МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

О.С. Жураковська

ТЕОРІЯ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ

*Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра
спеціальності 126 «Інформаційні системи та технології»
за освітньою програмою «Інформаційні управляючі системи
та технології» та спеціальності 121 «Інженерія програмного
забезпечення»*

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2020

Теорія прийняття рішень [Електронний ресурс]: навч. посіб. для студ. спеціальності 126 «Інформаційні системи та технології» та спеціальності 121 «Інженерія програмного забезпечення» / КПІ ім. Ігоря Сікорського; уклад.: О.С. Жураковська. – Електронні текстові дані (1 файл: 2.7 Мбайт). – Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2020. – 99 с.

Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського (протокол No 5 від 14.01.2021 р.) за поданням Вченої ради Факультету інформатики та обчислювальної техніки (протокол No5 від 14.12.2020 р.)

Електронне мережне навчальне видання

ТЕОРІЯ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ

Укладач: *Жураковська Оксана Сергіївна, канд. техн. наук*

Відповідальний редактор: *Гавриленко О.В.,* канд. фіз.-мат. наук, доцент, доцент кафедри автоматизованих систем обробки інформації та управління КПІ ім. Ігоря Сікорського

Рецензент: *Цапар В.С.*, канд. техн. наук, доцент, доцент кафедри технічних та програмних засобів автоматизації КПІ ім. Ігоря Сікорського

В навчальному посібнику наведено моделі та методи теорії прийняття рішень. Описано процес прийняття рішень, принципи побудови систем підтримки прийняття рішень. Велику увагу приділено сучасним методам багатокритеріальної оптимізації. Навчальний посібник призначений для теоретичної підготовки та самостійної роботи студентів спеціальностей 126 «Інформаційні системи та технології» та 121 «Інженерія програмного забезпечення» усіх форм навчання.

У першому розділі посібника розкриті базові положення теорії прийняття рішень, описано процес прийняття рішень (ПР), дано класифікацію методів ППР і розглянуто принципи побудови систем підтримки прийняття рішень.

Другий розділ посібника присвячений моделям на основі бінарних відношень та методам оптимізації за бінарними відношеннями.

Третій розділ присвячений вирішенню задач ПР за різних варіантів порівнюваності критеріїв.

Четвертий розділ присвячений мультикритеріальним методам підтримки ПР.

П’ятий розділ присвячений проблемам, що виникають при колективному виборі.

Шостий розділ навчального посібника присвячений задачам ПР із нечіткою інформацію. Розглянуті методи ПР за нечіткої вхідної інформації.

ЗМІСТ

Розділ 1. Процес прийняття рішень

1.1 Основні поняття

Процес прийняття рішень (ПР) - різновид розумової діяльності, направлений на пошук засобу зміни поточної ситуації бажаною. Процес ПР здійснює особа, що приймає рішення.

Наведемо основних учасників процесу прийняття рішень.

Особа, що приймає рішення (ОПР) – це компетентний спеціаліст у своїй галузі, що має досвід діяльності в ній та повноваження приймати рішення. Несе відповідальність за прийняте рішення. ОПР мотивує постановку задачі та її вирішення.

Власник проблеми - людина, що повинна вирішувати проблему та нести за неї відповідальність. Статус власника визначається деякими встановленими положеннями юридичного, політичного та іншого характеру. Це може бути керівник організації, що вирішує проблему; у випадку проблеми виховання дітей власником проблеми є батьки.

Часто власник проблеми та ОПР – це різні особи, це має місце, коли власник доручає ПР іншій особі або коли він разом з іншими входить в групу, що приймає колективне рішення.

Експерт – це спеціаліст, що професійно (краще, ніж ОПР) володіє окремими аспектами проблеми. Експерт відповідає лише за достовірність отриманої від нього інформації, не несе відповідальності за рішення в цілому.

Консультант з прийняття рішень – особа, що використовує професійні знання та досвід для організації процесу ПР. Консультант допомагає ОПР у формулюванні мети; визначає позиції активних груп; підбирає експертів та організовує роботу із ними.

Активні групи – особи, думки яких (особливо в політичній сфері) впливають на оцінки альтернатив або проміжних цілей.

Процес прийняття рішень можна представити як послідовність основних етапів:

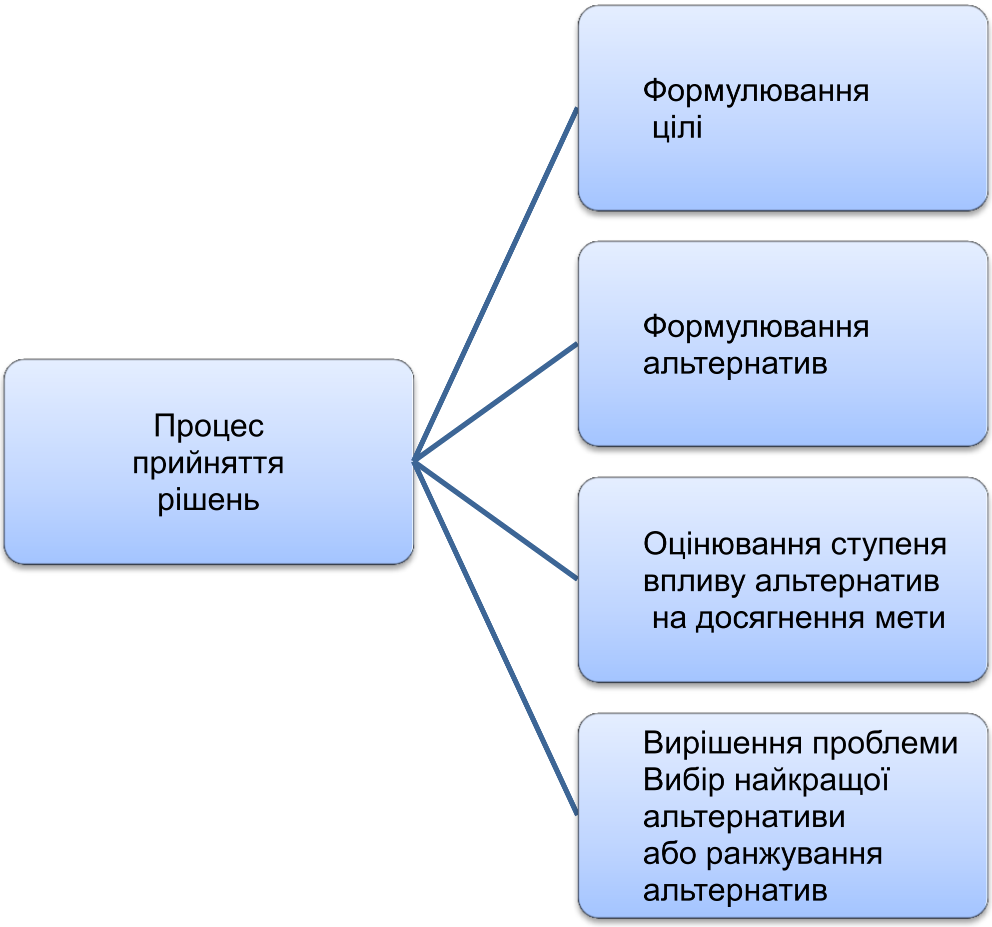


Рис. 1.1 – Основні етапи процесу ПР

1.2 Класифікація методів підтримки прийняття рішень

Наведемо класифікацію методів підтримки прийняття рішень (ППР) за різними ознаками, що лежать в основі їх спеціалізації [3]. Різні варіанти класифікації методів ППР наведено на рис. 1.2 – 1.7.

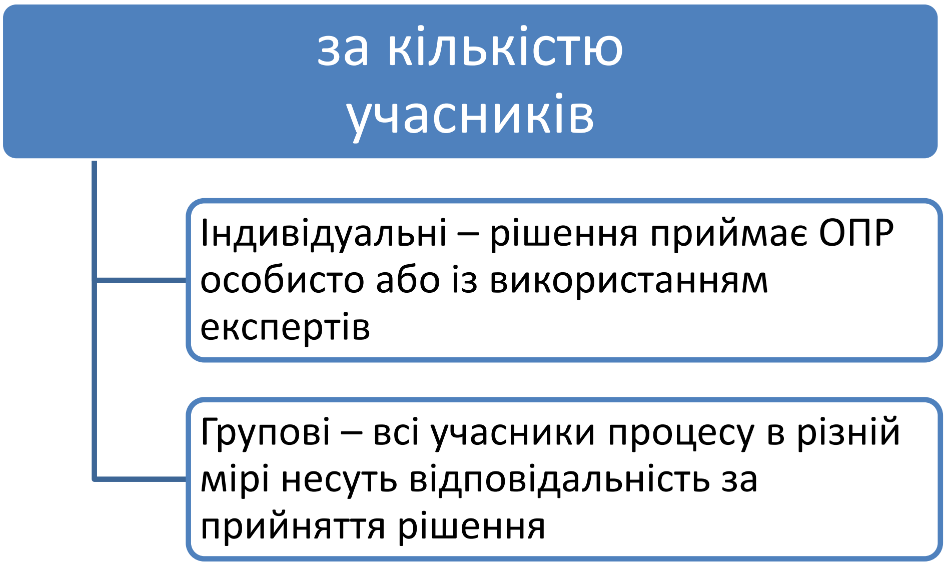


Рис. 1.2 – Класифікація методів ППР за кількістю учасників

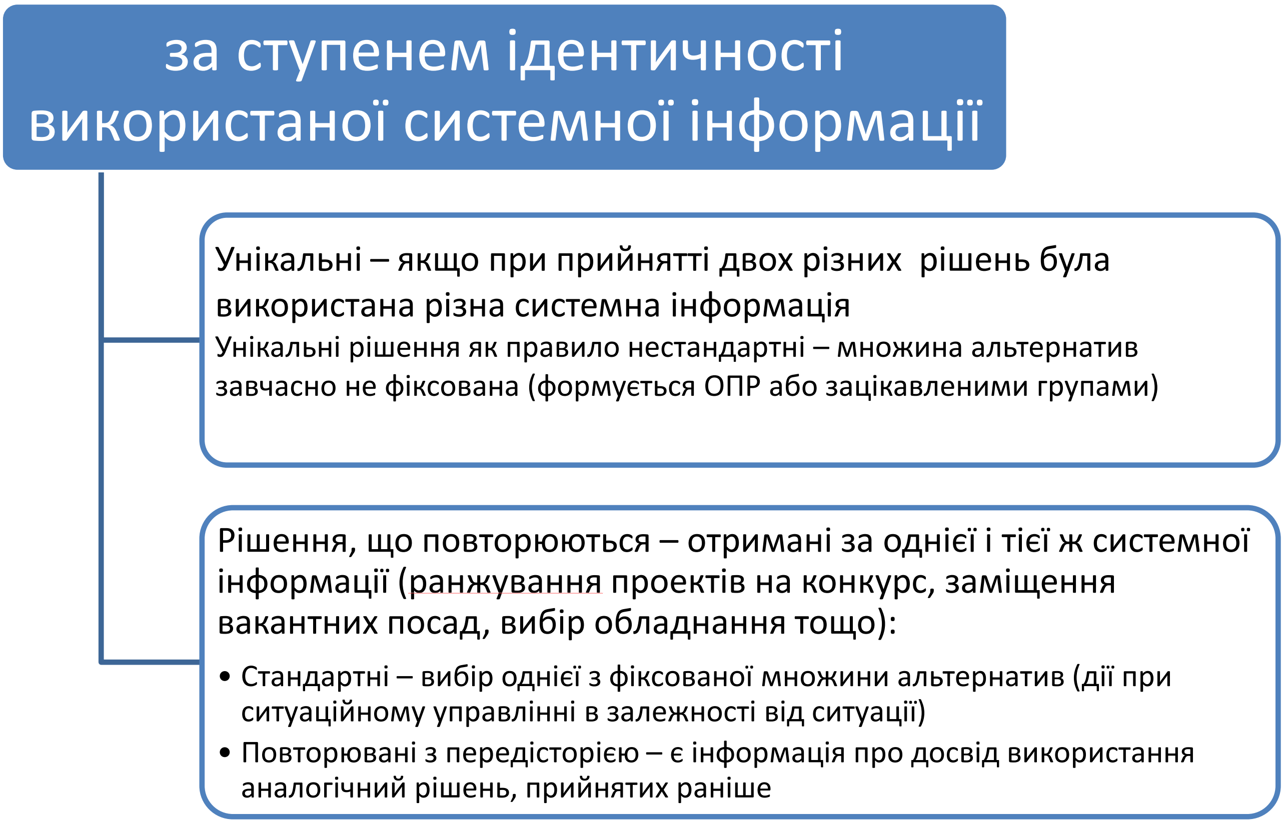


Рис. 1.3 – Класифікація методів ППР за ступенем ідентичності використаної системної інформації

В якості системної інформації, необхідної в ППР, використовується:

- для багатокритеріальних методів:
  – алгоритм оцінки альтернатив;
  – ієрархія критеріїв;
  – множини значень якісних критеріїв;
  – коефіцієнти значущості критеріїв;
  – множина експертів та коефіцієнти їхньої компетентності;
- для методів цільового оцінювання альтернатив:
  – ієрархія цілей;
  – алгоритм оцінки альтернатив.

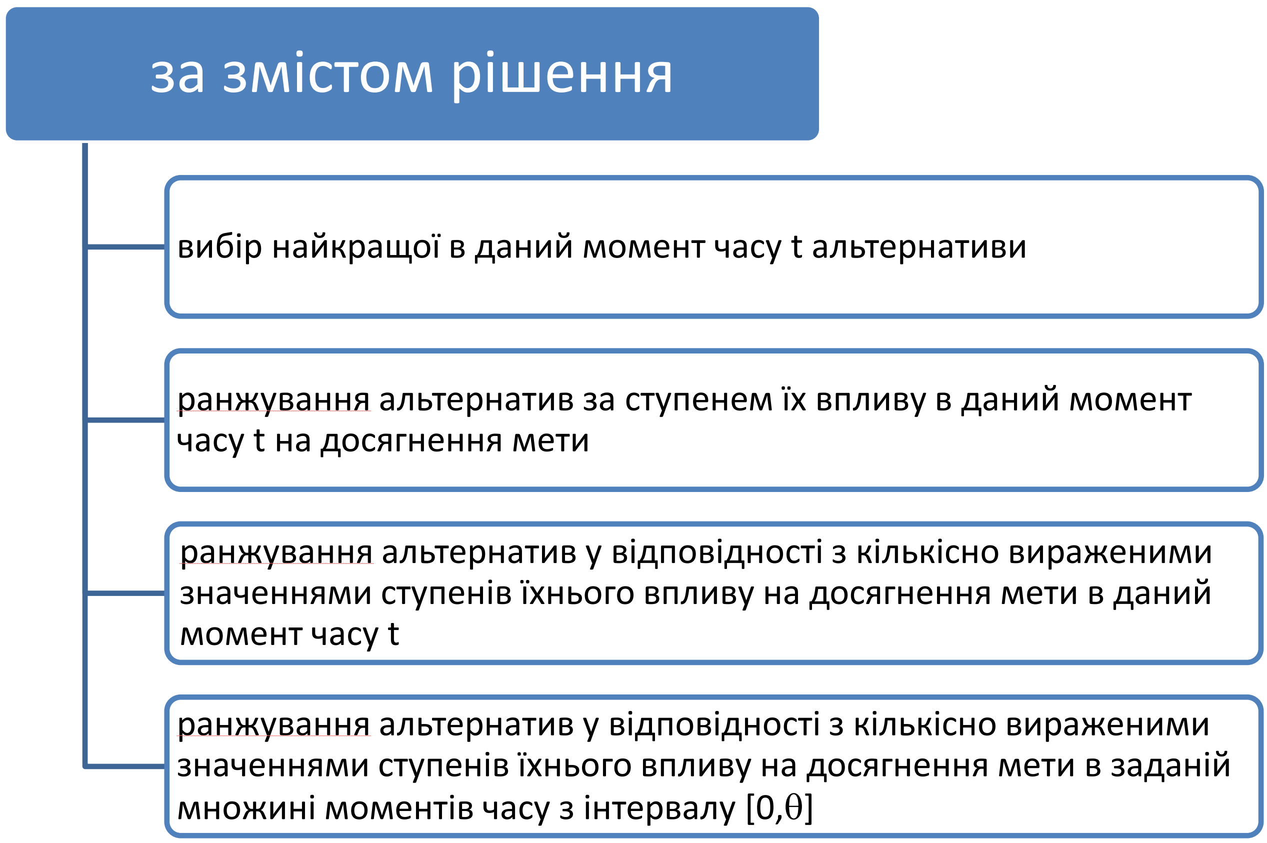


Рис. 1.4 – Класифікація методів ППР за змістом рішення

за характером моделі проблеми

- методи дослідження операцій – методи отримання рішень при наявності об'єктивної моделі. Зміст об'єктивної моделі не залежить від думки та переваг ОПР, її обов'язок – лише постановка задачі. Якість рішення визначається значенням заданого критерію якості, тобто об'єктивно
- методи ТПР – при наявності суб'єктивної моделі. Суб'єктивна модель будується ОПР (за допомогою експертів) та відображає «розуміння проблеми» ОПР, її пріоритети та цілі. Якість рішення – суб'єктивна, рішення "хороше" з точки зору ОПР

Рис. 1.5 – Класифікація методів ППР за характером моделі проблеми

за множиною критеріїв

- багатокритеріальні методи – є можливість сформулювати єдину множину критеріїв, за кожним з яких можна оцінити кожну альтернативу із заданої множини альтернатив
- методи цільового оцінювання альтернатив

Рис. 1.6 – Класифікація методів ППР за множиною критеріїв

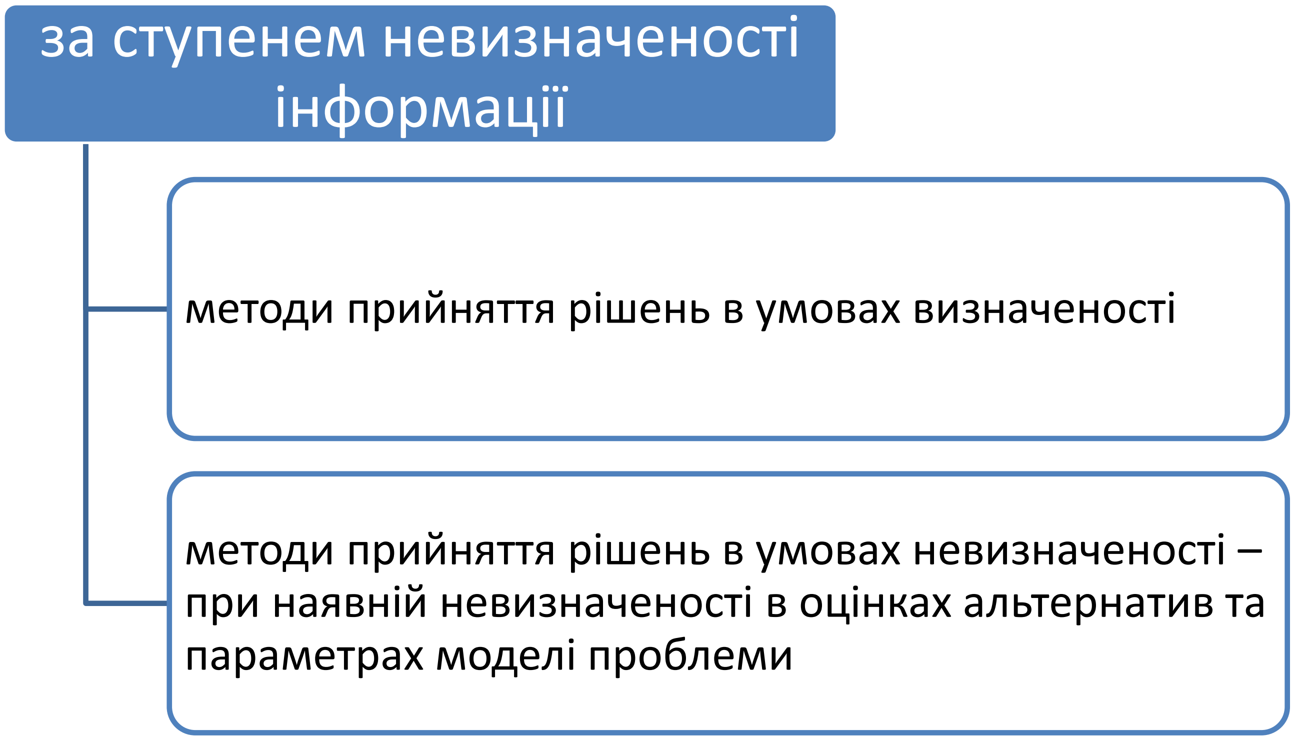


Рис. 1.7 – Класифікація методів ППР за ступенем невизначеності інформації

1.3 Класифікація задач ПР за цілями, що стоять перед ОПР

Класифікацію задач ПР за цілями, що стоять перед ОПР, наведено на рис. 1.8.

Задачі ранжування

- Визначення порядку на множині об’єктів - в загальному випадку ранжування означає визначення відносної цінності усіх об ’єктів. В окремих випадках для вирішення задачі достатньо визначити квазіпорядок

Вибір кращих об’єктів

- вибір одного кращого об'єкта
- вибір підмножини кращих об'єктів
- вибір впорядкованої множини кращих об'єктів

Задачі кластеризації, класифікації

- Розбиття множини об’єктів на класи взаємопов’язаних, «схожих» об’єктів

Задачі визначення вагових коефіцієнтів об’єктів

- частковий випадок - задача визначення компетентності експертів

Задачі відновлення

- невизначених (невідомих або недостовірних) значень критерія для підмножини альтернатив
- окремих елементів матриці відношень

Рис. 1.8 – Класифікація задач ПР за цілями, що стоять перед ОПР

1.4 Системи підтримки прийняття рішень

Системи підтримки прийняття рішень (СППР) – це комп’ютерні програми, які допомагають користувачам у вирішенні проблем або у прийнятті рішень. В цих системах використовуються моделі даних, алгоритми, бази знань, користувацькі інтерфейси, а також механізми контролю для підтримки конкретного розв’язання проблеми [1, 2].

