

УДК 66.02.011

О.С. Сахаров, В.І. Сівецький,
О.Л. Сокольський

ДИСКРЕТНІ МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ДЛЯ РОЗРАХУНКУ ПРУЖНОВ'ЯЗКОПЛАСТИЧНИХ СЕРЕДОВИЩ ІЗ ЗМІННОЮ СТИСЛИВІСТЮ ПРИ ТЕРМОСИЛОВИХ НАВАНТАЖЕННЯХ

Вступ

Сучасні технології хімічних виробництв супроводжуються використанням високих тисків та температур, які суттєво впливають і на матеріали, що переробляються, і на обладнання [1, 2]. У багатьох випадках врахування взаємодії матеріалів із силовими елементами машин та апаратів є необхідною умовою при розробці технологічних процесів і проектуванні обладнання хімічних виробництв. Відповідні задачі належать до зв'язаних нелінійних задач механіки, які потребують одночасного розрахунку твердих тіл, рідин та газів, що взаємодіють між собою та термосиловими полями з врахуванням реальних змін властивостей матеріалів у досліджуваних процесах.

Для адекватного описання взаємодії тіл різної природи використовуються загальні співвідношення нелінійної механіки суцільних середовищ (МСС), які базуються на фундаментальних законах збереження імпульсу та балансу механічної енергії, збереження енергії та маси [3]. Це вимагає розробки універсальних нелінійних моделей та методів їх дослідження, які можуть бути побудовані тільки на базі методів чисельного аналізу, орієнтованих на потужну обчислювальну техніку. До найбільш ефективних чисельних методів розв'язання складних реологічних і динамічних задач механіки суцільних середовищ належить метод скінченних елементів (МСЕ), який дає можливість на базі комп'ютерної техніки моделювати і досліджувати технологічні процеси разом із визначенням напружено-деформованого стану і міцності обладнання хімічних виробництв.

Можливості МСЕ з точки зору описання реальних термомеханічних процесів визначаються переважно властивостями скінченних елементів (СЕ), відображених матрицями жорсткості, в'язкості, теплопровідності та ін.

Постановка задачі

Метою даної статті є побудова на базі моментної схеми [4–6] універсальних співвідношень МСЕ, що дають можливість моделювати термонапружений стан і процеси переробки та формування таких нелінійних робочих середовищ, як розплави полімерів, сипучі та пластичні маси у виробі із врахуванням процесів тверднення і впливу залишкових напружень на властивості кінцевих виробів.

Вихідні рівняння математичної моделі

Наведемо основні співвідношення МСС у вигляді системи диференціальних рівнянь в ейлерових координатах для стаціонарних процесів:

рівняння руху

$$\nabla \cdot \hat{\sigma} + \mathbf{f} = \rho \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}; \quad (1)$$

рівняння збереження енергії

$$c_T \mathbf{v} \cdot \nabla T = \nabla \cdot (\lambda_T \nabla T) + \hat{\sigma} : \hat{\zeta} + Q_{(V)}, \quad (2)$$

де для внутрішньої енергії враховано співвідношення

$$\frac{d}{dt} \rho E = c_T \frac{dT}{dt} = c_T \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla T \right); \quad (3)$$

рівняння збереження маси

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (4)$$

де ρ – маса одиниці об'єму (густина) матеріалу; \mathbf{v} – вектор швидкості точки тіла; \mathbf{f} – вектор зовнішньої сили, що діє на одиницю об'єму тіла; $\hat{\sigma}$ – тензор напружень; $\nabla \mathbf{v}$ – градієнт вектора швидкості; $Q_{(V)}$ – віднесена до одиниці маси швидкість зовнішнього об'ємного притоку тепла разом з іншою немеханічною енергією; E – питома внутрішня енергія (внутрішня енергія одиниці маси тіла).

До системи рівнянь (1)–(4) необхідно також додати геометричні рівняння Коші

$$\hat{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T), \quad \hat{\zeta} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T), \quad (5)$$

які зв'язують тензор деформацій $\hat{\varepsilon}$ з вектором переміщень \mathbf{u} та тензор швидкостей деформацій $\hat{\zeta}$ з вектором швидкостей \mathbf{v} . Для замикання системи рівнянь (1)–(5) до неї треба додати рівняння стану

$$\hat{\phi}(\hat{\sigma}, \hat{\varepsilon}, \hat{\zeta}, T) = 0, \quad (6)$$

які дають змогу описати основні властивості матеріалів реальних тіл.

При формулюванні рівнянь стану (6) середовища приймаються такі загальні допущення:

- режим руху середовища – стаціонарний, достатньо повільний, щоб силами інерції можна було б знехтувати;

- матеріали мають нелінійні в'язкопружно-пластичні властивості, що залежать від напружено-деформованого стану і температури;

- між твердими тілами і рідинами (газами) виконуються умови прилипання – швидкості на стінках дорівнюють швидкостям стінок (положення поверхонь контакту визначається з врахуванням переміщень твердих тіл);

- у процесі переробки і деформування матеріали можуть змінювати властивості стисливості – від стисливих до нестисливих і навпаки.

