

УДК 534.1+539.3

В.П. Лєгеца

ІЗОХРОННІ КОЛИВАННЯ КУЛІ, ЩО ПЕРЕКОЧУЄТЬСЯ МІЖ ДВОМА ЦИКЛОЇДАЛЬНИМИ ВИЇМКАМИ

Вступ

Низькочастотні вимушені коливання великогабаритних несучих об'єктів (таких, як телевежі, пілони мостів, витяжні труби електростанцій, несучі стволи вітроенергетичних станцій, підводні човни, елементи транспортних систем тощо) виникають під дією періодичних сил вітру, гідродинамічних сил, кінематичних збурень або вібронавантажень іншої природи [1, 2].

Такі вимушені коливання тягнуть за собою небезпечне резонансне зростання амплітуд, що негативно відбивається на стійкості, міцності та експлуатаційній надійності зазначених об'єктів.

Для зменшення рівня динамічних навантажень традиційно застосовуються різноманітні технічні пристрої, які об'єднуються загальним терміном “віброзахист”: маятникові динамічні гасники вимушених коливань на підвісі, ударні динамічні гасники, амортизатори та демпфувальні системи тощо. Проте динамічна поведінка зазначених пристроїв у складі віброзахисних систем теоретично обґрунтована, а їх застосування строго регламентовано нормативними документами тільки у відповідних діапазонах власних частот несучих об'єктів – середньочастотних та високочастотних [1, 2].

З іншого боку, за своїми динамічними характеристиками та функціональним призначенням значна частина розглянутих вище масивних несучих об'єктів має власні частоти основного тону коливань, які знаходяться саме в низькочастотному діапазоні ($\omega < 2$ рад/с). У цьому діапазоні традиційні гасники коливань застосувати не вдається через цілий ряд причин, головні з яких полягають у великих габаритах та ненадійності функціонування [3, 4].

Разом з тим, останнім часом почали розвиватися альтернативні конструкції динамічних гасників, функціонування яких ґрунтується на забезпеченні великих взаємних переміщень несучих та несених (робочих) тіл у довільних напрямках горизонтальної площини. Технічні рі-

шення конструкцій для типового ряду коткових гасників захищені патентами України [5–7]. При цьому для реалізації таких переміщень найбільш вдалим виявилися механічні системи з коченням одних твердих тіл по рухомих поверхнях інших тіл без ковзання (котково-демпфувальні системи). Отже, в таких віброзахисних системах із коченням коливальні рухи обмежені кінематичними в'язями, аналітичне врахування яких потребує нових підходів і методів для побудови та дослідження їх динамічної поведінки.

У галузі динаміки зв'язаних твердих тіл раніше розглядалися задачі, в яких досліджувались динамічні ефекти, пов'язані з власним рухом важких куль, циліндрів, роликів по різних алгебричних поверхнях другого порядку, а також аналізувалась динамічна поведінка інших механічних систем, обмежених кінематичними в'язями [8–18].

Через те, що в даній статті поверхні кочення кулі (циклоїдальні виїмки) є трансцендентними і розглядаються вперше, запропонована нижче постановка задачі є *новою* як з теоретичної, так і з практичної точок зору. Крім того, вплив коливальних рухів важких куль та циліндрів (у тому числі як робочих тіл гасників) на рухомі несучі тіла та пов'язані з цими рухами динамічні ефекти до останнього часу не розглядалися.

Відсутність відповідних теоретичних основ для обґрунтування динамічної поведінки віброзахисних систем із котково-демпфувальними пристроями з урахуванням специфіки їх руху на циклоїдальних поверхнях та методу визначення оптимальних конструктивних параметрів стримує їх широке впровадження в сучасну практику віброзахисту низькочастотних конструкцій.

Тому розробка та реалізація нового методу віброзахисту великогабаритних несучих об'єктів із застосуванням циклоїдальних котково-демпфувальних пристроїв є *актуальною* науково-технічною проблемою, яка має важливу практичну направленість. Розв'язання цієї задачі є першим необхідним кроком для побудови динамічної моделі функціонування коткових гасників, який дає можливість визначити *частоту власних коливань гасників* такого типу.