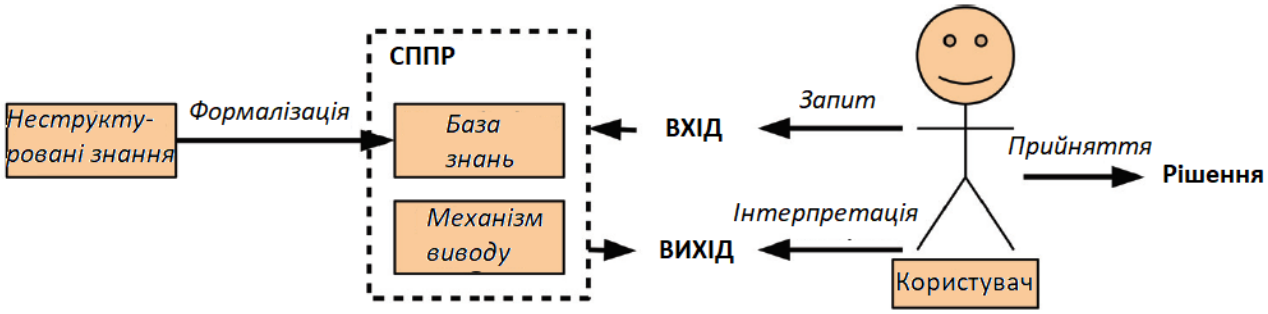


Рис. 1.9 – Використання СППР в процесі ПР

Наведемо класифікацію СППР за функціональними можливостями та областю застосування:

Таблиця 1.1 – Класи СППР

Область застосування СППР	Користувачі, призначення
(1) Системи колективного використання, БЗ формуються багатьма експертами - спеціалістами в різних областях знань	Органи держуправління найвищого рівня та органи управління великих фірм (використовуються при плануванні крупних комплексних цільових програм)
(2) Системи індивідуального використання, БЗ формуються безпосередньо користувачем	Держслужбовці середн. рангу, керівники малих та серед. фірм (використовуються при проведенні конкурсів на виконання різних видів робіт при заданому загальному обсягу фінансування, виборі типів об’єктів тощо)
(3) Системи індивідуального використання, що адаптуються до досвіду користувача	Призначені для ППР часто виникаючих задач управління (повторюваних) (вибір суб’єкта кредитування, виконавця роботи, призначення

	на посаду тощо)

Функціональні можливості систем другого класу:

- вибір ОПР набору критеріїв із заздалегідь підготовленого списку критеріїв та визначення їхньої значущості методом парних порівнянь в діалоговому режимі;
- визначення відносного ступеня переважності оцінок за шкалою кожного критерія (в діалоговому режимі);
- визначення ступеня узгодженості оцінок експертів по кожному з варіантів;
- розрахунок вагових коефіцієнтів варіантів з врахуванням отриманих від ОПР даних та результатів експертного оцінювання;
- видача впорядкованої інформації про результати обробки, включаючи відображення діаграми із вказанням рейтингу варіантів.

В СППР третього класу застосовуються методи ППР, що адаптуються до попереднього досвіду ОПР. Цей підхід застосовують при періодичному розв'язанні типових задач, тобто при прийнятті рішень, що повторюються. Функціональні можливості таких систем:

- можливість ОПР парного порівняння альтернатив із вказанням ступеня переваги альтернатив: слабка, проста, сильна, переважаюча, абсолютна;
- формування ОПР множини критеріїв та визначення їхньої значущості методом парних порівнянь в діалоговому режимі;
- попарне порівняння ОПР альтернатив за множиною критеріїв;
- визначення ваговиї коефіцієнтів альтернатив за результатами парних порівнянь, за оцінками альтернатив за усіма критеріями та за коефіцієнтами значущості критеріїв.

Питання

1. Поясніть основні етапи процесу прийняття рішень.

2. Наведіть приклади систем підтримки прийняття рішень.

3. Наведіть принципи класифікації задач прийняття рішень.

4. Поясніть роль усіх учасників процесу прийняття рішень.

5. Поясніть відмінності між особою, що приймає рішення та експертом.

6. Наведіть основні класи задач прийняття рішень.

Перелік посилань

1. Barkhi, R., Rolland, E., Butler, J. & Fan, W. (2005) Decision Support System Induced Guidance For Model Formulation And Solution. *Decision Support Systems,* 40**,** 269-281.

2. Decision Support Systems, Edited by Chiang S. Jao, Intech, 2010.

3. Тоценко В.Г. Методи та системи підтримки прийняття рішень. Алгоритмічний аспект.– К.:Наукова думка, 2002.–381с.

Розділ 2. Оптимізація за бінарними відношеннями

2.1 Бінарні відношення

Означення. Бінарне відношення R на скінченній множині елементів Ω={a,b,c,…} є підмножиною декартового добутку Ω×Ω, тобто множиною впорядкованих пар (a,b), де $a \in \Omega$, $b \in \Omega$:

$$\langle R, \Omega\rangle = \{(a,b) \mid a \in \Omega,\ b \in \Omega\}.$$

Належність впорядкованої пари (a,b) бінарному відношенню R позначається: $(a,b) \in R$, або aRb, або R(a,b).

Способи задавання бінарних відношень:

1. Безпосередній перелік елементів

$$R = \{(1,2), (2,3), (5,5), (5,7)\}.$$

2. Предикатний спосіб (правило або властивість)

$$R = \{(a,b) \mid a \in \Omega,\ b \in \Omega \text{ і } a \le b\}.$$

3. Граф відношення G(R)

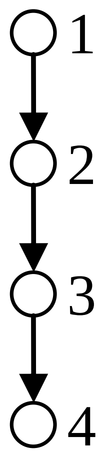


Рис.2.1 – Граф бінарного відношення

4. Матриця відношення

	1	2	3	4
1	0	1	0	0
2	0	0	1	0
3	0	0	0	1
4	0	0	0	0

5. Визначення нижніх перерізів усіх елементів множини Ω:

$$\forall x \in \Omega \quad R^-(x)=\{y \in \Omega \mid (x,y) \in R\}$$

Приклад 1. Для відношення, заданого матрицею, наведемо нижні перерізи:

R	1	2	3	4	5	6
1		1		1	1	1
2					1	
3	1	1		1	1	1
4		1			1	
5						
6		1		1	1	

$R^-(1)=\{2,4,5,6\}$

$R^-(2)=\{5\}$

$R^-(3)=\{1,2,4,5,6\}$

$R^-(4)=\{2,5\}$

$R^-(5)=\varnothing$

$R^-(6)=\{2,4,5\}$

6. Визначення верхніх перерізів усіх елементів множини Ω:

$$\forall x \in \Omega \ R^+(x)=\{y \in \Omega \mid (y,x) \in R\}$$

Приклад 2. Для відношення, заданого матрицею, наведемо верхні перерізи:

R	1	2	3	4	5	6
1		1		1	1	1
2					1	
3	1	1		1	1	1
4		1			1	
5						
6		1		1	1	

$R^+(1)=\{3\}$

$R^+(2)=\{1,3,4,6\}$

$R^+(3)=\varnothing$

$R^+(4)=\{1,3,6\}$

$R^+(5)=\{1,2,3,4,6\}$

$R^+(6)=\{1,3\}$

Основні операції над бінарними відношеннями:

Включення	$R_1 \subseteq R_2 \Leftrightarrow \forall x \in \Omega, \forall y \in \Omega : xR_1 y \Rightarrow xR_2 y$
Доповнення	$\overline{R} = \Omega \times \Omega \setminus R$, або $\overline{R} = \{(x, y) \mid (x, y) \notin R\}$
Перетин	$R_1 \cap R_2 = \{(x, y) \mid xR_1 y \wedge xR_2 y\}$
Об’єднання	$R_1 \cup R_2 = \{(x, y) \mid xR_1 y \vee xR_2 y\}$
Обернення	$R^{-1} = \{(y, x) \mid xRy\}$
Композиція	$R \circ R = \{(x, y) \mid \exists z \in \Omega : xRz \wedge zRy\}$
Верхній переріз	$R^{+}(x) = \{y \in \Omega \mid (y, x) \in R\}$
Нижній переріз	$R^{-}(x) = \{y \in \Omega \mid (x, y) \in R\}$

Основні властивості бінарних відношень (БВ):

Таблиця 1 – Властивості БВ

Властивість	**Означення**
Рефлексивність	$\forall x \in \Omega :\ xRx$ або $E \subset R$
Антирефлексивність	$\neg \exists x \in \Omega : xRx$ або $R \cap E = \varnothing$
Симетричність	$\forall x \in \Omega, \forall y \in \Omega : xRy \Rightarrow yRx$ або $R = R^{-1}$
Асиметричність	$R \cap R^{-1} = \varnothing$
Антисиметричність	$R \cap R^{-1} \subset E$
Транзитивність	$xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$, або $R \circ R \subset R$, або $\forall x \in \Omega, \forall y \in R^{-}(x) : R^{-}(y) \subseteq R^{-}(x)$
Від’ємна транзитивність	$x\overline{R}y \wedge y\overline{R}z \Rightarrow x\overline{R}z$
Ациклічність	$\forall k : R^{k} \cap R^{-1} = \varnothing$ або $\forall x \in \Omega, \forall k : x \notin (R^{k})^{-}(x)$
Зв’язність	$\forall x \in \Omega, \forall y \in \Omega : xRy \vee yRx$
Слабка зв’язність	$\forall x \in \Omega, \forall y \in \Omega \mid x \neq y : xRy \vee yRx$

Спеціальні відношення:

E – діагональне відношення: E ={(x,y)| x=y};

U – повне відношення: $\forall x \in \Omega, \forall y \in \Omega : xUy$, або $U = \Omega \times \Omega$.

При аналізі властивостей відношення R в його структурі виділяють відношення:

I_R – симетрична частина відношення R, $I_R = R \cap R^{-1}$;

P_R – асиметрична частина відношення R, $P_R = R \setminus I_R$;

N_R – відношення непорівнюваності, $xN_R y \Leftrightarrow x\overline{R}y \cap y\overline{R}x$.

Наведемо означення основних класів БВ [1,2,3].

Означення. Рефлексивне, симетричне і транзитивне відношення називається відношенням *еквівалентності*.

Приклад 3. Наведемо приклади зв’язного та незв’язного відношень еквівалентності.

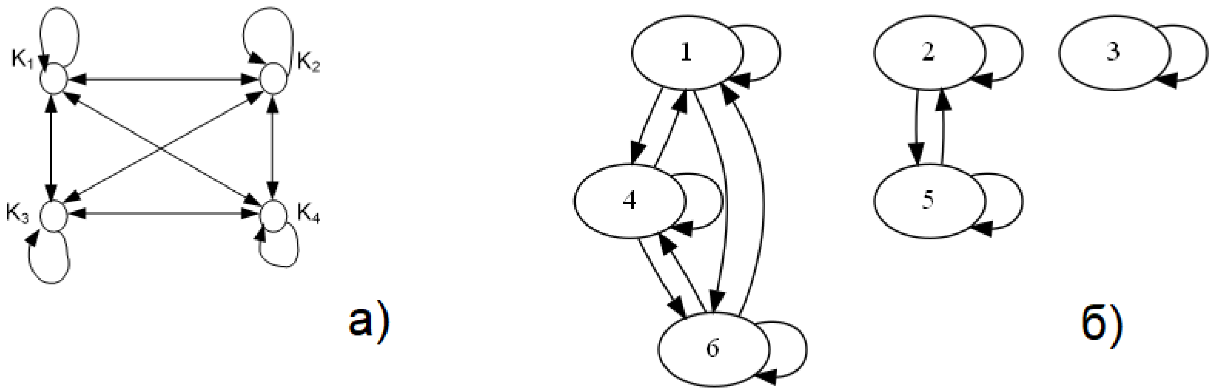


Рис. 2.2 – Зв’язне (а) та незв’язне (б) відношення еквівалентності

Твердження 1. Якщо R - відношення еквівалентності, то для $\forall x,y \in \Omega$ виконується $R^-(x) = R^-(y)$ або $R^-(x) \cap R^-(y) = \varnothing$.

Наслідок. Кожному відношенню еквівалентності відповідає деяке розбиття множини Ω на класи Ω1 , Ω2,… таке що xRy виконується тоді і тільки тоді, коли x і y належать спільному класу розбиття. Тобто еквівалентними є тільки ті об’єкти, що належать спільному класу.

Твердження 2. Якщо на множині Ω задане деяке розбиття $\Omega=\{\Omega_i\}$:

$$\cup_i \Omega i = \Omega \text{ і } \forall i \neq j\ \Omega i \cap \Omega j = \varnothing,$$

то відношення *R,* що визначається наступним чином:

$$xRy \ \Leftrightarrow \exists \Omega_i \subset \Omega \mid x, y \in \Omega_i \qquad (2.1)$$

є відношенням еквівалентності.

Означення. Антирефлексивне, транзитивне відношення називається відношенням *строгого порядку*.

Із взаємозв'язку властивостей випливає, що строгий порядок є *асиметричним* та *ациклічним.* За означенням строгий порядок не може мати властивість зв'язності, а може бути тільки слабкозв'язним (рис. 2.3 б)) або бути незв'язним (рис. 2.3 в)).

Означення. Рефлексивне, транзитивне, антисиметричне відношення називається відношенням *нестрогого порядку*.

Твердження 3. Якщо *R'* – відношення строгого порядку, а *E* – діагональне відношення, то $R=R' \cup E$ – відношення нестрогого порядку.

На рис. 2.4 показано граф зв'язного відношення нестрогого порядку. Нестрогий порядок можна отримати із відношення строгого порядку, якщо до нього додати діагональне відношення (тобто всі пари виду (*x*,*x*) або петлі в усіх вершинах на графі відношення).

Твердження 4. Якщо *R* – відношення нестрогого порядку, то його симетрична частина I_R – діагональне відношення, а його асиметрична частина P_R – відношення строгого порядку.

Означення. Рефлексивне, транзитивне відношення називається відношенням *квазіпорядку*.

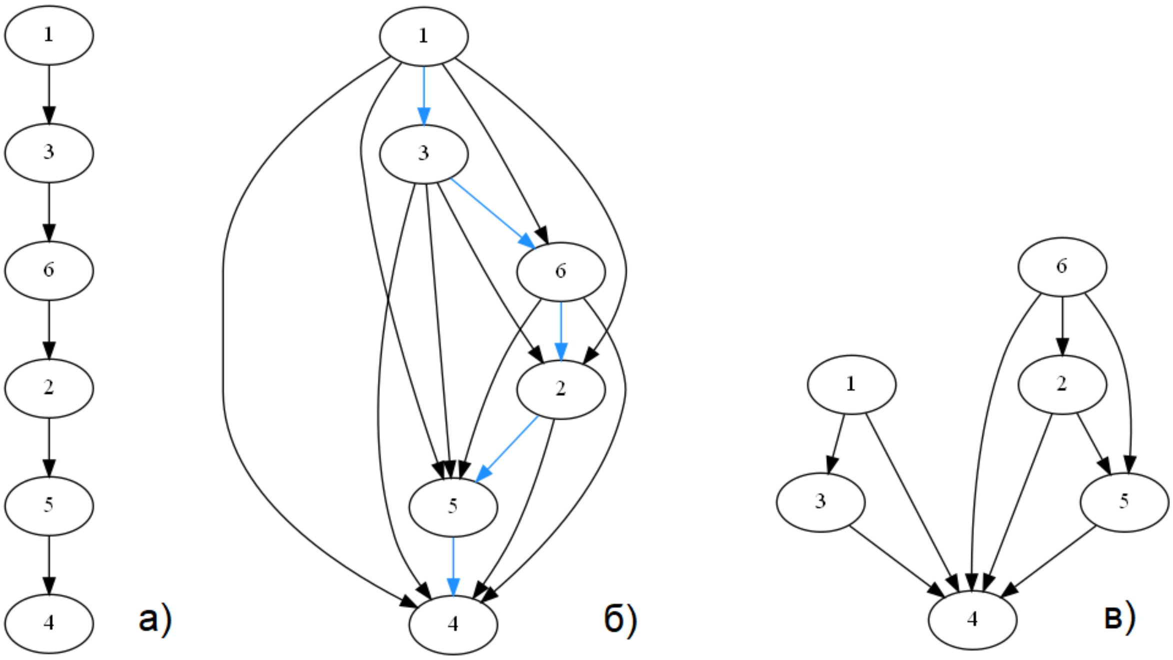


Рис. 2.3 – Строгий порядок (а) граф редукції; б) слабкозв’язний; в) незв’язний)

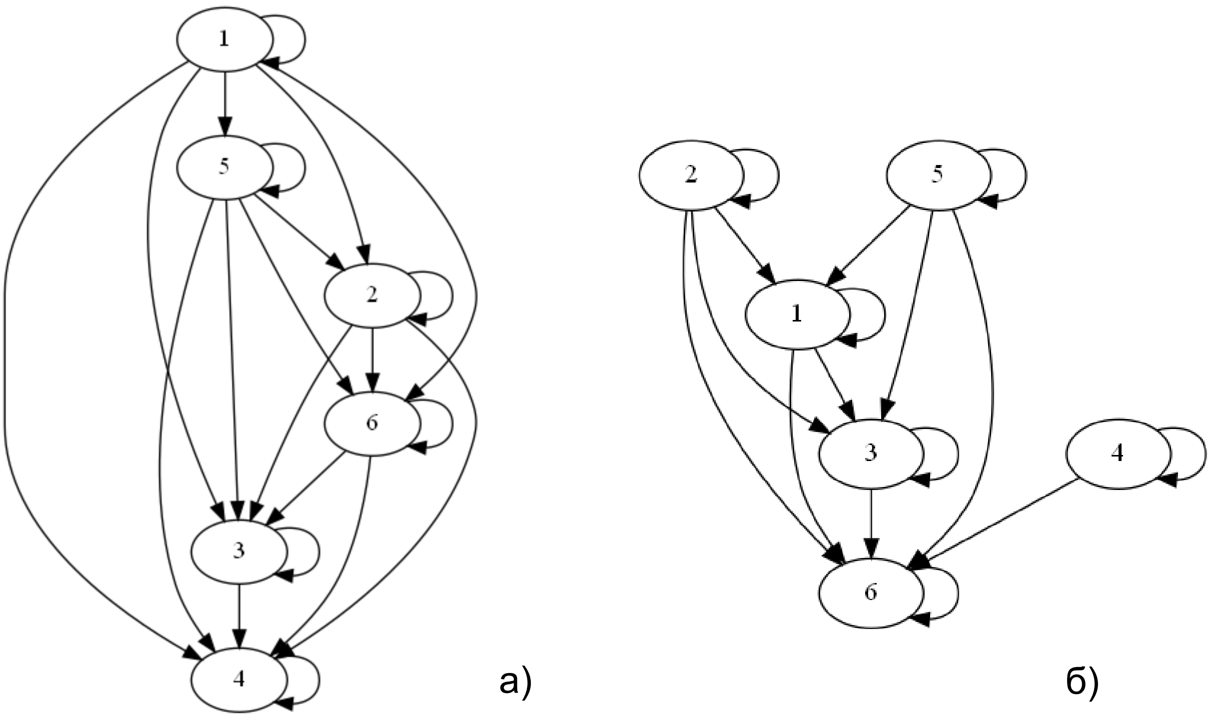
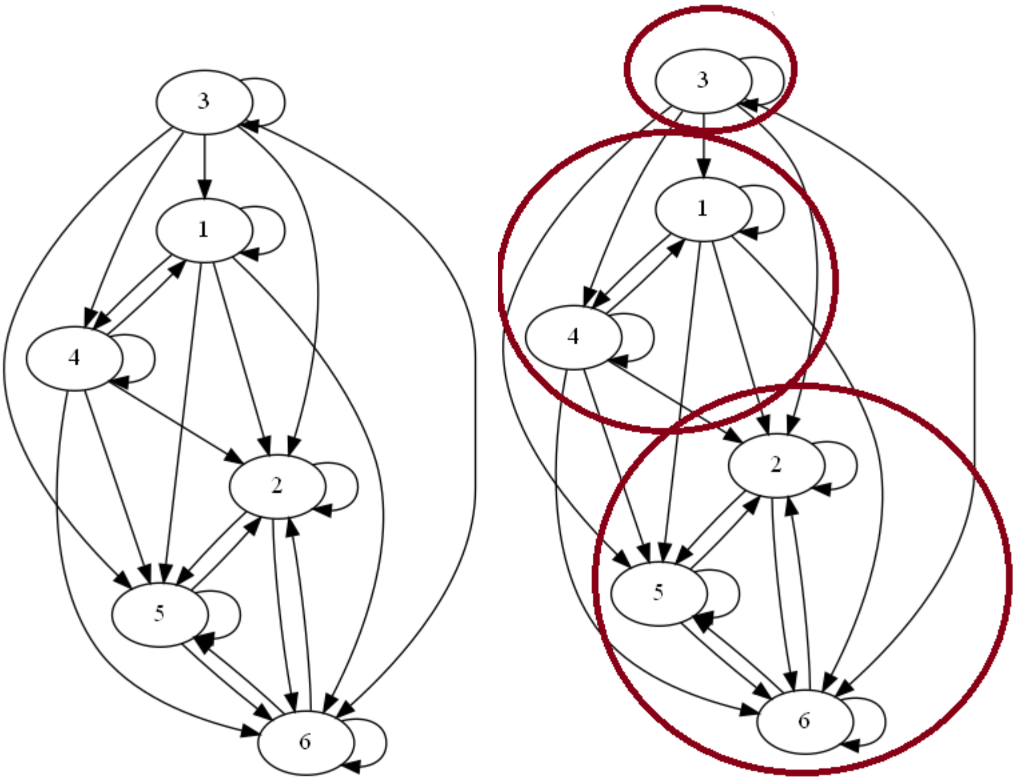


Рис. 2.4 – Нестрогий порядок (а) зв’язний, б) незв’язний)

Твердження 5. Симетрична частина I_R відношення квазіпорядку *R* є відношенням еквівалентності.

Твердження 6. Асиметрична частина P_R відношення квазіпорядку *R* є відношенням строгого порядку.

Твердження 7. Якщо симетрична частина I_R відношення квазіпорядку *R* є діагональним відношенням, то відношення *R* є відношенням н*естрогого порядку.*



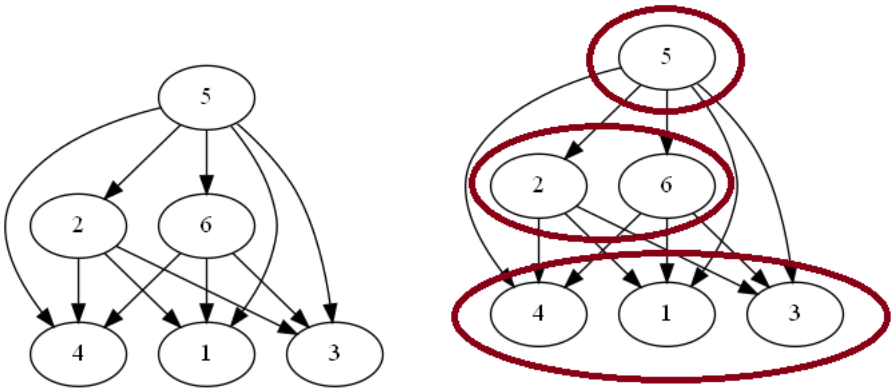
а) граф відношення б) класи еквівалентності (симетрична частина відношення)

Рис. 2.5 – Квазіпорядок

Означення. Асиметричне від'ємно транзитивне відношення називається відношенням *слабкого впорядкування*.

