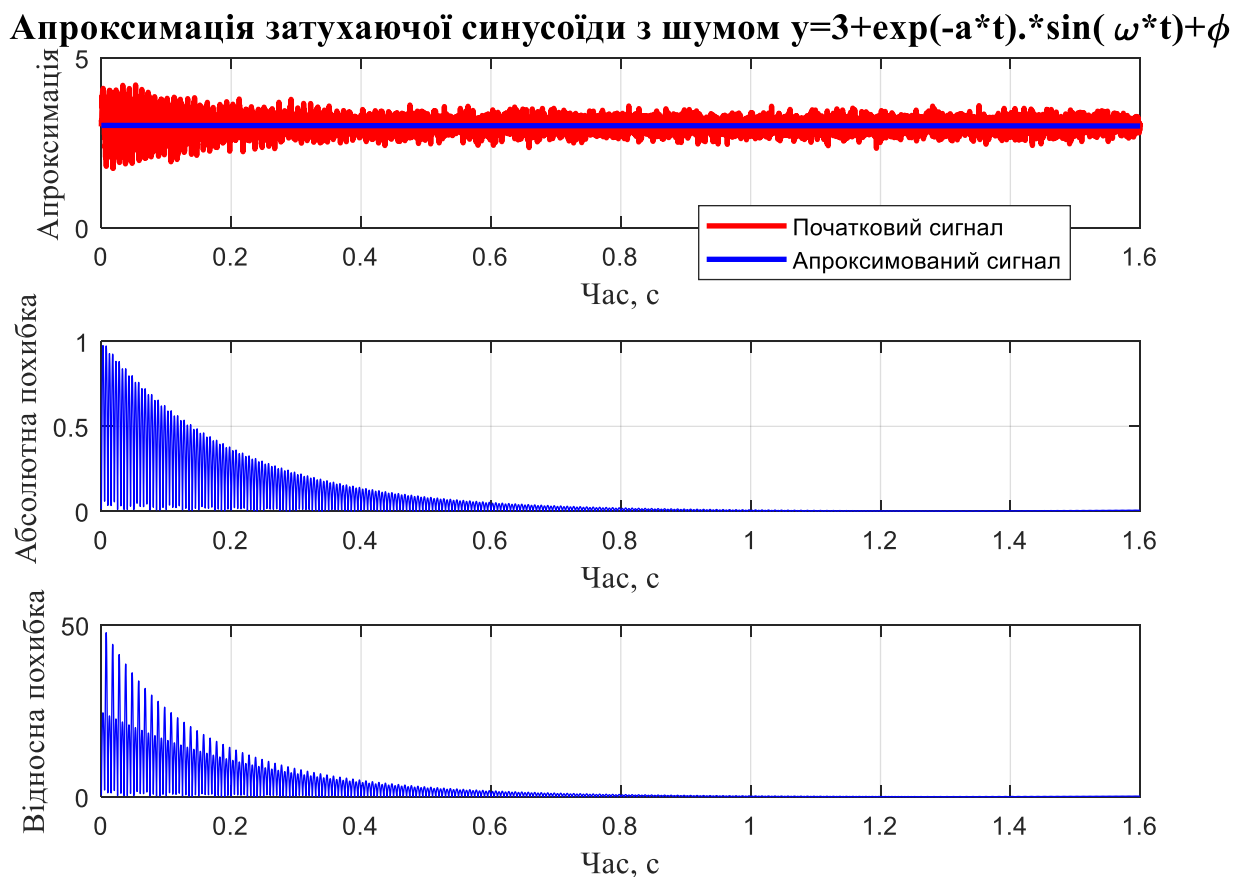


Рисунок 3.39 – Апроксимація затухаючої синусоїди з шумом по всій довжині сигналу зі згладжуванням

Мінімальна похибка при кусковій апроксимації змодельованого сигналу з шумом має місце при довжині відрізка в 32 точки (рис.3.40).

Апроксимація затухаючої синусоїди з шумом $y=3+\exp(-a*t).*\sin(\omega*t)+\phi$

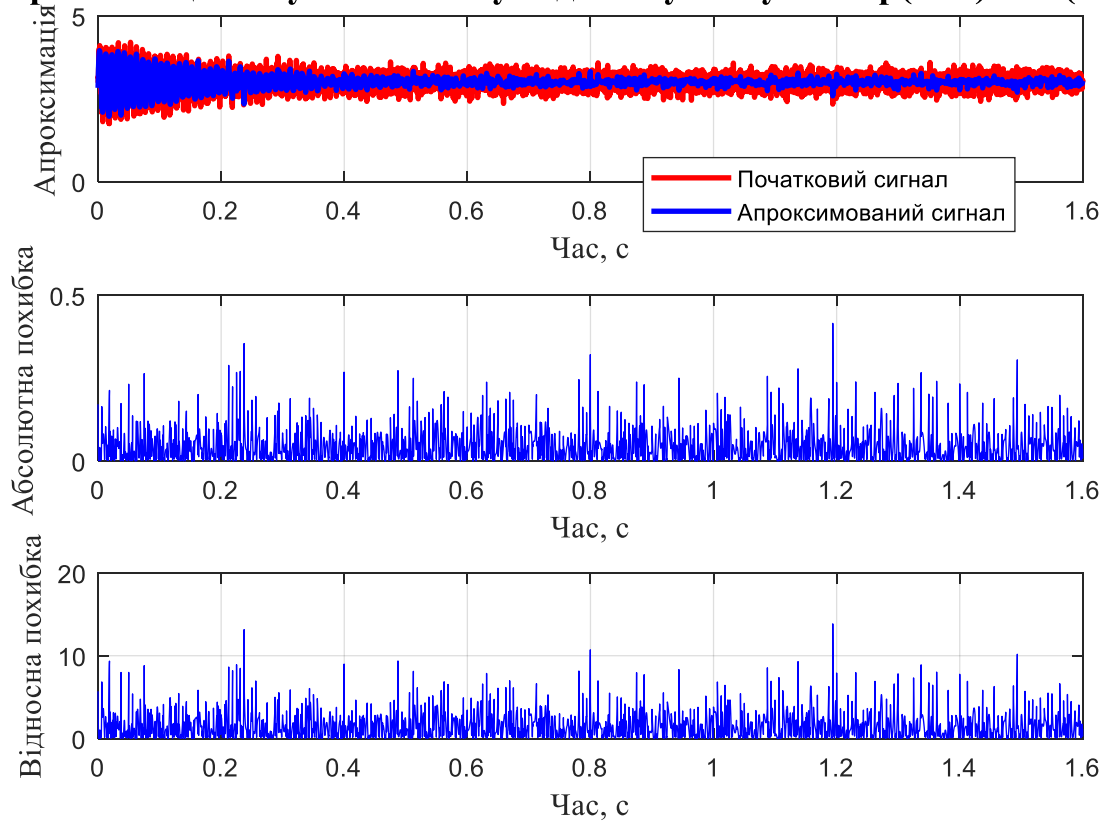


Рисунок 3.40 – Кускова апроксимація зі згладжуванням затухаючої синусоїди з шумом при довжині кожного відрізка рівної 32 точкам

В результаті аналізу було виявлено, що при апроксимації сигналу по його всій довжині середня похибка апроксимації складає 4.7308% , а максимальна 48%. Для кускової апроксимації мінімальна середня похибка, яка отримана при довжині кожного відрізка апроксимації в 32 точки, складає 1.5847% .

Відношення сигнал/шум дорівнює $snr = 0.9273$.

Згідно з виконаними дослідженнями робимо висновок, що зі збільшенням довжини сигналу мінімальна середня похибка зменшується для нелінійних сигналів (синусоїди та затухаючої синусоїди). Для лінійних сигналів метод кускової апроксимації працює однаково при будь-якій довжині сигналу. Для знакозмінних сигналів існує найкраща кількість точок, при якій апроксимація виконується з найменшою похибкою. Лінійні функції найменшу похибку мають при апроксимації по всій довжині сигналу (табл.3).

