

# ПРИЛАДОБУДУВАННЯ ТА ІНФОРМАЦІЙНО-ВИМІРЮВАЛЬНА ТЕХНІКА

УДК 681.3+615.89

О.М. Мелашенко, Л.М. Рижков

## ОПТИМІЗАЦІЯ МАГНІТНОЇ СИСТЕМИ СТАБІЛІЗАЦІЇ МІКРОСУПУТНИКА ЗА ЗМІШАНИМ $H_2/H_\infty$ -КРИТЕРІЄМ

### Вступ

Необхідність досягнення високої точності стабілізації мікросупутника (МС) в умовах діючих на нього збурень із невідомим спектральним розподілом змушує відмовитися від використання квадратичного критерію якості в задачі синтезу зворотного зв'язку. Натомість, оптимізація системи орієнтації і стабілізації (СОС) МС за  $H_\infty$ -критерієм дає можливість забезпечити задану точність стабілізації при заданому рівні невизначеності моделі мікросупутника, моделі діючих на нього збурень і моделі магнітного поля Землі (МПЗ).

Оптимізація магнітної системи стабілізації МС за  $H_\infty$ -критерієм розглядалася в [1], де розв'язок поставленої задачі досягається через розширення задачі типового  $H_\infty$ -синтезу на випадок лінійних нестационарних систем. Виконане тут моделювання повних рівнянь руху МС із синтезованим зворотним зв'язком дає високі характеристики за точністю і робастністю замкненої магнітної СОС.

Оптимізація магнітної системи стабілізації МС за  $H_2$ -критерієм розглядалася в [2], де, як і в попередньому випадку, розв'язок поставленої задачі досягається через розширення задачі типового  $H_2$ -синтезу на випадок лінійних нестационарних систем. Тут демонструється ефективність застосування методу лінійних матричних нерівностей у задачі оптимізації магнітної СОС.

Розглянуті в працях [1, 2] нестационарні алгоритми керування потребують значних ресурсів бортового обчислювача. Зважаючи на це, в [3] розглядався стаціонарний алгоритм магнітної СОС, оптимізованої за лінійно-квадратичним критерієм. Показано, що підбором вагових матриць можна досягнути високої точності стабілізації МС в усталеному режимі. З іншого боку, вимога забезпечення високої якості перехідних процесів за неточності моделі МПЗ веде до необхідності пошуку більш ефективних алгоритмів магнітної стабілізації.

### Постановка задачі

Метою даної статті є оптимізація параметрів магнітної СОС на основі використання змішаного  $H_2/H_\infty$ -критерію. Алгоритми керування досліджуються за припущення про доступність для зворотного зв'язку повного фазового вектора МС.

### Модель просторового руху МС

Розглядатимемо далі рух МС в орбітальній системі координат  $O_1X_0Y_0Z_0$  (рис. 1), центр  $O_1$  якої збігається з центром мас супутника. Згідно з рис. 1, вісь  $O_1X_0$  розташована в площині орбіти і направлена по вектору лінійної швидкості супутника, вісь  $O_1Z_0$  направлена по радіус-вектору супутника до центра Землі і вісь  $O_1Y_0$  направлена так, щоб утворювалась права система координат (СК).

По осі  $O_1Y_0$  направлений вектор кутової швидкості обертання супутника по орбіті  $\omega_{OI}^O = (0, -\omega_0, 0)^T$ . Будемо описувати орієнтацію зв'язаної СК відносно орбітальної кватерніоном  $\mathbf{q} = (q_0, q_1, q_2, q_3)^T$ . Тоді, за припущення про збіг осей  $X, Y, Z$  зв'язаної СК з головними центральними осями інерції супутника, повні рівняння його руху в орбітальній СК набудуть вигляду

$$J\dot{\omega}_{BI}^B + \omega_{BI}^B \times (J\omega_{BI}^B) = \tau^B, \quad (1)$$

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2}\mathbf{q} \circ (0, (\omega_{BO}^B)^T)^T,$$