Будемо вважати, що повні деформації $\hat{\varepsilon}$ та їх швидкості $\hat{\zeta}$ можна подати у вигляді сум:

$$\hat{\varepsilon} = \hat{\varepsilon}^e + \hat{\varepsilon}^p + \hat{\varepsilon}^T, \quad \hat{\zeta} = \hat{\zeta}^e + \hat{\zeta}^p + \hat{\zeta}^T,$$

де $\hat{\varepsilon}^e, \hat{\zeta}^e$ – пружні деформації та їх швидкості, для яких має місце узагальнений закон Гука

$$\hat{\sigma} = \hat{E} \cdot \hat{\varepsilon}^e, \quad \hat{\varepsilon}^e = \hat{\Lambda} \cdot \hat{\sigma}, \quad \hat{\zeta}^e = \hat{\Lambda} \cdot \frac{d\hat{\sigma}}{dt},$$

$\hat{E}, \hat{\Lambda}$ – тензори пружності 4-го рангу, які в загальному випадку можуть залежати від температури; $\hat{\varepsilon}^p, \hat{\zeta}^p$ – пластичні деформації та їх швидкості, зумовлені в'язкопластичністю матеріалів:

$$\hat{\sigma} = \hat{M} \cdot \hat{\zeta}^p - p\hat{g}, \quad \hat{\zeta}^p = \hat{B} \cdot \hat{\sigma},$$

$\hat{M}, \hat{B}, p, \hat{g}$ – тензори в'язкопластичності 4-го рангу, які залежать від температури і $\hat{\varepsilon}^p, \hat{\zeta}^p$, гідростатичний тиск та метричний тензор; $\hat{\varepsilon}^T, \hat{\zeta}^T$ – теплові деформації і їх швидкості:

$$\hat{\varepsilon}^T = \beta^T \hat{g}(T - T_0), \quad \hat{\zeta}^T = \beta^T \hat{g} \frac{dT}{dt},$$

β^T, T_0, T – коефіцієнт лінійного теплового розширення, початкова і кінцева температури.

Із врахуванням прийнятих допущень рівняння стану можна записати через повні деформації або їх швидкості:

$$\hat{\sigma} = \hat{E} \cdot (\hat{\varepsilon} - \hat{\varepsilon}^p) - \hat{\sigma}^T,$$

$$\hat{\sigma} + \hat{\Gamma} \cdot \frac{d\hat{\sigma}}{dt} = \hat{B} \cdot \hat{\zeta} - p\hat{g} - \hat{\sigma}_V^T,$$

$$\hat{\sigma}^T = \hat{A}(T - T_0), \quad \hat{\sigma}_V^T = \hat{h}^T \frac{dT}{dt},$$

де $\hat{\Gamma} = \hat{B} \cdot \hat{\Lambda}$ – тензор в'язкопружності; $\hat{h}^T = \beta^T \hat{B} \cdot \hat{g}$ – тензор об'ємної термов'язкості; $\hat{A} = \beta^T \hat{E} \cdot \hat{g}$ – тензор термопружності; $\hat{\sigma}^T, \hat{\sigma}_V^T$ – тензори теплових напружень. Із врахуванням стаціонарності процесів маємо

$$\hat{\sigma} + \hat{\Gamma} \cdot (\mathbf{v} \cdot \nabla \hat{\sigma}) = \hat{B} \cdot \hat{\zeta} - p\hat{g} - \hat{\sigma}^T,$$

$$\hat{\sigma}_V^T = \hat{h}^T (\mathbf{v} \cdot \nabla T).$$

В іншому варіанті при високому рівні в'язкості, коли стан середовища наближається до твердого, фізичні рівняння доцільно подати через деформації у вигляді

$$\hat{\sigma} = \hat{E} \cdot (\hat{\varepsilon} - \hat{\varepsilon}^p) - \hat{\sigma}^T,$$

$$\hat{\varepsilon}^p = \int_t^p \hat{\zeta}^p dt = \int_t^H \hat{H} \cdot \hat{\sigma} dt.$$

Особливості чисельного моделювання пружнов'язкопластичних середовищ із врахуванням стисливості і термосилових навантажень

Попередні дослідження [4, 6] показали, що при комп'ютерному моделюванні напружено-деформованого стану тонкостінних тіл або слабостисливих середовищ традиційні варіанти МСЕ призводять до значних похибок, які виникають через некоректну апроксимацію об'ємних деформацій і деформацій зсуву. Це явище спостерігається, наприклад, при розрахунках плоскошлітинних головок, де діють високі перепади тиску і прогнозується неадекватне стиснення розплаву, або при розрахунках згину тонкостінних виробів під дією термосилових навантажень. Тому для дискретизації наведених вище рівнянь використана моментна схема МСЕ, яка дає змогу звільнитись від негативних властивостей традиційних елементів поєднанням варіаційного методу з методом моментів [5]. У статті [7] це виконано для в'язкої ньютонівської рідини, де отримані співвідношення для матриць в'язкості

методом переміщень із врахуванням стисливості, а також співвідношення МСЕ змішаним методом для нестисливої рідини. На численних прикладах встановлено, що при послідовному зменшенні стисливості результати розрахунків наближаються до розв'язків, які відповідають нестисливим матеріалам. Методика виправдала себе при незмінних властивостях об'ємного деформування тіл. Але у випадках, коли характеристики стисливості матеріалу є змінними величинами і наближені до умов нестисливості, то виникає нестабільність обчислень ($\mu/\lambda < 10^{-6}$), яка може викривити результати і вимагає контролю за процесами розв'язання систем рівнянь, що суттєво ускладнює автоматизацію розрахунків.

У даній статті пропонується узагальнення підходу [7] для побудови єдиних співвідношень МСЕ в змішаному варіанті незалежно від стисливості матеріалів при збереженні переваг моментної схеми МСЕ.

При чисельному моделюванні задач механіки суцільних середовищ необхідно розв'язувати системи нелінійних рівнянь високого порядку, для яких не існує прямих методів. Тому використовуються ітераційні методи на базі лінеаризованих рівнянь. Для процесів, що нами розглядаються, лінеаризація повинна виконуватись для фізичних рівнянь (рівнянь стану). Як показали чисельні дослідження МСЕ, це можна зробити на рівні визначення дискретних співвідношень для скінченних елементів, якщо за основу взяти матриці жорсткості та в'язкості, які в комбінації дадуть змогу моделювати властивості широкого класу матеріалів.