Постановка задачі

Мета статті – визначити рівняння руху центра мас (ЦМ) верхньої опори (робочого тіла

гасника) механічної системи із врахуванням впливу кінематичних в'язей та вивести формулу для частоти її власних коливань.

Геометричні та кінематичні співвідношення

Розглядається плоска задача про чисте кочення однорідної важкої кулі в розрізаній *циклоїдальній* порожнині, утвореній криволінійними поверхнями верхньої та нижньої опор, причому нижня опора є нерухомою (рис. 1).

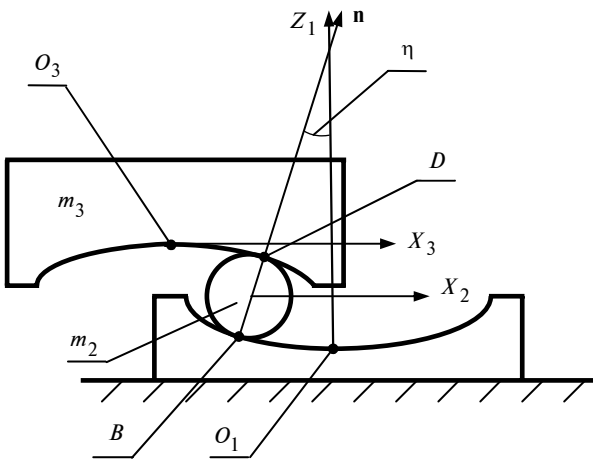


Рис. 1. Принципова схема механічної системи

У даній механічній системі нижня нерухома та верхня рухома опори мають однакові *циклоїдальні* поверхні (робочі виїмки), розміщені симетрично вгнутостями одна до одної. Головною частиною таких пристроїв є однорідна куля, яка перекочується по циклоїдальних виїмках нижньої і верхньої опор *без ковзання* в точках дотику *B* і *D*. Ці точки під час руху кулі між опорами є діаметрально протилежними. Така умова є необхідною через технічну вимогу точного повернення системи (без накопичення відносних переміщень нижньої та верхньої опор) у попереднє (до збудження) положення. При цьому вважається, що верхня опора рухається *поступально*, тобто рух верхньої опори цілком визначається рухом однієї з її точок, наприклад точки O_3 . Нижня опора залишається нерухомою.

Параметричні рівняння циклоїди, при обертанні якої навколо вертикальної осі O_1Z_1 утворюється нижня циклоїдальна поверхня (виїмка), мають такий вигляд (R – характеристика циклоїди, θ – параметр циклоїди):

$$q = R(\theta - \sin \theta) - \pi R, \quad z = R(1 + \cos \theta),$$

$$0 < \theta < 2\pi. \quad (1)$$

Для досліджуваної механічної системи введемо одну узагальнену незалежну координату: θ – параметр циклоїди, який визначає положення кулі на нижній циклоїдальній поверхні (точка *B* на рис. 1). Параметр $\theta = \pi$ відповідає найнижчій точці O_1 контакту кулі та нижньої опори.

Векторні рівняння кінематичних в'язей, які описують явище непроковзування кулі відносно обох циклоїдальних поверхонь, мають такий вигляд:

$$\mathbf{V}_2 = \dot{\phi} \mathbf{j} \times r \mathbf{n}, \quad (2)$$

$$\mathbf{V}_3 = 2\dot{\phi} \mathbf{j} \times r \mathbf{n}, \quad (3)$$

де $\mathbf{n} = \left(\cos \frac{\theta}{2}; 0; \sin \frac{\theta}{2} \right)$ – одинична внутрішня нормаль до нижньої циклоїдальної виїмки, яку побудовано в точці *B* (див. рис. 1); $\dot{\phi}$ – кутова швидкість кулі відносно її ЦМ; r – радіус кулі; $\mathbf{V}_2 = (\dot{x}_2; 0; \dot{z}_2)$ – лінійна швидкість ЦМ кулі; $\mathbf{V}_3 = (\dot{x}_3; 0; \dot{z}_3)$ – лінійна швидкість ЦМ верхньої опори.

