

Міністерство освіти і науки України  
Національний технічний університет України  
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

## **ДЕТАЛІ ТА ВУЗЛИ ПРИЛАДІВ**

### **Методичні вказівки**

до виконання практичних занять  
для студентів напряму підготовки  
6.051003 – Приладобудування,  
спеціальності «Прилади і системи орієнтації та навігації»

*Рекомендовано вченою радою  
приладобудівного факультету  
(протокол №6/17 від 26.06.2017 )*

Київ  
НТУУ «КПІ ім. І. Сікорського»  
2017

Деталі та вузли приладів: Метод. вказівки до виконання практичних занять для студентів напряму підготовки 6.051003 – Приладобудування, спеціальності «Прилади і системи орієнтації та навігації», денної форми навчання, електронне видання [Текст] / Уклад.: С.О. Цибульник, П.С. Мироненко. – К.: НТУУ «КПІ ім. І. Сікорського», 2017. – 62 с.

Методичні вказівки призначено для студентів напряму підготовки 6.051003 – Приладобудування, спеціальності «Прилади і системи орієнтації та навігації», денної форми навчання. У вказівках розкриваються принципи офіційного визнання відповідності навчальних видань та електронних освітніх ресурсів вимогам стандартів та основні вимоги до таких рукописів.

Навчальне електронне видання

## **ДЕТАЛІ ТА ВУЗЛИ ПРИЛАДІВ**

### **Методичні вказівки**

до виконання практичних занять  
для студентів напряму підготовки  
6.051003 – Приладобудування,  
спеціальності «Прилади і системи орієнтації та навігації»

Укладачі

*Цибульник Сергій Олексійович, канд. техн. наук  
Мироненко Павло Степанович, канд. техн. наук, доц.*

Відповідальний  
редактор

*Півторак Д.О., канд. техн. наук*

Рецензент

*Трасковський В.В., канд. техн. наук, доц.*

*За редакцією укладачів*

## ЗМІСТ

ВСТУП.....	4
Практична робота №1. Структурний аналіз плоских механізмів.....	5
Практична робота №2. План положень.....	13
Практична робота №3. План швидкостей.....	19
Практична робота №4. План прискорень.....	28
Практична робота №5. Розтяг та стиск.....	34
Практична робота №6. Кручення.....	44
Практична робота №7. Згин.....	54
СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ.....	62

## ВСТУП

Методичні вказівки складені відповідно до чинної робочої навчальної програми дисципліни «Деталі та вузли приладів» для студентів приладобудівного факультету, які навчаються за програмою освітньо-кваліфікаційного рівня бакалавра за спеціальністю 151 – Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології (спеціалізація комп'ютерно-інтегровані технології та системи навігації і керування).

Мета даного навчального видання – допомогти студентам в надбанні необхідних практичних навичок класифікації та аналізу плоских важільних механізмів.

Виконання практичних завдань, пов'язаних з визначенням ступеню рухомості механізмів, побудові планів положень, швидкостей, прискорень, епюр поздовжньої та поперечної сил, дотичних напружень, розтягуючого, крутного та згинального моментів сприятиме закріпленню, поглибленню та узагальненню теоретичних основ курсу, а також сприятиме розвитку навичок самостійної творчої роботи студентів у процесі їх навчання, зокрема при виконанні лабораторних та контрольних робіт з дисципліни «Деталі та вузли приладів».

Методичні вказівки містять стислі теоретичні відомості, необхідні для виконання конкретних практичних завдань, приклади їх визначення за наведеними методиками, завдання для самостійної роботи студентів.

## Практична робота №1

### Структурний аналіз плоских механізмів

**Мета роботи:** ознайомитися зі структурою механізмів, навчитися визначати ступінь рухомості механізмів.

#### Теоретичні відомості

##### *Структура механізмів*

**Механізм** – система рухомо з'єднаних між собою твердих тіл, призначена для перетворення незалежних рухів одного або декількох з них в необхідний рух інших тіл.

Якщо в перетворенні руху беруть участь рідини або газу, то такі механізми називаються відповідно гідравлічними і пневматичними.

Тверді тіла, з яких складаються механізми, називають ланками. Ланки бувають вхідні та вихідні, ведучі та ведені.

**Ведуча ланка** – ланка, якій повідомляється незалежний рух.

**Ведена ланка** – ланка, яка створює необхідний рух. На ведені ланки діють корисні сили опору.

**Стійка** – нерухома ланка, щодо якої розглядається рух інших ланок.

**Кінематична пара** – рухоме з'єднання двох дотичних одна з одною ланок. Кінематичні пари обмежують рухливість ланок або накладають умови зв'язку.

Класифікація кінематичних пар:

а) за кількістю умов зв'язку;

- б) за характером дотику елементів;
- в) за характером відносного руху ланок.

Сукупність поверхонь, ліній і точок ланки, по яким вона може доторкатися до іншої ланки, утворюючи кінематичну пару, називається **елементом**.

**Механічним зв'язком** називають обмеження, що накладаються на координати і швидкості механічної системи, а також повинні виконуватися при будь-якому її русі.

За кількістю умов зв'язку кінематичні пари ділять на 5 класів в залежності від умов зв'язку. Нехай число ступенів свободи – **P**, а число умов зв'язку – **S**, тоді

$$P=6- S.$$

За характером дотику елементів кінематичні пари ділять на:

- а) по лінії або в точці – **вищі кінематичні пари**;
- б) по поверхні – **нижчі кінематичні пари**.

За характером відносного руху механізми поділяються на: плоскі і просторові.

**Кінематичні ланцюги** – це сукупність ланок, пов'язаних між собою кінематичними парами.

**Прості кінематичні ланцюги** – ланцюги, в яких кожна ланка входить не більше ніж в 2 кінематичні пари.

**Складні кінематичні ланцюги** – ланцюги, в яких хоча б одна ланка входить в 3 і більше кінематичні пари.

**Розірвані кінематичні ланцюги** – це ланцюги, в яких хоча б одна ланка входить тільки в одну кінематичну пару.

**Замкнені кінематичні ланцюги** – це ланцюги, в яких кожна ланка входить в дві і більше кінематичні пари.

Отже, **механізм** – це кінематичний ланцюг, мінімум одна ланка якого являється стійкою і в якому при заданому русі однієї або декількох ланок всі інші роблять однозначно визначений рух.

### *Класифікація ланок*

Усі ланки можна умовно розділити на п'ять основних груп:

**Кривошип** – ланка, яка робить обертальний рух щодо стійки на повний оборот.

**Шатун** – ланка, яка робить складний плоско-поступальний рух, а також не пов'язана ні однією кінематичною парою зі стійкою.

**Коромисло** – ланка, яка робить обертальний рух щодо стійки на кут менший  $360^\circ$ .

**Повзун** – ланка, яка робить зворотно-поступальний рух щодо стійки.

**Куліса** – ланка, яка є направляючою для інших ланок.

### *Ступінь рухомості механізму*

**Ступінь рухомості** – це параметр, який показує скільком ланкам потрібно задати рух, щоб інші ланки здійснювали цілком визначені рухи, інакше кажучи скільки узагальнених координат має механізм.

Позначимо ступінь рухомості через **W** (**S** – число умов зв'язку (клас механізму), **P** – число ступенів свободи). Нехай у механізмі є **n** рухомих ланок, об'єднаних кінематичними парами. Кожна кінематична пара обмежує число ступенів свободи механізму. Якщо необхідно визначити число ступенів свободи кінематичного ланцюга, то від загального числа ступенів

свободи ланок необхідно відняти число умов зв'язку, що накладаються на рух ланок утвореними кінематичними парами.

Клас кінематичної пари відповідає числу умов зв'язку  $S$ . Нехай в кінематичного ланцюга є  $P_1$  пар першого класу,  $P_2$  пар другого класу і так далі. Тоді для загального випадку маємо:

$$W=6*n-P_1-2*P_2-3*P_3-4*P_4-5*P_5.$$

Якщо механізм плоский, то в ньому можуть бути тільки кінематичні пари четвертого і п'ятого класу, а кожна ланка має всього 3 ступеня свободи. Тоді

$$W=3*n-2*P_5-P_4,$$

або інакше: кожна ланка, що не входить у кінематичну пару, у площині має 3 ступеня свободи – обертання навколо осі  $X$  і поступальні рухи уздовж осей  $Y$  і  $Z$ .

Тоді число ступенів свободи рухомих ланок буде

$$(6-3)*n=3*n.$$

Пари п'ятого класу накладають число зв'язків  $(5-3)*P_5=2*P_5$  і так далі. Тоді

$$W=(6-3)*n-(5-3)*P_5-(4-3)*P_4-(3-3)*P_3,$$

$$W=3*n-2*P_5-P_4 \text{ – формула Чебишева.}$$

### **Приклад 1.**

Виконати структурний аналіз кривошипно-повзунного механізму (рис. 1).

**Розв'язання:** Визначимо тип ланок, які входять у механізм, та кількість рухомих ланок. Механізм складається з чотирьох наступних ланок:

0 – стійка;

1 – кривошип;



2 – шатун;

3 – повзун.

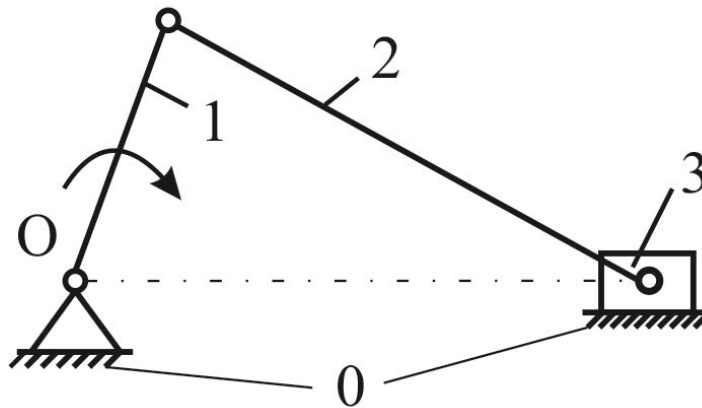


Рисунок 1 – Кривошипно-повзунний механізм

Кількість рухомих ланок  $n=3$ .

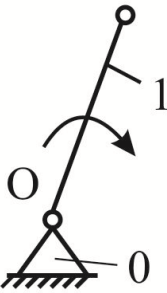
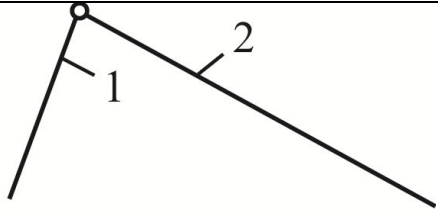
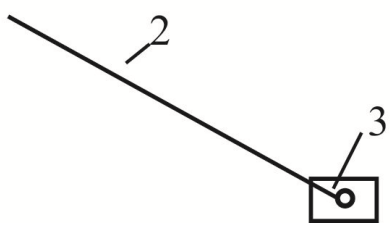
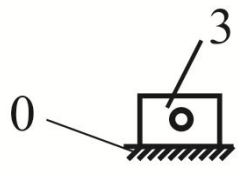
Схема кривошипно-повзунного механізму представляє собою замкнутий кінематичний ланцюг, отже, даний механізм є плоским механізмом. У цьому випадку для визначення ступеню рухомості механізму необхідно знайти коефіцієнти  $P_5$  та  $P_4$ . Для цього занесемо необхідні дані у табл. 1.

З табл. 1 можна зробити висновок, що  $P_4=0$ , а  $P_5=4$ . Оскільки механізм плоский, для визначення ступеню рухомості механізму можна скористатися формулою Чебишева:

$$W=3*n-2*P_5-P_4=3*3-2*4-0=9-8=1.$$

Отже, щоб ланки механізму виконували визначені рухи, одній ланці треба задати певний рух, тобто механізм має одну узагальнену координату.

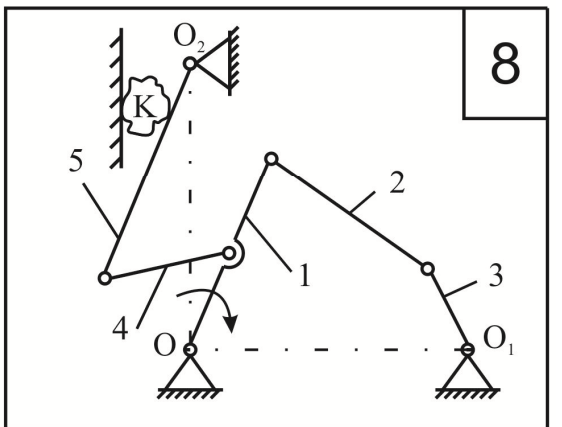
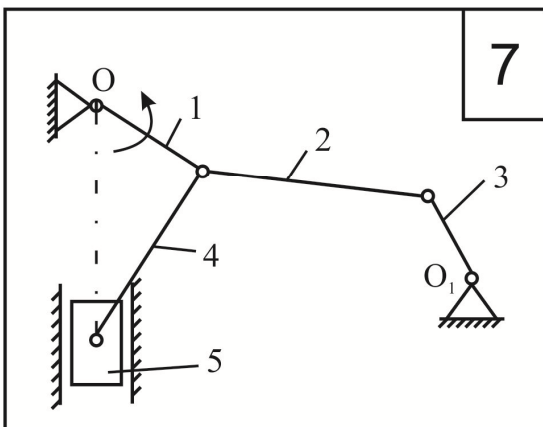
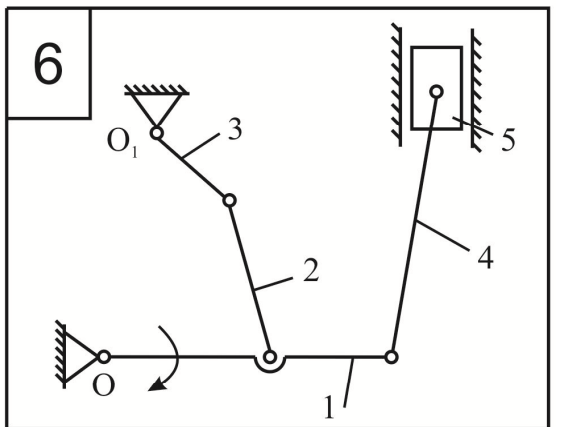
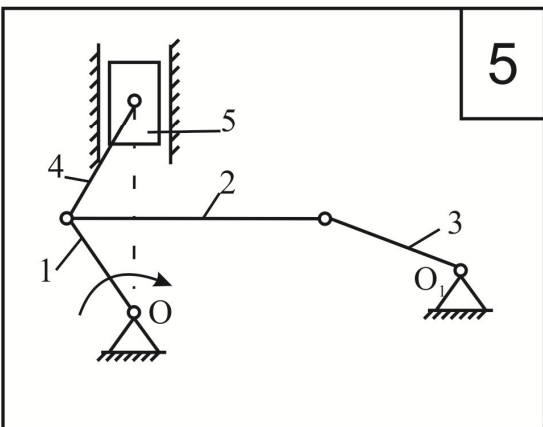
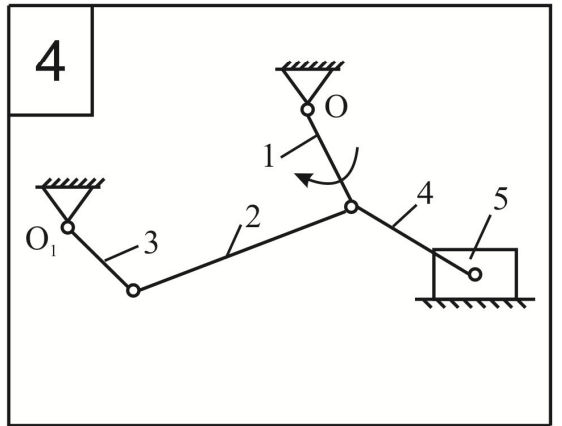
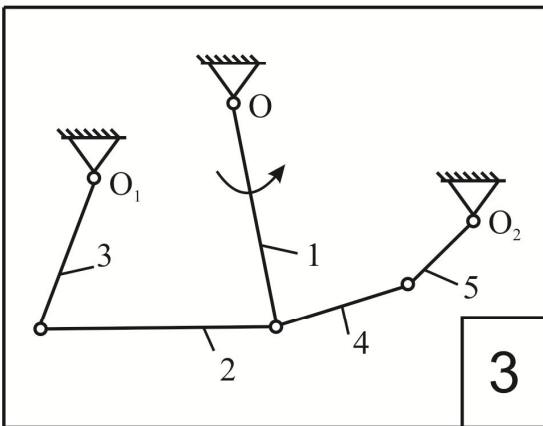
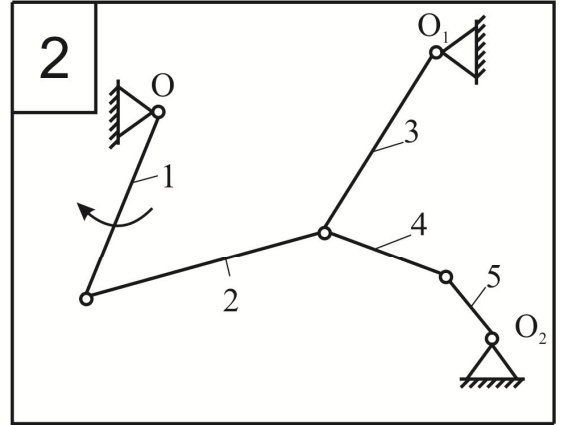
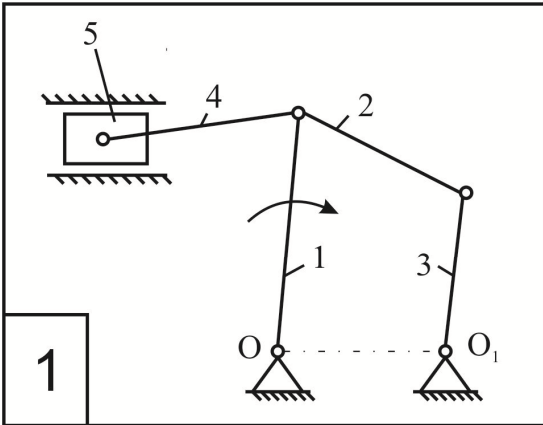
Таблиця 1 – Структурний аналіз механізму

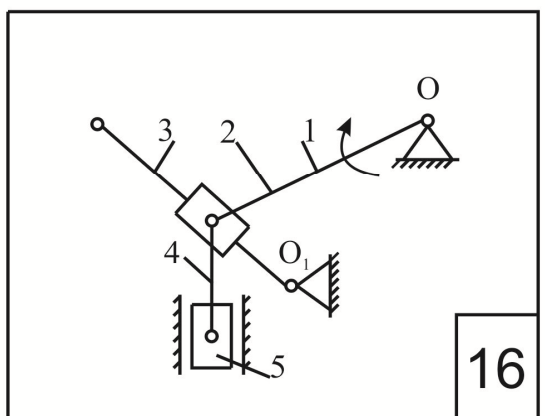
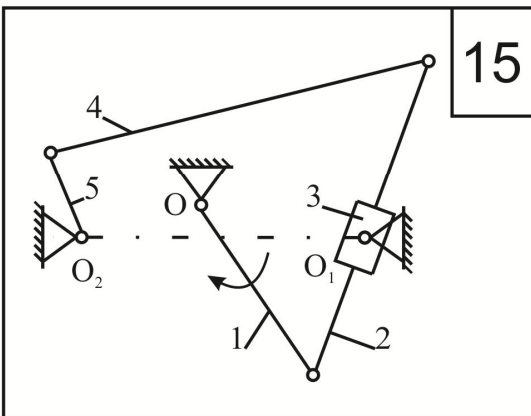
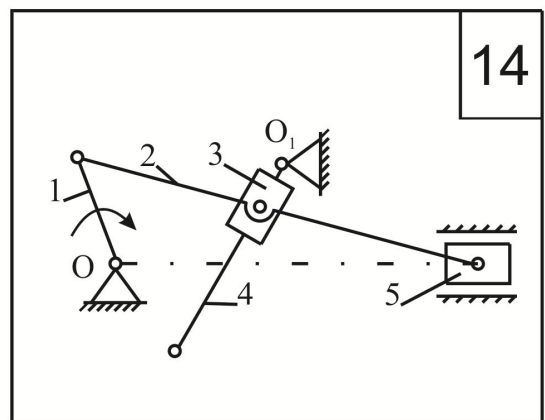
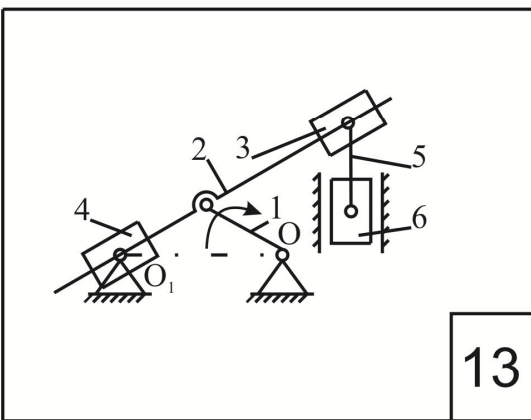
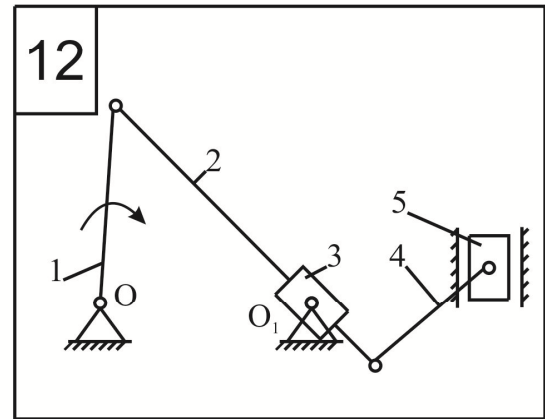
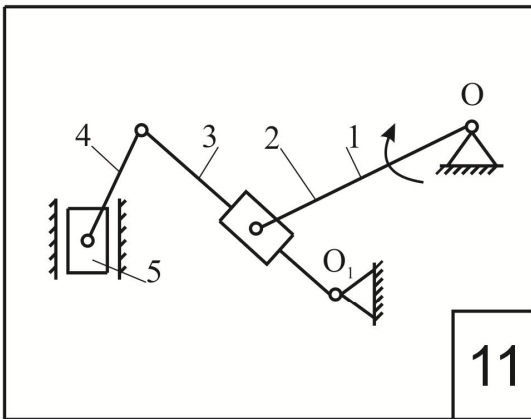
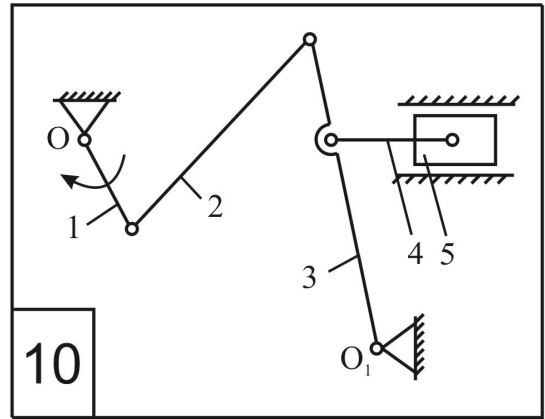
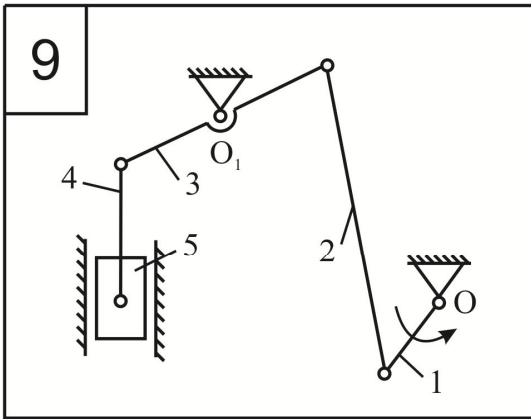
№ кінематичної пари	Номер пари/ тип руху	Схема	Клас/ рухомість	Вид контакту
1	0-1		5/1	Поверхня (нижча пара)
2	1-2		5/1	Поверхня (нижча пара)
3	2-3		5/1	Поверхня (нижча пара)
4	3-0		5/1	Поверхня (нижча пара)

**Відповідь:**  $W=1$ , результат структурного аналізу наведено в табл. 1.

**Завдання для самостійної роботи.**

Провести структурний аналіз та визначити ступінь рухомості наступних механізмів:





## Практична робота №2

### План положень

**Мета роботи:** навчитися будувати план положень механізму.

### Теоретичні відомості

#### *Побудова плану положень*

Схематичне зображення ланок механізму в певному масштабі без урахування конструктивних форм ланок і кінематичних пар, називається **планом положень** механізму.