Твердження 8. Якщо *R* - відношення слабкого впорядкування, то відношення N_R непорівнюваності за відношенням *R* є відношенням еквівалентності.

Твердження 9. Антирефлексивне, транзитивне відношення *R*, для якого відношення N_R (непорівнюваності за відношенням *R*) - еквівалентність, є відношенням слабкого впорядкування.



а) граф відношення б) класи еквівалентності (відношення непорівнюваності за сл. впорядкуванням)

Рис. 2.6 – Слабке впорядкування

2.2 Постановка задачі. Методи оптимізації за бінарним відношенням

Постановка задачі. За інформацією про систему переваг на множині альтернатив Ω, задану бінарним відношенням *R*, необхідно вибрати серед альтернатив множини Ω підмножину найкращих альтернатив.

Оптимізація за бінарним відношенням (БВ) – це пошук підмножини альтернатив, які за системою переваг на множині альтернатив, формалізованою бінарним відношенням, можуть вважатись кращими серед усіх альтернатив цієї множини (або, в крайньому разі, не гіршими) [1,4]. Розглядатимуться три групи методів:

- методи оптимізації за домінуванням та блокуванням, які орієнтовані на пошук таких розв'язків (альтернатив), які переважають (або домінують) інші альтернативи за цим бінарним відношенням (або не «гірші» за інші альтернативи цієї множини за цим БВ (або не домінуються іншими альтернативами));

- метод оптимізації за Нейманом-Моргенштерном, в основі якого лежить ідея пошуку такої підмножини альтернатив, які в сукупності переважають за вказаним БВ решту альтернатив (така підмножина отримала назву «ядро»);

- методи K-оптимізації, які орієнтовані на пошук найкращих альтернатив із використанням різних формалізацій поняття порівнюваності альтернатив (за строгою перевагою, за рівноцінністю, за непорівнюваністю за вказаним БВ, а також за комбінаціями цих понять).

Застосування вказаних методів залежить від властивостей заданого на множині альтернатив бінарного відношення [1].

Якщо БВ є слабкозв'язним строгим порядком, зв'язним нестрогим порядком, зв'язним квазіпорядком або відношення є зв'язним на Ω, а транзитивне замикання його асиметричної частини є строгим порядком, тоді для пошуку найкращих альтернатив можна застосувати оптимізацію за домінуванням.

Оптимізація за блокуванням буде результативною, якщо відношення на множині альтернатив є нестрогим порядком, квазіпорядком, ациклічним строгим відношенням переваги або транзитивне замикання строгого відношення переваги або асиметричної частини відношення є строгим порядком.

Якщо БВ, задане на множині альтернатив, є транзитивним та/або ациклічним, а також у випадку неациклічного строгого відношення переваги для пошуку найкращих альтернатив можна застосувати метод оптимізації за Нейманом-Моргенштерном.

І у випадку неациклічного або нетранзитивного відношення переваги результат можна отримати застосуванням методів K-оптимізації.

2.3 Оптимізація за домінуванням та блокуванням

Оптимізація за **домінуванням** – пошук «найкращих», «домінуючих» альтернатив. Множина таких альтернатив позначається X* і називається множиною найбільших альтернатив.

Оптимізація за **блокуванням** – пошук «ненайгірших», «недомінованих» альтернатив. Така множина позначається X^0 і називається множиною максимальних альтернатив.

При пошуку оптимальних за бінарним відношенням альтернатив в структурі відношення виділяють симетричну та асиметричну частини, і в залежності від наявності непорожньої симетричної частини, здійснюють пошук відповідної множини найкращих альтернатив.

Оптимізація за домінуванням

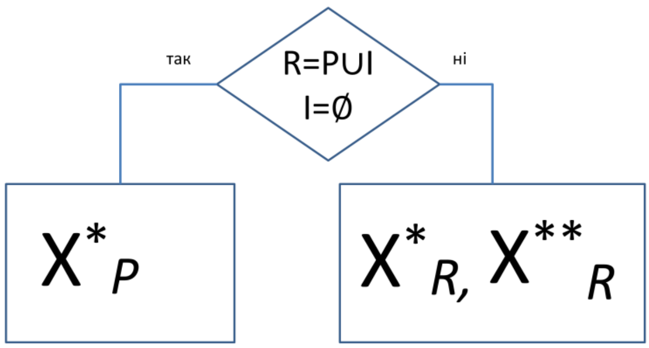


Рис. 2.7 – Пошук множин найкращих альтернатив в залежності від структури відношення при оптимізації за домінуванням

Означення.

Назва оптимального елемента	Позначення	Визначення
найбільший по *P* на Ω	$x^* \in X_P^*$	$R^-(x^*) = \Omega \setminus \{x^*\}$ (2.2)
найбільший по *R* на Ω	$x^* \in X_R^*$	$R^-(x^*) = \Omega$ (2.3)
строго найбільший по *R* на Ω	$x^* \in X_R^{**}$	$R^-(x^*) = \Omega$ і $R^+(x^*) = \{x^*\}$ (2.4)

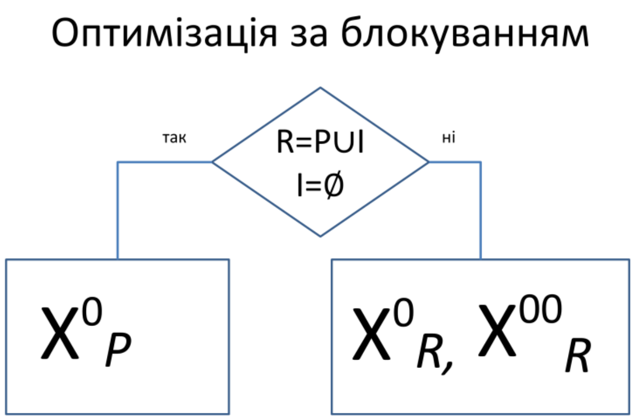


Рис. 2.8 – Пошук множин найкращих альтернатив в залежності від структури відношення при оптимізації за блокуванням

Означення.

Назва оптимального елемента	Позначення	Визначення
максимальний по *P* на Ω	$x^0 \in X_P{}^0$	$R^+(x^0) = \varnothing$ (2.5)
максимальний по *R* на Ω	$x^0 \in X_R{}^0$	$R^+(x^0) \subseteq R^-(x^0)$ (2.6)
строго максимальний по *R* на Ω	$x^0 \in X_R{}^{00}$	$R^+(x^0) \subseteq \{ x^0 \}$ (2.7)

2.3 Оптимізація за Нейманом-Моргенштерном

У відповідності із даним методом в якості найкращих альтернатив повинна бути обрана така підмножина множини альтернатив Ω, яка має потрібні властивості, щоб вважатись найкращою. По-перше, будь-які альтернативи з цієї множини не можуть бути порівнювані між собою за перевагою, тобто «краща» альтернатива не може переважати іншу «кращу» альтернативу. Ця властивість називається внутрішньою стійкістю. По-друге, в сукупності всі альтернативи з цієї множини повинні переважати решту альтернатив за визначеним БВ. Ця властивість називається зовнішньою стійкістю. Тоді підмножина найкращих альтернатив повинна мати властивості внутрішньої та зовнішньої стійкості.

Властивість внутрішньої стійкості.

Означення. Множина X має властивість *внутрішньої стійкості*, якщо виконується

$$\forall x \in X : R^{+}(x) \cap (X \setminus \{x\}) = \varnothing \wedge R^{-}(x) \cap (X \setminus \{x\}) = \varnothing$$

Властивість зовнішньої стійкості.

Означення. Множина X має властивість *зовнішньої стійкості*, якщо виконується $\forall y \in \Omega \setminus X : R^{+}(y) \cap X \neq \varnothing$

Означення. Множина X^{HM} називається *розв'язком Неймана-Моргенштерна* (або ядром), якщо вона має властивості внутрішньої та зовнішньої стійкості.

Пошук множини найкращих альтернатив полягає у знаходженні множини, яка б мала властивості внутрішньої та зовнішньої стійкості, тобто *розв'язка Неймана-Моргенштерна*.

Алгоритм побудови множини C^0 – ядра (розв'язка *Неймана-Моргенштерна*) для ациклічного відношення

Крок 1. Формування послідовності множин

$$S_0 = \{x \in \Omega | R^{+}(x) = \varnothing\},$$

$$S_K = S_{K-1} \cup \{x \in \Omega | R^{+}(x) \subset S_{K-1}\}$$

Отримано послідовність множин, що розширюються:

$$S_0 \subseteq S_1 \subseteq \ldots \subseteq S_k \subseteq \ldots \subseteq S_L$$

Для скінченного Ω з ациклічності R слідує, що $\exists\, L |\, S_L = \Omega$.

Крок 2. Формування послідовності множин $Q_0, \ldots Q_L$:

$$Q_0 = S_0, Q_k = Q_{k-1} \cup \{x \in \Omega \,|\, x \in S_k \setminus S_{k-1} : R^{+}(x) \cap Q_{k-1} = \varnothing\}$$

Отримана на останньому кроці множина $C^0 = Q_L$ є розв'язком Неймана-Моргенштерна (ядром).

2.4 К-оптимізація

Згідно із цим принципом в якості розв'язку повинні обиратись альтернативи, які переважають (домінують) найбільшу підмножину альтернатив, але при порівнянні альтернатив використовуються різні формалізації поняття переваги. В залежності від обраного способу порівняння альтернативи можуть порівнюватись:

- за строгою перевагою;
- за нестрогою перевагою (із врахуванням рівноцінності альтернатив);
- за строгою перевагою із врахуванням непорівнюваності альтернатив;
- за строгою перевагою із врахуванням рівноцінності та непорівнюваності альтернатив.

В залежності від обраного способу порівняння альтернатив для кожної альтернативи $x \in \Omega$ визначають множину домінованих альтернатив $S_R^k(x)$, тобто таких, які домінуються альтернативою x (або x переважає кожну альтернативу з множини $S_R^k(x)$). Очевидно, що найкращою повинна вважатись альтернатива, яка домінує (переважає) максимальну за включенням множину альтернатив. Отже, у відповідності із обраним способом порівняння альтернатив (це відповідає випадкам $k \in \{1, 2, 3, 4\}$) для кожної альтернативи множини Ω формується множина домінованих альтернатив $S_R^k(x)$ і в якості найкращої альтернативи обирається та, для якої її множина домінованих альтернатив є максимальною за включенням серед множин $S_R^k(x)$.

Змістовний опис принципів порівняння альтернатив для різних способів оптимізації (при $k \in \{1, 2, 3, 4\}$):

k=1: $\forall x \in \Omega$ множина $S^1_R(x)$ – це множина альтернатив, які домінуються альтернативою x за строгою перевагою, рівноцінністю та непорівнюваністю за відношенням R;

k=2: $\forall x \in \Omega$ множина $S^2_R(x)$ – це множина альтернатив, які домінуються альтернативою x за строгою перевагою або непорівнювані з альтернативою x за відношенням R;

k=3: $\forall x \in \Omega$ множина $S^3_R(x)$ – це множина альтернатив, які домінуються альтернативою x за строгою перевагою або рівноцінні альтернативі x за відношенням R;

k=4: $\forall x \in \Omega$ множина $S^4_R(x)$ – це множина альтернатив, які домінуються альтернативою x за строгою перевагою.

Алгоритм формування множини *k*-оптимальних елементів

Крок 1. Для відношення R сформувати:

- симетричну частину відношення

$$I = R \cap R^{-1},$$

- асиметричну частину відношення

$$P = R \setminus I,$$

при цьому виконується співвідношення $R = P \cup I$,

- відношення непорівнюваності за відношенням R

$$N = \overline{R} \cap \overline{R^{-1}}$$

2. Для відношення R сформувати нижні перерізи множин P, I, N:

$H_p^+(x) = \{y \in \Omega | yRx \wedge x\overline{R}y\}$,

$H_p^-(x) = \{y \in \Omega | xRy \wedge y\overline{R}x\}$,

$H_I^+(x) = H_I^-(x) = \{y \in \Omega | xRy \wedge yRx\}$,

$H_N^+(x) = H_N^-(x) = \{y \in \Omega | x\overline{R}y \wedge y\overline{R}x\}$,

$H_R^+(x) = H_P^+(x) \cup H_I^+(x)$,

$H_R^-(x) = H_R^-(x) \cup H_I^-(x)$.

Крок 3. Вибрати спосіб оптимізації ($k \in \{1, 2, 3, 4\}$) і для кожного елемента $x \in \Omega$ побудувати множину домінованих альтернатив $S_R^k(x)$ за відповідним співвідношенням:

$$S_R^1(x) = H_P^-(x) \cup H_I^-(x) \cup H_N^-(x),$$
$$S_R^2(x) = H_P^-(x) \cup H_N^-(x),$$
$$S_R^3(x) = H_P^-(x) \cup H_I^-(x),$$
$$S_R^4(x) = H_P^-(x)$$

Крок 4. Для вибраного способу оптимізації ($k \in \{1, 2, 3, 4\}$) сформувати множину *k*-максимальних елементів.

Означення. Альтернатива $x^0 \in \Omega$ називається *k-максимальним елементом* по відношенню R на Ω, якщо $S_R^k(x^0)$ є максимальним за включенням елементом сім'ї множин $S_R^k(x), x \in \Omega$, тобто виконується:

$\forall y \in \Omega,\ y \neq x^0 : S_R^k(y) \subseteq S_R^k(x^0)$ і $\overline{\exists} y \in \Omega \mid\ S_R^k(x^o) \subset S_R^k(y)$

Крок 5. Для вибраного способу оптимізації ($k \in \{1, 2, 3, 4\}$) сформувати множину *k*-оптимальних елементів.

Означення. Альтернатива $x^0 \in \Omega$ називається *k-оптимальним елементом* по відношенню R на Ω, якщо

$$S_R^k(x^o) = \Omega$$

Для обраного способу оптимізації ($k \in \{1, 2, 3, 4\}$) найкращі альтернативи повинні обиратись серед множин *k*-максимальних та *k*-оптимальних елементів.

Питання

1. Поясніть суть методів оптимізації за домінуванням та блокуванням, в чому полягає різниця між даними методами.

2. Поясніть суть методу оптимізації за Нейманом-Моргенштерном.

3. Поясніть суть методів *k*-оптимізації.

4. Вкажіть, для яких випадків відношення *R* доцільно використовувати різні методи оптимізації за БВ.

5. Поясніть, які принципи лежать в основі парного порівняння альтернатив в методах *k*-оптимізації.

Перелік посилань

1. Юдин Д.Б. Вычислительные методы теории принятия решений - М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. - 320 с.

2. Кузьмин В. В.Построение групповых решений в пространствах четких и нечетких бинарных отношений.—М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1982.— 168 с.

3. Figueira J., Greco S., M. Ehrgott, Multiple criteria decision analysis: state of the art surveys. – Springer, 2005.

4. Черноруцкий И. Г. Методы принятия решений. — СПб.: БХВ-Петербург, 2005.- 416 с.

Розділ 3. Підтримка прийняття рішень при оцінюванні альтернатив за множиною критеріїв

Постановка задачі багатокритеріального вибору (БВ) включає множину допустимих розв'язків (альтернатив), набір критеріїв та бінарне відношення переваг особи, що приймає рішення (ОПР). Її вирішення полягає в пошуку множини, що вибирається. Вона може містити один розв'язок або підмножину розв'язків з множини допустимих розв'язків.

В рамках сформульованої моделі багатокритеріального вибору принцип Еджворта-Парето формулюється у вигляді твердження про те, що множина розв'язків, які вибираються, міститься (включається) в множині Парето. Іншими словами, кожен розв'язок, який вибирається, є парето-оптимальним [1]. Для виконання цього необхідно певним чином обмежити клас задач багатокритеріального вибору накладанням спеціальних вимог на компоненти задачі БВ. Головним чином це стосується вимог (аксіом) до відношення переваги ОПР, які можна інтерпретувати як «раціональна» («розумна», «послідовна») поведінка в процесі вибору.

Сформулюємо аксіоми, які визначають «розумну» поведінку ОПР в процесі вибору [2].

Аксіома 1 (виключення домінованих розв'язків). Для кожної пари допустимих розв'язків $x', x'' \in X$, для яких виконується співвідношення $x' \succ x''$ має місце $x'' \notin \mathrm{C}(X)$,

де X – множина допустимих розв'язків,

$\succ$ – відношення переваги ОПР, $x' \succ x''$ означає, що з пари розв'язків x', x'' ОПР віддає перевагу першому і не вибере другий. В цьому випадку кажуть, що розв'язок x' домінує розв'язок x'',

$\mathrm{C}(X)$ – множина розв'язків, що вибирається в результаті вирішення задачі БВ, $\mathrm{C}(X) \subset X$.

Аксіома 2 (аксіома Парето). Для усіх пар допустимих розв'язків $x', x'' \in X$, для яких має місце нерівність $f(x') \geq f(x'')$, виконується співвідношення $x' \succ x''$,

де $f = (f_1, f_2, \dots, f_m)$ – векторний критерій в задачі БВ, компоненти якого f_i – це критерії в задачі БВ, $f(x') \geq f(x'')$ означає виконання покомпонентних нерівностей $f_i(x') \geq f_i(x''), \forall i = 1,2, \dots, m$ причому $f(x') \neq f(x'')$.

$\succ$ – відношення переваги ОПР.

Аксіома виключення домінованих розв'язків визначає обмеження на множину розв'язків, що вибираються як результат виршення задачі БВ. Тобто множина розв'язків, що вибираються, яким би способом вона не виділялась із множини допустимих розв'язків, не повинна містити жодного розв'язку, для якого знайдеться розв'язок, що його переважає.

Аксіома Парето визначає, що при вирішенні задачі БВ ОПР намагається отримати по можливості найбільші значення всіх компонент векторного критерія f.

Означення. Множина *парето-оптимальних розв'язків* визначається співвідношенням

$$P^0(X) = \{x^* \in X \mid \nexists x \in X, \text{такого що } f(x) \geq f(x^*)\}, \tag{3.1}$$

де *X* – множина допустимих розв'язків,

$f = (f_1, f_2, \dots, f_m)$ – векторний критерій в задачі БВ,

множина $P^0(X)$ називається *множиною Парето*.

Для множини парето-оптимальних розв'язків також використовують термін *множина ефективних розв'язків*.

Застосування принципа Еджворта-Парето дозволяє з множини допустимих розв'язків виключити завідомо неприйнятні, тобто такі розв'язки, що ніколи не будуть обраними, якщо вибір здійснюється достатньо «розумно». В результаті такого виключення залишається множина, яка називається множиною Парето або областю компромісів. Вона, як правило, є достатньо широкою і в процесі прийняття рішень виникає питання, який саме розв'язок із парето-оптимальних слід обирати, або про подальше звуження області компромісів. Це питання є достатньо складним при вирішенні практичних багатокритеріальних задач. Згідно із принципом Еджворта-Парето, якщо поведінка ОПР є «розумною» (тобто такою, що відповідає аксіомам 1 та 2), то множина вибраних нею розв'язків обов'язково повинна бути парето-оптимальною. Наведемо формулювання цього принципа у вигляді теореми.

Теорема 1 (принцип Еджворта-Парето). Нехай виконується аксіома Парето. Тоді для будь-якої множини $\mathrm{C}(X)$ – розв'язків, що вибираються в результаті вирішення задачі БВ, яка задовольняє аксіому 1, виконується включення

$$\mathrm{C}(X) \subset P^0(X),$$

де $P^0(X)$ – множина Парето.

Вирішення задачі БВ потребує інформації про відношення переваги ОПР, тип та характер якої обумовлює вибір методу прийняття рішень. Основний тип інформації, який використовують при вирішення прикладних задач БВ – це інформація про відносну важливість критеріїв.

Будемо розуміти під порівнюваністю критеріїв можливість деякого співставлення за перевагою альтернатив, що відрізняються тільки оцінками за даними критеріями.

Постановка задачі. Задано:

Ω – множину альтернатив;

K=$\{k_1, \dots, k_m\}$ – множину критеріїв, за якими оцінюють альтернативи множини Ω.

Кожна альтернатива $x_i \in \Omega$ представлена точкою простору оцінок критеріїв E^m :

$$x_i = (x_i^1, \dots, x_i^m),$$

де x_i^j – оцінка альтернативи x_i за критерієм k_j;

X=$\varphi(\Omega)$ – множина альтернатив в просторі оцінок критеріїв.

Інформація про порівнюваність критеріїв може бути представлена у вигляді $\beta_1, \ldots, \beta_m$ - вагових коефіцієнтів відносної важливості критеріїв, або задана відношенням переваги на множині критеріїв <V, *K*>.

Необхідно за інформацією про оцінки альтернатив та інформацією про порівнюваність критеріїв вибрати найкращу альтернативу x^* або множину найкращих альтернатив $X^* \subset \Omega$.

Схему вирішення задачі наведено на рис. 3.1. Вона передбачає, що на першому етапі за інформацією про оцінки альтернатив за множиною критеріїв та за інформацією про порівнюваність критеріїв на множині альтернатив Ω задається бінарне відношення *R*, яке відображає систему переваг ОПР. Після цього на другому етапі застосування відповідного метода оптимізації за бінарним відношенням дозволяє знайти розв'язки задачі.

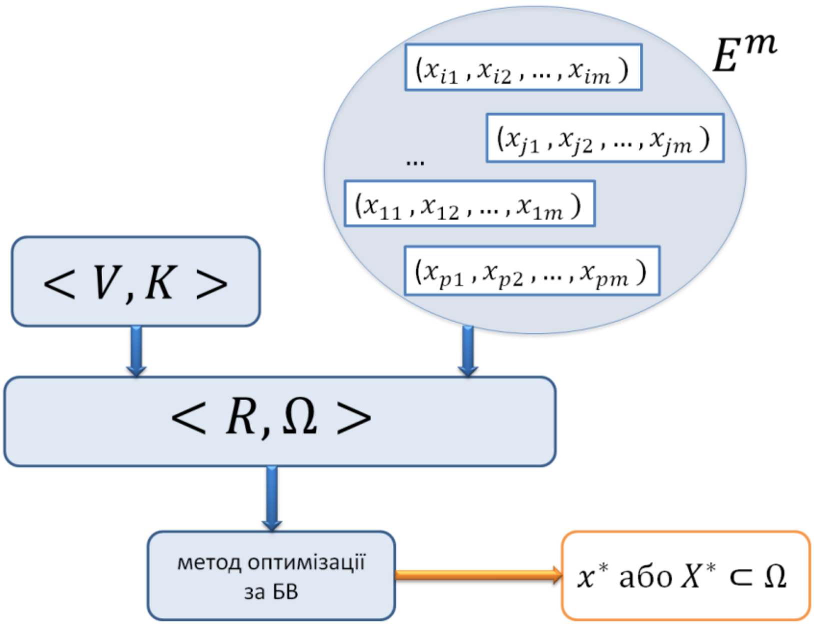


Рис. 3.1 – Схема вирішення задачі БВ

Для довільних альтернатив простору оцінок критеріїв $x, y \in E^m$ введемо в розгляд наступні вектори:

$\Delta^{xy} = (\Delta_1^{xy}, \Delta_2^{xy}, \ldots, \Delta_m^{xy})$, де $\Delta_i^{xy} = x_i - y_i$ – різниця оцінок альтернатив x, y за критерієм k_i;

$$\sigma^{xy} = (\sigma_1^{xy}, \sigma_2^{xy}, \ldots, \sigma_m^{xy}), \text{ де } \sigma_i^{xy} = Sign(\Delta_i^{xy}) = \begin{cases} 1, \Delta_i^{xy} > 0 \\ 0, \Delta_i^{xy} = 0 \\ -1, \Delta_i^{xy} < 0 \end{cases}$$

Означення. *Координатне відношення* – це відношення, для порівняння за яким двох альтернатив не потрібна інформація про ступінь близькості оцінок цих альтернатив за відповідними координатами. Потрібна тільки інформація про порядок оцінок на відповідних координатних вісях (тобто про знаки різниць одноіменних координат). Тобто при порівнянні альтернатив x, y за координатним відношенням інформація потрібна не у вигляді вектора Δ^{xy}, а у вигляді вектора σ^{xy}.