де  $J = \text{diag}(I_x, I_y, I_z)$  – тензор інерції супутника;  $\omega_{BI}^B$  – абсолютна кутова швидкість супутника, виражена у зв'язаній СК;  $\omega_{BO}^B = \omega_{BI}^B - R_O^B \omega_{OI}^O$  – кутова швидкість супутника відносно орбітальної СК, виражена у зв'язаній СК;  $\tau^B = \tau_g^B + \tau_m^B + \tau_d^B$  – сумарний момент, який діє на супутник, виражений у зв'язаній СК, причому  $\tau_g^B = 3\omega_0^2 \mathbf{c}_3 \times (J\mathbf{c}_3)$  – гравітаційний момент (тут  $\mathbf{c}_3$  – проекції орта осі  $O_1Z_0$  на осі зв'язаної СК);  $\tau_m^B = \boldsymbol{\mu}^B \times \mathbf{V}^B$  – момент керування, який розвивається магнітними котушками (тут  $\boldsymbol{\mu}^B$  – магнітний момент котушок і  $\mathbf{V}^B$  – вектор індукції МПЗ у зв'язаній СК);  $\tau_d^B$  – момент збурення, в який входять моменти від залишкової намагніченості супутника, від сонячного вітру,

від залишкової атмосфери та інші моменти;  $\circ$  – знак кватерніонного множення.

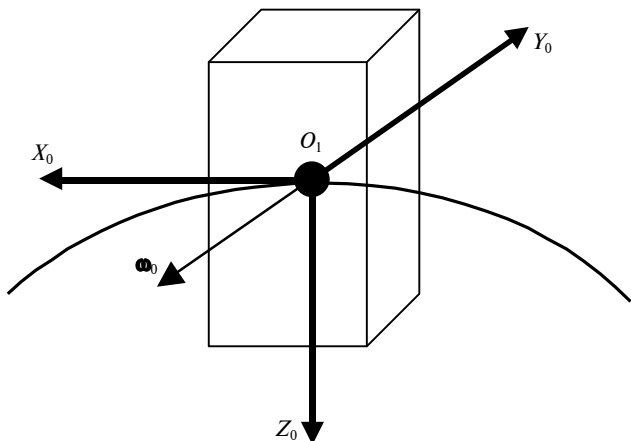


Рис. 1. Супутник в орбитальній СК

Кватерніон  $q$  в (1) подаватимемо у вигляді  $q = (\eta, \epsilon)^T$ , де  $\eta$  – скалярна частина кватерніона і  $\epsilon$  – його векторна частина.

З метою оптимізації керування за змішаним  $H_2/H_\infty$ -критерієм лінеаризуємо рівняння (1) і запишемо їх у просторі станів. Детально ці операції описано в [3], тому одразу наведемо кінцевий результат:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \dot{\epsilon}_1 \\ \epsilon_2 \\ \dot{\epsilon}_2 \\ \epsilon_3 \\ \dot{\epsilon}_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4k_x \omega_0^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3k_y \omega_0^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(1-k_z) \omega_0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1-k_x) \omega_0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -k_z \omega_0^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \dot{\epsilon}_1 \\ \epsilon_2 \\ \dot{\epsilon}_2 \\ \epsilon_3 \\ \dot{\epsilon}_3 \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1/(2I_x) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/(2I_y) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/(2I_z) \end{bmatrix} \tau_d^B(t) +$$

$$+ \frac{J^{-1}}{2\|\bar{B}^O\|} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\bar{B}_y^2 - \bar{B}_z^2 & \bar{B}_x^2 \bar{B}_y^2 & \bar{B}_x^2 \bar{B}_z^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ \bar{B}_x^2 \bar{B}_y^2 & -\bar{B}_x^2 - \bar{B}_z^2 & \bar{B}_y^2 \bar{B}_z^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ \bar{B}_x^2 \bar{B}_z^2 & \bar{B}_y^2 \bar{B}_z^2 & -\bar{B}_x^2 - \bar{B}_y^2 \end{bmatrix} \bar{\mu}^B(t), \quad (2)$$

де  $\bar{B}^O = 1/T_{orb} \int_0^{T_{orb}} B^O(t) dt$  – осереднений вектор індукції МПЗ;  $T_{orb}$  – час одного оберту МС.