Таблиця 3 Порівняльна таблиця середньоквадратичних похибок функцій

Довжина сигналу – 1024 точки				
Сигнал	$y = 4 + \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t) + \varphi$	$y = a \cdot t^2 + b \cdot t + c + \varphi$	$y = a \cdot t + b + \varphi$	$y = 3 + e^{-at} \cdot \sin(\omega \cdot t) + \varphi$
Мінімальна середня похибка	1.5753%	8.2935%	2.8554%	4.2168%
Кількість точок в 1 відрізьку	512 точок	1024 точки	1024 точки	32 точки
Довжина сигналу – 2048 точок				
Сигнал	$y = 4 + \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t) + \varphi$	$y = a \cdot t^2 + b \cdot t + c + \varphi$	$y = a \cdot t + b + \varphi$	$y = 3 + e^{-at} \cdot \sin(\omega \cdot t) + \varphi$
Мінімальна середня похибка	1.5802%	3.2305%	4.1824%	3.3897%
Кількість точок в 1 відрізьку	512 точок	2048 точок	2048 точок	32 точки

Довжина сигналу – 4096 точок				
Сигнал	$y = 4 + \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t) + \varphi$	$y = a \cdot t^2 + b \cdot t + c + \varphi$	$y = a \cdot t + b + \varphi$	$y = 3 + e^{-at} \cdot \sin(\omega \cdot t) + \varphi$
Мінімальна середня похибка	1.3240%	5.6054%	2.8272%	2.2114%
Кількість точок в 1 відрізку	512 точок	4096 точок	4096 точок	32 точки
Довжина сигналу – 8192 точки				
Сигнал	$y = 4 + \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t) + \varphi$	$y = a \cdot t^2 + b \cdot t + c + \varphi$	$y = a \cdot t + b + \varphi$	$y = 3 + e^{-at} \cdot \sin(\omega \cdot t) + \varphi$
Мінімальна середня похибка	1.2797%	3.3859%	2.7222%	1.5847%
Кількість точок в 1 відрізку	512 точок	8192 точки	8192 точки	32 точки

3.4 Дослідження кускової апроксимації періодичної функції при довжині сигналу в 16384 точки

Так, як неперіодичні сигнали з часом збільшують амплітуду, було вирішено провести дослідження апроксимації періодичної функції $y = 4 + \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t) + \varphi$, де $\varphi = A \cdot \text{randn}(1, \text{length}(t))$, $A = 0.7$ при довжині сигналу в 16382 точки, довжина одного відрізка $N = 4$ точки. Для початку апроксимуємо сигнал по всій довжині.

Далі будемо вирізати відрізки по 1024, 2048, 4096, 8192 та 16384 точки та порівнювати результати.

Відношення сигнал/шум для даної функції $snr = 1.1342$.

В результаті апроксимації отримано залежності зображені на рис.3.41 – рис.3.45.

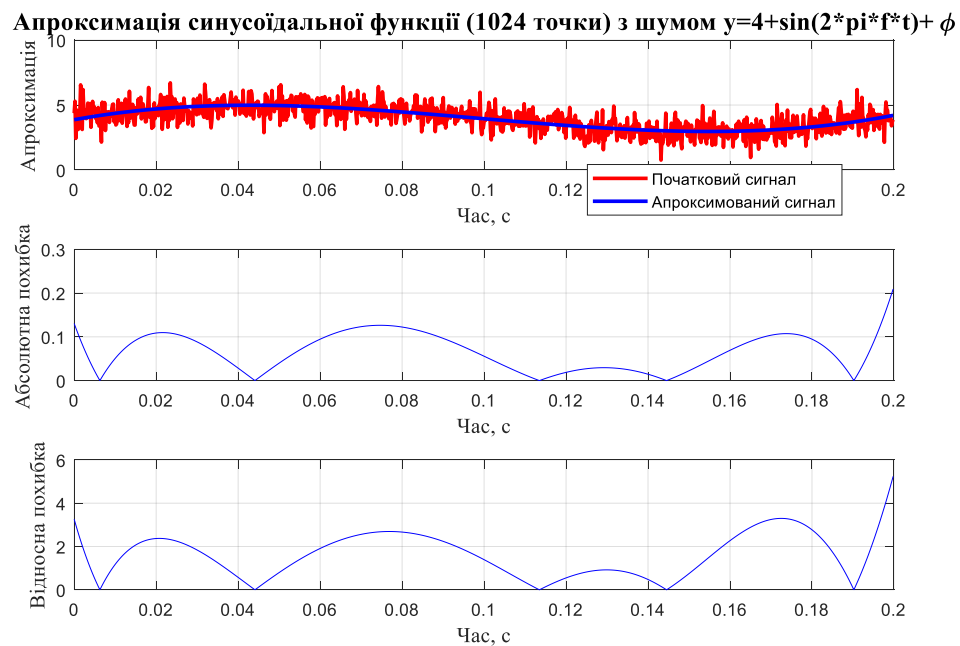


Рисунок 3.41 – Кускова апроксимація синусоїдального сигналу при довжині відрізка в 1024 точки

Апроксимація синусоїдальної функції (2048 точки) з шумом $y=4+\sin(2\pi f^*t)+\phi$

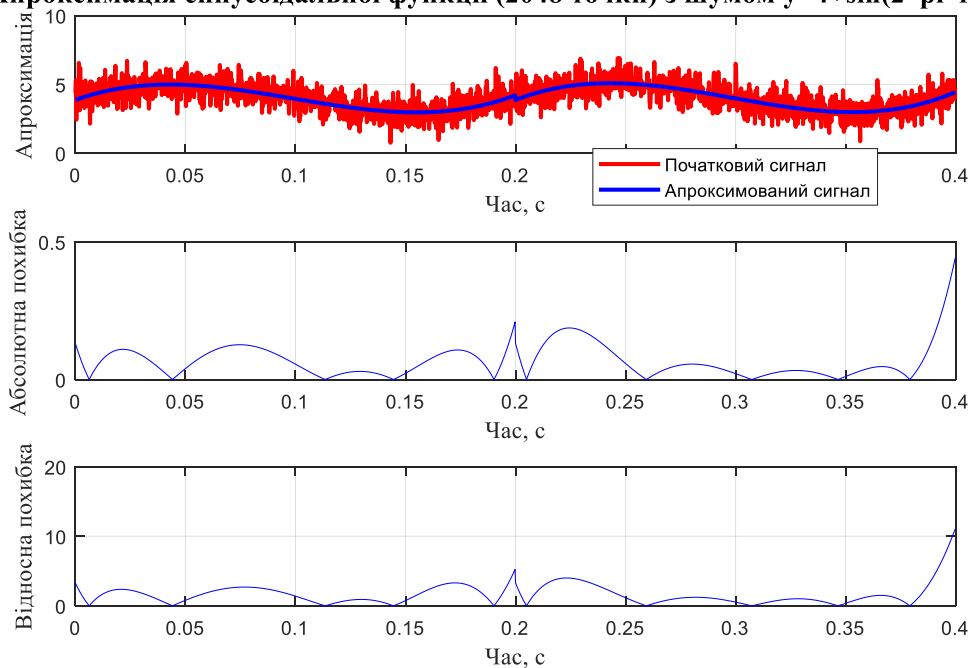


Рисунок 3.42 – Кускова апроксимація синусоїдального сигналу при довжині відрізка в 2048 точок

Апроксимація синусоїдальної функції (4096 точки) з шумом $y=4+\sin(2\pi f^*t)+\phi$