Визначення положень ланок і траєкторій руху точок ведеться на кінематичній схемі механізму, яка відображає тільки ті розміри, які визначають відносні положення кінематичних пар.

При кресленні кінематичної схеми механізму необхідно вибрати масштабний коефіцієнт довжин ланок, який позначається літерою  $\mu_l$

$$\mu_l = \frac{l_{AB}}{AB} \left[ \frac{\text{м}}{\text{мм}} \right], \quad (1)$$

де  $l_{AB}$  – задана довжина ланки, м;  $AB$  – довжина ланки, відкладена на кресленні.

При кресленні плану положень механізму необхідно в першу чергу нанести положення нерухомих центрів обертальних пар і нерухомих направляючих для поступальних пар. Потім для вибраного положення вхідної ланки послідовно визначаються положення кінематичних пар і ланок, приєднаних до вхідної ланки.

### Приклад.

Для заданого на рис. 2 механізму побудувати план положень.

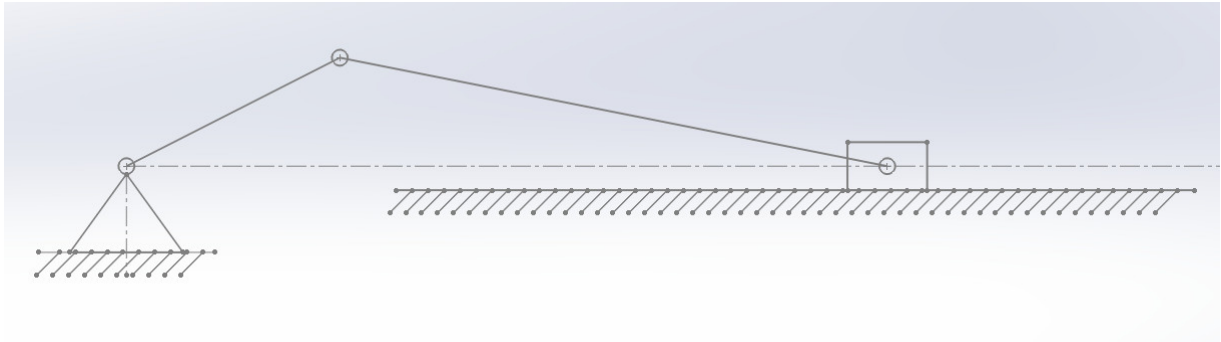


Рисунок 2 – Кривошипно-повзунний механізм

Розглянемо приклад побудови плану положень кривошипно-повзункового механізму, структурна схема якого складається з кривошипа, шатуна і повзуна:

- 1) Приймаємо масштабний коефіцієнт довжин ланок за відношенням (1).
- 2) Вибираємо на полі аркуша паперу положення нерухомого центру обертання кривошипа і направляючу для повзуна.
- 3) Будуємо траєкторію руху центра шарніра обертальної кінематичної пари, окреслив із центру обертання кривошипа коло (рис. 3).
- 4) За початок відліку положень необхідно прийняти одне із крайніх положень вихідної ланки (повзуна). Найчастіше крайні положення відповідають випадкам, коли кривошип і рухома ланка, з якою він безпосередньо з'єднаний, вишиковуються у одну лінію: у одному випадку їх довжини підсумовуються, а в іншому – віднімаються.
- 5) Виконуємо розмітку положень вхідної ланки (кривошипа), починаючи від крайнього положення за напрямком обертання, розбивши траєк-

торію рухомого шарніра кривошипа на декілька рівних частин, наприклад, на 12 (через кожні  $30^\circ$ , рис. 4).

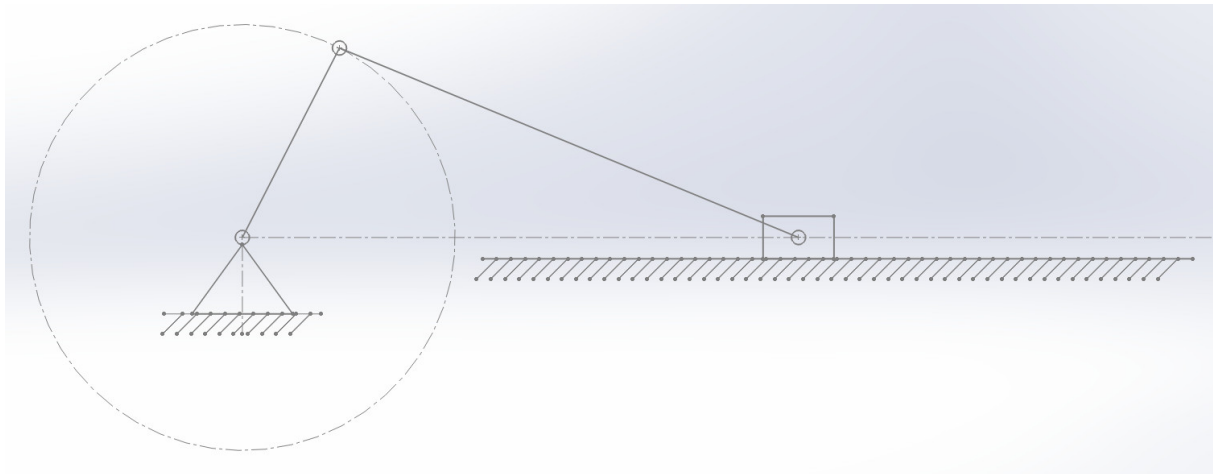


Рисунок 3 – Кривошипно-повзунний механізм з траєкторією руху шарніра кривошипа

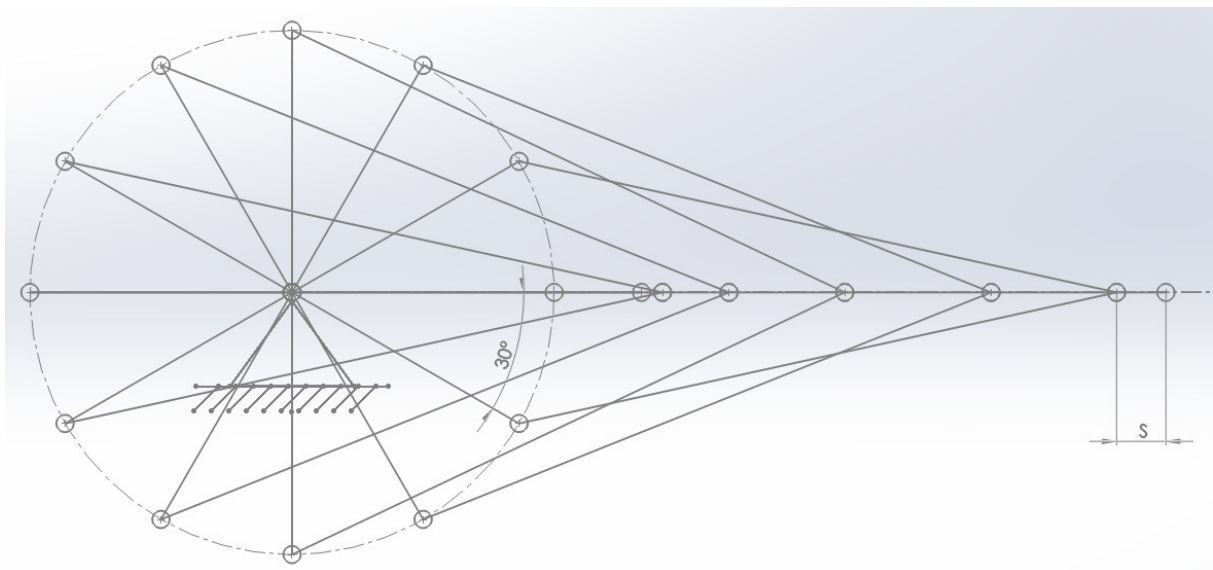


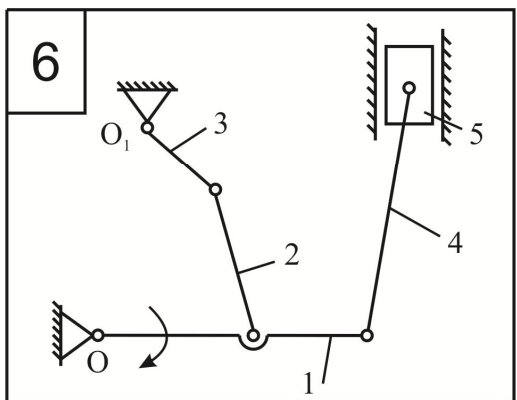
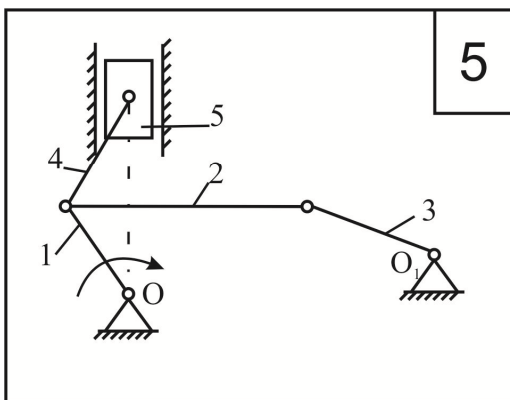
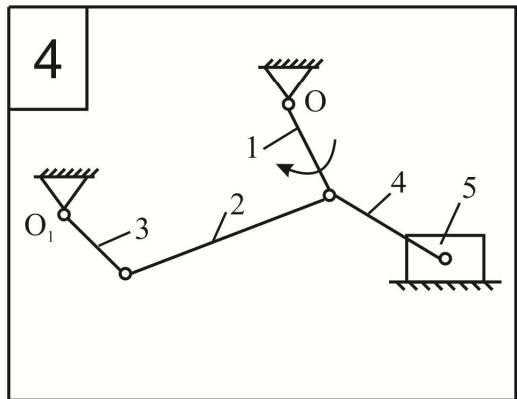
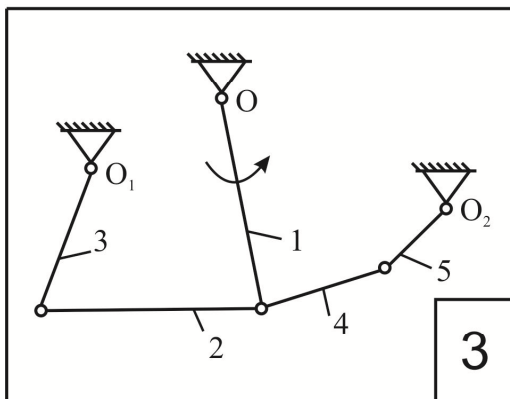
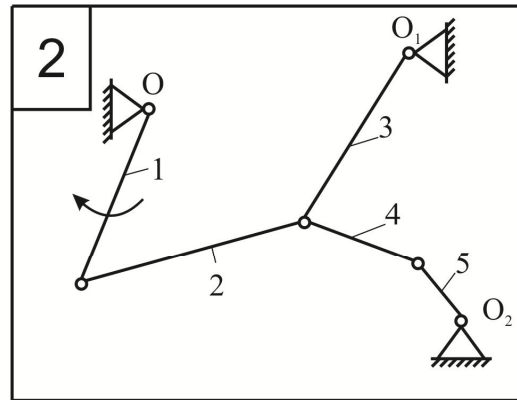
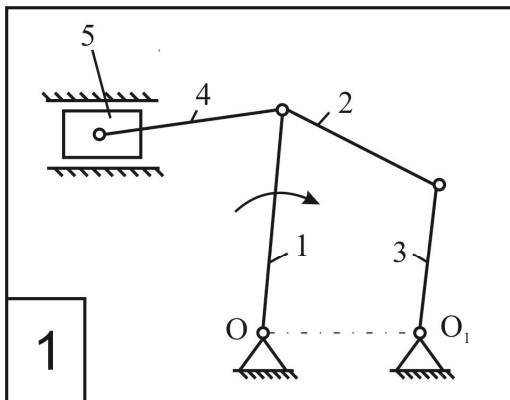
Рисунок 4 – План положень

б) За допомогою циркуля, знаючи довжину всіх ланок механізму, знаходимо відповідні положення їх шарнірів і шарніра вихідної ланки.

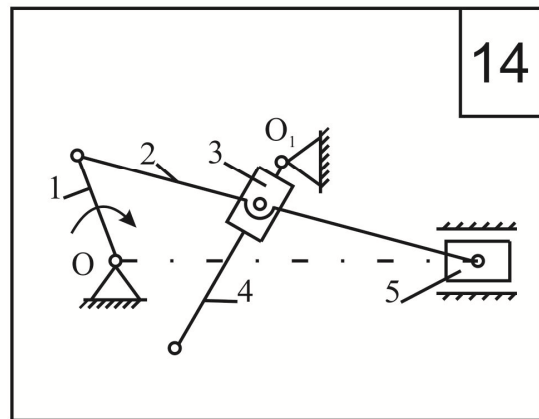
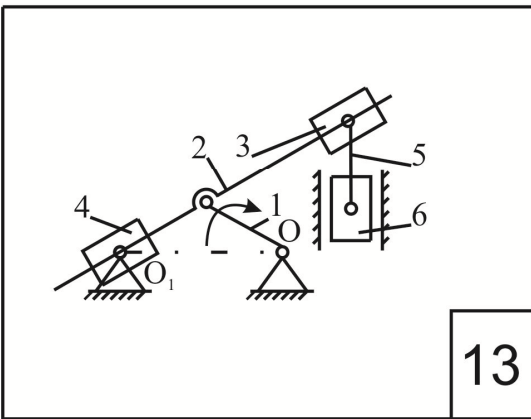
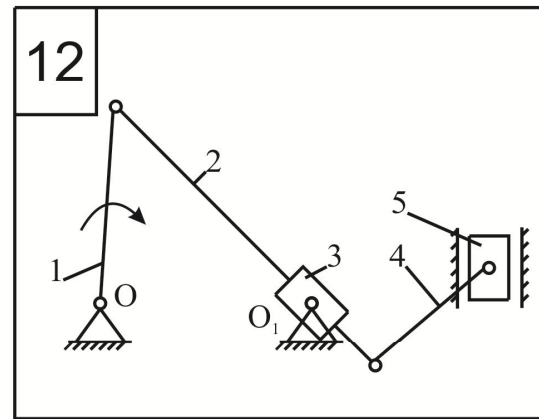
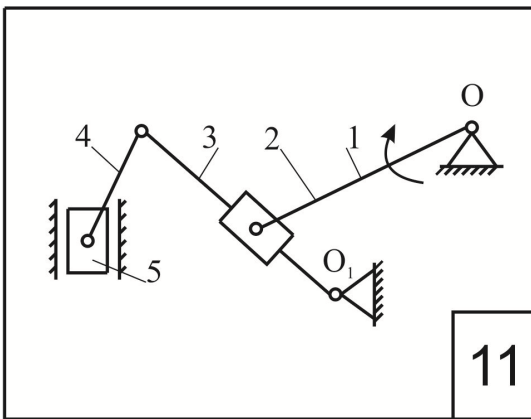
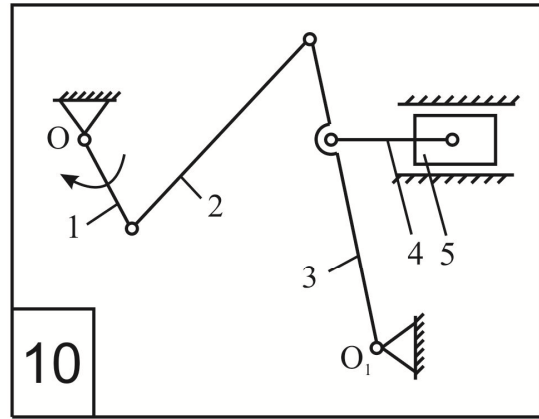
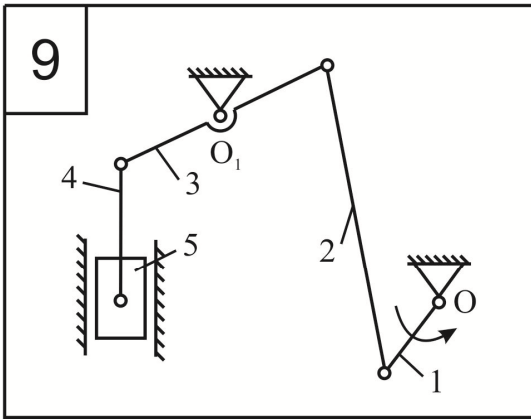
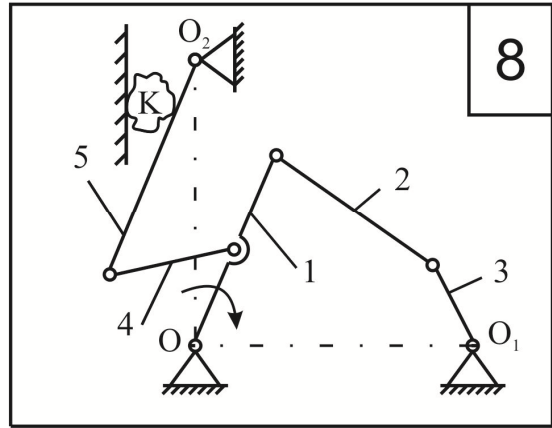
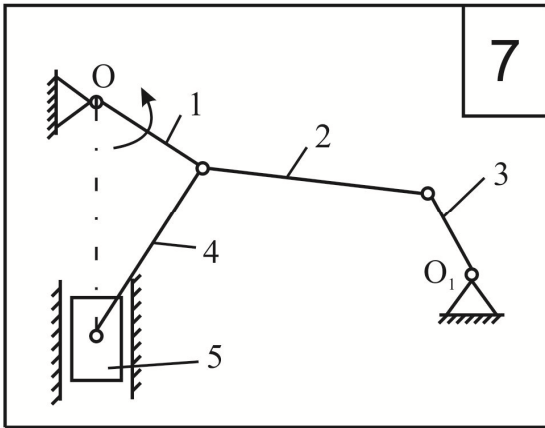
7) Маючи відповідні положення шарніра вихідної ланки (повзуна), від початкового крайнього положення, яке приймається за нуль, будемо графік його переміщень за цикл. Величина переміщень  $S_i$  для кожного положення шарніра вихідної ланки визначається від крайнього.

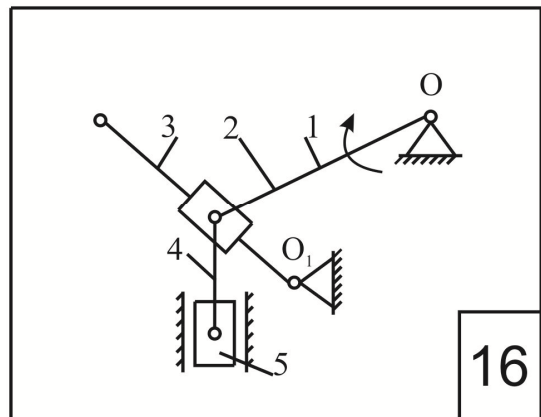
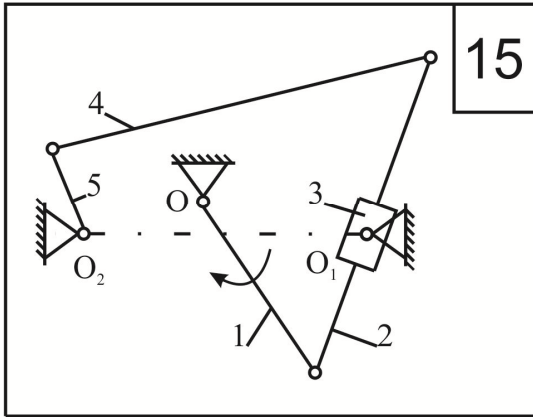
**Завдання для самостійної роботи.**

Побудувати плани положень наступних механізмів:









## Практична робота №3

### План швидкостей

**Мета роботи:** навчитися будувати план швидкостей механізму.

### Теоретичні відомості

#### *Складний плоский рух*

Під складним плоским розуміється такий рух, за якого будь-яка пряма, будучи проведеною в рухомому тілі, не залишається собі паралельною, а всі точки тіла при цьому описують різні за видом траєкторії, які розміщені в одній чи деяких, але паралельних, площинах.

