МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

Нестандартні та олімпіадні задачі алгебри та аналізу

практикум для підготовки студентів 1-го курсу

Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2020

Нестандартні та олімпіадні задачі з алгебри та аналізу: практикум для підготовки студентів 1-го курсу [Електронний ресурс] : навч. посіб. для студ. ступеня бакалавра / КПІ ім. Ігоря Сікорського; уклад.: С. В. Боднарчук, М. К. Ільєнко, Т. В. Маловічко, В. В. Павленков, А. В. Сиротенко – Електронні текстові дані (1 файл: 1,29 Мбайт). – Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2020. – 183 с.

Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського (протокол №4 від 10.12.2020 р.) за поданням Вченої ради ФМФ (протокол №4 від 16.11.2020 р.)

Електронне мережне навчальне видання

Нестандартні та олімпіадні задачі алгебри та аналізу

практикум для підготовки студентів 1-го курсу

Укладачі: *Боднарчук Семен Володимирович*, канд. фіз.-мат. наук
Ільєнко Марина Костянтинівна, канд. фіз.-мат. наук, доц.
Маловічко Тетяна Володимирівна, канд. фіз.-мат. наук
Павленков Володимир Володимирович, канд. фіз.-мат. наук
Сиротенко Антон Володимирович, канд. фіз.-мат. наук

Відповідальний редактор *Клесов О. І.,* доктор фіз.-мат. наук, проф.

Рецензенти *Бабич В. М.,* канд. фіз.-мат. наук, доцент кафедри геометрії, топології і динамічних систем КНУ ім. Тараса Шевченка
Нестеренко О. Н., канд. фіз.-мат. наук, доцент кафедри математичного аналізу КНУ ім. Тараса Шевченка

Навчальний посібник «Нестандартні та олімпіадні задачі алгебри та аналізу» призначений для підготовки студентів першого курсу до різноманітних математичних олімпіад.

Для студентів усіх спеціальностей.

Передмова

Цей практикум складений переважно із олімпіадних задач та задач підвищеної складності за основними темами математичних дисциплін, які вивчаються студентами на першому курсі у технічному ВНЗ. Більшість задач супроводжується розв'язаннями або вказівками. Значна частина задач, які наведені у збірнику, пропонувалася в різні роки на різних етапах математичних олімпіад серед студентів перших курсів технічних навчальних закладів, зокрема у 1-му та 2-му турі Всеукраїнської студентської олімпіади з математики, а також факультетських олімпіадах КПІ ім. Ігоря Сікорського. Деякі задачі є авторськими, а решта — запозичені укладачами з різних джерел, зокрема з інших збірників та методичних вказівок, наприклад, [2, 8, 11, 13, 14], а також мережі інтернет. Первинне авторство багатьох задач та деяких розв'язків до них встановити неможливо, тому укладачі висловлюють щиру подяку істинним авторам, задачі та/або розв'язки яких опинилися у цьому збірнику.

Початково практикум формувався як методичний супровід для викладачів, що проводять заняття математичного гуртка "Нестандартні та олімпіадні задачі з алгебри та аналізу" для студентів 1-х курсів КПІ ім. Ігоря Сікорського. Проте, збірник задач може бути корисним для самостійної роботи студентів, які цікавляться математикою та приймають активну участь у математичних змаганнях різних рівнів. Крім того, практикум може стати у нагоді також викладачам математичних дисциплін як методичний посібник, що містить задачі підвищеної складності.

Збірник складається з 17 розділів, кожен з яких охоплює окрему тему з того чи іншого розділу вищої математики і відповідає одному–двом заняттям математичного гуртка. Деякі розділи супроводжуються короткими теоретичними відомостями, які не входять до стандартного курсу вищої математики для інженерних спеціальностей, але є необхідними при поглибленому вивченні матеріалу та розв'язанні задач підвищеної складності. Всі задачі супроводжуються розв'язаннями або вказівками. Представлені задачі та методи їх розв'язання далеко не вичерпують всі можливі набори задач з вибраних тем та існуючі підходи розв'язання, а лише дають уявлення про деякі з них. Посилання, наведені в кінці, пропонують читачеві широкий обсяг матеріалів для більш поглибленого опрацювання відповідних тем.

Зміст

1 Метод математичної індукції

Метод математичної індукції базується на аксіомі індукції, яка є однією з системи аксіом італійського математика Джузеппе Пеано (1858-1932) для натуральних чисел. Читається вона наступним чином:

Якщо деяке твердження $T(n)$ справедливе для $n = 1$, і якщо з припущення, що воно справедливе для деякого натурального числа $n = k$, виплaває, що воно справедливе і для наступного за ним числа $n = k + 1$, то воно є справедливим для всіх натуральних чисел.

З аксіоми індукції випливає метод математичної індукції. Сформулюємо його у вигляді алгоритму. Нехай $(T(n), n \geq 1)$ — послідовність тверджень, причому необхідно довести (або спростувати), що твердження $T(n)$ справедливе для всіх $n \geq 1$.

1. *(База індукції)* Перевіряємо справедливість твердження $T(1)$;

2. *(Припущення індукції)* Припускаємо, що твердження $T(n)$ виконується для деякого натурального $n = k$, тобто припускаємо, що вірне твердження $T(k)$;

3. *(Крок індукції)* Доводимо, що з припущення індукції випливає справедливість твердження $T(n)$ для наступного натурального числа $n = k+1$, з чого робимо висновок, що твердження $T(n)$ справедливе для всіх $n \geq 1$.

Аудиторні завдання.

1.1. Довести, що для довільного натурального n виконується

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + \ldots + n)^2 .$$

Доведення.

1. Очевидно, що для $n = 1$ твердження справедливе.

2. Припустимо, що воно справедливе для $n = k$, тобто

$$1^3 + 2^3 + \ldots + k^3 = (1 + 2 + \ldots + k)^2 .$$

3. Доведемо, що твердження справедливе для $n = k + 1$, тобто

$$1^3 + 2^3 + \ldots + k^3 + (k + 1)^3 = (1 + 2 + \ldots + k + (k + 1))^2 .$$

Дійсно, розглянемо ліву частину рівності і за припущенням індукції суму перших k доданків замінимо на $(1 + 2 + \ldots + k)^2$:

$$1^3 + 2^3 + \ldots + k^3 + (k + 1)^3 = (1 + 2 + \ldots + k)^2 + (k + 1)^3.$$

Далі використовуючи формулу для суми елементів арифметичної прогресії, отримаємо

$$(1+2+\ldots+k)^2+(k+1)^3=\left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2+(k+1)^3=$$

$$=\frac{1}{4}(k+1)^2(k+2)^2=\left(\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right)^2,$$

що в свою чергу є квадратом суми перших $k+1$ натуральних чисел, оскільки за формулою суми арифметичної прогресії:

$$1+2+\ldots+k+(k+1)=\frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Отже, за принципом математичної індукції твердження задачі є справедливим. □

1.2. Довести, що для довільного натурального n виконується нерівність:

$$\sqrt{n}\le 1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}.$$

Доведення. Доведемо тільки праву нерівність. Ліва нерівність доводиться аналогічно.

1. Очевидно, що для $n=1$ твердження справедливе.

2. Припустимо, що воно справедливе для $n=k$, тобто

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{k}}<2\sqrt{k}.$$

3. Доведемо, що для $n=k+1$ нерівність також виконується. Маємо довести, що

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}<2\sqrt{k+1}. \tag{1.1}$$

З припущення індукції випливає, що

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}<2\sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}.$$

Тому нерівність (1.1) буде виконуватись, якщо справедлива нерівність

$$2\sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}<2\sqrt{k+1}\quad\Leftrightarrow\quad\frac{1}{\sqrt{k+1}}<2\sqrt{k+1}-2\sqrt{k}$$

$$\Leftrightarrow\quad\frac{1}{\sqrt{k+1}}<\frac{2}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}},$$

що й потрібно довести. $\square$

1.3. Довести, що для довільного натурального n число $6^{2n-1}+1$ ділиться націло на 7.

Зауваження 1.1. Надалі ділення націло будемо позначати символом $\vdots$, тобто умову задачі 1.2 можна записати так:

$$(6^{2n-1}+1) \vdots 7.$$

Доведення.

1. Перевіряємо справедливість твердження для $n=1$:

$$(6^{2-1}+1) = 7 \vdots 7 \text{— вірно.}$$

2. Припускаємо, що твердження справедливе для $n=k$, тобто

$$(6^{2k-1}+1) \vdots 7.$$

3. Доведемо, що твердження справедливе для $n=k+1$, тобто

$$(6^{2(k+1)-1}+1) \vdots 7.$$

Дійсно,

$$(6^{2(k+1)-1}+1) = 6^{2k+1}+1 = 36\underbrace{(6^{2k-1}+1)}_{\vdots 7} - \underbrace{35}_{\vdots 7},$$

що й треба було довести. $\square$

1.4. Дійсне x таке, що $x+\frac{1}{x}$ — ціле. Довести, що для довільного натурального n число $x^n+\frac{1}{x^n}$ також ціле.

Вказівка. Використати рівність

$$\left(x^k+\frac{1}{x^k}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right) = x^{k+1}+\frac{1}{x^{k+1}}+x^{k-1}+\frac{1}{x^{k-1}}.$$

Тоді за припущенням число

$$x^{k+1}+\frac{1}{x^{k+1}} = \left(x^k+\frac{1}{x^k}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right) - \left(x^{k-1}+\frac{1}{x^{k-1}}\right)$$

є цілим. $\square$

1.5. Послідовність a_n задана наступним чином

$$a_1=1, \quad a_2=1, \quad a_{n+2}=a_{n+1}+\frac{a_n}{2^n}, \quad n\in\mathbb{N}.$$

Довести нерівність $a_n<3$ для всіх натуральних n.

Вказівка.

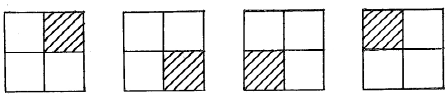
$$a_{n+2} = a_{n+1} + \frac{a_n}{2^n} = a_n + \frac{a_{n-1}}{2^{n-1}} + \frac{a_n}{2^n} = \ldots = a_2 + \frac{a_1}{2^1} + \frac{a_2}{2^2} + \ldots + \frac{a_n}{2^n}.$$

З припущення індукції доводимо справедливість твердження для наступного натурального числа:

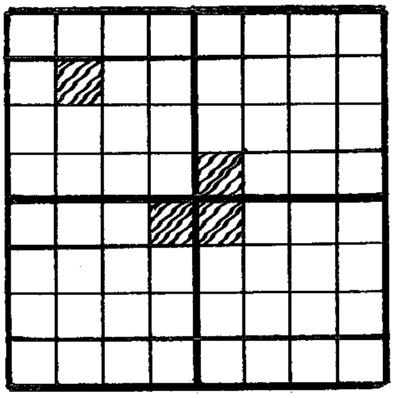
$$a_{n+2} < 1 + \frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \ldots + \frac{3}{2^n} = \frac{3}{2} + \frac{\frac{3}{4}\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right)}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{3}{2}\left(2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right) < 3.$$

□

1.6. З квадрату паперу в клітинку розміру $2^n \times 2^n$ вирізали одну клітинку. Довести, що отриману фігуру можна розрізати на кутники з трьох клітинок.



Мал. 1.1



Мал. 1.2

Доведення.

1. Для $n = 1$ твердження істинне (див. мал. 1.1).

2. Нехай твердження істинне для $n = k$.

3. Доведемо, що твердження справедливе для $n = k+1$. Розглянемо квадрат розміру $2^{k+1} \times 2^{k+1}$. Вирізана клітинка обов'язково потрапить в один з чотирьох квадратів зі стороною 2^k. В трьох інших квадратах зі стороною 2^k виділимо клітинки, як показано на мал. 1.2. Тоді за припущенням індукції кожен з квадратів розміру 2^k можна розрізати на кутники з трьох клітинок, причому відмічені клітинки також утворюють кутник з трьох клітинок. Тому весь квадрат розміру 2^{k+1} можна розрізати на кутники з трьох клітинок. □

1.7. Знайти $\lim\limits_{n\to\infty} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^n.$

Вказівка. Методом математичної індукції довести, що

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{2^n} & 1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2^n} \end{pmatrix}.$$

Тоді

$$\lim_{n\to\infty} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^n = \lim_{n\to\infty} \begin{pmatrix} \frac{1}{2^n} & 1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2^n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

□

1.8. *У всіх дівчат очі однакового кольору.* Спробуємо довести це методом математичної індукції.

1. Для однієї дівчини (тобто, $n = 1$) це очевидно.

2. Припустимо, що дане твердження справедливе для $n = k$ довільних дівчат.

3. Розглянемо групу з $k+1$ дівчини, кожна з яких має свій номер: перша, друга, …, k-та, $(k+1)$-ша. Тоді за припущенням, у групі, що складається з першої, другої, …, k-ої дівчини, усі дівчата мають очі однакового кольору (оскільки всього дівчат в даній групі k). З іншого боку, це справедливо і для групи, що складається з другої, третьої, …, k-ої, $(k+1)$-ої дівчини. Але до обох цих груп належить дівчина під номером «2», тому всі з $k+1$ дівчат мають очі того ж кольору, що й ця дівчина, тобто один і той самий колір. *Де помилка?*

Вказівка. Помилка у виборі бази індукції. Крок індукції з $n = 1$ до $n = 2$ не справджується, оскільки тоді відповідні групи дівчат («1» та «2») не мають спільної дівчини. Тому спочатку перевіряти дане твердження потрібно з групи, у якій є дві дівчини. Оскільки існують дві дівчини з різним кольором очей, то база індукції не виконується. Тому метод математичної індукції тут застосовувати не можна. □

Задачі для самостійного розв'язання.

1.9. Методом математичної індукції довести рівності:

1) $1 + (1+2) + (1+2+3) + \ldots + (1+2+\ldots+n) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{6}$;

2) $1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 10 + \ldots + n \cdot (3n+1) = n(n+1)^2$;

3) $1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n-1)^2 = \dfrac{n(4n^2-1)}{3}$;

4) $\dfrac{7}{1 \cdot 8} + \dfrac{7}{8 \cdot 15} + \dfrac{7}{15 \cdot 22} + \ldots + \dfrac{7}{(7n-6)\cdot(7n+1)} + \dfrac{1}{7n+1} = 1$;

5) $\dfrac{4}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dfrac{5}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dfrac{6}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \ldots + \dfrac{n+3}{n(n+1)(n+2)} = \dfrac{5}{4} - \dfrac{2n+5}{2(n+1)(n+2)}$;

6) $3 + 33 + 333 + 3333 + \ldots + \underbrace{3\ldots3}_{n\,штук} = \dfrac{10^{n+1} - 9n - 10}{27}$;

7) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \ldots + \sin nx = \dfrac{\sin \frac{nx}{2} \sin \frac{n+1}{2}x}{\sin \frac{x}{2}}$;

8) $\cos\alpha \cdot \cos 2\alpha \cdot \cos 4\alpha \cdot \ldots \cdot \cos(2^n\alpha) = \dfrac{\sin(2^{n+1}\alpha)}{2^{n+1}\sin\alpha}$.

1.10. Методом математичної індукції довести нерівності:

1) $\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \ldots + \dfrac{1}{2n} > \dfrac{13}{24}$;

2) $1 + \dfrac{1}{2\sqrt{2}} + \dfrac{1}{3\sqrt{3}} + \ldots + \dfrac{1}{n\sqrt{n}} \leq 3 - \dfrac{2}{\sqrt{n}}$.

3) $\dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \ldots + \dfrac{1}{n!} < \dfrac{5n-2}{2n}$;

4) $\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{5}{6} \cdot \ldots \cdot \dfrac{2n-1}{2n} < \dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}$;

5) $\dfrac{4^n}{n+1} < \dfrac{(2n)!}{(n!)^2}$.

1.11. Методом математичної індукції довести, що для всіх $n \in \mathbb{N}$:

1) $(4^n + 15n - 1) \,\vdots\, 9$;

2) $(13^n + 5) \,\vdots\, 6$;

3) $(3^{2n+2} + 8n - 9) \,\vdots\, 16$;

4) $n(2n^2 - 3n + 1) \,\vdots\, 6$;

5) $(6^{2n-2} + 3^{n+1} + 3^{n-1}) \,\vdots\, 11$;

6) $(5^{n+3} \cdot 2^n - 125) \,\vdots\, 45$.

1.12. Довести, що для довільного натурального n число $2^{2^n}+1$ закінчується цифрою 7.

1.13. Довести, що довільну суму, більшу ніж 7 копійок, можна сплатити монетами вартістю в 3 та 5 копійок.

1.14. Довести, що число, яке записується за допомогою 3^n одиниць, ділиться на 3^n (мається на увазі десятковий запис числа).

1.15. Послідовність a_n задана наступним чином

$$a_1 = 3, \quad a_{n+1} = 7a_n + 3, \quad n \geq 1.$$

Довести, що $a_n = \frac{1}{2}(7^n - 1)$, $n \geq 1$.

1.16. Послідовність a_n задана наступним чином

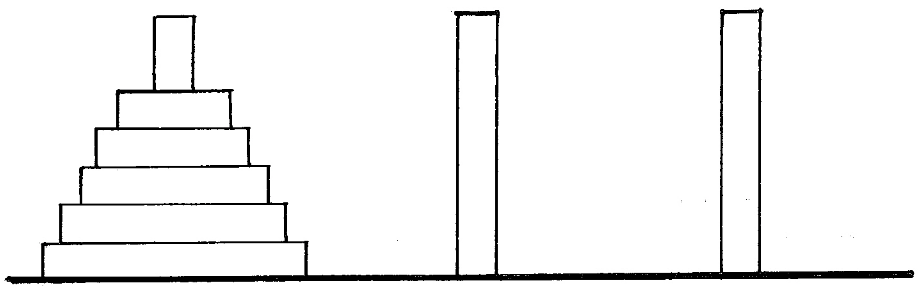
$$a_1 = 0, \quad a_{n+1} = 5a_n + \sqrt{24a_n^2 + 1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Довести, що всі члени послідовності, починаючи з другого, є натуральними числами.

1.17. Довести, що для довільного натурального n справедлива рівність

$$\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}_{n\text{ знаків кореня}} = 2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}.$$

1.18. (*Задача про Ханойські вежі*) Є три стрижні, на одному з яких розміщена вежа з n дисків (мал. 1.3). Нижній диск вежі має найбільший діаметр, а діаметр кожного наступного менший від попереднього. За один хід із будь-якого стрижня можна взяти диск і перемістити на інший стрижень. Викладати можна тільки диски меншого розміру на диски більшого розміру. Чи можна перемістити піраміду з одного стрижня на інший?



Мал. 1.3

2 Принцип Діріхле

Принцип Діріхле названий на честь німецького математика Петера Лежена Діріхле (1805-1859), який успішно застосовував його до доведення арифметичних тверджень. Незважаючи на його надзвичайну простоту, цей принцип часто використовується при розв'язанні задач і доведенні теорем у різних галузях математики. Існує декілька формулювань принципу Діріхле. Жартома цей принцип формулюється так:

Якщо є n зайців та $k < n$ кліток для них, то принаймні в одну клітку потраплять щонайменше 2 зайці.

Найчастіше принцип Діріхле використовується у наступній формі:

Якщо $nk + 1$ предмет розкладено в n ящиків, то принаймні в одному з ящиків знаходиться не менше ніж $k + 1$ предмет.

Наведемо ще одне загальне формулювання принципу Діріхле:

Якщо A та B — деякі скінчені непусті множини з кількістю елементів n_A та n_B відповідно, і задано функцію $f : A \to B$, то існує якийсь елемент $b \in B$, який є образом принаймні $\left[\frac{n_A}{n_B}\right] + 1$ елемента з A.

Аудиторні завдання.

2.1. По вулицях міста рухаються 487 тролейбусів. В кожному з них може знаходитися не більше ніж 70 людей. Крім водія в тролейбусі завжди їде кондуктор. Довести, що обов'язково знайдеться 8 тролейбусів, в яких їде однакова кількість людей.

Доведення. За умовою задачі різних кількостей людей в тролейбусах може бути не більше ніж 69 варіантів (від 2 до 70 чоловік). Оскільки $69 \cdot 7 = 483 < 487$, то за принципом Діріхле обов'язково знайдеться 8 тролейбусів з однаковою кількістю людей. □

2.2. Доведіть, що для довільного натурального n серед $n+1$ натуральних чисел є два числа, різниця яких без залишку ділиться на n.

Доведення. Розглянемо всі залишки від ділення довільних натуральних чисел на n: 0, 1, 2, 3, $\ldots$, $n - 1$. Їх кількість — n. Оскільки вибрано $n + 1$ натуральних чисел, то за принципом Діріхле знайдеться принаймні два числа, які мають однакові залишки від ділення на n. Тоді їх різниця без залишку ділиться на n, що й треба було довести. $\square$

2.3. Нехай у футбольному турнірі беруть участь n команд. Кожна команда грає по одному матчу з іншими командами. Доведіть, що в довільний момент часу знайдеться принаймні дві команди, які зіграли на цей момент однакову кількість матчів.

Доведення. Припустимо супротивне, тобто немає двох команд, які зіграли на цей момент часу однакову кількість матчів. Тоді серед команд існує одна, яка зіграла 0 матчів, одна, яка зіграла 1 матч, одна, яка зіграла 2 матчі, і т. д., знайдеться одна команда, яка зіграла $n-1$ матчів. Остання команда зіграла з усіма командами, а отже, і з командою, яка зіграла 0 матчів. Отримали протиріччя. Отже, в будь-який момент часу знайдуться принаймні дві команди, які зіграли однакову кількість матчів. $\square$

2.4. Нехай p та q — натуральні числа, $p < q$. Якщо звичайний дріб p/q перетворити на десятковий, отримаємо або скінченний, або нескінченний періодичний десятковий дріб, причому довжина періоду не перевершує $q-1$. Покажіть це.

Доведення. Будемо ділити p на q в стовпчик: ціла частина дорівнює нулю, оскільки $p < q$, а після коми можуть з'являтися цифри 0, 1, $\ldots$, 9. На кожному кроці (при знаходженні кожної наступної десяткової цифри), або число ділиться націло і значить дріб скінченний, або із залишком, і ми продовжуємо ділити. Але при діленні на число q може бути $q-1$ ненульових залишків: 1, $\ldots$, $q-1$. Таким чином, принаймні після $q-1$ кроків, залишок повториться, а це буде означати, що десяткові цифри числа p/q також будуть повторюватись. Отже, в цьому випадку ми отримаємо нескінченний періодичний десятковий дріб із періодом, довжина якого не перевершує $q-1$. $\square$

2.5. Покажіть, що якщо з множини чисел $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ вибрано більше половини чисел, то знайдуться принаймні два, які є взаємно простими, та два, з яких одне ділиться на інше без залишку.

Доведення. Припустимо, що вибрано $n+1$ чисел. Покажемо спочатку, що серед них знайдуться принаймні два взаємно прості. Для цього розіб'ємо множину $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ на n множини $\{1, 2\}$, $\{3, 4\}$, $\ldots$, $\{2n-1, 2n\}$. Оскільки вибрано $n+1$ число, то за принципом Діріхле принаймні два з них потраплять в одну і ту саму множину. А два натуральних числа, що йдуть поспіль є взаємно простими.

Покажемо тепер, що знайдеться два числа такі, що одне з них ділиться на інше без залишку. Для цього представимо кожне число множини у вигляді

$2^k m$, де $m = 1, 3, 5, \dots, 2n-1$. Наприклад, $13 = 2^0 \cdot 13$, $24 = 2^3 \cdot 3$, і т.д. Оскільки є тільки n різних чисел m, то за принципом Діріхле з обраних $n+1$ чисел знайдуться принаймні два, які мають однакові m. Нехай це числа $2^k m$ і $2^l m$. Тоді якщо $k > l$, то $2^k m$ ділиться на $2^l m$, а якщо $k < l$, то $2^l m$ ділиться на $2^k m$. □

2.6. Всередині рівностороннього трикутника зі стороною довжини 2 см позначено навмання 5 точок. Показати, що принаймні між двома з цих точок відстань менша за 1 см.

Доведення. Розіб'ємо трикутник на чотири рівносторонніх трикутника з довжиною сторони, що дорівнює 1 см, провівши середні лінії. Тоді за принципом Діріхле в один з трикутників потрапить принаймні дві точки, і тоді відстань між ними не перевищує 1 см. □

2.7. Покажіть, що серед семи різних натуральних чисел, які не перевищують 126, можна знайти два, скажімо x та y, які задовольняють нерівність $1 < \frac{y}{x} \leq 2$.

Доведення. Розглянемо множину $\{1, 2, \dots, 126\}$ і розіб'ємо її на 6 множин наступним чином: $\{1, 2\}$, $\{3, 4, 5, 6\}$, $\{7, 8, \dots, 14\}$, $\{15, 16, \dots, 30\}$, $\{31, 32, \dots, 62\}$, $\{63, 64, \dots, 126\}$. Оскільки вибрано 7 чисел, то за принципом Діріхле знайдеться два — x та y, які потрапили у одну і ту саму множину. Тому, очевидно, для них виконується нерівність $1 < \frac{y}{x} \leq 2$. □

2.8. Доведіть, що серед степенів числа 2 є два, різниця яких ділиться на 2013.

Доведення. Розглянемо степені числа 2: 1, 2, 4, 8, ... Їх нескінченно багато. Оскільки жодна степінь числа 2 на 2013 не ділиться, то маємо наступні залишки від ділення: 1, 2, ..., 2012. Тому за принципом Діріхле існує два степеня числа 2, які мають однакові залишки від ділення на 2013. Тоді їх різниця без залишку ділиться на 2013. □

2.9. Чи існує натуральне число, яке складається тільки з нулів і одиниць, і без залишку ділиться на 2013? А тільки з одиниць?

Доведення. Розглянемо числа, які складаються тільки з одиниць, тобто числа вигляду 11...11. Очевидно, таких чисел нескінченно багато. Припустимо, що жодне таке число на 2013 не ділиться націло. Тоді залишків від ділення на 2013 є 2012: 1, 2, ..., 2012. Тому за принципом Діріхле знайдуться два числа вигляду 11...11, які мають однакові залишки від ділення на 2013. Тоді їх різниця без залишку ділиться на 2013, а це число вигляду: 11...1100...00. Отже, існує число, яке складається тільки з одиниць і нулів і без залишку ділиться на 2013. Представимо це число наступним чином: $11...1100...00 = 11...11 \cdot 10^k$. Оскільки числа 2013 і 10^k — взаємно прості, то число 11...11 ділиться без залишку на 2013. Отже, також існує число, яке складається тільки з одиниць і без залишку ділиться на 2013. □

2.10. Нехай $f(x)$ — деякий многочлен з натуральними коефіцієнтами. Відомо, що $f(x) = 2$ для трьох різних натуральних значень. Показати, що не існує натурального числа y такого, що $f(y) = 3$.

Доведення. Спочатку зауважимо, що для будь-якого многочлена $f(x)$ різниця $f(y) - f(x)$ без залишку ділиться на $y - x$. Дійсно, нехай $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$. Тоді

$$f(y) - f(x) =$$

$$= (a_n y^n + a_{n-1}y^{n-1} + \ldots + a_1 y + a_0) - (a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0) =$$

$$= a_n(y^n - x^n) + a_{n-1}(y^{n-1} - x^{n-1}) + \ldots + a_1(y - x) =$$

$$= (y - x)\Big(a_n(y^{n-1} + y^{n-2}x + \ldots + yx^{n-2} + x^{n-1}) +$$
$$+ a_{n-1}(y^{n-2} + y^{n-3}x + \ldots + yx^{n-3} + x^{n-2}) + \ldots + a_1\Big),$$

тобто ділиться без залишку на $y - x$.

Тепер, нехай a, b, c — різні натуральні числа, для яких $f(a) = f(b) = f(c) = 2$. Припустимо, що існує натуральне y таке, що $f(y) = 3$, і розглянемо різниці

$$f(y) - f(a) = 3 - 2 = 1, \quad f(y) - f(b) = 3 - 2 = 1, \quad f(y) - f(c) = 3 - 2 = 1.$$

Крім того, $f(y) - f(a)$, $f(y) - f(b)$, $f(y) - f(c)$ діляться відповідно на $y - a$, $y - b$, $y - c$. Звідси випливає, що 1 ділиться на $y - a$, $y - b$ і $y - c$. Тому кожний з виразів $y - a$, $y - b$, $y - c$ дорівнює або 1 або -1. Отже, за принципом Діріхле знайдеться два, які рівні між собою. А це протирічить тому, що числа a, b, c — різні. □

2.11. Нехай елементами квадратної матриці порядку 14 є числа 0 та 1. Припустимо, що 58 елементів цієї матриці дорівнюють 1. Чи існує у цій матриці квадратна підматриця порядку 2, елементами якої є тільки 1? Під квадратною підматрицею порядку 2 розуміють матрицю порядку 2, складену з елементів вихідної матриці, які стоять на перетині обраних 2-х рядків та 2-х стовпців.

Доведення. Нехай задано квадратну матрицю $A_{14\times 14}$. Позначимо через a_i кількість пар рядків з 1 в i-му стовпці матриці A. Крім того, для квадратної матриці введемо число $P = \sum\limits_{i=1}^{14} a_i = a_1 + a_2 + \ldots + a_{14}$. Наприклад, для матриці

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$a_1 = C_3^2 = 3$, $a_2 = C_2^2 = 1$, $a_3 = 0$, $a_4 = C_4^2 = 6$, $a_5 = 0$, а отже, $P = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 3 + 1 + 0 + 6 + 0 = 10$ для цієї матриці.

Якщо P для заданої матриці A буде більше за кількість пар рядків матриці A (а їх кількість $C_{14}^2 = 91$), то за принципом Діріхле знайдеться принаймні два стовпці з одиницями в одних і тих самих рядках. Таким чином, існування підматриці вигляду $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ буде доведено.

Покажемо що для матриці $A_{14\times14}$, яка містить 58 одиниць: $P \geq 92$. Для цього розглянемо наступну процедуру: якщо якийсь i-ий стовпець матриці A містить m одиниць, а якийсь j-ий стовпець відповідно $n < m-1$ одиниць, то переставляючи одну одиницю з i-го в j-ий стовпець ми зменшуємо a_i на $m-1$ і збільшуємо a_j на n. Таким чином, P зменшується. Отже, найменше значення P буде, якщо всі стовпці матриці мають якомога рівне число одиниць. Для нашої матриці це буде тільки тоді, коли дванадцять стовпців міститимуть по 4 одиниці, і два стовпці по 5 одиниць, оскільки $58 = 12 \cdot 4 + 2 \cdot 5$. Тоді $a_i = C_4^2 = 6$, для $i = \overline{1, 12}$, і $a_i = C_5^2 = 10$ для $i = 13, 14$. Отже, $P = 12 \cdot 6 + 2 \cdot 10 = 92$. Для іншої комбінації одиниць в стовпцях: $P \geq 92$. $\square$

Задачі для самостійного розв'язання.

2.12. Баба-Яга та Кащей зібрали деяку кількість мухоморів. Кількість цяточок на мухоморах Баби-Яги в 13 разів більше, ніж на мухоморах Кащея, але після того, як Баба-Яга віддала Кащею свій мухомор з найменшим числом цяточок, на її мухоморах стало цяточок тільки у 8 разів більше, ніж у Кащея. Доведіть, що спочатку у Баба-Яги було не більше ніж 23 мухомори.

2.13. Довести, що в довільній компанії є принаймні дві людини, які мають однакову кількість спільних знайомих в цій компанії.

2.14. Дано 12 різних двозначних чисел. Показати, що серед них є принаймні два такі, що їх різниця є двозначним числом з однаковою цифрою десятків та одиниць.

2.15. Покажіть, що існує степінь числа 3, яка закінчується на 001.

2.16. Розглянемо послідовність $\{\sqrt{3}, 2\sqrt{3}, 3\sqrt{3}, \ldots\}$. Доведіть, що серед елементів цієї послідовності знайдеться елемент, матіса якого менша за 0.01.

2.17. Покажіть, що для будь-якого натурального числа n існує натуральне число, яке складається із п'ятірок та нулів, і без залишку ділиться n.

2.18. Всередині квадрата зі стороною 1 довільним чином розташовано 51 точку. Покажіть, що серед них завжди існує 3 точки, які можна накрити колом радіуса 1/7.

2.19. Натуральні числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 написані в довільному порядку вздовж кола. Довести, що серед них існує три поспіль написані числа, сума яких не менша за 17.

2.20. (*Задача Евкліда*) Для довільних взаємно простих натуральних чисел a, b існують два інших натуральних числа x та y такі, що $ax - by = 1$. Доведіть.

2.21. В квадраті, що складається зі 100 клітин, пофарбовані менше ніж 50 клітин. Довести, що знайдуться непофарбовані клітини, на які можна розмістити кісту доміно (покриває 2 клітини).

2.22. Клітини прямокутника 5×41 пофарбовано двома кольорами. Довести, що в прямокутнику можна обрати 3 рядка та 3 стовпця так, що всі 9 клітин, які утворяться на їх перетині, були одного кольору.

2.23. Всередині квадрата зі стороною 1 знаходиться декілька кіл, сума довжин яких дорівнює 10. Показати, що існує пряма, яка перетинає не менше чотирьох із заданих кіл.

2.24. В міжнародній конференції приймають учать 17 осіб. Кожен з них володіє не більше ніж трьома мовами і будь-які два учасники можуть спілкуватися між собою. Довести, що хоча б три учасники володіють однією мовою.

2.25. Нехай a_1, a_2, ..., a_n — перестановка чисел $1, 2, 3, \ldots, n$, де n — непарне. Довести, що добуток $(a_1 - 1)(a_2 - 2) \ldots (a_n - n)$ — парне число.

2.26. (*Теорема Ердеша-Секереша*) Нехай для $n \geq 1$, S — скінчена послідовність $n^2 + 1$ довільних дійсних чисел. Тоді S містить або зростаючу підпослідовність $n + 1$ чисел, або спадаючу підпослідовність $n + 1$ чисел з S.

3 Елементи теорії чисел

"Теорія чисел — королева математики."

німецький математик Карл Фрідріх Гаус (1777-1855)

Елементи теорії чисел охоплюють широкий клас задач, серед яких є задачі на подільність, задачі на зображення числових виразів у тій чи іншій формі, задачі на знаходження чисел, які задовольняють певну властивість, задачі щодо розв'язання алгебраїчних рівнянь у цілих (натуральних) числах та чимало інших.

У цьому розділі вибірково представлені деякі з таких задач.

Аудиторні завдання.

3.1. Знайти всі $n \in \mathbb{N}$, такі, що $n^2 + 1 \vdots n + 1$.

