УДК 004.75

ЗАЙЧЕНКО Ю.П.,
ОВИ НАФАС АГАИ АГ ГАМИШ

ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАВИСИМОСТИ «ДОХОДНОСТЬ-РИСК» В ЗАДАЧЕ ОПТИМИЗАЦИИ НЕЧЕТКОГО ПОРТФЕЛЯ

В статье рассмотрены задачи портфельной оптимизации в нечетких условиях. Построена математическая модель данной задачи. Исследована зависимость «оптимальная доходность - риск» для нечеткого портфеля. Определены достаточные условия при которых эта зависимость будет монотонно-убывающей. Приводятся результаты экспериментальных исследований, подтверждающие теоретические результаты.

The fuzzy portfolio optimization problem is considered. The mathematical model is constructed and the dependence “optimal benefits – risk” is investigated. The sufficient conditions for this dependence to be monotonously decreasing are obtained. The results of experimental investigations are presented.

Задача оптимизации инвестиционного портфеля в условиях неопределенности в последние годы вызывает значительный интерес. Для решения этой проблемы был предложен аппарат нечетких множеств в работах [1,2], согласно которому доходности акций и в целом доходность инвестиционного портфеля рассматриваются как нечеткие числа с заданной функцией принадлежности, а риск трактуется как возможность (субъективная вероятность) ситуации, когда реальная доходность портфеля оказывается ниже ожидаемой доходности нечеткого портфеля.

В ходе экспериментальных исследований разработанного метода были построены зависимости «оптимальная доходность-риск» для нечеткого портфеля, которые во многих случаях имели прямо противоположный вид по сравнению с классической моделью Марковица-Тоббина [3]. В предыдущей работе [4] были получены достаточные условия, при которых зависимость «оптимальная доходность-риск» в задаче нечеткой портфельной оптимизации является монотонно –убывающей для частного случая, когда портфель состоял из двух ценных бумаг (ЦБ). Целью настоящей работы является обобщение полученных результатов на случай, когда портфель состоит из произвольного числа ЦБ, получение аналитических условий, при которых зависимость «оптимальная доходность-риск» для нечеткого портфеля будет монотонно убывающей и их экспериментальная проверка.

Задача нечеткой портфельной оптимизации базируется на допущении, что доходность портфеля является нечетким числом (НЧ), описываемым тройкой параметров:

$$r = (r_{\min} = \sum_{i=1}^{N} x_i r_i ; \tilde{r} = \sum_{i=1}^{N} x_i \tilde{r}_i ; r_{\max} = \sum_{i=1}^{N} x_i r_{i2})$$

где $(r_{1i}, \tilde{r}_i, r_{2i})$ – доходность i-*той* ценной бумаги. x_i-доля i-*той бумаги в портфеле.*

Задается критериальное значение доходности портфеля r^*, которое может быть как четким числом, так и нечетким.

Для того, чтобы определить структуру портфеля, который обеспечит максимальную доходность при заданном уровне риска, требуется решить следующую задачу оптимизации:

$$\tilde{r} = \sum_{i=1}^{N} x_i \tilde{r}_i \to \max \tag{1}$$

$$\beta = const \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^{N} x_i = 1 \; x_i \geq 0 \; i = \overline{1, N} \tag{3}$$

$$0 < \beta < 1$$

где β- уровень риска.

В работе [1] было показано, что этот случай возможен когда

$$r_{\min} = \sum_{i=1}^{N} x_i r_{i1} \leq r^* < \sum_{i=1}^{N} x_i \tilde{r}_i$$

либо когда

$$\sum_{i=1}^{N} x_i \tilde{r}_i \leq r^* < \sum_{i=1}^{N} x_i r_{i2} = r_{\max}$$

Тогда используя результаты работы [3], задача (1)-(3) сводится к следующей задаче нелинейного программирования:

$$\tilde{r} = \sum_{i=1}^{N} x_i \tilde{r}_i \to \max \tag{4}$$

Рассмотрим случай, когда критериальное значение доходности r^* удовлетворяет условиям

$$\sum_{i=1}^{N} x_i r_{i1} \le r^* \le \sum_{i=1}^{N} x_i \tilde{r}_i = \tilde{r} \quad (5)$$

Тогда величина риска равна [1,2]

$$\beta(x) = \frac{1}{\sum_{i=1}^{N} x_i r_{i2} - \sum_{i=1}^{N} x_i r_{i1}} [(r^* - $$

$$- \sum_{i=1}^{N} x_i r_{i1}) + (\sum_{i=1}^{N} x_i \tilde{r}_i -$$

−r∗)ln(i=1Nxiri−r∗i=1Nxiri−i=1Nxiri1)] (6)