Складний плоский рух твердого тіла визначається рухом відрізка прямої, яка з'єднує дві довільні точки цього тіла, які рухаються в одній площині.

Миттєвий абсолютний плоский рух вільного твердого тіла в загальному випадку (рис. 5) складається з двох рухів: поступального руху разом з довільною точкою  $A$  цього тіла, названою полюсом, і обертального руху навколо осі, яка проходить через цю точку  $A$  (саме так можна розглядати переміщення тіла на площині від положення  $A_0B_0$  через проміжне положення  $AB'$  у положення  $AB$ ).

Якщо в механізмі нерухому систему координат зв'язати зі стійкою, а рухому – з полюсом ланки, то поступальний рух буде переносним рухом, а обертальний – відносним рухом. Рух же ланки відносно нерухомої системи координат називається абсолютним рухом.

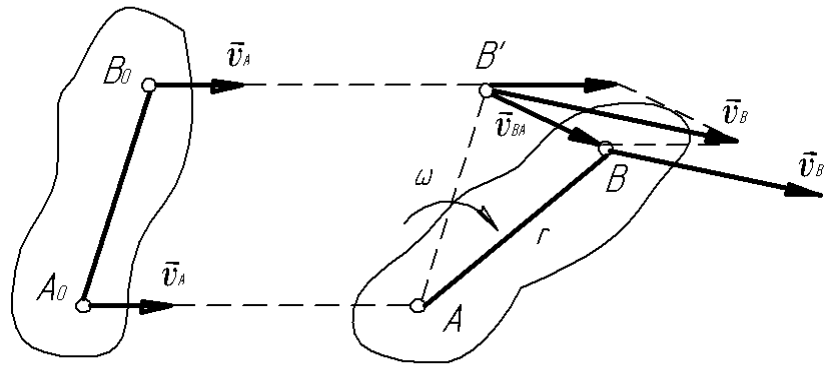


Рисунок 5 – Розкладення складного руху тіла

Розглянутий метод розкладання складного плоского руху в реальних механізмах застосовується до шатунів (рис. 6).

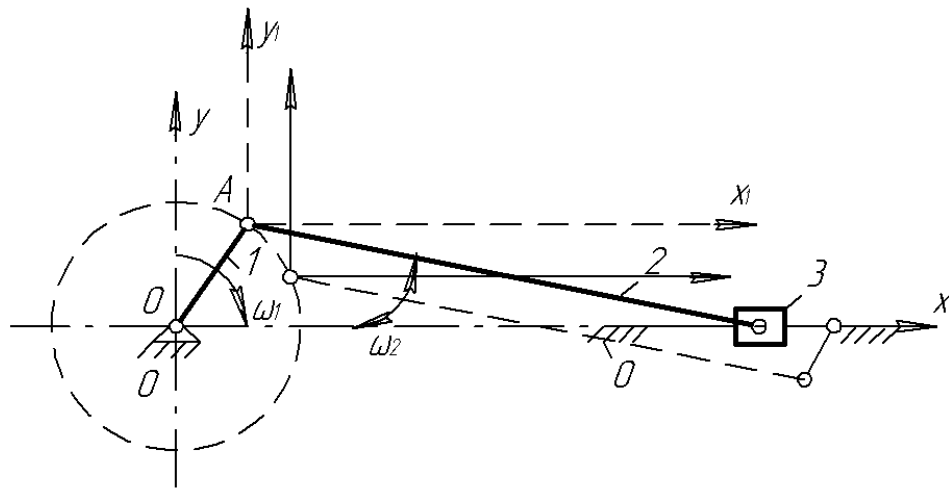


Рисунок 6 – Розкладання складного руху шатуна

Наприклад, точки шатуна кривошипно-повзункового механізму роблять складний рух по відношенню до стійки  $O$ . Але коли розглянути рух точок шатуна по відношенню до системи відліку, яка рухається поступально з шарніром кривошипа  $A$ , то це буде просте обертання їх відносно шарніра, у свою чергу, рух системи координат, скріпленої з шарніром також простий – це поступальний круговий рух.

Так складний рух шатуна можна розглядати як складений з двох простих рухів: обертального навколо шарніра кривошипа і поступального кругового (колового) руху системи координат, зв'язаної з шарніром.

Користуючись поняттями абсолютного, переносного і відносного руху, розглянемо наступні величини.

Абсолютна швидкість  $\vec{v}_a$  будь-якої точки ланки, яка робить складний плоский рух, дорівнює геометричній сумі переносної  $\vec{v}_e$  і відносної  $\vec{v}_r$  швидкостей:

$$\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r.$$

Стосовно точки  $B$  ланки 2, це векторне рівняння можна записати у наступному вигляді

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA},$$

де  $\vec{v}_B$  – швидкість точки  $B$  у абсолютному русі ланки;  $\vec{v}_A$  – швидкість точки  $B$  у переносному русі ланки, яка дорівнює абсолютній швидкості точки  $A$ ;  $\vec{v}_{BA}$  – швидкість точки  $B$  у відносному (обертальному) русі ланки відносно осі, яка проходить через точку  $A$  (поліус).

Крім шатуна складний плоский рух у механізмах провадять також кулісні камені, тобто повзуни, які переміщуються в рухомих напрямних (кулісах) (рис. 7).

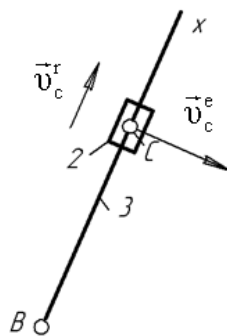


Рисунок 7 – Розкладання складного руху каменя на прості рухи

У цьому випадку складний плоский рух каменя 2 розкладається на переносний обертальний разом з кулісою  $Bx$  і відносний – поступальний по відношенню до куліси:

$$\vec{v}_{C_2} = \vec{v}_{C_3} + \vec{v}_{C_2C_3},$$

де  $\vec{v}_{C_2}$  – швидкість точки  $C$  каменя в абсолютному русі;  $\vec{v}_{C_3}$  – швидкість точки  $C$  каменя в переносному русі, що означає – абсолютна швидкість тієї точки куліси 3, яка в цю мить співпадає з точкою  $C$  каменя 2;  $\vec{v}_{C_2C_3}$  – швидкість точки  $C$  каменя в поступальному русі по кулісі, або швидкість відносного руху точки  $C$  каменя 2 відносно точки  $C$  куліси 3.

### *Побудова плану швидкостей*

Визначення лінійних швидкостей точок і кутових швидкостей ланок методом планів швидкостей застосовується для плоских механізмів. Планом швидкостей називається векторне зображення швидкостей характерних точок ланок механізму для заданого його положення.

### **Приклад.**

Відомо:  $l_{OA}$ ;  $l_{AB}$ ;  $l_{BC}$ ;  $l_{AC}$ ;  $\omega_1 = \text{const}$ . Необхідно визначити швидкість характерних точок ланок і кутову  $\omega_2$  швидкість ланки 2 (рис. 8).

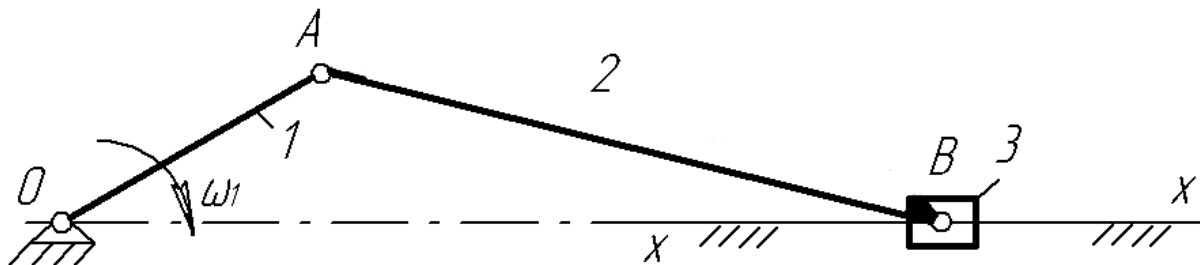


Рисунок 8 – Кривошипно-повзунний механізм

1) Побудову плану швидкостей починаємо з визначення швидкості точки  $A$ . Кривошип  $A$  обертається навколо нерухомої осі, яка проходить через точку  $O$ , через це швидкість точки  $A$  чисельно дорівнює:

$$v_A = \omega_1 l_{OA} \text{ [м/с]}.$$

Направлена швидкість точки  $A$  перпендикулярно до  $\overline{OA}$  в сторону обертання кривошипу.

Вибираємо положення полюса плану швидкостей – точку  $P_v$  (рис. 9).

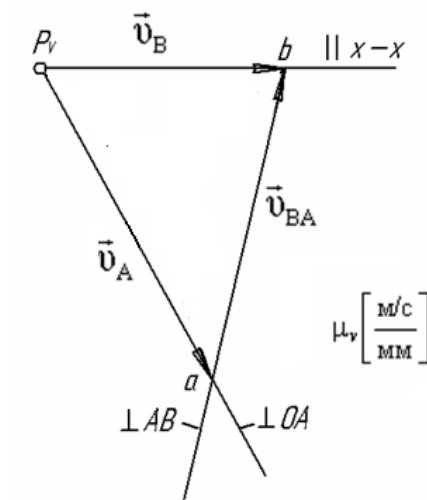


Рисунок 9 – План швидкостей

2) Вибравши відрізок  $(\overline{P_v a})$  (мм), який зображує швидкість точки  $A$ , вирахуємо масштабний коефіцієнт плану швидкостей  $\mu_v$ :

$$\mu_v = \frac{V_A}{(P_v a)} = \frac{\omega_1(OA)\mu_l}{(P_v a)} \left[ \frac{\text{м/с}}{\text{мм}} \right]. \quad (2)$$

Довжину відрізка  $(P_v a)$  вибираємо довільно (в межах 50...100 мм), але таку, щоб  $\mu_v$  одержати у вигляді числа, зручного для рахування (кратне 2, 4, 5).

3) Із полюсу швидкостей  $P_v$  проводимо перпендикулярно  $(\overline{OA})$  в сторону обертання відрізок довжиною  $(P_v a)$ .

4) Визначаємо швидкість точки  $B$ . Для визначення абсолютної швидкості точки  $B$  у відповідності з теоремою 1 розглянемо рух ланки 2 (шатуна) як суму поступального переносного руху разом з полюсом (за полюс приймаємо точку, параметри руху якої відомі) – точкою  $A$  і відносного обертального навколо осі, яка проходить через полюс  $A$ .

Векторне рівняння, яке визначає абсолютну швидкість точки  $B$ , має вигляд:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA}. \quad (3)$$

У цьому рівнянні вектори, які відомі за модулем і напрямком, підкреслені двічі, а вектори, для яких відома тільки лінія дії, підкреслені один раз.

Для графічного розв'язання цього рівняння із точки  $a$  плану швидкостей, яка зображує кінець вектора  $\vec{v}_A$ , проводимо лінію дії вектора швидкості точки  $B$  в обертальному русі ланки 2 навколо полюсу  $A$ , тобто  $v_{BA} \perp \overline{AB}$ , а через полюс  $P_v$  плану – лінію дії  $\vec{v}_B$  паралельно напрямній « $x-x$ » повзуна 3. Річ в тому, що точка  $B$  належить і ланці 3, лінія дії швидкості якої відома і паралельна ( $\parallel$ ) напрямній « $x-x$ ». Точка  $b$  перетину цих ліній дії визначає відрізок  $(\overline{P_v b})$ , відображуючий вектор  $\vec{v}_B$ ; згідно з векторним рівнянням напрям цього вектора від точки  $a$  до точки  $b$ .

Векторний трикутник  $P_v ab$  – графічне розв'язання початкового рівняння (3); модулі знайдених векторів швидкостей:

$$v_B = (\overline{P_v b})\mu_v; v_{BA} = (\overline{ab})\mu_v.$$



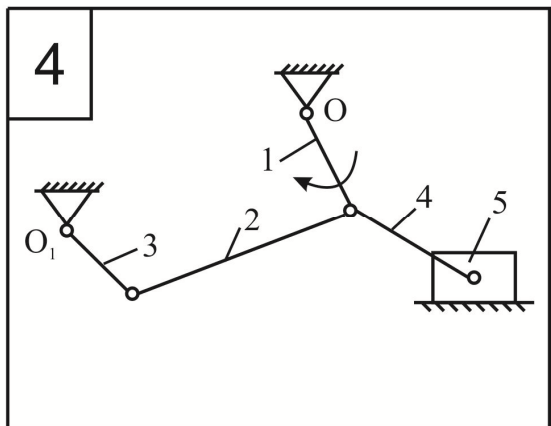
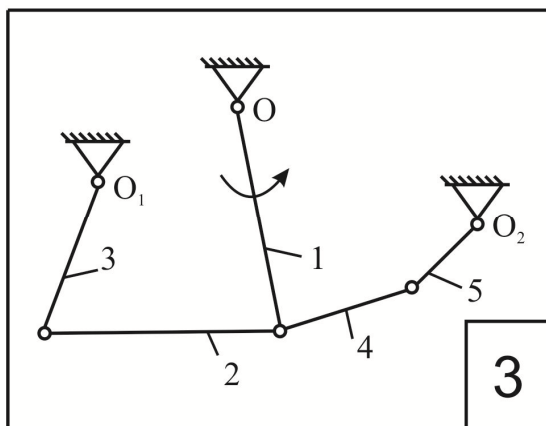
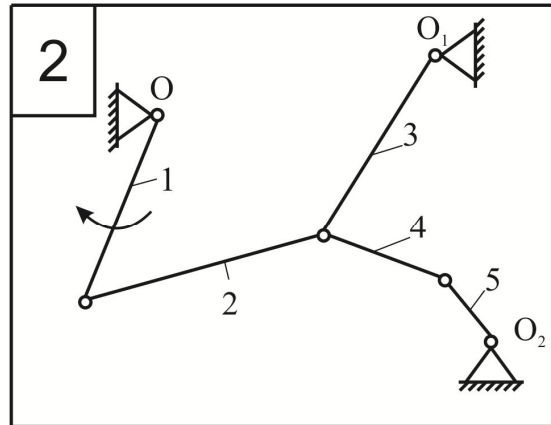
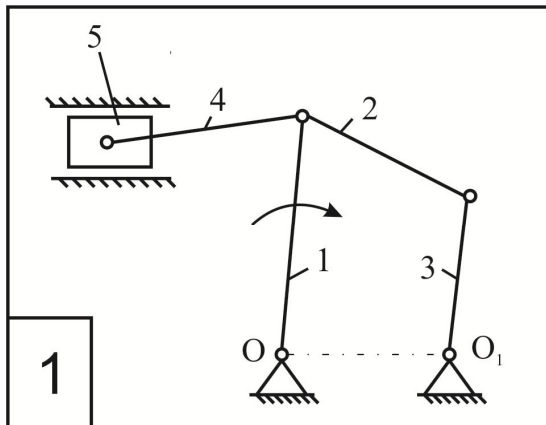
б) Визначаємо кутову швидкість ланки 2 в його русі відносно точки  $A$ :

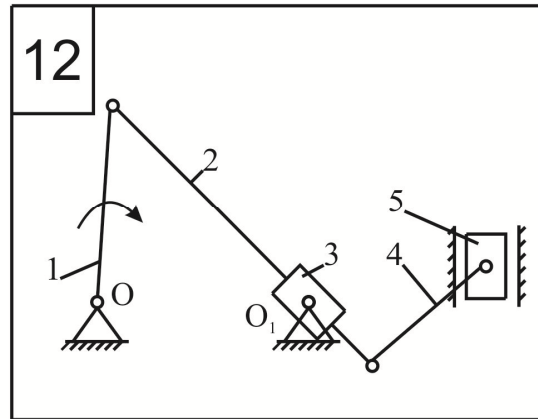
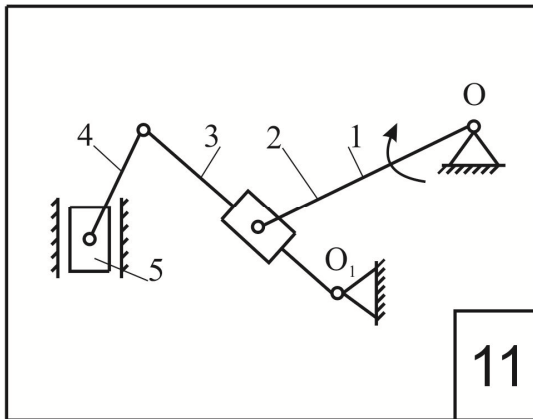
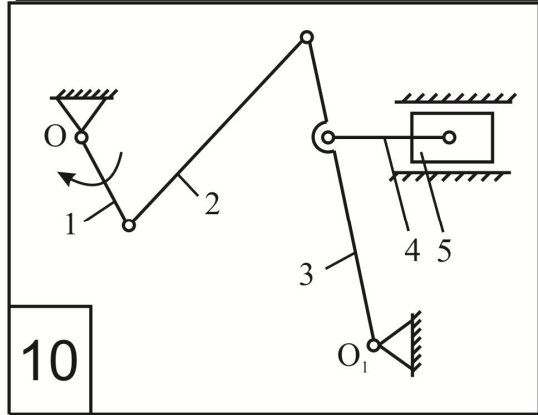
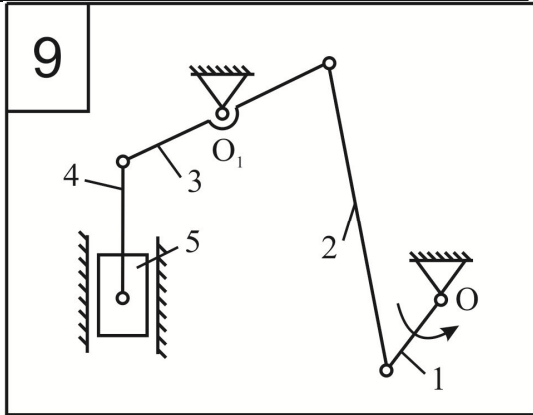
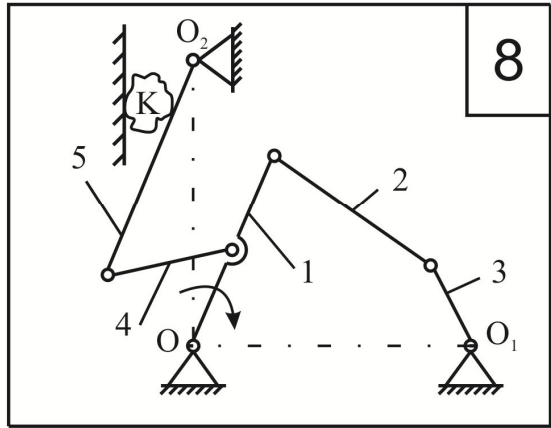
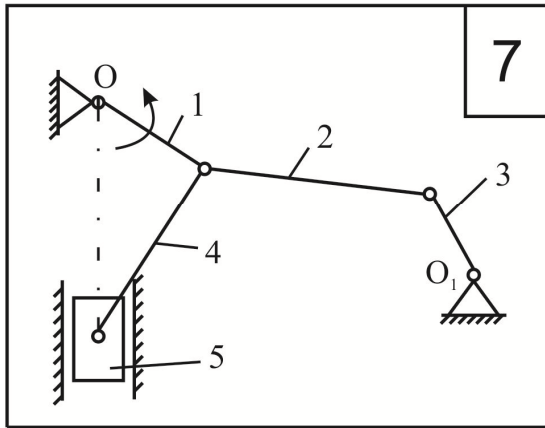
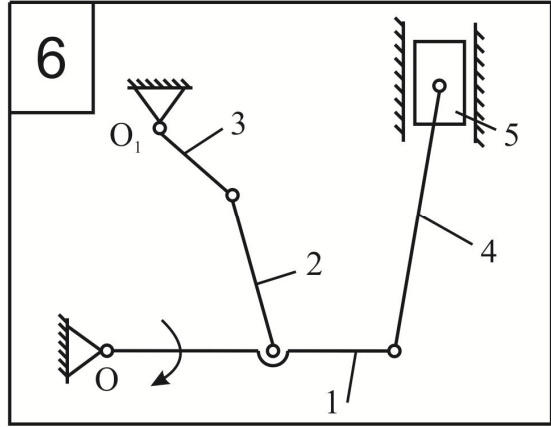
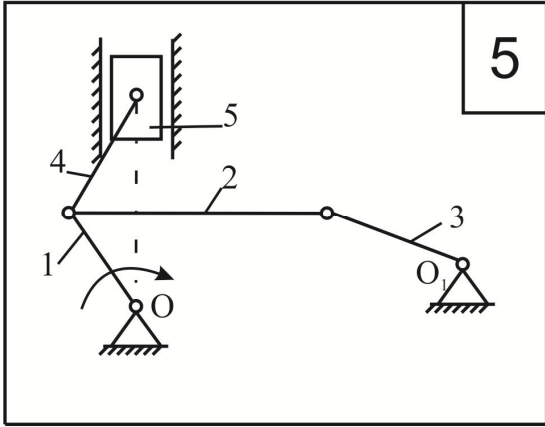
$$\omega_2 = \frac{v_{BA}}{l_{AB}}.$$

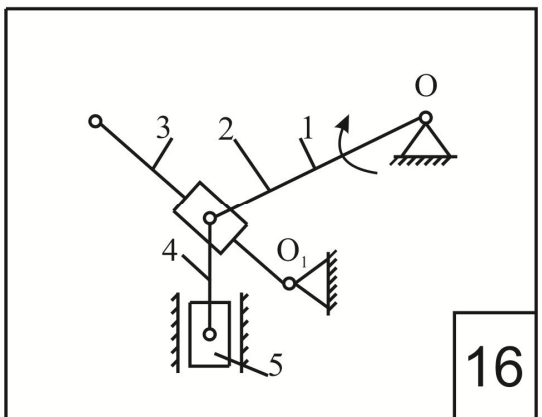
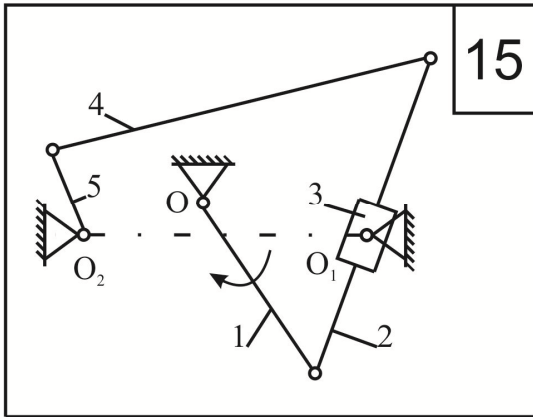
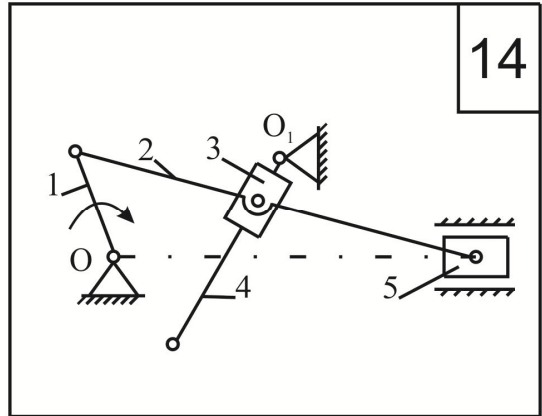
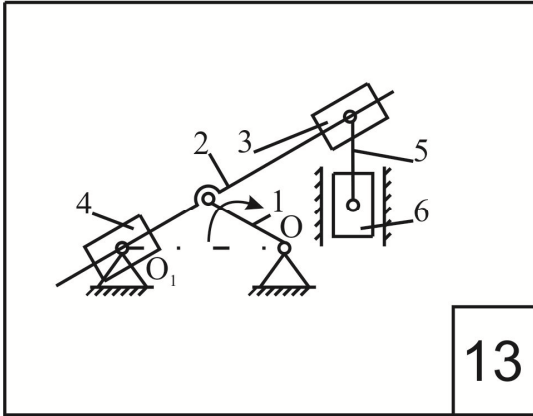
Для визначення напрямку кутової швидкості  $\omega_2$  вектор  $\overline{ab}$  переносимо подумки з плану швидкостей на план механізму в точку  $B$  і бачимо, що ланка 2 обертається відносно точки  $A$  проти годинникової стрілки.