### Оптимізація магнітної СОС за змішаним $H_2/H_\infty$ -критерієм

Як вище зазначалося, оптимізація магнітної СОС МС лише за  $H_2$ -критерієм дає змогу досягти високої точності стабілізації у випадку відомих моделей об'єкта керування і збурень, тоді як оптимізація її тільки за  $H_\infty$ -критерієм, забезпечуючи замкненій системі властивості робастності, не дає можливості ефективно впливати на такі характеристики системи, як час перехідного процесу та перерегулювання. Тому метою оптимізації за змішаним  $H_2/H_\infty$ -критерієм є знаходження компромісу між точністю системи і її робастністю, або, іншими словами, компромісу між значеннями  $H_2$  і  $H_\infty$  норм замкненої СОС. Для розв'язання цієї задачі подамо магнітну СОС у вигляді структурної схеми, зображеної на рис. 2.

Матриця  $L$  на рис. 2 є матрицею зворотного зв'язку за повним фазовим вектором МС. Математичний зміст матриць  $A, B_d, \bar{B}_u$  на рис. 2 видно з виразу (2). На основі матриць  $C_\infty, C_2, D_{22}$  формуються сигнали якості замкненої СОС, тобто вибираються виходи системи із своїми ваговими коефіцієнтами, за якими буде мінімізуватися та чи інша норма.

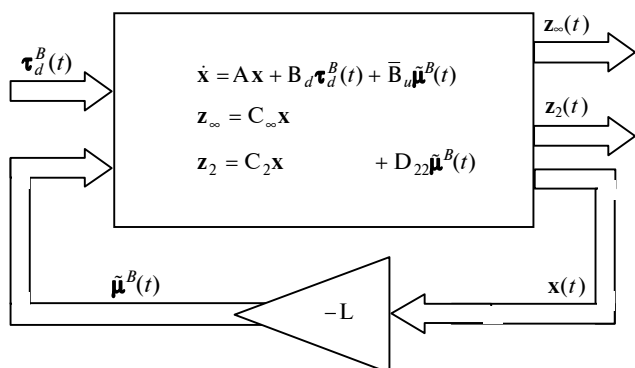


Рис. 2. Структурна схема задачі змішаної  $H_2/H_\infty$ -оптимізації магнітної СОС МС

Введемо оператори  $T_2(s) = \frac{z_2(s)}{\tau_d^B(s)}$ ,  $T_\infty(s) = \frac{z_\infty(s)}{\tau_d^B(s)}$ . Тоді змішаний  $H_2/H_\infty$ -критерій якості керування МС запишеться у вигляді [4]

$$\min_L (\alpha \|T_\infty\|_\infty^2 + \beta \|T_2\|_2^2), \quad (3)$$

де  $\alpha$  і  $\beta$  – вагові коефіцієнти, які визначають питому вагу кожного з критеріїв якості, тобто за заданих матриць  $C_\infty$ ,  $C_2$ ,  $D_{22}$  ітеративна процедура оптимізації магнітної СОС полягатиме у встановленні компромісу між її точністю і робастністю через підбір вагових коефіцієнтів у критерії (3).

Для знаходження розв'язку оптимізаційної задачі (3) використаємо апарат лінійних матричних нерівностей [5]. Згідно з [5], знаходження коефіцієнта підсилення  $L$  зворотного зв'язку за станом полягає в знаходженні таких матриць  $Y$ ,  $X$ ,  $Q$  і скаляра  $\gamma$ , які задовольняють умови

$$\begin{aligned} & \min \operatorname{tr}(Q), \\ & \begin{pmatrix} AX + XA^T + \bar{B}_u Y + Y^T \bar{B}_u^T & B_d & XC_\infty^T \\ (\bullet)^T & -I & 0 \\ (\bullet)^T & 0 & -\gamma^2 I \end{pmatrix} < 0, \\ & \begin{pmatrix} Q & C_2 X + D_{22} Y \\ (\bullet)^T & X \end{pmatrix} > 0, \\ & \gamma^2 < \gamma_0^2, \end{aligned} \quad (4)$$

де  $Y \in \mathbb{R}^{3 \times 6}$ ;  $X \succ 0$  – матриця розмірності  $6 \times 6$ ;  $(\bullet)^T$  – транспонований елемент матриці, симетричний відносно головної діагоналі;  $\gamma > 0$ ;  $\gamma_0$  – бажаний рівень  $H_\infty$ -норми замкненої системи стабілізації.