Через непроковзування кулі відносно нижньої циклоїдальної виїмки дістанемо таке векторне співвідношення для швидкості ЦМ кулі (η – кут відхилення нормалі \mathbf{n} від вертикальної осі O_1Z_1 ; $\eta = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}$):

$$\begin{aligned} \dot{\phi} \mathbf{j} \times r \mathbf{n} &= \left[4R \sin \left(\frac{\theta}{2} \right) - r \right] \dot{\eta} \mathbf{j} \times (-\mathbf{n}) = \\ &= \left[4R \sin \left(\frac{\theta}{2} \right) - r \right] \left(-\frac{\dot{\theta}}{2} \right) \mathbf{j} \times (-\mathbf{n}) = \\ &= \frac{\dot{\theta}}{2} \left[4R \sin \left(\frac{\theta}{2} \right) - r \right] \mathbf{j} \times \mathbf{n}, \end{aligned} \quad (4)$$

де $\rho(\theta) = 4R \sin \left(\frac{\theta}{2} \right)$ – радіус кривини циклоїди в точці з координатою θ . Природно, що в статті розглядаються тільки ті параметри θ та радіуси r кулі, які задовольняють таку нерівність: $4R \sin \left(\frac{\theta}{2} \right) - r \geq 0$.

Із врахуванням співвідношення (4) рівняння (2), (3) запишемо у скалярному вигляді:

$$\dot{x}_2 = \left[2R \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) - \frac{r}{2} \right] \dot{\theta} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right), \quad (5)$$

$$\dot{z}_2 = - \left[2R \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) - \frac{r}{2} \right] \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \dot{\theta}, \quad (6)$$

$$\dot{x}_3 = 2 \left[2R \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) - \frac{r}{2} \right] \dot{\theta} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right), \quad (7)$$

$$\dot{z}_3 = -2 \left[2R \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) - \frac{r}{2} \right] \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \dot{\theta}. \quad (8)$$

Динамічне рівняння руху механічної системи

Запишемо загальний вираз для енергії прискорень S механічної системи (функції Аппеля [8, 9, 11]):

$$S = J_2 \frac{\ddot{\varphi}^2}{2} + \frac{m_2}{2} (\ddot{x}_2^2 + \ddot{z}_2^2) + \frac{m_3}{2} (\ddot{x}_3^2 + \ddot{z}_3^2), \quad (9)$$

де $J_2 = \frac{2}{5} m_2 r^2$ – момент інерції важкої однорідної кулі відносно її ЦМ.

Через те що $\ddot{x}_3 = 2\ddot{x}_2$ та $\ddot{z}_3 = 2\ddot{z}_2$, функція Аппеля S трансформується так:

$$S = J_2 \frac{\ddot{\varphi}^2}{2} + \left(\frac{m_2}{2} + 2m_3 \right) (\ddot{x}_2^2 + \ddot{z}_2^2). \quad (10)$$

Запишемо вирази для других похідних \ddot{x}_2 , \ddot{z}_2 , $\ddot{\varphi}$, які входять у формулу (10) для S :

$$\begin{aligned} \ddot{x}_2 = & \left[2R \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) - \frac{r}{2} \right] \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \ddot{\theta} + \\ & + \left[2R \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) - \frac{r}{4} \right] \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \dot{\theta}^2, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \ddot{z}_2 = & - \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[2R \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) - \frac{r}{2} \right] \ddot{\theta} - \\ & - \left[R \cos\theta + \frac{r}{4} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] \dot{\theta}^2, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\ddot{\varphi} = \frac{\ddot{\theta}}{2} \left[4 \frac{R}{r} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) - 1 \right] + \frac{R}{r} \dot{\theta}^2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right). \quad (13)$$