**Завдання для самостійної роботи.**

Побудувати плани швидкостей наступних механізмів:







## Практична робота №4

### План прискорень

**Мета роботи:** навчитися будувати план прискорень механізму.

### Теоретичні відомості

#### *Побудова плану прискорень*

#### **Приклад.**

Відомо:  $l_{OA}$ ;  $l_{AB}$ ;  $l_{BC}$ ;  $l_{AC}$ ;  $\omega_1 = \text{const}$ . Необхідно визначити швидкість характерних точок ланок і кутову  $\omega_2$  швидкість ланки 2 (рис. 8)

Визначити прискорення характерних точок механізму і ланок, якщо відомі швидкості (рис. 10).

1) Механізм розкладається на групу 1-го класу, утворену ланкою 1 і стійкою  $O$ , і групу 2-го класу, утворену ланками 2 і 3.

Отже, відносячи точку  $A$  до ланки 1, знаходимо її прискорення  $\vec{a}_{A_1}$ , яке направлене по  $AO_1$ , а його модуль:

$$a_{A_1} = \omega_1^2 l_{O_1A} = \omega_1^2 (O_1A) \mu_l \left[ \frac{\text{м}}{\text{с}^2} \right]$$

2) Приймаємо масштабний коефіцієнт прискорень  $\mu_a$ .

3) З іншої сторони, для визначення прискорення точки  $A$ , маємо два векторних рівняння:

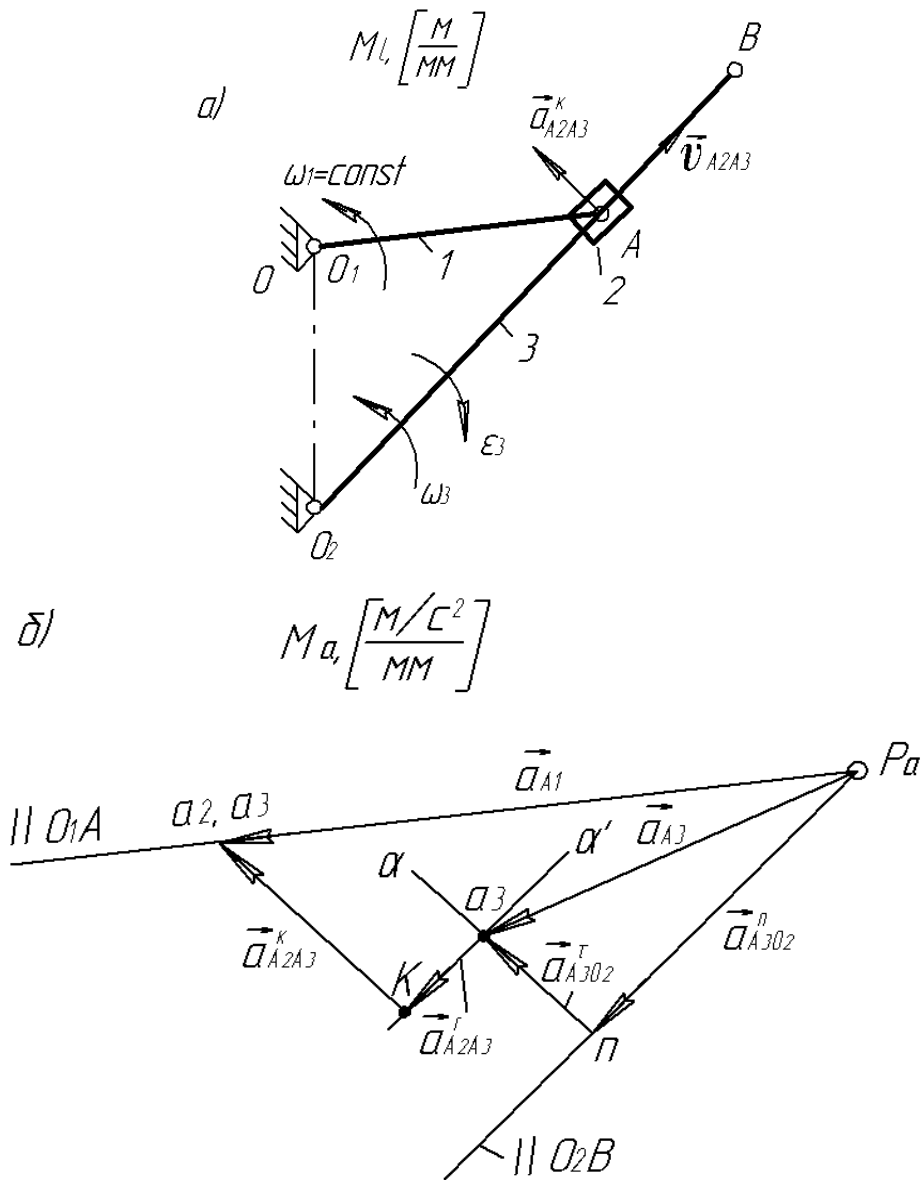


Рисунок 10 – План положення кулісного механізму і відповідний план прискорень

$$\vec{a}_{A_2} = \vec{a}_{A_3} + \vec{a}_{A_2A_3}^K + \vec{a}_{A_2A_3}^r \quad (4)$$

$$\vec{a}_{A_3} = \vec{a}_{O_2} + \vec{a}_{A_3O_2}^n + \vec{a}_{A_3O_2}^r$$

Перше рівняння системи (4) одержали, відносячи точку  $A$  до ланки 2 і розглядаючи її рух складений із рухів: переносного обертального разом із

ланкою 3 ( $\vec{a}_{A_3}$ ) і відносного поступального по відношенню до ланки 3 ( $\vec{a}_{A_2A_3}^r$ ).

Друге рівняння системи (4) одержали відносячи точку  $A$  до ланки 3, у якого  $\vec{a}_{O_2} = 0$ .

Отже маємо

$$\vec{a}_{A_2} = \vec{a}_{A_1} = \vec{a}_{A_3O_2}^n + \vec{a}_{A_3O_2}^r + \vec{a}_{A_3} + \vec{a}_{A_2A_3}^k + \vec{a}_{A_2A_3}^r. \quad (5)$$

У цьому рівнянні  $a_{A_3O_2}^n = \omega_3^2 l_{O_2A} = \omega_3^2 (O_2A)\mu_l$ , а його напрям співпадає з  $\overline{O_2B}$ ; вектор  $\vec{a}_{A_2A_3}^k$  одержав обертання на  $90^\circ$  по відношенню до вектора  $\vec{v}_{A_2A_3}$  в сторону обертання ланки 3, а його модуль  $a_{A_2A_3}^k = 2\omega_3 v_{A_2A_3}$ ; вектор  $\vec{a}_{A_3O_2}^r \perp O_2B$ , а вектор  $\vec{a}_{A_2A_3}^r \parallel O_2B$ , але невідомі за модулем.

Таким чином, із багатокутника прискорень необхідно знайти модулі векторів  $\vec{a}_{A_3O_2}^r$  і  $\vec{a}_{A_2A_3}^r$ .

Із полюсу  $P_a$  (рис.7) відкладаємо вектор  $\overline{P_a a_1} = \vec{a}_{A_1}$ , потім із того ж полюсу відкладаємо вектор  $\overline{P_a n} = \vec{a}_{A_3O_2}^n$  і через точку  $n$  проводимо пряму  $na \perp O_2B$ , вздовж якої буде направлений вектор  $\vec{a}_{A_3O_2}^r$ . Оскільки модуль цього вектора, а отже, і кінець  $a_3$ , відображуючий його, невідомий, то наступне додатне  $\vec{a}_{A_2A_3}^r$  обходимо і до кінця вектора  $(\overline{P_a a_1})$  добудовуємо вектор  $\overline{ka_1} = \vec{a}_{A_2A_3}^k$ . Тепер із початку «к» цього вектора проводимо лінію  $ka' \parallel O_2B$ , тобто  $\parallel \vec{a}_{A_2A_3}^r$ . Точка перетину  $a_3$  прямих  $na$  і  $ka'$  є кінцем вектора  $\overline{na_3} = \vec{a}_{A_3O_2}^r$  і початком вектора  $\overline{a_3k} = \vec{a}_{A_2A_3}^r$ . При цьому  $a_{A_3O_2}^r = (na_3)\mu_a$ ;  $a_{A_2A_3}^r = (a_3k)\mu_a$ ;  $a_{A_3} = (P_a a_3)\mu_a$ .

Кутове прискорення куліси 3 знайдемо за формулою:

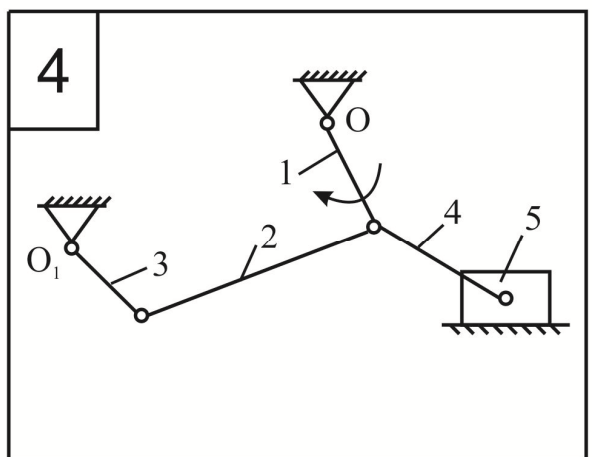
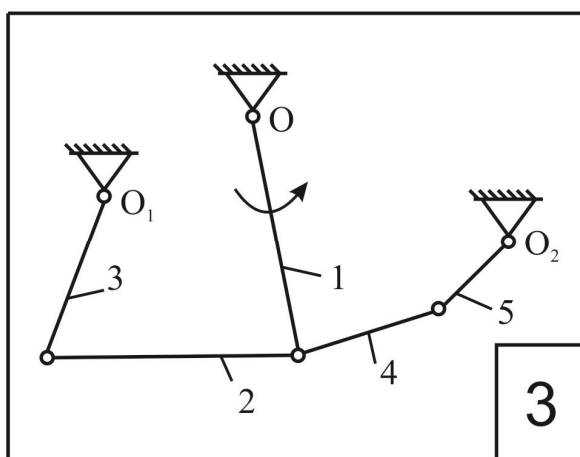
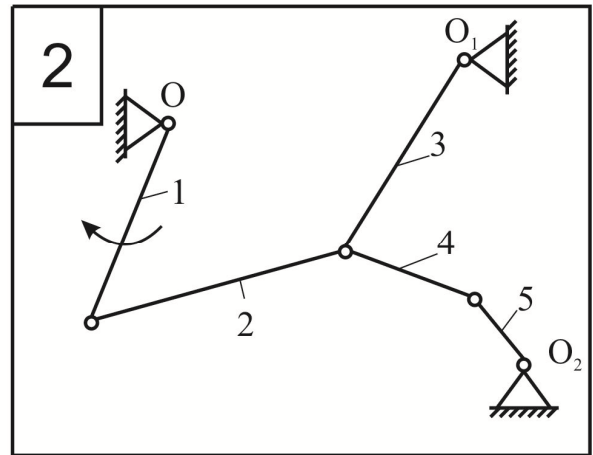
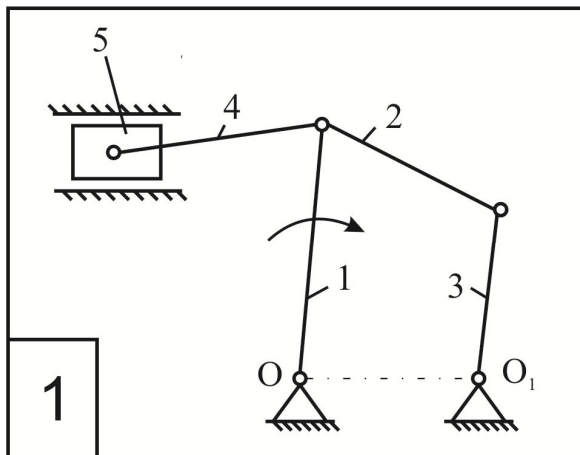
$$\varepsilon_3 = \frac{a_{A_3O_2}^r}{l_{O_2A}} = \frac{(na_3)\mu_a}{(O_2A)\mu_l}$$

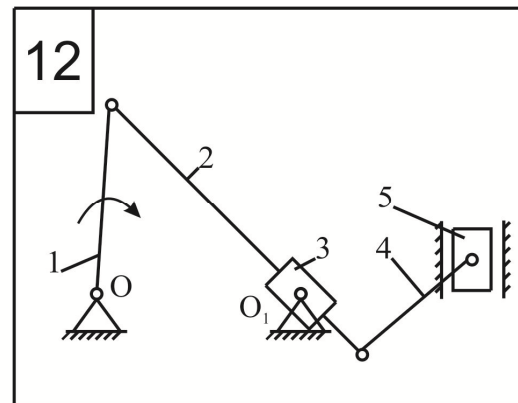
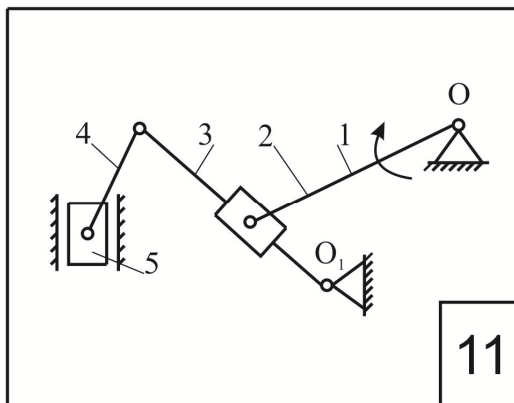
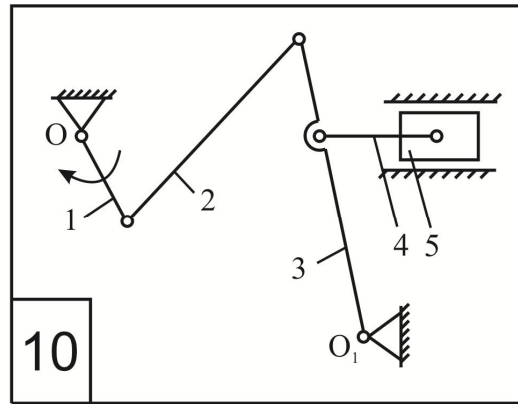
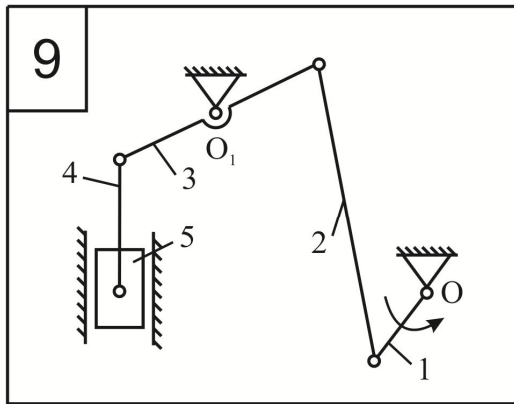
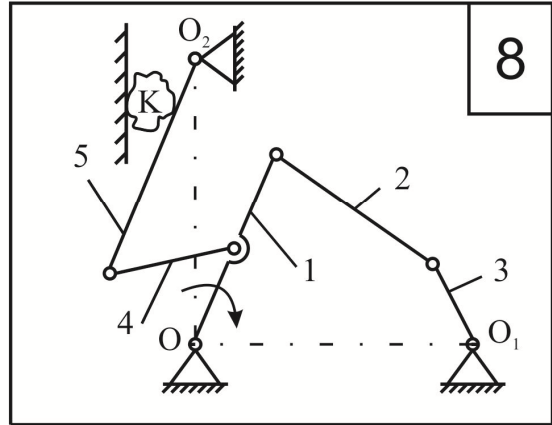
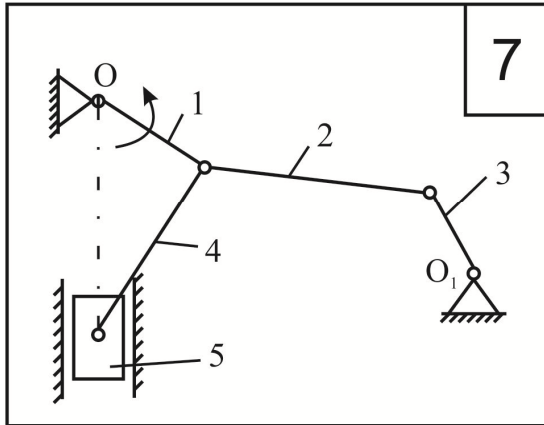
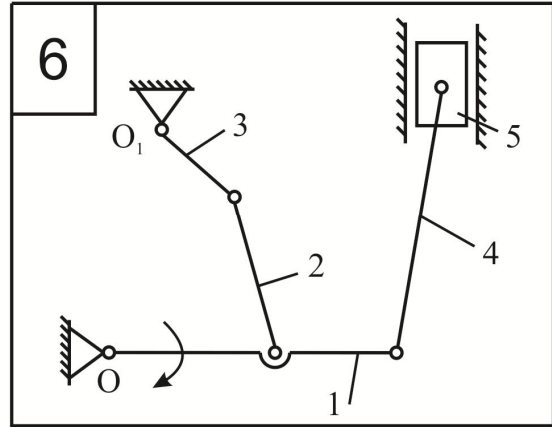
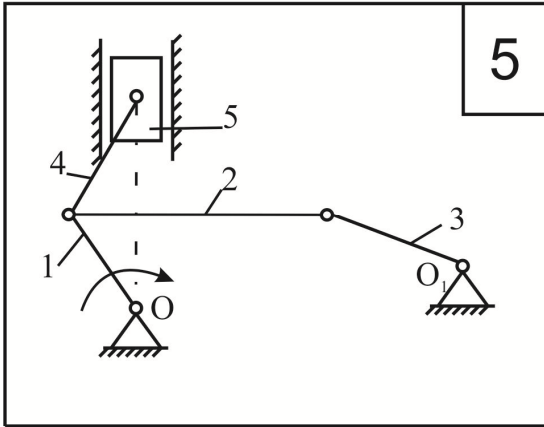
Напрямок прискорення  $\varepsilon_3$ , визначимо, якщо вектор  $\vec{a}_{A_3O_2}^r$  перенесемо з плану прискорень в точку  $A$  куліси на плані механізму.

Можемо зробити висновок, що ланка 3 рухається прискорено, оскільки співпадають напрямки  $\omega_3$  і  $\varepsilon_3$ .