Наведемо ряд відношень, які можуть бути задані на множині альтернатив за інформацією про оцінки альтернатив за множиною критеріїв та за інформацією про порівнюваність критеріїв, і які належать до координатних відношень [3].

3.1 Відношення Парето

При побудові відношення Парето не використовується якихось припущень про порівнюваність критеріїв, або критерії вважаються рівноцінними.

Відношення Парето є координатним відношенням і визначається за допомогою наступних співвідношень:

$$xR^0y \Leftrightarrow \forall i \in M[\sigma_i^{xy} \geq 0], \quad (3.2)$$

$$xI^0y \Leftrightarrow \forall i \in M[\sigma_i^{xy} = 0], \quad (3.3)$$

$$xP^0y \Leftrightarrow \forall i \in (M[\sigma_i^{xy} \geq 0]) \wedge \exists i_0 \in M[\sigma_{i_0}^{xy} = 1]) \quad (3.4)$$

$$R^0 = P^0 \cup I^0, \quad (3.5)$$

де M = {1,2, …, m} – множина індексів критеріїв.

Для використання відношення Парето для відображення структури переваг ОПР необхідне виконання **умови незалежності критеріїв за перевагою**:

$$\forall l \in \{1,...,m\}\ \forall x, y \in E^m \left| x_i = y_i, i = \overline{1,m}, i \neq l \right. \tag{3.6}$$

$$[x_l > y_l \Rightarrow xPy, \quad x_l = y_l \Rightarrow xIy]$$

Властивості відношення P^0.

В загальному випадку відношення Парето є незв'язним відношенням нестрогого порядку, а його асиметрична частина P^0 – строгим порядком.

Множина X^0 максимальних по P^0 елементів на множині Ω (за означенням (2.5)) є множиною Парето, або множиною ефективних розв'язків (яка визначається співвідношенням (3.1)).

В багатьох практичних задачах множина X^0 ефективних розв'язків містить достатньо велику кількість альтернатив, що вимагає побудови «сильнішого» відношення із залученням додаткової інформації про систему переваг ОПР. Відношення, яке є підсиленням відношення Парето, крім пар альтернатив, що порівнювані за відношенням Парето, містить ще пари, що не входять до P^0. Такі відношення дозволяють порівняти суттєво більшу кількість альтернатив, ніж відношення Парето, і називаються раціональними.

Означення. Відношення *R*, для якого виконується $P^0 \subset R$, тобто

$$\forall x, y \in \Omega: \ x\, P^0 y \Longrightarrow x\, R\, y$$

називається *раціональним відношенням*.

3.2 Мажоритарне відношення

Всі критерії вважаються рівноважливими, тобто відношення <V, *K*>, задане на множині критеріїв, є зв'язним відношенням еквівалентності.

Мажоритарне відношення P^M визначається за допомогою співвідношення:

$$xP^M y \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{m} \sigma_i^{xy} > 0. \tag{3.6}$$

Використовують також ряд модифікацій мажоритарного відношення P^M:

$$xP^{M_S}y \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{m} \sigma_i^{xy} > S, \qquad (3.7)$$

де $0 \le S < m$.

При $S = 0$ виконується $P^{M_S} = P^M$, а при $S = m-1$ має місце $P^{M_S} = P^C$ (де P^C — відношення Слейтера).

Властивості відношення P^M.

Відношення P^{M} є раціональним, тобто $\mathrm{P}^0 \subset \mathrm{P}^{\mathrm{M}}$. Мажоритарне відношення є неациклічним та нетранзитивним.

3.3 Лексикографічне відношення

Відношення <V, *K*>, задане на множині критеріїв, є слабкозв'язним строгим порядком, тобто критерії можна впорядкувати за важливістю. Нехай множина критеріїв *K* впорядкована за спаданням важливості, тобто $\forall i, j \in M \middle| i < j [K_i V K_j]$.

Відношення лексикографії P^L визначається співвідношеням:

$$\forall x, y \in E^m \middle| x \ne y \;\; xP^L y \Leftrightarrow [x_1 > y_1] \vee [x_1 = y_1 \wedge x_2 > y_2] \vee \ldots$$

$$\ldots \vee [x_1 = y_1 \wedge x_2 = y_2 \wedge \ldots \wedge x_m > y_m]. \qquad (3.8)$$

Наведемо його визначення в термінах координатних відношень:

$$\forall x, y \in E^m \middle| x \ne y \;\; xP^L y \Leftrightarrow [\sigma_1^{xy} = 1] \vee [\sigma_1^{xy} = 0] \wedge [\sigma_2^{xy} = 1] \vee$$

$$\ldots \vee [\sigma_1^{xy} = 0] \wedge [\sigma_2^{xy} = 0] \wedge \ldots \wedge [\sigma_m^{xy} = 1]. \qquad (3.9)$$

Властивості відношення P^L.

Відношення лексикографії P^L є слабкозв'язним відношенням строгого порядку.

Відношення лексикографії P^L є раціональним, тобто $\mathrm{P}^0 \subset P^L$.

3.4 Відношення Березовського

Відношення <V, *K*>, задане на множині критеріїв, є квазіпорядком, тобто критерії розбиті на класи рівноважливих критеріїв $K_j (j=\overline{1,l})$, а класи впорядковані за зростанням їх важливості.

В цьому випадку для кожної групи рівноважливих критеріїв $K_j (j=\overline{1,l})$ необхідно побудувати систему відношень Парето $P^{0_j}, I^{0_j}, N^{0_j}$ (відповідно асиметрична, симетрична частини відношення Парето, а також відношення непорівнюваності за відношенням Парето) використовуючи співвідношення:

$$xP^{0j}y \Leftrightarrow (\forall k_i \in K_j[\sigma_i^{xy} \geq 0] \wedge (\exists k_{i_0} \in K_j[\sigma_{i_0}^{xy} = 1]), \tag{3.10}$$

$$xI^{0j}y \Leftrightarrow (\forall k_i \in K_j[\sigma_i^{xy} = 0], \tag{3.11}$$

$$xN^{0j}y \Leftrightarrow (\exists k_{i_1} \in K_j[\sigma_{i_1}^{xy} = 1]) \wedge (\exists k_{i_2} \in K_j[\sigma_{i_2}^{xy} = -1]). \tag{3.12}$$

Побудова відношення Березовського виконується ітераційно за ℓ ітерацій.

Крок 1. $j=1$: $P^{B_1} = P^{0_1},\ I^{B_1} = I^{01}, N^{B_1} = N^{0_1}$.

Крок *j* (*j* = 2,…, ℓ). Для всіх пар альтернатив $\forall\, x, y \in E^m$ побудувати систему відношень P^{Bj}, I^{Bj}, N^{Bj}, використовуючи співвідношення:

$$\begin{gathered} xP^{B_j}y \Leftrightarrow [(xP^{0_j}y) \wedge \neg(yP^{B_{j-1}}x)] \vee [(xI^{0_j}y) \wedge (xP^{B_{j-1}}y)] = \\ = [(xP^{0j}y) \wedge [(xP^{B_{j-1}}y) \vee (xN^{B_{j-1}}y) \vee (xI^{B_{j-1}}y)]] \vee [(xI^{0j}y) \wedge (xP^{B_{j-1}}y)], \end{gathered} \tag{3.13}$$

$$xI^{B_j}y \Leftrightarrow (xI^{0_j}y) \wedge (xI^{B_{j-1}}y), \tag{3.14}$$

$$xN^{B_j}y \Leftrightarrow \neg[(xP^{B_j}y) \vee (yP^{B_j}x) \vee (xI^{B_j}y)]. \tag{3.15}$$

В результаті відношення, отримане на останній ітерації, є відношенням Березовського:

$$xP^{B}y \Leftrightarrow xP^{B_l}y, \tag{3.16}$$

$$xI^{B}y \Leftrightarrow xI^{B_l}y, \tag{3.17}$$

$$xN^{B}y \Leftrightarrow xN^{B_l}y. \tag{3.18}$$

У випадку, якщо критерії розбиті на 2 класи рівноправних критеріїв і другий клас є важливішим за перший, відношення можна побудувати за співвідношеннями (які отримані із (3.10)-(3.18)).

Для пари альтернатив (*x*,*y*) має місце $xP^{B}y$, якщо для неї виконується хоча б одна із умов:

$xP^{02}y \wedge xP^{01}y$;

$xP^{02}y \wedge xN^{01}y$;

$xP^{02}y \wedge xI^{01}y$;

$xI^{02}y \wedge xP^{01}y$.

Властивості відношення P^{B}.

Відношення P^{B} має властивості асиметричності, антирефлексивності та ациклічності.

3.5 Шкали критеріїв. Однорідність критеріїв

В прикладних багатокритеріальних задачах значення критеріїв є результатами вимірювань в деякій шкалі. Існують різні типи шкал вимірювання [4]. Для вимірювань кількостей, параметрів об'єктів, таких як маса, довжина, температура, час використовують кількісні шкали. Для виконання класифікації об'єктів або визначення рейтингів об'єктів (коли встановлюється тільки факт переваги без визначення кількісної оцінки цієї переваги) використовують якісні шкали.

Означення. *Емпірична система з відношеннями* – це система $U=\{V,\ P\}$, де V - множина властивостей об'єктів, P – множина відношень між об`єктами за властивостями V.

Означення. *Шкалою* називається трійка елементів $\langle U,\ G,\ \varphi\rangle$, де U – емпірична система,

G – числова система,

φ – відображення φ: $U \to G$.

Означення. Шкали $\langle U, G_1, \varphi_1 \rangle$ та $\langle U, G_2, \varphi_2 \rangle$ належать до *шкал одного типу*, якщо $\mathrm{G}_1 = \varphi_1(\mathrm{U})$, $\mathrm{G}_2 = \varphi_2(\mathrm{U})$, $\mathrm{G}_1 \subset \mathrm{G}$, $\mathrm{G}_2 \subset \mathrm{G}$ та існує перетворення

$$f \mid \mathrm{G}_1 = f(\mathrm{G}_2) \text{ та } \mathrm{G}_2 = f^{-1}(\mathrm{G}_1).$$

Перетворення f називається *допустимим перетворенням* для шкал даного типу.

Множина допустимих перетворень характеризує тип шкали. Визначення основних типів шкал наведені в таблиці 3.1.

Таблиця 3.1 – Допустимі перетворення для основних типів шкал

Вимірювання	Шкала	Допустимі перетворення
Якісні	Номінальна	$\varphi(x)$ – взаємно-однозначні
	Порядкова	$\varphi(x)$ – монотонні
Кількісні	Інтервалів	$\varphi(x) = \alpha x + \beta, \alpha > 0$ – додатні лінійні перетворення
	Відношень	$\varphi(x) = \alpha x, \alpha > 0$ – перетворення подібності
	Різниць	$\varphi(x) = x + \beta$ – перетворення зсуву
	Абсолютна	$\varphi(x) = x$ – тотожні перетворення

Наведемо приклади використання основних типів шкал. Абсолютна шкала використовується при вимірюваннях кількостей об’єктів. Приклади вимірювань в шкалі відношень – маса та довжина. В шкалах відношень залишаються незмінними відношення числових оцінок альтернатив. Приклад вимірювань в шкалах інтервалів – вимірювання температури, для якого використовуються різні числові системи (шкали Цельсія, Кельвіна, Фаренгейта тощо). В шкалі інтервалів зберігається відошення різниць числових оцінок альтернатив. Шкала різниць визначає перехід між числовими системами, що відповідають одній емпіричній системі, у вигляді зміни початку відліку. Приклад вимірювань в цій шкалі – літочислення. Вимірювання твердості матеріалів, система військових звань, оцінка знань учнів – приклади вимірювань в порядковій шкалі. Для цієї шкали характерно при переході між числовими системами зберігати порядок на множині альтернатив. Номінальні шкали використовують при класифікації об’єктів.

Чим меншою є множина числових систем, на які гомоморфно відображається емпірична система з відношенням (і чим вужчим є клас допустимих перетворень числових систем), тим «сильнішою» є шкала, в якій вона вимірюється. На рис. 3.2 показаний напрямок зростання «сили» шкали, найменшу силу має номінальна шкала, найбільшу – абсолютна.

Рис. 3.2 – Рівні шкал

Вибір типу шкали при оцінюванні альтернатив (тобто для перетворення емпіричної системи на числову) визначається властивостями і типом відношення *P* в емпіричній системі *U=(A,P).* Наведемо умови вимірюваності емпіричних систем в різних типах шкал [5].

Теорема 2 (*Необхідна та достатня умови вимірюваності емпіричних систем в номінальній шкалі*). Емпірична система *U=(A,P)* вимірювана в номінальній шкалі тоді і тількі тоді, коли *P* - відношення еквівалентності.

Теорема 3 (*Необхідна та достатня умови вимірюваності емпіричних систем в порядковій шкалі*). Емпірична система *U=(A,P)* вимірювана в порядковій шкалі тоді і тільки тоді, коли *P* - відношення нестрогого зв'язного порядку (лінійного порядку - є рефлексивним, антисиметричним, транзитивним та зв'язним відношенням).

Означення. *Метризоване відношення* – це пара [*P, W(P)*],

де *W(P)* – множина чисел, що характеризує ступінь вираженості властивості, що визначається відношенням *P* (наприклад, ступінь переваги однієї альтернативи над іншою).

Означення. Метризоване відношення є *адитивним*, якщо виконується умова

$$\forall i, j, k\left[\{(A_i, A_j) \in P\} \cap \{(A_j, A_k) \in P\} \to \{(A_i, A_k) \in P\} \cap \{w_{ik} = w_{ij} + w_{jk}\}\right]$$

Означення. Метризоване відношення є *мультиплікативним*, якщо виконується умова

$$\forall i, j, k\left[\{(A_i, A_j) \in P\} \cap \{(A_j, A_k) \in P\} \to \{(A_i, A_k) \in P\} \cap \{w_{ik} = w_{ij} \cdot w_{jk}\}\right]$$

Означення. Назвемо емпіричну систему *U=(A,P) метризованою емпіричною системою*, якщо *P* – метризоване відношення.

Теорема 4 (*Необхідна та достатня умови вимірюваності емпіричних систем в шкалі відношень)*. Метризована емпірична система *U=(A,P)* вимірювана в шкалі відношень тоді і тільки тоді, коли *P* – мультиплікативне метризоване відношення.

Теорема 5 (*Необхідна та достатня умови вимірюваності емпіричних систем в шкалі інтервалів).* Метризована емпірична система *U=(A,P)* вимірювана в шкалі інтервалів тоді і тільки тоді, коли *P* – адитивне метризоване відношення.

Відношення, розглянуті в розділах 3.1 – 3.4, визначені для випадку порядкових шкал критеріїв, а також для сильніших шкал.

Однорідні критерії

Означення. Критерії є *однорідними*, якщо вони вимірюються в одній шкалі.

В цьому випадку якщо критерій k_i замінити на $\Phi(k_i)$, де Φ – визначене типом шкали допустиме перетворення, то решту критеріїв k_j слід замінити на $\Phi(k_j)$.

Нормалізація критеріїв – перетворення неоднорідних початкових критеріїв на однорідні. Для цього використовуються різні типи перетворень. Розглянемо деякі з них [5].

1. Перетворення $\boldsymbol{\omega}^{(1)}$

Множина критеріїв в загальному випадку може бути розбита на дві підмножини:

$$K = K^+ \cup K^-,$$

де K^+ - критерії, значення яких бажано збільшувати,

K^- - критерії, значення яких бажано зменшувати.

Оцінки за кожним критерієм належать діапазону:

$\forall k_i \in K \quad \left[\underline{x_i} \le x_i \le \overline{x_i}\right]$, де $\underline{x_i}$, $\overline{x_i}$– мінімальна та максимальна можливі оцінки за критерієм k_i.

Тоді $\omega^{(1)}(x_i) = x_i^{\,0}$, де

$$\forall k_i \in K^+ \quad {x_i}^0 = \frac{x_i - \underline{\underline{x_i}}}{\overline{x_i} - \underline{x_i}}, \tag{3.19}$$

$$\forall k_i \in K^- \quad {x_i}^0 = \frac{\overline{x_i} - x_i}{\overline{x_i} - \underline{x_i}}.$$

При цьому $\omega^{(1)}(x_i) \in [0,1]$

2. Перетворення $\boldsymbol{\omega}^{(2)}$

$$\omega^{(2)}(x_i) = (x_i^{opt} - x_i)/\, x_i^{opt}, \qquad (3.20)$$

де x_i^{opt} – оптимальне значення оцінки для критерія k_i.

3. Перетворення $\boldsymbol{\omega}^{(3)}$

$$\omega^{(3)}(x_i) = \omega^s(x_i), \ \ s \in Z^+, \ s \geq 2, \qquad (3.21)$$

де ω – визначається співвідношенням (3.19) або (3.20).

4. Перетворення $\boldsymbol{\omega}^{(4)}$

нормування середнім (3.22)

$$\omega^{(4)}(x_i) = x_i /\, x_i^{\,c},$$

де $x_i^{\,c}$ – середнє значення оцінки для критерія k_i.

5. Перетворення $\boldsymbol{\omega}^{(5)}$

$$\omega^{(5)}(x_i) = x_i \,/\, x_i^{opt}, \qquad (3.23)$$

де x_i^{opt} – оптимальне значення оцінки для критерія k_i.

3.5 Порівнюваність окремих критеріїв. Відношення Подиновського

Відношення Подиновського визначається для випадку кількісних шкал однорідних критеріїв. Розглядається випадок, коли за важливістю співставляються окремі пари критеріїв.

Критерій може вважатись *важливішим* за інший, якщо збільшення оцінки за цим критерієм на декілька одиниць є більш важливим за зменшення на таку ж саму величину оцінки за іншим, менш важливим критерієм. Звідси випливає можливість визначення поняття важливості критеріїв через перестановку оцінок за різними критеріями.

Означення. Альтернативи (точки простору оцінок критеріїв) $x \in E^m$ та $x^{ij} \in E^m$ називаються *симетричними*, якщо x^{ij} отримана з x перестановкою i–ї та j-ї координат (оцінок за критеріями k_i та k_j відповідно), тобто

$$x = (x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_m),$$

$$x^{ij} = (x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_i, \ldots, x_m).$$

Розглянемо поняття рівноважливості критеріїв та переваги на множині критеріїв.

Введемо позначення:

$k_r E^{\Pi} k_t$ – критерії k_r та k_t є рівноважливими (E^{Π} - відношення еквівалентності на множині критеріїв);

$k_r V^{\Pi} k_t$ – критерій k_r *переважає* за важливістю критерій k_t (V^{Π} - відношення строгої переваги на множині критеріїв);

$x I^{\pi} x^{rt}$ – дві симетричні точки x та x^{rt} є рівноцінними (I^{π} – відношення еквівалентності, задане на множині альтернатив).

$x P^{\pi} x^{rt}$ – точка x переважає симетричну точку x^{rt} (P^{π} – відношення строгої переваги, задане на множині альтернатив).

Означення. Критерії k_r та k_t *є рівноважливими* тоді і тільки тоді, коли дві симетричні точки x та x^{rt} є рівноцінними:

$$k_r E^{\Pi} k_t \Leftrightarrow \forall\, x \in E^m :\ x\, I^{\pi} x^{rt}, \tag{3.24}$$

де x^{rt} - точка, симетрична точці *x.*

Означення. Критерій k_r *переважає* за важливістю критерій k_t тоді і тільки тоді, коли з пари симетричних точок x та x^{rt} переважнішою є та, в якої більшою є r-та координата, тобто якщо $x_r > x_t$, то $x P^{\pi} x^{rt}$:

$$k_r V^{\Pi} k_t \Leftrightarrow \forall\, x \in E^m \mid x_r > x_t :\ x\, P^{\pi} x^{rt}, \tag{3.25}$$

де x^{rt} - точка, симетрична точці *x.*

Тоді відношення W^{Π} порівнюваності на множині критеріїв K за важливістю містить асиметричну частину (V^{Π}) та симетричну частину (E^{Π}):

$$W^{\Pi} = V^{\Pi} \cup E^{\Pi}$$

Властивості відношення W^{Π}:

V^{Π} - ациклічне;

E^{Π} - симетричне.

Таке використання інформації про порівнювану важливість критеріїв передбачає, що критерії повинні бути *однорідними*, тобто їхні значення повинні належати одній і тій самій множині (або іншими словами, критерії вимірюються в одній шкалі).

Означення. Відношення Подиновського R^{Π} визначається співвідношенням:

$$R^{\Pi} = TC\,(R^{o} \cup P^{\pi} \cup I^{\pi}) = TC\,(P^{o} \cup I^{o} \cup P^{\pi} \cup I^{\pi}), \quad (3.26)$$

де R^{o} – відношення Парето,

P^{π}, I^{π} - відношення визначені (3.25) та (3.24) відповідно,

TC() – операція транзитивного замикання

Властивості відношення R^{Π}.

1. Відношення R^{Π} є відношенням квазіпорядку.

2. Для порівняння пари альтернатив *x, y* за відношенням R^{Π} необхідно та достатньо виконання умови:

$$xR^{\Pi}y \Leftrightarrow \exists Z = z^1, z^2, \ldots z^p \mid z^1 = x,\ z^p = y,\ i = \overline{1, p-1}\ [z^i\ H_i\ z^{i+1}], \quad (3.27)$$

де $H_i \in \{P^{o}, I^{o}, P^{\pi}, I^{\pi}\}$

3. Якщо P^{Π}- асиметрична частина відношення R^{Π}, а I^{Π}- симетрична частина відношення R^{Π}, то виконуються умови:

$$xI^{\Pi}y \Leftrightarrow \text{в ланцюжку } Z\ (3.27)\ \forall\ i = \overline{1, p-1}\ \ H_i \in \{I^{o}, I^{\pi}\} \quad (3.28)$$

$$xP^{\Pi}y \Leftrightarrow \text{в ланцюжку } Z\ (3.27)\ \exists\ i\ \mid H_i \in \{P^{o}, P^{\pi}\} \quad (3.29)$$

Побудова відношення R^{Π} для випадку рівноцінних критеріїв

Розглянемо випадок, коли на множині критеріїв задане зв'язне відношення $W^{\Pi} = V^{\Pi} \cup E^{\Pi}$, для якого $V^{\Pi} = \varnothing$, тобто всі критерії рівноцінні.