Розв'язання. Оскільки $n^2+1 = n(n+1)-(n-1)$, то з умови $n^2+1 \vdots n+1$ випливає, що $n-1 \vdots n+1$. Тому єдиний можливий розв'язок — це $n = 1$. □

3.2. Нехай $a^2 + b^2 \vdots 7$, $a, b \in \mathbb{Z}$. Довести, що $a \vdots 7$ та $b \vdots 7$.

Доведення. Квадрат числа, не кратного 7, дає остачу 1, 2 або 4 при діленні на 7. Зрозуміло, що остача при діленні суми — це остача від суми остач. Тому, якщо a не кратне 7 або b не кратне 7, то можливі остачі при діленні числа $a^2 + b^2$ на число 7 — це 1, 2, 3, 4, 5, 6. Серед остач немає 0, що протирічить умові $a^2 + b^2 \vdots 7$. Якщо ж одне з чисел a або b кратне 7, то і інше теж. □

3.3. Нехай $k, n \in \mathbb{N}$, причому k — непарне. Довести, що

$$k^{2^n} - 1 \vdots 2^{n+2}.$$

Доведення. Доведення проведемо методом математичної індукції. Нехай $n = 1$. Покажемо, що $k^2 - 1 \vdots 8$. Оскільки k — непарне, то $k^2 - 1 = (2s + 1)^2 - 1 = 4s(s+1) \vdots 8$. Тому при $n = 1$ твердження виконується. Нехай $k^{2^n} - 1 \vdots 2^{n+2}$. Тоді для деякого $t \in \mathbb{N}$ має місце рівність $k^{2^n} = 2^{n+2}t + 1$. Тому

$$k^{2^{n+1}} = (k^{2^n})^2 = 2^{2n+4}t^2 + 2^{n+3}t + 1,$$

звідки $(k^{2^{n+1}} - 1) \vdots 2^{n+3}$. □

3.4. Знайти всі $a \in \mathbb{N}$ такі, що $a^{10} + 1 \vdots 10$.

Розв'язання. Число a можна подати у вигляді $a = 10t+r$, де r — залишок при діленні a на 10. Використавши біном Ньютона легко показати, що

$$a^{10} + 1 \vdots 10 \quad \Leftrightarrow \quad r^{10} + 1 \vdots 10.$$

Лише $3^{10}+1 \vdots 10$ та $7^{10}+1 \vdots 10$. Тому $a \in \{10t+3, t=0,1,2,\ldots\} \cup \{10t+7, t=0,1,2,\ldots\}$. $\square$

3.5. Знайти всі прості числа, які одночасно є сумою та різницею двох простих чисел.

Розв'язання. Нехай r — шукане просте число. За умовою задачі $r=a+b$ та $r=c-d$, де числа a,b,c,d — прості. Оскільки $r=a+b$, то $r>2$, більше того, r — просте, а отже непарне. Тому $a=d=2$. Отже, $r=b+2=c-2$, де b,c — непарні прості числа. Тоді b,r,c — три послідовні непарні прості числа. Існує лише одна така трійка: 3, 5, 7. Для кожної іншої такої трійки одне із чисел кратне 3, а отже не просте. $\square$

3.6. Знайти всі p, для яких кожне з чисел

$$p,\ p+2,\ p+6,\ p+8,\ p+12,\ p+14$$

є простим.

Розв'язання. Єдине таке число $p=5$. Дійсно, нехай r — остача від ділення числа p на 5. Якщо $r=1$, то $p+14 \vdots 5$; якщо $r=2$, то $p+8 \vdots 5$; якщо $r=3$, то $p+12 \vdots 5$; якщо $r=4$, то $p+6 \vdots 5$. Це суперечить умові задачі. Отже $r=0$. $\square$

3.7. Знайти всі розв'язки в цілих числах рівняння

$$2x^3+xy-7=0.$$

Розв'язання. Перепишемо рівняння в наступному вигляді:

$$x(2x^2+y)=7.$$

Кожний доданок в лівій частині отриманої рівності є цілим числом, а тому $x=\pm1$, $x=\pm7$. Отже, розв'язками є пари $(1,5)$; $(7,-97)$; $(-1,-9)$; $(-7,-99)$. $\square$

3.8. Довести, що рівняння

$$x(x+1)=4y(y+1)$$

не має натуральних коренів.

Вказівка. Нехай $x(x+1)=4y(y+1)$. Тоді

$$3=(2(2y+1))^2-(2x+1)^2=(4y-2x+1)(4y+2x+3).$$

Для натуральних x та y число 3 не можна подати у вигляді такого добутку. Отримане протиріччя доводить твердження задачі. $\square$

3.9. При яких значеннях x та y число $\overline{xxyy}$ є квадратом натурального числа?

Розв'язання. Число $\overline{xxyy}$ можна записати наступним чином:

$$\overline{xxyy} = 1000x + 100x + 10y + y = 1100x + 11y = 11(100x + y).$$

Оскільки $\overline{xxyy}$ є квадратом натурального числа, то $100x + y$ має без залишку ділитися на 11, тобто існує $m \in \mathbb{N}$ таке, що тризначне число $\overline{x0y} \,\vdots\, 11$. Неважко зрозуміти, що існує єдине тризначне число вигляду $\overline{x0y}$, що ділиться на 11 — це число 704. Отже, $x = 7$, $y = 4$. Відповідь: $7744 = 88^2$ □

3.10. Довести, що $(n+1)^n - 1 \,\vdots\, n^2$, $n \in \mathbb{N}$.

Вказівка. Твердження випливає з наступного представлення

$$(n+1)^n = 1 + C_n^1 n + C_n^2 n^2 + \ldots + C_n^n n^n,$$

де $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, $0 \leq k \leq n$, $0! = 1$. □

3.11. Знайти середнє геометричне всіх дільників числа

$$1 \cdot (1+3) \cdot (1+3+5) \cdot \ldots \cdot (1+3+5+\ldots+2019).$$

Розв'язання. Скористаємося твердженням: *середнє геометричне всіх дільників натурального числа N дорівнює $\sqrt{N}$.* Дійсно, нехай d_1, d_2, ... , d_n — всі дільники числа N, впорядковані за зростанням. Тоді зрозуміло, що для будь-якого $i = \overline{1,n}$ маємо $d_i \cdot d_{n+1-i} = N$. Тому $\sqrt[n]{d_1 d_2 \ldots d_n} = \sqrt{N}$. В нашому випадку

$$\sqrt[n]{d_1 d_2 \ldots d_n} = \sqrt{1 \cdot (1+3) \cdot (1+3+5) \cdot \ldots \cdot (1+3+5+\ldots+2019)} =$$

$$= \sqrt{1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot \ldots \cdot 1010^2} = 1010!$$

□

3.12. Позначимо через $\sigma(k)$ суму всіх дільників натурального числа k. Довести, що для будь-якого $n \geq 3$ виконується нерівність

$$\frac{n^2}{2} < \sum_{k=1}^{n} \sigma(k) < n^2.$$

Розв'язання. Оскільки $\sigma(k) \geq k$, то

$$\sum_{k=1}^{n} \sigma(k) \geq 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n^2+n}{2} > \frac{n^2}{2},$$

що доводить ліву нерівність. Для доведення правої помітимо, що $\sum\limits_{k=1}^{n} \sigma(k) = \sum\limits_{l=1}^{n} \left[\frac{n}{l}\right] \cdot l$, де через $[\cdot]$ позначено цілу частину. Це випливає з того, що кожне число $l \in \{1, 2, \ldots, n\}$ є дільником рівно $\left[\frac{n}{l}\right]$ чисел від 1 до n. Оскільки для кожного $l \in \mathbb{N}$ виконується нерівність $n \geq \left[\frac{n}{l}\right] \cdot l$, причому при $l = n - 1$, $n \geq 3$ нерівність строга, то $n^2 > \sum\limits_{l=1}^{n} \left[\frac{n}{l}\right] \cdot l = \sum\limits_{k=1}^{n} \sigma(k)$. $\square$

Задачі для самостійного розв'язання.

3.13. Показати, що для будь-якого непарного натурального числа n існують n послідовних натуральних чисел, сума яких дорівнює n^2.

3.14. Показати, що рівняння

$$p^2 + q^2 = r^2 + s^2 + t^2$$

не має розв'язків в простих числах.

3.15. Довести, що число $\frac{1}{5}(2^{4n+2}+1)$ є складеним для всіх натуральних $n > 1$.

3.16. Знайти всі розв'язки рівняння в цілих числах

$$x^3 + (x+1)^3 + (x+2)^3 = (x+3)^3.$$

3.17. Довести, що чотиризначне число виду $\overline{abcd}$ ділиться без залишку на 99 тоді і тільки тоді, коли число $\overline{ab} + \overline{cd}$ без залишку ділиться на 99.

3.18. Довести, що число $11^{10} - 1$ без залишку ділиться на 100.

3.19. Чи може число, яке складається зі 100 одиниць, 100 нулів та 100 двійок, бути повним квадратом?

3.20. Знайдіть всі такі тризначні числа $\overline{abc}$, які в 12 разів більше за суму своїх цифр.

3.21. Доведіть, що сума квадратів п'яти послідовних цілих чисел не може бути повним квадратом.

3.22. Знайдіть всі пари чисел виду $\overline{1xy2}$ та $\overline{x12y}$ такі, що обидва числа без залишку діляться на 7.

3.23. Нехай для натуральних m та n число $6n + 11m \,\vdots\, 31$. Довести, що тоді $n + 7m \,\vdots\, 31$.

3.24. Відомо, що числа p та $8p^2 + 1$ — прості. Знайти всі можливі p.

3.25. Довести, що наступні рівняння не мають розв'язків у цілих числах:
а) $12x + 5 = y^2$; б) $15x^2 - 7y^2 = 9$;
в) $8x^3 - 13y^3 = 17$; г) $x^2 + y^2 = 2003$.

3.26. Спростіть вираз: $2\sqrt{3 + \sqrt{5 - \sqrt{13 + \sqrt{48}}}}$.

3.27. Довести, що для кожного $n \in \mathbb{N}$ існує $x \in \mathbb{N}$ такий, що кожний член послідовності

$$x + 1,\ x^x + 1,\ x^{x^x} + 1,\ x^{x^{x^x}} + 1,\ \ldots$$

ділиться на n.

4 Многочлени

Нагадаємо, що *многочленом* степеня n від змінної x називається вираз

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n,$$

де $a_0, a_1, \ldots, a_n$ — деякі дійсні числа. Будь-який многочлен як функція змінної x має дуже "привабливі" властивості: многочлен є неперервною нескінченно диференційовною функцією.

Серед задач на многочлени часто зустрічається задача про пошук коренів рівняння $P_n(x) = 0$ або встановлення співвідношень між ними (відомо, що це рівняння має рівно n коренів, серед яких можуть бути комплексно-спряжені). В таких задачах можна користуватись класичними твердженнями та алгоритмами, такими як теорема Безу, теорема Вієта, схема Горнера, алгоритм Евкліда тощо. Ми обмежимося лише формулюванням загальної теореми Вієта для зведеного ($a_0 = 1$) многочлена порядку n:

$$P_n(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n.$$

Теорема 4.1 (Вієта)**.** *Нехай c_1, c_2, ..., c_n — корені многочлена $P_n(x)$. Тоді*

$$\begin{cases} a_1 = -(c_1 + c_2 + \ldots + c_n) = -\sum\limits_{k=1}^{n} c_k; \\ a_2 = c_1c_2 + c_1c_3 + \ldots + c_1c_n + c_2c_3 + \ldots + c_2c_n + \ldots + c_{n-1}c_n = \sum\limits_{i \neq j} c_ic_j; \\ a_3 = -(c_1c_2c_3 + c_1c_2c_4 + \ldots + c_{n-2}c_{n-1}c_n) = -\sum\limits_{i \neq j \neq k \neq i} c_ic_jc_k; \\ \ldots \\ a_{n-1} = (-1)^{n-1}(c_1c_2\ldots c_{n-1} + c_1c_2\ldots c_{n-2}c_n + \ldots + c_2c_3\ldots c_n) \\ a_n = (-1)^n c_1c_2\ldots c_n. \end{cases}$$

Аудиторні завдання.

4.1. Довести, що для довільних відмінних від нуля чисел α, β корені x_1, x_2, x_3 многочлена

$$\alpha x^3 - \alpha x^2 + \beta x + \beta$$

задовольняють рівність $(x_1 + x_2 + x_3)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}\right) = -1$

Доведення. Згідно з теоремою Вієта для коренів x_1, x_2, x_3 многочлена $\alpha x^3 - \alpha x^2 + \beta x + \beta$ маємо

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1, \quad x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{\beta}{\alpha}, \quad x_1x_2x_3 = -\frac{\beta}{\alpha}.$$

Таким чином,

$$(x_1+x_2+x_3)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}\right)=(x_1+x_2+x_3)\frac{x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3}{x_1x_2x_3}=$$

$$=1\cdot\frac{\beta}{\alpha}\cdot\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)^{-1}=-1.$$

□

4.2. Відомо, що $a+b$ є коренем многочлена $p(x)=x^2+ax+b^2$ з дійсними коефіцієнтами. Знайдіть

$$a^{2020}+b^{2020}.$$

Розв'язання. За умовою

$$0=p(a+b)=(a+b)^2+a(a+b)+b^2=\frac{7}{4}(a+b)^2+\frac{1}{4}(a-b)^2,$$

звідки $a=b=0$, а тому $a^{2020}+b^{2020}=0$. □

4.3. Нехай a і b — два з чотирьох коренів многочлена x^4+x^3-1. Довести, що ab — корінь многочлена $x^6+x^4+x^3-x^2-1$.

Доведення. Нехай a,b,c,d — корені многочлена

$$P(x)=x^4+x^3-1=(x-a)(x-b)(x-c)(x-d).$$

За теоремою Вієта $abcd=-1$, тому

$$(ab)^6+(ab)^4+(ab)^3-(ab)^2-1=(ab)^3\left((ab)^3-\left(\frac{1}{ab}\right)^3+ab-\frac{1}{ab}+1\right)=$$

$$=(ab)^3\left((ab)^3+(cd)^3+ab+cd+1\right).$$

Доведемо, що $(ab)^3+(cd)^3+ab+cd+1=0$. Справді, із рівностей $P(a)=P(b)=0$ маємо, що $a^3=1/(a+1),b^3=1/(b+1)$, звідки отримаємо

$$(ab)^3=\frac{1}{(1+a)(1+b)}=\frac{(1+c)(1+d)}{P(-1)}=-(1+c)(1+d).$$

Аналогічно отримуємо, що $(cd)^3=-(1+a)(1+b)$. Таким чином, маємо

$$(ab)^3+(cd)^3+ab+cd+1=-(1+c)(1+d)-(1+a)(1+b)+ab+cd+1=$$

$$=-1-a-b-c-d=0,$$

оскільки за теоремою Вієта $a+b+c+d=-1$. □

4.4. Многочлен $P(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+1$ з невід'ємними коефіцієнтами має n дійсних коренів. Довести, що $P(2)\geq 3^n$.

Доведення. Оскільки всі коефіцієнти многочлена $P(x)$ невід'ємні, то жоден з його коренів $x_1, \dots, x_n$ не може бути додатнім. А отже, цей многочлен можна представити у вигляді $P(x) = (x + t_1) \dots (x + t_n)$, де $t_i = -x_i, i = 1, 2, \dots, n$. Використавши нерівність між середнім арифметичним і середнім геометричним, отримаємо нерівність

$$2 + t_i = 1 + 1 + t_i \geq 3(1 \cdot 1 \cdot t_i)^{\frac{1}{3}} = 3(t_i)^{\frac{1}{3}}, i = 1, 2, \dots, n.$$

Враховуючи, що за теоремою Вієта

$$t_1 t_2 \dots t_n = 1,$$

отримаємо

$$P(2) = (2 + t_1) \dots (2 + t_n) \geq 3^n (t_1 t_2 \dots t_n)^{\frac{1}{3}} = 3^n.$$

□

4.5. Довести, що якщо многочлен $P(x)$ степеня n з дійсними коефіцієнтами не має дійсних коренів, то многочлен

$$Q(x) = P(x) + \alpha P'(x) + \ldots + \alpha^n P^{(n)}(x)$$

при довільному значенні $\alpha \in \mathbb{R}$ теж не має дійсних коренів.

Доведення. Маємо

$$Q'(x) = P'(x) + \alpha P''(x) + \ldots + \alpha^{n-1} P^{(n)}(x).$$

Тому $Q(x) - \alpha Q'(x) = P(x)$. Без обмеження загальності будемо вважати, що старший коефіцієнт многочлена $P(x)$ додатній. Оскільки цей многочлен не має дійсних коренів, то його степінь n — парне число і для всіх $x \in \mathbb{R}$ виконується нерівність $P(x) > 0$. Припустимо, що многочлен $Q(x)$ має дійсні корені $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_k$. Зауважимо, що старший коефіцієнт многочлена $Q(x)$ дорівнює старшому коефіцієнту многочлена $P(x)$, а отже, є додатнім.

Якщо $\alpha \geq 0$, то $\lim\limits_{x \to +\infty} Q(x) = +\infty$, звідки маємо $Q(x) > 0$ при $x > x_k$. Тому $Q'(x_k) \geq 0$ і $P(x_k) = Q(x_k) - \alpha Q'(x_k) \leq 0$.

Якщо ж $\alpha < 0$, то при $x < x_1$ маємо $Q(x) > 0$. Тому $Q'(x_1) \leq 0$ і $P(x_1) = Q(x_1) - \alpha Q'(x_1) \leq 0$.

В обох випадках ми отримали суперечність з нерівністю $P(x) > 0$. Отже, многочлен $Q(x)$ не має дійсних коренів. □

4.6. Знайти всі многочлени $P(x)$, для яких $P(P'(x)) = P'(P(x)) \equiv 1$.

Доведення. З умови задачі випливає, що $P'(t) \equiv 1$ для всіх $t \in E$ (E — область значень многочлена $P(x)$). Проте $P' \neq 0$, звідси $P(x)$ не є сталим і $E = \mathbb{R}$.

Тоді умова може бути переписана у вигляді $P'(t) \equiv 1, \forall t \in \mathbb{R}, P(P'(x)) = P(1) = 1$. Звідси, $P(x) = P(1) + \int\limits_1^x P'(t)dt = 1 + \int\limits_1^x dt = x$. $\square$

4.7. При якому найменшому значенні $A^2 + B^2, A, B \in \mathbb{R}$ рівняння

$$999x^4 - Ax^3 - Bx^2 - Ax + 999 = 0$$

має дійсні корені?

Доведення. Покажемо, що якщо x — дійсний розв'язок рівняння, то $A^2 + B^2 \geq \frac{1998^2}{5}$. У випадку рівності при значеннях $A = \frac{3996}{5}, B = \frac{1998}{5}$ коренем рівняння є $x = 1$.

Нехай $x \in \mathbb{R}$ такий, що

$$999x^4 - Ax^3 - Bx^2 - Ax + 999 = 0.$$

Очевидно, що $x \neq 0$, тому

$$999\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - A\left(x + \frac{1}{x}\right) - B = 0.$$

Виконавши заміну $t = x + \frac{1}{x}$, отримаємо

$$999(t^2 - 2) - At - B = 0$$

для будь якого t такого, що $|t| \geq 2$. Розглянемо (A, B) як координати довільної точки M в прямокутній декартовій системі координат. Тоді $A^2 + B^2$ — квадрат довжини радіус-вектора точки M. А рівняння $At + B - 999(t^2 - 2) = 0$ означає, що для довільного t такого, що $|t| \geq 2$, точка M належить деякій прямій l_t. Нормальне рівняння прямої l_t має вигляд

$$l_t : \frac{At + B - 999(t^2 - 2)}{\sqrt{t^2 + 1}} = 0,$$

звідки маємо, що найкоротша відстань p від прямої до початку координат дорівнює $p = \frac{999(t^2-2)}{\sqrt{t^2+1}}$. З іншого боку, якщо $A^2 + B^2 \leq p^2$, то точка M не може належати прямій l_t, отже рівняння $At + B - 999(t^2 - 2) = 0$ не має розв'язків.

Залишилося знайти

$$\min_{|t| \geq 2} p^2 = 999^2 \min_{|t| \geq 2} \frac{(t^2 - 2)^2}{t^2 + 1} = \left|t^2 + 1 = y\right| =$$

$$= 999^2 \min_{y \geq 5} \frac{(y - 3)^2}{y} = \frac{4}{5} 999^2 = \frac{1998^2}{5}.$$

Останні переходи мають місце, оскільки функція $\phi(y) = \frac{(y-3)^2}{y}$ монотонно зростає на $[5, +\infty)$ (адже $\phi'(y) = 1 - \frac{9}{y^2} \geq 1 - \frac{9}{25} > 0$) і $\phi(5) = \frac{4}{5}$. $\square$

Задачі для самостійного розв'язання.

4.8. Дано многочлен $P(x) = (2020x - 2019)^{2020}$. Не розкриваючи дужок за формулою бінома Ньютона, знайти суму всіх коефіцієнтів многочлена.

4.9. Довести, що для коренів x_1, x_2 многочлена

$$x^2 + px - \frac{1}{2p^2},$$

де $p \in \mathbb{R}, p \neq 0$ виконується нерівність

$$x_1^4 + x_2^4 \geq 2 + \sqrt{2}.$$

4.10. Знайти всі многочлени $P(x)$ такі, що $P(0) = 0$ та $P(n^2 + 1) = P^2(n) + 1$ для будь-якого цілого n.

4.11. Числа a, b, c є трьома з чотирьох коренів многочлена

$$x^4 - ax^3 - bx + c.$$

Знайдіть всі такі многочлени.

4.12. Нехай один із коренів многочлена

$$P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c,$$

де $a, b, c \in \mathbb{Z}$, рівний добутку двох інших. Довести, що число $2P(-1)$ ділиться на число $P(1) + P(-1) - 2(1 + P(0))$.

4.13. Многочлен

$$ax^n - ax^{n-1} + c_2x^{n-2} + ... + c_{n-2}x^2 + n^2bx - b$$

має рівно n додатних коренів. Доведіть, що всі вони рівні між собою.

4.14. Довести, що для довільного значення $n \in \mathbb{N}$ многочлен

$$f_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!}$$

не може мати більше одного дійсного кореня.

4.15. Для кожного невід'ємного цілого n многочлен $P_n(x)$ визначається тотожністю

$$P_n\left(t + \frac{1}{t}\right) = t^n + \frac{1}{t^n}.$$

Чи буде послідовність $P_0(1), P_1(1), ..., P_n(1), ...$
а) обмеженою (якщо так, знайти межі, якщо ні - довести це);
б) періодичною (якщо так, знайти період, якщо ні - довести це)?

4.16. Про многочлен

$$P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + 1$$

відомо, що
а) всі його коефіцієнти невід'ємні;
б) всі його корені дійсні;
в) $P(n-1) = n^n$.

Знайти $a_1 + \ldots + a_{n-1}$.

5 Функціональні рівняння-1. Метод підстановки

Функціональним називається таке рівняння, в якому шуканими є деякі функції, що пов'язані з елементарними за допомогою операцій додавання, множення, композиції. Розв'язати функціональне рівняння означає знайти сім'ю функцій, кожна з яких задовольняє рівняння для довільних значень змінних із його області визначення.

У цьому розділі розглянемо так званий *метод підстановки*, який дає можливість розв'язувати досить широкий клас функціональних рівнянь без суттєвих обмежень на шукані функції. Суть методу полягає в тому, що підставляючи замість змінних деякі нові функції від цих змінних, можливо, неодноразово, отримуємо нові співвідношення між змінними та невідомою функцією. Розв'язуючи ці співвідношення, виділяємо функцію в явному вигляді.

Аудиторні завдання.

5.1. Знайти всі функції $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, для яких при будь-яких дійсних x, y, z виконується рівність

$$f(x) f(y) f(z) - f(xyz) = xy + xz + yz + x + y + z.$$

Розв'язання. Поклавши $x = y = z = 1$, одержимо

$$f^3(1) - f(1) = 6.$$

Це рівняння має єдиний дійсний корінь $f(1) = 2$. Покладаючи $y = z = 1$ у функціональному рівнянні, маємо

$$f(x) f(1) f(1) - f(x) = x + x + 1 + x + 1 + 1,$$

звідки $f(x) = x+1$. Перевірка показує, що функція $f(x) = x+1$ задовольняє вихідне функціональне рівняння, а тому є його єдиним розв'язком. □

5.2. Знайти всі функції $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, які при будь-яких дійсних x, y задовольняють рівняння

$$f(x) f(y) - f(xy) = xy + x + y - 1.$$

Розв'язання.

$$x = y = 1: \quad f^2(1) - f(1) = 2 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} f(1) = 2, \\ f(1) = -1. \end{array} \right.$$
$$y = 1: \quad f(x)(f(1) - 1) = 2x.$$

При $f(1) = 2$ з останньої рівності випливає, що $f(x) = 2x$. При $f(1) = -1$ матимемо $f(x) = -x$. Проте перевірка показує, що жодна з цих функцій не задовольняє даному функціональному рівнянню. □

5.3. Знайти всі функції $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, для яких при будь-яких дійсних x, y виконується рівність

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)\cos y.$$

Розв'язання.

$$\begin{array}{ll} x = 0, y = t: & f(t) + f(-t) = 2f(0)\cos t, \\ x = t + \frac{\pi}{2}, y = \frac{\pi}{2}: & f(t+\pi) + f(t) = 0, \\ x = \frac{\pi}{2}, y = t + \frac{\pi}{2}: & f(t+\pi) + f(-t) = -2f\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin t. \end{array}$$

Розв'язавши систему, одержимо

$$f(t) = f(0)\cos t + f\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin t.$$

Позначимо

$$f(0) = a, \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = b.$$

Перевірка показує, всі що функції $f(t) = a\cos t + b\sin t, a, b \in \mathbb{R}$ дійсно є розв'язками функціонального рівняння. □

5.4. Знайти всі неперервні функції $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, для яких

$$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{1\} \quad (x-1) f\left(\frac{x+1}{x-1}\right) - f(x) = x.$$

Розв'язання. Нехай $y = \frac{x+1}{x-1}$, тоді $x = \frac{y+1}{y-1}$, і рівняння набуває вигляд

$$\frac{2}{y-1} f(y) - f\left(\frac{y+1}{y-1}\right) = \frac{y+1}{y-1}.$$

Таким чином, для знаходження функції f маємо систему

$$\begin{cases} (x-1) f\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right) - f(x) = x, \\ \dfrac{2}{x-1} f(x) - f\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right) = \dfrac{x+1}{x-1}. \end{cases}$$

Помноживши обидві частини другого рівняння $x - 1 \neq 0$ і додавши до першого рівняння, отримаємо

$$f(x) = 2x + 1, \quad x \neq 1.$$

Оскільки шукана функція має бути неперервною, остаточно маємо

$$f(x) = 2x + 1, \quad x \in \mathbb{R}.$$

□

5.5. Знайти всі неперервні на [0; 1] функції f, для яких

$$\forall x \in [0;1] \quad 2f(x) = f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right).$$

Розв'язання. Оскільки шукана функція f має бути неперервною, то

$$\exists x_0, x_1 \in [0;1]: \quad \min_{[0;1]} f = f(x_0) = m, \quad \max_{[0;\,1]} f = f(x_1) = M.$$

Тоді

$$f\left(\frac{x_0}{2}\right) = 2f(x_0) - f\left(\frac{x_0+1}{2}\right) = 2m - f\left(\frac{x_0+1}{2}\right) \leq 2m - m = m,$$

звідки випливає, що

$$f\left(\frac{x_0}{2}\right) = m.$$

Повторюючи ці міркування, одержимо

$$f\left(\frac{x_0}{4}\right) = m, \ \ldots, \ f\left(\frac{x_0}{2^n}\right) = m, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Аналогічно

$$f\left(\frac{x_1}{2^n}\right) = M, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Таким чином,

$$f(0) = \lim_{n\to\infty} f\left(\frac{x_0}{2^n}\right) = m,$$

$$f(0) = \lim_{n\to\infty} f\left(\frac{x_1}{2^n}\right) = M.$$

Отже, $m = M$, що означає, що шукана функція має бути константою. Очевидно, що постійні функції задовольняють умову задачі. □

5.6. На інтервалі $(-1;1)$ знайти всі диференційовні розв'язки функціонального рівняння

$$f(x) + f(y) = f\left(\frac{x+y}{1+xy}\right).$$

Розв'язання.

$$y = 0: \quad f(x) + f(0) = f(x) \quad \Rightarrow \quad f(0) = 0.$$
$$y = -x: \quad f(x) + f(-x) = f(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad f(-x) = -f(x).$$

Таким чином, шукана функція має бути непарною.

Щоб знайти похідну від цієї функції, розглянемо вираз

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)+f(-x)}{\Delta x}=\frac{1}{\Delta x}\cdot f\left(\frac{\Delta x}{1-x^2-x\Delta x}\right).$$

Оскільки

$$\frac{\Delta x}{1-x^2-x\Delta x}\underset{\Delta x\to 0}{\sim}\frac{\Delta x}{1-x^2}$$

та

$$f\left(\frac{\Delta x}{1-x^2-x\Delta x}\right)=f(0)+f'(0)\cdot\frac{\Delta x}{1-x^2-x\Delta x}+o\left(\frac{\Delta x}{1-x^2-x\Delta x}\right)=$$

$$=f'(0)\cdot\frac{\Delta x}{1-x^2-x\Delta x}+o(\Delta x)\,,\quad \Delta x\to 0,$$

то

$$f\left(\frac{\Delta x}{1-x^2-x\Delta x}\right)\underset{\Delta x\to 0}{\sim}\frac{f'(0)}{1-x^2}\Delta x.$$

Тому

$$f'(x)=\frac{f'(0)}{1-x^2}.$$

Позначимо $C_1=f'(0)$. Тоді

$$f(x)=f(0)+\int\limits_0^x\frac{C_1}{1-t^2}\,dt=\frac{C_1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=C\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right),\quad C=\frac{C_1}{2}.$$

□

5.7. Знайдіть всі функції $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, які задовольняють рівняння:

$$f\Big(\max\{x,y\}\Big)=\max\{f(x),f(y)\}.$$

Розв'язання. Умова рівносильна тому, що для $x\geq y$

$$f(x)\geq f(y),$$

тобто тому, що функція неспадна.

Відповідь: будь-яка неспадна функція. □

Задачі для самостійного розв'язання.

5.8. Знайти всі функції $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, для яких виконується рівність

$$3f(y) - 2f(x - y) + f(x + y) = 12y - 2x + 2.$$

5.9. На числовій прямій знайти всі розв'язки функціонального рівняння

$$f(x) + f(y) = f\left(\frac{x + y}{1 + xy}\right).$$

5.10. Знайти всі функції $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, для яких виконується рівність

$$f(x - f(y)) = 1 - x - y.$$

5.11. Знайти всі функції $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, для яких виконується рівність

$$f(x + y) - f(x - y) = 2f(y)\cos x.$$

5.12. Знайти всі функції $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, для яких виконується рівність

$$f(xy) = (f(x))^y.$$

5.13. Знайти всі функції $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, для яких виконується рівність

$$f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = 3x.$$

5.14. Знайти всі функції $f : \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{3}\} \to \mathbb{R}$, для яких виконується рівність

$$f(x) + xf\left(\frac{x + 1}{3x - 1}\right) = 1.$$

5.15. Знайти всі функції $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, для яких виконується рівність

$$2f(x) + f(1 - x) = 3 - xf(1).$$

5.16. Знайти всі функції $f : \mathbb{R} \setminus \{-5; -\frac{1}{3}; 0; \frac{3}{5}; 1; \frac{5}{3}; 2\} \to \mathbb{R}$, для яких виконується рівність

$$f\left(\frac{x}{x - 2}\right) - \frac{x + 3}{2} f\left(\frac{x + 3}{-3x + 5}\right) = \frac{x^2 - 2x - 2}{x}.$$

6 Функціональні рівняння-2. Рівняння Коші

Метод Коші, названий на честь французького математика Огюстена Луї Коші (1789-1857), полягає в тому, що розв'язок функціонального рівняння знаходиться за допомогою спеціальних підстановок: спочатку для натуральних значень аргументу, потім — раціональних, потім граничним переходом — для додатних дійсних x і, нарешті, розповсюджується на всі дійсні значення аргументу. Детально розглянемо метод Коші на прикладі розв'язання класичного функціонального рівняння, яке носить назву рівняння Коші (див. задачу 6.1).

Аудиторні завдання.

Знайти всі неперервні функції $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, що для будь-яких $x, y \in \mathbb{R}$ виконується рівність

6.1. (*Рівняння Коші*) $f(x+y) = f(x) + f(y)$.

Розв'язання. Спочатку зробимо підстановку $y = -x$. Отримаємо, що $f(-x) = -f(x)$, тобто функція f є непарною. Тому достатньо встановити вигляд функції для невід'ємних значень аргументу.

Зауважимо, що методом математичної індукції можна довести, що $\forall m \geq 1, \forall x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}$

$$f(x_1 + \ldots + x_m) = f(x_1) + \ldots + f(x_m). \tag{6.1}$$

Поклавши в останньому співвідношенні $x_1 = x_2 = ... = x_m = x$, отримаємо для $m \in \mathbb{N}$:

$$f(mx) = mf(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

звідки при $x = 1$, поклавши $f(1) = c = const$, маємо

$$f(m) = cm, \quad \text{для всіх} \quad m \in \mathbb{N}.$$

Таким чином, ми встановили вигляд функції для натурального аргументу. Це вже дає нам припущення про вигляд функції для всіх інших $x \in \mathbb{R}$.

Далі розглянемо довільне невід'ємне раціональне число $x = \frac{m}{n}$, де $n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N} \bigcup \{0\}$, тобто підставимо $x_1 = x_2 = ... = x_m = \frac{1}{n}$ у співвідношення (6.1):

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = f\Big(\underbrace{\frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{n}}_{\text{m доданків}}\Big) = mf\left(\frac{1}{n}\right).$$

Також

$$f(1) = f\Big(\underbrace{\frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{n}}_{\text{n доданків}}\Big) = nf\left(\frac{1}{n}\right),$$

тобто, $f\left(\frac{1}{n}\right) = f(1)\cdot\frac{1}{n} = c\cdot\frac{1}{n}$. Отже, $f\left(\frac{m}{n}\right) = c\cdot\frac{m}{n}$. Тобто, для всіх невід'ємних раціональних x $f(x) = cx$.

Нарешті, нехай r — довільне дійсне число. З курсу математичного аналізу відомо, що *множина раціональних чисел є щільною в множині дійсних чисел*, тобто для будь-якого $r \in \mathbb{R}$ існує послідовність раціональних чисел $(q_n,\, n \geq 1)$ така, що $r = \lim\limits_{n\to\infty} q_n$.