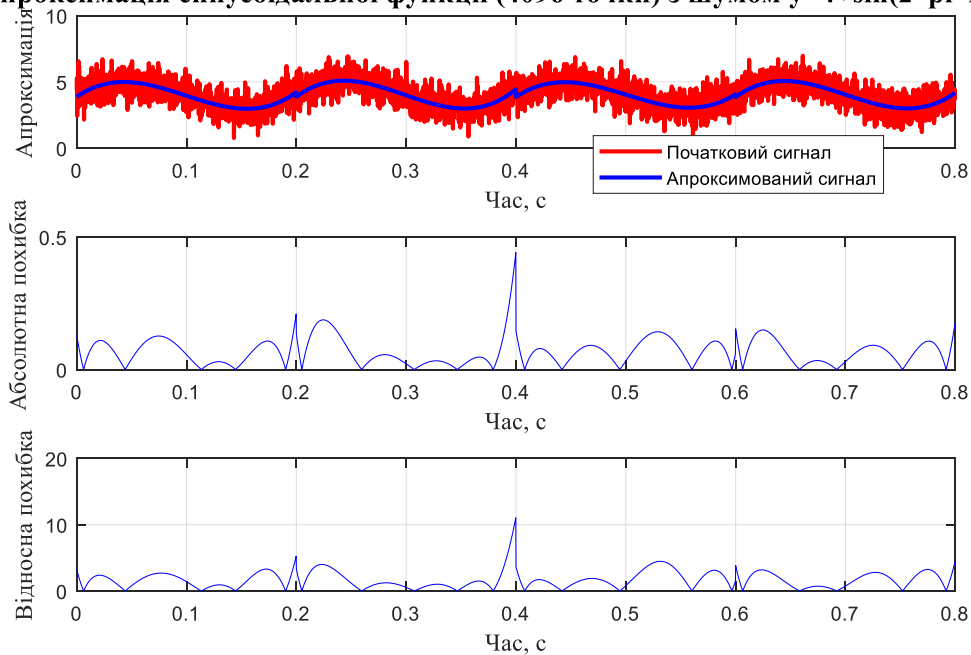


Рисунок 3.43 – Кускова апроксимація синусоїдального сигналу при довжині відрізка в 4096 точки

Апроксимація синусоїдальної функції (8192 точки) з шумом $y=4+\sin(2*\pi*f*t)+\phi$

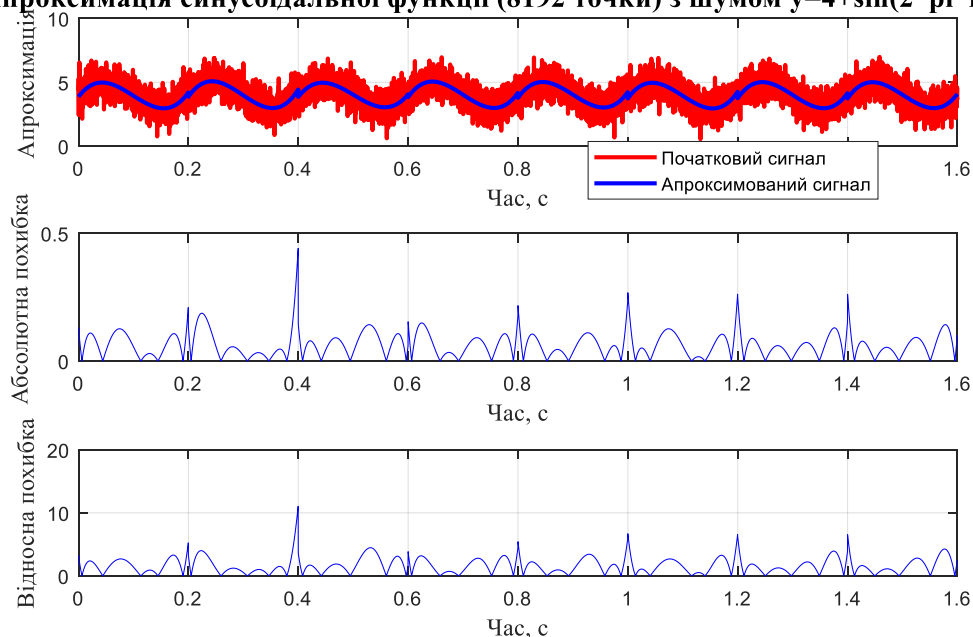


Рисунок 3.44 – Кускова апроксимація синусоїдального сигналу при довжині відрізка в 8192 точки

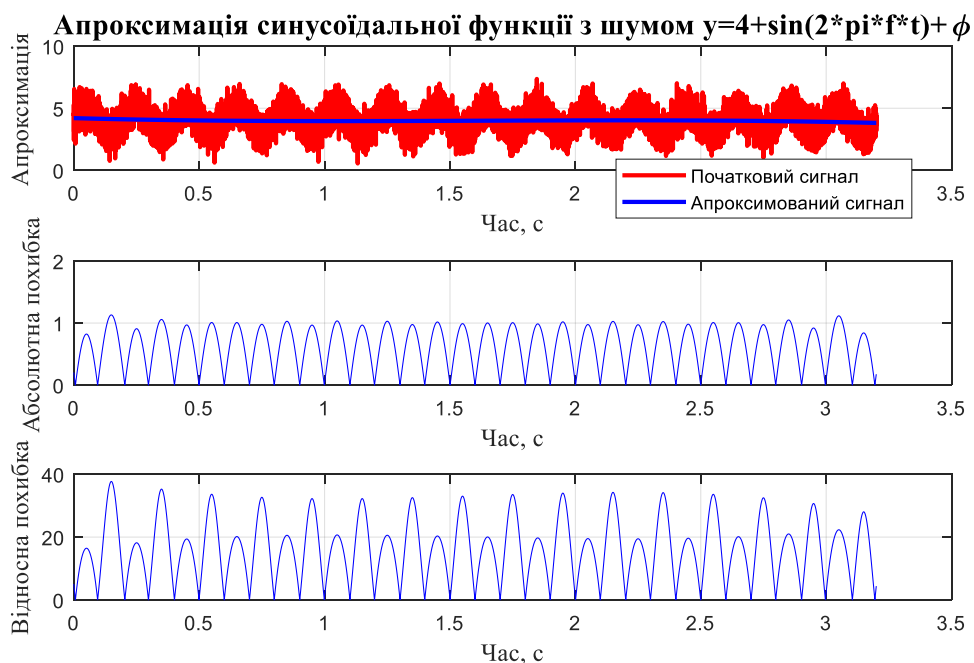


Рисунок 3.45 – Кускова апроксимація синусоїдального сигналу при довжині відрізка в 16384 точки

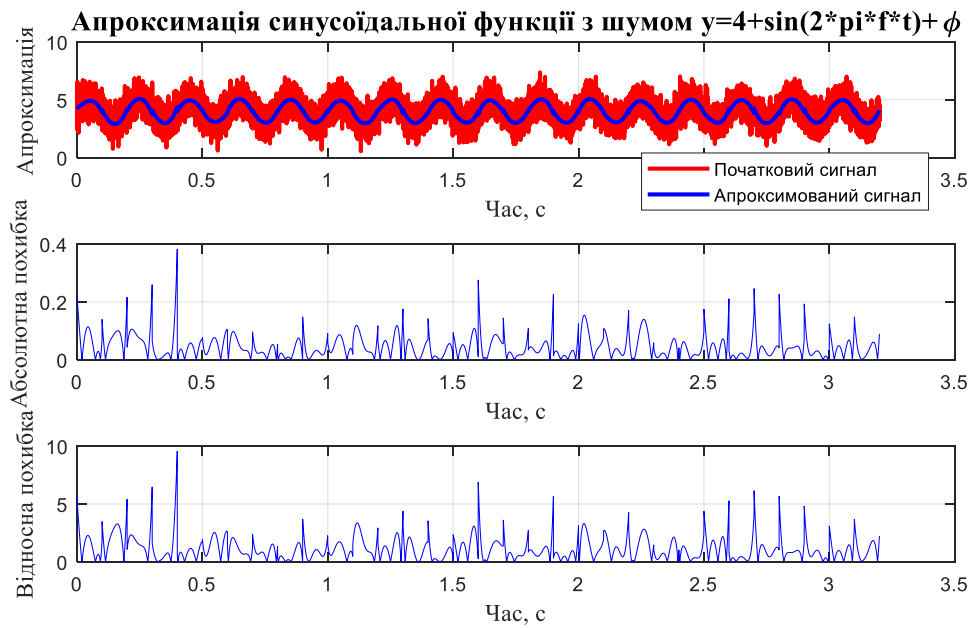


Рисунок 3.46 – Кускова апроксимація синусоїдального сигналу з мінімальною середньою похибкою при довжині відрізка в 512 точок

Згідно з отриманими результатами, що занесені в таблицю, робимо висновок, що для коливальних сигналів похибка кускової апроксимації зменшується зі збільшенням довжини сигналу.

