

УДК 519.6

А. А. Стенин, Е. Ю. Мелкумян, С. А. Стенин

**Оптимизация вредных выбросов предприятий  
в экологических зонах промышленного региона**

*Аннотация. В данной статье для оптимизации выбросов предприятий в экологических зонах промышленного региона предложен метод суперпозиции для решения элементарных задач путем сведения основной задачи к задаче линейного программирования.*

*Ключевые слова: атмосферные выбросы, уравнения Навье-Стокса, экологическая зона, интенсивность загрязнения, расчетный функционал, линейное программирование.*

**Введение**

Одной из проблем, имеющих глобальный характер, является возрастание содержания в атмосфере углекислого газа в результате техногенных выбросов. Наиболее опасным последствием этого явления может стать повышение температуры воздуха благодаря «парниковому эффекту». Проблема нарушения глобального цикла массообмена углерода уже переходит из области экологии в экономические, социальные и, в конце концов, политические сферы.

Увеличение выбросов вредных химических веществ действующими промышленными предприятиями, загрязняющими окружающую среду, приводит к нарушению экологического равновесия, что весьма заметно в связи с изменением климата планеты. В связи с этим разрабатываются и претворяются в жизнь многочисленные международные программы, протоколы, договоры, соглашения. Примером этому является Рамочная конвенция Организации Объединенных Наций об изменении климата, принятая в Нью-Йорке 9 мая 1992 года. Затем был разработан, и принят к исполнению многими государствами, в том числе и Украиной, Киотский протокол к Рамочной конвенции ООН об изменении климата.

К загрязнению регионального масштаба относятся многие отходы промышленных предприятий и транспорта. В первую очередь, это касается диоксида серы. Он вызывает образование кислотных дождей, поражающих организмы растений и животных и вызывающих заболевания населения. В крупных городах и промышленных центрах воздух,

наряду с оксидами углерода и серы, часто загрязнен оксидами азота и твердыми частицами, выбрасываемыми автомобильными двигателями и дымовыми трубами. Нередко наблюдается образование смога. Хотя эти загрязнения носят локальный характер, они затрагивают многих людей, компактно проживающих на таких территориях. Кроме того, наносится ущерб окружающей природе.

Основными мерами борьбы с загрязнением атмосферы являются: строгий контроль выбросов вредных веществ, замена токсичных продуктов на нетоксичные, переход на замкнутые циклы, совершенствование методов газоочистки и пылеулавливания и др. Решению данной проблемы посвящен целый ряд работ, среди которых наиболее близки по рассматриваемой в данной статье задаче работы [1-5].

### Постановка задачи

Пусть в заданном регионе с границей  $L$  расположены  $n$  промышленных предприятий  $A_i (i = \overline{1, n})$  с координатами  $\bar{r}_i(x_i, y_i, z_i)$ , выбрасывающих ежесекундно  $Q_i$  аэрозолей, состав которых для простоты будем считать одинаковым (рис.1). Будем считать также, что регион  $G$  представляет собой цилиндрическую область с боковой поверхностью  $S_L$ , поверхностью основания  $S_0 (z = 0)$  и верхней поверхностью  $S_H (z = H)$ .