Для побудови лінеаризованих рівнянь МСЕ в переміщеннях або швидкостях переміщень звичайно застосовується метод Рітца, який забезпечує симетрію матриць (якщо це можливо) системи рівнянь завдяки застосуванню варіаційних принципів. Так, при отриманні матриці жорсткості для пружного тіла можна використати вираз для роботи внутрішніх сил скінченних елементів на можливих переміщеннях:

$$\delta W_{CE} = \frac{1}{2} \delta \int_{V_{CE}} \{\epsilon\}^T \{\sigma\} dV = \int_{V_{CE}} \delta \{\epsilon\}^T \{\sigma\} dV, \quad (7)$$

де V_{CE} – область навколо початку координат; $\{\sigma\} = [\sigma^{11} \sigma^{22} \sigma^{33} \sigma^{12} \sigma^{13} \sigma^{23}]^T$ – вектор напружень, який визначається через вектор деформацій $\{\epsilon\} = [\epsilon^{11} \epsilon^{22} \epsilon^{33} 2\epsilon^{12} 2\epsilon^{13} 2\epsilon^{23}]^T$ і матрицю $[E]$ параметрів пружності матеріалів:

$$\{\sigma\} = [E]\{\epsilon\}, \quad (8)$$

$$[E] = \begin{bmatrix} C^{1111} & C^{1122} & C^{1133} & C^{1112} & C^{1113} & C^{1123} \\ & C^{2222} & C^{2233} & C^{2212} & C^{2213} & C^{2223} \\ & & C^{3333} & C^{3312} & C^{3313} & C^{3323} \\ & & & C^{1212} & C^{1213} & C^{1223} \\ & & & & C^{1313} & C^{1323} \\ & & & & & C^{2323} \end{bmatrix},$$

симетрично

$$\mu^e = \frac{0,5E}{1+\nu}, \quad \lambda^e = \frac{Ev}{(1+\nu)(1-2\nu)} - \text{коефіцієнти пружності, що залежать від температури і деформацій; } C_V^{ijkl} = \mu^e (g^{ik} g^{jl} + g^{il} g^{jk}) + \lambda^e g^{ij} g^{kl} - \text{компоненти тензора пружності ізотропних пружних матеріалів; } g^{ij} - \text{компоненти метричного тензора координатної системи. Беручи до уваги співвідношення з [7, с. 59], що дають змогу записати залежність деформацій від вузлових переміщень у вигляді}$$

$$\{\epsilon\} = [B]\{U\}, \quad (9)$$

можна привести (7) до остаточного варіанта:

$$\begin{aligned} \delta W_{CE} &= \int_{V_{CE}} \delta \{\epsilon\}^T [E] \{\epsilon\} dV = \\ &= \delta \{U\}^T [B]^T [E] [B] \{U\} = \delta \{U\}^T [K^e] \{U\}, \end{aligned}$$

де $[K^e] = [B]^T [E] [B]$ – матриця жорсткості CE; $\delta \{U\}$ – вектор можливих вузлових переміщень.

При розгляді в'язкотекучих матеріалів визначається матриця в'язкості CE. Для цього використовується потужність роботи внутрішніх сил:

$$\delta \dot{W}_{CE} = \frac{1}{2} \delta \int_{V_{CE}} \{\zeta\}^T \{\sigma\} dV = \int_{V_{CE}} \delta \{\zeta\}^T \{\sigma\} dV, \quad (10)$$

де $\{\sigma\}$ – вектор напружень, зв'язаний з вектором швидкостей деформацій $\{\zeta\} = [\zeta^{11} \zeta^{22} \zeta^{33} 2\zeta^{12} 2\zeta^{13} 2\zeta^{23}]^T$ матричним співвідношенням $\{\sigma\} = [M]\{\zeta\}$; $[M]$ – матриця в'язкості, яка формується з компонент тензора в'язкості C_V^{ijkl} аналогічно (8); $C_V^{ijkl} = \mu^V (g^{ik} g^{jl} + g^{il} g^{jk}) + \lambda^V g^{ij} g^{kl}$; μ^V , λ^V – коефіцієнти в'язкості першого та другого роду, що є функціями температури та швидкостей деформацій. Із врахуванням залежності між векторами швидкостей переміщень $\{V\}$ і деформацій $\{\zeta\} = [B]\{V\}$ потужність роботи (9) можна записати у вигляді

$$\delta \dot{W}_{CE} = \int_{V_{CE}} \delta \{\zeta\}^T [M] \{\zeta\} dV =$$

$$\begin{aligned}
&= \delta\{V\}^T [B]^T [M] [B] \{V\} = \\
&= \delta\{V\}^T [K^V] \{V\}, \quad (11)
\end{aligned}$$

де $[K^V] = [B]^T [M] [B]$ – матриця в'язкості СЕ.

У випадку формування системи рівнянь МСЕ змішаного типу, коли невідомими, крім переміщень, є напруження, використовуються узагальнені варіаційні принципи, які можна сформулювати з допомогою множників Лагранжа. Так, при розгляді слабостисливих ізотропних тіл до складу невідомих доцільно приєднати середнє напруження σ_s . Для цього рівняння стану для пружного тіла необхідно записати у вигляді

$$\{\sigma\} = \{s\} + \sigma_s \{g\} = [\tilde{E}]\{\varepsilon\} + \sigma_s \{g\}, \quad (12)$$