Таблиця 4 Мінімальна середня похибка кускової апроксимації $y = 4 + \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t) + \phi$

	Кількість точок у відріжку				
	1024	2048	4096	8192	16384
Мінімальна середня похибка	1.6068%	1.6273%	1.3584%	1.2209%	1.1369%

ВИСНОВКИ ДО РОЗДІЛУ 3

Проведено дослідження можливостей апроксимації функцій за допомогою МНК при наявності в сигналі білого шуму. Для лінійних функцій введення білого шуму ніяк не вплинуло на результат апроксимації сигналу по всій його довжині, а для знакозмінних - похибка збільшилася.

При кусочній апроксимації в місцях з'єднання апроксимованих відрізків виникають розриви, що призводять до локального збільшення похибки та зниженню точності результатів. Для їх усунення запропоновано вдосконалити алгоритм апроксимації за допомогою згладжування. Але абсолютне значення похибки ніяк не змінилось, проводити згладжування не є ефективним способом зменшення похибки.

Досліджено вплив на похибку апроксимації при різній довжині вихідного сигналу (1024, 2048, 4096 та 8192 точки). Показано, що для нелінійних сигналів збільшення кількості точок не веде до зменшення похибки. Для лінійних сигналів – веде до невеликого зменшення похибки. Результат проведеного дослідження занесли до табл.3.

Для синусоїдального сигналу було досліджена кускова апроксимація на довжині сигналу 16384 точки. Так, як неперіодична функція з часом не накопичує похибку, метод розбиття апроксимованої функції на відрізки є доцільним. Мінімальна похибка такої апроксимації $\sim 1\%$.

РОЗДІЛ 4. РОЗРОБЛЕННЯ СТАРТАП ПРОЕКТУ

«Вдосконалення методу апроксимації даних вимірювання»

4.1. Опис ідеї проекту

Алгоритм апроксимації експериментальних даних призначений для побудови наближеної (апроксимуючої) функції, що найбільш близько проходить біля даних точок чи біля даної неперервної функції. Він дозволяє дослідити чисельні характеристики та якісні властивості об'єкта, звести задачу до вивчення більш простих та більш зручних об'єктів (наприклад, таких, чиї властивості легко обчислюються або вже відомі). По отриманим даним можливо виконувати прогнозування, тобто майбутній стан того чи іншого об'єкта.

Такі алгоритми в основному застосовуються в будівельних компаніях інженерних споруд для забезпечення стійкості та передбачення зносу або поломки конструкції. Окрім цього даний алгоритм можливо використовувати задля діагностики поточного стану людини та її майбутній розвиток, а також в державних установах (наприклад, Національний банк України) задля передбачення різких скоків курсу валют.

В межах підпункту послідовно проаналізовано та подано у вигляді таблиць: зміст ідеї; можливі напрямки застосування; основні вигоди, що може отримати користувач товару та чим відрізняється від існуючих аналогів та замінників.

В таблиці 4.1 наведено цілісне уявлення про зміст ідеї та можливі базові потенційні ринки, в межах яких потрібно шукати групи потенційних клієнтів.

Таблиця 4.1 Опис ідеї стартап-проекту

<i>Зміст ідеї</i>	<i>Напрямки застосування</i>	<i>Вигоди для користувача</i>
Використання вдосконаленого методу апроксимації експериментальних даних у різних областях техніки та науки	1. Будівництво	Попередження зносу конструкції, поломки або її руйнуванню Зменшення витрат на ремонтне обслуговування Визначення терміну придатності Визначення умов небезпеки експлуатації Висока точність отриманих даних
	2. Економіка	Прогнозування зростання чи спадання економічних показників Зменшення витрат на обслуговування Визначення ймовірності процесу Висока точність отриманих даних
	3. Медицина	Передбачення результату лікування Визначення ймовірності процесу Висока точність отриманих даних
	4. Політика	Політичні прогнози(результати виборів, міжнародні відношення) Визначення ймовірності процесу Висока точність отриманих даних
	5. Військова справа	Прогнозування поведінки супротивника чи потенційного супротивника Визначення ймовірності процесу Висока точність отриманих даних

	6. Психологія	Прогнозування стійкості подружніх відносин Визначення ймовірності процесу Висока точність отриманих даних
	7.Ресурсозабезпеченість	Прогнозування споживання електроенергії, води, корисних копалин і т.п. Зменшення витрат на обслуговування Визначення ймовірності процесу Висока точність отриманих даних

Висновок: Для апроксимації експериментальних даних розрізняють безліч методів, адже виконати наближення даних та виконати прогнозування поведінки у майбутньому можливо для будь-чого,. Дана можливість є головною перевагою на ринку послуг. Головними напрямками застосування є будівництво, медицина, економіка та ін.

4.2 Аналіз потенційних техніко-економічних переваг ідеї порівняно із пропозиціями конкурентів.

Аналіз потенційних техніко-економічних переваг ідеї порівняно із пропозиціями конкурентів наведено в таблиці 4.2.

Таблиця 4.2 Визначення сильних, слабких та нейтральних характеристик

№ п/п	Техніко- економічні характери- стики ідеї	(потенційні) товари/концепції конкурентів				W (слабк а сторо на)	N (нейтра льна сторона)	S (силь на стор она)
		Мій проект LKO	B&B	Falcon	Pro Build			
1	Низькі витрати	25	50	35	40			+

2	Точність	висока	середня	середня	середня		+	
3	Швидкість проведення результату	висока	середня	середня	середня			+
4	Гнучкість	+	-	-	-			+
5	Простота	77%	50%	80	60%			+

Висновки: Як видно з таблиці головною перевагою проекту для користувачів являється збільшення точності вимірювання та зменшення часу на проведення аналізу. Не менш важливим, є такі техніко-економічні характеристики, як ціна та простота алгоритму. Слабку позицію займає простота програми, так як для виконання апроксимації складних функцій необхідний більш складний алгоритм.

4.3 Технологічний аудит ідеї проекту

В таблиці 4.3 проводиться аудит технології, за допомогою якої можна реалізувати ідею проекту.

Таблиця 4.3 Технологічна здійсненність ідеї проекту

<i>№ n/n</i>	<i>Ідея проекту</i>	<i>Технології її реалізації</i>	<i>Наявність технологій</i>	<i>Доступність технологій</i>
1	Підвищення точності методу	Використання нових датчиків	Наявна	Доступна
2	Зменшення впливу складових шуму	Впровадження алгоритмів фільтрації та компенсування похибок	Необхідно розробити	Теоретично доступна
3	Використання алгоритму задля прогнозування експериментальних даних	Створення алгоритму, що буде підходити для різних напрямків застосування	Наявна	Доступна
4	Інтеграція	Використання	Наявна	Доступна

	алгоритму в реальні прилади	передових технологій виробництва приладів		
Обрана технологія реалізації ідеї проекту: Створення нових алгоритмів у системі MatLab. MatLab – це пакет прикладних програм для чисельного аналізу, а також мова програмування, що використовується в даному пакеті.				

4.4 Аналіз ринкових можливостей запуску стартап-проекту

Визначення ринкових можливостей, які можна використати під час ринкового впровадження проекту, та ринкових загроз, які можуть перешкодити реалізації проекту, дозволяє спланувати напрями розвитку проекту із урахуванням стану ринкового середовища, потреб потенційних клієнтів та пропозицій проектів-конкурентів.