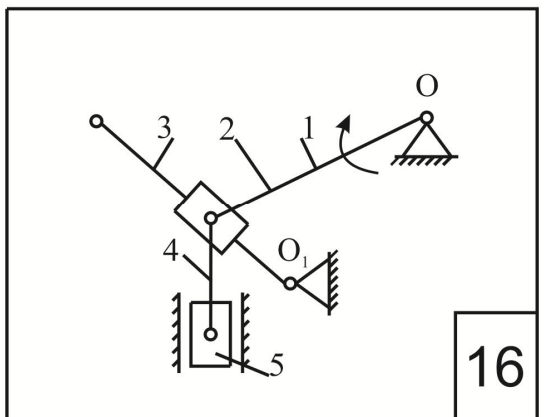
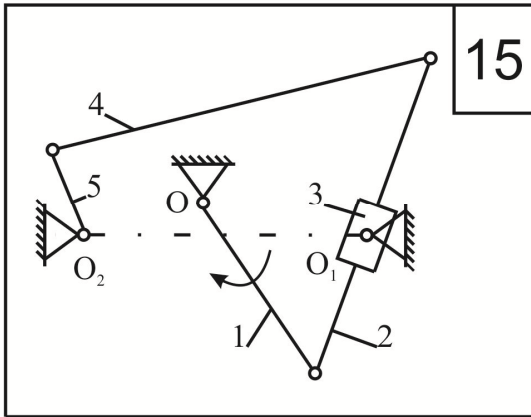
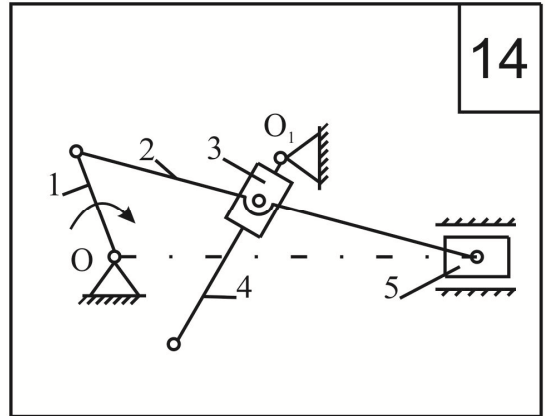
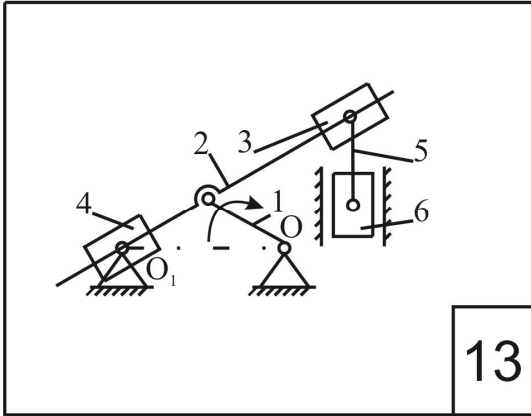
### Завдання для самостійної роботи.

Побудувати плани прискорень наступних механізмів:









## Практична робота №5

### Розтяг та стиск

**Мета роботи:** ознайомитися з деформаціями розтягу та стиску, навчитися будувати епюри поздовжніх сил, розтягуючих моментів, а також переміщень.

### Теоретичні відомості

#### *Розтяг та стиск*

**Розтяг (стиск)** – деформація, при якій в поперечному перерізі бруса виникають тільки поздовжні розтягуючі або стискаючі зусилля. Розтягуючі зусилля прийнято вважати позитивними, а стискаючі – негативними. Розтяг (стиск) викликається зовнішніми силами, що діють уздовж поздовжньої осі бруса. До деформації розтягу (стиску) схильні троси підйомних машин, опори мостів, будинків, елементи зчіпних устроїв вагонів і локомотивів і т.п.

Розглянемо стрижень довжиною  $l$ , що розтягується силою  $F$  (рис. 11, *a*). Для визначення внутрішнього зусилля скористаємося методом перерізів та уявно розсічемо стрижень поперечним перерізом із координатою  $z$  ( $0 \leq z \leq l$ ). Відкинемо праву частину стрижня, а дію відкинutoї частини замінимо внутрішнім нормальним зусиллям  $N$ . З умови рівноваги лівої частини (суми сил на вісь  $x$ ) (рис. 11, *б*)

$$\sum F_x = F - N = 0$$

знаходимо нормальне зусилля

$$N = F.$$

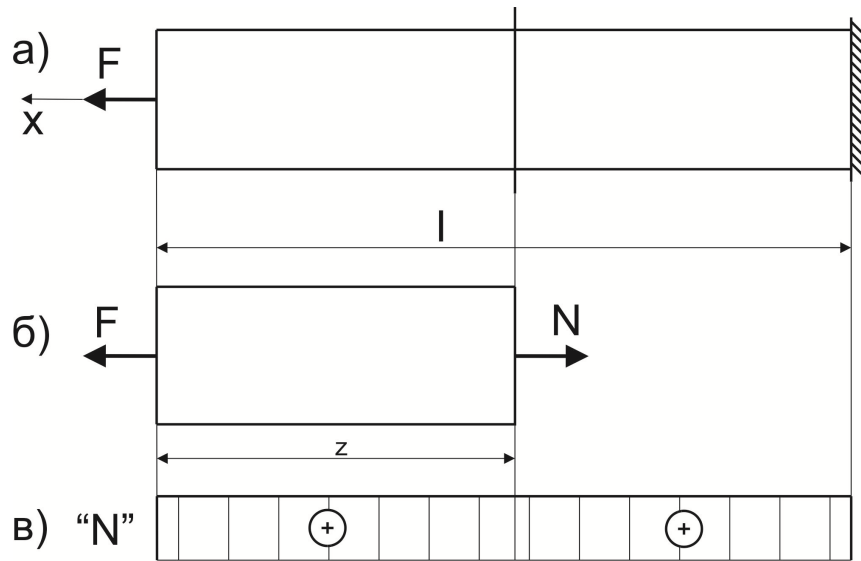


Рисунок 11 – Поздовжні зусилля у стержні

По закону Ньютона в перерізі правої частини бруса діє таке ж внутрішнє зусилля  $N$ , але спрямоване протилежно. Неважко переконатися, що права частина бруса також урівноважена. Як наслідок з формули  $N = F$  нормальна сила в перерізі не залежить від координати перерізу  $z$ , у всіх перерізах бруса діє те саме внутрішнє зусилля  $N$ .

Графік зміни поздовжніх зусиль по довжині бруса називається епюрою поздовжніх зусиль (рис. 11, в). Для її побудови від базової лінії, проведеної паралельно поздовжній осі бруса, перпендикулярно відкладаємо ординати, що діють у перерізах бруса поздовжніх зусиль. Штрихування епюри виконується прямими лініями, перпендикулярними базовій лінії. У загальному випадку (коли на брус діє довільне число сил різноманітних напрямків) формула  $N = F$  перетвориться до виду

$$N = \sum F_{xi},$$

де  $\sum F_{xi}$  – алгебраїчна сума проєкцій зовнішніх сил на поздовжню вісь бруса, що прикладені по один бік від перерізу.

Зовнішні сили, що розтягують, (спрямовані від перерізу) беруться зі знаком “+”, зовнішні стискаючі сили (спрямовані до перерізу) – із знаком “-”.

### **Приклад 1.**

Для заданого бруса побудувати епюри: а) поздовжньої сили  $N$ , б) нормальних напружень в поперечному перерізі  $\sigma$ , в) переміщення вільного кінця бруса  $\lambda$ . Схема навантаження зображена на рис. 12.

### **Розв’язання:**

Для побудови епюр скористаємося методом перерізів. Розділимо брус на чотири зони (I-IV), межами яких є точки прикладення зовнішніх сил або точки зміни площі поперечного перерізу. Визначимо поздовжні зусилля на кожній ділянці:

$$N_I = -F; \quad N_{II} = -F; \quad N_{III} = 0,5F; \quad N_{IV} = 2,5F.$$

Поздовжнє зусилля не залежить від координати перерізу, тому у всіх перерізах діє одне і теж внутрішнє зусилля (на кожній своє). По характерним точкам будуємо епюру поздовжніх сил « $N$ ». Аналізуючи епюру поздовжніх сил, визначаємо, що III і IV ділянки працюють на розтяг, а I та II ділянки працюють на стиск.

Для кожної ділянки визначаємо величину нормального напруження:

$$\sigma_i = \frac{N_i}{A_i}; \quad \sigma_I = \frac{N_I}{A_I} = -\frac{F}{A}; \quad \sigma_{II} = \frac{N_{II}}{A_{II}} = \frac{-F}{3,2A} = -0,3\frac{F}{A};$$
$$\sigma_{III} = \frac{N_{III}}{A_{III}} = \frac{0,5F}{3,2A} = 0,16\frac{F}{A}; \quad \sigma_{IV} = \frac{N_{IV}}{A_{IV}} = \frac{2,5F}{3,2A} = 0,78\frac{F}{A}.$$

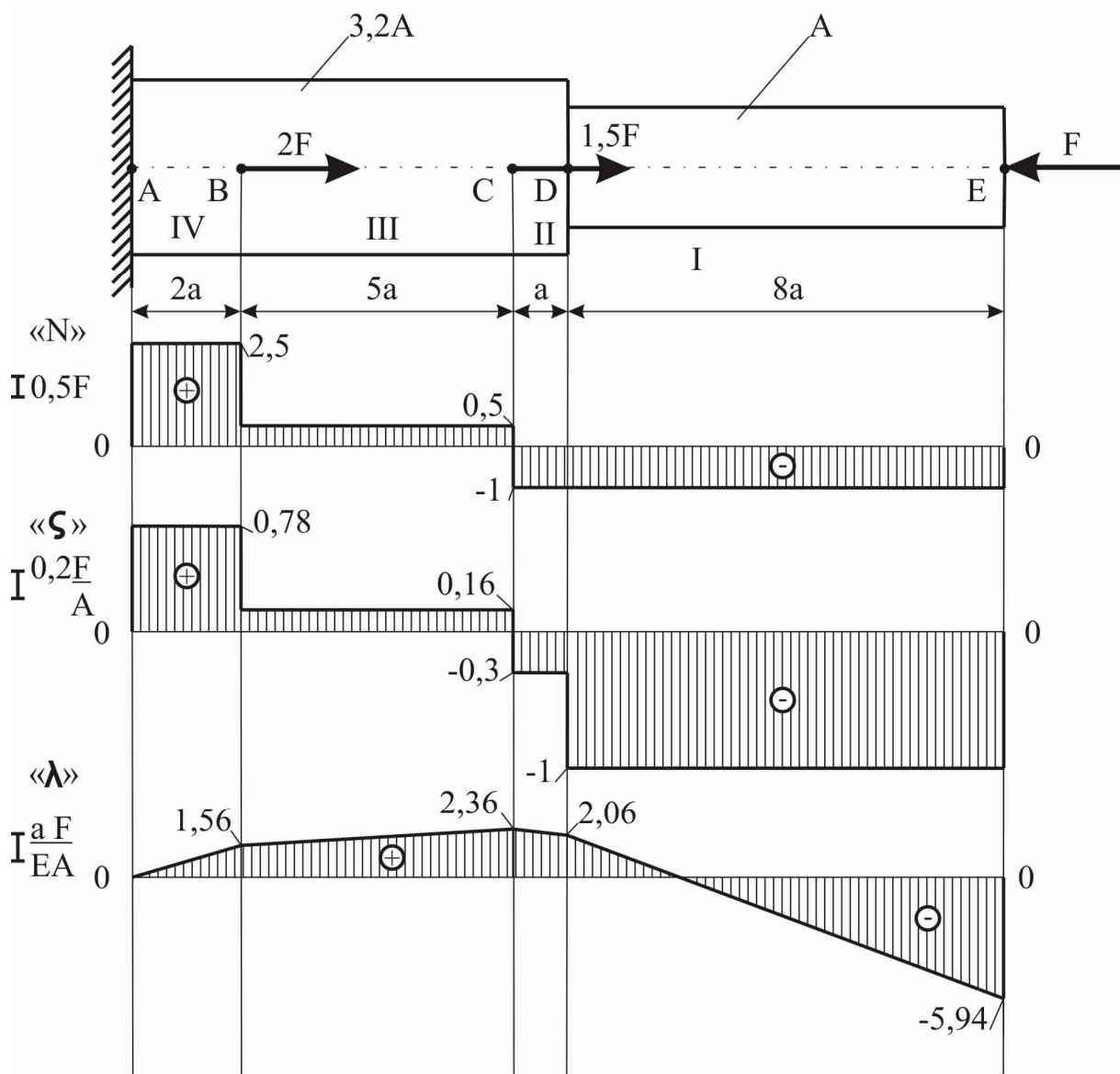


Рисунок 12 – Схема навантаження

По характерним точкам будемо епюру нормальних напружень « $\sigma$ ». Аналізуючи епюру нормальних напружень, визначаємо, що небезпечною ділянкою для бруса буде ділянка I, на якій нормальні напруження (за модулем) мають максимальне значення.

Для кожної ділянки визначаємо абсолютне подовження або укорочення та визначаємо загальне абсолютне подовження бруса, прийнявши  $\lambda_A = 0$ , оскільки в точці закріплення деформації бруса не буде:

$$\lambda = \frac{N_i \cdot a_i}{E \cdot A_i}; \quad \lambda_B = \lambda_{AB} + \lambda_A = \frac{N_{IV} \cdot a_{IV}}{E \cdot A_{IV}} + 0 = \frac{2,5F \cdot 2a}{E \cdot 3,2A} = 1,56 \frac{F \cdot a}{E \cdot A};$$

$$\lambda_C = \lambda_{BC} + \lambda_B = \frac{N_{III} \cdot a_{III}}{E \cdot A_{III}} + 1,56 \frac{F \cdot a}{E \cdot A} = \frac{0,5F \cdot 5a}{E \cdot 3,2A} + 1,56 \frac{F \cdot a}{E \cdot A} = 0,8 \frac{F \cdot a}{E \cdot A} + 1,56 \frac{F \cdot a}{E \cdot A} =$$

$$= 2,36 \frac{F \cdot a}{E \cdot A};$$

$$\lambda_D = \lambda_{CD} + \lambda_C = \frac{N_{II} \cdot a_{II}}{E \cdot A_{II}} + 2,36 \frac{F \cdot a}{E \cdot A} = \frac{-F \cdot a}{E \cdot 3,2A} + 2,36 \frac{F \cdot a}{E \cdot A} = -0,3 \frac{F \cdot a}{E \cdot A} + 2,36 \frac{F \cdot a}{E \cdot A} =$$

$$= 2,06 \frac{F \cdot a}{E \cdot A};$$

$$\lambda_E = \lambda_{DE} + \lambda_D = \frac{N_I \cdot a_I}{E \cdot A_I} + 2,06 \frac{F \cdot 8a}{E \cdot A} = -8 \frac{F \cdot a}{E \cdot A} + 2,06 \frac{F \cdot a}{E \cdot A} = -5,94 \frac{F \cdot a}{E \cdot A}.$$

Отже, довжина бруса зменшиться на  $-5,94 \frac{F \cdot a}{E \cdot A}$  одиниць. По характерним точкам будемо епюру укорочення бруса « $\lambda$ ».

### **Приклад 2.**

Для заданого бруса побудувати епюри: а) поздовжньої сили  $N$ , б) нормальних напружень в поперечному перерізі  $\sigma$ , в) переміщення вільного кінця бруса  $\lambda$ . Схема навантаження зображена на рис. 13.

### **Розв'язання:**

На відміну від попередньої задачі в даному прикладі закріплені обидва кінця бруса. Такий тип бруса називається статично невизначеним. Для побудови епюр скористаємося методом перерізів. Розділимо брус на п'ять зон (I-V), межами яких є точки прикладення зовнішніх сил або точки зміни площі поперечного перерізу. Визначимо поздовжні зусилля на кожній ділянці:

$$N_I = N_{II} = R_K; \quad N_{III} = N_{IV} = N_{II} + F; \quad N_V = R_A = N_{IV} + 2F.$$

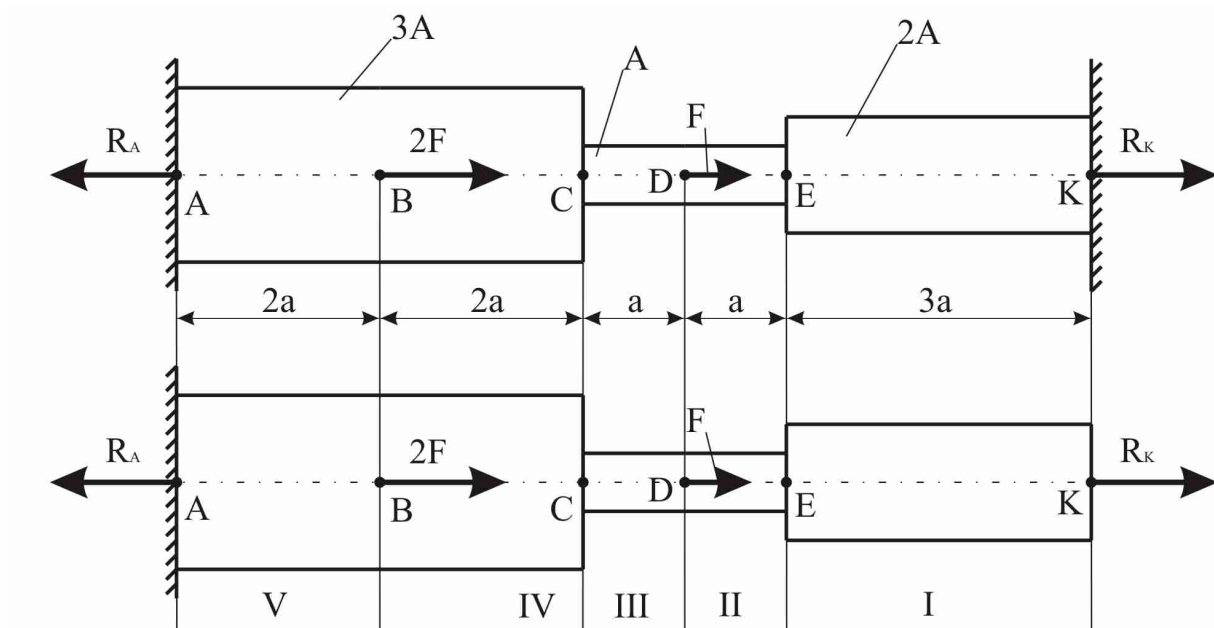


Рисунок 13 – Схема навантаження

Як видно, значення поздовжніх зусиль невідомі, оскільки в одному рівнянні статички

$$\sum F = 0 \Rightarrow R_K + F + 2F - R_A = 0$$

присутні дві невідомі реакції опор. Для того, щоб позбутися невизначеності відкинемо одну з опор, наприклад, праву та замінимо її відповідною реакцією (рис. 14), що зводить завдання до рішення статично визначеної задачі. Для кожної ділянки визначаємо абсолютне подовження або укорочення та визначаємо загальне абсолютне подовження бруса, вважаючи, що  $\lambda_A = \lambda_K = 0$ , оскільки в точках закріплення деформації бруса не буде:

$$\lambda = \frac{N_i \cdot a_i}{E \cdot A_i};$$

$$\lambda_B = \lambda_{AB} + \lambda_A = \frac{N_V \cdot a_V}{E \cdot A_V} + 0 = \frac{(R_K + 3F) \cdot 2a}{E \cdot 3A} = \frac{2a \cdot R_K + 6a \cdot F}{E \cdot 3A};$$

$$\lambda_C = \lambda_{BC} + \lambda_B = \frac{N_{IV} \cdot a_{IV}}{E \cdot A_{IV}} + \frac{2a \cdot R_K + 6a \cdot F}{E \cdot 3A} = \frac{(R_K + F) \cdot 2a}{E \cdot 3A} + \frac{2a \cdot R_K + 6a \cdot F}{E \cdot 3A} =$$

$$= \frac{2a \cdot R_K + 2a \cdot F + 2a \cdot R_K + 6a \cdot F}{E \cdot 3A} = \frac{4a \cdot R_K + 8a \cdot F}{E \cdot 3A};$$

$$\lambda_D = \lambda_{CD} + \lambda_C = \frac{N_{III} \cdot a_{III}}{E \cdot A_{III}} + \frac{4a \cdot R_K + 8a \cdot F}{E \cdot 3A} = \frac{(R_K + F) \cdot a}{E \cdot A} + \frac{4a \cdot R_K + 8a \cdot F}{E \cdot 3A} =$$

$$= \frac{3a \cdot R_K + 3a \cdot F + 4a \cdot R_K + 8a \cdot F}{E \cdot 3A} = \frac{7a \cdot R_K + 11a \cdot F}{E \cdot 3A};$$

$$\lambda_E = \lambda_{DE} + \lambda_D = \frac{N_{II} \cdot a_{II}}{E \cdot A_{II}} + \frac{7a \cdot R_K + 11a \cdot F}{E \cdot 3A} = \frac{R_K \cdot a}{E \cdot A} + \frac{7a \cdot R_K + 11a \cdot F}{E \cdot 3A} =$$

$$= \frac{3a \cdot R_K + 7a \cdot R_K + 11a \cdot F}{E \cdot 3A} = \frac{10a \cdot R_K + 11a \cdot F}{E \cdot 3A};$$

$$\lambda_K = \lambda_{EK} + \lambda_E = \frac{N_I \cdot a_I}{E \cdot A_I} + \frac{10a \cdot R_K + 11a \cdot F}{E \cdot 3A} = \frac{R_K \cdot 3a}{E \cdot 2A} + \frac{10a \cdot R_K + 11a \cdot F}{E \cdot 3A} =$$

$$= \frac{9a \cdot R_K + 20a \cdot R_K + 22a \cdot F}{E \cdot 3A} = \frac{29a \cdot R_K + 22a \cdot F}{E \cdot 3A} = 0 \Rightarrow 29a \cdot R_K + 22a \cdot F = 0 \Rightarrow$$

$$(29R_K + 22F) \cdot a = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ або } 29R_K + 22F = 0 \Rightarrow R_K = -\frac{22F}{29} \approx -0,76F.$$

Таким чином одна з реакцій опор визначена. Знак «мінус» свідчить про те, що напрямок цієї реакції вибраний неправильно і в дійсності він буде протилежним. Отже, використаємо рівняння сил для визначення другої реакції опори:

$$\sum F = 0 \Rightarrow R_K + F + 2F - R_A = 0 \Rightarrow R_A = R_K + 3F = -0,76F + 3F = 2,24F.$$

Знайшовши невідомі реакції опор, визначимо поздовжні зусилля на кожній ділянці:

$$N_I = N_{II} = -0,76F; \quad N_{III} = N_{IV} = 0,24F; \quad N_V = R_A = 2,24F.$$

По характерним точкам будуюмо епюру поздовжніх сил «N» (рис. 14). Аналізуючи епюру поздовжніх сил, визначаємо, що III-V ділянки працюють на розтяг, а I та II ділянки працюють на стиск.