де $\{s\}$ – вектор девіатора напружень; $\{g\} = [g^{11} g^{22} g^{33} g^{12} g^{13} g^{23}]^T$ – вектор, елементами якого є контраваріантні компоненти метричного тензора, а матриця пружності $[\tilde{E}]$ відрізняється від $[E]$ тим, що при обчисленні C^{ijkl} замість λ^e підставляється коефіцієнт $\tilde{\lambda}^e$ ($\tilde{\lambda}^e = -2\mu^e/3$) для виділення девіатора напружень. Об'ємна деформація ізотропного матеріалу залежить тільки від середнього напруження:

$$\theta - \frac{\sigma_s}{k^e} = \theta - \eta^e \sigma_s = 0,$$

де $\eta^e = \frac{1}{k^e} = \frac{3(1-2\nu^e)}{E^e}$ – коефіцієнт об'ємної стисливості, який прямує до нуля ($\nu^e \rightarrow 0,5$; $\eta^e \rightarrow 0$; $k^e \rightarrow \infty$), коли матеріал стає нестисливим; E^e – модуль Юнга; ν^e – коефіцієнт Пуассона. Помноживши ліву частину (12) на варіацію середнього напруження $\delta\sigma_s$ як множник Лагранжа, додамо цей добуток до підінтегрального виразу (7) і з врахуванням (11) отримаємо варіант відображення варіації δW_{CE} скінченного елемента змішаного типу:

$$\begin{aligned}
&\delta \dot{W}_{CE} = \\
&= \int_{V_{CE}} (\delta\{\varepsilon\}^T [\tilde{E}]\{\varepsilon\} + \sigma_s \delta\theta + (\theta - \eta^e \sigma_s) \delta\sigma_s) dV. \quad (13)
\end{aligned}$$

Як показали чисельні експерименти, для обчислення зміни об'єму СЕ в цілому Θ_{CE} достатньо обмежитись однією точкою інтегрування в центрах граней. При розгляді полілінійного СЕ з позицій моментної схеми МСЕ об'ємна деформація θ та середні напруження σ_s в межах СЕ вважаються сталою величиною, що дає можли-

вість обчислити другий і третій члени інтеграла (13):

$$\begin{aligned}
&\int_{V_{CE}} (\sigma_s \delta\theta + (\theta - \eta^e \sigma_s) \delta\sigma_s) dV = \\
&= (\sigma_s \delta\theta + (\theta - \eta^e \sigma_s) \delta\sigma_s) V_{CE} = \\
&= \sigma_s \delta\Theta_{CE} + (\Theta_{CE} - \eta^e \sigma_s V_{CE}) \delta\sigma_s. \quad (14)
\end{aligned}$$

Беручи до уваги (10), (12) і (14), запишемо (13) у вигляді

$$\begin{aligned}
\delta \tilde{W}_{CE} &= \int_{V_{CE}} \delta\{\varepsilon\}^T [\tilde{E}]\{\varepsilon\} dV + \\
&+ \sigma_s \delta\Theta_{CE} + (\Theta_{CE} - \eta^e \sigma_s V_{CE}) \delta\sigma_s = \\
&= \delta\{U\}^T [\tilde{K}^e]\{U\} + \delta\{U\}^T \{N\} \sigma_s + \\
&+ \delta\sigma_s \{N\}^T \{U\} - \delta\sigma_s \eta^e \sigma_s V_{CE} = \delta\{\Phi\}^T [\tilde{H}^e]\{\Phi\},
\end{aligned}$$

де $[\tilde{H}^e]$ – змішана матриця для пружного СЕ:

$$[\tilde{H}^e] = \begin{bmatrix} [\tilde{K}^e] & \{N\} \\ \{N\}^T & -(\eta^e V_{CE}) \end{bmatrix}.$$

Тут $[\tilde{K}^e]$ – матриця жорсткості СЕ відносно зміни його форми; $\{N\}$ – вектор впливу вузлових переміщень на об'ємну деформацію СЕ; $\{\Phi\} = \begin{Bmatrix} \{U\} \\ \sigma_s \end{Bmatrix}$ – змішаний вектор невідомих СЕ, який складається з вектора вузлових переміщень та середнього напруження, яке вважається віднесеним до центра СЕ.

Аналогічно знаходиться матриця змішаного типу для в'язкого стисливого СЕ, коли за невідомі величини береться вектор вузлових швидкостей $\{v\}$ разом із середнім напруженням σ_s . Для врахування стисливості скористаємось рівнянням збереження маси (4) у вигляді

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot (\rho v) \frac{1}{\rho} &= \nabla \cdot v + \frac{1}{\rho} v \cdot \nabla \rho = \\
&= \nabla \cdot v - \eta^e v \cdot \nabla \sigma_s = 0, \quad (15)
\end{aligned}$$

де вважається, що зміна початкової густини ρ_0 матеріалу залежить від напруження σ_s ; $\rho = \rho_0 \times (1 - \eta^e \sigma_s)$. За допомогою множника Лагранжа $\delta\sigma$ та рівняння (15) враховується стисливість для в'язкого середовища в змішаній матриці $[\tilde{H}^V]$ для в'язкого СЕ:

$$[\tilde{H}^V] = \begin{bmatrix} [\tilde{K}^V] & \{N\} \\ \{N\}^T & -(\eta^V V_{CE}) \end{bmatrix}, \quad (16)$$

де $[\tilde{K}^V]$ – матриця в'язкості СЕ; $\{N\}$ – вектор впливу вузлових швидкостей на швидкість об'ємної деформації СЕ; $\{\Psi\} = \begin{Bmatrix} \{V\} \\ \sigma_s \end{Bmatrix}$ – змішаний вектор невідомих для в'язкого стисливого СЕ, який складається з вектора вузлових швидкостей і середнього напруження. Коефіцієнт стисливості η^V в (16) є змінною величиною $\eta^V = \frac{\mathbf{v} \cdot \nabla \sigma_s}{\sigma_s}$, яка на початку при $\sigma_s = 0$ покладається рівною нулю ($\eta^V = 0$) – умова нестисливості. Градієнт $\nabla \sigma_s$ обчислюється через вузлові значення σ_s , які дорівнюють середньоарифметичним значенням тих напружень СЕ, що входять у “зірку” скінчених елементів відповідного вузла.