Введемо позначення:

$\Psi(x)$ – вектор-функція, що розташовує усі компоненти вектора $x \in E^m$ за спаданням значень, тобто:

$\Psi_1(x) = max_{i=\overline{1,m}}\, x_i$,

$\Psi_m(x) = min_{i=\overline{1,m}}\, x_i$

Твердження. Якщо усі критерії є рівноважливими, то виконуються співвідношення:

$$xR^{\Pi}y \Leftrightarrow \Psi(x)\ R^0\ \Psi(y), \quad (3.30)$$

$$xP^{\Pi}y \Leftrightarrow \Psi(x)\ P^0\ \Psi(y), \quad (3.31)$$

$$xI^{\Pi}y \Leftrightarrow \Psi(x)\ I^0\ \Psi(y), \quad (3.32)$$

де $\Psi(x)$ – вектор-функція, що розташовує усі компоненти вектора $x \in E^m$ за спаданням значень,

R^0 – відношення Парето,

P^0, I^0 – асиметрична та симетрична частини відношення R^0 відповідно.

Як слідує із наведеного твердження, у випадку рівноцінних критеріїв алгоритм побудови відношення Подиновського полягає у виконанні наступних кроків:

1. Для кожної точки простору оцінок критеріїв $x \in E^m$ визначити всі компоненти вектор-функції $\Psi(x)$.
2. $\forall x \in E^m$ на множині вектор-функцій $\Psi(x)$ побудувати відношення Парето.
3. За відношенням Парето на множині вектор-функцій $\forall x \in E^m$ $\Psi(x)$ побудувати відношення R^{Π} на множині точок простору оцінок критеріїв $x \in E^m$, використовуючи співвідношення (3.30-3.32).

Питання

1. Поясніть, в чому полягає задача багатокритеріального вибору і що є результатом її вирішення.

2. Сформулюйте аксіоми, які визначають «розумну» поведінку ОПР в процесі вирішення задачі БВ.

3. Наведіть схему вирішення задачі багатокритеріального вибору.

4. Поясніть, якого роду інформація використовується при вирішенні задачі БВ.

5. Дайте означення координатного відношення.

6. Вкажіть співвідношення, за якими пару альтернатив можна порівняти за відношеннями Парето, мажоритарним, лексикографічним.

7. Вкажіть принципи побудови відношень Березовського, Подиновського.

8. Наведіть допустимі перетворення для основних типів шкал.

9. Наведіть приклади вимірювань в різних типах шкал.

10. Вкажіть умови вимірювання емпіричних систем в різних типах шкал.

Перелік посилань

1. Ногин В. Д. Принятие решений в многокритериальной среде: количественный подход. — 2-е изд., испр. и доп. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. - 176 с.

2. Ногин В.Д. Принятие решений при многих критериях. Учебно-методическое пособие.– СПб. Издательство «ЮТАС», 2007. – 104 с.

3. Основы системного анализа и проектирования АСУ: Учеб. пособие/ А.А.Павлов и др.– К.:Выща шк.; 1991.–367с.

4. Гнатієнко Г.М., Снитюк В.Є. Експертні технології прийняття рішень: Монографія.– К.: ТОВ «Маклаут»,– 2008.– 444с.

5. Тоценко В.Г. Методи та системи підтримки прийняття рішень. Алгоритмічний аспект.– К.:Наукова думка, 2002.–381с.

Розділ 4. Багатокритеріальні методи прийняття рішень

4.1 Метод ELECTRE I

Метод ELECTRE (the ELimination Et Choice Translating Reality) вперше був запропонований Roy (1968) та Benayoun та ін. (1966), і залишається одним з базових методів багатокритеріальної оптимізації, який на теперішній момент отримав значний розвиток [1]-[3]. Було розроблено багато різних модифікацій методу (ELECTRE I, II, III, IV), що базуються на характері постановки задачі (визначити ядро або ранжувати альтернативи), ступені важливості критеріїв, що враховуються, та інформації про переваги (ваги, індекси узгодження та неузгодження).

Метод ELECTRE I орієнтований на пошук розв'язку у формі підмножини альтернатив (ядра). В цьому методі для визначення відношення переваги на множині альтернатив вводяться два показники – індекс узгодження та індекс неузгодження. Індекс узгодження $C(a, b)$ визначає ступінь переваги альтернативи a над альтернативою b (або наскільки a «не гірша» за b). Індекс неузгодження $D(a, b)$ визначає ступінь строгої переваги альтернативи b над альтернативою a. На основі індексів узгодження та неузгодження, визначених для всіх пар альтернатив, на множині альтернатив задається відношення переваги, яке є основою для визначення ядра.

Постановка задачі. Дано

$A = \{A_k \mid k = 1,\dots, n\}$ – множину альтернатив,

$K = \{K_j \mid j = 1,\dots, m\}$ – множину критеріїв,

$X = \{x_{kj} \mid k = 1,\dots, n;\ j = 1,\dots, m\}$ – множина альтернатив в просторі оцінок критеріїв, тобто x_{kj} – оцінка альтернативи A_k за критерієм K_j,

$w = \{w_j \mid j = 1,\dots, m\}$ – множину вагових коефіцієнтів критеріїв,

$\hat{c}, \hat{d}$ – порогові значення індексів узгодження та неузгодження відповідно (можуть бути не заданими).

Звичайно $\hat{c}$ > 0.5($\hat{c}_{max}$=1), $\hat{d}$ < 0.5($\hat{d}_{min}$=0).

Необхідно за інформацією про оцінки альтернатив за множиною критеріїв та за інформацією про порівняльну важливість критеріїв (у вигляді вагових коефіцієнтів критеріїв) визначити одну найкращу альтернативу або підмножину найкращих альтернатив з множини *A*.

Наведемо алгоритм вирішення задачі згідно з методом ELECTRE I [1].

Крок 1. Для усіх пар альтернатив A_i, A_k ($i \neq k$) з множини *A* обчислити значення *індексів узгодження* (concordance index) за формулою

$$C(A_i, A_k) = \frac{1}{\sum_{j=1}^{m} w_j}\left(\sum_{j|x_{ij} \geq x_{kj}} w_j\right). \tag{4.1}$$

Крок 2. Якщо порогове значення індексу узгодження $\hat{c}$ не задане, обчислити його за співвідношенням:

$$\hat{c} = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} C(A_i, A_k). \tag{4.2}$$

Крок 3. Для усіх пар альтернатив A_i, A_k ($i \neq k$) з множини *A* обчислити значення *індексів неузгодження* (discordance index) за формулою

$$D(A_i, A_k) = \begin{cases} 0, \text{ якщо } \forall j \;\; x_{ij} \geq x_{kj}, \\ \max_{j|x_{ij} < x_{kj}} \left[\frac{x_{kj} - x_{ij}}{\delta_j}\right], \text{ якщо } \exists j \;\; x_{ij} < x_{kj}, \end{cases} \tag{4.3}$$

де $\delta_j = \max_i x_{ij} - \min_i x_{ij}$ (або розмір шкали за критерієм K_j).

Крок 4. Якщо порогове значення індексу узгодження $\hat{d}$ не задане, обчислити його за співвідношенням:

$$\hat{d} = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} D(A_i, A_k). \tag{4.4}$$

Крок 5. Побудувати на множині альтернатив *A* відношення переваги *R* на основі визначених на кроках 1,2 значень індексів узгодження та неузгодження, використовуючи співвідношення:

$$(A_i, A_k) \in \mathrm{R} \Leftrightarrow C(A_i, A_k) \geq \hat{c} \wedge D(A_i, A_k) \leq \hat{d}. \tag{4.5}$$

Крок 6. За відношенням переваги *R*, заданим на множині альтернатив *A*, знайти множину *X** – ядро (або розв’язок Неймана-Моргенштерна), для якої виконується умова:

1. $\forall A_k \in A \backslash X^*, \exists A_i \in X^* \mid (A_i, A_k) \in R$; (4.6)
2. $\forall A_i, A_k \in X^* : (A_i, A_k) \notin R \wedge (A_k, A_i) \notin R$.

Крок 7. Зміна $\hat{c}, \hat{d}$ – порогових значень індексів узгодження та неузгодження дозволяє досягти прийнятної величини та складу множини *X**. Після зміни значень $\hat{c}, \hat{d}$ необхідно перейти на крок 5.

Існують різні способи визначення *індексів неузгодження* $D(A_i, A_k)$ [2], крім визначення за допомогою співвідношення (4.3). Наведемо один із можливих варіантів [3]:

$D(A_i, A_k)=0$, якщо $\forall j \ x_{ij} \geq x_{kj}$, інакше (4.7)

$$D(A_i, A_k)=\frac{\max_{j|x_{ij}<x_{kj}} |v_{ij}-v_{kj}|}{\max_{j=\overline{1,m}} |v_{ij}-v_{kj}|},$$

де v_{ij} – зважена нормалізована оцінка альтернативи A_i за критерієм K_j, визначається за формулою:

$$v_{ij} = w_j \cdot r_{ij}, \ i = \overline{1,n}, j = \overline{1,m}, \tag{4.8}$$

$$r_{ij} = \frac{x_{ij}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_{ij})^2}}, \ i = \overline{1,n}, j = \overline{1,m}. \tag{4.9}$$

4.2 Метод TOPSIS

Метод TOPSIS (The **T**echnique for **O**rder **P**references by **S**imilarity to an **I**deal **S**olution) був запропонований Hwang та Yoon (1981). Основна ідея методу полягає у концепції пошуку компромісного розв’язку при виборі найкращої альтернативи, який би був найближчим до позитивного ідеального розв’язку (скорочено PIS, або утопічної точки, оптимального розв’язку) та найвіддаленішим від негативного ідеального розв’язку (скорочено NIS, або антиутопічної точки). В якості розв’язку вибирається альтернатива, що є найкращою згідно побудованого впорядкування [3].

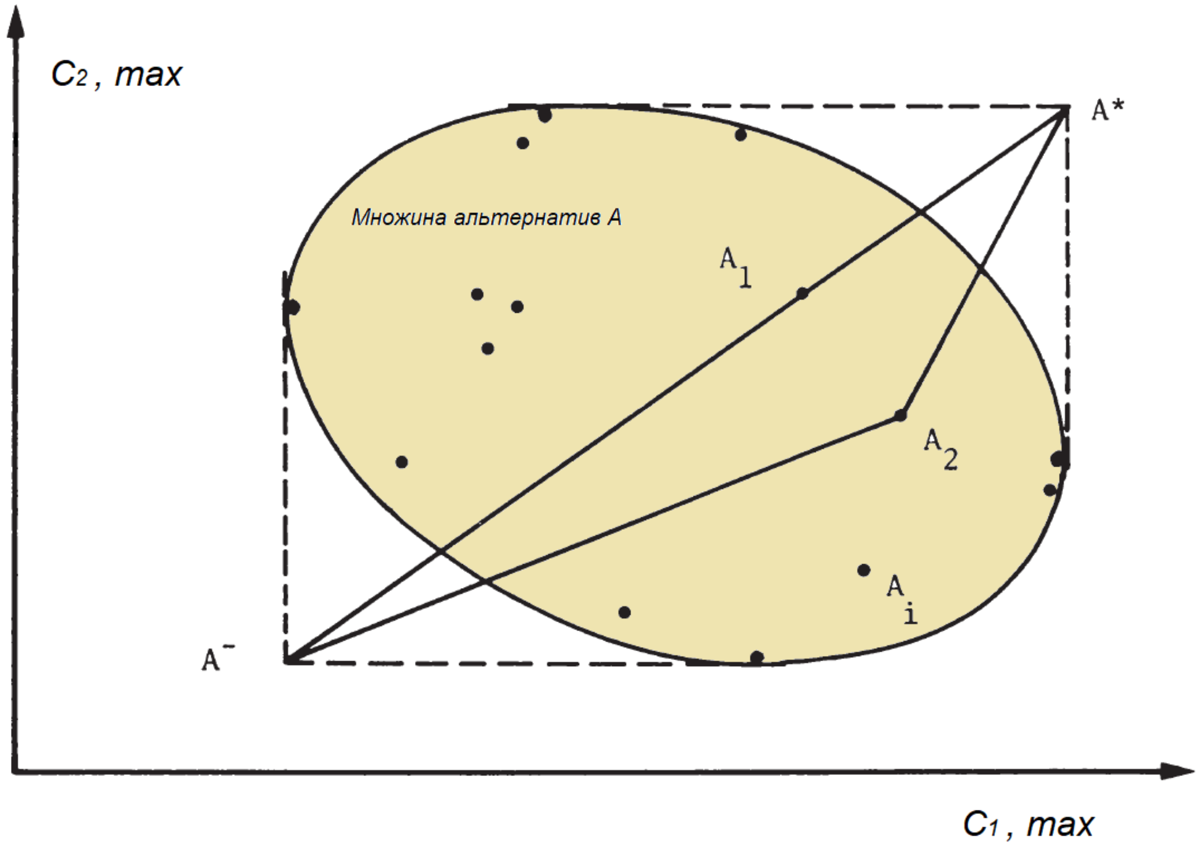


Рис. 4.1 – Евклідова відстань до PIS (A^*) та до NIS (A^-) в двовимірному просторі оцінок критеріїв

На рис. 4.1 наведено ілюстрацію ідеї метода для випадку двовимірного простору оцінок критеріїв (обидва критерії максимізуються). Під ідеальною точкою PIS розуміємо альтернативу, що має найкращі з можливих оцінок за усіма критеріями (альтернатива A^*), а під ідеально-негативною точкою NIS – що має найгірші з можливих оцінок за усіма критеріями (альтернатива A^-). Альтернатива, яку слід було б обрати в якості найкращої, оскільки вона знаходиться на мінімальній відстані від ідеальної точки PIS, в той же час може знаходитись і на найближчій відстані до негативної ідеальної точки NIS. Як, наприклад, альтернатива A_1 на рис. 4.1 знаходиться на найменшій відстані як до A^*, так і до A^-. В цьому випадку складно обгрунтувати вибір альтернативи A_1. Метод TOPSIS враховує відстані одночасно до обох точок - A^* та A^-, при визначенні відносної наближеності до ідеальної точки A^*.

Постановка задачі. Дано

$A = \{A_k \mid k = 1,\ldots, n\}$ – множину альтернатив,

$C = \{C_j \mid j = 1,\ldots, m\}$ – множину критеріїв,

$X = \{x_{kj} \mid k = 1,\ldots, n; j = 1,\ldots, m\}$ – множина альтернатив в просторі оцінок критеріїв, тобто x_{kj} – оцінка альтернативи A_k за критерієм C_j,

$w = \{w_j \mid j = 1,\ldots, m\}$ – множину вагових коефіцієнтів критеріїв.

Необхідно за інформацією про оцінки альтернатив за множиною критеріїв та за інформацією про порівняльну важливість критеріїв (у вигляді вагових коефіцієнтів критеріїв) визначити одну найкращу альтернативу або підмножину найкращих альтернатив з множини A.

Наведемо алгоритм вирішення задачі [2].

Крок 1. Обчислення нормалізованих оцінок альтернатив (варіант 1)

$$r_{ij} = \frac{x_{ij}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_{ij})^2}}, \ i = \overline{1,n}, j = \overline{1,m}. \tag{4.10}$$

Обчислення нормалізованих оцінок альтернатив (варіант 2).

При такому способі враховується, що в множині критеріїв C частина критеріїв підлягає максимізації (критерії прибутку, C^+), а частина критеріїв – мінімізації (критерії витрат, C^-). В результаті процедури нормалізовані оцінки альтернатив за усіма критеріями (незалежно від приналежності множинам C^+ або C^-) будуть лежати в інтервалі [0, 1] і за усіма критеріями найкращою вважатиметься найбільша з можливих оцінок.

1. Для критеріїв прибутку (C^+) оцінка визначається співвідношенням:

$$r_{kj}(x) = (x_{kj} - x^-_j)/(x^*_j - x^-_j), \tag{4.11}$$

де $x^*_j = \max_k x_{kj}$, $x^-_j = \min_k x_{kj}$;

або x^*_j – бажане значення, x^-_j – найгірше значення.

2. Для критеріїв витрат (C^-) оцінка визначається співвідношенням:

$$r_{kj}(x) = (x^-_j - x_{kj})/(x^-_j - x^*_j), \qquad (4.12)$$

де $x^-_j = \max_k x_{kj}$, $x^*_j = \min_k x_{kj}$.

Крок 2. Обчислення зважених нормалізованих оцінок альтернатив:

$$v_{ij} = w_j \cdot r_{ij},\ i = \overline{1,n}, j = \overline{1,m}, \qquad (4.13)$$

де w_j – ваговий коефіцієнт критерія C_j ($\sum_{j=1}^{m} w_j = 1$),

r_{ij} – нормалізовані оцінки, що визначаються співвідношенням (4.10), або співвідношеннями (4.11)–(4.12).

Крок 3. Побудова позитивної ідеальної точки PIS (утопічної точки) і негативної ідеальної точки NIS (антиутопічної точки):

$$\begin{aligned} PIS = \boldsymbol{A}^+ &= \left\{v_1^+(\boldsymbol{x}), v_2^+(\boldsymbol{x}), \ldots, v_j^+(\boldsymbol{x}), \ldots, v_m^+(\boldsymbol{x})\right\} \\ &= \left\{\left(\max_k v_{kj}(\boldsymbol{x}) \mid j \in C^+\right), \left(\min_k v_{kj} \mid j \in C^-\right) \middle| k = 1, \ldots, n\right\}, \end{aligned} \qquad (4.14)$$

$$\begin{aligned} NIS = \boldsymbol{A}^- &= \left\{v_1^-(\boldsymbol{x}), v_2^-(\boldsymbol{x}), \ldots, v_j^-(\boldsymbol{x}), \ldots, v_m^-(\boldsymbol{x})\right\} \\ &= \left\{\left(\min_k v_{kj}(\boldsymbol{x}) \mid j \in C^+\right), \left(\max_k v_{kj}(\boldsymbol{x}) \mid j \in C^-\right) \middle| k = 1, \ldots, n\right\}. \end{aligned} \qquad (4.15)$$

Співвідношення (4.14)–(4.15) справедливі для випадку, коли на кроці 1 алгоритму нормалізація оцінок альтернатив здійснюється за допомогою способа 1. Якщо застосовується спосіб 2, то тоді в співвідношеннях (4.14)–(4.15) слід покласти

$$v_j^+(\boldsymbol{x}) = \max_k v_{kj}(\boldsymbol{x}),\ k = 1, \ldots, n; j = 1, \ldots, m, \qquad (4.16)$$

$$v_j^-(\boldsymbol{x}) = \min_k v_{kj}(\boldsymbol{x}),\ k = 1, \ldots, n; j = 1, \ldots, m. \qquad (4.17)$$

Крок 4. Обчислення відстаней кожної альтернативи до позитивної ідеальної точки PIS (4.18) і негативної ідеальної точки NIS (4.19):

$$D_k^* = \sqrt{\sum_{j=1}^{m} \left[v_{kj}(\boldsymbol{x}) - v_j^+(\boldsymbol{x})\right]^2}, \quad k = 1, \ldots, n, \qquad (4.18)$$

$$D_k^- = \sqrt{\sum_{j=1}^{m}\left[v_{kj}(\boldsymbol{x}) - v_j^-(\boldsymbol{x})\right]^2}, \quad k = 1,\ldots,n. \tag{4.19}$$

Крок 5. Встановлення наближеності кожної альтернативи до позитивної ідеальної точки PIS (подібності до PIS):

$$C_k^* = D_k^- \big/ \left(D_k^* + D_k^-\right), \quad k = 1,\ldots,n, \tag{4.20}$$

де $C_k^* \in [0,1] \quad \forall k = 1,\ldots,n.$

Крок 6. Впорядкувати альтернативи множини $A = \{A_k \mid k = 1,\ldots, n\}$ за спаданням значення C_k^* – схожості із позитивною ідеальною точкою PIS. Найкраща альтернатива визначається наступним чином:

$$A^* = A_p \mid (C_p^* = \max_k C_k^*). \tag{4.21}$$

4.3 Метод VIKOR

Метод VIKOR (The VIseKriterijumska Optimizacija I Kompromisno Resenje, що означає «багатокритеріальна оптимізація та компромісний розв'язок» сербською мовою) був розроблений для багатокритеріальної оптимізації складних систем. Він визначає компромісне ранжування, компромісний розв'язок та інтервали стабільності вагових коефіцієнтів критеріїв для стабільності переваги компромісного розв'язку, визначеного із заданими ваговими коефіцієнтами. Цей метод направлений на ранжування та вибір з множини альтернатив в умовах наявних суперечливих критеріїв. Він використовує показник багатокритеріального ранжування, що базується на визначеній мірі «наближеності» до «ідеального» розвязку [2].

На рис. 4.2 наведено ілюстрацію компромісного розв'язку для випадку двох критеріїв. Компромісний розв'язок F^c – це допустимий розв'язок, що є «найближчим» до «ідеального» розв'язку F^*, а компроміс означає умову, що базується на взаємних поступках $\Delta f_1 = f_1^* - f_1^c$ та $\Delta f_2 = f_2^* - f_2^c$.

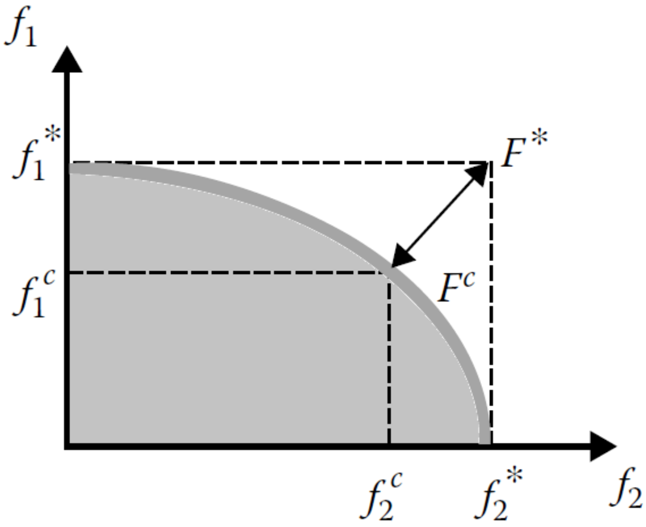


Рис. 4.2 – Компромісний та «ідеальний» розв'язки для випадку двох критеріїв

Постановка задачі. Дано

$A = \{A_k \mid k = 1,\ldots, n\}$ – множину альтернатив,

$C = \{C_j \mid j = 1,\ldots, m\}$ – множину критеріїв, представлених множиною критеріальних функцій, так що для кожної альтернативи A_k:

f_{kj} – це оцінка альтернативи A_k за критерієм C_j,

$w = \{w_j \mid j = 1,\ldots, m\}$ – множину вагових коефіцієнтів критеріїв.