Підставимо вирази (11)–(13) у формулу (10) для S . Врахуємо тільки ті члени функції S , які залежать від другої похідної незалежної узагальненої координати θ . В результаті дістанемо нову функцію S^* , яка має такий вигляд:

$$\begin{aligned} S^* = & (2m_3 + 0,7m_2) \left[2R \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) - \frac{r}{2} \right]^2 \ddot{\theta}^2 + \\ & + (2m_3 + 0,7m_2) \left[2R \sin\theta - r \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] R \dot{\theta}^2. \end{aligned} \quad (14)$$

Перейдемо до побудови виразу для суми елементарних робіт δA усіх активних сил, прикладених у відповідних точках механічної системи, на віртуальних переміщеннях цих точок. У загальному вигляді вираз δA для досліджуваної системи запишемо так:

$$\delta A = -m_3 g \delta z_3 - m_2 g \delta z_2. \quad (15)$$

Використовуючи співвідношення (6) і (8), перетворюємо загальний вираз (15) для δA у такий спосіб:

$$\delta A = (2m_3 + m_2) g \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[2R \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) - \frac{r}{2} \right] \delta\theta. \quad (16)$$

З іншого боку, вираз для суми елементарних робіт δA через узагальнену силу P_θ , віднесену до незалежної узагальненої координати θ , має вигляд

$$\delta A = P_\theta \delta\theta. \quad (17)$$

Із співвідношень (16) і (17) дістанемо узагальнену силу P_θ (праву частину рівняння Аппеля) для досліджуваної механічної системи:

$$P_\theta = (2m_3 + m_2) g \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[2R \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) - \frac{r}{2} \right]. \quad (18)$$

Запишемо рівняння Аппеля в загальній формі:

$$\frac{\partial S^*}{\partial \theta} = P_\theta. \quad (19)$$

Знайдемо частинну похідну для виразу (14) за формулою (19) та врахуємо співвідношення (18). В результаті дістанемо динамічне рівняння руху досліджуваної системи

$$\left[4R \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) - r \right] \ddot{\theta} + 2R \dot{\theta}^2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) =$$

$$= \frac{2m_3 + m_2}{2m_3 + 0,7m_2} g \cos\left(\frac{\theta}{2}\right). \quad (20)$$

Якщо $\frac{m_2}{m_3} \rightarrow 0$ (що має місце на практиці),

то отримаємо

$$\left[4R \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) - r\right] \ddot{\theta} + 2R\dot{\theta}^2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = g \cos\left(\frac{\theta}{2}\right). \quad (21)$$

Визначення формули для частоти власних коливань ЦМ верхньої опори

Знайдемо перший інтеграл рівняння (21). Зробимо першу заміну: $\dot{\theta} = z(\theta)$, $\ddot{\theta} = z'_\theta z$. В результаті дістанемо

$$\left[4R \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) - r\right] z'z + 2Rz^2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = g \cos\left(\frac{\theta}{2}\right). \quad (22)$$

Проведемо другу заміну: $y(\theta) = z^2$. Після цього рівняння (22) набуває такого вигляду:

$$\begin{aligned} \left[4R \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) - r\right] y'(\theta) + 4Ry(\theta) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \\ = 2g \cos\left(\frac{\theta}{2}\right). \end{aligned} \quad (23)$$

В результаті зазначених перетворень дістанемо лінійне диференціальне рівняння першого порядку відносно невідомої функції $y(\theta)$. Для визначення його першого інтеграла використаємо підстановку Бернуллі: $y = uv$, $y' = u'v + uv'$. Маємо

$$\begin{aligned} \left[4R \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) - r\right] u'v + \left[4R \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) - r\right] uv' + \\ + 4Ruv \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = 2g \cos\left(\frac{\theta}{2}\right). \end{aligned} \quad (24)$$

З рівняння (24) дістанемо два окремих рівняння для функцій u і v :

$$\left[4R \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) - r\right] v' + 4Rv \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = 0, \quad (25)$$

$$\left[4R \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) - r\right] u'v = 2g \cos\left(\frac{\theta}{2}\right). \quad (26)$$

З рівняння (25) знайдемо

$$v(\theta) = \left(4R \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) - r\right)^{-2}. \quad (27)$$

Підставимо вираз для $v(\theta)$ в рівняння (26) та проінтегруємо його:

$$u(\theta) = C - 4g \left[R \cos \theta + r \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right], \quad (28)$$

де C – довільна стала.