Тому, користуючись неперервністю функції f, можна записати:

$$f(r) = f(\lim_{n\to\infty} q_n) = \lim_{n\to\infty} f(q_n) = \lim_{n\to\infty} cq_n = c\lim_{n\to\infty} q_n = cr.$$

Таким чином,

$$f(x) = cx, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Безпосередньою перевіркою можна переконатися, що всі лінійні функції такого виду задовольняють рівняння Коші. □

Зауважимо, що існує певний клас функціональних рівнянь, які можна розв'язувати методом Коші, або вдається звести задане рівняння до рівняння Коші і скористатися результатом задачі 6.1.

6.2. $f(xy) = f(x) + f(y)$, тут $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$.

Розв'язання. Спочатку зробимо підстановки $x = y = t$ та $x = y = -t$. Отримаємо, що функція f є парною. Знайдемо вигляд шуканої функції для невід'ємних значень аргументу. Розглянемо функцію $g(t) = f(e^t)$. Маємо

$$g(x + y) = f(e^{x+y}) = f(e^x e^y) = f(e^x) + f(e^y) = g(x) + g(y).$$

Маємо, що $g(x) = cx, c \in \mathbb{R}$. Враховуючи парність функції f, отримаємо $f(x) = c\ln|x|$. □

6.3. $f(x + y) = f(x)f(y)$.

Розв'язання. Зробимо підстановку $x = y = \frac{t}{2}$. Маємо

$$f(t) = f^2\left(\frac{t}{2}\right) \geq 0.$$

Якщо існує x^* такий, що $f(x^*) = 0$, то для всіх x $f(x) = 0$. Тобто, серед розв'язків є функція $f \equiv 0$ та деякі інші строго додатні функції. Знайдемо їх вигляд. Розглянемо функцію $g(t) = \ln f(t)$. Маємо

$$g(x + y) = \ln f(x + y) = \ln f(x)f(y) = \ln f(x) + \ln f(y) = g(x) + g(y).$$

Тобто, $g(x) = cx, c \in \mathbb{R}$. Отже, $f(x) = e^{cx}$ та $f \equiv 0$ є розв'язками рівняння. □

6.4. $f(x + y) = f(x) + f(y) + f(x)f(y)$.

Розв'язання. Перетворимо задане рівняння

$$f(x+y)+1=(f(x)+1)(f(y)+1).$$

Тоді функція $g(x)=f(x)+1$ задовольняє рівняння

$$g(x+y)=g(x)g(y).$$

З попередньої задачі маємо, що $g(x)=e^{cx}$ або $g\equiv 0$. Отже, $f(x)=e^{cx}-1, c\in\mathbb{R}$ або $f\equiv -1$. □

6.5. $f(\sqrt{x^2+y^2})=f(x)+f(y), f(1)=1.$

Розв'язання. Розглянемо підстановки

$$x=y=0 \quad\Rightarrow\quad f(0)=0,$$

$$x=-t, y=0 \quad\Rightarrow\quad f \text{ — парна функція.}$$

Знайдемо вигляд шуканої функції для невід'ємних значень аргументу. Розглянемо функцію $g(x)=f(\sqrt{x}), x\geq 0$. Маємо

$$g(x+y)=f(\sqrt{x+y})=f\left(\sqrt{(\sqrt{x})^2+(\sqrt{y})^2}\right)=f(\sqrt{x})+f(\sqrt{y})=$$
$$=g(x)+g(y).$$

Тобто, $g(x)=cx$ для деякого $c\in\mathbb{R}$. Оскільки $g(1)=f(\sqrt{1})=f(1)=1$, то $g(x)=x$. Отже, $f(x)=x^2$. □

6.6. Знайти всі неперервні функції $f,g,h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, для яких

$$\forall x,y\in\mathbb{R}\quad f\left(\sin^2 x+\cos^2 y\right)=g\left(\cos^2 x\right)h\left(\sin^2 y\right).$$

Розв'язання. Одразу зауважимо, що умова задачі не накладає жодних обмежень на поведінку функцій f,g,h поза відрізком $[0;1]$. Тому достатньо знайти такі функції на цьому відрізку, а потім у будь-який спосіб неперервно продовжити їх на всю числову пряму. Далі ми будемо завжди неявно припускати, що область визначення всіх функцій — відрізок $[0;1]$.

Розглянемо спочатку найпростіший випадок, коли $f\equiv 0$. Оскільки функції g та h у правій частині рівняння мають різні аргументи, то за необхідністю одна з них тотожно дорівнює нулеві, а інша є довільною неперервною функцією.

Нехай тепер $f\not\equiv 0$. Поклавши $x=0$, одержимо

$$f\left(\cos^2 y\right)=g\left(1\right)h\left(\sin^2 y\right).$$

Якщо $g\left(1\right)=0$, то ми знову приходимо до випадку, коли $f\equiv 0$. Інакше позначимо $C_1=g^{-1}\left(1\right)$ і одержимо

$$h\left(\sin^2 y\right)=C_1 f\left(\cos^2 y\right).$$

Аналогічно, покладаючи $y = \frac{\pi}{2}$ та $C_2 = h^{-1}(1)$, одержуємо
$$g\left(\cos^2 x\right) = C_2 f\left(\sin^2 x\right).$$
Тоді
$$f\left(\sin^2 x + \cos^2 y\right) = C_1 C_2 f\left(\sin^2 x\right) f\left(\cos^2 y\right).$$
Після заміни
$$s = \sin^2 x, \quad t = \cos^2 y, \quad w(\cdot) = C_1 C_2 f(\cdot)$$
одержимо
$$w(s+t) = w(s)\, w(t).$$
Із задачі 6.3 маємо
$$w(t) = e^{ct}, \quad c \in \mathbb{R}.$$
Звідси маємо, що
$$\begin{aligned} f(t) &= C_1^{-1} C_2^{-1} e^{ct}, \\ g(t) &= C_2 f(1-t) = C_1^{-1} e^{c-ct}, \\ h(t) &= C_1 f(1-t) = C_2^{-1} e^{c-ct}. \end{aligned}$$

Отже, на відрізку $[0;1]$ є такі розв'язки:

1. $f \equiv g \equiv 0$, h — довільна неперервна функція;
2. $f \equiv h \equiv 0$, g — довільна неперервна функція;
3. $f(t) = abe^{ct}, \quad g(t) = ae^{c-ct}, \quad h(t) = be^{c-ct}, \quad a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad c \in \mathbb{R}.$

Усі розв'язки на всю числову вісь можна одержати неперервним продовженням цих функцій. $\square$

Задачі для самостійного розв'язання.

Знайти всі неперервні функції $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, що для будь-яких $x, y \in \mathbb{R}$ виконується рівність

6.7. $f(xy) = f(x)f(y)$.

6.8. $f(x+y) = f(x) + f(y) + xy$.

6.9. $f(\sqrt{x^2+y^2+1}) = f(x) + f(y)$.

6.10. $f(x+y) + f(x-y) = 4\sqrt{f(x)f(y)}$.

6.11. $f(x+y) = \dfrac{f(x)f(y)}{f(x)+f(y)}$, тут $f : (0; +\infty) \to \mathbb{R}$.

6.12. $f(x+y) = \dfrac{f(x)+f(y)+2f(x)f(y)}{1-f(x)f(y)}$.

6.13. $f(x+y) = f(x)f(y) - \sqrt{1-f^2(x)} \cdot \sqrt{1-f^2(y)}$.

6.14. $f(xy) = f(x)f(y)$, тут $f : (0; +\infty) \to \mathbb{R}$.

6.15. $f(x+y) = (f(x))^{\ln f(y)}$, тут $f : (0; +\infty) \to \mathbb{R}$.

6.16. $f\left(\dfrac{1}{x+y}\right) = f\left(\dfrac{1}{x}\right) + f\left(\dfrac{1}{y}\right)$, тут $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$, $x + y \neq 0$.

6.17. Знайти всі неперервні функції $f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, для яких для всіх x, y таких, що різниця $y - x$ є раціональним числом, різниця $f(y) - f(x)$ теж є раціональною.

6.18. Знайти всі неперервні функції $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, для яких

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad f(x+y) = g(x)\, h(y).$$

7 Границі числових послідовностей-1

Тема "Границя числової послідовності", яка вивчається однією з перших у курсі математичного аналізу, по суті відкриває двері в безмежний простір диференціального та інтегрального числення.

В цьому розділі розглянуті задачі на обчислення границь числових послідовностей, які виходять за межі стандартного курсу математичного аналізу для технічних спеціальностей. При цьому, задачі, наведені у цьому розділі, вимагають від студентів знання лише класичних базових тверджень з цієї теми.

Аудиторні завдання.

7.1. Послідовність $(a_n, n \geq 1)$ додатних чисел така, що $a_n + a_n^{-1} \to 2$, $n \to \infty$. Довести, що $a_n \to 1$, $n \to \infty$.

Доведення. Перепишемо співвідношення $a_n + a_n^{-1} \to 2$, $n \to \infty$, наступним чином:

$$\frac{(a_n - 1)^2}{a_n} \to 0, \quad n \to \infty,$$

звідки випливає, що послідовність $\left(\frac{(a_n-1)^2}{a_n}, n \geq 1\right)$ є нескінченно малою.

Зауважимо також, що послідовність $(a_n, n \geq 1)$ є обмеженою, інакше вираз $a_n + a_n^{-1}$ міг би приймати як завгодно великі значення, що протирічить тому, що $a_n + a_n^{-1} \to 2$, $n \to \infty$. Тому

$$(a_n - 1)^2 = \frac{(a_n - 1)^2}{a_n} \cdot a_n \to 0,$$

відповідно до теореми про те, що добуток нескінченно малої послідовності на обмежену є нескінченно малою послідовністю. □

7.2. Довести, що послідовність $(a_n, n \geq 1)$ має границю, якщо

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{4}\right)\left(1 + \frac{1}{8}\right) \ldots \left(1 + \frac{1}{2^n}\right), \quad n \geq 2.$$

Розв'язання. Скористаємося теоремою Вейєрштрасса, за якою монотонна та обмежена числова послідовність має границю. Зауважимо, що в задачі не вимагається знайти цю границю.

Розглянемо

$$\ln a_n = \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{4}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{8}\right) + \ldots + \ln\left(1 + \frac{1}{2^n}\right).$$

Оскільки для будь-якого $x > -1$ виконується нерівність $\ln(1+x) \le x$, то

$$\ln a_n \le \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^n} = \frac{\frac{1}{2}(1 - \frac{1}{2^n})}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^n} < 1, \quad n \ge 1.$$

Тому $0 < a_n < e$, для всіх $n \ge 1$, тобто послідовність є обмеженою. Покажемо, що вона монотонно зростає. Дійсно,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right) > 1,$$

тобто $a_{n+1} > a_n$, для всіх $n \ge 1$.

Таким чином, за теоремою Вейєрштрасса про монотонну та обмежену послідовність існує $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$. □

В деяких задачах на знаходження границі числової послідовності спочатку потрібно спростити формулу загального члену послідовності. Розглянемо приклади.

7.3. Знайти границю послідовності $(a_n, n \ge 1)$:

а) $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{(\sqrt{k} + \sqrt{k+1})\sqrt{k(k+1)}}, \quad n \ge 1;$

б) $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} k2^{-k}, \quad n \ge 1;$

в) $a_n = \dfrac{2^3 - 1}{2^3 + 1} \cdot \dfrac{3^3 - 1}{3^3 + 1} \cdot \ldots \cdot \dfrac{n^3 - 1}{n^3 + 1}, \quad n \ge 2.$

Розв'язання. а) Оскільки

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(\sqrt{k} + \sqrt{k+1})\sqrt{k(k+1)}} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{(\sqrt{k} - \sqrt{k+1})}{(\sqrt{k} + \sqrt{k+1})(\sqrt{k} - \sqrt{k+1})\sqrt{k(k+1)}} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{(\sqrt{k} - \sqrt{k+1})}{(k - (k+1))\sqrt{k(k+1)}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(\sqrt{k+1} - \sqrt{k})}{\sqrt{k(k+1)}} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}\right) =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}}\right) + \ldots +$$

$$+ \left(\frac{1}{\sqrt{n-1}} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) =$$

$$= 1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}}, \quad n \geq 1,$$

то

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) = 1.$$

б) Оскільки

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} k2^{-k} = \frac{1}{2} + 2\cdot\frac{1}{4} + 3\cdot\frac{1}{8} + \ldots + (n-1)\cdot\frac{1}{2^{n-1}} + n\cdot\frac{1}{2^n} =$$

$$= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n}\right) + \ldots +$$
$$+ \left(\frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n}\right) + \left(\frac{1}{2^n}\right) =$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)}{1-\frac{1}{2}} + \frac{\frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right)}{1-\frac{1}{2}} + \frac{\frac{1}{8}\left(1 - \frac{1}{2^{n-2}}\right)}{1-\frac{1}{2}} + \ldots \frac{\frac{1}{2^{n-1}}\left(1 - \frac{1}{2^2}\right)}{1-\frac{1}{2}} + \frac{\frac{1}{2^n}\left(1 - \frac{1}{2^1}\right)}{1-\frac{1}{2}} =$$

$$= 2\left(\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2^{n+1}}\right) + \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{2^{n+1}}\right) + \ldots +\right.$$
$$\left. + \left(\frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{2^{n+1}}\right) + \left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n+1}}\right)\right) =$$

$$= 2\left(\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n}\right) - n\cdot\frac{1}{2^{n+1}}\right) =$$

$$= 2\left(\frac{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)}{1-\frac{1}{2}} - n\cdot\frac{1}{2^{n+1}}\right) = 2 - \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{n}{2^n}, \quad n \geq 1,$$

то

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(2 - \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{n}{2^n}\right) = 2.$$

в) Оскільки

$$\frac{2^3-1}{2^3+1}\cdot\frac{3^3-1}{3^3+1}\cdot\ldots\cdot\frac{n^3-1}{n^3+1} =$$

$$= \frac{(2-1)(4+2+1)}{(2+1)(4-2+1)}\cdot\frac{(3-1)(9+3+1)}{(3+1)(9-3+1)}\cdot\frac{(4-1)(16+4+1)}{(4+1)(16-4+1)}\cdot\ldots\cdot$$
$$\cdot\frac{((n-1)-1)((n-1)^2+n-1+1)}{((n-1)+1)((n-1)^2-(n-1)+1)}\cdot\frac{(n-1)(n^2+n+1)}{(n+1)(n^2-n+1)} =$$

$$= \frac{1\cdot 7}{3\cdot 3}\cdot\frac{2\cdot 13}{4\cdot 7}\cdot\frac{3\cdot 21}{5\cdot 13}\cdot\frac{4\cdot 31}{6\cdot 21}\cdot\ldots\cdot\frac{(n-2)(n^2-n+1)}{n(n^2-3n+3)}\cdot\frac{(n-1)(n^2+n+1)}{(n+1)(n^2-n+1)} =$$

$$= \frac{1\cdot 2\cdot(n^2+n+1)}{3\cdot n\cdot(n+1)},\quad n\geq 2,$$

то

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot 2\cdot(n^2+n+1)}{3\cdot n\cdot(n+1)} = \frac{2}{3}.$$

□

Деякі задачі на знаходження границі числової послідовності можна розв'язати за допомогою *леми про три послідовності.* Нагадаємо її.

Лема 7.1 (про три послідовності)**.** *Нехай є три числові послідовності* $(a_n,\ \ n\geq 1)$, $(b_n,\ \ n\geq\ 1)$ *та* $(c_n,\ \ n\geq 1)$ *такі, що* $a_n\leq b_n\leq c_n$ *для всіх* $n\geq 1$, *а також існує* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ *та існує* $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = A$. *Тоді існує* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ *і* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = A$.

Розглянемо декілька задач, при розв'язанні яких зручно використовувати цю лему.

7.4. Знайти границі послідовностей:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1^{10}+2^{10}+\ldots+n^{10}}$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n^2]{n!}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2}\right)^2\left(1-\frac{1}{4}\right)^2\left(1-\frac{1}{6}\right)^2\ldots\left(1-\frac{1}{2n}\right)^2$.

Розв'язання. а) Перепишемо границю наступним чином:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1^{10}+2^{10}+\ldots+n^{10}} = \lim_{n\to\infty} e^{\ln(1^{10}+2^{10}+\ldots+n^{10})^{\frac{1}{n}}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n}\ln(1^{10}+2^{10}+\ldots+n^{10})} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln(1^{10}+2^{10}+\ldots+n^{10})}.$$

Оскільки

$$1\leq 1^{10}+2^{10}+\ldots+n^{10}\leq n\cdot n^{10} = n^{11},\quad n\geq 1,$$

то

$$0 = \frac{1}{n}\ln 1\leq\frac{1}{n}\ln(1^{10}+2^{10}+\ldots+n^{10})\leq\frac{1}{n}\ln n^{11} = \frac{11\ln n}{n},\quad n\geq 1.$$

Оскільки

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n} = 0,$$

то за лемою про три послідовності

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln(1^{10}+2^{10}+\ldots+n^{10})=0.$$

Отже,

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1^{10}+2^{10}+\ldots+n^{10}}=e^0=1.$$

б) Аналогічно попередньому прикладу перепишемо границю наступним чином:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n^2]{n!}=\lim_{n\to\infty}e^{\frac{1}{n^2}\ln(n!)}=e^{\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n!)}{n^2}}.$$

Оскільки

$$0=\frac{\ln 1}{n^2}\le\frac{\ln(n!)}{n^2}=\frac{\ln 1+\ln 2+\ln 3+\ldots+\ln n}{n^2}\le\frac{n\ln n}{n^2}=\frac{\ln n}{n}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0,$$

то за лемою про три послідовності

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n!)}{n^2}=0,$$

а отже

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n^2]{n!}=e^0=1.$$

в) Оскільки

$$0\le\left(1-\frac{1}{2}\right)^2\left(1-\frac{1}{4}\right)^2\left(1-\frac{1}{6}\right)^2\ldots\left(1-\frac{1}{2n}\right)^2=\frac{1^2}{2^2}\cdot\frac{3^2}{4^2}\cdot\frac{5^2}{6^2}\cdot\ldots\cdot\frac{(2n-1)^2}{(2n)^2}<$$

$$<\frac{1^2}{2^2-1}\cdot\frac{3^2}{4^2-1}\cdot\frac{5^2}{6^2-1}\cdot\ldots\cdot\frac{(2n-1)^2}{(2n)^2-1}=\frac{1^2}{1\cdot 3}\cdot\frac{3^2}{3\cdot 5}\cdot\frac{5^2}{5\cdot 7}\cdot\ldots\cdot\frac{(2n-1)^2}{(2n-1)(2n+1)}=$$

$$=\frac{1}{2n+1}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0,$$

то за лемою про три послідовності

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2}\right)^2\left(1-\frac{1}{4}\right)^2\left(1-\frac{1}{6}\right)^2\ldots\left(1-\frac{1}{2n}\right)^2=0.$$

□

7.5. Навести приклад обмеженої послідовності $(a_n, n\ge 1)$, яка не має границі, але

$$a_{n+1}-a_n\to 0,\quad n\to\infty.$$

Розв'язання. В якості такої послідовності можна розглянути, наприклад, послідовність $a_n=\sin\sqrt{n}$, $n\ge 1$. Дійсно,

$$a_{n+1}-a_n=\sin\sqrt{n+1}-\sin\sqrt{n}=2\sin\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{2}\cos\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{2}=$$

$$= 2\sin\frac{1}{2(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}\cos\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{2}\underset{n\to\infty}{\to}0,$$

відповідно до теореми, за якою добуток нескінченно малої послідовності та обмеженої є нескінченно малою послідовністю.

Тепер покажемо, що послідовність $(\sin\sqrt{n},\ \ n\geq 1)$ не має границі. Для цього покажемо, що послідовність $(\sin n,\ \ n\geq 1)$ не має границі. Припустимо супротивне. Нехай існує $\lim\limits_{n\to\infty}\sin n = c$. Тоді існує $\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2 n = c^2$, а отже $\lim\limits_{n\to\infty}\cos^2 n = 1-c^2$. Звідси, відповідно до критерію Коші (див. зауваження 7.1) $\forall\varepsilon>0\ \exists N=N(\varepsilon)$, що $\forall n\geq N$ виконується нерівність: $|\cos^2(n+2)-\cos^2 n|<\varepsilon$. Перейдемо до еквівалентної нерівності:

$$\left|\Big(\cos(n+2)-\cos n\Big)\Big(\cos(n+2)+\cos n\Big)\right|<\varepsilon,$$

або

$$\left|-2\sin\frac{n+2-n}{2}\sin\frac{n+2+n}{2}\cdot 2\cos\frac{n+2-n}{2}\cos\frac{n+2+n}{2}\right|<\varepsilon,$$

тобто

$$2\sin 1\cos 1\cdot\Big|2\sin(n+1)\cos(n+1)\Big|<\varepsilon,$$

звідки

$$\sin 2\cdot\Big|\sin 2(n+1)\Big|<\varepsilon.$$

З останньої нерівності випливає, що якщо існує $\lim\limits_{n\to\infty}\sin n = c$, то тільки $c=0$.

З іншого боку, оскільки за припущенням існує $\lim\limits_{n\to\infty}\sin n = c = 0$, то згідно з критерієм Коші: $\forall\varepsilon>0\ \exists N=N(\varepsilon)$, що $\forall n\geq N$ виконується нерівність: $|\sin(n+2)-\sin n|<\varepsilon$. Перейдемо до еквівалентної нерівності:

$$\left|2\sin\frac{n+2-n}{2}\cos\frac{n+2+n}{2}\right|<\varepsilon,$$

тобто

$$2\sin 1\Big|\cos(n+1)\Big|<\varepsilon,$$

звідки $|\cos(n+1)|<\varepsilon$, що неможливо, оскільки $c=0$, а значить $|\cos(n+1)|\underset{n\to\infty}{\to}1$. Отримали протиріччя. Таким чином, ми довели, що $\nexists\lim\limits_{n\to\infty}\sin n$. $\square$

Зауваження 7.1. В задачі 7.5 ми скористалися критерієм Коші: *числова послідовність* $(a_n,\ n\geq 1)$ *є збіжною тоді і тільки тоді, коли вона фундаментальна, тобто для будь-якого* $\varepsilon>0$ *існує номер* $N=N(\varepsilon)>0$ *такий, що для всіх* $n,m>N$ *виконується нерівність:* $|a_n-a_m|<\varepsilon$.

Задачі для самостійного розв'язання.

7.6. Нехай $(a_n, n \geq 1)$ — послідовність додатних чисел така, що $a_n^2 - a_n \to 2$, $n \to \infty$. Довести, що $a_n \to 2$, $n \to \infty$.

7.7. Нехай про послідовність $(a_n, n \geq 1)$ відомо, що $\frac{a_n}{n} \to 0$, $n \to \infty$. Довести, що

$$\frac{1}{n} \max\{a_1, a_2, ..., a_n\} \to 0, \quad n \to \infty.$$

7.8. Знайти натуральне x, якщо

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{2019}}{n^x - (n-1)^x} = \frac{1}{2020}.$$

7.9. Знайти границю послідовності $(a_n, n \geq 1)$:

а) $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k(k+1)(k+2)}, \quad n \geq 1;$

б) $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{k-1}{k!}, \quad n \geq 2.$

7.10. Довести, що послідовність $(a_n, n \geq 1)$ має границю та знайти її, якщо

$$a_n = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right)\left(1 - \frac{1}{4^2}\right)...\left(1 - \frac{1}{n^2}\right), \quad n \geq 2.$$

7.11. Знайти границі послідовностей:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n^2]{1! + 2! + \ldots + n!};$

б) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{n + \sqrt{n - 1 + \sqrt{n - 2 + \ldots + \sqrt{1}}}};$

в) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1 + 2^2 + 3^3 + \ldots + n^n}{n^n};$

г) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2019^n + 2020^n};$

д) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \ldots + a_m^n}$, де a_1, a_2, $\ldots$, a_m — фіксовані додатні числа.

7.12. Нехай $a_1 = 9$, $a_2 = 15$, $a_3 = 21$, $a_4 = 25$ і т. д., де a_n — n-те складене непарне число. Обчислити границю

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+2019}}{a_n}.$$

8 Границі числових послідовностей-2. Послідовності, задані рекурентно

Цей розділ присвячено обчисленню границь числових послідовностей, заданих рекурентно. Розглянемо на декількох прикладах два шляхи знаходження границь таких послідовностей. Взагалі кажучи, задачі, в яких розглядаються рекурентні послідовності, допускають різні шляхи розв'язання. Інколи вдається за рекурентною формулою знайти загальний член послідовності, що значно спрощує подальші міркування. В цьому полягає перший (найбільш простий) метод розв'язання таких задач.

Якщо в задачах з рекурентно заданою послідовністю знаходження загального члену послідовності є занадто складним, потрібно шукати альтернативні шляхи розв'язання. Проте, інколи досить легко вдається показати, що задана рекурентна послідовність є монотонною та обмеженою, а отже, за теоремою Вейєрштраса має границю. В цьому випадку, як правило, знаходження границі зводиться до розв'язання рівняння.

Аудиторні завдання.

8.1. Для числа $a \in \mathbb{R}$ послідовність $(a_n, n \geq 1)$ задається наступним чином:

$$a_1 = a, \quad a_{n+1} = \frac{n+1}{n} a_n + \frac{1}{n}, \quad n \geq 1.$$

Визначити значення a, при яких послідовність є збіжною.

Розв'язання. Випишемо декілька перших елементів послідовності:

$$a_1 = a, \quad a_2 = 2a + 1, \quad a_3 = 3a + 2, \quad a_4 = 4a + 3, \quad \ldots$$

Виникає припущення, що загальний член послідовності описується формулою:

$$a_n = na + (n-1), \quad n \geq 1.$$

Дійсно, за методом математичної індукції:

1. При $n = 1$: $a_1 = 1 \cdot a + (1-1) = a$, вірно;
2. Припустимо, що при $n = k$: $a_k = ka + (k-1)$;
3. Доведемо рівність при $n = k+1$:

$$a_{k+1} = \frac{k+1}{k} a_k + \frac{1}{k} = \frac{k+1}{k}\Big(ka + (k-1)\Big) + \frac{1}{k} = (k+1)a + \frac{k^2-1}{k} + \frac{1}{k} = \\ = (k+1)a + k,$$

що й треба було довести.

Отже, $a_n = na + (n-1) = n(a+1) - 1$, $n \geq 1$. Тому послідовність $(a_n, n \geq 1)$ є збіжною тоді і лише тоді, коли $a + 1 = 0$, тобто $a = -1$. □

8.2. Знайти границю послідовності $(a_n, n \geq 1)$, що визначається співвідношеннями:

$$a_1 = 1, \quad a_2 = \frac{3}{2}, \quad na_n - a_{n-1} - (n-1)a_{n-2} = \frac{2n-3}{(n-1)(n-2)}, \quad n \geq 3.$$

Розв'язання. Оскільки

$$a_n = \frac{1}{n}a_{n-1} + \frac{n-1}{n}a_{n-2} + \frac{2n-3}{n(n-1)(n-2)}, \; n \geq 3,$$

звідки

$$a_1 = 1, \quad a_2 = \frac{3}{2}, \quad a_3 = \frac{5}{3}, \quad a_4 = \frac{7}{4}, \quad \ldots$$

то можна припустити, що загальний член послідовності $(a_n, n \geq 1)$ описується формулою:

$$a_n = \frac{2n-1}{n}, \; n \geq 1.$$

Перевіримо це припущення за методом математичної індукції:

1. При $n = 1$: $a_1 = \frac{2 \cdot 1 - 1}{1} = 1$, вірно;
2. Припустимо, що рівність справедлива для всіх $n \leq k$: $a_k = \frac{2k-1}{k}$;
3. Доведемо, що рівність справедлива для $n = k+1$:

$$a_{k+1} = \frac{1}{k+1}a_k + \frac{(k+1)-1}{k+1}a_{k-1} + \frac{2(k+1)-3}{(k+1)((k+1)-1)((k+1)-2)} =$$

$$= \frac{1}{k+1} \cdot \frac{2k-1}{k} + \frac{k}{k+1} \cdot \frac{2k-3}{k-1} + \frac{2k-1}{(k+1)k(k-1)} = \frac{2k+1}{k+1},$$

що й треба було довести.

Тоді

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2n-1}{n} = 2.$$

□

8.3. Нехай послідовність $(a_n, n \geq 1)$ задається співвідношенням:

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \left(\frac{2}{3}\right)^n, \quad n \geq 1.$$

Довести, що існує границя $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n a_n$ і знайти її.

Доведення. Розглянемо послідовність $(b_n, n \geq 1)$, де $b_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n a_n, n \geq 1$. Оскільки

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} a_{n+1} = \frac{1}{3} a_n \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} + \left(\frac{2}{3}\right)^n \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}, \quad n \geq 1,$$

то

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} a_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n a_n + \frac{3}{2}, \quad n \geq 1,$$

а отже

$$b_1 = \frac{3}{2}, \quad b_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot b_n + \frac{3}{2}, \quad n \geq 1.$$

Тоді,

$$b_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} + \frac{3}{2} = \frac{3}{2} + \frac{3}{4} = 3\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right),$$

$$b_3 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{2} + \frac{3}{4}\right) + \frac{3}{2} = \frac{3}{2} + \frac{3}{4} + \frac{3}{8} = 3\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right),$$
$$\ldots$$

Побачили закономірність. Мабуть,

$$b_n = 3\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^n}\right), \quad , n \geq 1.$$

Доведемо це методом математичної індукції.

1. Для $n = 1$ вже перевірили, що $b_1 = \frac{3}{2}$;
2. Припустимо, що при $n = k$: $b_k = 3\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^k}\right)$;
3. Доведемо, що $b_{k+1} = 3\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}}\right)$. Дійсно,

$$b_{k+1} = \frac{1}{2} \cdot b_k + \frac{3}{2} = \frac{1}{2} \cdot 3\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^k}\right) + \frac{3}{2} =$$
$$= 3\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}}\right),$$

що й треба було довести.

Отже, ми показали, що

$$b_n = 3\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ... + \frac{1}{2^n}\right), \quad , n \geq 1.$$

Тому

$$\lim_{n\to\infty} b_n = 3 \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ... + \frac{1}{2^n}\right) = 3.$$

□

8.4. Нехай послідовність $(a_n, n \geq 1)$ задається співвідношенням:

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{2n-1}{n} a_n - \frac{n-1}{n} a_{n-1}, \quad n \geq 2.$$

Обчислити границю $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$.

Розв'язання. Перепишемо рекурентне співвідношення:

$$a_{n+1} = \left(2 - \frac{1}{n}\right) a_n - \left(1 - \frac{1}{n}\right) a_{n-1},$$

або

$$a_{n+1} - a_n = (a_n - a_{n-1}) - \frac{1}{n}\left(a_n - a_{n-1}\right),$$

або

$$a_{n+1} - a_n = (a_n - a_{n-1}) \left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

Покладемо

$$b_n = a_n - a_{n-1}, \quad n \geq 2.$$

Тоді послідовність $(b_n, n \geq 2)$ задовольняє рекурентне співвідношення:

$$b_2 = 1, \quad b_{n+1} = \left(1 - \frac{1}{n}\right) b_n, \quad n \geq 2,$$

звідки

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{n-1}{n} = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n-1}}, \quad n \geq 2.$$

Таким чином,

$$b_2 = 1, \quad b_{n+1} = \frac{1}{n}, \quad n \geq 2.$$

Тому,

$$a_{n+1} = a_n + \frac{1}{n}, \quad n \geq 2,$$

і отже,

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 1, \quad a_3 = 1 + \frac{1}{2}, \quad a_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}, \quad \ldots$$

Методом математичної індукції неважко показати, що

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n-1}, \quad n \geq 2.$$

Знайдемо границю $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$. За теоремою про три послідовності:

$$1 \le \sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n-1}} \le \sqrt[n]{1 + 1 + \ldots + 1} =$$

$$= \sqrt[n]{n-1} < \sqrt[n]{n} \underset{n\to\infty}{\to} 1.$$

Таким чином, $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$. □

8.5. Знайти границю послідовності $(x_n, n \ge 1)$, якщо

$$x_1 = \sqrt{a}, \quad x_2 = \sqrt{a + \sqrt{a}}, \quad x_3 = \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a}}}, \quad \ldots,$$

$$x_n = \underbrace{\sqrt{a + \sqrt{a + \ldots \sqrt{a + \sqrt{a}}}}}_{n \text{ знаків кореня}}, \quad a \ge 1.$$

Розв'язання. Помітимо, що $x_n^2 = a + x_{n-1}$, $n \ge 1$. Припустимо, що границя існує. Позначимо $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Тоді, беручи границю від обох частин рекурентного співвідношення, отримаємо рівняння:

$$x^2 = a + x,$$

звідки

$$x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{a + \frac{1}{4}}.$$

За умовою $a \ge 1$, а отже, підходить тільки корінь

$$x = \frac{1}{2} + \sqrt{a + \frac{1}{4}}.$$

Тепер доведемо, що границя існує (за теоремою Вейєрштрасса). Легко бачити, що послідовність $(x_n, n \ge 1)$ монотонно зростає. Покажемо методом математичної індукції, що вона обмежена зверху числом $c = \frac{1}{2} + \sqrt{a + \frac{1}{4}}$. Дійсно,

1. При $n = 1$: $x_1 = \sqrt{a} < \frac{1}{2} + \sqrt{a + \frac{1}{4}} = c$;

2. Припустимо, що при $n = k$: $x_k < c$;

3. Доведемо справедливість нерівності при $n = k + 1$:

$$x_{k+1} = \sqrt{a + x_k} < \sqrt{a + c} = \sqrt{a + \frac{1}{2} + \sqrt{a + \frac{1}{4}}} =$$

$$= \sqrt{\left(a + \frac{1}{4}\right) + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{a + \frac{1}{4}} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\left(\sqrt{a + \frac{1}{4}} + \frac{1}{2}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{a + \frac{1}{4}} + \frac{1}{2} = c,$$

що й треба було довести.

Отже, за теоремою Вейєрштрасса границя послідовності $(x_n, n \geq 1)$ існує і

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{2} + \sqrt{a + \frac{1}{4}}.$$

Наприклад, якщо $a = 2$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{2} + \sqrt{2 + \frac{1}{4}} = 2$. □

8.6. Довести, що послідовність $(a_n, n \geq 1)$ має границю та знайти її, якщо

а) $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 1 - \dfrac{1}{4a_n}, \quad n \geq 1;$

б) $a_1 = \dfrac{3}{2}, \quad a_{n+1}^2 = 3a_n - 2, \quad n \geq 1.$

Доведення. а) Припустимо, що границя існує. Позначимо $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Тоді з рекурентного співвідношення випливає, що

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = 1 - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4a_n},$$

тобто

$$a = 1 - \frac{1}{4a}.$$

Розв'язуючи квадратне рівняння, отримаємо $(2a - 1)^2 = 0$, звідки $a = \frac{1}{2}$.