По характерним точкам будуюмо епюру нормальних напружень « $\sigma$ » (рис. 14). Аналізуючи епюру нормальних напружень, визначаємо, що не-



безпечною ділянкою для бруса будуть ділянки V та II, на яких нормальні напруження (за модулем) приблизно однакові та мають максимальне значення.

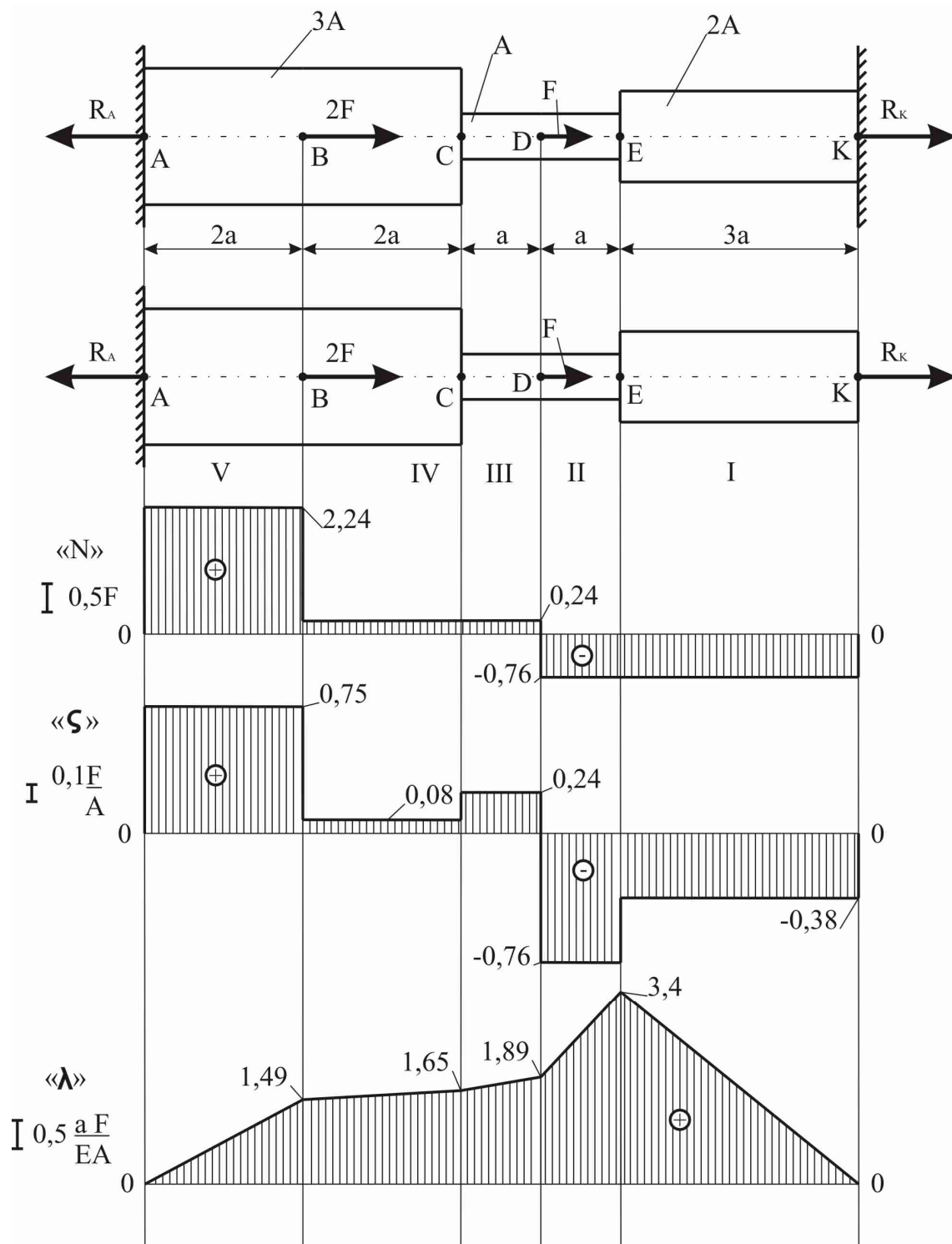


Рисунок 14 – Схема навантаження

$$\sigma_i = \frac{N_i}{A_i};$$

$$\sigma_I = \frac{N_I}{A_I} = \frac{-0,76F}{2A} = -0,38 \frac{F}{A};$$

$$\sigma_{II} = \frac{N_{II}}{A_{II}} = \frac{-0,76F}{A} = -0,76 \frac{F}{A};$$

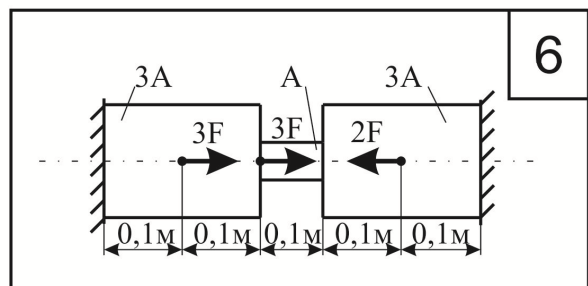
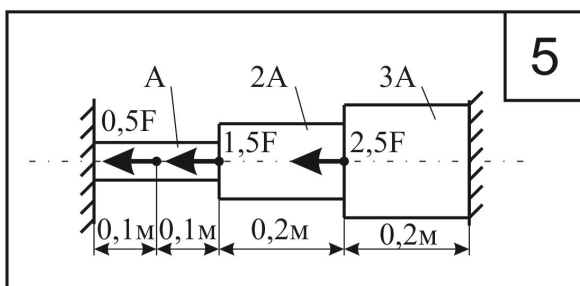
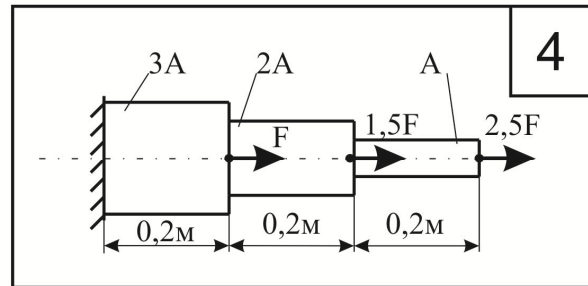
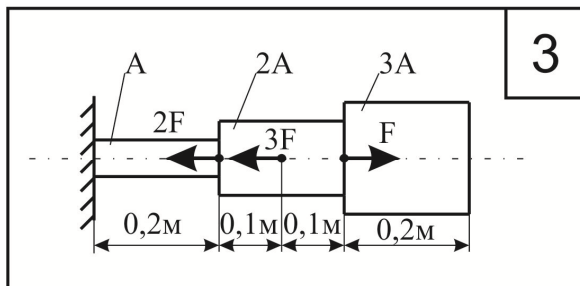
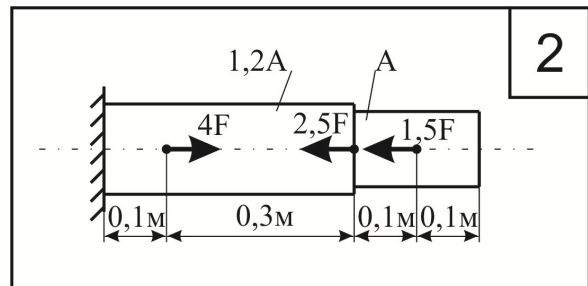
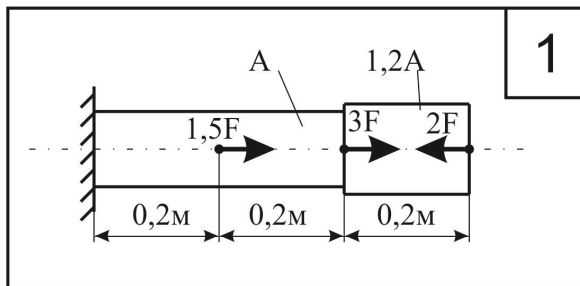
$$\sigma_{III} = \frac{N_{III}}{A_{III}} = \frac{0,24F}{A} = 0,24 \frac{F}{A};$$

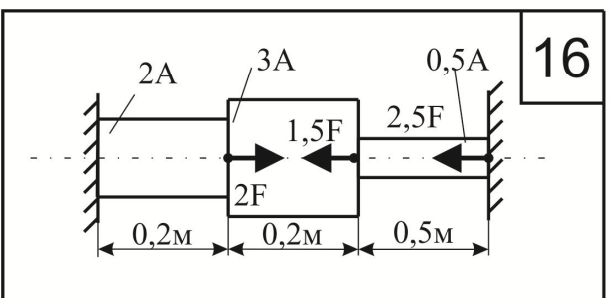
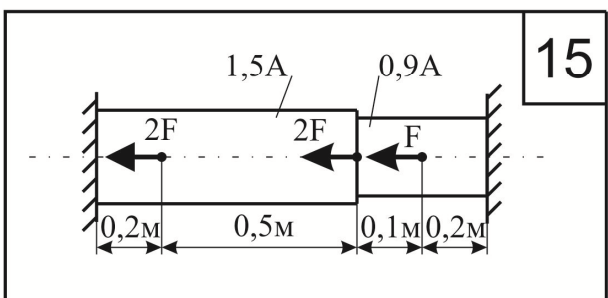
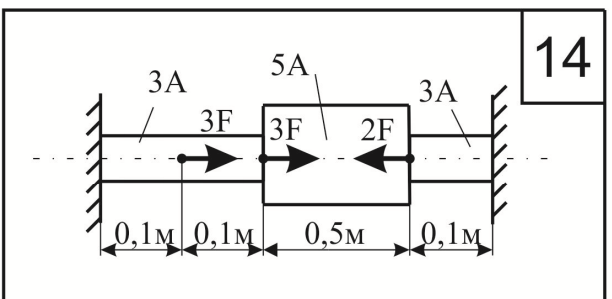
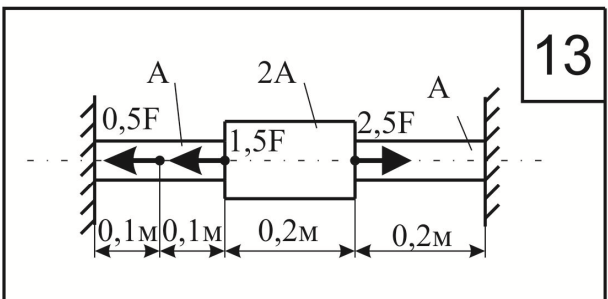
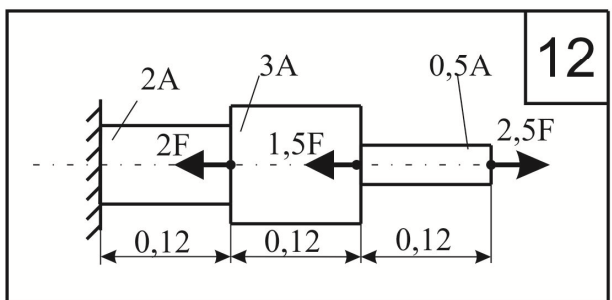
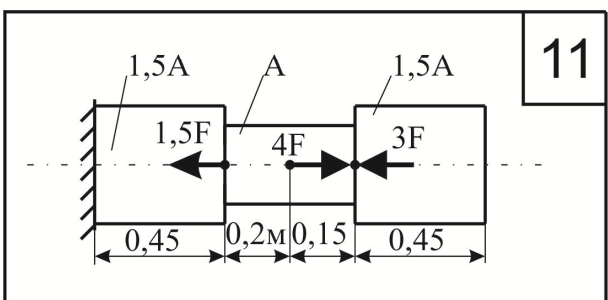
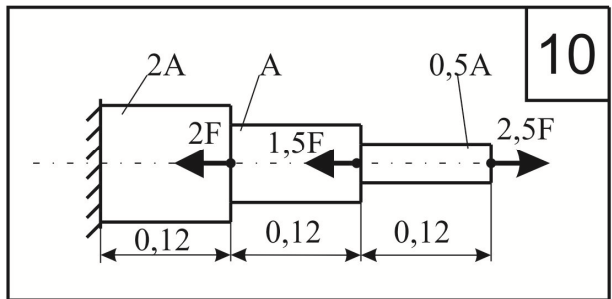
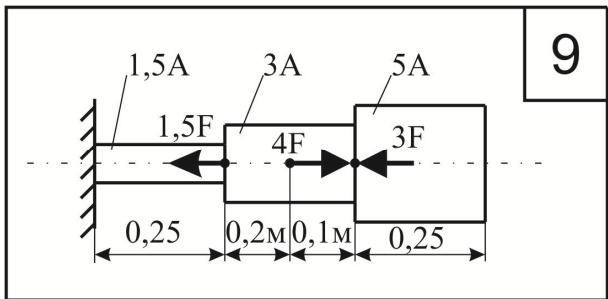
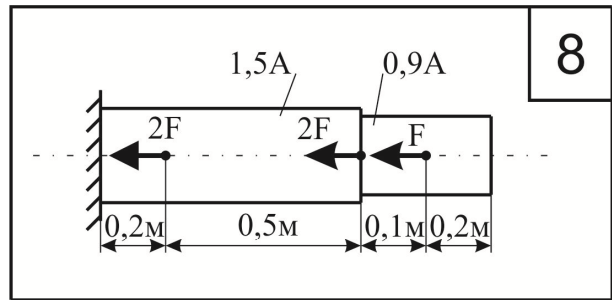
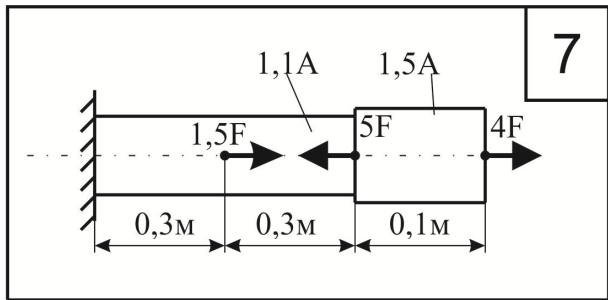
$$\sigma_{IV} = \frac{N_{IV}}{A_{IV}} = \frac{0,24F}{3A} = 0,08 \frac{F}{A};$$

$$\sigma_V = \frac{N_V}{A_V} = \frac{2,24F}{3A} \approx 0,75 \frac{F}{A}.$$

### Завдання для самостійної роботи.

Для заданого бруса побудувати епюри: а) поздовжньої сили  $N$ , б) нормальних напружень в поперечному перерізі  $\sigma$ , в) переміщення вільного кінця бруса  $\lambda$ . Схеми навантаження зображені на наступних рисунках:





## Практична робота №6

### Кручення

**Мета роботи:** ознайомитися з деформаціями кручення, навчитися будувати епюри крутних моментів та кутів закручення.

### Теоретичні відомості

#### *Кручення*

Деформація кручення має місце при дії на брус врівноваженої системи пар сил, розташованих у площинах, перпендикулярних поздовжній осі бруса, рис. 15, а.

Брус, що працює на кручення, називають валом. У поперечних перерізах валу, діє тільки один внутрішній силовий фактор – крутний момент  $M_z$ , рис. 15, б.

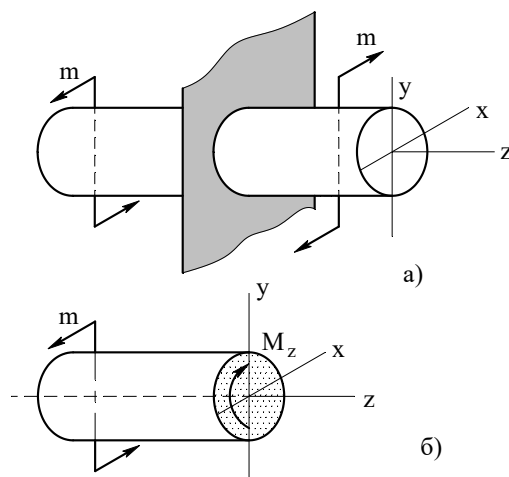


Рисунок 15 – Вал: а) зовнішні сили; б) внутрішні сили (поперечний переріз)

Розглянемо порядок визначення величини крутного моменту  $M_z$ :

- Вал розбивають на ділянки, межами яких є перерізи, де прикладені крутні моменти або змінюється діаметр.

- У межах кожної ділянки використовують метод перерізів: розрізають вал поперечним перерізом; відкидають одну з частин валу (бажано ту, до якої прикладено більше крутних моментів або моментів, величина яких невідома).

- Користуючись відповідними правилами, визначають величину крутних моментів:

I правило: величина крутного моменту  $M_z$  в довільному перерізі вала чисельно дорівнює алгебраїчній сумі зовнішніх крутних моментів, прикладених до решти валу.

$$M_z = \sum m_z^{ocm}.$$

II правило (правило знаків): якщо зовнішній крутний момент представляється спрямованим за годинниковою стрілкою при погляді на поперечний переріз, то його слід взяти зі знаком «мінус», а якщо проти годинникової стрілки, то зі знаком «плюс».

Порядок побудови епюри « $M_z$ ».

- Провести вісь епюри безпосередньо під розрахунковою схемою (рис. ??, б).

- У межах кожної ділянки відкласти значення « $M_z$ » у вибраному масштабі: додатні – вгору, від'ємні – вниз (рис. 16, б).

- Через кінці отриманих відрізків провести прямі, паралельні осі епюри.

- Штрихувати епюру лініями, перпендикулярними осі епюри (вала), оскільки кожна лінія штрихування має певний фізичний зміст: у вибрано-

му масштабі вона відповідає значенню крутного моменту в даному перерізі (рис. ??, б).

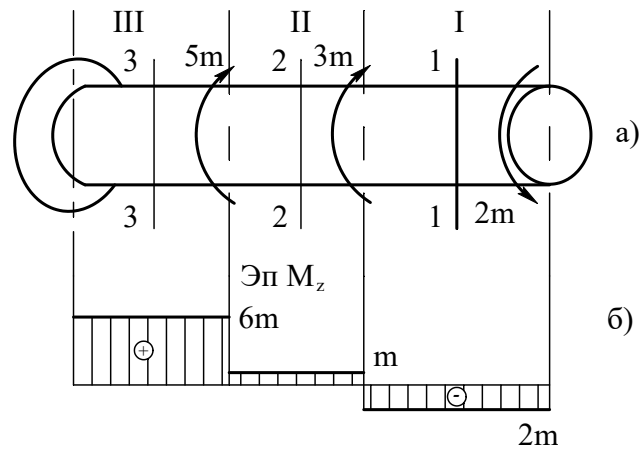


Рисунок 16 – Побудова епюри крутних моментів

Указати на епюрі значення «Mz» у межах кожної ділянки.

На більшому полі епюри крутних моментів один раз зверху від осі вказати знак «плюс», знизу – знак «мінус».

Зліва біля першої вертикальної допоміжної лінії виконати напис: Еп. «Mz» (кНм) та вказати масштаб епюри.

Крутному моменту відповідають дотичні напруження  $\tau$ , які розподіляються за лінійним законом уздовж діаметру, рис. 17. Величина дотичних напружень у будь-якій точці поперечного перерізу може бути визначена за формулою:

$$\tau = \frac{M_z}{I_\rho} \cdot \rho, \quad (6)$$

де  $M_z$  – крутний момент;  $I_\rho$  – полярний момент інерції.

Для круглого перерізу полярний момент інерції дорівнює:

$$I_\rho = \frac{\pi \cdot d^4}{32} \approx 0,1d^4, \quad (7)$$

де  $d$  – діаметр круглого перетину;  $\rho$  – відстань від центру кола (полюса) до точки, в якій визначається напруження.

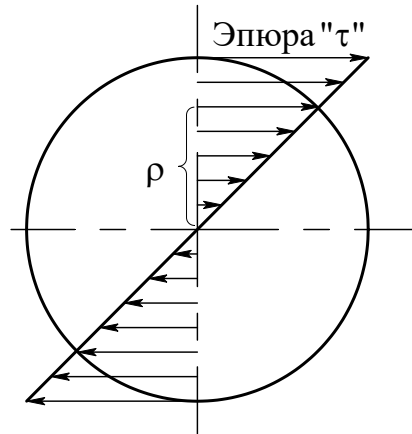


Рисунок 17 – Епюра дотичних напружень

Для кільцевого перерізу (рис. 18):

$$I_{\rho} = \frac{\pi \cdot D^4}{32} (1 - c^4) \approx 0,1D^4 (1 - c^4). \quad (8)$$

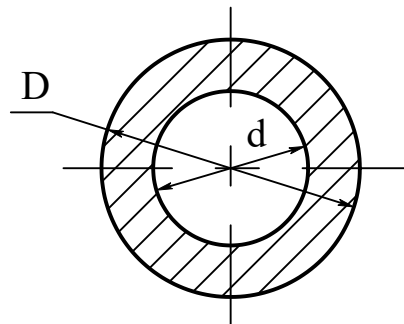


Рисунок 18 – Вал з кільцевим перерізом

З формули (6) випливає, що дотичне напруження в центрі перетину дорівнює нулю, а максимальні за величиною напруження діють в точках контуру перетину (так звані «небезпечні точки»), тобто при  $\rho = \frac{d}{2}$ . Величина цих напружень може бути визначена за формулою:

$$\tau_{\max} = \frac{M_z}{W_\rho}, \quad (9)$$

де  $W_\rho$  – полярний момент опору.