Требуется доказать, что функция риска $\beta(x)$ является монотонно убывающей, где

$$\beta(x) = \left(A(x) + B(x) \ln \frac{B(x)}{C(x)}\right) D(x),$$

$$A(x) = r^* - \sum_{i=1}^{N} x_i r_{i1};$$

$$B(x) = \sum_{i=1}^{N} x_i \tilde{r}_i - r^*;$$

$$C(x) = \sum_{i=1}^{N} x_i \tilde{r}_i - \sum_{i=1}^{N} x_i r_{i1},$$

$$D(x) = \frac{1}{\sum_{i=1}^{N} x_i r_{i2} - \sum_{i=1}^{N} x_i r_{i1}}.$$

Заметим, что функция $A(x)$ – линейна и поэтому не строго выпукла, а функции $B(x)$ и $C(x)$ также линейны.

Кроме того

$r_i \ge r_{i1}, i = \overline{1, N}$, и $\sum_{i=1}^{N} x_i \tilde{r}_i - r^* > 0$ по предположению (условие (5).

Рассмотрим функцию $D(x)$. Найдем

$$\frac{\partial D(x)}{\partial x_i} = D'(x) = -\frac{r_{i2} - r_{i1}}{(\sum_{i=1}^{N} x_i (r_{i2} - r_{i1}))^2} < 0 \quad (7)$$

Для удобства обозначим

$$A(x) + B(x) \ln \frac{B(x)}{C(x)} = \varphi(x). \quad (8)$$

Докажем, что $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \varphi'(x) < 0$.

Рассмотрим

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(A(x) + B(x) \ln \frac{B(x)}{C(x)}\right) = A'(x) +$$

$$+ B'(x) \ln \frac{B(x)}{C(x)} + B(x) \frac{C(x)}{B(x)} \frac{B'(x)C(x) - C'(x)B(x)}{C^2(x)} =$$

$$= A'(x) + B'(x) \ln \frac{B(x)}{C(x)} + B'(x) - C'(x) \frac{B(x)}{C(x)} \quad (9)$$

Подставив значения $A'(x)$ и $B'(x)$ в (9), получим:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -r_{i1} + \tilde{r}_i \ln \frac{B(x)}{C(x)} + \tilde{r}_i - (\tilde{r}_i - r_{i1}) \frac{B(x)}{C(x)} =$$

$$\tilde{r}_i \left(1 + \ln \frac{B(x)}{C(x)}\right) - r_{i1} - -(\tilde{r}_i - r_{i1}) \frac{B(x)}{C(x)} \quad (10)$$

Поскольку $\frac{B(x)}{C(x)} < 1$, то $\frac{B(x)}{C(x)} < 1$.

Отсюда, после упрощения (10), мы получим:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} < \tilde{r}_i \left(1 + \ln \left(\frac{B(x)}{C(x)}\right) - \frac{B(x)}{C(x)}\right), \quad (11)$$

$$1 + \ln \left(\frac{B(x)}{C(x)}\right) - \frac{B(x)}{C(x)} = 1 + \ln \left(\frac{\tilde{r} - r^*}{\tilde{r} - r_{min}}\right) - \frac{\tilde{r} - r^*}{\tilde{r} - r_{min}} \quad (12)$$

Заметим, что $r^* > r_{min} = \sum_{i=1}^{N} x_i r_{i1}$ и $\tilde{r} > r^*$. Покажем, что выражение (12) меньше 0. Обозначим $\tilde{r} - r^* = a$, тогда:

$\tilde{r} - r_{min} = \tilde{r} - r^* + r^* - r_{min} = a + y$,

где $y = r^* - r_{min} > 0$.

Подставляя эти обозначения в (12), получим:

$$1 + \ln \left(\frac{\tilde{r} - r^*}{\tilde{r} - r_{min}}\right) - \frac{\tilde{r} - r^*}{\tilde{r} - r_{min}} = 1 + \ln \left(\frac{a}{a+y}\right) - \frac{a}{a+y} \quad (13)$$

Покажем, что $\Delta = 1 + \ln \left(\frac{a}{a+y}\right) - \frac{a}{a+y} < 0$ для всех $y > 0$.

Очевидно, что $\Delta = 1 + \ln \left(\frac{a}{a+y}\right) - \frac{a}{a+y} = 0$ при $y = 0$, и кроме того, функция $\Delta(y)$ монотонно убывающая, т.к.

$$\Delta'(x) = -\frac{1}{a+y} + \frac{a}{(a+y)^2} = -\frac{y}{(a+y)^2} < 0 \quad (14)$$

для всех $y > 0$.

Таким образом $\Delta(y) < 0$, для всех $y > 0$, и окончательно $\frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_i} < 0$.