Якщо система (4) має розв'язок, то шуканий коефіцієнт підсилення знаходиться з рівності  $L = YX^{-1}$ .

Зауважимо, що в системі (4) нерівності є обмеженнями на вибір матриці  $Q$ . При цьому перша і третя нерівності відповідають оптимізації системи за  $H_\infty$ -критерієм, а мінімізація сліду матриці  $Q$  за обмежень у вигляді другої нерівності – оптимізації за  $H_2$ -критерієм, тобто, якщо взяти, що один з коефіцієнтів у (3) дорівнює нулю, а інший – одиниці, то прийдемо до задачі оптимізації або тільки за  $H_2$ -критерієм, або тільки за  $H_\infty$ -критерієм.

За об'єкт керування візьмемо МС, який рухається по коловій орбіті на висоті 650 км з нахилом орбіти, який дорівнює  $98^\circ$ , і тензором інерції при розгорнутій гравітаційній штанзі –  $J = \operatorname{diag}(51,44 \ 51,48 \ 0,76)$  [кг·м<sup>2</sup>]. За модель МПЗ візьмемо модель WMM2005 [6].

При синтезі стаціонарного зворотного зв'язку згідно із змішаним  $H_2/H_\infty$ -критерієм сигнали якості  $z_\infty(t)$  і  $z_2(t)$  вибираємо у вигляді

$$z_\infty(t) = 10^{-3} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{pmatrix}, \quad z_2(t) = \begin{pmatrix} 9 \cdot 10^{-2} \check{\mu}_x \\ 9 \cdot 10^{-2} \mu_y \\ 9 \cdot 10^{-5} \check{\mu}_z \end{pmatrix}.$$

Такий вибір сигналів якості означає, що при синтезі зворотного зв'язку ставиться задача знаходження компромісу між  $H_\infty$ -нормою оператора за входом  $\tau_d^B(t)$  і виходом  $\varepsilon(t)$  і  $H_2$ -нормою того ж оператора за входом  $\tau_d^B(t)$  і виходом  $\check{\mu}^B(t)$ .

Основна вимога синтезу робастних систем, згідно з парадигмою  $H_\infty$ -керування, полягає у виконанні нерівності  $\|T_\infty\|_\infty < 1$ . Для подальших досліджень беруться значення  $\alpha = 10^3$ ,  $\beta = 5 \cdot 10^{-2}$ , при яких  $\|T_\infty\|_\infty = 0,98$ ,  $\|T_2\|_2 = 233$ .

Оцінку ефективності описаного вище алгоритму функціонування магнітної СОС виконаємо через аналіз перехідних і усталених процесів, які в ній виникають. Дослідження ґрунтуються на порівнянні кривих вказаних процесів у магнітній СОС з матрицею  $L$ , розрахованою за точною моделлю МПЗ, і в СОС з матрицею  $L$ , обчисленою за неточною моделлю цього поля.

Для демонстрації переваг запропонованого алгоритму наведемо також криві перехідних і усталених процесів у магнітній СОС з осередненим лінійно-квадратичним регулятором [3]. Проведемо аналіз динаміки супутника у двох найважливіших режимах – початковій орієнтації та стабілізації.