Для круглого перерізу:

$$W_\rho = \frac{\pi \cdot d^3}{16} \approx 0,2 \cdot d^3. \quad (10)$$

Для кільцевого перерізу (рис. 3.4).

$$W_\rho = \frac{\pi \cdot D^3}{16} (1 - c^4) \approx 0,2 \cdot D^3 (1 - c^4), \quad (11)$$

де  $D$  – зовнішній діаметр кільця;  $c$  - відношення діаметрів:  $c = \frac{d}{D}$ .

Напрямок дотичного напруження в кожній точці перетину перпендикулярний радіусу (рис. 19).

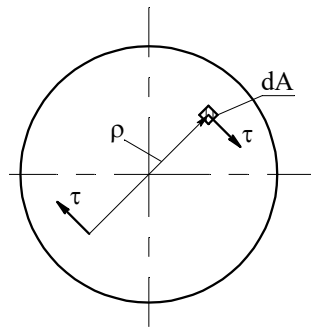


Рисунок 19 – Напрямок дотичних напружень в довільній точці

Вираз крутного моменту через напруження:

$$M_z = \int_A \rho \cdot \tau \cdot dA, \quad (12)$$

відображає його фізичний зміст: крутний момент – це результуючий момент пар внутрішніх дотичних сил пружності, що діють в поперечному перерізі валу.

### Приклад 1.



Визначимо величину крутних моментів у поперечних перерізах валу, представленого на рис. 16, а.

- Розбиваємо вал на три ділянки.
- Визначаємо крутний момент в поперечних перерізах ділянок валу:

$$M1z = -2m; M2z = -2m + 3m = m;$$

$$M3z = -2m + 3m + 5m = 6m.$$

- У даному прикладі відкидаємо у всіх випадках ліву частину валу, так як до неї прикладений невідомий реактивний момент (реакція опори) (рис. 16, а).

Правила контролю правильності побудови епюри «Mz».

1. У межах кожної ділянки епюра «Mz» зображується прямою, паралельною осі епюри.

2. У перетинах вала, в яких додані зовнішні крутні моменти, на епюрі відбуваються стрибки, величина яких відповідає величині прикладеного крутного моменту.

Наприклад: у перерізі, де прикладений момент  $3m$ , величина стрибка дорівнює  $3m$  ( $2m + m$ ).

### **Приклад 2.**

Для заданого сталевого бруса необхідно: а) побудувати епюру крутних моментів  $M$ , б) визначити з розрахунку на міцність діаметр кожної ділянки бруса при  $[\tau_k] = 50 \text{ Н/мм}^2$  (отримані в розрахунку значення діаметрів перевести в метри та округлити до четвертого знаку після коми), в) побудувати епюру кута закручування  $\varphi$ . Схема навантаження зображена на рис. 20,  $a=0,22\text{м}$ ,  $b=0,37\text{м}$ ,  $c=0,22\text{м}$ .

### **Розв'язання:**

Для побудови епюр скористаємося методом перерізів. Визначаємо крутний момент в поперечних перерізах ділянок вала:

$$T_{KI} = -320 \text{ Нм}; \quad T_{KII} = -740 \text{ Нм}; \quad T_{KIII} = 80 \text{ Нм}.$$

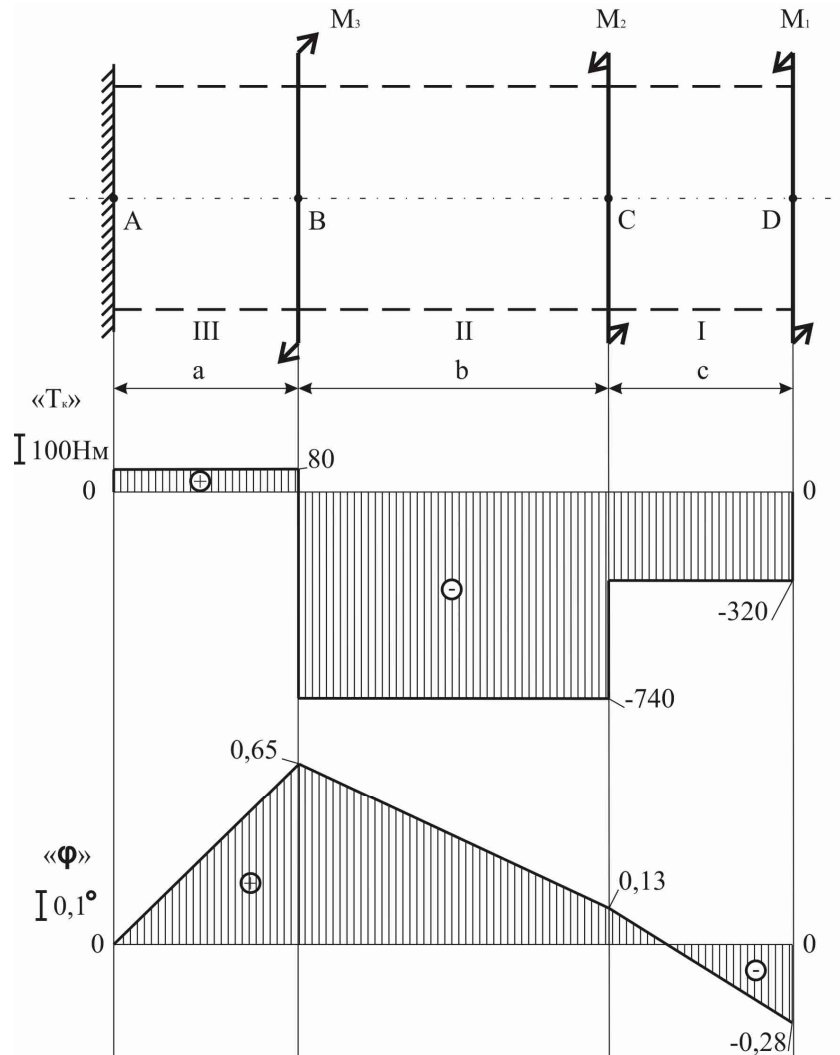


Рисунок 20 – Схема навантаження

З формули максимальних дотичних напружень (9) після математичних перетворень знаходимо вираз для визначення діаметру поперечного перерізу вала:

$$d_i = \sqrt[3]{\frac{|T_{KI}|}{\tau \cdot 0,2}}; \quad d_I = \sqrt[3]{\frac{|T_{KI}|}{\tau \cdot 0,2}} = \sqrt[3]{\frac{320}{35 \cdot 10^6 \cdot 0,2}} = 0,0357(\text{м});$$

$$d_{II} = \sqrt[3]{\frac{|T_{KII}|}{\tau \cdot 0,2}} = \sqrt[3]{\frac{740}{35 \cdot 10^6 \cdot 0,2}} = 0,0473(\text{м});$$

$$d_{III} = \sqrt[3]{\frac{T_{KIII}}{\tau \cdot 0,2}} = \sqrt[3]{\frac{80}{35 \cdot 10^6 \cdot 0,2}} = 0,0225(\text{м}).$$

У межах кожної ділянки визначимо кут закручення шляхом суми кута на попередній ділянці та прирощення кута в межах ділянки, що розглядається. Знаходимо максимальний кут закручення вала, який є сумою визначених кутів закручення кожної ділянки:

$$\varphi_i = \frac{T_{Ki} \cdot l_i \cdot 32 \cdot 180}{G \cdot \pi^2 \cdot d^4}; \quad \varphi_A = 0; \quad \varphi_B = \varphi_{AB} + \varphi_A = \frac{T_{KIII} \cdot l_{III} \cdot 32 \cdot 180}{G \cdot \pi^2 \cdot d^4} + \varphi_A =$$

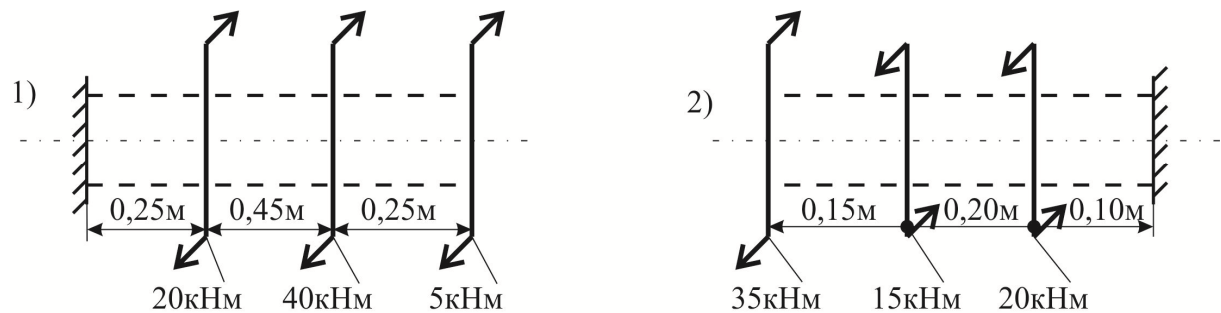
$$= \frac{80 \cdot 0,22 \cdot 32 \cdot 180}{6,2 \cdot 10^{10} \cdot 3,14^2 \cdot 0,0225^4} + 0 = 0,65^\circ;$$

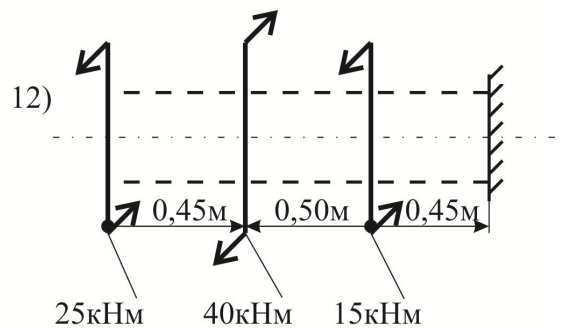
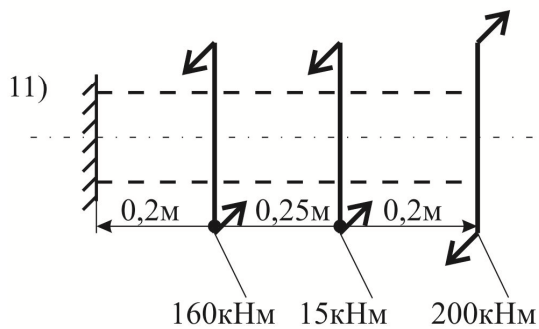
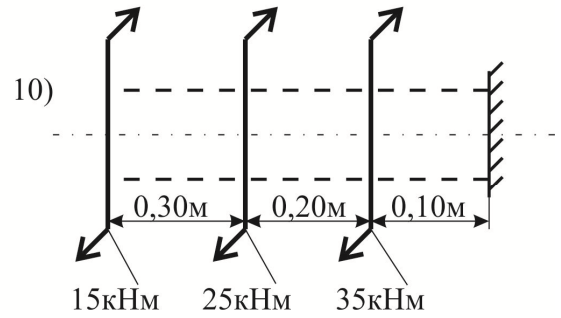
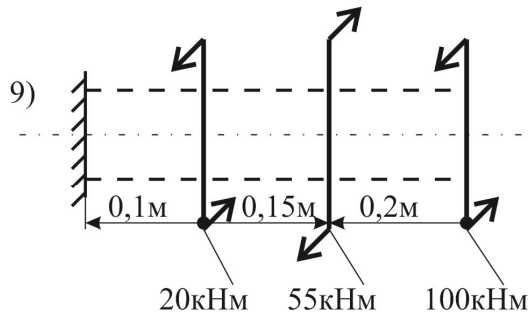
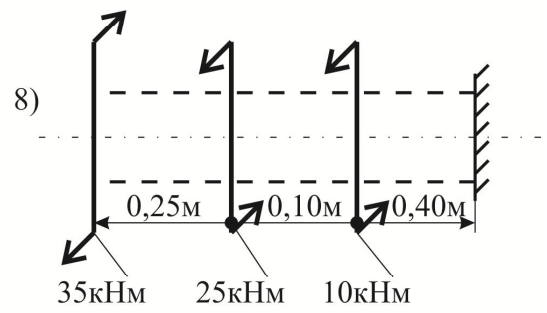
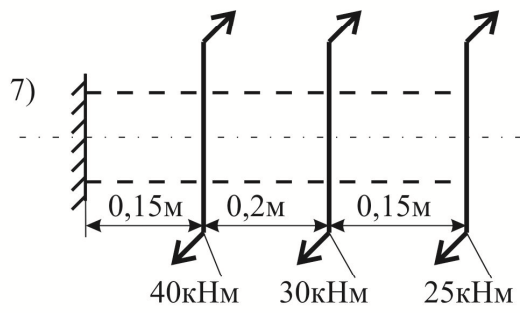
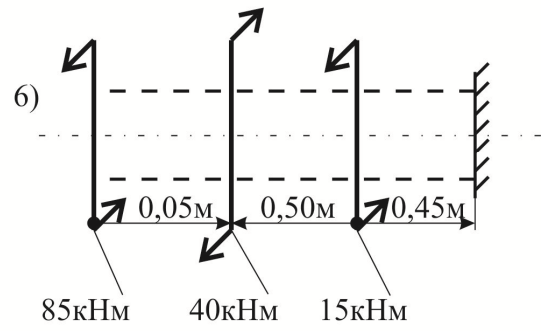
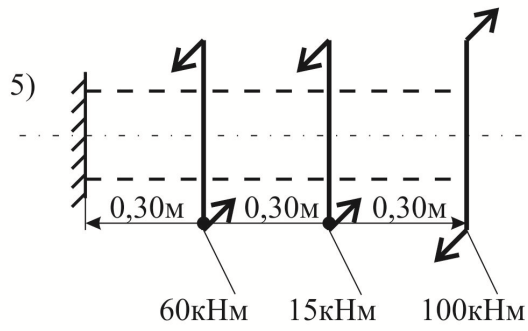
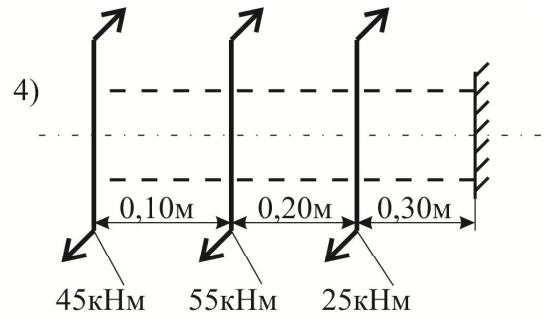
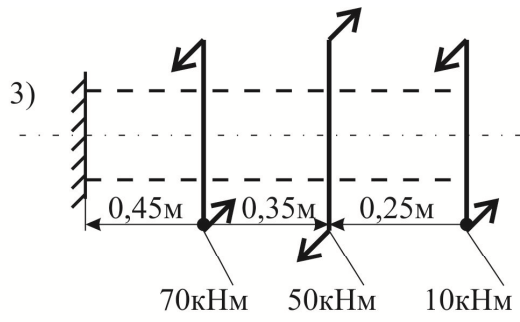
$$\varphi_C = \varphi_{BC} + \varphi_B = \frac{T_{KII} \cdot l_{II} \cdot 32 \cdot 180}{G \cdot \pi^2 \cdot d^4} + 0,65 = \frac{-740 \cdot 0,37 \cdot 32 \cdot 180}{6,2 \cdot 10^{10} \cdot 3,14^2 \cdot 0,0473^4} + 0,65 = 0,13^\circ;$$

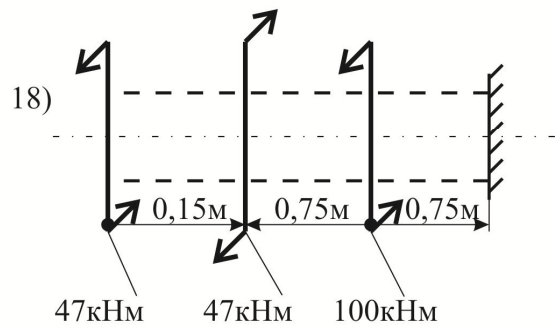
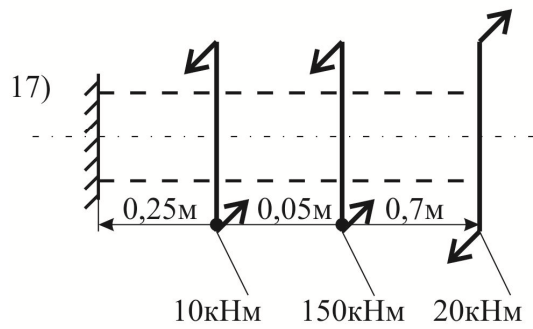
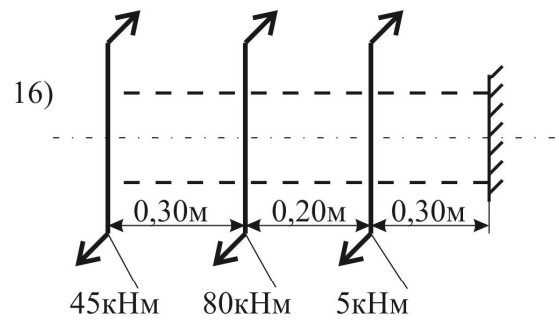
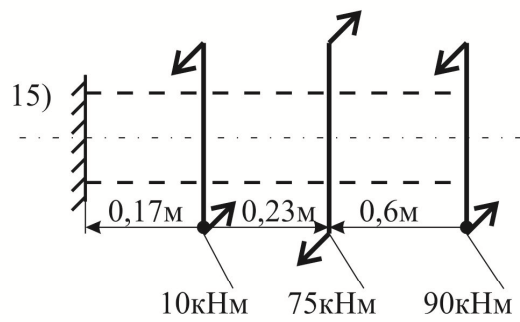
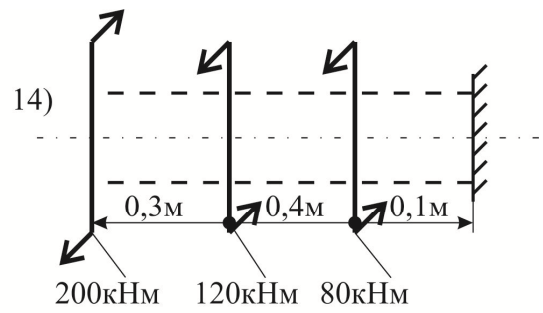
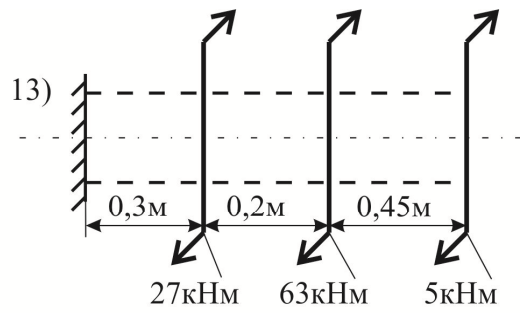
$$\varphi_D = \varphi_{CD} + \varphi_C = \frac{T_{KI} \cdot l_I \cdot 32 \cdot 180}{G \cdot \pi^2 \cdot d^4} + 0,13 = \frac{-320 \cdot 0,22 \cdot 32 \cdot 180}{6,2 \cdot 10^{10} \cdot 3,14^2 \cdot 0,0357^4} + 0,13 = -0,28^\circ.$$

### **Завдання для самостійної роботи.**

Для заданого сталевого (завдання «1») та «2»), мідного (завдання «3») та «4») та латунного (завдання «5») та «6») бруса необхідно: а) побудувати епюру крутних моментів М, б) визначити з розрахунку на міцність діаметр кожної ділянки бруса (отримані в розрахунку значення діаметрів перевести в метри та округлити до четвертого знаку після коми), в) побудувати епюру кута закручування  $\varphi$ . Схеми навантаження зображені нижче, чисельні дані для розрахунків взяти з табл. 2.







Таблиця 2 – Чисельні дані

Матеріал	$[\tau_k]$ , Н/мм <sup>2</sup>	G, ГПа
Сталь	80	80
Мідь	50	40
Латунь	35	36

## Практична робота №7

### Згин

**Мета роботи:** ознайомитися з деформаціями згину, навчитися будувати епюри поперечних сил, а також згинальних моментів.

### Теоретичні відомості

#### *Згин*

**Згин** – це такий вид деформації бруса, при якому в його поперечних перерізах виникають згинальні моменти. У більшості випадків одночасно зі згинальними моментами виникають і поперечні сили, такий згин називають поперечним; якщо поперечні сили не виникають, згин називають чистим.

З геометричної точки зору згин характеризується тим, що вісь бруса, прямолінійна до деформації, при згині стає кривою лінією.

Деформація згину виникає при навантаженні бруса силами, що діють у площинах, які проходять через його поздовжню вісь, перпендикулярних до цієї осі, і парами сил, діючими в тих же площинах. У тому випадку, коли всі навантаження і реакції зв'язків діють в одній площині, згин називають плоским.

Обмежимося розглядом брусів, поперечні перерізи яких мають хоча б одну вісь симетрії. Вісь симетрії і перпендикулярна їй центральна вісь являються головними центральними осями перерізу.

Площину, що проходить через повздовжню вісь бруса і одну з головних центральних осей його поперечного перерізу, називають головною площиною бруса.

У випадку, коли силова площина, тобто площина дії навантажень, співпадає з однією з головних площин має місце прямий згин бруса. Лінію перетину силової площини з площиною поперечного перерізу бруса називають силовою лінією. Таким чином, при прямому згині силова лінія співпадає з однією з головних центральних осей поперечного перерізу.

При прямому згині деформація відбувається в силівній площині, тобто в цій площині розташовується вісь зігнутого бруса.

Якщо силова площина не співпадає з однією з головних площин бруса, або те ж саме, що силова площина не співпадає ні з однією з головних центральних осей його поперечного перерізу, згин називають косим.

У загальному випадку прямого згину в поперечних перерізах бруса виникає два внутрішні силових фактори: поперечна сила  $Q_y$  та згинальний момент  $M_x$ .

У тому випадку, коли і поперечна сила  $Q_y$ , і згинальний момент  $M_x$  не рівні нулю, згин називається поперечним прямим.