Тепер доведемо, що послідовність $(a_n, n \geq 1)$ має границю (за теоремою Вейєрштрасса). Спочатку покажемо, що $(a_n, n \geq 1)$ обмежена знизу числом $\frac{1}{2}$. Дійсно, за методом математичної індукції,

1. При $n = 1$: $a_1 = 1 > \frac{1}{2}$;
2. Припустимо, що при $n = k$: $a_k > \frac{1}{2}$;
3. Доведемо справедливість нерівності при $n = k + 1$: $a_{k+1} = 1 - \frac{1}{4a_k} > 1 - \frac{1}{4\cdot\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$, що й треба було довести.

Далі, помітимо, що $a_2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} < 1$. Звідси можна припустити, що послідовність монотонно спадна. Дійсно, розглянемо два сусідні елементи послідовності

$$a_{n+1} = 1 - \frac{1}{4a_n},$$

$$a_n = 1 - \frac{1}{4a_{n-1}}.$$

Тоді

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{4a_{n-1}} - \frac{1}{4a_n},$$

звідки

$$a_{n+1} - a_n = \frac{a_n - a_{n-1}}{4a_{n-1}a_n}.$$

Тому, оскільки $a_n > \frac{1}{2}$, $n \geq 1$, то вирази $a_{n+1} - a_n$ і $a_n - a_{n-1}$ мають однакові знаки, тобто або $a_{n+1} > a_n > a_{n-1}$, або $a_{n+1} < a_n < a_{n-1}$, $n \geq 1$. Але при $n = 1$ ми перевірили, що $a_2 < a_1$. Отже, за методом математичної індукції послідовність $(a_n, n \geq 1)$ є спадною.

Отже, за теоремою Вейєрштрасса існує границя $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}$.

б) Припустимо, що границя існує. Позначимо $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Тоді з рекурентного співвідношення випливає, що

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1}^2 = 3 \lim_{n\to\infty} a_n - 2,$$

тобто

$$a^2 = 3a - 2.$$

Розв'язуючи квадратне рівняння, отримаємо два корені $a = 1$ або $a = 2$.

Покажемо, що послідовність монотонна і обмежена. З рекурентного співвідношення

$$a_n = \frac{a_{n+1}^2 + 2}{3},$$

випливає, що $a_n > 0$, для всіх $n \geq 1$. Тоді

$$a_{n+1} = +\sqrt{3a_n - 2}, \quad n \geq 1.$$

Оскільки, $a_1 = \frac{3}{2}$, $a_2 = +\sqrt{3 \cdot \frac{3}{2} - 2} = \sqrt{\frac{5}{2}} > \frac{3}{2} = a_1$, природно припустити, що послідовність зростає, тобто $a_{n+1} > a_n$, $n \geq 1$. Розглянемо два сусідніх члени:

$$a_{n+1}^2 = 3a_n - 2,$$
$$a_n^2 = 3a_{n-1} - 2.$$

Тоді

$$a_{n+1}^2 - a_n^2 = 3(a_n - a_{n-1}), \quad n \geq 2,$$

звідки

$$(a_{n+1} - a_n)(a_{n+1} + a_n) = 3(a_n - a_{n-1}).$$

Оскільки $a_n > 0$, для всіх $n \geq 1$, то $a_{n+1} + a_n > 0$, для всіх $n \geq 1$. Тому вирази $a_{n+1} - a_n$ і $a_n - a_{n-1}$ мають однакові знаки, тобто або $a_{n+1} > a_n > a_{n-1}$, або $a_{n+1} < a_n < a_{n-1}$, $n \geq 1$. Але при $n = 1$ ми перевірили, що $a_2 > a_1$. Отже, за методом математичної індукції послідовність $(a_n, n \geq 1)$ є зростаючою.

Таким чином, границею послідовності $(a_n, n \geq 1)$ може бути тільки число $a = 2$. Нарешті, покажемо, що послідовність є обмеженою зверху числом 2. Дійсно, за методом математичної індукції,

1. При $n = 1$: $a_1 = \frac{3}{2} < 2$;
2. Припустимо, що при $n = k$: $a_k < 2$;
3. Доведемо справедливість нерівності при $n = k + 1$: $a_{k+1} = \sqrt{3a_k - 2} < \sqrt{3 \cdot 2 - 2} = 2$, що й треба було довести.

Отже, за теоремою Вейєрштрасса послідовність має границю, і, очевидно, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$. □

8.7. Знайдіть границю послідовності $(x_n, \ \ n \geq 1)$, де

$$x_n = \frac{n+1}{2^{n+1}} \sum_{k=1}^{n} \frac{2^k}{k}.$$

Розв'язання. Помітимо, що

$$x_n = (1 + x_{n-1})\frac{n+1}{2n}, \ x_1 = 1, \ x_2 = \frac{3}{2}, \ x_3 = \frac{5}{3}.$$

Доведемо за індукцією, що $x_n \geq \frac{n+2}{n}$. при $n \geq 3$. Дійсно, якщо $x_{k-1} \geq \frac{k+1}{k-1}$, то

$$x_k = (1 + x_{k-1})\frac{k+1}{2k} \geq \left(1 + \frac{k+1}{k-1}\right)\frac{k+1}{2k} = \frac{k+1}{k-1} > \frac{k+2}{k}.$$

Як наслідок маємо, що $x_n > 1$, і що при $n \geq 4$

$$x_n \leq x_{n-1}.$$

Дійсно,

$$x_n = (1 + x_{n-1})\frac{n+1}{2n} = x_{n-1} - \frac{n-1}{2n}\left(x_{n-1} - \frac{n+1}{n-1}\right) \leq x_{n-1}.$$

Отже, при $n \geq 4$ послідовність (x_n) — незростаюча послідовність, обмежена знизу, тобто має границю за теоремою Вейєрштраса. Позначимо цю границю через a. Тоді

$$a = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} (1 + x_{n-1})\frac{n+1}{2n} = \frac{1+a}{2},$$

звідки $a = 1$.

Відповідь: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$. $\square$

Задачі для самостійного розв'язання.

8.8. Знайти границю послідовності $(a_n, n \geq 1)$, що визначається співвідношеннями:

а) $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 1 - \dfrac{n}{n+1} a_n, \quad n \geq 1;$

б) $a_1 = 1, \quad a_2 = \dfrac{1}{2}, \quad a_{n+1} = -\dfrac{1}{(n+1)} a_n + \dfrac{n-1}{n} a_{n-1}, \quad n \geq 2.$

8.9. Нехай послідовність $(a_n, n \geq 1)$ задається співвідношенням:

$$a_1 = 0, \quad a_{n+1} = \frac{a_n + 3}{4}, \quad n \geq 1.$$

Довести, що існує границя $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ і знайти її.

8.10. Нехай послідовність $(a_n, n \geq 1)$ задається співвідношенням:

$$a_1 = 1, \quad a_2 = \frac{5}{2}, \quad a_{n+1} = \frac{3}{2} a_n - \frac{1}{2} a_{n-1}, \quad n \geq 1.$$

Обчислити $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

8.11. Нехай послідовність $(a_n, n \geq 1)$ задається співвідношенням:

$$a_1 = \frac{2}{3}, \quad a_2 = \frac{1}{3}, \quad (n+1)!(a_n - a_{n-2}) + n^2 + n - 1 = 0, \quad n \geq 3.$$

Знайти $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

8.12. Нехай послідовність $(a_n, n \geq 1)$ задається співвідношенням:

$$a_1 = a, \quad a_2 = b, \quad a_n = 5a_{n-1} - 4a_{n-2}, \quad n \geq 3.$$

Знайти $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{4^n}$.

8.13. Довести, що послідовність $(a_n, n \geq 1)$ має границю та знайти її, якщо

а) $a_1 = 0, \quad a_{n+1} = \dfrac{1}{4(1 - a_n)}, \quad n \geq 1.$

б) $a_1 = 0, \quad a_2 = \dfrac{1}{2}, \quad a_{n+1} = \dfrac{1}{3}(1 + a_n + a_{n-1}^3), \quad n \geq 2.$

в) $a_0 = x_0, \quad a_n = \dfrac{1}{2}\left(a_{n-1} + \dfrac{a}{a_{n-1}}\right), \quad n \geq 1, \quad a > 0, \quad x_0 > 0.$

8.14. Числову послідовність $(a_n, n \in \mathbb{N})$ задано рекурентним співвідношенням

$$a_1 = 20, \quad a_2 = 2020, \quad a_{n+1} = \sqrt{a_n} + \sqrt{a_{n-1}}, \qquad n \geq 2.$$

Довести, що послідовність збігається, та знайти її границю.

9 Теореми Штольця та Тьоплиця

Наступні теореми, які відповідно належать австрійському математику Отто Штольцю (1842-1905) та німецькому математику Отто Тьоплицю (1881-1940), відносяться до теми "границя числової послідовності" та не входять до стандартного курсу математичного аналізу для інженерних спеціальностей. Проте, вони дають можливість обчислювати певний досить широкий набір більш "тонких" границь числових послідовностей, які не піддаються розв'язанню за допомогою стандартних методів. Спочатку познайомимося з цими теоремами.

Теорема 9.1 (Штольця). *Нехай дві числові послідовності* $(x_n, n \geq 1)$ *та* $(y_n, n \geq 1)$ *задовольняють умовам:*

$$y_n < y_{n+1}, \quad n \geq 1;$$

$$\lim_{n\to\infty} y_n = +\infty;$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = a, \quad a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}.$$

Тоді

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = a.$$

Теорема 9.2 (Тьоплиця). *Нехай дійсні числа*

$$\{c_{nk} : 1 \leq k \leq n, n \geq 1\}$$

задовольняють умовам:

1) $\forall k \in \mathbb{N} : \quad c_{nk} \to 0, n \to \infty;$
2) $\sum\limits_{k=1}^{n} c_{nk} \to 1, n \to \infty;$
3) $\exists C > 0 \quad \forall n \geq 1 : \quad \sum\limits_{k=1}^{n} |c_{nk}| \leq C.$

Тоді для довільної збіжної послідовності чисел $(a_n, n \geq 1)$ *послідовність* $\left(b_n = \sum\limits_{k=1}^{n} c_{nk} a_k, n \geq 1\right)$ *також збіжна, причому*

$$\lim_{x\to\infty} b_n = \lim_{x\to\infty} a_n.$$

Послідовність $(b_n, n \geq 1)$ в теоремі Теплиця є перетворенням збіжної послідовності $(a_n, n \geq 1)$ за допомогою набору чисел $\{c_{nk} : 1 \leq k \leq n, n \geq 1\}$. Теорема Тьоплиця встановлює умови, при яких таке перетворення не змінює границі.

Аудиторні завдання.

9.1. Обчислити границі:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right);$

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^k+2^k+\ldots+n^k}{n^{k+1}},\quad k\in\mathbb{N};$

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{a^{n+1}}\left(a+\dfrac{a^2}{2}+\dfrac{a^3}{3}+\ldots+\dfrac{a^n}{n}\right),\quad a>1;$

г) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+1a+2a^2+\ldots+na^n}{na^{n+1}}, a>1;$

д) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^{k+1}}\left(k!+\dfrac{(k+1)!}{1!}+\ldots+\dfrac{(k+n)!}{n!}\right), k\in\mathbb{N};$

е) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}\left(\sqrt{C_n^2}+\sqrt{C_{n+1}^2}+\ldots+\sqrt{C_{2n}^2}\right).$

Розв'язання. Усі пункти задачі можна розв'язати використовуючи теорему Штольця. Для прикладу наведемо розв'язання задачі д) (усі інші розв'язуються аналогічно).

Для знаходження границі

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{k+1}}\left(k!+\frac{(k+1)!}{1!}+\ldots+\frac{(k+n)!}{n!}\right)$$

покладемо

$$x_n=k!+\frac{(k+1)!}{1!}+\ldots+\frac{(k+n)!}{n!},\qquad y_n=n^{k+1},\ \ n\geq 1.$$

Послідовність $(y_n, n\geq 1)$ задовольняє умовам теореми Штольця. Знайдемо границю

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(k+n)!}{n!}}{n^{k+1}-(n-1)^{k+1}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(n+2)\cdot\ldots\cdot(n+k)}{n^{k+1}-(n-1)^{k+1}}=\frac{1}{k+1}.$$

Тому, за теоремою Штольця,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{k+1}}\left(k!+\frac{(k+1)!}{1!}+\ldots+\frac{(k+n)!}{n!}\right)=\frac{1}{k+1}.$$

Відповіді: а) 2; б) $\frac{1}{k+1}$; в) $\frac{1}{a-1}$; г) $\frac{1}{a-1}$; д) $\frac{1}{k+1}$; е) $\sqrt{2}$. □

9.2. Нехай $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Знайти:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{a_k}{\sqrt{k}}$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}$;

г) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{1} + \frac{a_{n-1}}{2^1} + \frac{a_{n-2}}{2^2} + \ldots + \frac{a_1}{2^{n-1}} \right)$;

д) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{1 \cdot 2} + \frac{a_{n-1}}{2 \cdot 3} + \frac{a_{n-2}}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{a_1}{n \cdot (n+1)} \right)$.

Розв'язання. а) Використаємо теорему Штольця. Покладемо $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{a_k}{\sqrt{k}}$, $y_n = 2\sqrt{n}$, $n \geq 1$. Послідовність $(y_n, n \geq 1)$ задовольняє умовам теореми Штольця. Знайдемо границю

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{a_n}{\sqrt{n}}}{2\sqrt{n} - 2\sqrt{n-1}} = a.$$

Тому, за теоремою Штольця,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{\sqrt{k}} = a.$$

б) Аналогічно до пункту а), за теоремою Штольця, можна показати, що

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} = a.$$

в) Накладемо додаткову умову $a_n > 0$, $n \geq 1$ (без цієї умови задача некоректна). Тоді $a \geq 0$. При $a > 0$ з нерівності Коші випливає

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}, \quad n \geq 1.$$

Використовуючи теорему Штольця можна показати, що

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}} = a,$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} = a.$$

Тому, за лемою про три послідовності,

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_n} = a.$$

При $a = 0$ достатньо лише правої частини нерівності.

г) Поклавши $c_{nk} = \frac{1}{2^{n-k}}$, $1 \le k \le n, n \ge 1$, з теореми Тьоплиця випливає, що

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{1} + \frac{a_{n-1}}{2^1} + \frac{a_{n-2}}{2^2} + \ldots + \frac{a_1}{2^{n-1}}\right) = 2a.$$

д) Поклавши $c_{nk} = \frac{1}{(n-k+1)(n-k+2)}$, $1 \le k \le n, n \ge 1$, з теореми Тьоплиця випливає, що

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{1\cdot 2} + \frac{a_{n-1}}{2\cdot 3} + \frac{a_{n-2}}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{a_1}{n\cdot(n+1)}\right) = a.$$

□

9.3. Нехай $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Довести, що

$$\lim_{n\to\infty}\frac{na_1 + (n-1)a_2 + \ldots + 1\cdot a_n}{n^2} = \frac{a}{2}.$$

Вказівка. Випливає з теореми Тьоплиця, якщо покласти

$$c_{nk} = 2\cdot\frac{n-k+1}{n^2}, \quad 1 \le k \le n, \quad n \ge 1.$$

□

Задачі для самостійного розв'язання.

9.4. Довести, що

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{2^n} = 0.$$

9.5. Знайти границі, використовуючи теорему Штольця:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^3} \sum\limits_{k=1}^{n} k^2;$

б) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^k k}{k+1};$

в) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sum_{k=1}^{n} k^2(k+1)}{\sum_{k=1}^{n} k(k+3)(2k+1)};$

г) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{na^n} \sum\limits_{k=1}^{n} ka^k, \quad a > 1;$

д) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2\sqrt{n}} \sum\limits_{k=1}^{n} k\sqrt{k}.$

9.6. Нехай $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, α — таке дійсне число, що $|\alpha| < 1$. Знайти $\lim_{n\to\infty} b_n$, якщо $b_n = a_n + \alpha a_{n-1} + \alpha^2 a_{n-2} + \ldots + \alpha^{n-1} a_1$, $n \geq 1$.

9.7. Нехай $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Знайти $\lim_{n\to\infty} b_n$, якщо

$$b_n = \frac{1}{n^2} \left(1 \cdot a_1 + 2 \cdot a_2 + \ldots + n \cdot a_n\right), n \geq 1.$$

9.8. Нехай $\lim_{n\to\infty}(a_{n+1} - a_n) = a$, $a \in \mathbb{R}$. Довести, що

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = a.$$

9.9. Нехай $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b$. Знайти $\lim_{n\to\infty} A_n$, якщо

$$A_n = \frac{a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \ldots + a_n b_1}{n}, n \geq 1.$$

10 Елементи лінійної алгебри

В цьому розділі вибірково представлені задачі, що охоплюють основні теми з курсу лінійної алгебри для технічних спеціальностей такі як “Матриці та дії над ними”, “Визначники та їх властивості”, “Обернена матриця”, “Ранг матриці”, “Системи лінійних алгебраїчних рівнянь”.

Аудиторні завдання.

10.1. При яких натуральних n система лінійних рівнянь

$$\begin{cases} 0 & + & x_2 & + & x_3 & + & \dots & + & x_{n-1} & + & x_n & = & 1, \\ -x_1 & + & 0 & + & x_3 & + & \dots & + & x_{n-1} & + & x_n & = & 1, \\ -x_1 & - & x_2 & + & 0 & + & \dots & + & x_{n-1} & + & x_n & = & 1, \\ & \vdots & & & & & \vdots & & & & & \vdots & \\ -x_1 & - & x_2 & - & x_3 & - & \dots & + & 0 & + & x_n & = & 1, \\ -x_1 & - & x_2 & - & x_3 & - & \dots & - & x_{n-1} & + & 0 & = & 1 \end{cases}$$

є сумісною?

Розв'язання. Розв’яжемо систему методом Гауса. Спочатку послідовно віднімемо від 1-го рядка 2-й, від 2-го рядка 3-й, ..., від $(n-1)$-го рядка n-й. Отримаємо

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ & \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \dots & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ & \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Далі додамо до останнього рядка усі рядки з непарними номерами.

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ & \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ & \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a & 1 \end{array}\right)$$

При непарному n число a дорівнює 0, отже система несумісна. При парному n число a дорівнює 1 і система є сумісною. Далі досить просто знаходимо розв’язок $(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n) = (-1, 1, \dots, -1, 1)$. $\square$

10.2. Знайти матрицю, обернену до

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Вказівка. Потрібно використати метод Гауса (дозволяється виконувати елементарні перетворення лише рядків матриці). В результаті отримаємо

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \ldots \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5/6 & 2/3 & 1/2 & 1/3 & 1/6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2/3 & 4/3 & 1 & 2/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & 1 & 3/2 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1/3 & 2/3 & 1 & 4/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1/6 & 1/3 & 1/2 & 2/3 & 5/6 \end{array}\right).$$

Тобто,

$$A^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 8 & 6 & 4 & 2 \\ 3 & 6 & 9 & 6 & 3 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

□

10.3. Відомо, що $A^2 - 4A + 4E = O$, де A — не є діагональною, E — одинична матриця, O — нульова матриця. Чи існує матриця A^{-1}? Якщо так, то знайти її.

Розв'язання. Спочатку зауважимо, що з рівняння видно, що матриця A є квадратною. До квадратної матриці A існує обернена тоді і тільки тоді, коли $\det A \neq 0$. Перепишемо початкове рівняння

$$A^2 - 4A + 4E = O \quad \Leftrightarrow \quad A(A - 4E) = 4E.$$

Тоді

$$\det[A(A - 4E)] = \det[4E] \quad \Rightarrow \quad \det A \cdot \det(A - 4E) \neq 0.$$

Звідси випливає, що $\det A \neq 0$. Помножимо обидві частини рівняння на A^{-1}. Отримаємо

$$A - 4E + 4A^{-1} = O.$$

Тобто, $A^{-1} = E - \frac{1}{4}A$. □

10.4. Спростити матричний вираз, вважаючи, що всі записані обернені матриці існують:

$$(2E - A)^{-1} + (E + A)^{-1} - 3(2E + A - A^2)^{-1}.$$

Розв'язання. Враховуючи те, що всі матриці, які зустрічаються у нашому виразі, є переставними, перетворимо вираз наступним чином:

$$(2E - A)^{-1} + (E + A)^{-1} - 3(2E + A - A^2)^{-1} =$$

$$= (2E - A)^{-1} + (E + A)^{-1} - 3\Big((2E - A) \cdot (E + A)\Big)^{-1} =$$

$$= (2E - A)^{-1}(E + A)^{-1} \cdot (E + A)(2E - A) \cdot$$

$$\cdot \Big((2E - A)^{-1} + (E + A)^{-1} - 3(2E - A)^{-1}(E + A)^{-1}\Big) =$$

$$= (2E - A)^{-1}(E + A)^{-1} \cdot \Big((E + A) + (2E - A) - 3E\Big) =$$

$$= (2E - A)^{-1}(E + A)^{-1} \cdot O = O,$$

де O — нульова матриця. □

10.5. Про квадратну матрицю A порядку n відомо, що сума всіх елементів матриці $(E + A)^{-1}$ дорівнює 1. Знайти суму всіх елементів матриці $(E + A^{-1})^{-1}$. Вважати, що всі вказані обернені матриці існують.

Розв'язання. Позначимо $X = (E + A)^{-1}, Y = (E + A^{-1})^{-1}$. Тоді

$$A = X^{-1} - E, \quad A^{-1} = Y^{-1} - E,$$

і, відповідно,

$$(X^{-1} - E)(Y^{-1} - E) = AA^{-1} = E.$$

З останньої рівності випливає, що

$$X^{-1}Y^{-1} = X^{-1} + Y^{-1}.$$

Домножуючи останню рівність на X зліва та на Y справа, отримаємо $E = X + Y$, звідки сума елементів $X + Y$ дорівнює n, а отже, сума елементів матриці Y дорівнює $n - 1$. □

10.6. Нехай x_1, x_2, x_3 — корені многочлена $x^3 - 3x^2 + 1$. Обчислити визначник
$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання. Запишемо
$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix} = 3x_1x_2x_3 - x_1^3 - x_2^3 - x_3^3 = -(x_1 + x_2 + x_3)^3 +$$
$$+3x_1(x_1x_2 + x_1x_3) + 3x_2(x_1x_2 + x_2x_3) + 3x_3(x_1x_3 + x_2x_3) + 9x_1x_2x_3.$$
За теоремою Вієта
$$x_1 + x_2 + x_3 = 3, \quad x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 0, \quad x_1x_2x_3 = -1.$$
Тому $\Delta = -27$. □

10.7. Матриця A розміру $n \times n$ має вигляд
$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & \dots & 0 & 0 \\ & \vdots & & & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a \end{pmatrix},$$
де $a \in \mathbb{R}$. Знайти суму елементів першого рядка матриці A^m, де $m \leq n$.

Вказівка. Методом математичної індукції довести, що
$$A^m = \begin{pmatrix} a^m & C_m^1 a^{m-1} & C_m^2 a^{m-2} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a^m & C_m^1 a^{m-1} & \dots & 0 & 0 \\ & \vdots & & & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a^m & C_m^1 a^{m-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a^m \end{pmatrix}$$
Тому сума елементів першого рядка матриці A^m дорівнює
$$a^m + C_m^1 a^{m-1} + C_m^2 a^{m-2} + \ldots + C_m^k a^{m-k} + \ldots + 1 = (a+1)^m.$$
□

Задачі для самостійного розв'язання.

10.8. Квадратна матриця A є такою, що $A^2 + 2A + E = O$. Довести, що $\det A \neq 0$, та знайти A^{-1}.

10.9. В квадратній матриці A порядку n кожен елемент замінили його алгебраїчним доповненням. Довести, що визначник матриці, що отримано, дорівнює $(\det A)^{\alpha}$ та знайти α.

10.10. Про квадратну матрицю A відомо, що $A^{2019} = O$, де O — нульова матриця. Довести, що матриця $A + E$ має обернену.

10.11. Нехай A та B — квадратні матриці порядку n такі, що $A+B = E$, де E — одинична матриця порядку n, та $A^3 = A^2$. Доведіть, що матриця $E + AB$ має обернену та знайдіть її.

10.12. Спростити матричний вираз, вважаючи, що всі записані обернені матриці існують:

$$(3E - A)^{-1} + (2E + A)^{-1} - 5(6E + A - A^2)^{-1}.$$

10.13. Довести, що для довільних многочленів $P_1(x), \ldots, P_n(x)$, степінь кожного з яких не перевищує $n - 2$, та для будь-яких чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ виконується рівність

$$\begin{vmatrix} P_1(\lambda_1) & \ldots & P_1(\lambda_n) \\ \vdots & & \vdots \\ P_n(\lambda_1) & \ldots & P_n(\lambda_n) \end{vmatrix} = 0.$$

10.14. Обчислити визначник 10-го порядку

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 11 \\ 0 & 2 & \ldots & 12 & 0 \\ & \vdots & & \vdots & \\ 0 & 19 & \ldots & 9 & 0 \\ 20 & 0 & \ldots & 0 & 10 \end{vmatrix}.$$

10.15. Нехай x_1, x_2, x_3, x_4 — корені многочлену $x^4 + 10x - 3$. Обчислити визначник

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_4 & x_1 & x_2 & x_3 \\ x_3 & x_4 & x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 & x_4 & x_1 \end{vmatrix}.$$

10.16. Про квадратну матрицю $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}$ порядку n відомо, що $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = \lambda$, $\lambda \neq 0$, для всіх $i = \overline{1,n}$. Для матриці $B = A^{-1}$ довести, що $\sum_{j=1}^{n} b_{ij} = \frac{1}{\lambda}$, для всіх $i = \overline{1,n}$.

10.17. Троє студентів на парі грають у таку гру: перший називає натуральне число m, другий — натуральне число n, а третій записує довільну матрицю A розмірності $m \times n$. Після цього студенти обчислюють визначник матриці $A^T A$. Якщо цей визначник від'ємний, виграє перший студент, якщо рівний 0 — другий студент, а якщо додатний — виграє третій студент. Під яким номером грати краще за все і чому?

10.18. Для довільного фіксованого $n \in \mathbb{N}$ знайти матрицю X, що задовольняє матричне рівняння

$$\underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{n\text{ разів}} \cdot X \cdot \underbrace{A^T \cdot A^T \cdot \ldots \cdot A^T}_{n\text{ разів}} = E,$$

де

$$A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & 0 & -\sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{pmatrix},$$

φ — фіксований аргумент, а E — одинична матриця.

10.19. Квадратні матриці A та B порядку n задовольняють тотожностям: $A^2 = A$, $B^2 = B$ та $AB = BA$. Які значення може набувати $\det(A - B)$?

10.20. Чи існують квадратні матриці A та B такі, що $AB - BA = E$?

10.21. Розглянемо квадратну матрицю A порядку $n \geq 2$ вигляду

$$A = \begin{pmatrix} 1 & k & k & k & \ldots & k \\ 1 & m & k & k & \ldots & k \\ 1 & k & m & k & \ldots & k \\ 1 & k & k & m & \ldots & k \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & k & k & k & \ldots & m \end{pmatrix}.$$

Визначити всі пари цілих чисел (k, m), для яких матриця A^{-1} існує та складається лише з цілих чисел.

11 Елементи векторної алгебри

Векторна алгебра є невеликою, але дуже важливою частиною дисципліни "Лінійна алгебра та аналітична геометрія", без якої не можна уявити підготовку спеціаліста з будь-якої інженерної спеціальності. Вміння працювати з векторними величинами є одним з основних при вивченні вищої математики та фізики.

В темі "Векторна алгебра" студенти, як правило, вивчають лінійні операції над векторами, лінійну залежність і незалежність векторів, скалярний, векторний та мішаний добутки векторів, їх властивості та застосування. На базі цих відомостей у цьому розділі представлені деякі задачі підвищеної складності з цієї теми.

Аудиторні завдання.

11.1. Знайти вектор $\overrightarrow{x}$, якщо $\overrightarrow{x}\cdot\overrightarrow{a}=1$, $\overrightarrow{x}\cdot\overrightarrow{b}=0$, $\overrightarrow{x}\cdot\overrightarrow{c}=0$ і $(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})\cdot\overrightarrow{c}=1$.

Розв'язання. Оскільки $\overrightarrow{x}\cdot\overrightarrow{b}=0$ і $\overrightarrow{x}\cdot\overrightarrow{c}=0$, то відповідно $\overrightarrow{x}\perp\overrightarrow{b}$ і $\overrightarrow{x}\perp\overrightarrow{c}$. Це означає, що $\overrightarrow{x}\parallel\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{c}$, а значить $\overrightarrow{x}=\lambda(\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{c})$. Знайдемо λ з умов $\overrightarrow{x}\cdot\overrightarrow{a}=1$ та $(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})\cdot\overrightarrow{c}=1$. А саме,

$$1=\overrightarrow{x}\cdot\overrightarrow{a}=\lambda(\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{c})\cdot\overrightarrow{a}=\lambda(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})\cdot\overrightarrow{c}=\lambda.$$

Таким чином, $\overrightarrow{x}=\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{c}$. □

11.2. На площині задано 2014 векторів, причому серед них є неколінеарні. Відомо, що сума будь-яких 2013 векторів колінеарна до вектора, що не міститься в сумі. Знайти суму всіх векторів.

Розв'язання. Позначимо задані вектори $\overrightarrow{a}_1$, $\overrightarrow{a}_2$, $\ldots$, $\overrightarrow{a}_{2014}$, а їх суму через $\overrightarrow{S}$. За умовою

$$\overrightarrow{a}_1+\overrightarrow{a}_2+\ldots+\overrightarrow{a}_{k-1}+\overrightarrow{a}_{k+1}+\ldots+\overrightarrow{a}_{2014}=\lambda_k\overrightarrow{a}_k,\quad k=\overline{1,2014}.$$

Тоді сума всіх векторів дорівнює

$$\overrightarrow{S}=\overrightarrow{a}_1+\overrightarrow{a}_2+\ldots+\overrightarrow{a}_{k-1}+\overrightarrow{a}_k+\overrightarrow{a}_{k+1}+\ldots+\overrightarrow{a}_{2014}=$$
$$=\lambda_k\overrightarrow{a}_k+\overrightarrow{a}_k=(1+\lambda_k)\overrightarrow{a}_k,\quad k=\overline{1,2014}.$$

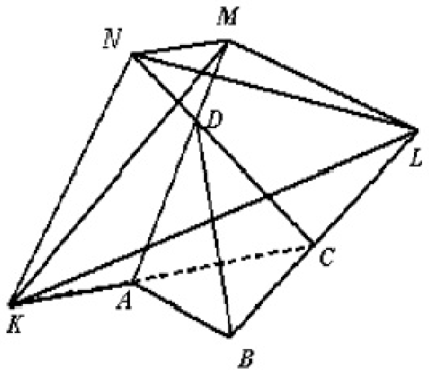
Звідси випливає, що

$$(1+\lambda_1)\overrightarrow{a}_1=(1+\lambda_2)\overrightarrow{a}_2=\ldots=(1+\lambda_{2014})\overrightarrow{a}_{2014},$$

а оскільки серед векторів є неколінеарні, то існують принаймні 2 з них, скажімо $\overrightarrow{a}_i$ і $\overrightarrow{a}_j$, для яких $\lambda_i=-1$ і $\lambda_j=-1$. Отже, $\overrightarrow{S}=\overrightarrow{0}$. □

11.3. Об'єм тетраедра $DABC$ дорівнює V. Точки K, L, M, N такі, що $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CL} = \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{DN} = \overrightarrow{CD}$. Знайти об'єм тетраедра $KLNM$.

Розв'язання. Зобразимо тетраедр і відкладемо від точки A вектор $\overrightarrow{AK}$, рівний вектору $\overrightarrow{CA}$, від точки C вектор $\overrightarrow{CL}$, рівний вектору $\overrightarrow{BC}$, від точки D вектор $\overrightarrow{DM}$, рівний вектору $\overrightarrow{AD}$, і вектор $\overrightarrow{DN}$, рівний вектору $\overrightarrow{CD}$ (див. мал. 11.1).



Мал. 11.1

Отримаємо новий тетраедр $KLMN$. Для того, щоб знайти його об'єм, виразимо вектори $\overrightarrow{KL}$, $\overrightarrow{KM}$, $\overrightarrow{KN}$, на яких він побудований, через вектори $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{CD}$.

$$\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{CL} - 2\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{BC} - 2\overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{CB} - 2\overrightarrow{CA},$$
$$\overrightarrow{KM} = 2\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{CA} = 2(\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CA}) - \overrightarrow{CA} = 2\overrightarrow{CD} - 3\overrightarrow{CA},$$
$$\overrightarrow{KN} = 2\overrightarrow{CD} - 2\overrightarrow{CA}.$$

Тоді об'єм тетраедра $KLMN$ можна знайти наступним чином

$$V_{KLNM} = \frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{KL} \times \overrightarrow{KM}) \cdot \overrightarrow{KN}\right| =$$
$$= \frac{1}{6}\left|\Big((-\overrightarrow{CB} - 2\overrightarrow{CA}) \times (2\overrightarrow{CD} - 3\overrightarrow{CA})\Big) \cdot (2\overrightarrow{CD} - 2\overrightarrow{CA})\right| =$$
$$= \frac{1}{6}\left|(-2\overrightarrow{CB} \times \overrightarrow{CD} + 3\overrightarrow{CB} \times \overrightarrow{CA} - 4\overrightarrow{CA} \times \overrightarrow{CD}) \cdot (2\overrightarrow{CD} - 2\overrightarrow{CA})\right| =$$
$$= \frac{1}{6}\left|4(\overrightarrow{CB} \times \overrightarrow{CD}) \cdot \overrightarrow{CA} + 6(\overrightarrow{CB} \times \overrightarrow{CA}) \cdot \overrightarrow{CD}\right| = \frac{1}{6}\left|2(\overrightarrow{CB} \times \overrightarrow{CA}) \cdot \overrightarrow{CD}\right| =$$
$$= \frac{1}{6} \cdot 2 \cdot 6V = 2V.$$

□

11.4. Довести, що координати будь-якої точки $M(x, y)$, що лежить на колі $x^2 + y^2 = \frac{5}{4}$, задовольняють нерівність

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ y & x & 1 \\ 1 & y & x \end{vmatrix} \leq \frac{27}{8}.$$

При яких x та y досягається рівність?