Необхідно за інформацією про оцінки альтернатив за множиною критеріїв та за інформацією про порівняльну важливість критеріїв (у вигляді вагових коефіцієнтів критеріїв) визначити одну найкращу альтернативу або підмножину найкращих альтернатив з множини A, а також ранжування на множині альтернатив.

Наведемо алгоритм вирішення задачі [2], [4].

Крок 1. Обчислення для кожної критеріальної функції значень:

f_j^* – найкраще значення, $\forall j = 1,\ldots, m$,

f_j^- – найгірше значення, $\forall j = 1,\ldots, m$.

Якщо функція відповідає критерію, щоналежить до класу C^+ (напрям оптимізації - максимізація), то

$$f_j^* = \max_k f_{kj}\ ,\ f_j^- = \min_k f_{kj},\ k = 1,\ldots, n. \tag{4.22}$$

Якщо функція відповідає критерію, щоналежить до класу C^- (напрям оптимізації - мінімізація), то

$$f_j^- = \max_k f_{kj}\ ,\ f_j^* = \min_k f_{kj},\ k = 1,\ldots, n. \tag{4.23}$$

Крок 2. Якщо для вагових коефіцієнтів критеріїв не виконується умова

$$\sum_{i=1}^{m} wi = 1,$$

то виконання нормалізації вагових коефіцієнтів за співвідношенням:

$$w_j = w_j/\sum_{i=1}^{m} wi,\ j = 1,\ldots,m. \tag{4.24}$$

Крок 3. Обчислення значень S_k – середньої та R_k – максимальної відстані від «ідеального» розв’язку для кожної альтернативи A_k , $k=1,2\ldots,n$:

$$S_k = \sum_{j=1}^{m} w_j \mid f_j^* - f_{kj} \mid / \mid f_j^* - f_j^- \mid , \tag{4.25}$$

$$R_k = \max_j \left\{ w_j \mid f_j^* - f_{kj} \mid / \mid f_j^* - f_j^- \mid j = 1,2,\ldots,m \right\}. \tag{4.26}$$

Вирази (4.25) та (4.26) є частковими випадками $L_{p,k}$ метрики при p =1 та $p = \infty$ відповідно:

$$L_{p,k} = \left\{ \sum_{j=1}^{n} \left[w_j \left(f_j^* - f_{kj} \right) / \left(f_j^* - f_j^- \right) \right]^p \right\}^{1/p},\quad 1 \le p \le \infty;\ k = 1,2,\ldots,n. \tag{4.27}$$

Крок 4. Обчислення значень Q_k, $k=1,2\ldots,n$ для кожної альтернативи A_k, $k=1,2\ldots,n$ за співвідношенням:

$$Q_k = v(S_k - S^*)/(S^- - S^*) + (1-v)(R_k - R^*)/(R^- - R^*), \tag{4.28}$$

де

$$S^* = \min_k S_k\ ,$$

$S^{-} = \max_{k} S_k$,

$R^{*} = \min R_j$,

$R^{-} = \max R_j$,

ν - вага стратегії «за більшістю критеріїв» (або «максимальної групової корисності»), $\nu \in [0, 1]$. Звичайно переважнішим є значення $\nu = 0,5$.

Компромісний розв’язок може бути обраний за різними стратегіями:

- з «перевагою за більшістю»: $\nu > 0,5$;
- з «консенсусом»: $\nu = 0,5$;
- з «вето»: $\nu < 0,5$.

Крайні випадки відповідають:

$\nu = 1$ – процесу ПР, що використовує стратегію максимізації групової корисності;

$\nu = 0$ – процесу ПР, що використовує стратегію мінімуму індивідуальних втрат, що визначається серед максимальних індивідуальних втрат.

Значення параметра ν впливає на ранжування альтернатив і визначається ОПР або експертом з ПР.

Крок 5. Виконання ранжування альтернатив A_k , $k=1,2...,n$ за спаданням значень Q_k, S_k та R_k. Результатом є три ранжування.

Крок 6. Вибір компромісного розв’язку.

Пропонується вважати компромісним розв’язком альтернативу a', яка в ранжуванні за Q є найкращою (тобто має мінімальне значення Q_k), якщо виконуються дві наступні умови:

С1. «Прийнятна перевага»:

$$Q(a'') - Q(a') \geq DQ, \tag{4.29}$$

де a''– наступна найкраща альтернатива в ранжуванні за *Q* після альтернативи a',

DQ = 1/(n–1), n – кількість альтернатив.

C2. «Прийнятна стабільність»:

альтернатива a' повинна також мати і найкращі значення (мінімальні) в ранжуваннях за *S* та/або *R.*

Якщо одна з умов C1 або C2 не виконується, тоді множина компромісних розв’язків буде містити:

– альтернативи a' та a'', якщо не виконується тільки умова C2;

– альтернативи a', a'',..., $a^{(k)}$, якщо умова C1 не виконується. Тут $a^{(k)}$ – найвіддаленіша від a' альтернатива в ранжуванні за *Q*, для якої виконується співвідношення:

$$Q\left(a^{(k)}\right) - Q(a') < DQ, \tag{4.30}$$

де *DQ = 1/(n–1), n* – кількість альтернатив.

Основний результат роботи алгоритму – це список компромісного ранжування альтернатив множини *A* та **компромісний розв’язок** (одна альтернатива або підмножина альтернатив) з прийнятним рейтингом.

Отриманий компромісний розв’язок може бути прийнятим ОПР, оскільки він забезпечує максимальну групову корисність (представлену мінімальним значенням S) за «більшістю» і мінімум індивідуальних втрат (представлений мінімальним значенням R).

Питання

1. Поясніть принципи пошуку розв’язку задачі БВ за допомогою метода ELECTRE I.
2. Поясніть, які параметри і яким чином впливають на якість розв’язку в методі ELECTRE I.
3. Поясніть принципи пошуку розв’язку задачі БВ за допомогою метода TOPSIS.
4. Поясніть, які параметри і яким чином впливають на якість розв’язку в методі TOPSIS.
5. Поясніть принципи пошуку розв’язку задачі БВ за допомогою метода VIKOR.
6. Поясніть, які параметри і яким чином впливають на якість розв’язку в методі VIKOR.

Перелік посилань

1. Rogers, M. Electre and decision support: methods and applications in engineering and infrastructure investment. – Springer Science+Business Media. New York, 2000. ISBN 978-1-4419-5108-3

2. Tzeng, G.H., Huang, J.J. Multiple attribute decision making. Methods and applications. – Chapman and Hall/CRC, 2011. – 352p.

3. Ching-Lai Hwang, Kwangsun Yoon. Multiple Attribute Decision Making: Methods and Applications. – Springer-Verlag. Berlin Heidelberg New York, 1981.

4. Chatterjee, P., Chakraborty, S. «A comparative analysis of VIKOR method and its variants,» in *Decision Science Letters,* 5, 2016, p.469–486.
DOI: 10.5267/j.dsl.2016.5.004

Розділ 5. Підтримка прийняття колективних рішень

5.1 Представлення відношень між об'єктами матрицями парних порівнянь

На практиці часто при вирішенні задачі вибору найкращих альтернатив інформація про властивості альтернатив представлена не значеннями деякої множини параметрів, а відношеннями на множині альтернатив за певними властивостями. Відношення на множині альтернатив можуть бути представлені різними способами, один з основних способів – представлення відношень матрицями парних порівнянь (МПП) [1], [2].

При порівнянні множини *n* об'єктів (альтернатив)

$$a_i \in A, \quad i \in \{1, \ldots, n\}$$

k експертами результат порівняння для кожного експерта представляється матрицею парних порівнянь виду

$$B^l = (b_{ij}^l),\ l \epsilon \{1, \ldots, k\}, \tag{5.1}$$

де b_{ij}^l - дійсні числа, що відображають у деякій шкалі результат порівняння l-м експертом альтернатив з індексами *i*, *j*.

Структура МПП виду (5.1) визначається умовами:

$b_{ij} = b_{ji}$, якщо альтернативи a_i та a_j рівноцінні з точки зору експерта;

$b_{ij} > b_{ji}$, якщо альтернатива a_i на думку експерта «краща» за альтернативу a_j (переважає альтернативу a_j : $a_i \succ a_j$).

У випадку, якщо альтернативи порівнюють за якісними критеріями, результати порівнянь виражають у порядковій шкалі, яка називається фундаментальною та має наступні значення ступенів переваги однієї альтернативи над іншою [3]:

Таблиця 5.1 – Порівняння альтернатив в фундаментальній шкалі

Числові значення ступенів переваги	Ступені переваги однієї альтернативи над іншою
1	еквівалентність
2	слабка перевага
3	помірна перевага
4	помірна+ перевага
5	сильна перевага
6	сильна+ перевага
7	дуже сильна перевага
8	дуже сильна+ перевага
9	надзвичайна перевага

Існують різні способи представлення результатів парних порівнянь (відношень на множині альтернатив) в МПП [1]:

П1 (Проста структура) – відображає факт переваги однієї альтернативи над іншою або рівноцінність альтернатив. Елементи МПП приймають значення із множини {0;1/2;1} (або {-1;0;1}, або {0;1;2});

П2 – відображає частку сумарної інтенсивності переваги для пари альтернатив, яка відповідає кожній альтернативі з пари:

$$b_{ij} + b_{ji} = T,$$

де $T \geq 0$ – дійсне число, однакове для $\forall b_{ij} \in B$;

П3 – бальна оцінка відношення $b_{ij} \in R$, $b_{ji} \in R$, де R - множина дійсних чисел;

П4 – степеневе калібрування (оцінка, у скільки разів одна альтернатива переважає іншу) $b_{ij} = 1/b_{ji}$.

Відношенням, що задаються у формах П1, П2, відповідає МПП *B*, що є *кососиметричною* (антисиметричною), тобто $b_{ij} = -b_{ji}$.

Відношенням, що задаються у формах П3, П4, відповідає МПП *B*, що є *оберненою симетричною* (антисиметричною), тобто $b_{ij} = 1/b_{ji}$.

Відношення, що задаються у формі П1, задаються у якісній (ордінальній) шкалі, а в формах П2 – П4 – є метризованими (визначення наведено в розділі 3.5), МПП виражають інтенсивність відношень. Форма П2 – адитивне відношення, а П4 – мультиплікативне відношення.

5.2 Узгодженість результатів парних порівнянь

Для метризованих відношень вводиться поняття кардинальної узгодженості, або надтранзитивності.

Означення. Відношення, задане МПП виду (5.1), є *надтранзитивним* (або має місце *кардинальна узгодженість* в силі переваги) якщо у ньому, крім вимоги транзитивності виконуються ще й умови для інтенсивності адитивних (або мультиплікативних) відношень між об'єктами:

$$\mu_{il} + \mu_{lj} = \mu_{ij} \ , \quad 1 \le i < l < j \le n, \tag{5.2}$$

$$\mu_{il} / \mu_{lj} = \mu_{ij} \ , \quad 1 \le i < l < j \le n, \tag{5.3}$$

де $\mu_{ij} \in B$.

Якщо умови (5.2) або (5.3) порушуються, то виникає задача пошуку надтранзитивного відношення для заданого неузгодженого відношення.

Розглянемо надтранзитивну матрицю B, тобто матрицю мультиплікативного метризованого відношення, елементи якої визначаються:

$$\begin{cases} b_{ij}, \text{ якщо } (a_i, a_j) \in P, \ (a_j, a_i) \notin P \\ 1, \text{ якщо } (a_i, a_j) \in P, \ (a_j, a_i) \in P \\ 1/b_{ij}, \text{ якщо } (a_i, a_j) \notin P, \ (a_j, a_i) \in P \end{cases} \tag{5.4}$$

Елемент b_{ij} відповідає твердженню «альтернатива a_i переважає альтернативу a_j в b_{ij} раз. Змістовно елемент b_{ij} визначає відношення вагових коефіцієнтів w_i, w_j альтернатив a_i та a_j :

$$\forall i,j,h: b_{ij} = w_i/w_j = (w_i/w_h)(w_h/w_j) \text{ або}$$

$$\forall i,j,h: b_{ij} = b_{ih} b_{hj} = b_{hj}/b_{hi}. \qquad (5.5)$$

Отже, повністю узгоджена матриця відповідає умові (5.5).

Визначення вагових коефіцієнтів альтернатив методом власного вектора Сааті

Розглянемо надтранзитивну квадратну матрицю D (розмірності $k \times k$), елементи якої визначаються співвідношенням (5.4). Тоді її можна подати у вигляді

$$D = \begin{vmatrix} \omega_1/\omega_1 & \omega_1/\omega_2 & \cdots & \omega_1/\omega_k \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \omega_k/\omega_1 & \omega_k/\omega_2 & \cdots & \omega_k/\omega_k \end{vmatrix},$$

де ω_i – ваговий коефіцієнт альтернативи a_i .

Позначимо вектор-стовпець відносних ваг альтернатив

$$W = [\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k]^T$$

Характеристичному рівнянню матриці D:

$$|DW - \lambda W| = 0$$

відповідає система лінійних однорідних рівнянь:

$$\begin{aligned} &(d_{11} - \lambda)\omega_1 + d_{12}\,\omega_2 + \ldots + d_{1k}\,\omega_k = 0, \\ &d_{21}\,\omega_1 + (d_{22} - \lambda)\,\omega_2 + \ldots + d_{2k}\,\omega_k = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &d_{k1}\omega_1 + d_{k2}\,\omega_2 + \ldots + (d_{kk} - \lambda)\,\omega_k = 0 \end{aligned} \qquad (5.6)$$

де λ – власні значення матриці D.

Необхідною та достатньою умовою існування нетривіального розв'язку системи рівнянь (5.6), тобто розв'язку, для якого $\exists i \mid \omega_i \neq 0$, є рівність нулю визначника цієї системи. Розв'язання отриманої рівності відносно λ дає k коренів (власних значень матриці D).

Кожному власному значенню відповідає своя система лінійних рівнянь, яка отримується після підстановки цього значення в (5.6). Розв'язок отриманої системи відносно ω_i визначається з точністю до скалярного множника і називається *власним вектором* МПП.

Сааті пропонує [3] в якості вагових коефіцієнтів альтернатив використовувати компоненти власного вектора, що відповідає максимальному характеристичному числу λ_{max}.

Перевірка ступеня узгодженості МПП

Для повністю узгодженої матриці (що задовольняє умову (5.5)) $\lambda_{max} = k$, а для неузгодженої завжди $\lambda_{max} \geq k$. Тому в якості показника ступеня узгодженості елементів матриці D використовується величина *індекса узгодженості* (consistency index):

$$CI = (\lambda_{max} - k)/(k - 1). \tag{5.7}$$

Індекс узгодженості оцінює ступінь «невиконання» властивості узгодженості.

Вважається, що при CI≤0,1 ступінь «неузгодженості» прийнятна і побудована МПП може бути використана для визначення вектора ваг альтернатив. Інакше рекомендується запропонувати експерту уточнити елементи матриці D.

Для оцінки достатності ступеня узгодженості використовується *відношення узгодженості* (consistency ratio):

$$CR = CI/CIS, \tag{5.8}$$

де CIS – середнє значення CR, обчислених для великої кількості випадковим чином згенерованих матриць парних порівнянь в фундаментальній шкалі, які задовольняють умові (5.4).

Значення CIS наведено в таблиці:

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
CIS	0	0	0,52	0,89	1,11	1,25	1,35	1,4	1,45	1,49

Результуючий вектор відносних ваг альтернатив вважається прийнятним, якщо CR ≈ 0,1 (але не перевищує 0,2).

Для k=3 CR не повинен перевищувати 0,05.

Для k=4 CR не повинен перевищувати 0,08.

Інші методи визначення вагових коефіцієнтів альтернатив

Метод степеня

r =2

1. Обчислити D^r, де D – МПП альтернатив.

2. Обчислити за матрицею D^r компоненти вектора ваг альтернатив:

$$\omega_i^{(r)}=\sum_{j=1}^{k} d_{ij} \, / \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} d_{ij} \ . \qquad (5.9)$$

Якщо r =1, то компоненти вектора ваг альтернатив визначаються співвідношенням (5.8) за МПП D.

3. Якщо

$$|\omega_i^{(r)}-\omega_i^{(r-1)}|<\varepsilon \quad \forall i=(1,.., k),$$

де ε - заздалегідь задана величина похибки, то кінець. Одержано вектор відносних ваг $W=[\omega_1, \omega_2,\ldots, \omega_k]^T$.

Інакше збільшити r на 1 та перейти на крок 2.

Метод середнього геометричного

1. Обчислити $\forall i=(1,.., k)$

$$v_i = \sqrt[k]{\prod_{j=1}^{k} d_{ij}}.$$

2. Здійснити нормування: $\forall\ i =(1,.., k)$

$$\omega_i = v_i \, / \sum_{j=1}^{k} vj$$

Одержано вектор відносних ваг

$$W=[\omega_1, \omega_2,\ldots, \omega_k]^T$$

Приклади визначення вагових коефіцієнтів альтернатив та перевірки узгодженості МПП

Задано матрицю А парних порівнянь альтернатив а1, а2, а3:

	a1	a2	a3
a1	1	3	1/2
a2	1/3	1	1/3
a3	2	3	1

Необхідно визначити пріоритети альтернатив.

1. Встановлення ступеня узгодженості МПП А

Для обчислення пріоритетів альтернатив за матрицею парних порівнянь А необхідно встановити ступінь узгодженості матриці. Для цього обчислимо індекс узгодженості (5.7).

Обчислити максимальне характеристичне число матриці А можна, наприклад, за допомогою **метода простої векторної ітерації**.

Для цього необхідно побудувати векторну послідовність:

$$x^{(m+1)} = A\, x^{(m)} = A^{m+1}\, x^{(0)}, \tag{5.10}$$

де вектор $x^{(0)}$ — заданий. Тоді максимальне характеристичне число λ_{max} визначається так:

$$\lambda_{max} = \lim_{m\to\infty} \frac{x_i^{(m+1)}}{x_i^{(m)}}\,. \tag{5.11}$$

Отже, задамо $x^{(0)}=(1, 1, 1)^T$ і побудуємо векторну послідовність (5.10):

$x^{(0)}$	$x^{(1)}=Ax^{(0)}$	$x^{(2)}=Ax^{(1)}$	$x^{(3)}=Ax^{(2)}$	$x^{(4)}=Ax^{(3)}$	$x^{(5)}=Ax^{(4)}$	$x^{(6)}=Ax^{(5)}$	$x^{(7)}=Ax^{(6)}$	$x^{(8)}=Ax^{(7)}$	$x^{(9)}=Ax^{(8)}$
1	4,5	12,5	38	116,25	355	1084	3310,125	10107,88	30865,63
1	1,666667	5,166667	16	48,83333	149,0833	455,25	1390,167	4245,042	12962,75
1	6	20	60,5	184,5	563,5	1720,75	5254,5	16045,25	48996,13

Побудуємо послідовність $\frac{x_i^{(m+1)}}{x_i^{(m)}}$ наприклад, для *i*=1:

m	0	1	2	3	4
$\frac{x_1^{(m+1)}}{x_1^{(m)}}$	4,5/1=4,5	12,5/4,5= 2,777778	38/12,5=3,04	3,059211	3,053763

m	5	6	7	8
$\frac{x_1^{(m+1)}}{x_1^{(m)}}$	3,053521	3,053621	3,053623	3,053622

Отже, λ_{max} = 3,0536. Тоді індекс узгодженості МПП (5.7) дорівнює:

$$CI = (3,0536-3)/(3-1)= 0,0268.$$

Оскільки CI<0,1, можна зробити висновок, що ступінь неузгодженості матриці А є прийнятною і її можна використовувати для визначення вектора ваг альтернатив.

2. Обчислення пріоритетів альтернатив як середніх геометричних рядків МПП

	$v_i = \sqrt[k]{\prod_{j=1}^{k} a_{ij}}$	$\omega_i = v_i / \sum_{j=1}^{k} v_j$
i=1	1,144714	0,332516
i=2	0,48075	0,139648
i=3	1,817121	0,527836

Отже, $W=[\omega_1, \omega_2, \omega_3]^T = [0,33; 0,14; 0,53]^T$

3. Обчислення пріоритетів альтернатив методом степеня

Побудуємо послідовність матриць A, A^2, A^3, …, A^r, ….

Для кожної матриці послідовності обчислимо

$$\omega_i^{(r)} = \sum_{j=1}^{k} a_{ij} / \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} a_{ij},$$

для $\forall i=(1,..,3)$.

Тоді $\omega_i = \omega_i^{(r^*)}$ $\forall i=(1,..,3)$,

де $|\omega_i^{(r^*)} - \omega_i^{(r^*-1)}| < \varepsilon$ $\forall i=(1,.., k)$

$$r^* = \arg\min_r \{\varepsilon - |\omega_i^{(r)} - \omega_i^{(r-1)}|\}.$$

Отже, послідовність матриць A, A^2, A^3:

	a1	a2	a3
a1	1	3	1/2
a2	1/3	1	1/3
a3	2	3	1

	a1	a2	a3
a1	3,000	7,500	2,000
a2	1,333	3,000	0,833
a3	5,000	12,000	3,000

	a1	a2	a3
a1	9,5	22,5	6
a2	4	9,5	2,5
a3	15	36	9,5

	r=1		r=2		r=3	
	сума і-го рядка матр. A^r	$\omega_i^{(r)}$	сума і-го рядка матр. A^r	$\omega_i^{(r)}$	сума і-го рядка матр. A^r	$\omega_i^{(r)}$
i=1	4,5000	0,3699	12,5000	0,3319	38,0000	0,3319
i=2	1,6667	0,1370	5,1667	0,1372	16,0000	0,1397
i=3	6,0000	0,4932	20,0000	0,5310	60,5000	0,5284

Оберемо задану точність ε=0,01

При r=2:

$|w_1^{(2)} - w_1^{(1)}| = |0,3319-0,3699| = 0,038 > \varepsilon$,

отже збільшуємо r , r=3:

$|w_1^{(3)} - w_1^{(2)}| = 0,0000 < \varepsilon$

$|w_2^{(3)} - w_2^{(2)}| = 0,0026 < \varepsilon$

$|w_3^{(3)} - w_3^{(2)}| = 0,0026 < \varepsilon$

Отже, пріоритети визначаються так: $w_i = w_i^{(3)}$

Тобто

	wi
i=1	0,3319
i=2	0,1397
i=3	0,5284

Коригування МПП при її неузгодженості

Процедура коригування МПП A=(a_{ij}), якщо встановлено її неузгодженість, полягає у виконанні кроків:

1. Формування матриці відношень пріоритетів w_i/w_j.
2. Аналіз матриці абсолютних різниць

$$(|a_{ij} - w_i/w_j|)$$

3. Для елемента з найбільшою різницею замінити в матриці A елемент a_{ij} на w_i/w_j. Отримано МПП A'.