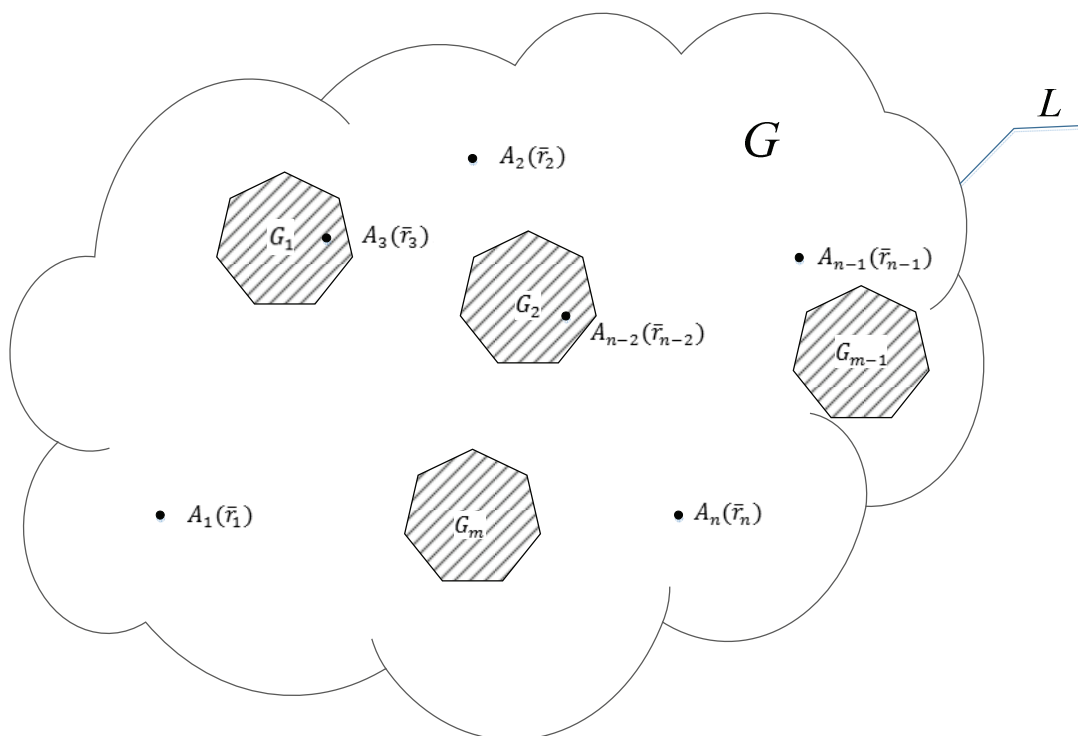


Рис. 1. Карта местоположения предприятий и экологических зон в промышленном регионе

В этом регионе выделим  $m$  экологических зон  $G_k (k = \overline{1, m})$  с заданной предельно допустимой концентрацией выпавших за время  $[0, T]$  аэрозолей, где  $T$  – годовая периодичность.

Задача состоит в определении для каждого предприятия такого допустимого количества выбрасываемых аэрозолей, чтобы их сумма не превышала заданных предельно допустимых норм при минимальных экономических затратах на технологическую реконструкцию, обеспечивающую установленный объем выпуска продукции при заданном уменьшении промышленных выбросов.

### Решение задачи

Известно [1], что математическая модель переноса и диффузии аэрозолей в атмосфере описывается уравнением Навье-Стокса вида:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + v_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + v_y \frac{\partial \varphi}{\partial y} + v_z \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \sigma \varphi = \frac{\partial}{\partial x} \nu \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \mu \Delta \varphi + \sum_{k=1}^m Q_k \delta(\bar{r} - \bar{r}_k), \quad (1)$$

где:  $\varphi(x, y, z)$  – интенсивность аэрозолей субстанции, мигрирующей вместе с потоком воздуха в атмосфере;  $\bar{v} = (v_x, v_y, v_z)$  – вектор скорости вдоль осей  $x, y, z$ ;  $\nu, \mu$  – коэффициенты вертикального и горизонтального турбулентного обмена;  $\bar{r}_k(x_k, y_k, z_k)$  – местоположение  $k$ -го промышленного предприятия;  $\sigma$  – коэффициент поглощения (обратно пропорционален времени).

Уравнение (1) отвечает поставленной задаче при условии

$$\begin{cases} \varphi = f_L \text{ на } S_L \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \alpha \varphi \text{ на } S_0, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \text{ на } S_H \end{cases} \quad (2)$$

где:  $\alpha$  – коэффициент, характеризующий вероятность выпавшей на поверхность Земли субстанции аэрозоля снова попасть в атмосферу;  $f_L$  – степень начального загрязнения на боковой поверхности цилиндрической модели промышленного региона.