Важливим застосуванням матриць СЕ змішаного методу є дослідження слабостисливих та нестисливих середовищ незалежно від їх стану і особливо тоді, коли в процесі переробки матеріалів або будь-якої взаємодії тіл різної природи властивості їх змінюються в широкому діапазоні, куди включається, зокрема, і перехід від стисливого до повністю нестисливого стану, і навпаки. Це характерно для процесів екструзії та лиття полімерів, пресування пористих матеріалів тощо. Але слід зазначити, що дослідження тільки стисливих матеріалів на основі використання зазначених матриць і запропонованого змішаного підходу до розв'язання задач механіки не завжди є раціональним, оскільки результати, отримані змішаним методом, повністю збігаються з результатами прямого методу переміщень СЕ (на базі матриць жорсткості $[K^e]$ або в'язкості $[K^V]$).

Багато процесів хімічних виробництв є неізотермічними і супроводжуються явищами тепло- і масопереносу. Математичне моделювання їх здійснюється за допомогою спільного розв'язання рівнянь руху (1) та збереження енергії (2), яке з точки зору застосування МСЕ доцільно записати у вигляді варіаційного рівняння:

$$\int_V \lambda_T \nabla T \cdot \nabla (\delta T) dV + \int_V c_T \mathbf{v} \cdot \nabla T \delta T dV - \int_V D_T \delta T dV + \int_S \alpha_T (T - T_c) \delta T dV = 0, \quad (17)$$

де $D_T = \hat{\sigma} \cdot \hat{\zeta} + Q_{(v)}$ – швидкість надходження тепла до одиниці об'єму тіла за рахунок дисипації енергії руху та зовнішнього джерела тепла; α_T –

коефіцієнт тепловіддачі (може залежати від температури) на зовнішній поверхні тіла S ; T_c – температура зовнішнього середовища.

Рівняння МСЕ для теплопередачі будуються на основі матриць СЕ, що характеризують перенесення тепла за рахунок температурної дифузії і руху середовища. Як і при розгляді рівнянь руху, зупинимось на виводі матриці теплопередачі для шестигранного криволінійного елемента. Розподіл температури T в межах СЕ подаємо аналогічно компонентам швидкостей на базі полілінійних функцій форми $N_{(i)}$:

$$T = T^{(1)} N_{(1)} + T^{(2)} N_{(2)} + T^{(3)} N_{(3)} + T^{(4)} N_{(4)} + T^{(5)} N_{(5)} + T^{(6)} N_{(6)} + T^{(7)} N_{(7)} + T^{(8)} N_{(8)}$$

або в матричному вигляді

$$\{T\} = [L]\{T^{(i)}\},$$

$$[L] = [N_{(1)} \ N_{(2)} \ N_{(3)} \ N_{(4)} \ N_{(5)} \ N_{(6)} \ N_{(7)} \ N_{(8)}].$$

Вектор-градієнт температури визначається формулами

$$\{\nabla T\} = [\nabla][L]\{T^{(i)}\} = [G]\{T^{(i)}\},$$

$$[\nabla] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi^1} & \frac{\partial}{\partial \xi^2} & \frac{\partial}{\partial \xi^3} \end{bmatrix}^T,$$

$$[G] = [\nabla][L].$$

Матриця теплопередачі СЕ $[K_T]$ дорівнює сумі двох матриць: $[K_T] = [\Pi_T] + [\Xi_T]$ – матриці теплопровідності $[\Pi_T]$ та конвекції $[\Xi_T]$, які визначаються з першого та другого членів рівняння (17) і записуються у вигляді матриць:

$$\begin{aligned} [\Pi_T] &= \int_{V_{CE}} [G]^T [g^*] [G] \lambda_T dV = \\ &= \int_{-0,5}^{0,5} [G]^T [g^*] [G] \lambda_T \sqrt{g} d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3, \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} [\Xi_T] &= \int_{V_{CE}} [L]^T [J^*]^T \{v\} [G] c_T dV = \\ &= \int_{-0,5}^{0,5} [L]^T [J^*]^T \{V\} [N]^T [G] c_T \sqrt{g} d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3, \end{aligned} \quad (19)$$

де $[g^*]$ – матриця контраваріантних компонент метричного тензора; $[J^*] = [J]^{-1}$ – обернена мат-

риця Якобі; $\{V\}$ – вектор вузлових швидкостей СЕ. На основі багатьох чисельних експериментів встановлено [3, 4], що завдяки малим розмірам СЕ теплотехнічні (λ_T, c_T) та геометричні параметри ($[J^*], [g^*], \sqrt{g}$) в об'ємі СЕ мало змінюються і можна їх вважати сталими величинами і обчислювати матриці теплопередачі в замкнутому вигляді. В результаті суттєво зменшується обсяг обчислювальної роботи і підвищуються ефективність та можливості процесів чисельного моделювання. Розроблені рівняння МСЕ введені в інтегровану систему VESNA [8] для моделювання технологічних процесів, пов'язаних із процесами тепломасопереносу. При цьому слід підкреслити, що з формул (18), (19) впливає симетрія матриці теплопровідності $[P_T]$ і несиметричність матриці конвекції $[\Xi_T]$. У системі VESNA це враховується шляхом реалізації методу Халецького для розв'язання систем алгебричних рівнянь із несиметричними матрицями.

Аналіз результатів чисельних досліджень

Дослідження взаємного впливу пружної деформації конструктивних елементів формуючого устаткування та параметрів течії полімерного матеріалу в його формуючих каналах проводилося на модельній конструкції плоскощільної головки.

Схему нанесення сіткової області на конструктивні елементи та формуючі канали головки, що моделюється, наведено на рис. 1.

Оскільки конструкція симетрична по двох осях, розрахунки проводилися по чверті формувальної порожнини та конструктивних елементів головки.

На рис. 2 показано відмінність між розподілами швидкостей руху поліетилену високої густини на виході з формуючої щільної плоскощільної головки без врахування і з врахуванням пружної деформації її корпусу.