Доведення. З геометричної інтерпретації мішаного добутку випливає, що мішаний добуток — об'єм орієнтованого паралелепіпеда, побудованого на трьох векторах. Розглянемо з цієї точки зору заданий визначник

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ y & x & 1 \\ 1 & y & x \end{vmatrix}.$$

Він являє собою об'єм паралелепіпеда (зі знаком + або -), побудованого на векторах $\overrightarrow{a} = (x, y, 1)$, $\overrightarrow{b} = (y, x, 1)$ та $\overrightarrow{c} = (1, y, x)$. Ці вектори мають однакову довжину: $|\overrightarrow{a}| = |\overrightarrow{b}| = |\overrightarrow{c}| = \sqrt{x^2 + y^2 + 1}$, а оскільки за умовою точки (x, y) лежать на колі $x^2 + y^2 = \frac{5}{4}$, то $|\overrightarrow{a}| = |\overrightarrow{b}| = |\overrightarrow{c}| = \sqrt{x^2 + y^2 + 1} = \frac{3}{2}$.

Зрозуміло, що максимальний об'єм при заданих довжинах сторін має прямокутний паралелепіпед, тобто такий, у якого ребра попарно ортогональні, і об'єм такого паралелепіпеда дорівнює добутку довжин ребер. В нашому випадку,

$$V_{max} = |\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{b}| \cdot |\overrightarrow{c}| = \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{27}{8},$$

що й треба було довести. Рівність буде досягатися у випадку, коли $\overrightarrow{a} \perp \overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{a} \perp \overrightarrow{c}$, $\overrightarrow{b} \perp \overrightarrow{c}$, тобто

$$\begin{cases} xy + xy + 1 = 0, \\ x + y^2 + x = 0, \\ y + xy + x = 0. \end{cases}$$

Розв'язуючи цю систему, отримаємо, що $x = -\frac{1}{2}$, $y = 1$. Перевіряємо, що точка $(-\frac{1}{2}, 1)$ дійсно лежить на колі $x^2 + y^2 = \frac{5}{4}$. Отже, максимальне значення досягається. □

11.5. Довести, що вектори $\left((\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \times \overrightarrow{b}\right) \times \overrightarrow{b}$ та $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ колінеарні.

Доведення. Скористаємося формулою подвійного векторного добутку. А саме, відомо, що для довільних векторів $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ та $\overrightarrow{c}$ подвійний векторний добуток $\overrightarrow{a}\times(\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{c})$ є вектором, компланарним з векторами $\overrightarrow{b}$ та $\overrightarrow{c}$ і знаходиться за формулою:

$$\overrightarrow{a}\times(\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{c})=\overrightarrow{b}(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c})-\overrightarrow{c}(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}).$$

Згідно з цією формулою

$$(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})\times\overrightarrow{b}=-\overrightarrow{b}\times(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})=-\overrightarrow{a}(\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{b})+\overrightarrow{b}(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b})=$$
$$=\overrightarrow{b}(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b})-|\overrightarrow{b}|^2\cdot\overrightarrow{a}.$$

Тоді,

$$\Big((\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})\times\overrightarrow{b}\Big)\times\overrightarrow{b}=\Big(\overrightarrow{b}(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b})-|\overrightarrow{b}|^2\cdot\overrightarrow{a}\Big)\times\overrightarrow{b}=-|\overrightarrow{b}|^2\cdot\Big(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}\Big),$$

тобто вектори $\Big((\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})\times\overrightarrow{b}\Big)\times\overrightarrow{b}$ та $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}$ колінеарні. □

11.6. Скільки різних векторів містить послідовність

$$\overrightarrow{x}_0=\overrightarrow{x},\quad \overrightarrow{x}_1=\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{x}_0,\quad \overrightarrow{x}_2=\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{x}_1,\quad \overrightarrow{x}_3=\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{x}_2,\quad ...,$$

якщо $|\overrightarrow{a}|=1$.

Розв'язання. Скористаємося формулою для подвійного добутку. За умовою $\overrightarrow{x}_1=\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{x}$. Тоді

$$\overrightarrow{x}_2=\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{x}_1=\overrightarrow{a}\times(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{x})=\overrightarrow{a}(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{x})-\overrightarrow{x}(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{a})=$$
$$=\overrightarrow{a}(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{x})-\overrightarrow{x}|\overrightarrow{a}|^2=\overrightarrow{a}(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{x})-\overrightarrow{x}.$$

Далі

$$\overrightarrow{x}_3=\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{x}_2=\overrightarrow{a}\times\Big(\overrightarrow{a}(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{x})-\overrightarrow{x}\Big)=-\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{x}=\overrightarrow{x}\times\overrightarrow{a}.$$

Аналогічно,

$$\overrightarrow{x}_4=\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{x}_3=\overrightarrow{a}\times(\overrightarrow{x}\times\overrightarrow{a})=\overrightarrow{x}(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{a})-\overrightarrow{a}(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{x})=\overrightarrow{x}-\overrightarrow{a}(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{x}),$$

і

$$\overrightarrow{x}_5=\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{x}_4=\overrightarrow{a}\times\Big(\overrightarrow{x}-\overrightarrow{a}(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{x})\Big)=\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{x}=\overrightarrow{x}_1.$$

Таким чином, послідовність містить лише 5 різних векторів. □

11.7. Нехай $\overrightarrow{a}$ і $\overrightarrow{b}$ — ненульові вектори в $\mathbb{R}^3$. При яких значеннях параметра $\lambda\in\mathbb{R}$ рівняння $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{x}=\lambda\overrightarrow{b}$ має розв'язки? Знайти ці розв'язки.

Розв'язання. Помножимо обидві частини рівняння на вектор $\overrightarrow{b}$ скалярно. Тоді рівняння перетвориться на наступне:

$$(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b})+(\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{x})\cdot\overrightarrow{b}=\lambda(\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{b}),$$

звідки
$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = \lambda |\overrightarrow{b}|^2,$$
а отже, оскільки вектор $\overrightarrow{b}$ — ненульовий, то
$$\lambda = \frac{\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{b}|^2}.$$

Знайдемо тепер всі можливі розв'язки рівняння. Для цього помножимо його векторно на вектор $\overrightarrow{b}$ зліва:
$$\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} \times (\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{x}) = \lambda(\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{b}).$$
Звідси
$$\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}(\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{x}) - \overrightarrow{x}(\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{b}) = \overrightarrow{0},$$
тобто
$$\overrightarrow{x} = \frac{(\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{x})}{|\overrightarrow{b}|^2}\overrightarrow{b} - \frac{\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{b}|^2},$$
де невідомим залишається число $(\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{x})$. Помножимо тепер обидві частини рівняння векторно на вектор $\overrightarrow{a}$ зліва:
$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{a} + \overrightarrow{a} \times (\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{x}) = \lambda(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}).$$
Підставляючи в останню рівність знайдене значення λ, та виразивши з нього вектор $\overrightarrow{x}$, отримаємо, що
$$\overrightarrow{x} = \frac{(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{x})}{(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b})}\overrightarrow{b} - \frac{\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{b}|^2},$$
Порівнюючи обидва вирази для вектора $\overrightarrow{x}$, помічаємо, що вектор $\overrightarrow{x}$ розкладається за векторами $\overrightarrow{b}$ та $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$, але з різними коефіцієнтами при векторі $\overrightarrow{b}$. Тому виникає припущення, що розв'язком заданого рівняння є множина векторів виду
$$\overrightarrow{x} = t\overrightarrow{b} - \frac{\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{b}|^2}, \quad t \in \mathbb{R}.$$
Перевіряємо це безпосередньою підстановкою в рівняння. □

11.8. Позначимо через D множину точок площини, що знаходяться всередині квадрата з вершинами $(1,1)$, $(-1,1)$, $(-1,-1)$, $(1,-1)$. Зобразити геометричне місце таких точок Y на площині, що $\left\langle \overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OY} \right\rangle \leq 1$ для будь-якої точки $X \in D$. Тут кутовими дужками позначено скалярний добуток векторів.

Розв'язання. Позначимо шукану множину через C. Підставляючи замість X точку $(1,1)$, отримаємо, що кожна точка $Y(y_1,y_2)$ множини C має задовольняти нерівність $y_1+y_2\le 1$. Аналогічно, підставляючи замість X інші вершини квадрата D, отримаємо також нерівності $y_1+y_2\ge -1$, $y_1-y_2\le 1$ та $y_1-y_2\ge -1$. Отже, C має бути підмножиною квадрата $\{(y_1,y_2)\in\mathbb{R}^2 : |y_1|+|y_2|\le 1\}$.

Покажемо, що, і навпаки, $\{(y_1,y_2)\in\mathbb{R}^2 : |y_1|+|y_2|\le 1\}\subset C$. Дійсно, нехай для $Y(y_1,y_2)$ виконується нерівність $|y_1|+|y_2|\le 1$, а $X(x_1,x_2)\in D$. Тоді $\langle\overrightarrow{OX},\overrightarrow{OY}\rangle = x_1y_1+x_2y_2\le |x_1||y_1|+|x_2||y_2|\le |y_1|+|y_2|\le 1$.

Відповідь: $\{(y_1,y_2)\in\mathbb{R}^2 : |y_1|+|y_2|\le 1\}$, тобто квадрат з вершинами $(1,0)$, $(0,1)$, $(-1,0)$ та $(0,-1)$. □

11.9. Розглянемо n векторів a_1, a_2, …, a_n у просторі $\mathbb{R}^n$. *Матрицею Грама* векторів a_1, a_2, …, a_n називається матриця, складена із попарних скалярних добутків цих векторів:

$$\Gamma=\begin{pmatrix}(\overrightarrow{a_1}\cdot\overrightarrow{a_1}) & (\overrightarrow{a_1}\cdot\overrightarrow{a_2}) & \ldots & (\overrightarrow{a_1}\cdot\overrightarrow{a_n})\\ (\overrightarrow{a_2}\cdot\overrightarrow{a_1}) & (\overrightarrow{a_2}\cdot\overrightarrow{a_2}) & \ldots & (\overrightarrow{a_2}\cdot\overrightarrow{a_n})\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ (\overrightarrow{a_n}\cdot\overrightarrow{a_1}) & (\overrightarrow{a_n}\cdot\overrightarrow{a_2}) & \ldots & (\overrightarrow{a_n}\cdot\overrightarrow{a_n})\end{pmatrix}.$$

Довести, що

1) a_1, a_2, …, a_n є лінійно залежними тоді і тільки тоді, коли $\det\Gamma=0$;

2) $\det\Gamma=V^2$, де V — об'єм паралелепіпеда, побудованого на a_1, a_2, …, a_n (довести для $n=3$).

Доведення. 1) Нагадаємо, що система векторів $\overrightarrow{a}_1$, $\overrightarrow{a}_2$, …, $\overrightarrow{a}_n$ називається *лінійно залежною*, якщо існують такі дійсні числа c_1, c_2, …, c_n, хоча б одне з яких не дорівнює нулю, що

$$c_1\overrightarrow{a}_1+c_2\overrightarrow{a}_2+\ldots+c_n\overrightarrow{a}_n=\overrightarrow{0}. \tag{11.1}$$

Якщо рівність (11.1) виконується тільки, коли всі $c_1=c_2=\ldots=c_n=0$, то система векторів $\overrightarrow{a}_1$, $\overrightarrow{a}_2$, …, $\overrightarrow{a}_n$ називається *лінійно незалежною*.

Помножимо поступово рівність (11.1) скалярно на a_1, a_2, …, a_n і складемо систему рівнянь відносно коефіцієнтів c_1, c_2, …, c_n:

$$\begin{cases}(\overrightarrow{a_1}\cdot\overrightarrow{a_1})c_1+(\overrightarrow{a_1}\cdot\overrightarrow{a_2})c_2+\ldots+(\overrightarrow{a_1}\cdot\overrightarrow{a_n})c_n=0,\\ (\overrightarrow{a_2}\cdot\overrightarrow{a_1})c_1+(\overrightarrow{a_2}\cdot\overrightarrow{a_2})c_2+\ldots+(\overrightarrow{a_2}\cdot\overrightarrow{a_n})c_n=0,\\ \ldots\\ (\overrightarrow{a_n}\cdot\overrightarrow{a_1})c_1+(\overrightarrow{a_n}\cdot\overrightarrow{a_2})c_2+\ldots+(\overrightarrow{a_n}\cdot\overrightarrow{a_n})c_n=0.\end{cases}$$

Утворилася однорідна система лінійних алгебраїчних рівнянь. З лінійної алгебри відомо, що вона має нетривіальний розв'язок тоді і лише тоді, коли її визначник не дорівнює нулю. Але визначником цієї системи є $\det \Gamma$. Звідси отримали необхідний критерій.

2) Для $n = 3$ доведення можна провести безпосередньо. Нехай $\overrightarrow{a_1} = (x_1; y_1; z_1)$, $\overrightarrow{a_2} = (x_2; y_2; z_2)$, $\overrightarrow{a_3} = (x_3; y_3; z_3)$. Запишемо всі елементи матриці Грама (тобто попарні скалярні добутки) у термінах координат векторів

$$|\Gamma| = \begin{vmatrix} |\overrightarrow{a_1}|^2 & (\overrightarrow{a_1} \cdot \overrightarrow{a_2}) & (\overrightarrow{a_1} \cdot \overrightarrow{a_3}) \\ (\overrightarrow{a_1} \cdot \overrightarrow{a_2}) & |\overrightarrow{a_2}|^2 & (\overrightarrow{a_2} \cdot \overrightarrow{a_3}) \\ (\overrightarrow{a_1} \cdot \overrightarrow{a_3}) & (\overrightarrow{a_2} \cdot \overrightarrow{a_3}) & |\overrightarrow{a_3}|^2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) & x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 & x_1x_3 + y_1y_3 + z_1z_3 \\ x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 & (x_2^2 + y_2^2 + z_2^2) & x_2x_3 + y_2y_3 + z_2z_3 \\ x_1x_3 + y_1y_3 + z_1z_3 & x_2x_3 + y_2y_3 + z_2z_3 & (x_3^2 + y_3^2 + z_3^2) \end{vmatrix} =$$

$$= \left| \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix} \right| =$$

$$= \left|(\overrightarrow{a_1} \times \overrightarrow{a_2}) \cdot \overrightarrow{a_3}\right|^2,$$

тобто отримали квадрат модуля мішаного добутку векторів $\overrightarrow{a_1}$, $\overrightarrow{a_2}$, $\overrightarrow{a_3}$. З курсу векторної алгебри відомо, що модуль мішаного добутку векторів дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на цих векторах. Твердження доведено.

Для довільного натурального n твердження випливає з процесу ортогоналізації Грама-Шмідта. □

Задачі для самостійного розв'язання.

11.10. Про вектори $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ відомо, що $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c} = \overrightarrow{c} \times \overrightarrow{a} \neq \overrightarrow{0}$. Довести, що $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c} = \overrightarrow{0}$.

11.11. Знайти вектор $\overrightarrow{x}$, якщо відомо, що $\overrightarrow{x} \perp \overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{x}$ утворює з вектором $\overrightarrow{b}$ кут $\frac{\pi}{4}$, і трійка векторів $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{x}$ — права. Тут $\overrightarrow{a} = (0, 1, 1)$, $\overrightarrow{b} = (1, 1, 0)$.

11.12. Про вектори $\overrightarrow{a}$ і $\overrightarrow{b}$ відомо, що $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = 2\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} + 2\overrightarrow{k}$. Знайти вектор $\overrightarrow{m}$, якщо $|\overrightarrow{m}| = 1$ і $(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{m}) \cdot \overrightarrow{b} = 3$.

11.13. Три вектори $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ та $\overrightarrow{OC}$ задовольняють умову

$$\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OB} \times \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OC} \times \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{0}.$$

Довести, що вектори $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ та $\overrightarrow{OC}$ компланарні та точки A, B, C лежать на одній прямій.

11.14. Довести рівність:

$$(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \cdot (\overrightarrow{c} \times \overrightarrow{d}) = \begin{vmatrix} (\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{c}) & (\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{d}) \\ (\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{c}) & (\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{d}) \end{vmatrix}.$$

11.15. Довести, що для будь-яких $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0,5 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & -\sqrt{3} \\ -3\sqrt{3} & 7 & 2 \end{vmatrix} \leq 20.$$

При яких α досягається рівність?

11.16. На всіх сторонах опуклого n-кутника $A_1A_2...A_n$ зовні побудовано правильні трикутники $A_1A_2B_n$, $A_2A_3B_1$, $A_3A_4B_2$, $\ldots$, $A_nA_1B_{n-1}$. Довести, що

$$\overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{A_2B_2} + \ldots + \overrightarrow{A_nB_n} = \overrightarrow{0}.$$

11.17. Нехай $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — вершини правильного n-кутника, вписаного в коло одиничного радіуса, B — деяка точка цього кола. Знайти

$$\sum_{k=1}^{n} |BA_k|^2.$$

11.18. Чи можна в просторі розташувати точки O, A, B, C таким чином, щоб $|OC| = 3$; $|AB| = 4$; $|BC| = 5$; $|OA| = |OB| = 6$; $|AC| = 7$?

12 Елементи аналітичної геометрії

Навчитися розв'язувати геометричні задачі — це майстерність, яка окрім знань предмету вимагає наполегливості та навички просторово мислити.

Задачі, що розглядаються у цьому розділі передбачають, що студенти ознайомлені з базовим матеріалом з курсу аналітичної геометрії на площині і в просторі: типами рівнянь прямої на площині та в просторі; різними видами рівнянь площини; взаємним розташування прямих та площин в просторі; кривими 2-го порядку, їх властивостями; поверхнями 2-го порядку та їх властивостями.

Зрозуміло, що охопити всі можливі типи задач з цієї теми, як і з будь-якої іншої, за одне заняття абсолютно неможливо. Мета цього розділу — дати уявлення про деякі геометричні задачі підвищеної складності.

Аудиторні завдання.

12.1. Які значення може набувати відстань від точки $A(3, 2, 3)$ до різних площин, які проходять через точки $B(1, 1, 1)$ та $C(2, 2, 2)$?

Розв'язання. Найменша можлива відстань — це, звичайно, 0. Найбільша — відстань від точки A до прямої BC. Вона дорівнює $\frac{|\overline{CA}\times\overline{s}|}{|\overline{s}|}$, де $\overline{s} = (1, 1, 1)$ — напрямний вектор прямої BC, $\overline{CA} = (1, 0, 1)$. Підставляючи, отримаємо

$$|\overline{CA} \times \overline{s}| = \left|\det \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{2},$$

$|\overline{s}| = \sqrt{3}$. Отже, $\frac{|\overline{CA}\times\overline{s}|}{|\overline{s}|} = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

Відповідь: всі значення від 0 до $\frac{\sqrt{6}}{3}$. □

12.2. Чи можна в еліпс вписати правильний шестикутник?

Розв'язання. Якщо есліпс є колом, то в нього, очевидно, можна вписати правильний шестикутник. Якщо еліпс не є колом, то з довільним колом він може мати не більше 4-х спільних точок. Припустимо, що в еліпс, що не є колом, вписано правильний шестикутник. Тоді цей еліпс буде мати 6 спільних точок з описаним навколо шестикутника кола, чого бути не може. Отримали протиріччя. □

12.3. З фіксованої точки поза еліпсоїдом проведені усі можливі дотичні площини до нього. Довести, що точки дотику лежать в одній площині.

Доведення. Нехай $M(x_1, y_1, z_1)$ — задана точка поза еліпсоїдом. Дотичні площини до еліпсоїда $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ задаються рівнянням

$$\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}+\frac{zz_0}{c^2}=1,$$

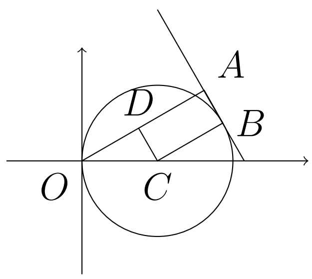
де (x_0, y_0, z_0) — точка дотику. Оскільки усі дотичні площини проходять через точку M, то

$$\frac{x_1}{a^2}x_0+\frac{y_1}{b^2}y_0+\frac{z_1}{c^2}z_0=1,$$

тобто усі точки дотику (x_0, y_0, z_0) задовольняють рівняння площини. $\square$

12.4. З початку координат опущені перпендикуляри на усеможливі дотичні до кола $x^2+y^2=2x$. Знайти рівняння кривої, яку складають основи цих перпендикулярів.

Розв'язання. Нехай AB — це довільна дотична до кола, OA — опущений на неї перпендикуляр, $C(1;0)$ — центр кола.



Будемо шукати полярне рівняння кривої. Для цього виразимо довжину відрізка OA через полярний кут φ. З малюнку видно, що $OD = OC\cos\varphi = R\cos\varphi = \cos\varphi$. Тому

$$OA = OD + DA = OD + CB = 1 + \cos\varphi.$$

Отже, шукане рівняння $\rho = 1+\cos\varphi$. Це рівняння задає кардіоїду. $\square$

12.5. Дано два кола, що не перетинаються та не лежать одне в одному радіусів R_1 та R_2 ($R_1 \neq R_2$). Знайти ГМТ центрів кіл, що дотикаються двох заданих.

Розв'язання. Нехай центри заданих кіл O_1 та O_2. Розглянемо довільне коло, що одночасно дотикається до заданих кіл, та нехай його центр O_3 та радіус r. Тоді, оскільки кола дотикаються, то $O_1O_3 = R_1+r$, $O_2O_3 = R_2+r$. Розглянемо різницю цих відстаней

$$O_1O_3 - O_2O_3 = R_1 - R_2 = const.$$

Отже різниця відстаней від точки O_3 до двох фіксованих точок O_1 та O_2 — стала величина. А тому шукане ГМТ — гіпербола з фокусами O_1 та O_2. $\square$

12.6. Довести, що просторова крива

$$\begin{cases} x = a_1t^2 + b_1t + c_1, \\ y = a_2t^2 + b_2t + c_2, \\ z = a_3t^2 + b_3t + c_3, \end{cases}$$

є плоскою, тобто усі її точки належать деякій площині.

Доведення. Розглянемо три двовимірні вектори $\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \end{pmatrix}$. Вони лінійно залежні. Тому існують такі числа A, B, C, серед яких не всі нулі, що

$$A\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} + B\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} + C\begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \end{pmatrix} = \overrightarrow{0}.$$

Нехай (x, y, z) — довільна точка кривої. Тоді, з останньої рівності, маємо

$$Ax + By + Cz = A(a_1t^2 + b_1t + c_1) + B(a_2t^2 + b_2t + c_2) + C(a_3t^2 + b_3t + c_3) =$$

$$= Ac_1 + Bc_2 + Cc_3 = D.$$

Отже точки кривої задовольняють рівність $Ax + By + Cz = D$, а значить лежать в одній площині. □

12.7. Рівносторонні трикутники зі сторонами $1, 3, 5, 7, \ldots$ розташовані так, що їх основи лежать на одній прямій та примикають одна до одної. Довести, що вершини трикутників, протилежні основам, лежать на параболі та віддалені від її фокуса на відстань, що є цілим числом.

Доведення. Нехай $M_n(x_n, y_n)$ — вершина n-го трикутника.

$$x_1 = 0, x_2 = 2, x_3 = \frac{1}{2} + 3 + \frac{5}{2}, \ldots x_n = \frac{1}{2} + 3 + 5 + \ldots + \frac{2n-1}{2} = n^2 - n;$$

$$y_n = \frac{2n-1}{2}\sqrt{3}.$$

Виключимо n. Отримаємо:

$$y^2 = 3\left(x + \frac{1}{4}\right).$$

Отже вершини трикутників лежать на параболі. Її фокус знаходиться в точці $F(\frac{1}{2}, 0)$. Знайдемо

$$M_nF = \sqrt{\left(n^2 - n - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{2n-1}{2}\sqrt{3}\right)^2} = n^2 - n + 1.$$

Тобто ця відстань — ціле число. □

Задачі для самостійного розв'язання.

12.8. Планета має форму тіла, що утворене обертанням квадрата зі стороною a навколо своєї діагоналі. Подорож по планеті вважається кругосвітньою, якщо її маршрут — замкнута крива, яка симетрична відносно свого центру. Знайти довжину найкоротшої кругосвітньої подорожі.

12.9. На параболі $y^2 = 2px$ знайти точку так, щоб нормаль, проведена до параболи в цій точці, відтинала сегмент мінімальної площі.

12.10. Чи можна всередині кола одиничного радіуса розмістити дугу параболи, довжина якої більша 4?

12.11. Знайти криву, утворену центрами кіл, що дотикаються даного кола та проходять через дану точку.

12.12. У воронку в формі параболоїду $z = x^2 + y^2$ кинули кулю радіуса R. Знайти координати центру кулі після падіння та закінчення коливань.

12.13. Нехай P — деяка точка на параболі $y = x^2$. Нормаль, проведена до параболи в точці P, знову перетинає її в точці Q. Знайдіть мінімальну можливу довжину відрізка PQ та координати відповідної точки P.

12.14. На площині розташовано дві параболи так, що їхні осі взаємно перпендикулярні, а самі параболи перетинаються в чотирьох точках. Довести, що ці чотири точки лежать на одному колі.

12.15. Дві прямі на площині перетинаються під кутом $60°$. Хорда одиничної довжини ковзає по прямим так, що один її кінець рухається по одній прямій, а інший — по другій. Показати, що середина хорди при цьому описує еліпс, та визначити положення його фокусів.

12.16. Прямокутний трикутник вписано у параболу $y = x^2$, причому координати всіх його вершин є цілими числами. Довести, що його катети паралельні прямим $y = x$ та $y = -x$.

12.17. Довести, що відрізок будь-якої дотичної до рівнобічної гіперболи, який лежить між її асимптотами, ділиться точкою дотику навпіл.

12.18. Позначимо через B_r круг з центром в точці (r, r) та радіусом $\sqrt{r^2+1}$. Описати множину $\bigcup\limits_{r\in\mathbb{R}} B_r$ у якомога простішому вигляді та зобразити її.

13 Похідна та її застосування

Диференціальне числення — це дуже потужний апарат, який дозволяє досліджувати властивості поведінки функцій, доводити різні нерівності, встановлювати існування та кількість коренів рівнянь, розв'язувати оптимізаційні та екстремальні задачі, задачі про дотичну і нормаль до кривої та багато інших.

Цей розділ має на меті вибірково проілюструвати застосування похідної до деяких задач математичного аналізу. Серед тверджень, що мають неабияке теоретичне та прикладне значення у диференціальному численні функції однієї змінної, виділяють теореми про неперервні на відрізку і диференційовні в інтервалі функції — теореми французьких математиків Мішеля Ролля (1652-1719), Жозефа Луї Лагранжа (1736-1813), Огюстена Луї Коші (1789-1857). Ці теореми, як правило, формулюються в стандартному курсі математичного аналізу, але на практичних заняттях їм приділяється мало уваги. Тому нагадаємо їх.

Теорема 13.1 (Ролля). *Нехай функція $f(x)$ — неперервна на відрізку $[a;b]$, диференційовна в інтервалі $(a;b)$ та приймає на кінцях відрізка рівні значення: $f(a) = f(b)$. Тоді існує принаймні одна точка $c \in (a;b)$ така, що $f'(c) = 0$.*

Теорема 13.2 (Лагранжа). *Якщо функція $f(x)$ — неперервна на відрізку $[a;b]$, диференційовна в інтервалі $(a;b)$, то існує принаймні одна точка $c \in (a;b)$ така, що*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

Теорема 13.3 (Коші). *Нехай функції $f(x)$ та $g(x)$ — неперервні на відрізку $[a;b]$, диференційовні в інтервалі $(a;b)$ і $g'(x) \neq 0$ $x \in (a;b)$. Тоді існує принаймні одна точка $c \in (a;b)$ така, що*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Аудиторні завдання.

13.1. В кулю радіуса R впишіть циліндр найбільшого об'єму. *Розв'язання.* Нехай r — радіус основи циліндра, H — його висота, V — об'єм циліндра. Тоді

$$\left(\frac{1}{2}H\right)^2 = R^2 - r^2,$$

звідки

$$V = \pi r^2 H = 2\pi r^2 \sqrt{R^2 - r^2}.$$

Тоді

$$V' = 2\left(2\pi r\sqrt{R^2 - r^2} - \frac{\pi r^3}{\sqrt{R^2 - r^2}}\right) = 2 \cdot \frac{2\pi r R^2 - 3\pi r^3}{\sqrt{R^2 - r^2}}.$$

Прирівнюючи V' до нуля, і застосовуючи достатні умови екстремуму, знаходимо, що точкою максимуму функції буде $r = \sqrt{\frac{2}{3}}R$.

Відповідь: $\sqrt{\frac{2}{3}}R$. □

13.2. Нехай функції u та v є диференційовними, причому для всіх x $u'(x)v(x) - v'(x)u(x) \neq 0$. Довести, що між будь-якими двума коренями рівняння $v = 0$ лежить корінь рівняння $u = 0$ і навпаки.

Доведення. Нехай $u(\alpha) = u(\beta) = 0$ і $v(x) \neq 0, x \in (\alpha;\beta)$. Тоді на інтервалі $(\alpha;\beta)$ функція $\frac{u}{v}$ неперервна і дорівнює 0 на кінцях цього інтервалу. За теоремою Ролля існує точка $c \in (\alpha;\beta)$, в якій $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2} = 0$, що суперечить умові задачі. □

13.3. Нехай

$$f(x) = \frac{d^n}{dx^n}(x^2 - 1)^n.$$

Довести, що всі корені рівняння $f(x) = 0$ розташовані на інтервалі $(-1;1)$.

Доведення. Функція $(x^2 - 1)^n$ має два корені кратності n: 1 та -1. Згідно теореми Ролля функція $((x^2 - 1)^n)'$ має один корінь $c \in (-1;1)$, а також корені -1 та 1 кратності $n - 1$. Функція $((x^2 - 1)^n)''$ має корені -1 та 1 кратності $n - 2$, а також два корені на інтервалах $(-1;c)$ та $(c;1)$ відповідно. І т.д.

Зрештою, функція $f(x) = \frac{d^n}{dx^n}(x^2 - 1)^n$ матиме n різних коренів всередині інтервалу $(-1;1)$, а оскільки функція f — це поліном степеня n, то це всі його корені. □

13.4. Знайти всі дійсні корені рівняння

$$xe^{-x} + e^{-x} + \frac{x^2}{2} - 1 = 0.$$

Розв'язання. $f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} - e^{-x} + x = x(1 - e^{-x}) > 0$ при $x \neq 0$. Отже, $f(x)$ монотонно зростає і може мати не більше одного кореня. Підстановкою перевіряємо, що $x = 0$ є єдиним коренем функції f. □

13.5. Нехай $f(x)$ — многочлен степеня n і

$$\Phi(x) = f(x) + \frac{f'(x)}{2} + \ldots + \frac{f^{(n)}(x)}{2^n}.$$

Довести, що, якщо всі корені $\Phi(x)$ дійсні, то і всі корені $f(x)$ теж дійсні.

Доведення. $\Phi(x)$ — многочлен степеня n, а отже, він має n коренів, що лежать на деякому відрізку $[a;b]$. Розглянемо функцію $\varphi(x) = e^{-2x}\Phi(x)$. Оскільки $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-2x}\Phi(x) = 0$, то згідно теореми Ролля похідна $\varphi'(x)$ має не менше n коренів на проміжку $[a,+\infty)$. Але

$$\varphi'(x) = e^{-2x}(-2\Phi(x) + \Phi'(x)) =$$

$$= e^{-2x}\left(-2f(x) - f'(x) - \ldots - \frac{f^{(n)}(x)}{2^{n-1}} + f'(x) + \frac{f''(x)}{2} + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(x)}{2^{n-1}}\right) =$$

$$= e^{-2x}(-2f(x)).$$

А отже, функція $f(x)$ має n дійсних коренів. □

13.6. Чи існує відмінна від константи функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, що для всіх $x, y \in \mathbb{R}$ задовольняє нерівності

$$(f(x) - f(y))^2 \le |x - y|^3?$$

Доведення. З нерівності $(f(x) - f(y))^2 \le |x - y|^3$ при $x \ne y$ випливає, що

$$\left|\frac{f(x) - f(y)}{x - y}\right| \le |x - y|^{1/2},$$

звідки, в свою чергу, маємо

$$\lim_{x\to y}\left|\frac{f(x) - f(y)}{x - y}\right| = 0.$$

Отже, функція $f(x)$ диференційовна в кожній точці, причому $f'(x) = 0, x \in \mathbb{R}$. Відповідно, вона може бути лише константою. □

13.7. Графік довільної диференційовної на $[a;b]$ функції $\varphi(x)$ перетинається з прямою $y = Ax + B$ в точках з абсцисами a і b, де $0 < a < b$. Довести, що на інтервалі $(a;b)$ існують такі точки ξ і η, що $A = \varphi'(\xi)$ і $B = \varphi(\eta) - \eta \cdot \varphi'(\eta)$.

Вказівка. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} Aa + B = \varphi(a), \\ Ab + B = \varphi(b) \end{cases}$$

відносно A та B за формулами Крамера:

$$A = \frac{\varphi(b) - \varphi(a)}{b - a}, \quad B = \frac{b\varphi(a) - a\varphi(b)}{b - a}$$

та застосувати на $[a; b]$ теорему Лагранжа для функції $\varphi(x)$ і теорему Коші для функцій $\frac{\varphi(x)}{x}$ і $\frac{1}{x}$. $\square$

13.8. Довести, що для довільного додатного x виконується нерівність

$$e^x \geq x^e.$$

Доведення. Для $x > 0$

$$e^x \geq x^e \quad \Leftrightarrow \quad x \geq e \ln x \quad \Leftrightarrow \quad x - e \ln x \geq 0.$$

Позначимо

$$f(x) = x - e \ln x.$$

Тоді

$$f'(x) = \frac{x - e}{x}.$$

Звідси маємо, що $x = e$ є точкою мінімуму функції $f(x)$ на проміжку $(0; +\infty)$. Тому для всіх $x > 0$

$$f(x) \geq f(e) = e - e \ln e = 0.$$

$\square$

13.9. Показати, що для будь-яких дійсних чисел α та β виконується нерівність

$$\frac{|\alpha + \beta|}{1 + |\alpha + \beta|} \leq \frac{|\alpha|}{1 + |\alpha|} + \frac{|\beta|}{1 + |\beta|}.$$

Доведення. Функція $f(x) = \frac{x}{1+x}$ є монотонно зростаючою на $[0; +\infty)$, оскільки

$$f'(x) = \frac{1}{(1 + x)^2} > 0, \quad x \geq 0.$$

А оскільки $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta| \leq |\alpha| + |\beta| + |\alpha\beta|,$$

то

$$\frac{|\alpha + \beta|}{1 + |\alpha + \beta|} \leq \frac{|\alpha| + |\beta| + |\alpha\beta|}{1 + |\alpha| + |\beta| + |\alpha\beta|} \leq \frac{|\alpha| + |\beta| + 2|\alpha\beta|}{1 + |\alpha| + |\beta| + |\alpha\beta|} =$$

$$= \frac{|\alpha| + |\alpha\beta| + |\beta| + |\alpha\beta|}{(1 + |\alpha|)(1 + |\beta|)} = \frac{|\alpha|}{1 + |\alpha|} + \frac{|\beta|}{1 + |\beta|}.$$

$\square$

13.10. Порівняти числа $a = 2010^{2009} \cdot 2008^{2008}$ та $b = 2009^{2009} \cdot 2009^{2008}$.