Вычислим первые производные:

$$\frac{\partial \beta}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\varphi(x) D(x)\right) = \varphi'(x) D(x) + + D'(x) \varphi(x)$$

И т.к. $\varphi'(x) < 0$, $D'(x) < 0$, а $\varphi(x) > 0$, $D(x) > 0$, то получим окончательно

$$\frac{\partial \beta(x)}{\partial x_i} < 0 \quad (15)$$

Таким образом, мы получили следующие достаточные условия монотонно убывающего характера зависимости « оптимальная доходность –риск» для задачи оптимизации нечеткого портфеля:

$$\sum_{i=1}^{N} x_i r_{i1} \le r^* \le \sum_{i=1}^{N} x_i \tilde{r}_i = \tilde{r} \quad (16)$$

Пример 1

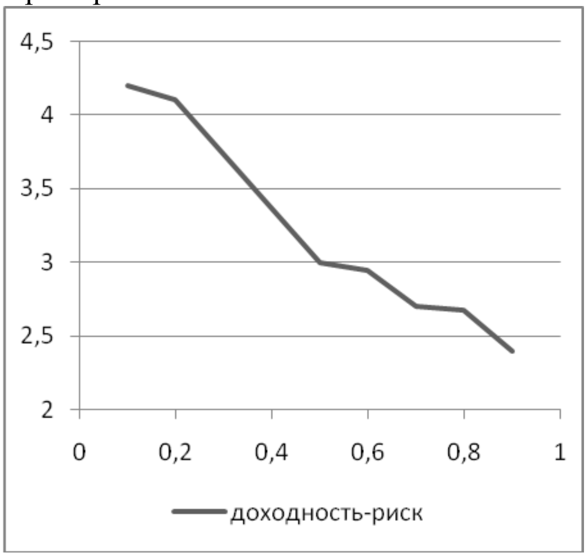

Рис. 1. График зависимости доходность- риск нечеткого портфеля

Пример 1.

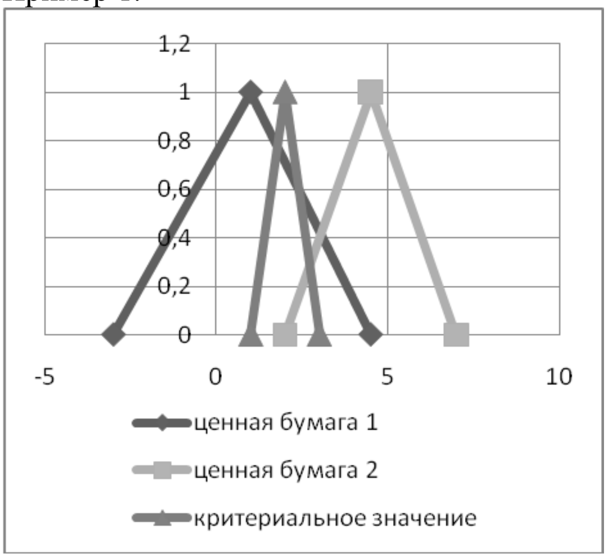

Рис. 2. Взаимное расположение нечетких доходностей ЦБ и критериального значения для треугольных ФП

Пример 2.

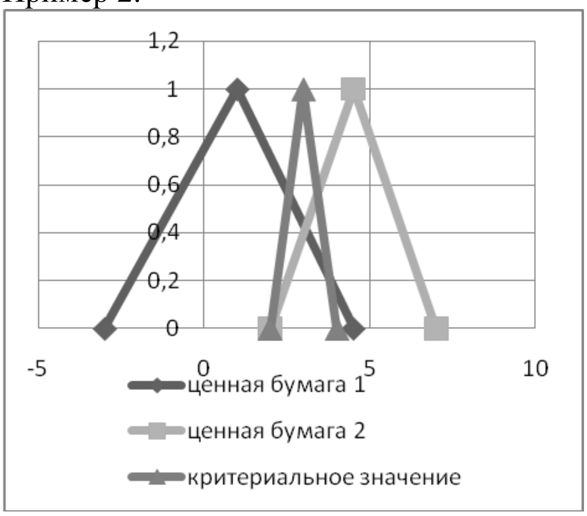

Рис. 3. Взаимное расположение нечетких доходностей ЦБ и критериального значения.

Пример 3.

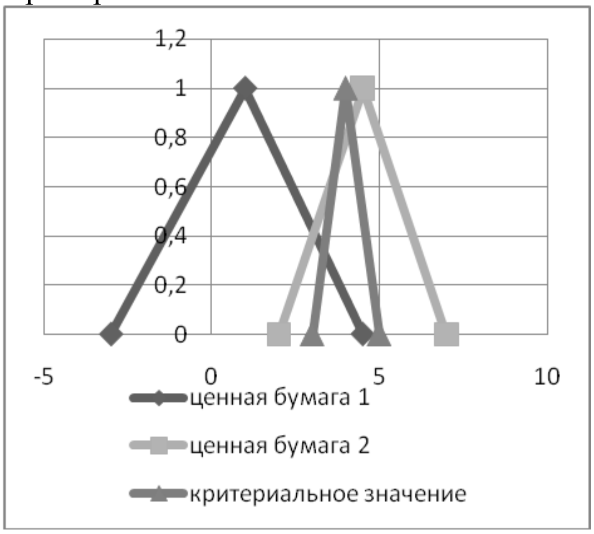

Рис. 4. Взаимное расположение нечетких доходностей ЦБ и критериального значения.