Таблиця 4.4 Попередня характеристика потенційного ринку стартап-проекту

<i>№ n/n</i>	<i>Показники стану ринку (найменування)</i>	<i>Характеристика</i>
1	Кількість головних гравців, од	6
2	Загальний обсяг продаж, грн/ум.од	100000
3	Динаміка ринку (якісна оцінка)	зростає
4	Наявність обмежень для входу (вказати характер обмежень)	Ціна
5	Специфічні вимоги до стандартизації та сертифікації	відсутні
6	Середня норма рентабельності в галузі (або по ринку), %	75%

Висновки: головними перевагами показників стану ринку є те, що динаміка стрімко зростає на попит даного продукту, це призведе до підвищення обсягу продаж. Присутні також фактори загрози для виходу на ринок. Такими факторами є високе ціноутворення та рівень знань у спеціалістів, що виконують правильне введення даних та реалізацію алгоритму. Середня норма рентабельності на ринку є досить високою – 75%, це означає, що проект рентабельний для входження на ринок.

Для отримання більш чіткої картини ситуації на ринку визначимо потенційні групи клієнтів (табл.4.5), їх характеристики, та формується орієнтовний перелік вимог до товару для кожної групи

Таблиця 4.5 Характеристика потенційних клієнтів стартап-проекту

<i>№ n/n</i>	<i>Потреба, що формує ринок</i>	<i>Цільова аудиторія (цільові сегменти ринку)</i>	<i>Відмінності у поведінці різних потенційних цільових груп клієнтів</i>	<i>Вимоги споживачів до товару</i>
1	Попередження пошкодженню та руйнуванню об'єкту під час нормативного строку експлуатації	Будівельні компанії	Особливості, викликані зі специфікою проведення дослідів, необхідність модифікування програмно-алгоритмічного забезпечення, інтеграція з існуючими системами	Швидкість роботи Можливість комплексування з іншими системами Висока точність результатів
2	Прогнозування стану здоров'я людини	Медицина		
3	Апроксимація та прогнозування економічних показників	Економіка		

Висновки: За результатами аналізу можна виділити дві головні потреби, що формує ринок. Перша це: пошкодження та руйнування об'єкту під час нормативного строку експлуатації, друга: визначення строку експлуатації продукції, прогнозування її зносу. В даному випадку, головною перевагою є те, що за допомогою продукту (програмного моделювання у системі MatLab) можливо вирішення даних потреб.

4.5 Аналіз ринкового середовища

Проведемо аналіз факторів ринкового середовища що сприяють ринковому впровадженню (табл. 4.6.) проекту, та факторів, що йому перешкоджають (табл. 4.7.). Результати введемо до таблиць.

Таблиця 4.6 Фактори можливостей

<i>№ n/n</i>	<i>Фактор</i>	<i>Зміст можливості</i>	<i>Можлива реакція компанії</i>
1	Збільшення попиту	Різке збільшення зацікавленості до системи	Підвищення виробництва
2	Необхідність до інтеграції	Необхідність додати можливість розширення системи	Компанія може створити додаткові можливості системи на замовлення
3	Освоєння нових сфер	Система використовується у сферах, що не розглядалися виробником	Створення спеціальної робочої групи задля модернізації приладу для виконання поставлених вимог
4	Індивідуальне замовлення	Клієнт потребує додання нових специфічних додатків	Оцінка затрат і вигоди компанії в даній ситуації. Погодження умов можливого контракту.
5	Співпраця з конкурентами	Конкурент запропонував кооперацію	Оцінки можливих ризиків

Висновки: сфера використання таких систем є молодим, тому ринок клієнтів постійно зростає. Збільшення зацікавленості в товарі призведе до різкого збільшення об'ємів виробництва та продажів, що дасть поштовх до нових вдосконалень. Це досягається шляхом рекламування та освоєння нових сфер використання.

Таблиця 4.7 Фактори загроз

<i>№ n/n</i>	<i>Фактор</i>	<i>Зміст загрози</i>	<i>Можлива реакція компанії</i>
1	Конкуренція	Менша ціна у конкурента при однаковій якості продукту	Відтік клієнтів
2	Економічний	Економічний стан країни-виробника	Відмова від продукту
3	Якість	Не належна якість зібраного приладу	Відмова від продукту
4	Некомпетентність робітників	Неточність інженерних розрахунків	Відмова від продукту

Висновки: головним фактором загроз є конкуренція. Вже існуючі товари на ринку мають певну репутацію та великі об'єми виробництва. Конкуренти здатні демпінгувати ціни для отримання нових клієнтів свого товару.

Надалі проведемо аналіз пропозиції (табл. 4.8.), де визначимо загальні риси конкуренції на ринку.

Таблиця 4.8 Ступеневий аналіз конкуренції на ринку

<i>Особливості конкурентного середовища</i>	<i>В чому проявляється дана характеристика</i>	<i>Вплив на діяльність підприємства (можливі дії компанії, щоб бути конкурентоспроможн ою)</i>
1. Тип конкуренції - чиста конкуренція	Мала кількість постачальників даного продукту	відповідність ринку прогнозування випереджати існуючі технології
2. За рівнем конкурентної боротьби - міжнародний	Наявність замовників із інших держав	Міжнародний ринок
3. За галузевою ознакою - міжгалузева	Використання у різних галузях	Робота менеджменту і реклами по залученню клієнтів

4. Конкуренція за видами товарів: - товарно-видова	Товар, що пропонується є одного виду	Клієнтно-орієнтована стратегія розвитку Адаптивність до умов ринку
4. За характером конкурентних переваг - цінова	Вартість залежить від комплектації та функціоналу	Пошук вигідного постачальника компонентів
6. За інтенсивністю - марочна	Вибір постачальника по бренду	Розкрутка бренду, його рекламування

Висновки: на ринку присутня чиста конкуренція через те, що окремі гравці не можуть впливати на ціну товару. За рівнем конкурентної боротьби – міжнародний із міжгалузевою ознакою. Конкуренція за видами товарів – видова.

Після аналізу конкуренції проводиться більш детальний аналіз умов конкуренції в галузі за моделлю п'яти сил М. Портера (табл. 4.9.)

Таблиця 4.9 Аналіз конкуренції в галузі за М. Портером

	<i>Прямі конкуренти в галузі</i>	<i>Потенційні конкуренти</i>	<i>Постачальники</i>	<i>Клієнти</i>	<i>Товари-замінники</i>
<i>Складові аналізу</i>	ProBuild Falcon B&B	AETS Dakota Houghton Mifflin Company	Akengineering Perfect-Group	Building company Клініки Державні установи	Алгоритм Excel
<i>Висновки: ринок не є насиченим, але конкуренція висока, оскільки компанії які являються конкурентами мають високу репутацію. Завадою являється необхідний високий рівень капіталовкладень.</i>	Конкуренція є відносно не великою	Вихід на ринок відносно простий. Наявні потенційні конкуренти.	Постачальники мають не диктувати ціни на ринку	Клієнти не диктують умови через велику зацікавленість до товару.	Обмежень практично немає, оскільки існують різні обмеження по використанню

На основі аналізу конкуренції, проведеного наведеного в табл. 4.9, а також із урахуванням характеристик ідеї проекту, що наведені в табл. 4.2, вимог споживачів до товару (табл. 4.5.) та факторів маркетингового середовища (табл. 4.6, 4.7) визначимо та обґрунтуємо перелік факторів конкурентоспроможності. Аналіз оформлено в табл. 4.10.

Таблиця 4.10 Обґрунтування факторів конкурентоспроможності

<i>№ n/n</i>	<i>Фактор конкурентоспроможності</i>	<i>Обґрунтування (наведення чинників, що роблять фактор для порівняння конкурентних проектів значущим)</i>
1	Надійність	Використання алгоритму з високою точністю. Чим вище точність розрахунку, тим вище попит на товар
2	Простота	Простота у використанні для користувача робить систему привабливою для клієнта.
3	Адаптивність	Можливість гнучкого налаштування під конкретні задачі
4	Готовий алгоритм	Зменшення часу очікування для покупця
5	Обслуговування	Потреба в консультації з технічних питань

Висновки: оцінено основні фактори конкурентоспроможності. Підвищення надійності системи досягається шляхом використання алгоритмів із високою точністю. Простота у використанні приладу та налаштуванні робить його більш привабливим для клієнта через те, що необхідно тратити мінімум часу на налагодження та запуск. Адаптивність та простота відкривають широкий спектр використання приладу у поєднанні із іншими системами.