Считаем задачу климатически периодической с периодом  $T$ , равным году, т.е.

$$\varphi(\bar{r}, T) = \varphi(\bar{r}, 0). \quad (3)$$

К уравнениям (1) – (3) необходимо добавить для каждого момента времени соотношение неразрывности для компонент вектора скорости  $\bar{v}$  [2]

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0, \quad (4)$$

$$V_z = 0 \text{ при } z = 0 \text{ и } z = H.$$

Расчетная формула годовой дозы загрязнения для  $i$ -й экологической зоны имеет вид:

$$F_k = \int_0^T dt \int_{G_k} P_k \varphi dG, \quad (5)$$

где:

$$P_k = \begin{cases} 1, & \text{при } \bar{r} \in G_k \\ 0, & \text{при } \bar{r} \notin G_k \end{cases} \quad (6)$$

и учитывает загрязнение  $i$ -й экологической зоны.

При этом среднегодовые предельно допустимые дозы аэрозольного загрязнения должны удовлетворять ограничениям

$$F_k \leq C_k, \quad (k = \overline{1, m}). \quad (7)$$

где  $C_k$  – заданные санитарные нормы для  $i$ -й экологической зоны.

Для того, чтобы к расчетному функционалу (5) определения дозы загрязнения с целью выполнения ограничений (7) введем в рассмотрение функционал, позволяющий найти такую совокупность планируемых выбросов аэрозолей  $Q_i$ , которая при уменьшении выбросов обеспечивает выпуск того же объема продукции с минимизацией затрат на технологическую реконструкцию.

В качестве такого функционала примем

$$I = \sum_{i=1}^n k_i (Q_{ni} - Q_{pi}) \rightarrow \min. \quad (8)$$

где:  $Q_{ni}$ , – исходная мощность выбросов;  $Q_{pi}$  – планируемая мощность выбросов;  $k_i$  – коэффициент, определяющий капиталовложения в технологию, обеспечивающую выпуск того же объема продукции при уменьшении выбросов (в расчете на единицу мощности выбросов).

Решение задачи (1) –(8) достаточно сложно в аналитическом виде, поэтому ниже для ее решения предлагается метод суперпозиции для решения элементарных задач путем сведения основной задачи к задаче линейного программирования.

Пусть для данного промышленного региона, с учетом внешнего загрязнения, интенсивность загрязнения региона  $G$  можно представить в виде:

$$\varphi = \sum_{j=1}^n Q_j \varphi_j(\bar{r}, t), \quad (9)$$

где  $\varphi_j(\bar{r}, t)$  – решение уравнения (1) для  $j$ -го промышленного предприятия, т.е.

$$\frac{\partial \varphi_j}{\partial t} + V_1 \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} + V_2 \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} + V_3 \frac{\partial \varphi_j}{\partial z} + \sigma \varphi_j = \frac{\partial}{\partial z} \theta \frac{\partial \varphi_j}{\partial z} + \mu \Delta \varphi_j + \delta(\bar{r} - \bar{r}_j) * Q_j \quad (10)$$

при граничных условиях

$$\begin{cases} \varphi_j = 0 \text{ на } S_L \\ \frac{\partial \varphi_j}{\partial z} = \alpha \varphi_j \text{ на } S_0; \frac{\partial \varphi_j}{\partial z} = 0 \text{ на } S_H. \end{cases} \quad (11)$$

Тогда решение (9) правомочно использовать в расчетном функционале (5). Отсюда

$$F_k = \sum_{i=1}^n Q_{ni} a_{ik}. \quad (12)$$

где

$$a_{ik} = \int_0^T dt \int_{G_k} F_k \varphi_j(\bar{r}, t) dG, \quad i = \overline{1, n}, \quad k = \overline{1, m}. \quad (13)$$

В этом случае можно считать, что коэффициенты  $a_{ik}$  уже известные константы.