Використавши функції (27) і (28), запишемо вираз для $y(\theta)$:

$$y(\theta) = \frac{C - 4g \left[R \cos \theta + r \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right]}{\left[4R \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) - r\right]^2}. \quad (29)$$

З (29) дістанемо вираз для $\dot{\theta} = z(\theta)$:

$$\begin{aligned} z(\theta) = \dot{\theta} = \\ = \left[4R \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) - r\right]^{-1} \sqrt{C - 4g \left[R \cos \theta + r \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right]}. \end{aligned} \quad (30)$$

Визначимо сталу C у виразі (30) із врахуванням крайової умови $\dot{\theta} = 0$ при $\theta = 2 \arcsin\left(\frac{r}{4R}\right)$:

$$C = \frac{g}{2R} (8R^2 + r^2). \quad (31)$$

Підставимо вираз для C у формулу (30) і знайдемо вираз для частоти власних коливань ЦМ верхньої опори із врахуванням того, що $\theta = \pi - 2\eta$, $|\dot{\eta}| = |\dot{\theta}/2|$:

$$\begin{aligned} |\dot{\eta}| = 0,5(4R \cos \eta - r)^{-1} \times \\ \times \sqrt{\frac{g}{2R} (8R^2 + r^2) + 4gR \cos 2\eta - 4gr \cos \eta}. \end{aligned} \quad (32)$$

Перетворимо підкореневий вираз у формулі (32) так:

$$\begin{aligned} \frac{g}{2R} (8R^2 + r^2) + 4gR \cos 2\eta - 4gr \cos \eta = \\ = \left[4R(1 + \cos 2\eta) - 4r \cos \eta + \frac{r^2}{2R} \right] g = \\ = (16R^2 \cos^2 \eta - 8Rr \cos \eta + r^2) \frac{g}{2R} = \end{aligned}$$

$$= (4R \cos \eta - r)^2 \frac{g}{2R}. \quad (33)$$

Підставимо вираз (33) у формулу (32). В результаті дістанемо формулу для частоти власних коливань ЦМ робочого тіла циклоїдального коткового гасника:

$$|\dot{\eta}| = \omega = \sqrt{\frac{g}{8R}}. \quad (34)$$

Отже, власні коливання ЦМ кулі та верхньої опори мають частоту, яка дорівнює частоті малих власних коливань математичного маятника з довжиною еквівалентного підвісу $L = 8R$.

Крім того, з формули (34) випливає, що члени, які містили радіус r кулі, знищились і частота ω власних коливань ЦМ робочого тіла не залежить від радіуса r кулі.

Виведена формула (34) узгоджується з формулами для частот малих власних коливань важких куль та циліндрів у відповідних виїмках, знайдених методом енергетичного балансу у відомих працях [19–22].

Наприклад, у монографії [21, с. 35] наведено постановку задачі про перекочування без ковзання абсолютно твердого циліндра кругової форми з радіусом r і вагою W по циліндричній поверхні з радіусом a (позначення оригіналу). Припускаючи, що циліндр здійснює прості гармонічні коливання на зазначеній циліндричній поверхні, необхідно знайти кругову частоту p вільних коливань при малих амплітудах переміщення циліндра відносно положення рівноваги (рис. 2).

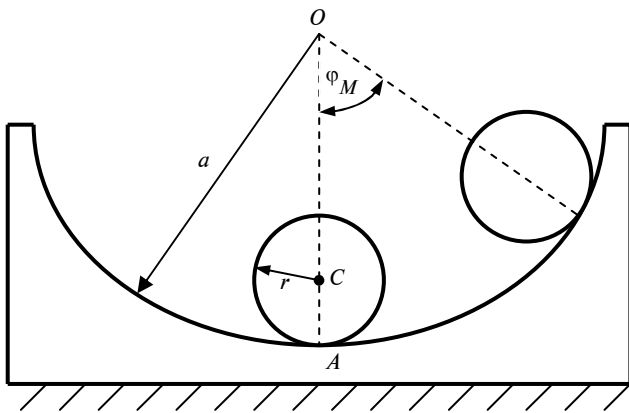


Рис. 2. До задачі про коливання важкого циліндра в циліндричній виїмці

Розв'язання. Розглянемо циліндр у крайньому положенні, яке визначається кутом

φ_M (див. рис. 2). У цьому положенні центр ваги циліндра піднімається від положення рівноваги в напрямку, протилежному дії сили тяжіння, на величину