На рис. 3 наведено графіки вільного руху МС по кутах орієнтації з двома алгоритмами магнітної стабілізації за таких початкових умов:  $\omega_{OB}^B = 0$  [рад/с],  $(\phi, \theta, \psi) = (-30^\circ, 10^\circ, -20^\circ)$ . Суцільна, штрихова і пунктирна криві на цьому рисунку відповідають процесам у магнітних СОС згідно з робастним регулятором при точній моделі МПЗ і робастним та осередненим ЛК-регуляторами при неточній моделі МПЗ, взятій у вигляді  $\hat{B}_{orb} = B_{orb} + (0,04, 0,04, 0,04)^T \|B_{orb}\|$ , де

$\mathbf{V}_{orb}$  – вектор індукції МПЗ, за яким розраховувалися матриці зворотного зв'язку  $L$ ;  $\hat{\mathbf{V}}_{orb}$  – вектор індукції МПЗ, з яким насправді взаємодіяли магнітні котушки. Зауважимо, що лінійно-квадратичний регулятор повністю взято з [3].

Як видно з рис. 3, перехідний процес у робастній системі керування закінчується приблизно за п'ять орбітальних витків незалежно від точності моделі МПЗ, тоді як якість перехідних процесів у системі з лінійно-квадратичним регулятором за невизначеності моделі МПЗ істотно погіршилася.

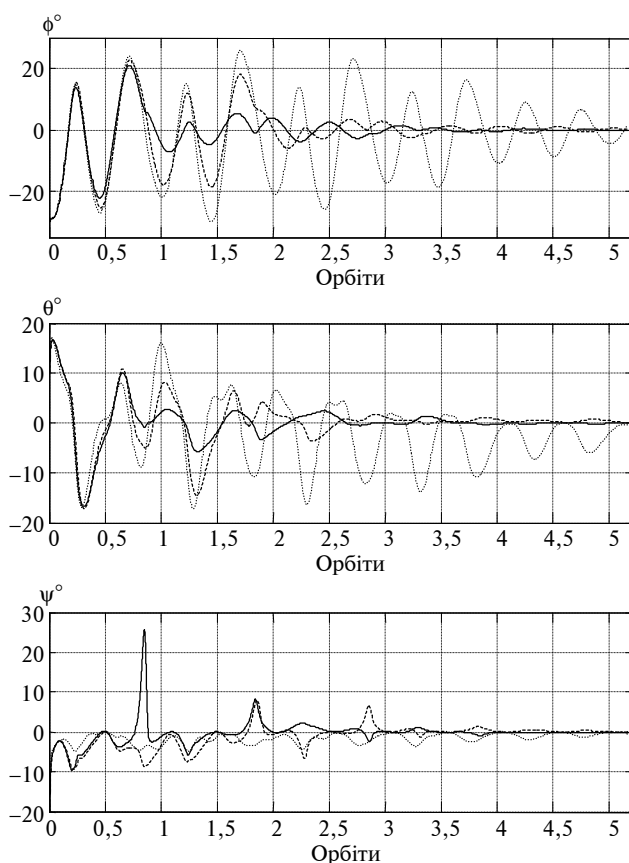


Рис. 3. Перехідні процеси в СОС по трьох кутах орієнтації

На рис. 4 наведено результати моделювання усталених процесів у режимі стабілізації при дії збурюючого моменту вигляду  $\tau_d^B = (3 \cdot 10^{-6} - 5 \cdot 10^{-6} - 9,8 \cdot 10^{-7}) \sin(\omega_0 t)$  [Н·м]. Позначення кривих на цьому рисунку такі ж, як і на рис. 3.

Як видно з рис. 4, і робастний, і осереднений лінійно-квадратичний регулятори дають можливість отримати точність стабілізації не гірше

ніж  $3^\circ-4^\circ$  по всіх трьох каналах, навіть за вказаної неточності моделі МПЗ.