З отриманих результатів чисельних досліджень (див. рис. 2) випливає, що за наявності пружної деформації конструктивних елементів корпусу картина течії розплаву у формуючих каналах якісно змінилася і різниця швидкостей у центральній зоні і на краях формуючої щільної навіть стала зворотною. Моделювання течії розплаву на виході з головки, в якій формуючі канали спрофільовані без врахування пружної деформації конструктивних елементів, показує майже рівномірний розподіл швидкостей по ширині з невеликим збільшенням по краях. В той

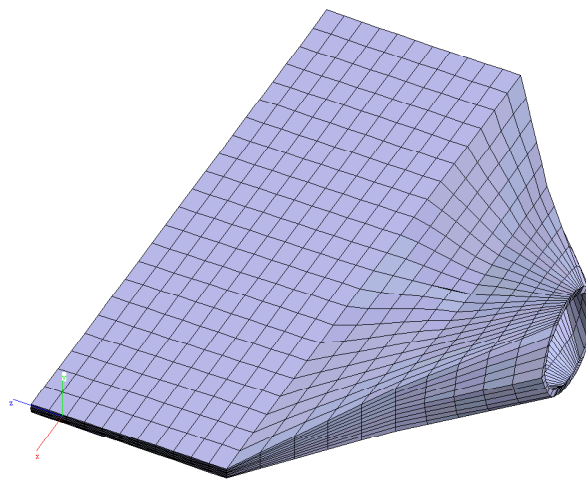


Рис. 1. Сіткова область модельної головки

же час, моделювання процесу формування із врахуванням деформації корпусу головки показує, що висота щільної в центральній зоні збільшується, а внаслідок цього витрата розплаву в цій зоні перевищує витрати по краях формуючої щільної.

Для дослідження впливу жорсткості конструктивних елементів корпусу головки проведено чисельне моделювання залежності розподілу швидкостей руху розплаву полімеру на виході з формувального каналу від циліндричної жорсткості головки, яку визначали за формулою

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)},$$

де E та ν – модуль пружності та коефіцієнт Пуассона матеріалу корпусу, відповідно; h – товщина стінки корпусу.

Графік співвідношення швидкостей розплаву по центру та на краях формуючої щільної головки залежно від величини циліндричної жорсткості стінки корпусу наведено на рис. 3.

Залежність величини найбільшого прогину стінки корпусу від її циліндричної жорсткості показано на рис. 4.

Залежності на рис. 3 і 4 мають нелінійний характер, оскільки із збільшенням деформації стінок корпусу головки відбуваються локальні зміни в'язкості, швидкості, тиску і т. д. Після досягнення значення жорсткості понад 6 Н·м прогин формуючих конструктивних елементів плоскощільної головки незначний і майже не впливає на розподіл швидкостей полімеру в каналах.

Як інший приклад взаємовпливу пружності конструктивних елементів формуючого устат-

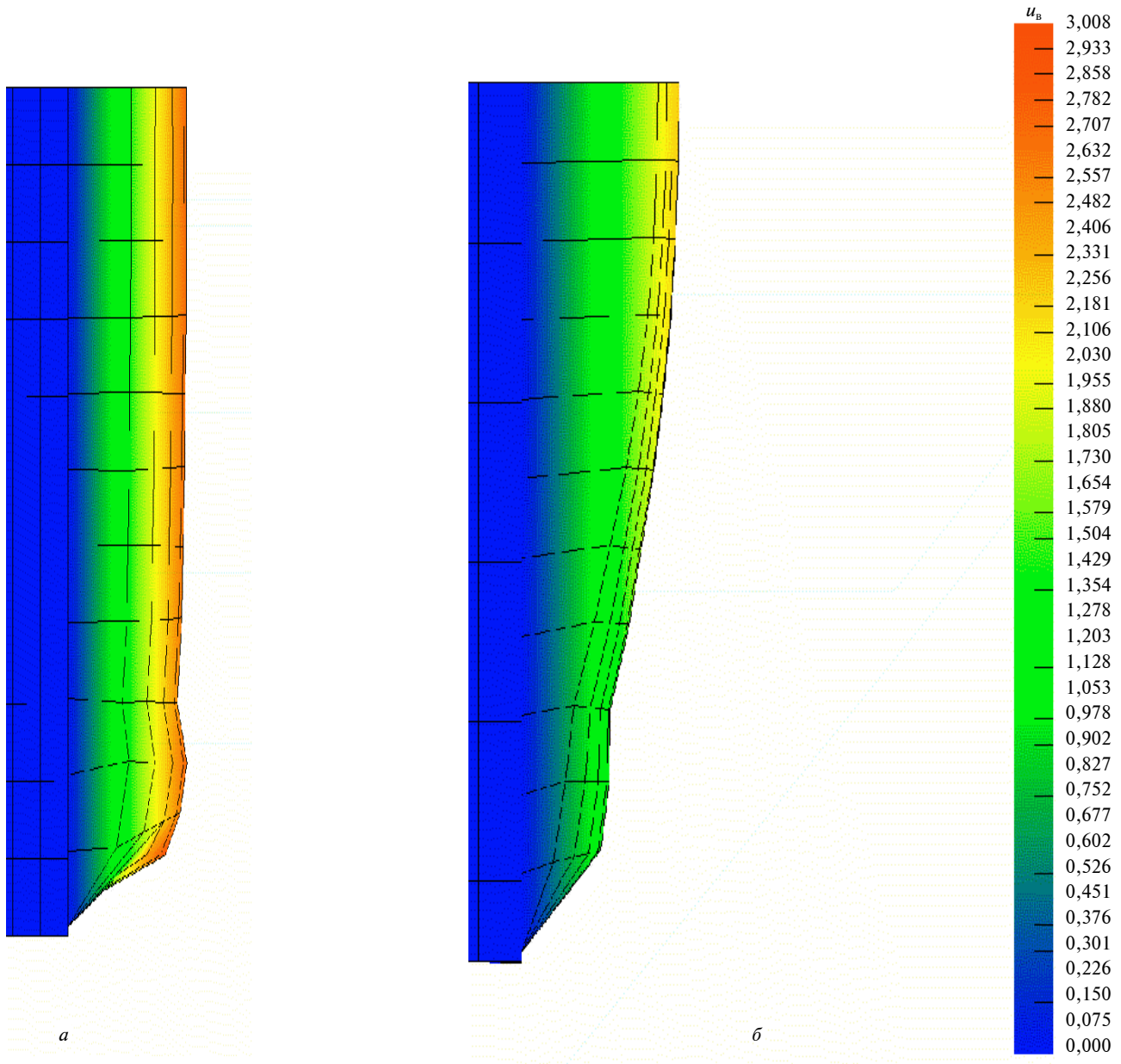


Рис. 2. Розподіл швидкостей розплаву на виході з головки: *a* – без врахування деформації корпусу; *б* – із врахуванням деформації корпусу