Пример 4.

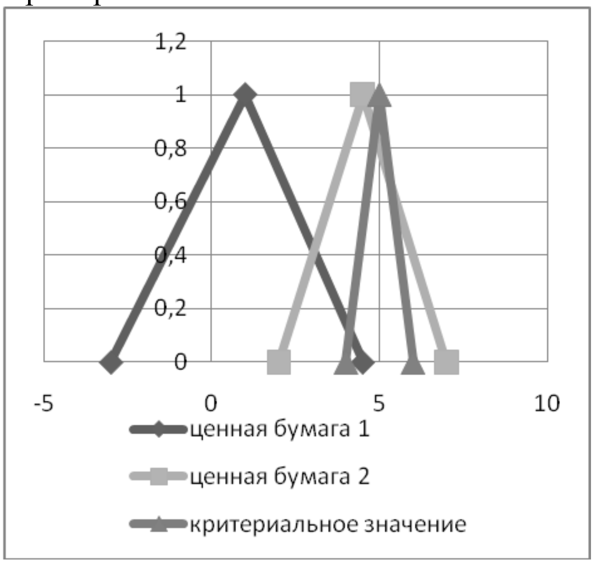

Рис. 5. Взаимное расположение нечетких доходностей ЦБ и критериального значения.

Пример 5.

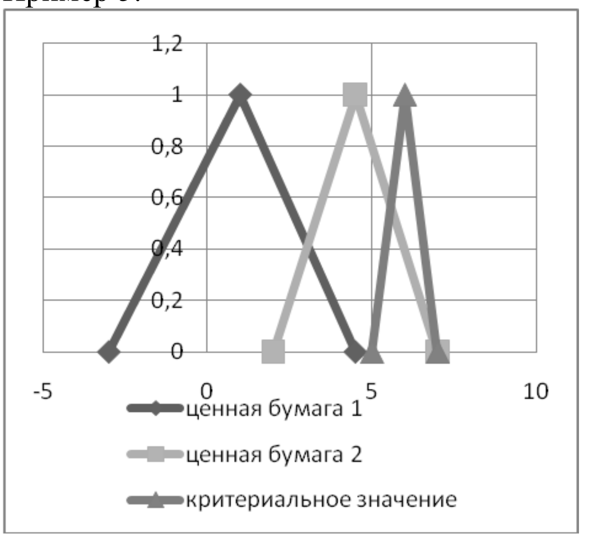

Рис. 6. Взаимное расположение нечетких доходностей ЦБ и критериального значения для треугольных ФП.

Выводы

В работе исследована модель задачи оптимизации нечеткого инвестиционного портфеля. Установлены достаточные условия, при которых зависимость «оптимальная доходность-риск»в задача нечеткой портфельной оптимизации для портфеля с произвольными числом ценных бумаг будет иметь убывающий характер, прямо противоположный зависимости для классической модели Марковица- Тоббина.

Проведены экспериментальные исследования условий и оптимальных решений задачи портфельной оптимизации для убывающей и возрастающей зависимостей «доходность-риск», которые полностью подтвердили теоретические результаты.

Список литературы

1. Зайченко Ю.П., Малихех Есфандиярфард. Анализ инвестиционного портфеля для различных видов функций принадлежности // Системні дослідження та інформаційні технології. - 2008.-№2.- С. 59-76.
2. Зайченко Ю.П., Малихех Есфандиярфард. Нечеткий метод индуктивного моделирования для прогнозирования курсов акций в задачах портфельной оптимизации// Вісник Черкаського державного технологічного університету. – 2008. - № 1.- С. 9-14.
3. Зайченко Ю.П., Малихех Есфандиярфард, Заика А.И. Анализ инвестиционного портфеля на основе прогнозирования курсов акций // Вісник національного технічного університету України «КПІ». «Інформатика, управління та обчислювальнатехніка». – К.: ТОО «ВЕК+», 2007. - № 47. - С. 168-179.
4. Зайченко Ю.П.,Малихех Есфандиярфард, Ови Нафас Агаи Аг Гамиш. Анализ зависимости «доходность- риск» в задачах портфельной оптимизации в нечетких условиях// Вісник національного технічного університету України «КПІ». «Інформатика, управління та обчислювальна техніка». – К.: ТОО «ВЕК+», 2010. - № 51. - С. 168-179.