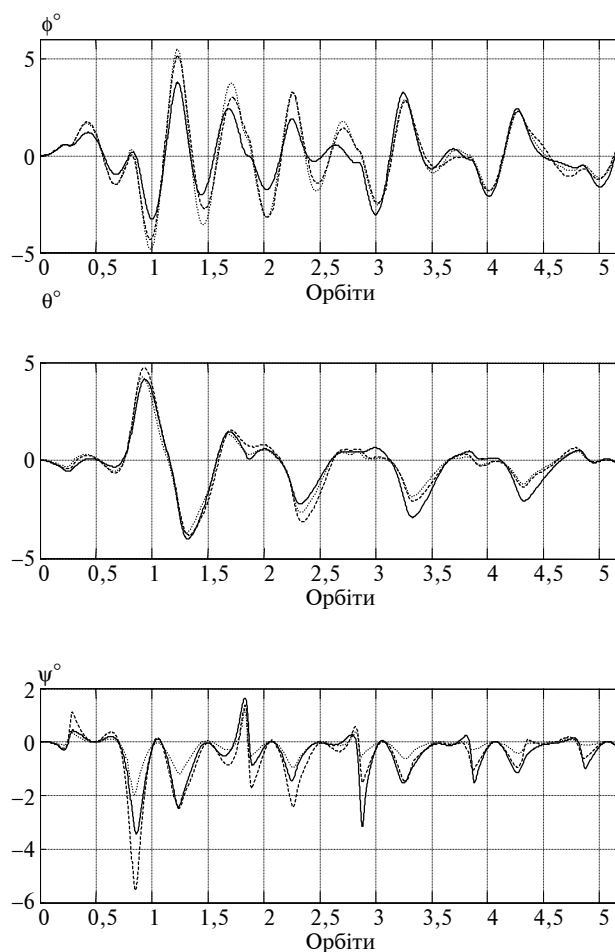


Рис. 4. Усталені процеси в СОС по трьох кутах орієнтації при дії збурення

## Висновки

Оптимізація магнітної системи орієнтації і стабілізації мікросупутника за змішаним  $H_2/H_\infty$ -критерієм істотно підвищує точність стабілізації мікросупутника в перехідному режимі порівняно з точністю, яка досягається при оптимізації системи стабілізації за лінійно-квадратичним критерієм якості у випадку невизначеності моделі МПЗ.

Напрямок подальшої роботи може бути дослідження точності магнітної СОС з нестационарними законами керування.

О.Н. Мелашенко, Л.М. Рыжков

ОПТИМИЗАЦИЯ МАГНИТНОЙ СИСТЕМЫ СТАБИЛИЗАЦИИ МИКРОСПУТНИКА ПО СМЕШАННОМУ  $H_2/H_\infty$ -КРИТЕРИЮ

Рассматривается построение магнитной системы стабилизации микроспутника. Оценивается и сравнивается эффективность регуляторов с использованием разных критериев качества.

O.M. Melaschenko, L.M. Ryzhkov

THE OPTIMIZATION OF MICROSATELLITE MAGNETIC STABILIZING SYSTEM ON THE MIXED  $H_2/H_\infty$ -CRITERION

The core of this paper is the study of the construction of the microsatellite magnetic stabilizing system. Furthermore, using various quality criteria, we estimate and compare the efficiency of the regulators.

1. *Kulkarni J., Campbell M.* An approach to magnetic torque attitude control of satellites via  $H_\infty$ -control for LTV systems // Decision and Control. CDC. 43rd IEEE Conf., 14–17 Dec. 2004. – 2004. – 1, Issue. – P. 273–277.
2. *Wisniewski R., Stoustrup J.* Periodic  $H_2$  Synthesis for Spacecraft Attitude Determination and Control with Vector Magnetometer and Magnetorquers // Proc. of IFAC Workshop on Periodic Control Systems, PSYCO 2001. – Cernobbio-Como, 2001. – P. 121–126.
3. *Мелашенко О.М., Рыжков Л.М.* Синтез гравітаційно-магнітної системи стабілізації микроспутника // Механіка гіроскопічних систем. – 2008. – Вип. 19. – С.76–86.
4. *Khargonekar P.P., Rotea M.A.* Mixed  $H_2/H_\infty$  control: A convex optimization approach // IEEE Trans. Automat. Contr. – 1991. – 36. – P. 824–837.
5. *Chilali M., Gahinet P.*  $H_\infty$ -Design with Pole Placement Constraints: An LMI Approach // Ibid. – 1996. – 11. – P. 358–366.
6. <http://www.ngdc.noaa.gov/seg/WMM/DoDWMM.shtml>

Рекомендована Радою факультету авіаційних і космічних систем НТУУ “КПІ”

Надійшла до редакції  
18 липня 2008 року