кування та параметрів течії перероблюваних матеріалів у його каналі розглядався процес формування листа з гумової суміші в черв'ячно-валковому агрегаті (ЧВА). Просторова модель течії гумової суміші 2Р-581 безпосередньо у формуючій зоні ЧВА являє собою геометрично складний перехід від циліндричного каналу черв'ячної машини до міжвалкового зазору формуючої головки з валками, що обертаються. На рис. 5 показано скінченноелементну розрахункову схему верхньої половини формуючої головки, симетричної відносно горизонтальної площини,

що проходить крізь середину міжвалкового зазору. Діаметр валків – 500 мм, ширина формуючої зони – 600 мм, швидкість обертання валків – 40 м/хв, зазор між валками – 4 мм.

В ході чисельного моделювання досліджувались просторові поля розподілу тиску у формуючій зоні, швидкостей течії перероблюваного матеріалу із врахуванням зміни його реологічних властивостей для різних технологічних режимів у взаємозалежності з прогином валків. Конфігурація перехідної формуючої зони ЧВА відрізняється від інших валкових машин, тому

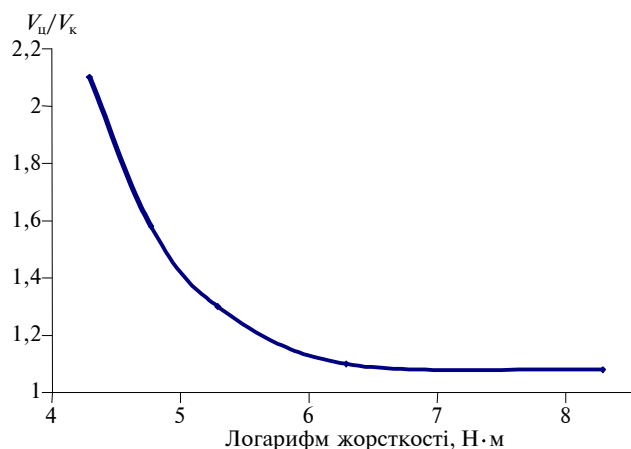


Рис. 3. Залежність співвідношення швидкостей розплаву на виході з головки від циліндричної жорсткості стінки корпусу

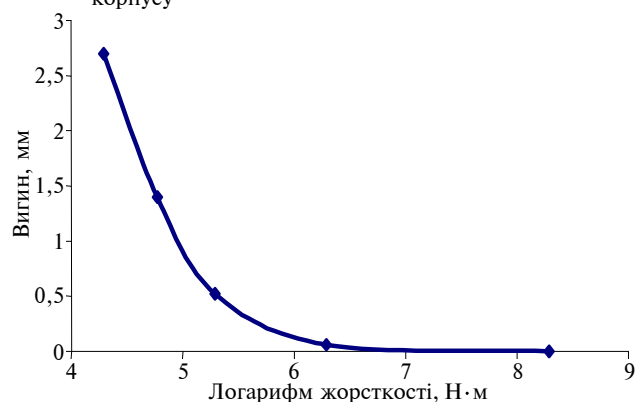


Рис. 4. Залежність найбільшого прогину стінки корпусу від її циліндричної жорсткості

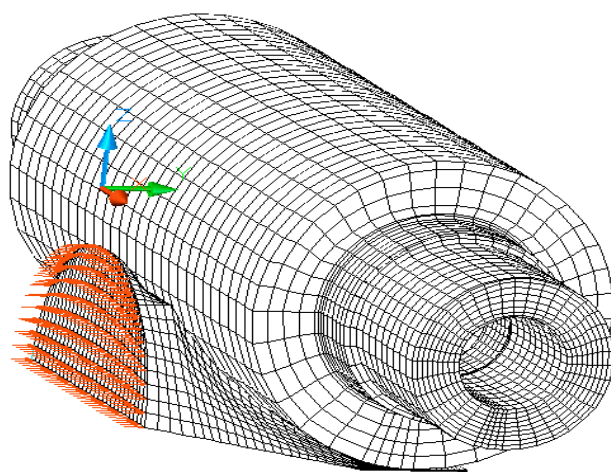


Рис. 5. Скінченноелементна розрахункова схема формуючої головки ЧВА

якісна картина процесу формування та прогину валків у ньому відрізняється від таких для каландрування й вальцювання, що свідчить про обґрунтованість застосування для подібних об'єк-

тів лише тривимірних моделей. Наведений приклад відображає можливість розробленої математичної моделі здійснення зв'язаного розв'язання пружної, теплової та нелінійно-в'язкої задач.

Як приклад, на рис. 6 наведено графіки прогину робочої частини валків для різних температурних режимів формування листових гумових виробів.