4.6 Аналіз сильних та слабких сторін стартап-проекту

За визначеними факторами конкурентоспроможності (табл. 4.10) проводиться аналіз сильних та слабких сторін стартап-проекту (табл. 4.11).

Таблиця 4.11 Порівняльний аналіз сильних та слабких сторін проекту

<i>№ n/n</i>	<i>Фактор конкурентоспроможності</i>	<i>Бали 1-20</i>	<i>Рейтинг товарів-конкурентів</i>						
			-3	-2	-1	0	+1	+2	+3
1	Надійність	18							+3
2	Простота	20			-1				
3	Адаптивність	17						+2	
4	Готовий алгоритм	16				0			
5	Обслуговування	18						+2	

Висновки: спираючись на фактори конкурентоспроможності (

Таблиця 4.) та підсумовуючи рейтинг товару відносно головного конкурента, запропонована система має більший рейтинг відносно прямих конкурентів. Дана таблиця показує якими саме особливостями розроблена система відрізняються від аналогів та в яку саме сторону. Детальний аналіз показує, що сильними сторонами є простота, можливість до адаптації з роботою із іншими системами.

Фінальним етапом ринкового аналізу можливостей впровадження проекту є складання SWOT-аналізу (матриці аналізу сильних (Strength) та слабких (Weak) сторін, загроз (Troubles) та можливостей (Opportunities), що наведено в таблиці 4.12. на основі виділених ринкових загроз та можливостей, та сильних і слабких сторін (табл. 4.11).

Таблиця 4.12 SWOT- аналіз стартап-проекту

Сильні сторони: простота використання, адаптивність, стабільна робота, універсальність, портативність, можливість до комплексування	Слабкі сторони: низька репутація підприємства на початку впровадження проекту в життя, необхідність значного початкового капіталовкладення, висока вартість за послуги
Можливості: вихід на міжнародний ринок, збільшення попиту, необхідність до інтеграції, освоєння нових сфер, індивідуальне замовлення, співпраця з конкурентами	Загрози: Винайдення кращих програмних комплексів, кваліфікованість спеціалістів, мінливість ринку та низька швидкість розрахунку складних процесів.

На основі SWOT-аналізу розробимо альтернативи ринкової поведінки (перелік заходів) для виведення стартап-проекту на ринок та орієнтовний оптимальний час їх ринкової реалізації з огляду на потенційні проекти конкурентів,

що можуть бути виведені на ринок. Визначені альтернативи аналізуються з точки зору строків та ймовірності отримання ресурсів (табл. 4.13).

Таблиця 4.13 Альтернативи ринкового впровадження стартап-проекту

<i>№ n/n</i>	<i>Альтернатива (орієнтовний комплекс заходів) ринкової поведінки</i>	<i>Ймовірність отримання ресурсів</i>	<i>Строки реалізації</i>
1	Індивідуацізм (максимація власного виграшу)	Середня	7міс
2	Кооперація (максимізація спільного виграшу)	Висока	10міс
3	Суперництво	Нижче середнього	12міс.

Висновки: в результаті аналізу обрано кооперацію, як альтернативну ринкову поведінку через те, що за відносно короткий термін існує велика ймовірність отримання ресурсів.

4.7 Розроблення ринкової стратегії проекту

Розробка ринкової стратегії першим кроком передбачає визначення стратегії охоплення ринку: опис цільових груп потенційних споживачів (табл. 4.14).

Таблиця 4.14 Вибір цільових груп потенційних споживачів

<i>№ n/ n</i>	<i>Опис профілю цільової групи потенційних клієнтів</i>	<i>Готовність споживачі в сприйняти продукт</i>	<i>Орієнтовний попит в межах цільової групи (сегменту)</i>	<i>Інтенсивність конкуренції в сегменті</i>	<i>Простота входу у сегмент</i>
1	Будівництво інженерних споруд(будинків, мостів)	+	+	низька	+

2	Державні установи	-	+	низька	-
3	Медичні центри діагностики	+	+	низька	+
4	Національний банк України	+	+	висока	+
5	Центри психології	+	+	низька	-

Які цільові групи обрано: під час вибору цільової групи до уваги бралось в першу чергу готовність споживача сприйняти продукт. Будівельні компанії потребують більш популярних роз'яснень щодо можливостей використання таких систем. У випадку успішної реклами є можливість зайняти нішу.

Для роботи в обраних сегментах ринку необхідно сформувати базову стратегію розвитку (табл. 4.15.).

Таблиця 4.15 Визначення базової стратегії розвитку

<i>№ п/п</i>	<i>Обрана альтернатива розвитку проекту</i>	<i>Стратегія охоплення ринку</i>	<i>Ключові конкурентоспромо жні позиції відповідно до обраної альтернативи</i>	<i>Базова стратегія розвитку*</i>
1	Індивідуалізм	Стратегія недиференційованого маркетингу	-Адаптація до вимог ринку -Використання новачій -Генерування ноу-хау	Стратегія спеціалізації

Висновки: обрана стратегія розвитку спеціалізація через існування на ринку більш сильніших гравців. На перших кроках існування проекту доцільніше обрати стратегію спеціалізації та зайняти певну стабільну нішу на ринку.

Наступним кроком є вибір стратегії конкурентної поведінки (табл. 4.16).

Таблиця 4.16 Визначення базової стратегії конкурентної поведінки

<i>№ n/n</i>	<i>Чи є проект «першопрохідце м» на ринку?</i>	<i>Чи буде компанія шукати нових споживачів, або забирати існуючих у конкурентів?</i>	<i>Чи буде компанія копіювати основні характеристи ки товару конкурента, і які?</i>	<i>Стратегія конкурентної поведінки*</i>
1	Не є першопрохідцем	Шукати нових споживачів із поступовим переманюванням від конкурентів	Компанія буде вдосконалювати наявні зразки	Стратегія виклику лідера

Висновок: оскільки проект не є першопрохідцем та має суттєві переваги по відношенню до свого прямого конкурента, можливо обрати стратегію виклику лідеру. Це є можливим на фоні використання інноваційних методів підвищення точності алгоритмічного забезпечення.

4.8 Визначення стратегії позиціонування

На основі вимог споживачів з обраних сегментів до постачальника та до продукту, а також в залежності від обраної базової стратегії розвитку та стратегії конкурентної поведінки розробимо стратегію позиціонування (табл. 4.17).

Таблиця 4.17 Визначення стратегії позиціонування

<i>№ n/n</i>	<i>Вимоги до товару цільової аудиторії</i>	<i>Базова стратегія розвитку</i>	<i>Ключові конкурентоспро можні позиції власного стартап- проекту</i>	<i>Вибір асоціацій, які мають сформува ти комплексну позицію власного проекту (три ключових)</i>
1	Швидкість	Стратегія	Дослідження та	Високошвидкісна,

	роботи	спеціалізації	розвиток	легкість, надійність
2	Можливість комплексування з іншими системами	Стратегія спеціалізації	Обслуговування	Здатна до комплексування
3	Висока стабільність результатів	Стратегія спеціалізації	Якість	високоточна

Висновки: На ряду із використання інноваційних методів підвищення точності, проект повинен викликати асоціації у клієнта у гнучкості налаштування та комплексування, можливості після продажного обслуговування та високої якості виготовлення.

4.9 Розроблення маркетингової програми стартап-проекту

Першим кроком є формування маркетингової концепції товару, який отримає споживач табл. 4.18.