Розв'язання. Поділимо обидва числа на

$$c = 2008^{2008} \cdot 2009^{2009}.$$

Одержимо
$$\frac{a}{c} = \frac{2010^{2009}}{2009^{2009}} = \left(1 + \frac{1}{2009}\right)^{2009},$$
$$\frac{b}{c} = \frac{2009^{2008}}{2008^{2008}} = \left(1 + \frac{1}{2008}\right)^{2008}.$$
Розглянемо функцію
$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x}, \quad x > 0,$$
та дослідимо її на монотонність. Її похідна
$$f'(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x} \left(\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) + \frac{x}{1 + \frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)\right) =$$
$$= \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x} \left(\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{1 + x}\right).$$
Введемо допоміжну функцію
$$g(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{1 + x}, \quad x > 0.$$
Оскільки
$$g'(x) = \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) + \frac{1}{(1 + x)^2} = \frac{1}{(1 + x)^2} - \frac{1}{x(1 + x)} =$$
$$= -\frac{1}{x(1 + x)^2} < 0, \quad x > 0,$$
то функція g монотонно спадає на $(0; +\infty)$. Легко бачити, що
$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = 0,$$
а тому
$$g(x) > 0, \quad x > 0.$$
Отже
$$f'(x) > 0, \quad x > 0,$$
що означає, що функція f монотонно зростає на $(0; +\infty)$.

Тоді
$$\frac{a}{c} = f(2009) > f(2008) = \frac{b}{c},$$
тобто, $a > b$. □

Задачі для самостійного розв'язання.

13.11. Нехай неперервна функція $f : [0;1] \to [0;1]$ диференційовна на інтервалі $(0;1)$, причому $f(0) = 0, f(1) = 1$. Довести, що існують такі числа $a, b \in (0;1), a \neq b$, що $f'(a)f'(b) = 1$.

13.12. Нехай $f(x), \varphi(x), \psi(x)$ неперервні на $[a,b]$ і диференційовні на (a,b). Довести, що існує така точка $\xi \in (a,b)$, для якої виконується

$$\begin{vmatrix} f(a) & \varphi(a) & \psi(a) \\ f(b) & \varphi(b) & \psi(b) \\ f'(\xi) & \varphi'(\xi) & \psi'(\xi) \end{vmatrix} = 0.$$

13.13. Чи має многочлен $p(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$ кратні корені?

13.14. Чи може рівняння $x^3 - 3x + c = 0$ мати більше одного кореня в інтервалі $(0;1)$?

13.15. Нехай $f : [0;1] \to \mathbb{R}$ — диференційовна функція така, що $f(0) = f(1) - 1 = 0$. Покажіть, що для кожного $n \in \mathbb{N}$ існують такі попарно різні точки $x_1, x_2, \ldots, x_n \in (0;1)$, що

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{f'(x_i)} = n.$$

13.16. Для всіх $0 < a < b$ довести нерівність:

$$\frac{b-a}{b} < \ln\frac{b}{a} < \frac{b-a}{a}$$

13.17. Довести, що для всіх $x > 0$ виконується нерівність

$$\frac{x}{x+1} < \ln(x+1).$$

13.18. Довести, що для всіх $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ виконується нерівність

$$\frac{2\cos x}{1+\cos x} < \frac{\sin x}{x}.$$

13.19. Довести, що для всіх $x > 0$ та $p > 1$ справедлива нерівність

$$\ln(1 + x^p) < \frac{(p-1)\,x}{\sqrt[p]{p-1}}.$$

13.20. Функція f, визначена та диференційовна на $\mathbb{R}$, задовольняє нерівність $f(x)f'(x) \geq \sin x$ для будь-якого x. Чи може існувати скінченна границя $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$?

14 Класичні нерівності Йєнсена, Коші, Гельдера та їх застосування

Доводити математичні нерівності — це мистецтво, оволодіти яким зовсім непросто. Тут потрібні терпіння, великий досвід, інтуїція та, звичайно, вміння застосовувати різні технічні підходи. Математика налічує десятки різних методів доведення нерівностей, кожен з яких, як правило, добре працює з певним класом однотипних задач. Наприклад, в розділі 1 ми познайомилися з методом математичної індукції, в розділі 13 наведено деякі задачі на доведення нерівностей за допомогою диференціального числення. Ще одним ефективним прийомом в таких задачах є застосування класичних нерівностей, наприклад, нерівностей Йєнсена, Коші, Гельдера, Мінковського та інших.

У цьому розділі продемонструємо 3 класичні нерівності — нерівність датського математика Йогана Йєнсена (1859-1925), нерівність французького математика Огюстена Луї Коші (1789-1857) та нерівність німецького математика Отто Гельдера (1859-1937), та розглянемо їх застосування при розв'язанні інших задач. Самі нерівності Йєнсена, Коші, Гельдера наведено безпосередньо у якості задач.

Аудиторні завдання.

14.1. (*Нерівність Йєнсена*) Нехай функція f опукла донизу на $[a;b]$, а $q_1,\ldots,q_n$ — додатні числа, сума яких дорівнює одиниці. Тоді $\forall x_1,\ldots,x_n \in [a;b]$

$$f\left(q_1x_1+\ldots+q_nx_n\right) \le q_1 f\left(x_1\right)+\ldots+q_n f\left(x_n\right).$$

Доведення. Доведемо цю нерівність методом математичної індукції. При $n=2$ твердження збігається з означенням опуклої донизу функції. Припустимо, що нерівність виконується для n доданків. Доведемо її для $n+1$ доданків, тобто доведемо, що для будь-яких додатних чисел $q_1,\ldots,q_n,q_{n+1}$ таких, що $q_1+\ldots+q_n+q_{n+1}=1$, $\forall x_1,\ldots,x_n,x_{n+1}\in[a;b]$ виконується

$$f\left(q_1x_1+\ldots+q_nx_n+q_{n+1}x_{n+1}\right) \le q_1 f\left(x_1\right)+\ldots+q_n f\left(x_n\right)+q_{n+1} f\left(x_{n+1}\right).$$

Замінимо суму $q_nx_n+q_{n+1}x_{n+1}$ одним доданком $\left(q_n+q_{n+1}\right)t$, де $t=\frac{q_nx_n+q_{n+1}x_{n+1}}{q_n+q_{n+1}}$. Оскільки $q_1,\ldots,q_{n-1},q_n+q_{n+1}>0$ та $q_1+\ldots+q_{n-1}+\left(q_n+q_{n+1}\right)=1$, то за припущенням

$$f\left(q_1x_1+\ldots+q_{n-1}x_{n-1}+q_nx_n+q_{n+1}x_{n+1}\right)=$$

$$=f\left(q_1x_1+\ldots+q_{n-1}x_{n-1}+\left(q_n+q_{n+1}\right)t\right)\le$$

$$\leq q_1 f(x_1) + \ldots + q_{n-1} f(x_{n-1}) + (q_n + q_{n+1}) f(t).$$

Але за означенням опуклої донизу функції

$$f(t) = f\left(\frac{q_n}{q_n + q_{n+1}} x_n + \frac{q_{n+1}}{q_n + q_{n+1}} x_{n+1}\right) \leq$$

$$\leq \frac{q_n}{q_n + q_{n+1}} f(x_n) + \frac{q_{n+1}}{q_n + q_{n+1}} f(x_{n+1}),$$

отже,

$$f(q_1 x_1 + \ldots + q_n x_n + q_{n+1} x_{n+1}) \leq q_1 f(x_1) + \ldots + q_n f(x_n) + q_{n+1} f(x_{n+1}).$$

□

Зауваження 14.1. Аналогічно можна довести наступне твердження: якщо функція f опукла вгору на $[a; b]$, а $q_1, \ldots, q_n$ — додатні числа, сума яких дорівнює одиниці, то

$$\forall x_1, \ldots, x_n \in [a; b] \quad f(q_1 x_1 + \ldots + q_n x_n) \geq q_1 f(x_1) + \ldots + q_n f(x_n).$$

Зауваження 14.2. Запишемо еквівалентну форму нерівностей Йєнсена, яку часто більш зручно застосовувати при розв'язанні практичних задач:
для опуклої донизу $f(x)$

$$f\left(\frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \ldots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \ldots m_n}\right) \leq \frac{m_1 f(x_1) + m_2 f(x_2) + \ldots + m_n f(x_n)}{m_1 + m_2 + \ldots m_n},$$

та для опуклої вгору функції $f(x)$

$$f\left(\frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \ldots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \ldots m_n}\right) \geq \frac{m_1 f(x_1) + m_2 f(x_2) + \ldots + m_n f(x_n)}{m_1 + m_2 + \ldots m_n}.$$

14.2. (*Нерівність Коші*) Довести, що для будь-яких додатних чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ виконується нерівність:

$$\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}.$$

Середнє геометричне n додатних чисел не перевищує їх середнього арифметичного.

Доведення. Для опуклої вгору функції $f(x) = \ln x$ на $(0; +\infty)$ та чисел $q_k = \frac{1}{n}$, $k = \overline{1, n}$ за нерівністю Йєнсена маємо

$$f(q_1 x_1 + \ldots + q_n x_n) \geq q_1 f(x_1) + \ldots + q_n f(x_n) \quad \Leftrightarrow$$

$$\ln\left(\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}\right) \geq \frac{1}{n}(\ln x_1 + \ldots + \ln x_n) \quad \Leftrightarrow$$

$$\ln\left(\frac{x_1+\ldots+x_n}{n}\right)\geq \ln\left(\sqrt[n]{x_1\cdot\ldots\cdot x_n}\right) \quad\Leftrightarrow$$

$$\sqrt[n]{x_1\cdot\ldots\cdot x_n}\leq \frac{x_1+\ldots+x_n}{n}.$$

□

14.3. Довести, що для будь-яких додатних чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ виконується нерівність:

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}}\leq \sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_n}.$$

Середнє гармонічне n додатних чисел не перевищує їх середнього геометричного.

Доведення. Застосувавши нерівність Коші до чисел $y_k=\frac{1}{x_k}$, одержимо

$$\sqrt[n]{y_1\cdot\ldots\cdot y_n}\leq\frac{y_1+\ldots+y_n}{n} \quad\Leftrightarrow$$

$$\sqrt[n]{\frac{1}{x_1}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{x_n}}\leq\frac{1}{n}\left(\frac{1}{x_1}+\ldots+\frac{1}{x_n}\right) \quad\Leftrightarrow$$

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\ldots+\frac{1}{x_n}}\leq \sqrt[n]{x_1\cdot\ldots\cdot x_n}.$$

□

Зауваження 14.3. Запам'ятаємо співвідношення між середнім арифметичним, середнім геометричним та середнім гармонічним n додатних чисел:

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}}\leq \sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_n}\leq\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}.$$

14.4. Довести, що для $n\geq 3$ виконується нерівність:

$$1<\sqrt[n]{n}<1+\frac{2}{\sqrt{n}}.$$

Доведення. Ліва частина нерівності очевидна. Для доведення правої частини скористаємося нерівністю Коші (між середнім геометричним та середнім арифметичним) з $x_1=\sqrt{n}$, $x_2=\sqrt{n}$, $x_3=x_4=\ldots=x_n=1$. Отримаємо:

$$\sqrt[n]{n}=\sqrt[n]{\sqrt{n}\cdot\sqrt{n}\cdot 1\cdot 1\cdot\ldots\cdot 1}\leq\frac{2\sqrt{n}+n-2}{n}=\frac{2}{\sqrt{n}}+1-\frac{2}{n}<1+\frac{2}{\sqrt{n}},$$

що й треба було довести. □

14.5. Довести, що для всіх $a, b, c > 1$

$$2\left(\frac{\log_b a}{a+b} + \frac{\log_c b}{b+c} + \frac{\log_a c}{c+a}\right) \geq \frac{9}{a+b+c}.$$

Доведення. За нерівністю Коші

$$\frac{\log_b a}{a+b} + \frac{\log_c b}{b+c} + \frac{\log_a c}{c+a} \geq 3\sqrt[3]{\frac{\log_b a}{a+b} \cdot \frac{\log_c b}{b+c} \cdot \frac{\log_a c}{c+a}} =$$

$$= \frac{3}{\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)}} \geq \frac{9}{(a+b)+(b+c)+(c+a)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{a+b+c}.$$

□

14.6. (*Нерівність Гельдера*) Довести, що для всіх $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$, $b_1, b_2, \ldots, b_n > 0$, та $p, q > 1$, таких, що $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, виконується нерівність

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Доведення. Розглянемо опуклу донизу на $(0; +\infty)$ функцію

$$f(x) = x^p.$$

Для довільних додатних чисел $p_1, \ldots, p_n$ позначимо

$$q_k = \frac{p_k}{\sum_{j=1}^{n} p_j}.$$

За нерівністю Йєнсена для будь-яких $x_1, \ldots, x_n > 0$ маємо

$$f\left(\sum_{k=1}^{n} q_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} q_k f(x_k).$$

Тобто

$$\left(\frac{\sum_{k=1}^{n} p_k x_k}{\sum_{k=1}^{n} p_k}\right)^p \leq \frac{\sum_{k=1}^{n} p_k x_k^p}{\sum_{k=1}^{n} p_k} \quad \Leftrightarrow$$

$$\left(\sum_{k=1}^{n} p_k x_k\right)^p \leq \left(\sum_{k=1}^{n} p_k\right)^{p-1} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} p_k x_k^p\right).$$

Виберемо

$$p_k = b_k^q, \quad x_k = \frac{a_k}{b_k^{\frac{q}{p}}}.$$

Тоді

$$\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^{q\left(1-\frac{1}{p}\right)} a_k\right)^p \leq \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^q\right)^{p-1} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right) \quad \Leftrightarrow$$

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^p \le \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^q\right)^{p-1} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right) \quad \Leftrightarrow$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \le \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^q\right)^{\frac{1}{q}} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

□

14.7. (*інтегральна нерівність Йєнсена*) Нехай функції f, g, h задовольняють умовам

1) $f \in C[\alpha, \beta]$, f опукла вгору;
2) $\varphi \in C[a, b]$, $\varphi : [a, b] \to [\alpha, \beta]$;
3) $h \in C[a, b]$, h додатна на $[a, b]$.

Довести, що

$$f\left(\frac{\int_a^b h(x)\varphi(x)\,dx}{\int_a^b h(x)\,dx}\right) \le \frac{\int_a^b h(x) f(\varphi(x))\,dx}{\int_a^b h(x)\,dx}.$$

Зокрема, при $h \equiv 1$

$$f\left(\frac{\int_a^b \varphi(x)\,dx}{b-a}\right) \le \frac{1}{b-a} \cdot \int\limits_a^b f(\varphi(x))\,dx.$$

Доведення. Розглянемо довільне розбиття

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Позначимо

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}, \quad \lambda = \max_k (\Delta x_k),$$

$$y_k = \varphi(x_k), \quad q_k = \frac{h(x_k)\Delta x_k}{\sum_{i=1}^n h(x_i)\Delta x_i}.$$

За нерівністю Йєнсена

$$f\left(\sum_{k=1}^{n} q_k y_k\right) \le \sum_{k=1}^{n} q_k f(y_k),$$

тобто

$$f\left(\frac{\sum_{k=1}^n h(x_k)\varphi(x_k)\Delta x_k}{\sum_{i=1}^n h(x_i)\Delta x_i}\right) \le \frac{\sum_{k=1}^n h(x_k) f(\varphi(x_k))\Delta x_k}{\sum_{i=1}^n h(x_i)\Delta x_i}.$$

Для доведення інтегральної нерівності Йєнсена залишається виконати граничний перехід при $\lambda \to 0$. □

14.8. Нехай $g \in C^1[0;2]$, причому $g' \geq 0$ на $[0;2]$. Довести, що для довільного натурального n виконується нерівність

$$\int_1^{\frac{2}{n+1}} g(x)\,dx + \int_1^{\frac{4}{n+1}} g(x)\,dx + \int_1^{\frac{6}{n+1}} g(x)\,dx + \ldots + \int_1^{\frac{2n}{n+1}} g(x)\,dx \geq 0.$$

Доведення. Розглянемо функцію

$$F(t) = \int_1^t g\left(\frac{2x}{n+1}\right) dx, \quad t \in [0; n+1].$$

Оскільки

$$F''(t) = \frac{2}{n+1} \cdot g'\left(\frac{2t}{n+1}\right) \geq 0,$$

то функція F опукла донизу на $[0; n+1]$. Виберемо

$$q_k = \frac{1}{n}, \quad x_k = k.$$

Оскільки

$$q_k > 0, \quad \sum_{k=1}^n q_k = 1,$$

то за нерівністю Йєнсена

$$F\left(\sum_{k=1}^n q_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^n q_k F(x_k) \quad \Leftrightarrow \quad F\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n k\right) \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n F(k) \quad \Leftrightarrow$$

$$F\left(\frac{n+1}{2}\right) \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n F(k) \quad \Leftrightarrow$$

$$\sum_{k=1}^n \int_1^k g\left(\frac{2x}{n+1}\right) dx \geq n \int_1^{\frac{n+1}{2}} g\left(\frac{2x}{n+1}\right) dx \quad \Leftrightarrow$$

$$\sum_{k=1}^n \int_{\frac{n+1}{2}}^k g\left(\frac{2x}{n+1}\right) dx \geq 0.$$

За допомогою підстановки

$$y = \frac{2x}{n+1}, \qquad \begin{array}{c|c|c} x & \frac{n+1}{2} & k \\ \hline y & 1 & \frac{2k}{n+1} \end{array}$$

одержимо

$$\sum_{k=1}^{n} \int_{1}^{\frac{2k}{n+1}} g\left(\frac{2x}{n+1}\right) dx \geq 0.$$

$\square$

Задачі для самостійного розв'язання.

14.9. Довести, що для довільних додатних чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ таких, що $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n = 1$, $n \geq 2$ виконується нерівність

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{2 - \alpha_k} \geq \frac{n}{2n - 1}.$$

14.10. Довести, що для довільного $n \in \mathbb{N}$ та довільного $a > 0$ виконується нерівність:

$$1 + \frac{1 - a^{-1}}{n - 1 + a^{-1}} \leq \sqrt[n]{a} \leq 1 + \frac{a - 1}{n}.$$

14.11. Нехай a, b, c — додатні дійсні числа такі, що $a+b+c = 1$. Довести, що

$$a^4 + b^4 + c^4 \geq abc.$$

14.12. Довести, що для всіх $x > 0$, $y > 0$ виконується нерівність:

$$x \ln x + y \ln y \geq (x + y) \ln \left(\frac{x + y}{2} \right).$$

14.13. Довести, що для будь-яких додатних чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$

$$a_1^{a_1} \cdot a_2^{a_2} \cdot \ldots a_n^{a_n} \geq \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k \right)^{\sum_{k=1}^{n} a_k}.$$

14.14. Довести, що для будь-яких додатних чисел a_1, a_2, $\ldots$, a_n, b_1, b_2, $\ldots$, b_n виконується нерівність:

$$\sqrt{\left(\sum_{k=1}^{n} a_k \right)^2 + \left(\sum_{k=1}^{n} b_k \right)^2} \leq \sum_{k=1}^{n} \sqrt{a_k^2 + b_k^2}.$$

14.15. Довести, що для будь-яких додатних чисел a_1, a_2, $\ldots$, a_n, b_1, b_2, $\ldots$, b_n, та $p > 1$ виконується нерівність:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p \right) \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^p \right)^{p-1} \geq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k^{p-1} \right)^p.$$

14.16. Довести, що для будь-яких додатних чисел a_1, a_2, $\ldots$, a_n, b_1, b_2, $\ldots$, b_n, та c_1, c_2, $\ldots$, c_n виконується нерівність:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^3 \right) \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^3 \right) \left(\sum_{k=1}^{n} c_k^3 \right) \geq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k c_k \right)^3.$$

15 Інтегрування

Крім стандартної техніки інтегрування існує багато цікавих методів знаходження невизначених, визначених, невласних інтегралів. Як правило, кожна задача підвищеної складності вимагає індивідуального підходу. Проте існують класи олімпіадних задач, які охоплюються спільними ідеями розв'язання.

Цей розділ можна умовно розділити на дві частини, які відповідають двом заняттям математичного гуртка з теми "Інтегрування". В першій частині переважно розглядаються задачі на стандартні підходи інтегрування такі, як занесення під диференціал, властивості інтегралів, геометричний зміст визначеного інтеграла, інтегрування частинами тощо. В другій частині розділу розглядаються задачі із застосуванням різноманітних замін в інтегралах, які дозволяють ефективно спростити інтеграл або звести до так званого циклічного інтеграла.

Аудиторні завдання.

15.1. Знайти інтеграл:

$$\int \frac{(x+\sin^2 x)dx}{1+\cos x}.$$

Розв'язання.

$$\int \frac{(x+\sin^2 x)dx}{1+\cos x} = \int \frac{xdx}{1+\cos x} + \int \frac{\sin^2 x\,dx}{1+\cos x} =$$

$$= \int \frac{xdx}{2\cos^2 2x} + \int \frac{(1-\cos^2 x)\,dx}{1+\cos x} = \frac{1}{4}\int xd(\operatorname{tg} 2x) + \int (1-\cos x)\,dx.$$

Далі проінтегрувавши частинами перший інтеграл, отримаємо:

$$= \frac{1}{4}\Big(x\operatorname{tg} 2x - \int \operatorname{tg} 2x\,dx\Big) + x - \sin x =$$

$$= \frac{1}{4}x\operatorname{tg} 2x + \frac{1}{8}\ln|\cos 2x| + x - \sin x + C.$$

□

15.2. Знайти інтеграл:

$$\int \frac{x^2\,dx}{(x\sin x+\cos x)^2}.$$

Розв'язання. Перетворимо підінтегральний вираз наступним чином:

$$\int \frac{x^2\,dx}{(x\sin x+\cos x)^2} = \int \frac{x^2\,dx}{(1+x^2)\Big(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\sin x + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\cos x\Big)^2} =$$

$$= \int \frac{x^2\,dx}{(1+x^2)\sin^2(x+\mathrm{arctg}\frac{1}{x})} = \int \frac{d(x+\mathrm{arctg}\frac{1}{x})}{\sin^2(x+\mathrm{arctg}\frac{1}{x})} = -\,\mathrm{ctg}\left(x+\mathrm{arctg}\frac{1}{x}\right)+C.$$

□

15.3. Обчислити інтеграл:

$$\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\sin x+\cos x}{x^2}dx.$$

Розв'язання. Побачивши, що під знаком інтеграла насправді стоїть похідна функції $-\frac{\cos x}{x}$, отримаємо

$$\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\sin x+\cos x}{x^2}dx = \int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} d\left(\frac{-\cos x}{x}\right) = \frac{-\cos x}{x}\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{2\pi}.$$

□

15.4. Знайти

$$\int e^{\cos x}\frac{x\sin^3 x+\cos x}{\sin^2 x}dx.$$

Розв'язання. Будемо використовувати формулу інтегрування частинами:

$$\int e^{\cos x}\,\frac{x\sin^3 x+\cos x}{\sin^2 x}dx = \int xe^{\cos x}\sin x dx + \int e^{\cos x}\frac{\cos x}{\sin^2 x}dx =$$

$$= -xe^{\cos x} + \int e^{\cos x}dx - \frac{e^{\cos x}}{\sin x} - \int e^{\cos x}dx.$$

Отже,

$$\int e^{\cos x}\,\frac{x\sin^3 x+\cos x}{\sin^2 x}dx = -xe^{\cos x} - \frac{e^{\cos x}}{\sin x} + C.$$

□

15.5. Обчислити інтеграл:

$$\int\limits_0^1 \frac{(x-1)e^x dx}{(x+1)^3}.$$

Розв'язання. Представимо інтеграл у вигляді суми двох інтегралів наступним чином:

$$I=\int\limits_0^1\frac{(x-1)e^xdx}{(x+1)^3}=\int\limits_0^1\frac{(x+1-2)e^xdx}{(x+1)^3}=\int\limits_0^1\frac{(x+1)e^xdx}{(x+1)^3}-2\int\limits_0^1\frac{e^xdx}{(x+1)^3}=$$

$$=\int\limits_0^1\frac{e^xdx}{(x+1)^2}-2\int\limits_0^1\frac{e^xdx}{(x+1)^3}.$$

Тепер перший інтеграл проінтегруємо частинами:

$$I=\int\limits_0^1\frac{e^xdx}{(x+1)^2}-2\int\limits_0^1\frac{e^xdx}{(x+1)^3}=\left|\begin{matrix}u=\frac{1}{(x+1)^2} & du=\frac{-2dx}{(x+1)^3}\\ dv=e^xdx & v=e^x\end{matrix}\right|=$$

$$=\frac{e^x}{(x+1)^2}\Big|_0^1-\int\limits_0^1\frac{-2e^xdx}{(x+1)^3}-2\int\limits_0^1\frac{e^xdx}{(x+1)^3}=\frac{e}{4}-1.$$

□

15.6. Обчислити

$$\int\limits_0^{100}\{x\}\cdot[x]dx,$$

де $[x]$ — ціла частина числа $x\in\mathbb{R}$, $\{x\}$ — дробова частина числа x, тобто $\{x\}=x-[x]$.

Розв'язання. Запишемо

$$\int\limits_0^{100}\{x\}\cdot[x]dx=\int\limits_0^{100}(x-[x])\cdot[x]dx=$$

$$=\int\limits_0^1(x-0)\cdot 0dx+\int\limits_1^2(x-1)\cdot 1dx+\int\limits_2^3(x-2)\cdot 2dx+...+\int\limits_{99}^{100}(x-99)\cdot 99dx=$$

$$=\int\limits_1^2(x-1)dx+2\int\limits_2^3(x-2)dx+3\int\limits_3^4(x-3)dx+...+99\int\limits_{99}^{100}(x-99)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\Big((x-1)^2\Big|_1^2+2(x-2)^2\Big|_2^3+3(x-3)^2\Big|_3^4+...+99(x-99)^2\Big|_{99}^{100}\Big)=$$

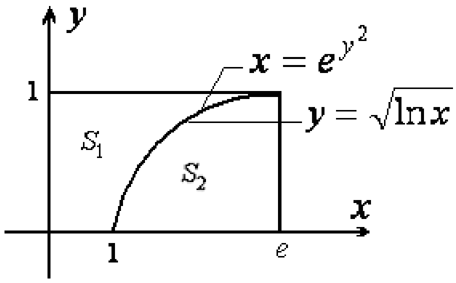
$$=\frac{1}{2}\Big(1+2+3+...+99\Big)=\frac{1}{2}\cdot\frac{(1+99)\cdot 99}{2}=2475.$$

□

15.7. Обчислити

$$\int\limits_1^e \sqrt{\ln x}dx + \int\limits_0^1 e^{x^2}dx.$$

Розв'язання. Використаємо геометричний зміст визначеного інтеграла. Зауважимо, що функція $y = \sqrt{\ln x}$ є оберненою до функції $y = e^{x^2}$, $x > 0$, $y > 0$. Зобразимо функції $y = \sqrt{\ln x}$ та $x = e^{y^2}$ на одному малюнку (див. мал. 15.1).



Мал. 15.1

Тоді $\int\limits_1^e \sqrt{\ln x}dx + \int\limits_0^1 e^{x^2}dx = S_1 + S_2 = 1 \cdot e = e.$ □

15.8. Обчислити

$$\int\limits_{-a}^a \frac{dx}{1 + \varphi(x) + \sqrt{1 + \varphi^2(x)}},$$

де $\varphi(x)$ — непарна функція.

Розв'язання.

$$\int\limits_{-a}^a \frac{dx}{1 + \varphi(x) + \sqrt{1 + \varphi^2(x)}} =$$

$$= \int\limits_{-a}^0 \frac{dx}{1 + \varphi(x) + \sqrt{1 + \varphi^2(x)}} + \int\limits_0^a \frac{dx}{1 + \varphi(x) + \sqrt{1 + \varphi^2(x)}} =$$

$$= \int\limits_0^a \left(\frac{1}{1 - \varphi(x) + \sqrt{1 + \varphi^2(x)}} + \frac{1}{1 + \varphi(x) + \sqrt{1 + \varphi^2(x)}} \right) dx =$$

$$= \int\limits_0^a \frac{2 + 2\sqrt{1 + \varphi^2(x)}}{2 + 2\sqrt{1 + \varphi^2(x)}} dx = a$$

□

15.9. Чи існує така функція $f : [0;1] \to \mathbb{R}$, що

$$f(x) = 1 + x\int\limits_0^1 f(t)\,dt + x^2\int\limits_0^1 f^2(t)\,dt \quad ?$$

Якщо так, знайдіть її, якщо ні — доведіть це.

Розв'язання. Припустимо, що така функція існує. Тоді

$$f(x) = ax^2 + bx + 1,$$

де

$$a = \int\limits_0^1 f^2(t)dt \geq \left(\int\limits_0^1 f(t)dt\right)^2 = b^2,$$

$$b = \int\limits_0^1 f(t)dt = \int\limits_0^1 (at^2 + bt + 1)dt = \frac{a}{3} + \frac{b}{2} + 1,$$

звідки

$$\frac{3}{2}b - 3 = a \geq b^2,$$

що неможливо, оскільки

$$b^2 + 3 > b^2 + 1 \geq 2|b| \geq \frac{3}{2}b.$$

Протиріччя. Отже, такої функції не існує. □

15.10. Обчислити

$$\int\limits_0^\pi \frac{\sin 2019x}{\sin x}dx.$$

Розв'язання. Для натурального n розглянемо

$$\int\limits_0^\pi \frac{\sin(2n+3)x}{\sin x}dx =$$

$$= \int\limits_0^\pi \frac{\sin(2n+1)x \cdot \cos 2x}{\sin x}dx + \int\limits_0^\pi \frac{\sin 2x \cdot \cos(2n+1)x}{\sin x}dx =$$

$$= \int\limits_0^\pi \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}dx - 2\int\limits_0^\pi \sin(2n+1)x \cdot \sin x dx +$$

$$+2\int\limits_0^{\pi}\cos(2n+1)x\cdot\cos x dx=\int\limits_0^{\pi}\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}dx+2\int\limits_0^{\pi}\cos(2n+2)x dx=$$

$$=\int\limits_0^{\pi}\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}dx.$$

Тому

$$\int\limits_0^{\pi}\frac{\sin 2019x}{\sin x}dx=\int\limits_0^{\pi}\frac{\sin 2017x}{\sin x}dx=\ldots=\int\limits_0^{\pi}\frac{\sin x}{\sin x}dx=\pi.$$

□

15.11. Знайти довжину дуги кривої

$$\gamma:\begin{cases} x=\int\limits_1^t\frac{\cos z}{z}dz,\\ y=\int\limits_1^t\frac{\sin z}{z}dz\end{cases}$$

від початку координат до найближчої точки з вертикальною дотичною.

Розв'язання. Початку координат відповідає значення параметра $t=1$. Якщо дотична до графіка функції в деякій точці є вертикальною прямою, то значення похідної функції в цій точці є нескінченним. Знайдемо похідну заданої функції

$$y'_x=\frac{\left(\int\limits_1^t\frac{\sin z}{z}dz\right)'_t}{\left(\int\limits_1^t\frac{\cos z}{z}dz\right)'_t}=\frac{\frac{\sin t}{t}}{\frac{\cos t}{t}}=\mathrm{tg}t.$$

Маємо

$$\mathrm{tg}t=\infty\quad\Leftrightarrow\quad t=\frac{\pi}{2}+\pi k, k\in\mathbb{Z}.$$

Тобто, найближчій точці з вертикальною дотичною відповідає значення параметра $t=\frac{\pi}{2}$. Знайдемо довжину дуги

$$l=\int\limits_1^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{(x'_t)^2+(y'_t)^2}dt=\int\limits_1^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\frac{\cos^2 t}{t^2}+\frac{\sin^2 t}{t^2}}dt=\int\limits_1^{\frac{\pi}{2}}\frac{dt}{t}=\ln\frac{\pi}{2}.$$

□

15.12. Нехай задано інтеграл $I_\alpha=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^\alpha x dx, \alpha>0$. Показати, що функція $f(\alpha)=(\alpha+1)I_\alpha I_{\alpha+1}$, визначена при $\alpha>0$, є періодичною з періодом 1 та знайти $f(0)$.

Розв'язання. Запишемо $I_{\alpha+2}$ і проінтегруємо його частинами:

$$I_{\alpha+2} = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\alpha+1} x \cdot \sin x dx = -\left(\sin^{\alpha+1} x \cos x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (\alpha+1) \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\alpha} x \cos^2 x dx.$$

Таким чином,

$$I_{\alpha+2} = (\alpha+1)(I_\alpha - I_{\alpha+2}).$$

Тому $(\alpha+2)I_{\alpha+2} = (\alpha+1)I_\alpha$, тобто

$$f(\alpha+1) = (\alpha+2)I_{\alpha+1}I_{\alpha+2} = (\alpha+1)I_\alpha I_{\alpha+1} = f(\alpha).$$

Це означає, що функція $f(x)$ має період 1. $f(0) = \frac{\pi}{2}$. □

Інтегрування шляхом заміни змінної

15.13. Обчислити

$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{a^2\cos^2 x + b^2 \sin^2 x}.$$

Розв'язання. Функції $\sin^2 x$ та $\cos^2 x$ мають період π і є парними. Тому

$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{a^2\cos^2 x + b^2 \sin^2 x} = \left|y = x - \frac{\pi}{2}\right| = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{dy}{a^2\sin^2 y + b^2 \cos^2 y} =$$

$$= 4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dy}{a^2\sin^2 y + b^2 \cos^2 y} = 4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d(\mathrm{tg} y)}{a^2\mathrm{tg}^2 y + b^2} = \frac{4}{ab}\mathrm{arctg}\left(\frac{a\mathrm{tg} y}{b}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2\pi}{ab}.$$

□

15.14. Обчислити

$$\int\limits_0^{\pi} x \sin^6 x \cos^4 x dx.$$

Розв'язання. Запишемо

$$I = \int\limits_0^{\pi} x \sin^6 x \cos^4 x dx = |x = \pi - y| =$$

$$= \pi \int\limits_0^{\pi} \sin^6 y \cos^4 y dy - \int\limits_0^{\pi} y \sin^6 y \cos^4 y dy.$$

Тому

$$2 \cdot I = \pi \int\limits_0^\pi \sin^6 y \cos^4 y dy.$$

Використовуючи формулу Валліса, отримаємо $I = \frac{3}{512}\pi^2$. □

15.15. Для цілих n обчислити

$$\int\limits_0^{2\pi} \sin(\sin x + nx) dx.$$

Розв'язання.

$$\int\limits_0^{2\pi} \sin(\sin x + nx) dx = |t = x - \pi| = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin(-\sin t + nt + n\pi) dt =$$

$$= (-1)^n \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin(-\sin t + nt) dt = 0.$$

Остання рівність справедлива, оскільки функція $\sin(-\sin t + nt)$ є непарною. □

На прикладі наступного інтеграла розглянемо так званий прийом "рефлексії", який є ефективним при обчисленні деяких визначених інтегралів, а саме таких, що при заміні $x \to (a+b-x)$ справджуєтьса рівністъ:

$$\int\limits_a^b f(x)\, dx = \int\limits_a^b f(a+b-x)\, dx,$$

тобто підінтегральна функція є симетричною відносно точки $x = \frac{a+b}{2}$. Тоді

$$\int\limits_a^b f(x)\, dx = \frac{1}{2} \int\limits_a^b \Big(f(x) + f(a+b-x) \Big)\, dx.$$

Інколи такий підхід дозволяє значно спростити заданий інтеграл.