При згині брус деформується таким чином, що частина його волокон розтягується, а частина стискається. Волокна розташовані в опуклій частині зігнутого бруса розтягуються, а в вигнутій стискаються. Границями між областями розтягування та стискання є шар волокон, який лиш викривляється, не відчуваючи при цьому ні розтягування, ні стискання – нейтральний шар. Лінія перетину нейтрального шару з площиною поперечного перерізу бруса називається нейтральною віссю або нульовою лінією.

Бруси, що працюють на прямий згин, називають балками.

Основні типи балок:

- двоопорна балка з однією консоллю;

- двоопорна балка без консолей;
- двоопорна балка з двома консолями.

Відстань між опорами балок називають прольотом, а довжину балки, закріплену одним кінцем, іноді називають вильотом. Консоль – частина балки, розташована по один бік від опори.

Розв'язок задач на тему «Деформація згинання» рекомендується виконувати в такій послідовності:

- 1) Скласти розрахункову схему навантаження балки.
- 2) Визначити реакції опор балки (для визначення реакцій рекомендується використовувати два рівняння суми моментів усіх сил відносно кожної опори балки) і обов'язково перевірити правильність визначених реакцій, використовуючи рівняння суми проекцій усіх сил на вісь перпендикулярну до осі балки.
- 3) Побудувати епюру поперечних сил  $Q_y$ .
- 4) Побудувати епюру згинальних моментів  $M_x$  (для побудови епюри доцільно використовувати метод побудови епюри по характерним точкам).
- 5) По епюрі згинальних моментів визначити «небезпечний» переріз балки і максимальний згинальний момент  $M_x^{\max}$ .

Епюри поперечної сили та згинального моменту слід будувати, використовуючи наступні правила:

- 1) Якщо на ділянці відсутнє рівномірно розподілене навантаження  $q$ , то епюра поперечної сили  $Q_y$  буде прямою, паралельною базовій лінії, а епюра згинальних моментів  $M_x$  буде змінюватися по лінійному закону.
- 2) Якщо на ділянці присутнє рівномірно розподілене навантаження  $q$ , то епюра поперечної сили  $Q_y$  буде змінюватися по лінійному закону, а епюра згинальних моментів  $M_x$  буде параболою, випуклість якої завжди напрямлена в той же бік, що і розподілене навантаження  $q$ .



3) Якщо на ділянці присутнє розподілене навантаження  $q$ , яке змінюється за лінійним законом, то епюра поперечної сили  $Q_y$  буде параболою, а епюра згинальних моментів  $M_x$  буде змінюватись по закону кубічної параболи.

4) У перерізі, де поперечна сила  $Q_y$  дорівнює нулю епюра згинальних моментів  $M_x$  матиме екстремум (мінімум чи максимум).

5) У перерізі, де прикладене зовнішнє зосереджене навантаження  $F$ , яке перпендикулярне до осі бруса, на епюрі поперечної сили  $Q_y$  буде стрибок на величину  $i$  в напрямку цієї сили, а епюра згинальних моментів  $M_x$  матиме злам.

6) У перерізі, де прикладений зовнішній зосереджений момент, епюра згинальних моментів  $M_x$  матиме стрибок на величину  $i$  в напрямку дії цього моменту. Зосереджений момент ніяк не впливає на епюру поперечної сили  $Q_y$ .

7) У перерізі, де починається чи закінчується розподілене навантаження  $q$  (при умові, що в цих місцях не прикладено зосереджене навантаження  $F$ ), епюра згинальних моментів  $M_x$  не матиме зламу (пряма і парабола у цих точках матимуть одну і ту ж дотичну).

### **Приклад.**

Для заданого бруса побудувати епюри: а) поперечної сили  $Q$ , б) згинальних моментів  $M$ . Схема навантаження зображена на рис. 21,  $F=120\text{кН}$ ,  $l=2\text{м}$ ,  $M=45\text{кНм}$ .

### **Розв'язання:**

Визначимо реакції опор, використовуючи рівняння моментів відносно точок закріплення А та В:

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow 8a \cdot R_A - 6a \cdot F + M + 3a \cdot F = 0;$$

$$R_A = \frac{6a \cdot F - M - a \cdot 3F}{8a} = \frac{6 \cdot 2 \cdot 120 - 45 - 3 \cdot 2 \cdot 120}{8 \cdot 2} = 42,19(\text{кН}).$$

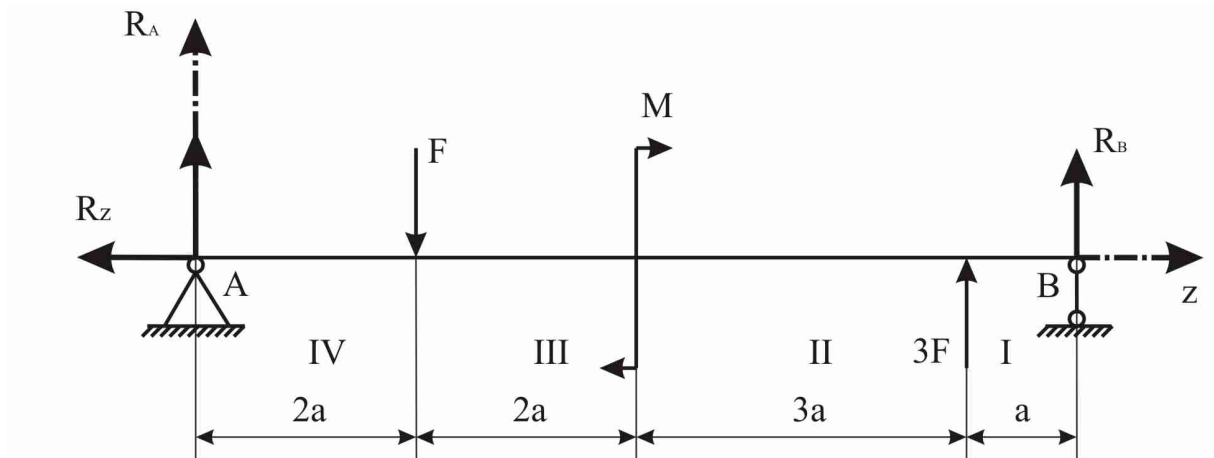


Рисунок 21 – Схема навантаження

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow -8a \cdot R_B - 3F \cdot 7a + M + 2a \cdot F = 0;$$

$$R_B = \frac{2a \cdot F + M - 7a \cdot 3F}{8a} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 120 + 45 - 7 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 120}{8 \cdot 2} = -282,19(\text{кН}).$$

Оскільки шарнірно нерухома опора має також горизонтальну реакцію, для її визначення скористаємося рівнянням сил в проекції на вісь «z»:

$$\sum F_z = 0 \Rightarrow -R_z = 0 \Rightarrow R_z = 0;$$

Для перевірки правильності визначення реакцій опор доцільно використувати рівняння сил:

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow R_A - F + 3F + R_B = 0;$$

$$42,19 - 120 + 360 - 282,19 = 0.$$

Отже, реакції опор визначені правильно.

Для побудови епюр скористаємося методом перерізів. Прийmemo наступні правила знаків для визначення характерних точок: поперечна сила Q вважається додатною, якщо вона намагається повернути відсічену частину балки за годинниковою стрілкою; згинаючий момент M вважається

додатним, якщо стиснуті волокна балки знаходяться зверху, а розтягнуті – знизу.

Визначимо величину поперечних сил в перерізах балки:

$$Q_I = R_A = 42,19; \quad Q_{II} = R_A - F = 42,19 - 120 = -77,81; \quad Q_{III} = Q_{II} = -77,81;$$

$$Q_{IV} = Q_{III} + 3F = -77,81 + 360 = 282,19.$$

Визначимо величину згинаючих моментів в перерізах балки:

$$M_I = 2a \cdot R_A = 42,19 \cdot 2 \cdot 2 = 168,76;$$

$$M_{II} = 4a \cdot R_A - 2a \cdot F = 42,19 \cdot 4 \cdot 2 - 2 \cdot 2 \cdot 120 = -142,48;$$

$$M_{III} = 7a \cdot R_A - 5a \cdot F + M = 42,19 \cdot 7 \cdot 2 - 5 \cdot 2 \cdot 120 + 45 = -564,34;$$

$$M_{IV} = 8a \cdot R_A - 6a \cdot F + M + 3F \cdot a = 42,19 \cdot 8 \cdot 2 - 6 \cdot 2 \cdot 120 + 45 + 3 \cdot 120 \cdot 2 \approx 0.$$

За відомими правилами побудуємо епюри (рис. 22).

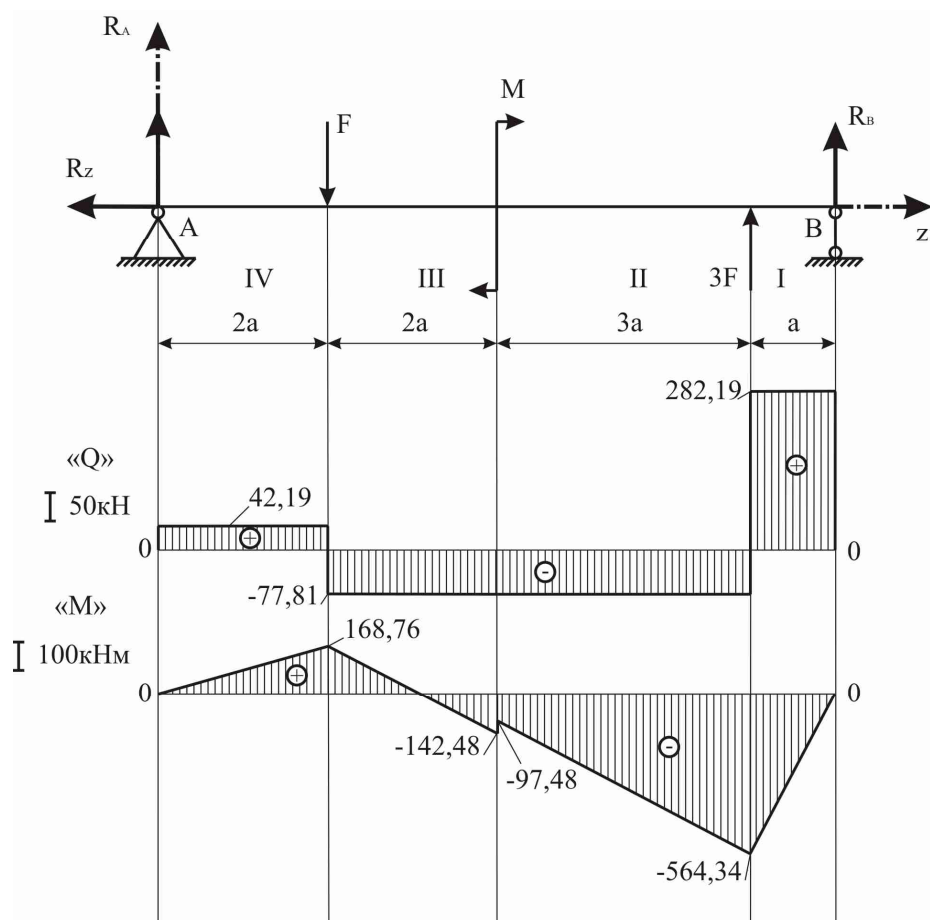
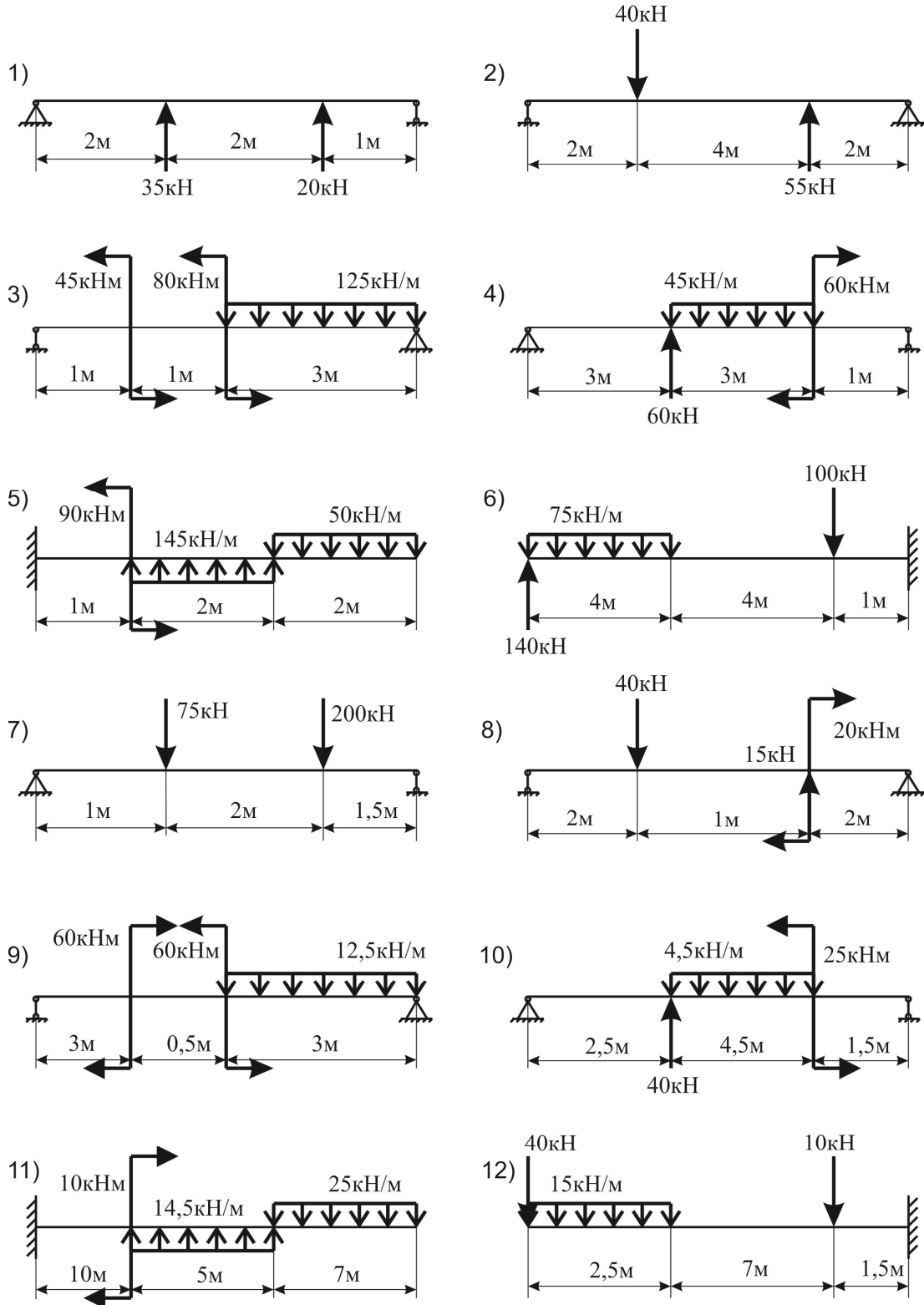
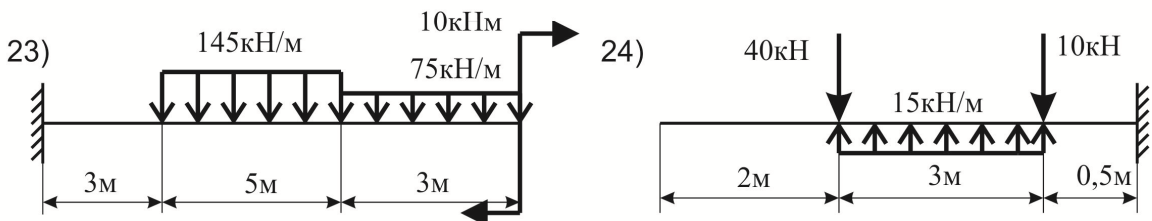
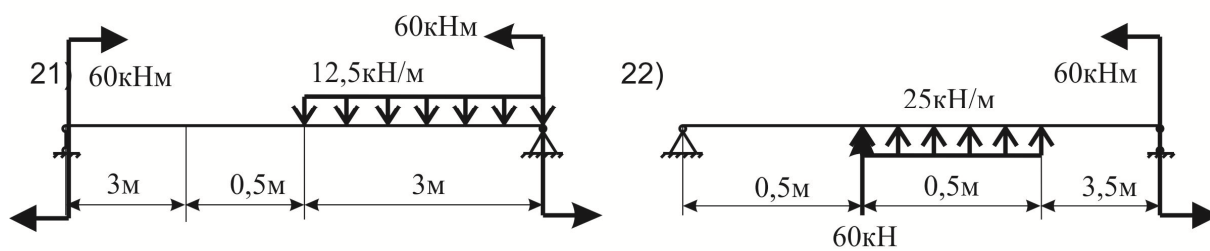
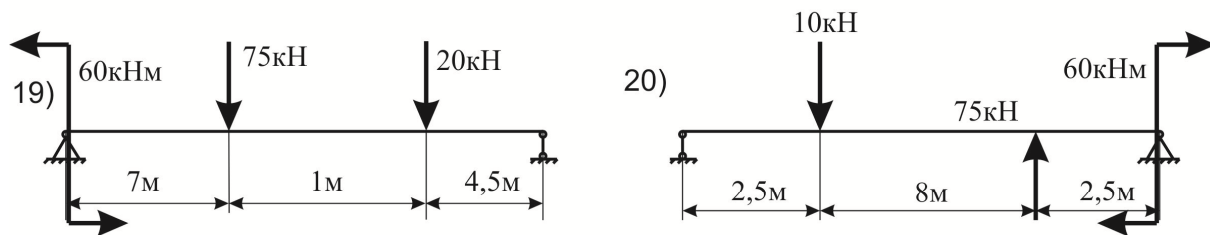
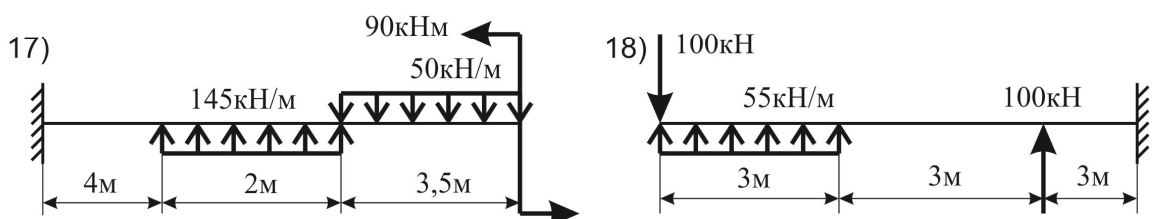
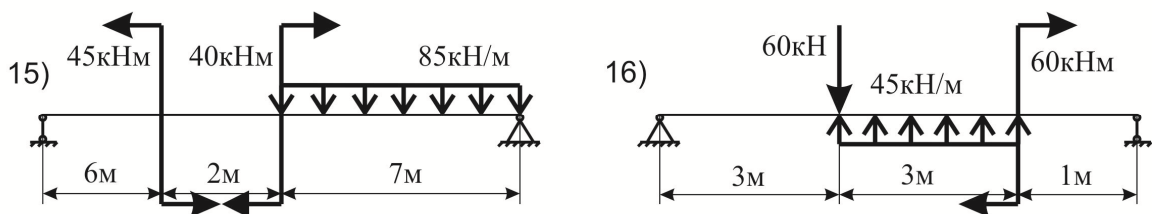
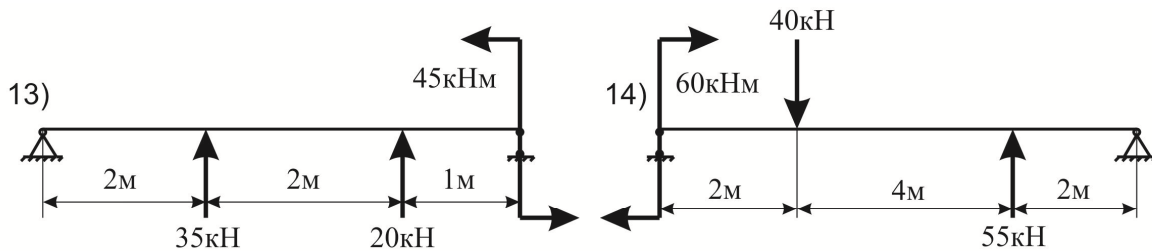


Рисунок 22 – Схема навантаження

**Завдання для самостійної роботи.**

Для заданої балки побудувати епюри: а) поперечної сили  $Q$ , б) згинальних моментів  $M$ . Схеми навантаження зображені нижче.





## СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Писаренко Г.С. Опір матеріалів / Г.С. Писаренко, О.Л. Квітка, Е.С. Уманський. – К.: Вища школа, 1993. – 655 с.
2. Посацький С.Л. Опір матеріалів / С.Л. Посацький. – Львів: Львів. унів., 1973. – 403 с.
3. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов: Учебник для ВТУЗов / В.И. Феодосьев. – М.: Наука, 1986. – 512 с.
4. Сборник задач по сопротивлению материалов / под ред. В.К. Качурина. – М.: Наука, 1970. – 432с.
5. Миролубов И.Н. Пособие к решению задач по сопротивлению материалов. Учебное пособие для техн вузов / И.Н. Миролубов и другие. – М.: Высшая школа, 1985. – 399 с.
6. Мироненко П.С. Методичні вказівки для виконання практичних робіт з курсу «Прикладної механіки» / П.С. Мироненко, П.М. Бондар. – К.: КПІ, 1995.
7. Артоболевский И.И. Теория механизмов и машин / И.И. Артоболевский. – М.: Наука, 1988. – 640 с.
8. Кореняко О.С. Теорія механізмів і машин / О.С. Кореняко. – К.: Вища школа, 1987. – 206 с.
9. Смелягин А.И. Теория механизмов и машин. Курсовое проектирование: учебное пособие / А.И. Смелягин. – М.: ИНФРА-М; Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2003. – 263 с.
10. Теория механизмов и машин / под ред. К.В. Фролова. – М.: Высш. школа, 1987. – 496 с.