$$(a - r)(1 - \cos \varphi_M) \approx (a - r) \frac{\varphi_M^2}{2}.$$

Тоді вираз для потенціальної енергії має вигляд

$$E_{n-\max} = \frac{1}{2} W(a - r) \varphi_M^2. \quad (35)$$

У середньому положенні точка контакту A є миттєвим центром обертання циліндра, тому при умові відсутності ковзання миттєва кутова швидкість $\dot{\theta}_M$ відносно цієї точки обчислюється за формулою

$$\dot{\theta}_M = \frac{a - r}{r} \dot{\varphi}_M.$$

Тоді кінетичну енергію, яка дорівнює

$$E_{k-\max} = \frac{1}{2} I_A \dot{\theta}_M^2, \text{ можна записати у вигляді}$$

$$E_{k-\max} = \frac{1}{2} \frac{W}{g} \frac{3r^2}{2} \frac{(a - r)^2}{r^2} \dot{\varphi}_M^2. \quad (36)$$

Прирівнюючи вирази (35) і (36), дістанемо шуканий вираз для кругової частоти $p = \frac{\dot{\varphi}_M}{\varphi_M}$ (див. [21, формула (1.14) на с. 33]) вільних коливань циліндра в циліндричній виїмці:

$$p = \sqrt{\frac{2g}{3(a - r)}}. \quad (37)$$

Отже, бачимо, що формула (34) узгоджується з формулою (37). Власні коливання ЦМ циліндра мають частоту, яка дорівнює частоті малих власних коливань математичного маятника з довжиною еквівалентного підвісу

$$L = \frac{3(a - r)}{2}.$$

Висновки

У статті за допомогою формалізму Аппеля виведено рівняння руху ЦМ верхньої опори досліджуваної механічної системи із врахуванням впливу кінематичних в'язей. На цій основі знайдено важливу формулу для визначення ча-

стоти власних коливань ЦМ важкої кулі та верхньої опори.

Як впливає з формули (34), частота ω власних коливань ЦМ кулі та верхньої опори не залежить від амплітуд їх відхилення відносно початкового положення. Отже, зазначені коливання є *ізохронними*. З формули (34) також впливає, що власні коливання ЦМ кулі та верхньої опори мають частоту, яка дорівнює частоті малих власних коливань математичного маятника з довжиною еквівалентного підвісу $L = 8R$. При цьому формула для частоти ω не містить радіуса кулі r . Змінюючи параметр циклоїди R (головний параметр настроювання

коткового гасника), можна досягти необхідної частоти власних коливань ЦМ кулі та верхньої опори.

Знайдену формулу (34) можна буде використовувати для розробки методики настроювання гасників коткового типу з циклоїдальними виїмками з метою визначення їх оптимальних характеристик.

Результати дослідження можуть зацікавити спеціалістів у галузі теоретичної механіки, динаміки та міцності машин, а також рекомендуються для використання розробникам та проектувальникам коткових віброгасників при визначенні їх оптимальних характеристик.

В.П. Легеза

ИЗОХРОННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ШАРА, ПЕРЕКАТЫВАЮЩЕГОСЯ МЕЖДУ ДВУМЯ ЦИКЛОИДАЛЬНЫМИ ВЫЕМКАМИ

С использованием подхода Аппеля сформулировано уравнение плоского движения однородного шара без скольжения между двумя симметричными циклоидальными выемками. Найдена формула для частоты собственных колебаний шара и верхней циклоидальной выемки.