Таблиця 4.18 Визначення ключових переваг концепції потенційного товару

<i>№ n/n</i>	<i>Потреба</i>	<i>Вигода, яку пропонує товар</i>	<i>Ключові переваги перед конкурентами (існуючі або такі, що потрібно створити)</i>
1	Необхідність наближення експериментальних даних будь-якого вигляду для майбутнього прогнозування	Відносно дешева та надійна система	Ціна, надійність, простота, підтримка, обслуговування, універсальність

Висновки: в результаті визначення переваг концепції товару можливо створення цільової реклами товару та донесення цільового повідомлення до кінцевого споживача.

Розробимо трирівневу маркетингову модель товару (табл. 4.19).

Таблиця 4.19 Опис трьох рівнів моделі товару

<i>Рівні товару</i>	<i>Сутність та складові</i>		
I. Товар за задумом	Засіб дає можливість користувачеві оцінити отримані експериментальні дані, виконати їх наближення (апроксимацію). В повній мірі провести апроксимацію функцій різного вигляду у різних областях науки та техніки. Відтворення поточного стану здоров'я людини, поточного курсу або інших економічних показників, стану конструкції для подальшого прогнозування цих показників.		
II. Товар у реальному виконанні	Властивості/характеристики	М/Нм	Вр/Тх /Тл/Е/Ор
	1. Малогабаритність	15г	Тх
	2. Швидкість роботи	70Гц	Тх
	3. Точність	0,1° СКВ	Тх
	4. Надійність	IP67	Тх
	5. Вартість	50	Е
	Якість: сертифікати відповідності якості ISO, сертифікація для використання в медичних закладах, сертифікація IEEE.		
	Пакування		
	Марка: LKO		
III. Товар із підкріпленням	До продажу Максимальна комплектація, необхідна для замовника		
	Після продажу Після продажна підтримка, сервіс, гарантія, сервісне обслуговування		
Захист товару проводиться шляхом патентування приладу, проведення заходів захисту програмного та апаратного забезпечення, .			

Висновки: основними засобами захисту від копіювання є патентування програмних та апаратних рішень. Окрім того, захист програмного коду повинен запобігти копіювання програми. Закладені характеристики на другому та третьому рівнях товару робить його унікальним серед конкурентів.

Наступним кроком визначимо цінові межі (табл. 4.20).

Таблиця 4.20 Визначення меж встановлення ціни

<i>№ n/n</i>	<i>Рівень цін на товари- замінники</i>	<i>Рівень цін на товари- аналоги</i>	<i>Рівень доходів цільової групи споживачів</i>	<i>Верхня та нижня межі встановлення ціни на товар/послугу</i>
1	90-120 у.о.	50-80 у.о.	1200-2000 у.о.	50-90 у.о.

Висновки: обрано середню цінову категорію, оскільки занадто висока ціна не вигідна для споживача.

Наступним кроком є визначення оптимальної системи збуту, в межах якого приймається рішення (табл. 4.21).

Таблиця 4.21 Формування системи збуту

<i>№ n/n</i>	<i>Специфіка закупівельної поведінки цільових клієнтів</i>	<i>Функції збуту, які має виконувати постачальник товару</i>	<i>Глибина каналу збуту</i>	<i>Оптималь на система збуту</i>
1	Продаж	Повний супровід товару до замовника	Нульового рівня	Безпосередній (прямий)
2	Оренда	Надання консультацій та оренди обладнання	Нульового рівня	Безпосередній (прямий)

Висновки: основними каналами збуту є оренда та продаж. Через відносно не великі об'єми виробництва нема сенсу використовувати підрядників для реалізації товару. Тому обрано нульовий рівень глибини каналу збут та прямої системи збуту.

Таблиця 4.22 Концепція маркетингових комунікацій

<i>№ п/п</i>	<i>Специфіка поведінки цільових клієнтів</i>	<i>Канали комуніка- цій, якими користу- ються цільові клієнти</i>	<i>Ключові позиції, обрані для позиціону- вання</i>	<i>Завдання рекламного повідом- лення</i>	<i>Концепція реклам- ного звернення</i>
1	Зовнішні обставини спонукають споживача до пошуку рішення	Реклама SMM сайт виробника	Високошвидкісна Легкість надійність	Донесення можливостей отримання прибутку за допомогою цього засобу	Показ можливостей даної системи та можливість застосування

Висновки: Маркетингова комунікація проходить через рекламу приладу в соціальних мережах, рекламі будівельних компаній чи медичних установ. Метою цих оголошень є донесення можливостей даної системи та вигоди від використання. Вся медіа реклама спрямована на створення «вау» - ефекту.

ВИСНОВКИ ДО РОЗДІЛУ 4

Даний розділ присвячений розробленню першого етапу створення стартап-проекту. Найголовнішим в проведенні будь-якої наукової роботи є подальша комерціалізація отриманих результатів та можливість застосування розробленої концепції в промисловості. Більшість ідей в тій чи іншій мірі впливають на економічну складову підприємства. Тому розроблена ідея може бути використана як бізнес модель та може бути продана зацікавленим особам.

Першим кроком було відбір та висвітлення самої ідеї проекту. Для цього в Таблиця 4.1 приведено назву проекту та можливі зацікавлені сторони, котрі будуть потенційними споживачами продукту та які саме ризики можуть бути під час реалізації. Аналіз слабких та сильних сторін дають можливість автору проекту визначити аспекти, на яких слід зробити ставку. Перелік слабких, сильних та нейтральних характеристик ідеї дає можливість до уявлення конкурентоспроможності запропонованого рішення. Для даного проекту було обрано не зайняту нішу товару у сфері будівництва інженерних споруд. Сильними сторонами проекту являються можливість до інтеграції з іншими приладами та підвищення стійкості та надійності системи.

Наступним кроком проводився технологічний аудит проекту. Під час аудиту автор отримує можливість до розуміння кращої технології виконання. Виявлено що більшість технологій вже існує, однак використання останніх не дасть можливості мати переваги над конкурентами. Саме ставка на інноваційні методи підвищення точності можуть зробити пристрій унікальним та незамінним. Загалом, створення проекту можливе, однак необхідно провести доволі сильну рекламну компанію, щоб отримати покупців.

Зважаючи на стрімкий розвиток технологій, для швидкого отримання ресурсів та прибутків, слід обрати кооперацію, як форму ринкового впровадження проекту. Тобто, для того щоб встигнути за ринком, слід не розроблювати систему з нуля, оскільки це займе доволі багато часу, а запропонувати лідерам ринку використання

запропонованих програмних рішень. Звісно, це є альтернативою, оскільки в такому випадку ні одна зі сторін не отримає повного прибутку.

Після аналізу всіх аспектів ринку, подальша імплементація проекту можлива. Але є одна важлива умова. Слід провести доволі сильну рекламну компанію, та донести до споживачів необхідність використання системи саме з високою точністю та чому саме обрати нашу систему.

ВИСНОВКИ

У ході виконання дисертаційної роботи було вдосконалено метод найменших квадратів для його використання з метою апроксимації коливальних сигналів. За отриманими результатами можна зробити наступні висновки:

1. Проведено огляд існуючих методів наближення функцій та робіт інших авторів, які показали, що існує досить багато різноманітних методів апроксимації даних, які відрізняються областями використання, проте, загальновідомим та практично універсальним методом апроксимації є метод найменших квадратів.

2. Розглянуто основні методи середньоквадратичної та рівномірної апроксимації даних вимірювань. Для подальшого вдосконалення було обрано метод найменших квадратів, який у більшості випадків не дає результатів необхідної точності при апроксимації коливальних процесів.

3. За допомогою метода найменших квадратів проведено апроксимацію ідеальних (змодельованих) сигналів без шуму різної форми. Показано, що апроксимація даним методом коливальних процесів по усій їх довжині має значну похибку (середня похибка сягає приблизно 30%). Запропоновано при апроксимації коливальних процесів розбивати сигнал на відрізки фіксованої довжини, апроксимувати кожний відрізок окремо і об'єднувати знову у цілий сигнал. Показано, що за допомогою даного вдосконалення можна досягти похибки в $9 \cdot 10^{-13} \%$.