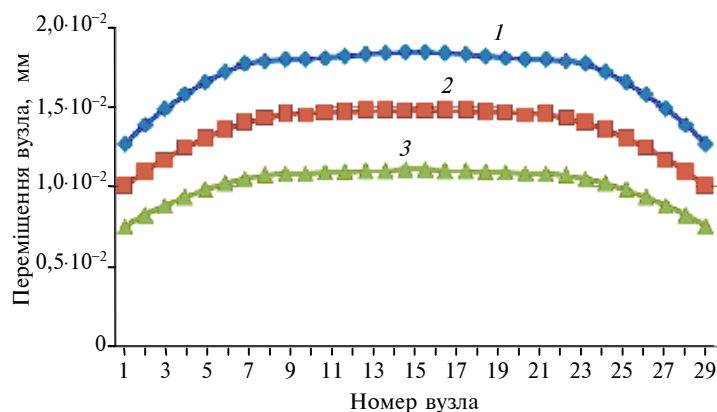


Рис. 6. Прогин робочої частини валка при температурах гумової суміші у формуючій зоні, °С: 1 – 40; 2 – 60; 3 – 80

Прогин валків зростає із зменшенням температури формування і для даних умов досягає 0,02 мм, що в свою чергу впливає на рівнотовщинність вихідного продукту. Для уточненого моделювання пружної деформації конструктивних елементів устаткування та процесу формування виробів необхідно враховувати їх взаємний вплив.

Висновки

Отримані на основі моментної схеми матриці скінченних елементів є універсальними для їх ефективного застосування для розв'язання задач термопружності і тепломасопереносу як твердих тіл, так і рідин та газів. Це дає можливість у рамках системи автоматизованого проектування машин та апаратів хімічних виробництв на сучасному рівні виконувати розрахунки міцності та витривалості конструкцій при термосилових навантаженнях, розробляти нові технологічні процеси переробки матеріалів із врахуванням їх реальних властивостей та особливостей взаємодії з елементами обладнання.

Запропоновані і опробовані алгоритми та методика чисельних розрахунків можуть бути рекомендовані для чисельного моделювання течії полімерних матеріалів із змінними властивостями у формуючих каналах устаткування з рухомими та нерухомими деформівними стінками

і нерівномірними температурними полями. Це дає змогу виключити або значно скоротити проведення кошових і довготривалих натурних експериментів.

Розроблені математична модель та методика можуть застосовуватись для практичного використання в ході проектування технологічного устаткування і оптимізації його конструктивно-технологічних параметрів.

Напрямами подальших досліджень може бути чисельне моделювання таких процесів та обладнання переробки й формування полімерних матеріалів і виробів, як екструзійне формування погонажних виробів, лиття під тиском, вальцювання та каландрування із врахуванням фазових переходів, залишкових напружень і пружної деформації конструктивних елементів переробного обладнання.

А.С. Сахаров, В.И. Сивецкий, А.Л. Сокольский

ДИСКРЕТНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ДЛЯ РАСЧЕТА УПРУГОВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКИХ СРЕД С ПЕРЕМЕННОЙ СЖИМАЕМОСТЬЮ ПРИ ТЕРМОСИЛОВЫХ НАГРУЗКАХ

На базе моментной схемы конечных элементов построены универсальные соотношения механики сплошных сред, которые дают возможность моделировать термонапряженное состояние и процессы переработки и формирования таких нелинейных рабочих сред, как расплавы полимеров, сыпучие и пластичные массы в изделиях с учетом процессов твердения и влияния остаточных напряжений на свойства конечных изделий.

O.S. Saharov, V.I. Sivetskiy, O.L. Sokolskiy

THE DISCRETE MATHEMATICAL MODELS FOR CALCULATION OF ELASTIC-VISCID-PLASTIC ENVIRONMENTS WITH VARIABLE COMPRESSIBILITY AT THERMOPOWER LOADINGS

In this paper, we construct the universal correlations of mechanics of continuous environments on the base of moment chart of finite elements. They allow designing the thermostress state and the processes of processing and formation of such nonlinear working environments as polymers fusions, friable and plastic masses in the products, given that hardening and the influence of remaining tensions on the properties of the end products are considered.

1. *Сивецкий В.И., Сокольский О.Л., Сидоров Д.Е., Ткаченко С.М.* Моделирование параметров течения неньютоновских жидкостей в формующих каналах экструзийного оборудования // Матер. 23-й ежегодной междунар. конф. и выставки "Композиционные материалы в промышленности" (2–6 июня 2003 г.). – Ялта, 2003. – С. 99–101.
2. *Zhao J., Mascia L., Nassehi V.* Simulation of the rheological behavior of polymer blends by finite element analysis // Adv. Polym. Technol. – 1997. – 16, N 3. – P. 206–226.
3. *Седов Л.И.* Механика сплошной среды. Т. 1, 2. – М.: Наука, 1970. – Т. 1. – 492 с. Т. 2. – 568 с.
4. *Киричевский В.В., Сахаров А.С.* Нелинейные задачи термомеханики конструкций из слабосжимаемых эластомеров. – К.: Будівельник, 1992. – 216 с.
5. *Метод конечных элементов в механике твердых тел /* Под общ. ред. А.С. Сахарова и И. Альтенбаха. – К.: Вища шк., 1982. – 480 с.
6. *Сахаров А.С., Баженов В.А., Цыхановский В.К.* Моментная схема метода конечных элементов в задачах нелинейной механики сплошной среды // Прикл. механика. – 2002. – 38, № 6. – С. 24–63.
7. *Сахаров О.С., Сивецкий В.И., Сокольский О.Л., Щербина В.Ю.* Розробка скінченноелементної математичної моделі руху неньютоновських слабостисливих та нестисливих рідин // Наукові вісті НТУУ "КПІ". – 2004. – № 2. – С. 56–65.
8. *Щербина В.Ю., Гондляр О.В., Сивецкий В.И., Сахаров О.С.* САПР. Интегрирована система моделирования технологических процессов и расчета оборудования химической промышленности: Навч. посібник – К.: НТУУ "КПІ", 2006. – 156 с.

Рекомендована Радою інженерно-хімічного факультету НТУУ "КПІ"

Надійшла до редакції
23 липня 2008 року