15.16. Обчислити

$$\int\limits_0^2 \frac{\sqrt{\sin(3-x)}}{\sqrt{\sin(3-x)} + \sqrt{\sin(x+1)}} dx.$$

Розв'язання. Застосуємо "рефлексію":

$$I = \int\limits_0^2 \frac{\sqrt{\sin(3-x)}}{\sqrt{\sin(3-x)} + \sqrt{\sin(x+1)}} dx = \Big| x \to 2 - x \Big| =$$

$$= \int\limits_0^2 \frac{\sqrt{\sin(x+1)}}{\sqrt{\sin(x+1)} + \sqrt{\sin(3-x)}} dx.$$

Звідси

$$2I = \int\limits_0^2 \left(\frac{\sqrt{\sin(3-x)}}{\sqrt{\sin(3-x)} + \sqrt{\sin(x+1)}} + \frac{\sqrt{\sin(x+1)}}{\sqrt{\sin(x+1)} + \sqrt{\sin(3-x)}} \right) dx =$$

$$= \int\limits_0^2 dx = 2.$$

Отже, $I = 1$. □

15.17. Обчислити невласний інтеграл:

$$\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln\cos x}{2^x + 1} dx.$$

Розв'язання. Позначимо шуканий інтеграл через I та зробимо в інтегралі заміну $x = -t$:

$$I = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln\cos x}{2^x + 1} dx = \Big| x = -t \Big| = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln\cos t}{2^{-t} + 1} dt = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2^t \ln\cos t}{2^t + 1} dt.$$

Тоді

$$2I = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln\cos x}{2^x + 1} dx + \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2^x \ln\cos x}{2^x + 1} dx = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln\cos x dx = 2 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\cos x dx.$$

Отже,

$$I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\cos x dx = \Big| x = \frac{\pi}{2} - u \Big| = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin u du = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x dx.$$

Обчислимо цей інтеграл:

$$I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \left(2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}\right) dx =$$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln 2 dx + \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin \frac{x}{2} dx + \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \cos \frac{x}{2} dx.$$

Окремо розглянемо останній інтеграл у сумі та зробимо у ньому заміну $x = \pi - t$:

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \cos \frac{x}{2} dx = \left| x = \pi - t \right| = \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln \cos \frac{\pi - t}{2} dt =$$

$$= \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln \sin \frac{t}{2} dt = \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln \sin \frac{x}{2} dx.$$

Таким чином,

$$I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln 2 dx + \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin \frac{x}{2} dx + \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln \sin \frac{x}{2} dx = \frac{\pi}{2} \ln 2 + \int\limits_0^{\pi} \ln \sin \frac{x}{2} dx =$$

$$= \left| \frac{x}{2} = t \right| = \frac{\pi}{2} \ln 2 + 2 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin t dt = \frac{\pi}{2} \ln 2 + 2I.$$

Отримали рівняння: $I = \frac{\pi}{2} \ln 2 + 2I$, звідки

$$I = -\frac{\pi}{2} \ln 2.$$

□

Зауваження 15.1. Запам'ятаємо, що

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \cos x dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x dx = -\frac{\pi}{2} \ln 2.$$

15.18. Обчислити невласний інтеграл:

$$\int\limits_0^{\infty} \frac{\ln(1 + x^2) dx}{1 + x^2}.$$

Розв'язання. Зробимо в інтегралі заміну $x = \operatorname{tg} t$:

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln(1+x^2)dx}{1+x^2} = \left| \begin{matrix} x = \operatorname{tg} t \\ dx = \frac{dt}{\cos^2 t} \end{matrix} \right| = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(1+\operatorname{tg}^2 t)}{1+\operatorname{tg}^2 t} \cdot \frac{dt}{\cos^2 t} =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1+\operatorname{tg}^2 t)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \frac{1}{\cos^2 t} dt = -2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \cos t dt =$$

$$= -2 \cdot \left(\frac{-\pi \ln 2}{2} \right) = \pi \ln 2.$$

□

15.19. Обчислити

$$\int_0^1 \frac{\ln(x+1)}{1+x^2} dx.$$

Розв'язання. Зробимо заміну $x = \operatorname{tg} t$ в даному інтегралі. Тоді

$$\int_0^1 \frac{\ln(x+1)}{1+x^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\operatorname{tg} t)dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\frac{\sin t + \cos t}{\cos t} \right) dt =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\ln\sqrt{2} + \ln\sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right) - \ln\cos t \right) dt = \frac{\pi}{8} \ln 2,$$

оскільки

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right) dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cos t dt.$$

□

Деякі невласні інтеграли 1-го роду $\int\limits_0^{\infty} f(x)\,dx$ *вдається спростити, застосовуючи до них так званий метод "інверсії", який полягає у наступному: якщо підінтегральна функція* $f(x)$ *має обмежену на* $[0;\infty)$ *первісну, то шляхом заміни* $x \to \frac{1}{x}$ *матимемо:*

$$\int_0^{\infty} f(x)\,dx = \int_0^{\infty} f\left(\frac{1}{x}\right) \frac{dx}{x^2},$$

звідки

$$\int\limits_0^{\infty} f(x)\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\infty}\left(f(x) + \frac{1}{x^2}f\left(\frac{1}{x}\right)\right)\,dx.$$

Розглянемо цей підхід на наступному прикладі.

15.20. Обчислити

$$\int\limits_0^{\infty}\frac{1}{(1+x^2)(1+x^{\alpha})}dx.$$

Розв'язання.

$$I = \int\limits_0^{\infty}\frac{1}{(1+x^2)(1+x^{\alpha})}dx = \int\limits_0^{\infty}\frac{x^{-\alpha}}{x^{-\alpha}+1}\cdot\frac{1}{x^{-2}+1}\cdot\frac{dx}{x^2} = \left|x\to\frac{1}{x}\right| =$$

$$= \int\limits_0^{\infty}\frac{x^{\alpha}}{x^{\alpha}+1}\cdot\frac{1}{x^2+1}dx = \int\limits_0^{\infty}\frac{x^{\alpha}\,dx}{(x^{\alpha}+1)(x^2+1)}.$$

Тому

$$2\cdot I = \int\limits_0^{\infty}\Big(\frac{1+x^{\alpha}}{(1+x^2)(1+x^{\alpha})}\Big)dx = \int\limits_0^{\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}.$$

Отже, $I = \frac{\pi}{4}$, і ми бачимо, що вихідний інтеграл не залежить від значення α. □

15.21. Довести, що

$$I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1+(\operatorname{tg} x)^k}$$

не залежить від k.

Доведення. Зробимо в інтегралі заміну $x \to \frac{\pi}{2} - x$. Отримаємо:

$$I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1+(\operatorname{ctg} x)^k} = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(\operatorname{tg} x)^k\,dx}{(\operatorname{tg} x)^k+1},$$

$$2I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1+(\operatorname{tg} x)^k} + \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(\operatorname{tg} x)^k\,dx}{(\operatorname{tg} x)^k+1} = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}1\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

Твердження доведено. □

Задачі для самостійного розв'язання.

15.22. Знайти $n \in \mathbb{N}$ з рівняння

$$\exp\left\{\int\limits_1^{n+1} \ln[x]dx\right\} = 5040,$$

де $[x]$ — ціла частина числа $x \in \mathbb{R}$.

15.23. Нехай $f(x)$ — неперервна монотонно спадна функція така, що $f(1) = 4$, $f(6) = 2$ та $\int\limits_1^6 f(x)\,dx = 15$. Знайти $\int\limits_2^4 f^{-1}(x)\,dx$.

15.24. Обчислити

$$\int\limits_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x}dx.$$

15.25. Обчислити

$$\int\limits_0^{\pi} \frac{x^2dx}{1-\cos x}.$$

15.26. Обчислити

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2016x)\cos^{2014} x\,dx.$$

15.27. Обчислити інтеграли:

а) $\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\operatorname{ctg}^{2019} x}$; б) $\displaystyle\int\limits_0^{\pi} \frac{\cos^2\frac{x}{2}dx}{3\pi^2+4\pi x-4x^2}$; в) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{x\sin x dx}{\operatorname{ch}^2\left(\frac{\cos x}{2}\right)}$;

г) $\displaystyle\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{(e^x+1)\cos x}$; д) $\displaystyle\int\limits_3^7 \frac{\ln(x+2)dx}{\ln(24+10x-x^2)}$;

е) $\displaystyle\int\limits_{-1}^1 x^{2013}\ln(1+e^x)dx$; є) $\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \left(x-\frac{\pi}{8}\right)^{2020}\ln(1+\operatorname{tg} x)\,dx$.

15.28. Обчислити інтеграл:

$$\int\limits_0^1 \frac{x^4(1-x^2)^5\,dx}{(1+x^2)^{10}}.$$

15.29. Обчислити
$$\int\limits_1^{\sqrt{2}} \frac{1}{x} \ln \frac{2-2x^2+x^4}{2x-2x^2+x^3} dx.$$

15.30. Обчислити
$$\int\limits_{20}^{101} \frac{\ln(2020x)}{x^2+2020}\, dx.$$

15.31. Обчислити
$$\text{а)} \int\limits_0^{\infty} \frac{x^{2009}}{x^{4021}+x^{4020}+x+1} dx; \quad \text{б)} \int\limits_0^{\infty} \frac{\ln(2x)\, dx}{1+x^2}.$$

15.32. Знайти x з рівняння
$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{dt}{(e^t+1)(t^2+x)} = \frac{\pi}{4}.$$

15.33. Для натурального числа n знайти
$$\int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n}.$$

15.34. Довести рівність: $\int\limits_0^{\infty} f\left(x+\frac{a}{x}\right) dx = \int\limits_0^{\infty} f\left(\sqrt{x^2+4a}\right) dx$, де $a>0$.

15.35. Обчислити невласний інтеграл:
$$\int\limits_0^{\infty} \frac{e^{-x^2} dx}{(x^2+0.5)^2}.$$

Вказівка. При розв'язанні задачі знадобиться інтеграл Пуассона: $\int\limits_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. □

15.36. Нехай A та B — довільні точки на осях OX та OY відповідно, такі що пряма AB є дотичною до гілки гіперболи $xy=1$, що лежить у першому квадранті. Позначимо через Q основу перпендикуляра, опущеного з т. O на AB. Знайти площу фігури, обмеженої геометричним місцем всіх таких точок Q.

16 Функції багатьох змінних

Цей розділ присвячено задачам, в яких фігурують функції 2-х і більше змінних, зокрема задачам на екстремум та умовний екстремум таких функцій. Зауважимо, що з постановки задачі не завжди очевидно, що мова йде про екстремальну задачу для функції багатьох змінних. Розглянемо вибірково декілька задач.

Аудиторні завдання.

16.1. Знайти найкоротшу відстань між поверхнею $S : 4z = x^2 + y^2$ та площиною $P : 2x - y + 2z + 3 = 0$.

Розв'язання. Покажемо, що дані поверхні не перетинаються. Розглянемо

$$\begin{cases} 2x - y + 2z + 3 = 0, \\ 4z = x^2 + y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 2y + x^2 + y^2 + 6 = 0, \\ 4z = x^2 + y^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+2)^2 + (y-1)^2 + 1 = 0, \\ 4z = x^2 + y^2, \end{cases}$$

а такого ніколи не може бути. Проведемо дотичну площину P' до поверхні S таку, що паралельна площині P. Розглянемо

$$S : z = \frac{1}{4}(x^2 + y^2) \quad \Rightarrow \quad z'_x = \frac{x}{2}, z'_y = \frac{y}{2}.$$

Нехай $M_0(x_0, y_0, z_0)$ — точка дотику. Тоді, за умовою паралельності площин, маємо

$$\frac{x_0/2}{2} = \frac{y_0/2}{-1} = \frac{-1}{2}.$$

Тобто, точка дотику має координати $M_0(-2; 1; \frac{5}{4})$. Найкоротша відстань між поверхнею S та площиною P дорівнює віддалі від точки M_0 до площини P, а саме

$$d(M_0, P) = \frac{|2 \cdot (-2) - 1 \cdot 1 + 2 \cdot \frac{5}{4} + 3|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \frac{1}{6}.$$

$\square$

16.2. Дослідити функцію на екстремум $f(x, y) = \dfrac{x^2 + 4xy + y^2}{x^2 - xy + y^2}$.

Розв'язання. Область визначення функції — $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0; 0)\}$. Перейдемо до полярних координат

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi. \end{cases}$$

Запишемо

$$f(\varphi, \rho) = \frac{\rho^2 \cos^2 \varphi + 4\rho \cos \varphi \cdot \rho \sin \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi}{\rho^2 \cos^2 \varphi - \rho \cos \varphi \cdot \rho \sin \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi} =$$
$$= \frac{2 + 4 \sin 2\varphi}{2 - \sin 2\varphi} = -4 + \frac{10}{2 - \sin 2\varphi}.$$

Найбільше значення функція f досягає при

$$\sin 2\varphi = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \varphi = \frac{\pi}{4} \text{ або } \varphi = \frac{5\pi}{4} \quad \Leftrightarrow \quad y = x.$$

Найменше значення функція f досягає при

$$\sin 2\varphi = -1 \quad \Leftrightarrow \quad \varphi = \frac{3\pi}{4} \text{ або } \varphi = \frac{7\pi}{4} \quad \Leftrightarrow \quad y = -x.$$

В інших точках функція f екстремумів немає. З урахуванням області визначення, отримаємо, що

$$\max f(x, y) = f(x, x) = 6, \quad \min f(x, y) = f(x, -x) = -\frac{2}{3}, \quad x \neq 0.$$

$\square$

16.3. Знайти найменший об'єм тетраедра, що утворений дотичною площиною до еліпсоїда з довжинами півосей a, b, c та його площинами симетрії.

Розв'язання. Оберемо систему координат таким чином, щоб рівняння еліпсоїда в ній мало канонічний вигляд

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Тоді площинами симетрії еліпсоїда будуть декартові площини. Запишемо рівняння дотичної площини до еліпсоїда в точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$

$$\frac{2x_0}{a^2}(x - x_0) + \frac{2y_0}{b^2}(y - y_0) + \frac{2z_0}{c^2}(z - z_0) = 0 \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} + \frac{z_0 z}{c^2} = 1.$$

Точками перетину дотичної площини з осями координат є $A(\frac{a^2}{x_0}; 0; 0)$, $B(0; \frac{b^2}{y_0}; 0)$ та $C(0; 0; \frac{c^2}{z_0})$. Тоді об'єм тетраедра дорівнює

$$V = \frac{(abc)^2}{6x_0 y_0 z_0}.$$

Отже, найменший об'єм тетраедра буде дорівнювати мінімуму функції

$$V(x, y, z) = \frac{(abc)^2}{6xyz}$$

при умові $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$. Запишемо функцію Лагранжа

$$L(x,y,z;\lambda)=\frac{(abc)^2}{6xyz}+\lambda\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right).$$

Маємо

$$\begin{cases} L'_x=-\dfrac{(abc)^2}{6x^2yz}+\dfrac{2\lambda x}{a^2},\\ L'_y=-\dfrac{(abc)^2}{6xy^2z}+\dfrac{2\lambda y}{b^2},\\ L'_z=-\dfrac{(abc)^2}{6xyz^2}+\dfrac{2\lambda z}{c^2}. \end{cases}$$

Координати точки мінімуму будуть розв'язками системи рівнянь

$$\begin{cases} -\dfrac{(abc)^2}{6x^2yz}+\dfrac{2\lambda x}{a^2}=0,\\ -\dfrac{(abc)^2}{6xy^2z}+\dfrac{2\lambda y}{b^2}=0,\\ -\dfrac{(abc)^2}{6xyz^2}+\dfrac{2\lambda z}{c^2}=0,\\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1. \end{cases}$$

Отримаємо, що $M(\frac{a}{\sqrt{3}},\frac{b}{\sqrt{3}},\frac{c}{\sqrt{3}})$. Для перевірки того, що точка M є мінімумом потрібно перевірити, що диференціал другого порядку від функції L є додатнім в точці M (зробіть це самостійно). Отже,

$$V_{\min}=\frac{\sqrt{3}abc}{2}.$$

□

16.4. В дане коло вписати трикутник так, щоб сума квадратів його сторін була найбільшою.

Розв'язання. Нехай круг має одиничний радіус, довжини сторін трикутника дорівнюють a, b та c, а відповідні їм кути α, β та γ. За теоремою косинусів маємо

$$a^2=2-2\cos\alpha,\quad b^2=2-2\cos\beta,\quad c^2=2-2\cos\gamma.$$

Тобто, потрібно знайти такі α, β, γ, щоб при умові

$$\alpha+\beta+\gamma=\pi$$

функція

$$f(\alpha,\beta,\gamma)=6-2(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)$$

приймала максимальне значення. Запишемо функцію Лагранжа

$$L(\alpha,\beta,\gamma;\lambda) = 6 - 2(\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma) + \lambda(\alpha+\beta+\gamma-\pi).$$

Точка максимуму є розв'язком системи рівнянь

$$\begin{cases} 2\sin\alpha + \lambda = 0, \\ 2\sin\beta + \lambda = 0, \\ 2\sin\gamma + \lambda = 0, \\ \alpha+\beta+\gamma = \pi. \end{cases}$$

Тобто, $\alpha = \beta = \gamma = \dfrac{\pi}{3}$. Отже, шуканий трикутник є рівностороннім. □

16.5. Які значення може приймати

$$L = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+a^2}{x+b^2}\right)^x,$$

якщо $4a^2 + b^2 + 2b \le 3$, $a, b \in \mathbb{R}$?

Розв'язання.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+a^2}{x+b^2}\right)^x = [1^\infty] =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{a^2-b^2}{x+b^2}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\exp\left\{\frac{(a^2-b^2)x}{x+b^2}\right\} = e^{a^2-b^2}.$$

Оскільки функція $y = e^x$ є монотонною, то своїх максимального і мінімального значень вона набуває за тих a та b, за яких функція $z(a,b) = a^2 - b^2$ набуває максимального і мінімального значень відповідно. Отже, задача звелася до задачі на знаходження максимуму і мінімуму неперервної функції

$$z(a,b) = a^2 - b^2$$

в замкненій області

$$\overline{D}: \quad 4a^2 + b^2 + 2b \le 3.$$

Спочатку знайдемо стаціонарні точки функції $z(a,b) = a^2 - b^2$, що попали середину області $\overline{D}$. Оскільки $z'_a = 2a$ і $z'_b = -2b$, то єдиною стаціонарною точкою є точка $(0;0)$, і $z(0;0) = 0$. Тепер дослідимо функцію на межі області. Для цього з рівняння межі

$$4a^2 + b^2 + 2b = 3 \quad \Leftrightarrow \quad a^2 + \frac{(b+1)^2}{4} = 1, \quad b \in [-2;2]$$

виразимо $a^2 = 1 - \frac{(b+1)^2}{4}$, і, підставляючи у функцію $z(a,b)$, отримаємо функцію однієї змінної:

$$z_*(b) = 1 - \frac{(b+1)^2}{4} - b^2 = \frac{1}{4}(-5b^2 - 2b + 3).$$

Для неї $z'_* = -\dfrac{5}{2}b - \dfrac{1}{2} = 0$ при $b = -\dfrac{1}{5}$. Тому

$$z_*\left(-\frac{1}{5}\right) = \frac{4}{5}, \quad z_*(-2) = -\frac{13}{4}, \quad z_*(2) = -\frac{21}{4}.$$

Таким чином, $\max\limits_{\overline{D}} z(a,b) = e^{4/5}$, $\min\limits_{\overline{D}} z(a,b) = e^{-21/4}$.

Відповідь: $L \in \left[e^{-21/4}; e^{4/5}\right]$. □

16.6. Знайти мінімальне значення виразу

$$A = \frac{a^2}{a-b} + \frac{b^2}{b-c},$$

якщо a, b, $c \in \mathbb{R}$, $a > b > c$ та $b + c = 505$.

Вказівка. Виразимо з умови $c = 505 - b$ та підставимо у функцію:

$$A(a,b) = \frac{a^2}{a-b} + \frac{b^2}{2b-505}.$$

Далі шукаємо екстремуми функції 2-х змінних.

Відповідь: $\min A = 2020$ при $a = \frac{2020}{3}$, $b = \frac{1010}{3}$, $c = \frac{505}{3}$. □

Задачі для самостійного розв'язання.

16.7. Знайти найменшу відстань від точки $M(1;0;2)$ до поверхні

$$\Omega: \quad z = x^2 + 2y^2.$$

16.8. Знайти найкоротшу відстань між поверхнею $S: z = x^2 + y^2$ та площиною $P: x + y + z + 3 = 0$.

16.9. Знайти найбільше та найменше значення функції

$$f(x,y) = x^2 - |x - y^2|$$

в області $D: x^2 + y^2 \leq 2$.

16.10. На еліпсі $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ знайдіть таку точку, щоб площа трикутника, який обмежений дотичною до еліпса в цій точці та осями координат, була найменшою.

16.11. Через точку $M(a,b,c)$, $a,b,c > 0$ провести площину, яка відтинає від декартових площин тетраедр найменшого об'єму.

16.12. Дослідити на екстремум функцію

$$f(x,y) = (x^2 + y^2)e^{-x^2-y^2}.$$

16.13. Які значення може приймати вираз

$$xye^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)},$$

за умови $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$?

16.14. Довести, що функція $f(x,y) = x^2 + \sin y$ має нескінченну кількість мінімумів і жодного максимуму.

16.15. Нехай $a,b,c \in \mathbb{R}$ — фіксовані числа. Знайти максимальне значення функції

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz$$

в області $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon |x| + |y| + |z| \leq 1\}$.

16.16. Знайти довжини півосей a і b еліпса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ найменшої площі, який містить коло $(x-1)^2 + y^2 = 1$.

17 Елементи комбінаторики

Комбінаторика охоплює розділ математики, присвячений вивченню дискретних об'єктів, множин, та відношень між ними. В найбільш простому розумінні комбінаторика займається розв'язанням задач про вибір та розміщення елементів, як правило, скінченної множини згідно із заданими правилами.

Специфіка комбінаторних задач підвищеної складності полягає в тому, що незважаючи на часто просте формулювання, доступне навіть школяру, їх розв'язання вимагає неабиякої майстерності чітко логічно мислити, а інколи і застосування потужного апарату комбінаторики у поєднанні з твердженнями з інших математичних дисциплін. Тому кожна комбінаторна задача передбачає винайдення індивідуального способу розв'язання. Не можна уявити мистецтво розв'язувати комбінаторні задачі, не засвоївши попередньо як мінімум основні відомості з теорії множин, комбінаторні конфігурації (перестановки, комбінації та розміщення без повторень та з повтореннями), біном Ньютона, властивості біноміальних коефіцієнтів, формулу включення-виключення тощо.

Аудиторні завдання.

17.1. Довести, що ціла частина числа $\left(3+\sqrt{5}\right)^n$ непарна для довільного натурального числа n.

Доведення. Розглянемо

$$\left(3+\sqrt{5}\right)^n + \left(3-\sqrt{5}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(\sqrt{5}\right)^k 3^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^k \left(\sqrt{5}\right)^k 3^{n-k}.$$

Позначимо $m = \frac{n}{2}$, якщо n парне, або $m = \frac{n-1}{2}$, якщо n непарне. Тоді

$$\left(3+\sqrt{5}\right)^n + \left(3-\sqrt{5}\right)^n = 2\sum_{i=0}^{m} C_n^{2i} \left(\sqrt{5}\right)^{2i} 3^{n-2i} = 2\sum_{i=0}^{m} C_n^{2i} 5^i 3^{n-2i} = 2N,$$

де N є парним натуральним числом. А оскільки $0 < 3-\sqrt{5} < 1$, то $0 < \left(3-\sqrt{5}\right)^n < 1, \quad n \in \mathbb{N}$, і

$$2N - 1 < \left(3+\sqrt{5}\right)^n < 2N.$$

З останньої оцінки випливає, що ціла частина $\left(3+\sqrt{5}\right)^n$ дорівнює $2N-1$, тобто є непарним числом. □

17.2. Довести нерівність

$$\int_0^1 x^n (1-x)^n \, dx \geq \frac{1}{k_n},$$

де k_n є найменшим кратним чисел $\{n+1; n+2; \ldots; 2n+1\}$.

Доведення.

$$0 < \int_0^1 x^n (1-x)^n \, dx = \int_0^1 \sum_{k=0}^n C_n^k (-1)^k x^{n+k} dx =$$

$$= \sum_{k=0}^n C_n^k (-1)^k \left. \frac{x^{n+k+1}}{n+k+1} \right|_0^1 = \quad = \sum_{k=0}^n \frac{C_n^k (-1)^k}{n+k+1} = \frac{\sum_{k=0}^n C_n^k (-1)^k d_k}{k_n},$$

де $k_n = \text{НСК}\{n+1; n+2; \ldots; 2n+1\}$, $d_k = \frac{k_n}{n+k-1}$, $k = \overline{0, n}$.

Сума в чисельнику є цілою, бо числа d_k цілі, і додатною, оскільки інтеграл додатний, тому вона не може бути меншою зо одиницю, звідки й випливає потрібна нерівність. □

17.3. В інституті, в якому навчаються 2015 студентів, серед довільних чотирьох осіб можна обрати принаймні одну, яка знайома з іншими трьома. Якою є мінімальна можлива кількість студентів, які знайомі з усіма іншими?

Розв'язання. Якщо незнайомих між собою студентів немає, то загальна кількість людей, що знайомі з усіма, є 2015 чоловік. Нехай A та B незнайомі один з одним. Тоді всі інші між собою знайомі. Справді, якщо C не знайомий з D, то в групі $\{A, B, C, D\}$ жоден не знайомий з іншими трьома, що суперечить умові. Якщо A та B знайомі з усіма іншими, тоді знайомих з усіма буде 2013.

Якщо ж A незнайомий з C ($C \neq B$), тоді A, B, C знайомі з усіма іншими 2012 студентами, оскільки довільний інший студент D в групі $\{A, B, C, D\}$ повинен бути знайомим з іншими трьома. Всі інші знайомі між собою. Отже, мінімальне число знайомих з усіма буде 2012. □

17.4. Щур гризе куб сиру з ребром 3, розбитий на 27 одиничних кубиків. Коли він з'їдає якийсь кубик, він переходить до іншого кубика, що має спільну грань із щойно з'їденим. Чи може щур з'їсти весь куб, окрім центрального кубика?

Розв'язання. Кожний кубик, окрім центрального, пофарбуємо або в білий, або в чорний колір наступним чином: 12 кубиків, що мають рівно по дві грані на поверхні великого куба, нехай будуть білими, а решта 14 —

чорними. Тоді спільну грань можуть мати тільки кубики різних кольорів. Вказані 26 кубиків щур з'їсти не зможе, оскільки інакше їх можна було б розбити на 13 пар з одного білого й одного чорного кубиків, а тоді білих і чорних кубиків було б порівну. □

17.5. Скільки різних пар підмножин, які не перетинаються, має множина з n елементів?

Розв'язання. Знайдемо кількість різних пар підмножин. що не перетинаються, за умови, що в парі розрізняють першу та другу підмножину. Для кожного з n елементів є 3 можливості: він може належати першій множині, або належати другій множині, або не належати жодній з них. Тому кількість таких пар дорівнює 3^n. Серед них є пара з двох порожніх множин. Решту $3^n - 1$ пар можна в свою чергу розбити на двійки пар, що розрізняються лише порядком підмножин. Таким чином, існує $\frac{3^n-1}{2}$ невпорядкованих пар непорожніх підмножин. Загальна кількість невпорядкованих пар підмножин дорівнює $\frac{3^n-1}{2} + 1 = \frac{3^n+1}{2}$. □

17.6. Скільки дільників має число 21600?

Розв'язання. Розкладемо число на прості множники:

$$21600 = 2^5 \cdot 3^3 \cdot 5^2.$$

Тоді кожний дільник числа 21600 має вигляд $2^i \cdot 3^j \cdot 5^k$, для всіх можливих $i = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, $j = 0, 1, 2, 3$ та $k = 0, 1, 2$. Отже, за основним правилом комбінаторики число 21600 має $6 \cdot 4 \cdot 3 = 72$ дільника. □

17.7. Скільки є чотирицифрових кодів, у яких цифри йдуть у порядку зростання?

Розв'язання. Кожна цифра коду обирається з множини $\{0, 1, 2, \dots, 9\}$. За умовою задачі всі цифри коду — різні. Виберемо з множини $\{0, 1, 2, \dots, 9\}$ чотири різних цифри. Це можна зробити $C_{10}^4 = 210$ способами. А далі існує лише один спосіб впорядкувати цифри за зростанням. Отже, шуканих кодів 210 штук. □

17.8. Знайдіть останню цифру числа:

$$C_{2020}^0 + C_{2020}^1 + C_{2020}^2 + \ldots + C_{2020}^{2019} + C_{2020}^{2020}.$$

Розв'язання. З формули бінома Ньютона випливає, що

$$C_{2020}^0 + C_{2020}^1 + C_{2020}^2 + \ldots + C_{2020}^{2019} + C_{2020}^{2020} = (1+1)^{2020} = 2^{2020}.$$

Для степенів числа 2 останні цифри повторюються: 2, 4, 8, 6, 2, 4, 8, 6, … причому степені, кратні 4, закінчуються на 6. Тому, оскільки $2020 \,\vdots\, 4$, то останньою цифрою заданого числа є цифра 6. □

Задачі для самостійного розв'язання.

17.9. Для кожного значення $n \in \mathbb{N}$ знайти найбільше число $k \in \mathbb{N}$, що має таку властивість: у множині з n елементів можна вибрати k різних підмножин, будь-які дві з яких мають непорожній перетин.

17.10. Довести або спростувати, що серед кожних n осіб завжди знайдуться або троє попарно знайомі, або k попарно незнайомі для кожного з наступних випадків:

1. $n = 6,\ k = 3$;
2. $n = 9,\ k = 4$;
3. $n = 8,\ k = 4$.

17.11. Скільки раціональних доданків містить розклад:

$$\text{а)}\quad \left(\sqrt{2} + \sqrt[4]{3}\right)^{100}; \quad \text{б)}\quad \left(\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}\right)^{300}?$$

17.12. Скільки додатних цілих чисел, що не перевищують 2020, діляться на 3 або на 4, але не діляться на 5?

17.13. Скільки існує послідовностей довжини n, що складаються лише з цифр 0, 1 та 2, причому кожна цифра зустрічається принаймні 1 раз?

17.14. Скільки є способів розподілити n різних кульок по m різних урнах $(n \geq m)$ так, щоб жодна урна не залишилася порожньою?

17.15. Скільки дільників має число 2020?

17.16. Скільки є п'ятизначних чисел, у яких кожна наступна цифра не менша від попередньої?

17.17. *(Ключі від сейфа)* Міжнародна комісія складається з 9 осіб. Матеріали комісії зберігаються у сейфі. Скільки замків має містити сейф і скільки ключів до них треба виготовити і як їх розподілити серед членів комісії, щоб доступ до сейфу був можливим тоді і лише тоді, коли разом зберуться не менше ніж 6 членів комісії? Розгляньте задачу у загальному випадку: коли комісія складається з n осіб, а сейф можна відкрити лише за умови присутності m членів комісії $(m \leq n)$.

17.18. Автомобільний номер, що складається з 4-х цифр (кожна цифра від 0 до 9), вважають надзвичайно щасливим, якщо сума двох останніх його цифр дорівнює сумі двох перших цифр. Скільки є таких номерів?