4. Визначено, що при наявності у сигналі білого шуму вдосконалений метод показує значно кращу точність (менша середня похибка) апроксимації ніж класичний метод найменших квадратів для коливальних процесів різної форми. Визначено, що для коливальних періодичних процесів найкраща кількість точок в одному відрізку складає 512, а для коливальних неперіодичних - 32.

5. Визначено, що збільшення довжини коливального сигналу з адитивною сумішшю білого шуму не призводить до значних змін середньої похибки апроксимації вдосконаленим методом.

ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

1. Каленчук-Порханова А.А, Вакал Л.П. Пакет программ аппроксимации функций // Комп'ютерні засоби, мережі та системи. – 2008. – №7. – С. 32–33
2. Glava3 [Електронний ресурс]:
<http://posibnyky.vntu.edu.ua/met/lek5.htm#lyteratura>
3. Демидович Б. П., Марон И. А., Шувалова Е. З. Численные методы анализа. – М.: Мир, 1967
4. Голубинский, А. Н. Методы аппроксимации экспериментальных данных и построения моделей / А. Н. Голубинский // Вестник Воронежского института МВД России. – 2007. – № 2. – С. 138–143.
5. Попов В.П. Основы теории цепей / В.П. Попов.— М.: Высшая школа, 1998.
6. В.А. Андруник Пакет програм «Апрокріо» для апроксимації температурної характеристики та чутливого сенсора». - 2014.
7. Киреев В.И. Сглаживание экспериментальных данных интегро-дифференциальными параболическими сплайнами и методом наименьших квадратов / Киреев В.И. // Отдельный выпуск горного информационного аналитического бюллетеня / Киреев В.И. – Москва: "Горная книга", 2009.
8. . Попов, В. П. Основы теории цепей / В. П. Попов. – М.: Высшая школа, 1985. – 496 с.
9. Яковлев, Я. Н. Радиотехнические цепи и сигналы. Задачи и задания : учеб. пособие / под ред. Я. Н. Яковлева. – М.: ИНФРА-М, 2003. – 348 с.
10. Про методи наближення дослідних даних засобами пакету MathCAD на прикладі динаміки вмісту діацетилу при зброджуванні сусла. // Журнал «Харчова наука і технологія» , ОДЕСА 100с .. – 2012. – С. стор. 50–53.
11. Ломакин М. А. ОСОБЕННОСТИ ПОСТРОЕНИЯ МОДЕЛИ ПОГРЕШНОСТИ МЭМС-ДАТЧИКОВ ПРИ РЕШЕНИИ НАВИГАЦИОННОЙ

ЗАДАЧИ "Общие и комплексные проблемы естественных и точных наук" / Ломакин М. А., 2014.

12. Поршнева С.В. Компьютерный анализ и интерпретация эмпирических зависимостей Текст / А.В. Каплан, В.Е. Каплан, М.В. Мащенко, Е.В. Овечкина // под ред. С.В. Поршнева. – Изд-во: Бинوم-Пресс, 2009 г., 336 с.

13. Дзядык, В.К. об эффективном построении многочленов, которые осуществляют близкое к наилучшему приближение функции [текст] / В.к. Дзядык. – Укр. мат. журн. – 1973. – Вып. 25. – № 4. – с. 435–453

14. Ремез, Е.Я. основы численных методов чебышёвского приближения [текст] / Е.Я. Ремез. – киев: наук. думка, 1969. – 623 с.

15. Дзядык, В.К. Введение в теорию приближения функций полиномами [текст] / В.к. Дзядык. – м.: наука, 1977. – 512 с.

16. Натансон, И.П. конструктивная теория функций [текст] / И.П. Натансон. – м. – л.: Гос. изд-во технико-теоретич. литературы, 1949. – 688 с.

17. Справочная математическая библиотека. математический анализ. Вычисление элементарных функций [текст] / Под общ. ред. Л.А. Люстерника, А.Р. Янпольского. – м.: физматгиз, 1963. – 248 с.

18. Справочная математическая библиотека. элементы теории функций. функции действительного переменного. Приближение функций. Почти периодические функции [текст] / Под общ. ред. П.Л. Ульянова, А.Р. Янпольского. – м.: физматгиз, 1963. – 244 с.

19. Петрак Л.В. Приближение функций многих переменных рациональными дробями / Л.В. Петрак // Программы оптимизации (приближение функций). – 1975. – Вып. 6. – С. 130 – 144.

20. Kaufman E.H. Uniform rational approximation on functions of several variables / E.H. Kaufman, G.D. Taylor // Int. J. Numer. Math. Eng. – 1976. – Vol. 9, N 2. – P. 297 – 323.

21. Cheney E.W. Two new algorithms for rational approximation / E.W. Cheney, H.L. Loeb // Numer. Math. – 1961. – Vol. 3, N 1. – P. 72 – 75.

22. Л.П. ВАКАЛ. АПРОКСИМАЦІЯ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ ІЗ ЗАСТОСУВАННЯМ АЛГОРИТМУ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОЇ ЕВОЛЮЦІЇ / Л.П. ВАКАЛ. // Математичні машини і системи. – 2017. – С. 90–96 с.
23. Петрова Елена Владимировна. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ АППРОКСИМАЦИИ ФУНКЦИЙ В СИСТЕМАХ КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ : автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. техн. наук / Петрова Елена Владимировна. – Санкт-Петербург, 2002. – 17 с
24. Казарцев Алексей Александрович. Алгоритм поиска в базе данных, основанный на аппроксимации распределения адресов в индексе : автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. техн. наук / Казарцев Алексей Александрович. – Санкт-Петербург, 1995.
25. Digital-processing [Електронний ресурс]: <http://simenergy.ru/math-analysis/digital-processing/85-ordinary-least-squares>
26. Каленчук-Порханова А.А. Аппарат аппроксимации для анализа и синтеза сложных систем / А.А. Каленчук-Порханова // Пр. Міжнар. конф. «50 років Інституту кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України». – Київ, 2008. – С. 354-361.
27. Студопедія [Електронний ресурс] <https://studopedia.info/10-22847.html>
28. Гусев А.В., Котов Ю.Б., Орджоникидзе З.Г., Павлов И.В., Эсселевич И.А. Исследование динамики высоких физических нагрузок с помощью методов компьютерного тестирования и методов математического моделирования. Информационные технологии и вычислительные системы, №1,2007, с.49-55.
29. Н.В. Грищенко С.А. Семериков А.А. Хараджян Е.В. Чернов СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ МЕТОДОВ АППРОКСИМАЦИИ, - Кривой Рог, 1998, с.24.

ДОДАТОК А

30.

31. *Форма додатку 11***32. СПИСОК**

33. наукових та навчально-методичних праць

34. Лисікової Карини Олегівни**35. за 2016-2018 роки**

№ п/п	Назва	Характер роботи	Вихідні дані	Обсяг, стор.	Співавтори
1	2	3	4	5	6
I. Наукові роботи, опубліковані до захисту дисертації					
1	Апроксимація сигналів методом най-менших квадратів	Тези доповіді	XVI міжнародна науково-технічна конференція “Приладобудування: стан і перспективи”	1	С.О. Цибульник
2	Апроксимація функцій методом найменших квадратів	Стаття	Вісник інженерної академії України.	6	С.О. Цибульник
3	Аппроксимация сигналов методом наименьших квадратов	Тези доповіді	Новые направления развития приборостроения : материалы 10-й международной научно-технической конференции молодых ученых и студентов (Минск, 26–28 апреля 2017 г., г. Минск, Республика Беларусь)	1	С.А. Цибульник
1	2	3	4	5	6

4	Вдосконалення методу апроксимації даних вимірювань	Тези доповіді	XVII міжнародна науково-технічна конференція “Приладобудування: стан і перспективи”	1	С.О. Цибульник
---	--	---------------	---	---	----------------

36.

37. Студент _____

38.

(підпис)
ініціали)

(підпис)

(прізвище,

39. Список ЗАВІРЯЮ:

40. Завідуючий кафедрою _____

41.