4. Перерахунок пріоритетів альтернатив за матрицею A' та перевірка її узгодженості.

5.3 Принципи узгодженого колективного вибору Ерроу

На основі аналізу ситуацій, виникаючих при узгодженому виборі, Ерроу сформулював п'ять умов, яким повинно задовольняти результуюче відношення (ранжування) на множині альтернатив. Кожна з цих умов – це природна вимога, що висувається до колективного вибору.

Однак було встановлено, що одночасне виконання всіх умов неможливе. Наведемо принципи Ерроу [4].

1. Умова незалежності. Якщо із множини альтернатив виключити деяку підмножину та знайти результуюче відношення для «усічених» відношень (ранжувань), то воно співпаде із відношенням, отриманим із результуючого відношення для повної множини альтернатив після видалення вказаної підмножини альтернатив.

Наслідок. Розширення (звуження) множини альтернатив при збереженні відношень на спільній підмножині альтернатив не змінює на ній результуючого відношення.

2. Умова універсальності. Для будь-якої трійки альтернатив a_1, a_2, a_3 повинні знайтись відношення (ранжування) P1, P2, P3, для яких

1) $(a_1, a_2) \in P_1$, $(a_2, a_3) \in P_1$ и $(a_1, a_3) \in P_1$

2) $(a_1, a_2) \in P_2$, $(a_2, a_3) \notin P_2$ и $(a_1, a_3) \notin P_2$

3) $(a_1, a_2) \in P_3$, $(a_3, a_2) \notin P_3$ и $(a_3, a_1) \notin P_3$

Крім цього, результуюче відношення (ранжування) повинно мати властивість транзитивності.

3. Умова монотонності. Якщо деякий експерт змінив думку на користь результуючого відношення (ранжування), то результуюче відношення не зміниться.

4. Умова ненав'язуваності. Для будь-якої пари альтернатив a_1, a_2 існують множини відношень (ранжувань) M_1 і M_2, такі що пара альтернатив (a_1, a_2) належить результуючому відношенню для відношень множини M_1 і не належить результуючому відношенню для відношень множини M_2.

5. Умова відсутності диктатора. Не повинно існувати відношення (ранжування) Ps такого, що результуюче відношення співпадає з Ps незалежно від решти відношень (ранжувань).

При виконанні умови передбачається відсутність експерта, чия думка є визначальною незалежно від думок решти експертів.

Невиконання умов 2-5 Ерроу робить вибір некоректним. Частина дослідників вважає виконання умови 1 необов'язковою. Для коректності результуючого відношення необхідно враховувати порівняльні переваги експертів на усій множині альтернатив, а не обмежуватись розглядом вказаних експертами найкращих альтернатив.

5.4 Методи визначення ординальних групових рішень

Постановка задачі. Дано:

m експертів;

$A=\{A_h\}$, $h\in\{1,..,k\}$, – Множина альтернатив, для якої кожен експерт формує індивідуальне ранжування r_i ,$i\in\{1,..,m\}$,

$$r_i = (A_{[1]}, A_{[2]}, \ldots, A_{[j]}, \ldots, A_{[k]}\},$$

де виконується:

якщо $A_{[i]} \succ A_{[j]}$, то $i < j$, або $(A_{[i]}, A_{[j]}) \in r_i$,

де [*j*] - позиція альтернативи в ранжуванні.

Необхідно на множині альтернатив *A* визначити результуюче ранжування *R*, яке є узгодженим ранжуванням множини експертів.

Мажоритарне голосування (правило більшості)

1. Обчислити M(A,B) – кількість індивідуальних ранжувань r_i, в яких $(A,B)\in r_i$, тобто $A\succ B$.

2. Визначити в результуючому ранжуванні за одним із співвідношень:

$$(A,B)\in R \Leftrightarrow M(A,B) \geq m/2, \tag{5.12}$$

$$(A,B)\in R^+ \Leftrightarrow M(A,B) \geq M(B,A). \tag{5.13}$$

Недоліки мажоритарного голосування – залежність результатів голосування від порядку постановки варіантів на голосування. Загальноприйнята процедура прийняття варіанта рішення шляхом мажоритарного голосування – послідовне голосування за прийняття варіантів із відхиленням тих, що отримали меншу кількість голосів.

Принцип Кондорсе визначення результуючого ранжування

На основі індивідуальних ранжувань експертів r_i для кожної пари альтернатив (A_i ,A_j) обчислюється m_{ij} - кількість експертів, що визнали альтернативу A_i кращою за A_j.

Альтернатива A_i вважається кращою за A_j, якщо $m_{ij} > m_{ji}$.

Альтернатива A_i вважається найкращою на всій множині альтернатив (*альтернативою Кондорсе*), якщо $m_{ij} > m_{ji}$ $\forall j \neq i$.

Недоліком принципа Кондорсе є те, що при застосуванні цього принципа можливе виникнення так званого парадокса Кондорсе, що є наслідком нетранзитивності колективних переваг. Це можна продемонструвати на прикладі. Індивідуальні ранжування експертів: r_1=(A,B,C), r_2=(B,C,A), r_3=(C,A,B). Тоді $A \succ B$, $B \succ C$, але $C \succ A$, отже вибрати найкращу альтернативу за принципом Кондорсе неможливо.

Метод Борда визначення результуючого ранжування

1. В індивідуальних ранжуваннях експертів

$$r_i = (A_{[1]}, A_{[2]}, \ldots, A_{[j]}, \ldots, A_{[k]}\},$$

кожній альтернативі приписують число:

$A_{[1]}$ – (k-1);

$A_{[2]}$ – (k-2);

…

$A_{[k]}$ – 0.

2. Для кожної альтернативи A_i обчислюють s_i – суму чисел, приписаних альтернативі A_i в усіх індивідуальних ранжуваннях.

3. Визначають результуюче ранжування

$$R = (A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_k}),$$

для якого $s_{i_1} \geq s_{i_2} \geq \ldots \geq s_{i_k}$.

Альтернативу A_{i_1} вважають найкращою.

Недоліком правила Борда є те, що альтернатива Кондорсе (що є кращою в усіх парних порівняннях) може бути не вибраною за цим правилом в якості найкращої.

Наведемо приклад. Індивідуальні ранжування:

$$P_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_3 \\ a_2 \\ a_5 \\ a_4 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_4 \\ a_3 \\ a_5 \end{pmatrix}, P_3 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_5 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix}, P_4 = \begin{pmatrix} a_2 \\ a_3 \\ a_1 \\ a_5 \\ a_4 \end{pmatrix}, P_5 = \begin{pmatrix} a_2 \\ a_4 \\ a_3 \\ a_1 \\ a_5 \end{pmatrix}$$

Обчислення для кожної альтернативи s_i:

	P1	P2	P3	P4	P5	s_i
a_1	4	4	4	2	1	15
a_2	2	3	3	4	4	16
a_3	3	1	1	3	2	10
a_4	0	2	0	0	3	5
a_5	1	0	2	1	0	4

Результуюче ранжування:

$$R = (a_2, a_1, a_3, a_4, a_5),$$

найкраща альтернатива – a_2 (альтернатива Кондорсе a_1).

Вказаних недоліків (крім врахування компетентності експертів) позбавлений принцип вибору результуючого ранжування, запропонований Кемені.

Метод Кемені визначення результуючого ранжування

Базується на використанні поняття міри відстані між парою ранжувань.

Відстань між ранжуваннями r_1 і r_2 визначається формулою:

$$d(r_1, r_2) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\left|p_{ij}^1 - p_{ij}^2\right| = \sum_{i<j}\left|p_{ij}^1 - p_{ij}^2\right|,$$

де для ранжування r_i $p_{jk}^i = \begin{cases} 1, \text{якщо } A_j \succ A_k, \\ 0, \text{якщо } A_j \approx A_k, \\ -1, \text{якщо } A_j \prec A_k; \end{cases}$

тоді узгоджене колективне ранжування r визначається наступним чином:

$$r^* = \arg\min_{r\in\Omega}\sum_{i=1}^{m} d(r, r_i),$$

де Ω – всі можливі ранжування на множині альтернатив і називається *медіаною Кемені*.

Пошук медіани Кемені належить до NP-повних задач, для її вирішення застосовують метод гілок та меж, евристичні алгоритми [4].

Для медіани Кемені виконуються чотири умови коректності вибору Ерроу і не виконується тільки умова 1, відносно якої у дослідників немає одностайної думки. Крім того, медіана Кемені задовольняє принципу Кондорсе (і не призводить до парадоксу Кондорсе).

Отже, її можна вважати одним із найбільш коректних результуючих відношень.

Питання

1. Поясніть, в якому вигляді інформація про переваги ОПР представлена в МПП.

2. Поясніть, як можна встановити узгодженість МПП.

3. Що можна зробити, якщо МПП неузгоджена?

4. Як за МПП визначити вагові коефіцієнти альтернатив?

5. Вкажіть процедури побудови узгодженого колективного ранжування, дайте характеристику.

6. Сформулюйте принципи узгодженого колективного вибору.

Перелік посилань

1. Гнатієнко Г.М., Снитюк В.Є. Експертні технології прийняття рішень: Монографія.– К.: ТОВ «Маклаут»,– 2008.– 444с.

2. Тоценко В.Г. Методи та системи підтримки прийняття рішень. Алгоритмічний аспект.– К.:Наукова думка, 2002.–381с.

3. T. L. Saaty, "Multicriteria Decision Making: The Analytic Hierarchy Process," RWS Publications, Pittsburgh, 1988.

4. Литвак Б. Г., Экспертная информация: методы получения и анализа: монография. Москва, Россия: ИЦПКПС, 2009.

Розділ 6. Прийняття рішень в умовах нечіткої інформації

В реальних ситуаціях прийняття рішень цілі, оббмеження та критерії вибору зазвичай є суб'єктивними та такими, що не можуть бути визначеними чітко та однозначно. Тому при побудові моделей прийняття рішень виникає необхідність використання нечіткої логіки, нечітких множин та нечітких відношень.

Нечіткі відношення дозволяють моделювати плавну, поступову зміну властивостей, а також невідомі функціональні залежності, виражені у вигляді якісних зв'язків. Нечітке відношення може бути більш зручною та більш адекватною реальності формою представлення вхідної інформації, ніж звичайне «чітке» відношення.

Нечіткі алгоритми, які допускають використання нечітких інструкцій, що широко розповсюджені в багатьох сферах людської діяльності, дозволяють описувати наближені міркування, що робить їх корисним інструментом для наближеного аналіза таких систем і процесів прийняття рішень, які є достатньо складними для застосування загальноприйнятних кількісних методів.

6.1 Нечіткі множини

Означення. *Нечітка множина C* на деякій множині X – це сукупність пар виду

$$C = \{(x, \mu_c(x))\},$$

де $x \in X$,

$\mu_c(x)$ – функція належності елемента x нечіткій множині C.

Функція належності $\mu_c(x)$ визначає ступінь належності елемента x множині C і приймає значення із інтервалу $\mu_c(x) \in [0,1]$.

Приклад 1. Функція належності годин доби нечіткій множині «день» наведена на графіку:

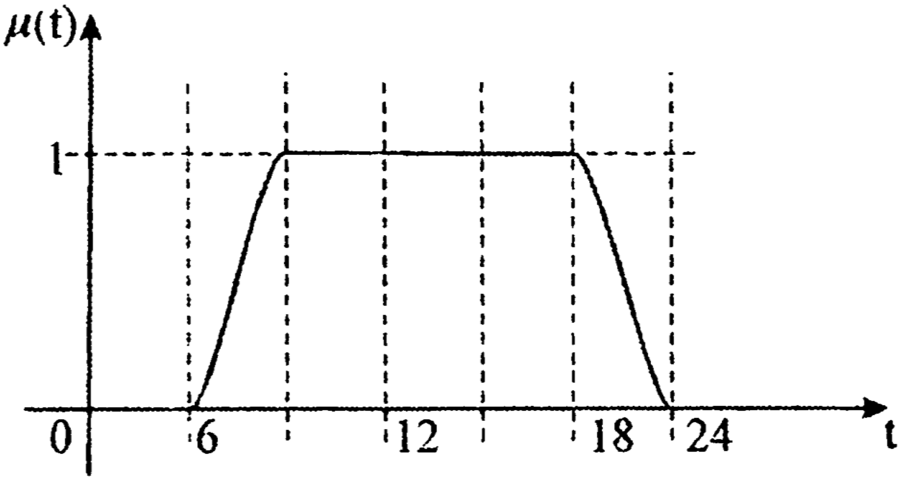


Рисунок 6.1 – Функція належності $\mu(t)$ нечіткої множини «день», де *t* - години доби

Приклад 2. На множині натуральних чисел *X* визначимо нечітку множину $\tilde{M}$ дуже малих чисел наступним чином:

$$\tilde{M} = \{(1;1),(2;0.8),(3;0.7),(4;0.6),(5;0.5),(6;0.3)\}$$

Означення. Нечітка множина ∅ називається *порожньою множиною*, якщо її функція належності

$$\mu_{\varnothing}(x) = 0 \quad \forall\, x \in X.$$

Означення. Нечітка множина *U* називається *універсальною множиною*, якщо її функція належності

$$\mu_U(x) = 1 \quad \forall\, x \in X.$$

Означення. *Носій нечіткої множини* – це підмножина множини *X*, що містить тільки елементи із значенням функції належності $\mu_A(x) > 0$:

$$supp(\tilde{A}) = \{x \in X | \mu_A(x) > 0\}.$$

Означення. Нечітка множина *A* називається *нормальною*, якщо

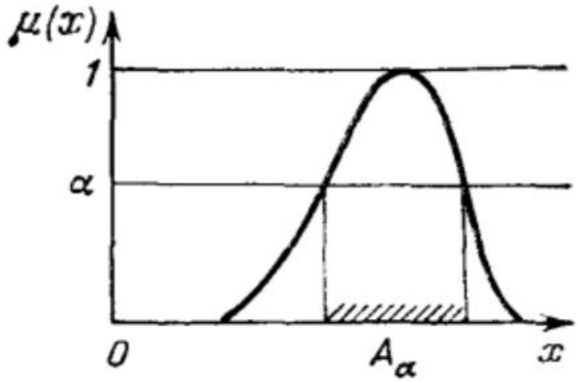
$$\sup_{x \in X} \mu_A(x) = 1$$

Інакше нечітка множина *A* називається *субнормальною*. Нормалізацію непорожньої субнормальної множини можна виконати за формулою:

$$\mu_A(x) = \frac{\mu_A(x)}{\sup\limits_{x \in X} \mu_A(x)}.$$

Означення. *α-рівень* нечіткої множини *A* (α-cat, позначається $A(\alpha)$ або A_α) – це множина, що визначається співвідношенням:

$$A(\alpha) = \{x \in X \mid \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\}, \quad \forall \alpha \in [0,1]$$



Теоретико-множинні операції над нечіткими множинами

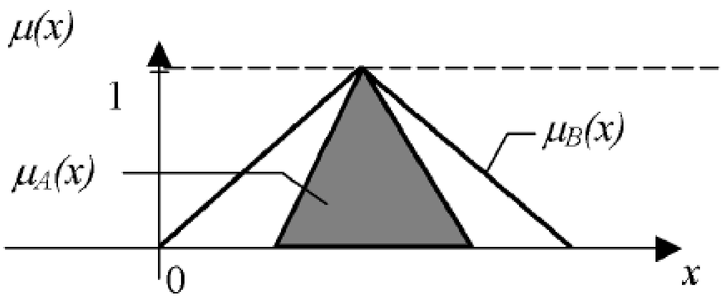
Визначимо основні операції для заданих нечітких множин (НМ)

$$A = \{(x, \mu_A(x))\},\ B = \{(x, \mu_B(x))\},\ \text{де } x \in X.$$

1. Включення НМ

Означення. НМ *A* є *підмножиною* НМ *B* ($A \subseteq B$), якщо

$$\mu_A(x) \subseteq \mu_B(x), \forall x \in X.$$



Означення. НМ *A* та *B* *рівні* ($A=B$), якщо

$$\mu_A(x) = \mu_B(x), \forall x \in X.$$

2. Різниця НМ

Означення. *Різницею* НМ *A* та *B* є НМ:

$$A\backslash B = \{(x, \mu_{A\backslash B}(x))\},\ x{\in}X,$$

функція належності якої визначається співвідношенням:

$$\mu_{A\backslash B}(x) = \begin{cases} \mu_A(x) - \mu_B(x), \text{якщо } \mu_A(x) \geq \mu_B(x) \\ 0, \qquad\qquad \text{якщо } \mu_A(x) < \mu_B(x) \end{cases}.$$

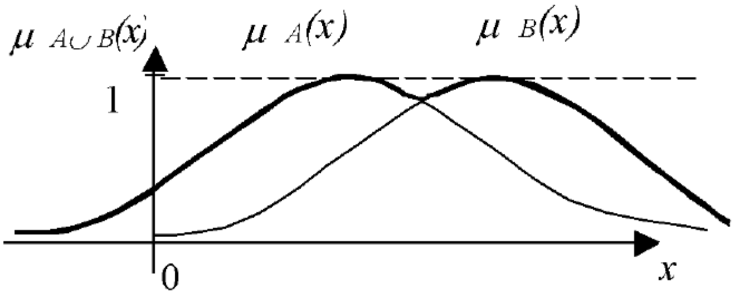
3. Об’єднання НМ

Означення. *Об’єднанням* НМ *A* та *B* є НМ:

$$A \cup B = \{(x, \mu_{A\cup B}(x))\},\ x{\in}X,$$

функція належності якої визначається співвідношенням:

$$\mu_{A\cup B}(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}.$$



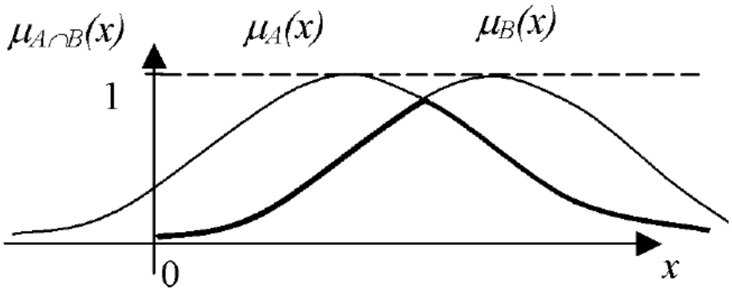
4. Перетин НМ

Означення. *Перетином* НМ *A* та *B* є НМ:

$$A \cap B = \{(x, \mu_{A\cap B}(x))\},\ x{\in}X,$$

функція належності якої визначається співвідношенням:

$$\mu_{A\cap B}(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}.$$



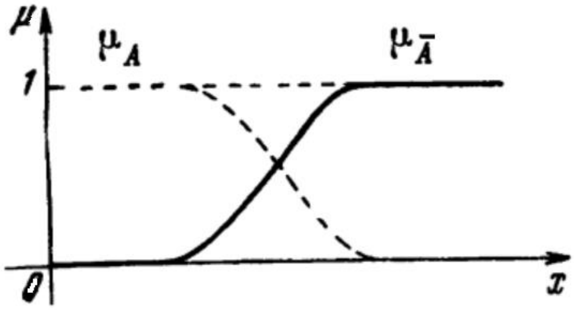
5. Доповнення НМ

Означення. *Доповненням* НМ *A* є НМ (позначається $\overline{A}$ або $\neg A$):

$$\overline{A} = \{(x, \mu_{\overline{A}}(x))\},\ x{\in}X,$$

функція належності якої визначається співвідношенням:

$$\mu_{\overline{A}}(x) = 1 - \mu_A(x).$$



Приклад 3. $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7,\}$

$$A = \{(x_1; 0.3), (x_3; 0.8), (x_6; 0.4)\}$$

$$B = \{(x_1; 0.9), (x_2; 0.2), (x_3; 0.4), (x_4; 0.5)\}$$

$$A \cup B = \{(x_1; 0.9), (x_2; 0.2), (x_3; 0.8), (x_4; 0.5), (x_6; 0.4)\}$$

$$A \cap B = \{(x_1; 0.3), (x_3; 0.4)\}$$

$$\bar{A} = \{(x_1; 0.7), (x_2; 1), (x_3; 0.2), (x_4; 1), (x_5; 1), (x_6; 0.6), (x_7; 1)\}$$

Основні властивості операцій для НМ:

1. Закон подвійного заперечення

$$\neg(\neg\tilde{A}) = \tilde{A}$$

2. Комутативність

$$\tilde{A} \cup \tilde{B} = \tilde{B} \cup \tilde{A},$$
$$\tilde{A} \cap \tilde{B} = \tilde{B} \cap \tilde{A}$$

3. Асоціативність

$$\tilde{A} \cup (\tilde{B} \cup \tilde{C}) = (\tilde{A} \cup \tilde{B}) \cup \tilde{C} = \tilde{A} \cup \tilde{B} \cup \tilde{C},$$
$$\tilde{A} \cap (\tilde{B} \cap \tilde{C}) = (\tilde{A} \cap \tilde{B}) \cap \tilde{C} = \tilde{A} \cap \tilde{B} \cap \tilde{C}$$

4. Дистрибутивність

$$\tilde{A} \cup (\tilde{B} \cap \tilde{C}) = (\tilde{A} \cup \tilde{B}) \cap (\tilde{A} \cup \tilde{C}),$$
$$\tilde{A} \cap (\tilde{B} \cup \tilde{C}) = (\tilde{A} \cap \tilde{B}) \cup (\tilde{A} \cap \tilde{C})$$

5. Закони де Моргана

$$\neg(\tilde{A} \cup \tilde{B}) = \neg\tilde{A} \cap \neg\tilde{B},$$
$$\neg(\tilde{A} \cap \tilde{B}) = \neg\tilde{A} \cup \neg\tilde{B}$$

6. Властивості α-рівня

$(A \cup B)_\alpha = A_\alpha \cup B_\alpha$,

$(A \cap B)_\alpha = A_\alpha \cap B_\alpha$

6.2 Нечіткі відношення

Означення. *Нечітке відношення R* на множині *X* – це нечітка підмножина декартового добутку X×X, де X – область завдання нечіткого відношення (НВ).

Належність пари (*u*,*v*) нечіткому відношенню *R* визначається функцією належності $\mu_R(u,v)$ ($0 \le \mu_R(u,v) \le 1$). Значення $\mu_R(u,v)$ цієї функції розуміють як ступінь виконання відношення uRv. Функцію належності також можуть позначати і *R*(*u*,*v*).