V.P. Legeza

ON THE ISOCHRONAL OSCILLATIONS OF A BALL ROLLING BETWEEN TWO CYCLOIDAL GROOVES

Using the Appel's approach, the equation of a plane movement of a homogeneous ball rolling between two symmetrical cycloidal grooves without sliding is formulated. Specifically, the formula of the frequency of own oscillations of a ball and upper cycloidal groove is obtained.

1. *Динамический* расчет сооружений на специальные воздействия: Справочник проектировщика / Под ред. Б.Г. Коренева и И.М. Рабиновича. — М.: Стройиздат, 1981. — 216 с.
2. *Фролов К.В., Фурман А.Ф.* Прикладная теория виброзащитных систем. — М.: Машиностроение, 1980. — 320 с.
3. *Легеза В.П.* Динамика виброзащитных систем с роликовым гасителем низкочастотных колебаний // Пробл. прочности. — 2004. — № 2. — С. 106–118.
4. *Легеза В.П.* Динамика виброзащитных систем с шаровым гасителем низкочастотных колебаний // Там же. — №3. — С. 83–94.
5. *Патент України* № 41171А. Гасник вимушених коливань висотних споруд / В.П. Легеза. — Опубл. 15.08.2001. — Бюл. № 7.
6. *Патент України* № 54033А. Котковий віброгасник вимушених коливань висотних об'єктів / В.П. Легеза. — Опубл. 17.02.2003. — Бюл. № 2.
7. *Патент України* № 59097А. Кульовий гасник низкочастотних коливань висотних споруд / В.П. Легеза, М.А. Мартиненко. — Опубл. 15.08.2003. — Бюл. № 8.
8. *Appel P.* Traite de Mecanique Rationnelle. — Paris: Gauthier-Villars, 1953. — 336 p.
9. *Лурье А.И.* Аналитическая механика. — М.: Физматгиз, 1961. — 824 с.
10. *Легеза В.П.* О качении тяжелого шара в сферической выемке несущего тела, совершающего поступательные перемещения в пространстве // Прикл. механика. — 2002. — **38**, № 6. — С. 135–142.
11. *Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А.* Динамика неголономных систем. — М.: Наука, 1967. — 520 с.
12. *Фуфаев Н.А.* Катание шара по горизонтальной вращающейся плоскости // ПММ. — 1983. — **47**, № 1. — С. 43–47.
13. *Фуфаев Н.А.* Теория движения систем с качением // Там же. — 1985. — **49**, № 1. — С. 56–65.
14. *Фуфаев Н.А.* Катание тяжелого однородного шара по шероховатой сфере, вращающейся вокруг вертикальной оси // Там же. — 1987. — **51**, № 1. — С. 98–101.
15. *Abdelkader M.A.* A Ball Rolling on a Rotating Plan // Z. Angew. Math. And Mech. — 1986. — **66**, N 11. — P. 563–566.

16. *Hermans J.A.* Symmetric Sphera Rolling on a Surface // *Nonlinearity*. – 1995. – **8**, N 4. – P. 493–515.
17. *Borisov A.V., Mamaev J.S., Kilin A.A.* Rolling of a Ball on a Surface. New Integrals and Hierarchy of Dynamics // *Reg. and Chaot. Dyn.* – 2001. – **7**, N 2. – P. 201–220.
18. *Lobas L.G.* On rolling system // *Intern. Appl. Mech.* – 2000. – **36**, N 5. – P. 691–696.
19. *Магнус К.* Колебания. Введение в исследование колебательных систем. – М.: Мир, 1982. – 304 с.
20. *Цзе Ф.С., Морзе И.Е., Хинкл Р.Т.* Механические колебания. – М.: Машиностроение, 1966. – 508 с.
21. *Тимошенко С.П., Янг Д.Х., Уивер У.* Колебания в инженерном деле. – М.: Машиностроение, 1985. – 472 с.
22. *Ден Гартог Дж. П.* Механические колебания. – М.: Физматгиз, 1960. – 464 с.

Рекомендована Радою
Механіко-машинобудівного інституту
НТУУ “КПІ”

Надійшла до редакції
11 вересня 2008 року