Объединяя (7), (8), (12), (13) приходим к следующей постановке задачи

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n k_j (Q_{uj} - Q_{nj}) &\rightarrow \min \\ \sum_{i=1}^n Q_{ni} a_{ik} &\leq C_k, \quad k = \overline{1, m}. \end{aligned} \quad (14)$$

От  $Q_{ni}$  удобно перейти к  $q_i = Q_{ni} - Q_{ui}$ . Тогда мы приходим к задаче линейного программирования по отысканию оптимального набора  $q_i$  на основе решения задачи

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n k_i q_i &\rightarrow \min \\ \sum_{i=1}^n a_{ik} q_i &\geq R_k, \quad k = \overline{1, m} \\ q_i &\geq 0, \quad i = \overline{1, n} \end{aligned} \quad (15)$$

где

$$R_k = \sum_{j=1}^n a_{jk} Q_{uj} - C_k. \quad (16)$$

Естественно, что количество ограничений может быть за счет требований социального и экономического характера, вытекающих из тех или иных приоритетных соображений [3,4].

Если к данному промышленному региону примыкают другие промышленные регионы, из которых вредные выбросы попадают в данный регион, к уравнению (10) необходимо добавить уравнение

$$\frac{\partial \varphi_L}{\partial t} + V_x \frac{\partial \varphi_L}{\partial x} + V_y \frac{\partial \varphi_L}{\partial y} + V_z \frac{\partial \varphi_L}{\partial z} + \sigma \varphi_L = \frac{\partial}{\partial z} \nu \frac{\partial \varphi_L}{\partial z} + \mu \Delta \varphi_L \quad (17)$$

при условиях

$$\begin{aligned} \varphi_L &= f \text{ на } S_L \\ \frac{\partial \varphi_L}{\partial z} &= \alpha \varphi_L \text{ на } S_0 \\ \frac{\partial \varphi_L}{\partial z} &= 0 \text{ на } S_H. \end{aligned} \quad (18)$$

Тогда решение (9) можно записать как

$$\varphi = \sum_{i=1}^n Q_i \varphi_i(\vec{r}, t) + b_k, \quad (19)$$

где

$$b_k = \int_0^T dt \int_{G_k} P_k \varphi_s(\vec{r}, t) dG. \quad (20)$$

В этом случае задача линейного программирования (15) примет вид

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n k_i q_i &\rightarrow \min \\ \sum_{i=1}^n a_{ik} q_i &\geq R_k, k = \overline{1, m}, \\ q_i &\geq 0, i = \overline{1, n} \end{aligned} \quad (21)$$

где

$$R_k = \sum_{j=1}^n a_{jk} q_{mj} + b_k - c_k. \quad (22)$$

Представленные выше частная и общая задачи линейного программирования по оптимизации вредных выбросов предприятий в экологических зонах данного промышленного региона могут быть решены известными численными методами [6].

### Заключение

Поскольку рассмотренные задачи линейные и периодические во времени, то их решение осуществляется с некоторых начальных данных до наступления периодичности. Обычно требуется несколько годовых цикла расчета. Кроме того, поскольку сформулированная задача сведена к задачам линейного программирования при  $q_i \geq 0$  и всех положительных коэффициентах  $a_{ik}$ ,  $b_k$  решение задачи находится на

гранях многогранников, образующихся при построении области ограничений с помощью стандартных методов линейного программирования.

### Литература

1. Пэнгл Р. Методы системного анализа окружающей среды. / Пер. с англ. под ред. Н. Н. Моисеева – М.: Мир. 1979.
2. Марчук Г. И. Математическое моделирование в проблеме окружающей среды – М.: Наука. 1982.
3. В. М. Гарин, И. А. Кленова, В. И. Колесников, Промышленная экология, Маршрут, 2005.
4. Охрана окружающей среды от негативного воздействия хозяйственной деятельности / под ред. Д. В. Елисеева – Новосибирск: Изд. «СибАК», 2015
5. Швыряев А. Л., Меньшиков В. В. Оценка риска воздействия загрязнения атмосферы в исследуемом регионе – М.: Изд-во МГУ. 2004. 124 с.
6. Фельдман Л. П., Петренко А. І., Дмитрієва О. А. Чисельні методи в інформатиці. К.: Видавнича група ВНУ, 2006. – 480 с.