Нечіткому відношенню можна поставити у відповідність зважений граф, кожна пара вершин якого (*u*,*v*) з множини *X* об'єднані направленим зв'язком з вагою *R*(*u*,*v*) (див. приклад 5).

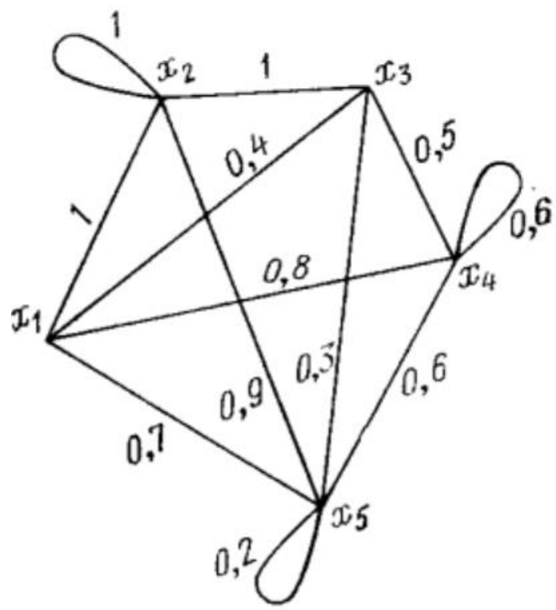
Приклад 4. Нечітке відношення "приблизно дорівнює" на множині {1,2,3}. Функція належності цього НВ може бути визначена наступним чином:

$$\mu_R(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x = y, \\ 0.8, & \text{якщо } |x-y| = 1, \\ 0.3, & \text{якщо } |x-y| = 2. \end{cases}$$

В матричному вигляді це НВ:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0.8 & 0.3 \\ 0.8 & 1 & 0.8 \\ 0.3 & 0.8 & 1 \end{pmatrix}$$

Приклад 5. НВ, задане на множині $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ у вигляді графа:



Оскільки НВ – це нечітка множина, то для нього справедливі всі властивості та мають місце операції, сформульовані в п.6.1. Коротко сформулюємо основні властивості та операції.

Носій нечіткого відношення R на множині X:

$$\operatorname{supp} R = \{(x,\ y) \mid (x,\ y) \in X \times X,\ \mu_R(x,\ y) > 0\}.$$

α-рівень нечіткого відношення:

$$R_\alpha = \{(x,\ y) \mid (x,\ y) \in X \times X,\ \mu_R(x,\ y) \geqslant \alpha\}.$$

Приклад 5. Для НВ *R*, заданого на множині *X* = {x_1, x_2, x_3, x_4} матрицею відношення:

	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	1	0,5	0	0,2
x_2	0,3	1	1	0,4
x_3	0	0,6	0,5	0,1
x_4	1	0,7	0,3	0

відношення, що є множиною рівня 0,5 для даного НВ *R,* має вигляд:

	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	1	1	0	0
x_2	0	1	1	0
x_3	0	1	1	0
x_4	1	1	0	0

Властивість α-рівнів. З $\alpha \le \beta$ слідує $R_\alpha \supseteq R_\beta$. Тобто α-рівні – це сукупність вкладених одне в одне відношень.

Порожнє та *універсальне* НВ:

$$\varnothing(x,y) = 0 \quad \forall x \in X,\ \forall y \in X,$$

$$U(x,y) = 1 \quad \forall x \in X,\ \forall y \in X.$$

Властивості порожнього та універсального НВ:

$$R \cap \varnothing = \varnothing, \quad R \cup \varnothing = R,$$

$$R \cap U = R, \quad R \cup U = U.$$

Операції на НВ:

$$C = A \cup B$$

$$\mu_C(x,\ y) = \max\{\mu_A(x,\ y),\ \mu_B(x,\ y)\}$$

$$D = A \cap B$$

$$\mu_D(x,\ y) = \min\{\mu_A(x,\ y),\ \mu_B(x,\ y)\}$$

Обернення НВ визначається:

$$xR^{-1}y \Leftrightarrow yRx \qquad \forall x,\ y \in X,$$

або за допомогою функції належності:

$$\mu_{R^{-1}}(x,\ y) = \mu_R(y,\ x) \qquad \forall x,\ y \in X.$$

Композиція $A \circ B$ НВ A та B визначається функцією належності:

$$\mu_{A \cdot B}(x, y) = \sup_{z \in X} \min \{\mu_A(x, z), \mu_B(z, y)\}.$$

Нечітке *відношення рівності*:

$$E(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x = y, \\ 0, & \text{якщо } x \neq y. \end{cases}$$

$$E \circ R = R \circ E = R$$

Властивості нечітких відношень

Рефлексивність:

$$E \subseteq R, \quad R(x, x) = 1 \quad \forall x \in X. \tag{6.1}$$

Слабка рефлексивність:

$$R(x, y) \leqslant R(x, x) \ \forall x, \ y \in X.$$

Умова:

$$R(x, y) < 1 \quad \forall x, y \in X, \quad x \neq y$$

одночасно із виконанням умови (6.1) називається *сильною рефлексивністю*.

Антирефлексивність:

$$R \cap E = \varnothing, \quad R(x, x) = 0 \quad \forall x \in X. \tag{6.2}$$

Слабка антирефлексивність:

$$R(x, x) \leqslant R(x, y) \quad \forall x, y \in X.$$

Умова:

$$0 < R(x, y) \quad \forall x, y \in X, \quad x \neq y.$$

одночасно із виконанням умови (6.2) називається *сильною антирефлексивністю*.

Симетричність:

$$R = R^{-1}, \quad R(x, y) = R(y, x) \quad \forall x, y \in X.$$

Антисиметричність:

$$R \cap R^{-1} \subseteq E,$$

$$R(x, y) \wedge R(y, x) = 0 \quad \forall x, y \in X, \quad x \neq y.$$

Асиметричність:

$$R \cap R^{-1} = \varnothing,$$

$$R(x, y) \wedge R(y, x) = 0 \quad \forall x, y \in X.$$

Повнота (лінійність, зв'язність) сильна:

$$R \cup R^{-1} = U,$$

$$R(x, y) \vee R(y, x) = 1 \quad \forall x, y \in X.$$

Повнота слабка:

$$R(x, y) \vee R(y, x) > 0 \quad \forall x, y \in X.$$

Транзитивність:

$$R \supseteq R \circ R,$$

$$R(x, z) \geqslant R(x, y) \wedge R(y, z) \quad \forall x, y, z \in X.$$

$$\mu_R(x, y) \geqslant \sup_{z \in X} \min \{\mu_R(x, z), \mu_R(z, y)\}.$$

У визначеннях властивостей НВ операціям перетину $\wedge$ та об'єднання $\vee$ відповідають операції *min* та *max* відповідно, *sup* – найменша верхня грань (якщо множина скінченна - максимум).

Транзитивне замикання $\hat{R}$ НВ *R:*

$$\hat{R} = R \cup R^2 \cup \ldots \cup R^n \ldots,$$

де відношення R^k визначається рекурсивно

$$R^1 = R, \quad R^k = R^{k-1} \circ R, \quad k = 2, 3, \ldots$$

Теорема 6.1. Транзитивне замикання $\hat{R}$ будь-якого НВ *R* транзитивне та є найменшим транзитивним відношенням, що включає *R*:

$$R \subseteq \hat{R}$$

Наслідок теореми 6.1. НВ *R* транзитивне тоді і тільки тоді, коли

$$R = \hat{R}$$

Класифікація нечітких відношень. Структура НВ

НВ, в залежності від властивостей, можна розділити на три великих класи [3]. В перший клас входять симетричні відношення, які звичайно характеризують схожість або відмінності між об’єктами множини *X*. Такі відношення представляють зваженими графами з неорієнтованими дугами.

Другий клас утворюють антисиметричні відношення. Вони задають на множині об’єктів відношення впорядкованості, домінування, підлеглості.Таким відношенням відповідають орієнтовані зважені графи з односторонньою орієнтацією дуг.

Третій клас включає решту відношень. Цим відношенням відповідають зважені графи з двосторонньою орієнтацією дуг, при чому ваги протилежно направлених дуг в загальному випадку можуть не співпадати.

Рефлексивні та симетричні відношення звичайно називають відношеннями *подібності*, *толерантності*, *байдужості* або *невідмінності*. В подальшому будемо називати їх відношеннями подібності та позначати *S*.

Антирефлексивні симетричні відношення називають відношеннями *відмінності*, будемо позначати їх *D*.

Антисиметричні відношення, які називаються *порядками* та позначаються *P*, в залежності від виконання умов рефлексивності та антирефлексивності діляться на *нестрогі* та *строгі порядки*.

Із відношень третього класу, які позначають *R*, виділяють тільки рефлексивні відношення, які називають слабкими порядками. Їх розділяють на симетричну та антисиметричну частини, і вони несуть інформацію як про схожість, так і про впорядкованість об'єктів множини *X*.

На наступному рівні класифікації серед вказаних відношень виділяють відношення спеціального вигляду, які визначаються виконанням умови транзитивності.

Наведемо деякі основні класи НВ.

Симетричне та рефлексивне НВ подібності є аналогом звичайного відношення *толерантності*.

Транзитивне (в розумінні введеного вище означення транзитивності) відношення подібності *S* є узагальненням звичайного відношення еквівалентності. Це відношення називається *нечітким відношенням еквівалентності*, або відношенням *подібності*.

Відношенням відмінності D називається симетричне та антирефлексивне НВ.

Антисиметричне НВ *P* називається *порядком*, *строгим* (при виконанні антирефлексивності) або *нестрогим* (при виконанні рефлексивності). Різновиди порядків відрізняються вимогами, що висуваються до умови транзитивності. Розглянемо деякі з цих умов, що визначають класи нечітких строгих порядків. Враховуючи асиметричність відношення строгого порядку *P*, будемо записувати $P(x, y) \geqslant 0$, якщо $P(y, x) = 0$.

Ациклічність:

$$\forall x_0, x_1, \ldots, x_n \in X:$$

$$P(x_0, x_1) > 0,\ P(x_1, x_2) > 0, \ldots$$

$$\ldots, P(x_{n-1}, x_n) > 0 \Rightarrow P(x_0, x_n) \geqslant 0$$

Слабка транзитивність:

$$P(x, y) > 0, \quad P(y, z) > 0 \Rightarrow P(x, z) > 0.$$

Від'ємна транзитивність:

$$P(x, y) \geqslant 0, \quad P(y, z) \geqslant 0 \Rightarrow P(x, z) \geqslant 0.$$

(Λ)-транзитивність (відповідає означенню транзитивності, описаному в попередньому пункті):

$$P(x, y) > 0, \quad P(y, z) > 0 \Rightarrow P(x, z) \geqslant P(x, y) \wedge P(y, z).$$

На основі *повного* відношення *слабого порядку R* можна отримати: відношення *строгого порядку*

$$P = \overline{R^{-1}},$$

відношення *подібності*

$$S = R \cup R^{-1},$$

та відношення *відмінності*

$$D = \overline{R \cap R^{-1}}.$$

Теорема 6.2. НВ *R* рефлексивне (антирефлексивне, симетричне, антисиметричне, асиметричне, повне, транзитивне) тоді і тільки тоді, коли рефлексивне (антирефлексивне, симетричне, антисиметричне, асиметричне, повне, транзитивне) відношення R_α $\forall\alpha$: $0 < \alpha \leq 1$

Аналіз структури нечіткого відношення R

Виділимо в структурі відношення переваги *R*:

R^S – відношення строгої переваги:

$$R^S = R \setminus R^{-1}$$

R^I – відношення байдужості:

$$R^I = (X \times X) \setminus (R \cup R^{-1}) \cup (R \cap R^{-1})$$

R^E – відношення квазіеквівалентності:

$$R^E = R \bigcap R^{-1}$$

Функуції належності для виділених відношень визначаються за наступними співвідношеннями.

Нечітке відношення *байдужості*:

$$\mu_R^I = \max[\{1 - \max\{\mu_R(x,y), \mu_R(y,x)\}\}; \min\{\mu_R(x,y), \mu_R(y,x)\}]$$

Нечітке відношення *квазіеквівалентності*:

$$\mu_R^E = \min\{\mu_R(x,y), \mu_R(y,x)\}$$

Нечітке відношення *строгої переваги*:

$$\mu_R^S = \begin{cases} \mu_R(x,y) - \mu_{R^{-1}}(x,y) = \\ = \mu_R(x,y) - \mu_R(y,x), \text{ якщо } \\ \qquad \mu_R(x,y) > \mu_R(y,x) \\ 0, \quad \text{інакше} \end{cases} \tag{6.3}$$

6.3 Методи прийняття рішень із нечіткою вхідною інформацією

У випадку нечіткої вхідної інформації виділяють наступні групи методів ПР [1, 2]:

Методи прийняття рішень

- одним експертом
- групою експертів, що мають вагові коефіцієнти
- групою експертів, що характеризуються НВ нестрогої переваги

Розглянемо основні поняття, які лежать в основі методів ПР за нечіткої вхідної інформації.

Означення. Нехай *X* – це множина альтернатив із заданим на ній НВ нестрогої переваги *R* із функцією належності μ_R. Тоді нечітка підмножина недомінованих альтернатив множини визначається функцією належності

$$\mu_R^{\text{н.д.}}(x) = 1 - \sup_{y \in X} \mu_R^s(y,\ x), \qquad x \in X, \tag{6.4}$$

де μ_R^s – функція належності нечіткого відношення строгої переваги, відповідного відношенню *R*, визначена в (6.3).

Величина $\mu_R^{\text{н.д.}}(x)$ – це ступінь «недомінованості» альтернативи x, тому раціональним вважається вибір альтернатив, які мають по можливості найбільший ступінь належності нечіткій множині $\mu_R^{\text{н.д.}}$.

Означення. Максимальними недомінованими альтернативами множини *X* із заданим на ній нечітким відношенням нестрогої переваги μ_R називаються альтернативи множини

$$X^{\text{н.д.}} = \{x \mid x \in X,\ \mu_R^{\text{н.д.}}(x) = \sup_{z \in X} \mu_R^{\text{н.д.}}(z)\} \tag{6.5}$$

Задача ПР з одним експертом

Постановка задачі. Задано множину альтернатив

$$U = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$$

та нечітке відношення нестрогої переваги R на множині U з функцією належності $\mu_R(u_i, u_j) \in [0,1]$ – довільне рефлексивне нечітке відношення переваги, для якого $\mu_R(u_i, u_i) = 1$, $\forall u_i \in U$.

Задача ПР полягає у раціональному виборі найбільш переважних альтернатив з множини U, на якій задане НВ переваги R.

Алгоритм вирішення задачі

Крок 1. Побудова НВ строгої переваги R^S, асоційованого з R, що визначається функцією належності (6.3)

Крок 2. Побудова нечіткої підмножини недомінованих альтернатив $U_R^{nd} \subset U$, асоційованої з R, що визначається функцією належності

$$\mu_R^{nd}(u_i) = \min_{u_j \in U}\{1 - \mu_R^S(u_j, u_i)\} = 1 - \max_{u_j \in U}\{\mu_R^S(u_j, u_i)\}, \quad u_i \in U.$$

Крок 3. Вибір альтернативи u^* із максимальним значенням $\mu_R^{nd}(u^*)$:

$$u^* = \arg\max_{u_i \in U} \mu_R^{nd}(u_i).$$

Приклад 6. На множині $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ задане НВ R матрицею відношення:

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0.3 & 0.7 \\ 1 & 1 & 0.8 & 0.1 \\ 0.5 & 0.5 & 1 & 1 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Необхідно визначити найкращу(і) альтернативу(и).

Матриця відношення R^S, асоційованого з R, побудована за співвідношенням (6.3), має вигляд:

$$M_R^S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0.2 \\ 1 & 0 & 0.3 & 0 \\ 0.2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0.4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\forall u_i$ визначимо $\max\limits_{u_j \in U}\{\mu_R^S(u_j, u_i)\}$ і $\mu_R^{nd}(u_i)$::

	u_1	u_2	u_3	u_4
$\max\limits_{u_j \in U}\{\mu_R^S(u_j, u_i)\}$	1	0.4	0.3	1
$\mu_R^{nd}(u_i)$	0	0.6	0.7	0

Оскільки $\mu_R^{nd}(u_3)$ = 0.7 = max{$\mu_R^{nd}(u_i)$}, то найкраща альтернатива $u^*=u_3$.

Задача ПР групою експертів

Постановка задачі. Задано множину альтернатив

$$U = \{u_1, u_2, . . . , u_n\}$$

та нечіткі відношення нестрогої переваги R_k на множині U з функціями належності $\mu_{Rk}(u_i, u_j) \in [0,1]$.

R_k – результат опитування експерта k, ступінь впливовості якого виражено ваговим коефіцієнтом λ_k :

$$0 \leqslant \lambda_k \leqslant 1, \quad \sum \lambda_k = 1$$

Задача ПР полягає у раціональному виборі найбільш переважних альтернатив з множини U.

Алгоритм вирішення задачі

Крок 1. Побудова згортки відношень переваг експертів – отримання нового нечіткого відношення переваги P:

$$P = \cap R_k(u_i, u_j) = \min\{\mu_{R_k}(u_i, u_j)\}$$

Крок 2. Побудова для відношення переваги P асоційованого відношення строгої переваги P^S, що визначається функцією належності (6.3)

Крок 3. Побудова нечіткої підмножини недомінованих альтернатив U_P^{nd}, асоційованої з *P*, що визначається функцією належності

$$\mu_P^{nd}(u_i) = 1 - \max_{u_j \in P}\{\mu_P^S(u_j, u_i)\}, \quad u_i \in U.$$

Крок 4. Побудова опуклої згортки відношень R_k

$$Q = \sum \lambda_k R_k$$

з функцією належності

$$\mu_Q(u_i, u_j) = \sum_k \lambda_k \mu_k(u_i, u_j).$$

Крок 5. З отриманим на 4-му кроці новим відношенням переваги *Q* асоціюють відношення строгої переваги Q^S, що визначається функцією належності (6.3)

Крок 6. Побудова нечіткої підмножини недомінованих альтернатив U_Q^{nd}, асоційованої з *Q*, що визначається функцією належності

$$\mu_Q^{nd}(u_i) = 1 - \max_{u_j \in Q}\{\mu_Q^S(u_j, u_i)\}, \quad u_i \in U.$$

Крок 7. Побудова перетину отриманих множин недомінованих альтернатив:

$$U^{nd} = U_P^{nd} \cap U_Q^{nd}$$

з функцією належності

$$\mu^{nd}(u_i) = \min\{\mu_P^{nd}(u_i), \mu_Q^{nd}(u_i)\}.$$

Крок 8. Впорядкування альтернатив за значенням $\mu^{nd}(u_i)$.

Вибір найкращої альтернативи *u**:

$$u* = \arg\max \mu^{nd}(u_i), \quad u_i \in U$$

Приклад 7. На множині $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ 5 експертів задали НВ R_k, $k = 1, \ldots, 5$ матрицями відношень:

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0.2 & 0.4 \\ 0 & 1 & 0.8 & 0.6 \\ 0.5 & 0.5 & 1 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0.2 & 0.9 \\ 1 & 1 & 0.9 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 & 1 & 1 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0.3 & 0.7 & 1 \\ 0.5 & 1 & 1 & 0.9 \\ 0.5 & 0 & 1 & 0.1 \\ 0.5 & 0.5 & 0.5 & 1 \end{bmatrix}, \quad M_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0.2 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 1 & 0 & 0.6 \\ 0.5 & 1 & 1 & 0.8 \\ 1 & 0.5 & 0.5 & 1 \end{bmatrix},$$

$$M_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0.1 & 1 & 0.6 \\ 0.5 & 1 & 0.3 & 1 \\ 0 & 0.5 & 1 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 & 1 \end{bmatrix}.$$

Вагові коефіцієнти відносної важливості експертів з т. зору ОПР дорівнюють $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_4=0.2$, $\lambda_3=0.3$, $\lambda_5=0.1$.

Згортки P та Q відношень R_k, $k = 1, \ldots, 5$ визначаються матрицями:

$$M_P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad M_Q = \begin{bmatrix} 1 & 0.34 & 0.49 & 0.62 \\ 0.5 & 1 & 0.67 & 0.71 \\ 0.45 & 0.45 & 1 & 0.39 \\ 0.6 & 0.45 & 0.5 & 1 \end{bmatrix}.$$

Відношення P^S та Q^S визначаються матрицями:

$$M_P^S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad M_Q^S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.04 & 0.02 \\ 0.16 & 0 & 0.22 & 0.26 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.11 & 0 \end{bmatrix}.$$

Визначимо множини недомінованих альтернатив U_P^{nd} та U_Q^{nd} функціями належності:

	u_1	u_2	u_3	u_4
$\max\limits_{u_j \in P}\{\mu_P^S(u_j, u_i)\}$	0.5	0	0.2	0.5
$\mu_P^{nd}(u_i)$	0.5	1	0.8	0.5
$\max\limits_{u_j \in Q}\{\mu_Q^S(u_j, u_i)\}$	0.16	0	0.22	0.26
$\mu_Q^{nd}(u_i)$	0.84	1	0.78	0.74

Визначимо множину недомінованих альтернатив

$$U^{nd} = U_P^{nd} \cap U_Q^{nd}$$

функцією належності

$$\mu^{nd}(u_i) = \min\{\mu_P^{nd}(u_i), \mu_Q^{nd}(u_i)\}.$$

$$\mu^{nd} = [0.5, 1, 0.78, 0.5]$$

Вибір найкращої альтернативи u*:

$$u* = \arg\max \mu^{nd}(u_i), \quad u_i \in U$$

Відповідь: $u^* = u_2$.

Питання

1. Наведіть приклади реальних задач, що потребують введення поняття нечіткої множини.

2. В чому полягає суть функції належності нечіткої множини?

3. В чому суть поняття «носій нечіткої множини»?

4. Наведіть графічну ілюстрацію для основних операцій на нечітких множинах.

5. Наведіть приклади нечітких відношень.

6. Наведіть основні властивості нечітких відношень.

7. Поясніть поняття «множина рівня» нечіткого відношення.

8. Наведіть приклади рефлексивного, антирефлексивного, симетричного, антисиметричного нечіткого відношення.

9. Наведіть загальну процедуру вирішення багатокритеріальної задачі раціонального вибору недомінованих альтернатив.

Перелік посилань

1. Блюмин С.Л., Шуйкова И.А. Модели и методы принятия решений в условиях неопределенности.— Липецк: ЛЭГИ, 2000.— 139 с.

2. Орловский С.А. Проблемы принятия решений при нечеткой исходной информации.— М.: Наука.— 1981.— 194 с.

3. Нечеткие множества в моделях управления и искусственного интеллекта/Под ред. Д.А.Поспелова.–М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986.–312с.