Відповіді та вказівки

Розділ 1

1.12. *Вказівка.* $2^{2^{n+1}}+1=2^{2\cdot 2^n}+1=(2^{2^n}+1)^2-2\cdot 2^{2^n}$. Якщо число $2^{2^n}+1$ закінчується цифрою 7, то число $(2^{2^n}+1)^2$ закінчується цифрою 9, а число $2\cdot 2^n$ — цифрою 2. Отже, різниця даних чисел закінчується цифрою 7. □

1.13. *Вказівка.* Припустимо, що число n можна представити у вигляді $n=3i+5j, i,j\in\mathbb{N}$. Тоді $n+1=3i+5j+1=3(i+2)+5(j-1)$. □

1.14. *Вказівка.*

$$\underbrace{111...111}_{3^{n+1}\text{ одиниць}}=\underbrace{111...111}_{3^n\text{ одиниць}}\underbrace{000...000}_{2\cdot 3^n\text{ нулів}}+\underbrace{111...111}_{3^n\text{ одиниць}}\underbrace{000...000}_{3^n\text{ нулів}}+\underbrace{111...111}_{3^n\text{ одиниць}}=$$

$$=\underbrace{111...111}_{3^n\text{ одиниць}}\cdot 10^{2\cdot 3^n}+\underbrace{111...111}_{3^n\text{ одиниць}}\cdot 10^{3^n}+\underbrace{111...111}_{3^n\text{ одиниць}}=$$

$$=\underbrace{111...111}_{3^n\text{ одиниць}}\cdot\left(10^{2\cdot 3^n}+10^{3^n}+1\right).$$

Число $\underbrace{111...111}_{3^n\text{ одиниць}}$ ділиться на 3^n за припущенням індукції, а число $\left(10^{2\cdot 3^n}+10^{3^n}+1\right)$ ділиться на 3 за ознакою подільності, тому їхній добуток ділиться на 3^{n+1}. □

1.15. *Вказівка.* За виконання припущення для $n=k$: $a_k=\frac{1}{2}(7^k-1)$, зі співвідношень

$$a_{k+1}=7a_k+3=\frac{7}{2}(7^k-1)+3=\frac{7^{k+1}}{2}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(7^{k+1}-1)$$

випливає, що твердження справедливе для $n=k+1$, а значить і для будь-якого $n\geq 1$. □

1.16. *Вказівка.* Запишемо

$$a_{n+1}=5a_n+\sqrt{24a_n^2+1}\quad\Leftrightarrow\quad a_{n+1}-5a_n=\sqrt{24a_n^2+1}\quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad (a_{n+1}-5a_n)^2=24a_n^2+1\quad\Leftrightarrow\quad a_{n+1}^2-10a_na_{n+1}+a_n^2=1.$$

Аналогічно

$$a_n^2-10a_na_{n-1}+a_{n-1}^2=1.$$

Віднімемо останні дві рівності

$$a_{n+1}^2-10a_na_{n+1}+10a_na_{n-1}-a_{n-1}^2=0\Leftrightarrow(a_{n+1}-a_{n-1})(a_{n+1}+a_{n-1}-10a_n)=0.$$

Звідси випливає потрібне твердження. □

1.17. *Вказівка.*

$$\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}_{n+1\text{ знаків кореня}} = \sqrt{2+2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}} = \sqrt{4\cos^2\frac{\pi}{2^{n+2}}} = 2\cos\frac{\pi}{2^{n+2}}.$$

□

1.18. *Доведення.* Нехай піраміда розміщена на першому стрижні. Доведемо, що її можна перемістити, наприклад, на третій стрижень. Для $n = 1$ це очевидно. Припустимо, що можна перемістити піраміду, що складається з n дисків (на довільний стрижень). Розглянемо піраміду, що складається з $(n + 1)$-го диска. За припущенням індукції, n верхніх дисків можна перемістити на другий стрижень, а останній найбільший диск — на третій. Далі, знову за припущенням індукції, піраміду з другого стрижня можна перемістити на третій. Таким чином, піраміда з $(n+1)$-го диска переміщена з першого на третій стрижень. □

Розділ 2

2.12. *Доведення.* Нехай на мухоморах Кащея було n цяточок, а на тому, що він отримав, було k цяточок. Тоді в Баби–Яги було $13n$ цяточок, а залишилося $13n - k = 8(n + k)$. Тобто $n = 9k/5$. Виходить, у Баби–Яги на початку було цяточок $117k/5 = 23,4k < 24k$, а оскільки на кожному мухоморі було принаймні k цяточок, то, за принципом Діріхле, їх у неї було не більше ніж 23 мухомори. □

2.13. *Доведення.* Нехай в компанії n людей. Припустимо супротивне, тобто немає в компанії двох людей, які мають однакову кількість спільних знайомих. Кожен з них може мати 0, 1, 2, 3, …, $n-1$ знайомих в цій компанії. Але тоді існує людина, які знайома з усіма, а отже і з тією людиною, яка не знайома ні з ким. Отримали протиріччя. □

2.14. *Доведення.* Серед всіх двозначних чисел є дев'ять, які мають однакові цифри десятків та одиниць: 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99. Зауважимо, що такі і тільки такі числа у класі двозначних діляться без залишку на 11. Залишків від ділення на 11 є одинадцять: 0, 1, 2, …, 10. Оскільки вибрано 12 чисел, то за принципом Діріхле знайдуться принаймні два, які мають однаковий залишок від ділення на 11, а отже їх різниця ділиться на 11 без залишку. Значить це одне з чисел 11, 22, …, 99. □

2.15. *Доведення.* Розглянемо степені числа 3: 1, 3, 9, 27, … . Їх нескінченно багато. Залишків від ділення на 1000 є 1000: 0, 1, 2, …, 999.

Тому за принципом Діріхле існує дві степені числа 3, які мають однакові залишки від ділення на 1000. Розглянемо їх різницю (нехай $n > m$): $3^n - 3^m = 3^m(3^{n-m} - 1)$. Це число без залишку ділиться на 1000. Але 3^m і 1000 — взаємно прості. Звідси випливає, що число $3^{n-m}-1$ ділиться на 1000, тобто існує таке натуральне q, що $3^{n-m}-1 = 1000q$. Отже, $3^{n-m} = 1+1000q$. Останнє число закінчується на 001, що і треба було довести. $\square$

2.16. *Вказівка.* Матіса — це дробова частина числа і для будь-якого дійсного числа вона належить інтервалу $[0, 1)$. Розіб'ємо інтервал $[0, 1)$ на 100 інтервалів однакової довжини: $[0, \frac{1}{100})$, $[\frac{1}{100}, \frac{2}{100})$, $[\frac{2}{100}, \frac{3}{100})$, $\ldots$, $[\frac{99}{100}, 1)$. Зрозуміло, що послідовність $\{\sqrt{3}, 2\sqrt{3}, 3\sqrt{3}, \ldots\}$ містить нескінченно багато елементів вигляду $n\sqrt{3}$. Тому за принципом Діріхле знайдеться два елементи $m\sqrt{3}$ та $n\sqrt{3}$, (припустимо $n > m$), матіси яких потраплять у один і той самий інтервал з $[0, \frac{1}{100})$, $[\frac{1}{100}, \frac{2}{100})$, $[\frac{2}{100}, \frac{3}{100})$, $\ldots$, $[\frac{99}{100}, 1)$. Будемо вважати також, що матіса більшого числа $n\sqrt{3}$ є більшою за матісу меншого числа $m\sqrt{3}$ (треба обґрунтувати, чому такі числа знайдуться). Очевидно, що таке число $(n - m)\sqrt{3}$ є елементом послідовності $\{\sqrt{3}, 2\sqrt{3}, 3\sqrt{3}, \ldots\}$ і має матісу меншу за 0.01. $\square$

2.17. *Доведення.* Розглянемо числа, які складаються тільки з п'ятірок, тобто числа вигляду 55...55. Очевидно, що таких чисел нескінченно багато. Залишків від ділення на n є n: 0, 1, 2, $\ldots$, $n - 1$. Тому за принципом Діріхле знайдуться два числа вигляду 55...55, які мають однакові залишки від ділення на n. Тоді їх різниця без залишку ділиться на n. А це число вигляду: 55...5500...00. $\square$

2.18. *Доведення.* Розіб'ємо квадрат на 25 квадратів зі стороною $1/5$. Оскільки точок 51, а $25 \cdot 2 = 50$, то за принципом Діріхле існує принаймні один квадрат, в який потрапило три точки. Описане навколо такого квадрата коло має радіус $\sqrt{2}/10 < 1/7$. $\square$

2.19. *Доведення.* Розглянемо всі трійки на колі. Їх 10. Тому сума всіх трійок дорівнює $3 \cdot (1 + 2 + 3 + \ldots + 10) = 165$. Припустимо, що можна так розмістити числа вздовж кола, що не існує трійки чисел, сума яких не менша за 17. Тоді для кожної з трійок сума не перевищує 16, а отже сума всіх десяти трійок не перевищує $10 \cdot 16 = 160 < 165$. Отримали протиріччя. Таким чином, існує принаймні одна трійка поспіль написаних чисел, що їх сума не менша за 17. $\square$

2.20. *Доведення.* Розглянемо залишки від ділення на b (позначення: $(\text{mod } b)$) скінченої послідовності $a, 2a, \ldots, (b-1)a$. Очевидно, що серед залишків немає 0, оскільки a, b — взаємно прості числа. Припустимо, що серед залишків немає 1, тобто розглянемо залишки: 2, 3, 4, $\ldots$, $b - 1$. Тоді за принципом Діріхле існують різні числа p та q (нехай $0 < q < p$) такі, що $pa = qa \pmod b$. Це означає, що $(p-q)a$ ділиться без залишку на b, а оскільки a та b — взаємно прості, то $p-q$ також ділиться без залишку на b. Але $0 < p, q < b$. Отримали протиріччя. Таким чином, існує натуральне число x таке, що $xa = 1 \pmod b$. Іншими словами, $ax = by + 1$ для деякого натурального y, що й треба було довести. □

2.21. *Доведення.* Щоб не було вільної пари непофарбованих клітин, в кожному рядку має бути пофарбовано щонайменше 5 клітин, а значить всього має бути пофарбовано не менше 50 клітин, що протирічить умові задачі. Отже, знайдуться 2 суміжні клітини, які не пофарбовано. □

2.22. *Вказівка.* Розв'язання задачі можна провести аналогічно до задачі 2.11. Або так: в кожному стовпці буде не менше ніж 3 клітини одного кольору. Застосуємо принцип Діріхле, в якому "клітки" — це кольори, а "зайці" — це стовпці. Тоді в 21-у стовпці (з 41-го стовпця) буде по 3 клітини одного кольору (наприклад першого). В кожному з цих стовпців 3 клітини першого кольору можна розташувати десятьма способами. Знову за принципом Діріхле в трьох стовпцях (з 21-го) клітини першого кольору будуть розташовані на тих самих місцях. □

2.23. *Доведення.* Спроектуємо всі кола на одну зі сторін квадрата. Проекція кожного кола — відрізок, довжина якого дорівнює діаметру відповідного кола. Сума цих відрізків дорівнює $\frac{10}{\pi} > 3.1$. За принципом Діріхле існує принаймні 4 відрізка, які мають спільну точку. Перпендикуляр, проведений з цієї точки на протилежну сторону квадрата, перетне не менше чотирьох кіл. □

2.24. *Доведення.* Нехай A — один з учасників. Він може спілкуватися з кожним з 16-ти інших учасників не більше ніж трьома відомими йому мовами. Тоді існує мова ("перша мова"), на якій розмовляє A та ще принаймні 6 людей. Нехай B — будь-який з цих шести людей. Зрозуміло, що серед п'яти інших учасників цієї групи є 3, які спілкуються з B однією мовою (позначимо її — "друга мова"). Якщо серед цих трьох хоча б два учасники, скажімо C та D, спілкуються "другою мовою", то B, C і D як раз утворюють групу з трьох, що володіє спільною мовою. □

2.25. *Доведення.* Нехай $n = 2k+1$. У множині натуральних чисел від 1 до $n = 2k+1$ є рівно $k+1$ непарне. Оскільки добуток $(a_1-1)(a_2-2)\dots(a_n-n)$ складається з n множників, то принаймні в одній дужці стоїть різниця двох непарних чисел, яка відповідно дає парний множник. Отже, добуток буде парним. □

2.26. *Доведення.* Нехай $n \geq 1$. Кожному числу x із S поставимо у відповідність значення $d(x)$ — довжину найбільшої зростаючої підпослідовності, яка починається з x включно. Якщо $d(x) \geq n+1$ для деякого x із S, то теорема доведена. Якщо не існує елемента x такого, що $d(x) \geq n+1$, то $d(x) \leq n$ для всіх x із S.

Якщо $d(x) \leq n$ для будь-якого $x \in S$, то функція $d(x)$ відображає множину S, яка містить n^2+1 довільних дійсних чисел в множину $P = \{\{1\}, \{2\}, \ldots, \{n\}\}$ класів за довжинами найбільшої зростаючої підпослідовності. Оскільки $\frac{n^2+1}{n} = n + \frac{1}{n} > n$, то за принципом Діріхле в деякий клас $\{m\}$, $1 \leq m \leq n$, множини $P = \{\{1\}, \{2\}, \ldots, \{n\}\}$, потрапило принаймні $n+1$ елементів з S. Випишемо ці елементи у порядку, як вони зустрічаються в послідовності S зліва направо: $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$. Покажемо, що ця послідовність спадна, тобто $x_1 > x_2 > \ldots > x_{n+1}$. Припустимо супротивне. Нехай $x_1 < x_2$. Тоді $d(x_2)$ — довжина найбільшої зростаючої підпослідовності, яка починається з x_2 включно. Добавимо до цієї підпослідовності x_1 зліва і отримаємо нову підпослідовність довжини $d(x_2)+1$. Ця ж сама підпослідовність має довжину $d(x_1)$, а отже, $d(x_2)+1 = d(x_1)$. З іншого боку, $d(x_1) = d(x_2)$, оскільки x_1 і x_2 — елементи з одного класу. Отримали протиріччя. Аналогічним чином доводиться, що $x_2 > x_3$, і. т.д. $\square$

Розділ 3

3.13. *Вказівка.* Випливає з представлення:

$$n^2 = \left(\frac{n-1}{2} + 1\right) + \left(\frac{n-1}{2} + 2\right) + \ldots + \left(\frac{n-1}{2} + n\right).$$

$\square$

3.14. *Розв'язання.* Відмітимо, що якщо p, q, r, s, t — прості числа, та $p^2 + q^2 = r^2 + s^2 + t^2$, то кожне з чисел p, q відмінне від чисел r, s, t. Дійсно, якщо би, наприклад, $p = r$, то $q^2 = s^2 + t^2$, що не можливо для простих чисел q, s, t. Отже, числа в лівій та правій частинах рівності не повторюються.

Відмітимо також, що числа p, q, r, s, t не можуть бути всі одночасно непарними (в протилежному випадку права частина рівності була би парною, а ліва — непарною). Отже, якщо рівняння має розв'язки в множині простих чисел, то серед цих розв'язків має бути число 2 (причому не повторюючись). Нехай 2 стоїть в лівій частині рівності, а всі інші числа — непарні. Як відомо, квадрат непарного числа при діленні на 8 дає остачу 1. Отже, за нашим припущенням, ліва частина рівності при діленні на 8 дає в остачі 5, а права частина — 3, що не можливо. Нехай тепер число 2 стоїть в правій частині рівності. Така ситуація є також неможливою, оскільки тоді би ліва частина при діленні на 8 давала остачу 2, а права частина — 6.

Отже, дане рівняння не має розв'язків в множині простих чисел. $\square$

3.15. *Розв'язання.* Помітимо, що для всіх натуральних $n > 1$,

$$2^{4n+2} + 1 = \left(2^{2n+1} - 2^{n+1} + 1\right)\left(2^{2n+1} + 2^{n+1} + 1\right). \tag{17.1}$$

Оскільки $2^{4n+2} + 1 = \left(2^{2n+1}\right)^2 + 1 = 4^s + 1$, то число $\left(2^{4n+2} + 1\right)$ кратне 5, звідки маємо, що один із множників в правій частині (17.1) кратний 5. Більше того,

$$2^{2n+1} - 2^{n+1} + 1 = 2^{n+1}(2^n - 1) + 1 \geq 2^3 3 + 1 = 25, \quad n > 1.$$

Звідки випливає, що кратний 5 співмножник в правій частині (17.1) не рівний 5, що, разом з рівністю (17.1) доводить твердження задачі. $\square$

3.16. *Розв'язання.* Покладемо $x = t + 3$. Тоді наше рівняння набуде вигляду

$$2t(t^2 + 3t + 21) = 0.$$

Воно має єдиний розв'язок в множині дійсних чисел, а саме $t = 0$. Отже, коренем початкового рівняння є $x = 3$. $\square$

3.17. *Вказівка.* Скористатися представленням числа $\overline{abcd}$ та ознаками подільності на 9 та на 11. Нагадаємо: число ділитися на 9, якщо сума його цифр ділитися на 9 без залишку. Натуральне число без залишку ділиться на 11, якщо різниця між сумою цифр, що стоять на непарних місцях та сумою цифр, що стоять на парних місцях, ділиться на 11. В нашій ситуації $\overline{abcd} \,\vdots\, 11$, якщо $a + c - (b + d) \,\vdots\, 11$. $\square$

3.18. *Вказівка.* Можна скористатися формулою скороченого множення:

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

$\square$

3.19. *Відповідь:* Ні, оскільки сума цифр цього числа дорівнює 300, що означає, що число без залишку ділиться на 3. Якщо б воно було повним квадратом, воно мало б ділитися на 9, але 300 не ділиться на 9 без залишку.

3.20. *Вказівка.* За умовою $\overline{abc} = 100a + 10b + c = 12(a + b + c)$, звідки випливає, що $\overline{abc} \,\vdots\, 3$. Це в свою чергу означає, що $a + b + c \,\vdots\, 3$, а значить $\overline{abc} \,\vdots\, 9$. Крім того, $\overline{abc} \,\vdots\, 4$. Отже $\overline{abc} \,\vdots\, 36$. Але $a + b + c \leq 27$. З усіх цих міркувань маємо, що $\overline{abc} \leq 27 \cdot 12 = 324$. Таким чином, єдине можливе число: 108. $\square$

3.21. *Вказівка.* Розпишемо суму квадратів п'яти послідовних довільних чисел:

$$(n - 2)^2 + (n - 1)^2 + n^2 + (n + 1)^2 + (n + 2)^2 = 5(n^2 + 2) \,\vdots\, 5,$$

звідки випливає, що $n^2 + 2 \vdots 5$, чого бути не може. $\square$

3.22. *Відповідь:* 1652, 6125.

3.23. *Вказівка.* Розглянути число $6(n + 7m)$ та скористатися представленням:

$$6(n + 7m) = \underbrace{6n + 11m}_{\vdots 31} + 31m.$$

$\square$

3.24. *Вказівка.* Якщо $p \neq 3$, то $(8p^2 + 1) \vdots 3$.

Відповідь: $p = 3$. $\square$

3.25. *Розв'язання.* При розв'язанні задачі скористаємося таким очевидним твердженням. *Нехай $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — многочлен з цілими коефіцієнтами змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Будь-який розв'язок рівняння $F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ в цілих числах є також розв'язком рівняння*

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv 0 \pmod{m},$$

для будь-якого $m \in \mathbb{N}$. Звідси одразу випливає, що якщо хоча б при одному значенні m останнє співвідношення не виконується, то рівняння $F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ не має розв'язків у цілих числах.

а) Припустимо, що рівняння може мати розв'язки у цілих числах. Розглянемо задане рівняння (mod 3). Перепишемо рівняння наступним чином: $y^2 - 5 = 12x$, з чого випливає, що $y^2 - 5 \vdots 4$ та $y^2 - 5 \vdots 3$. Звідси отримаємо, що y може бути тільки непарним числом. Отже, нехай $y = 2k + 1$. Тоді $y^2 - 5 = (2k + 1)^2 - 5 = 4(k^2 + k - 1)$, яке також має ділитися без залишку на 3. Але число $k^2 + k - 1$ для будь-якого цілого k дає залишки 1 або 2 при діленні на 3 . Отже, отримали протиріччя.

б), в), г) розв'язуються аналогічно. Розглянути вихідне рівняння (mod m) для таких m: б) $m = 5$, в) $m = 13$, г) $m = 4$. $\square$

3.26. *Вказівка.* Виділяти поступово повні квадрати, починаючи з внутрішнього кореня.

Відповідь: $\sqrt{6} + \sqrt{2}$. $\square$

3.27. *Відповідь:* $x = 2n - 1$.

Розділ 4

4.8. *Вказівка.* Сума всіх коефіцієнтів многочлена дорівнює значенню цього многочлена в точці 1.

Відповідь: 1. $\square$

4.9. *Доведення.* Використаємо теорему Вієта

$$x_1 + x_2 = -p, \quad x_1x_2 = -\frac{1}{2p^2}$$

і нерівність між середнім арифметичним і середнім геометричним. Отримаємо

$$x_1^4 + x_2^4 = (x_1+x_2)^4 - 2x_1x_2(2(x_1+x_2)^2 - x_1x_2) = p^4 + \frac{1}{p^2}\left(2p^2 + \frac{1}{2p^2}\right) =$$

$$= p^4 + 2 + \frac{1}{2p^4} \geq 2 + 2\sqrt{p^4 \cdot \frac{1}{2p^4}} = 2 + \sqrt{2}.$$

□

4.10. *Вказівка.* Підставляючи поступово замість n невід'ємні цілі числа, отримаємо, що $P(n) = n$. □

4.11. *Вказівка.* Скористатися теоремою Вієта.

Відповідь: $x^4 - ax^3$; $x^4 - ax^3 - x + a$; $x^4 - x^3 + x - 1$; x^4. □

4.12. *Доведення.* Для коренів u, v, uv многочлена $P(x)$ за теоремою Вієта маємо:

$$u + v + uv = -a;$$
$$uv(1 + u + v) = b;$$
$$u^2v^2 = -c,$$

звідки у випадку, якщо $a \neq 1$ отримуємо:

$$b - c = uv(1 + u + v + uv) = uv(1 - a),$$

тобто $uv = (b - c)/(1 - a)$ — раціональне число. Оскільки число $u^2v^2 = -c$ ціле, то і число uv теж ціле. Тому з рівностей

$$P(1)+P(-1)-2(1+P(0)) = (1+a+b+c)+(-1+a-b+c)-2(1+c) = 2(a-1) =$$

$$= -2(1 + u + v + uv) = -2(1 + u)(1 + v) \neq 0,$$

$$2P(-1) = 2(-1 - u)(-1 - v)(-1 - uv) = -2(1 + u)(1 + v)(1 + uv)$$

випливає, що число

$$\frac{2P(-1)}{P(1) + P(-1) - 2(1 + P(0))} = 1 + uv$$

теж є цілим.

Якщо ж $a = 1$, то отримаємо $0 = 1 + u + v + uv = (1 + u)(1 + v)$, тобто один із коренів многочлена дорівнює -1, а це означає, що число $2P(-1) = 0$ ділиться на будь-яке ціле число. □

4.13. *Доведення.* Оскільки многочлен має n додатних коренів $x_1, x_2, \ldots, x_n$, то його степінь не менше n. Отже, $a \neq 0$ і за теоремою Вієта

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1,$$
$$(-1)^{n-1} \sum_{i=1}^{n} x_1 x_2 \ldots x_{i-1} x_{i+1} \ldots x_n = n^2 \frac{b}{a},$$
$$(-1)^n x_1 x_2 \ldots x_n = -\frac{b}{a},$$

звідки $b \neq 0$. Враховуючи нерівність між середнім арифметичним і середнім геометричним, отримаємо умову

$$n^2 = 1 \cdot \frac{(-1)^n n^2 b/a}{(-1)^{n-1}(-b/a)} = (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}\right) \geq$$
$$\geq n(x_1 x_2 \ldots x_n)^{\frac{1}{n}} \left(n\left(\frac{1}{x_1}\frac{1}{x_2}\ldots\frac{1}{x_n}\right)^{1/n}\right) = n^2,$$

яка виконується лише у випадку, коли

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = \frac{1}{n}.$$

□

4.14. *Доведення.* Скористаємося методом математичної індукції і покажемо, що для парних n многочлен $P_n(x)$ приймає додатні значення для всіх $x \in \mathbb{R}$ (а отже, не має дійсних коренів), а для непарних n многочлен $P_n(x)$ має лише один дійсний корінь. При $n = 0$ маємо $P_0(x) = 1$ для всіх $x \in \mathbb{R}$. Нехай твердження виконується для довільного степеня менше за деяке $n \in \mathbb{N}$. Покажемо, що воно виконуватиметься і для n.

а) Якщо n непарне, то згідно припущенню індукції $P_n'(x) = P_{n-1}(x) > 0$ для всіх $x \in \mathbb{R}$, тому функція $P_n(x)$ зростає і не може перетворюватися на 0 більше одного разу. Так як $P_n(0) = 1$ і $\lim\limits_{x\to-\infty} P_n(x) = -\infty$, то неперервна функція $P_n(x)$ має принаймні один нуль.

б) Якщо n парне, то многочлен $P_n'(x) = P_{n-1}(x)$ має рівно один дійсний корінь $x_0 \neq 0$. Оскільки $P_n''(x) = P_{n-2}(x) > 0$ при всіх $x \in \mathbb{R}$, то $P_n'(x) > 0$ при всіх $x > x_0$ і $P_n'(x) < 0$ при всіх $x < x_0$. Таким чином, для всіх $x \in \mathbb{R}$ маємо

$$P_n(x) \geq P_n(x_0) = P_{n-1}(x_0) + \frac{x_0^n}{n!} = \frac{x_0^n}{n!} > 0.$$

□

4.15. *Доведення.* Тотожність $P_n(t+t^{-1}) = t^n + t^{-n}$ при $t = t_0 = e^{\frac{\pi i}{3}}$ (де $i^2 = -1$) має вигляд $P_n(1) = 2\cos\frac{\pi n}{3}$, оскільки $t_0^n + t_0^{-n} = e^{\frac{\pi n i}{3}} + e^{-\frac{\pi n i}{3}} = 2\cos\frac{\pi n}{3}$ для всіх $n \in \mathbb{C}$. Таким чином, послідовність є періодичною з періодом 6 та обмеженою числами -2 знизу і 2 зверху. □

4.16. *Розв'язання.* Помітимо, що всі корені $P(x)$ від'ємні, оскільки $P(x) > 0$ для всіх $x \geq 0$. Отже, $P(x)$ можна зобразити у вигляді

$$P(x) = (x + c_1)(x + c_2) \cdot \ldots \cdot (x + c_n),$$

де $c_k > 0$ — абсолютні значення коренів $P(x)$. Помітимо, що $c_1 \cdot c_2 \cdot \ldots \cdot c_n = 1$. Підставляючи $x = n - 1$, отримаємо

$$P(n-1) = (n - 1 + c_1)(n - 1 + c_2) \cdot \ldots \cdot (n - 1 + c_n).$$

За нерівністю між середнім арифметичним та середнім геометричним

$$n - 1 + c_k = (\underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{n-1 \text{ одиниць}} + c_k) \geq n\sqrt[n]{c_k}.$$

Отже, $P(n-1) \geq n^n \sqrt[n]{c_1 c_2 \ldots c_n} = n^n$, і рівність досягається тільки у випадку $c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 1$. Тому $P(x) = (x+1)^n$. Підставляючи $x = 1$, отримаємо $1 + a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + 1 = 2^n$. Звідси

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} = 2^n - 2.$$

□

Розділ 5

5.8. *Вказівка.* Підставляючи в рівняння $x = y = 0$, отримаємо, що $f(0) = 1$. Підставляючи у рівняння $y = 0$, отримаємо $3 - f(x) = -2x + 2$, звідки $f(x) = 2x + 1$. □

5.9. *Розв'язання.* При $y = 1$ одержимо

$$f(x) + f(1) = f\left(\frac{x+1}{1+x}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} f(x) + f(1) = f(1), \\ x \neq -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \forall x \neq -1 \quad f(x) = 0.$$

При $y = -1$ одержимо

$$f(x) + f(-1) = f\left(\frac{x-1}{1-x}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} f(x) + f(-1) = f(-1), \\ x \neq 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \forall x \neq 1 \quad f(x) = 0.$$

Таким чином, $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = 0$. □

5.10. *Розв'язання.* Якщо у функціональне рівняння підставити $x = f(y)$, то дістанемо рівняння $f(0) = 1 - f(y) - y$, тобто $f(y) = 1 - y - f(0)$. Поклавши $y = 0$, одержимо $f(0) = 1 - f(0)$, тобто $f(0) = \frac{1}{2}$. Отже, $f(y) = \frac{1}{2} - y$, тобто

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \frac{1}{2} - x.$$

Перевірка показує, що функція $f(x) = \frac{1}{2} - x$ задовольняє умову задачі. $\square$

5.11. *Розв'язання.*

$$\begin{array}{ll} x = 0, y = t: & f(t) - f(-t) = 2f(t), \\ x = \frac{\pi}{2}, y = t + \frac{\pi}{2}: & f(t+\pi) - f(-t) = 0, \\ x = t + \frac{\pi}{2}, y = \frac{\pi}{2}: & f(t+\pi) - f(t) = -2f\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin t. \end{array}$$

Розв'язавши систему, одержимо

$$f(t) = f\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin t.$$

Позначимо

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = a.$$

Перевірка показує, всі що функції $f(t) = a\sin t, a \in \mathbb{R}$ дійсно є розв'язками функціонального рівняння. $\square$

5.12. *Вказівка.* Покласти в рівнянні $y = \frac{1}{x}$, прологарифмувати.

Відповідь: $f(x) = c^x$, $c = const > 0$. $\square$

5.13. *Розв'язання.* Покладемо у рівнянні $x = \frac{1}{y}$:

$$f\left(\frac{1}{y}\right) + 2f(y) = \frac{3}{y}.$$

Тепер розглянемо систему

$$\begin{cases} f(x) + 2f\left(\dfrac{1}{x}\right) = 3x, \\ 2f(x) + f\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{3}{x}. \end{cases}$$

Розв'язуючи цю систему, отримаємо, що $f(x) = \frac{2-x^2}{x}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Перевіркою встановлюємо, що ця функція дійсно задовольняє рівняння. $\square$

5.14. *Розв'язання.* Покладемо у рівнянні $y = \frac{x+1}{3x-1}$:

$$f\left(\frac{y+1}{3y-1}\right) + \frac{y+1}{3y-1}f(y) = 1.$$

Тепер розглянемо систему:

$$\begin{cases} f(x) + xf\left(\dfrac{x+1}{3x-1}\right) = 1, \\ \dfrac{x+1}{3x-1} f(x) + f\left(\dfrac{x+1}{3x-1}\right) = 1. \end{cases}$$

Розв'язуючи цю систему, знаходимо $f(x) = \frac{3x-1}{x-1}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{3}; 1\}$. Перевіркою встановлюємо, що ця функція дійсно задовольняє рівняння. Крім того, для $x = 1$ з вихідного рівняння випливає, що $f(1) + f(1) = 1$, звідки $f(1) = \frac{1}{2}$. □

5.15. *Вказівка.* Підставляючи в рівняння замість x послідовно $1 - x$, 1, 0, разом з самим рівнянням отримаємо наступну систему:

$$\begin{cases} 2f(x) + f(1-x) + xf(1) = 3, \\ 2f(1-x) + f(x) + (1-x)f(1) = 3, \\ 2f(1) + f(0) + f(1) = 3, \\ 2f(0) + f(1) = 3, \end{cases}$$

звідки $f(0) = \frac{6}{5}$, $f(1) = \frac{3}{5}$ і $f(x) = \frac{6-3x}{5}$. □

5.16. *Вказівка.* Застосувати метод підстановок, а саме замінити в рівнянні $\frac{x}{x-2}$ на x, потім $\frac{x+3}{-3x+5}$ на x, скласти систему, виразити $f(x)$.

Відповідь: $f(x) = \frac{x+1}{x}$. □

Розділ 6

6.7. *Розв'язання.* Зробимо підстановки

$$x = 0, y \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad f(0) = 0 \text{ або } f \equiv 1,$$

тобто, функція $f \equiv 1$ є розв'язком рівняння. Якщо існує $x^* \neq 0$ такий, що $f(x^*) = 0$, то для всіх x $f(x) = 0$. Тобто, функція $f \equiv 0$ є розв'язком рівняння. Усі інші розв'язки рівні нулю тільки при $x = 0$. Далі

$$x = y = t \quad \Rightarrow \quad f(t^2) = f^2(t) \geq 0,$$

тобто, функція f є додатною для додатних значень аргументу. Далі

$$x = y = -t \quad \Rightarrow \quad f(t^2) = f^2(-t) \quad \Rightarrow \quad f(t) = \pm f(-t)$$

$$\Rightarrow \quad f \text{ — парна або непарна.}$$

Знайдемо вигляд шуканої функції для додатних значень аргументу. Прологарифмуємо рівність

$$\ln f(xy) = \ln f(x) + \ln f(y).$$

Розглянемо функцію $g(t) = \ln f(t)$. Маємо

$$g(xy) = g(x) + g(y).$$

Із задачі 6.2 маємо

$$g(x) = c \ln x = \ln x^c, c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Отже, для додатних x маємо $f(x) = x^c, c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. На від'ємні значення аргументу продовжуємо функцію f парним або непарним чином. □

6.8. *Розв'язання.* Зауважимо, що методом математичної індукції можна довести, що $\forall m \geq 1, \forall x_1, \ldots, x_m$

$$f(x_1 + \ldots + x_m) = f(x_1) + \ldots + f(x_m) + \sum_{1 \leq i < j \leq m} x_i x_j.$$

Довільне невід'ємне раціональне число x має вигляд $x = \frac{m}{n}$, де $n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N} \bigcup \{0\}$. Маємо

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = f\Big(\underbrace{\frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{n}}_{\text{m доданків}}\Big) = mf\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{m^2 - m}{2} \cdot \frac{1}{n^2}.$$

Також

$$f(1) = f\Big(\underbrace{\frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{n}}_{\text{n доданків}}\Big) = nf\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{n^2 - n}{2} \cdot \frac{1}{n^2},$$

тобто, $f\left(\frac{1}{n}\right) = f(1) \cdot \frac{1}{n} - \frac{n-1}{2} \cdot \frac{1}{n^2}$. Отже, $f\left(\frac{m}{n}\right) = f(1) \cdot \frac{m}{n} - \frac{1}{2} \cdot \frac{m}{n} + \frac{1}{2} \cdot \frac{m^2}{n^2}$. Тобто, для всіх невід'ємних раціональних x $f(x) = cx - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^2$, де $c = f(1) \in \mathbb{R}$. Враховуючи неперервність функції f, отримаємо, що $f(x) = cx - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^2$, де $c \in \mathbb{R}$. □

6.9. *Відповідь:* $f(x) = x^2 + 1$.

6.10. *Відповідь:* $f(x) = x^2$.

6.11. *Розв'язання.* Зауважимо, що методом математичної індукції можна довести, що $\forall m \geq 1, \forall x_1, \ldots, x_m$

$$f(x_1 + \ldots + x_m) = \frac{f(x_1) \cdot \ldots \cdot f(x_m)}{\sum\limits_{1 \leq i_1 < \ldots < i_{m-1} \leq m} f(x_{i_1}) \cdot \ldots \cdot f(x_{i_{m-1}})}.$$

Довільне невід'ємне раціональне число x має вигляд $x = \frac{m}{n}$, де $n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N} \bigcup \{0\}$. Маємо

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = f\Big(\underbrace{\frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{n}}_{\text{m доданків}}\Big) = \frac{\left(f\left(\frac{1}{n}\right)\right)^m}{m\left(f\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{m-1}} = \frac{f\left(\frac{1}{n}\right)}{m}.$$

Також

$$f(1) = f\Big(\underbrace{\frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{n}}_{\text{n доданків}}\Big) = \frac{\left(f\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n}{n\left(f\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{n-1}} = \frac{f\left(\frac{1}{n}\right)}{n},$$

тобто, $f\left(\frac{1}{n}\right) = f(1) \cdot n$. Отже, $f\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{f(1)}{\frac{m}{n}}$. Тобто, для всіх додатних раціональних x отримали $f(x) = \frac{c}{x}$, де $c = f(1) \in \mathbb{R}$. Враховуючи неперервність функції f, отримаємо, що $f(x) = \dfrac{c}{x}$, де $c \in \mathbb{R}$. □

6.12. *Відповідь:* $f(x) = \frac{cx}{1+c-cx}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{1 + \frac{1}{c}\}$, $c = const > 0$.

6.13. *Відповідь:* $f(x) = \cos cx$, $c = const \in \mathbb{R}$.

6.14. *Відповідь:* $f(x) \equiv 0$ та $f(x) = x^c$, $x \in (0; \infty)$, $c \in \mathbb{R}$.

6.15. *Відповідь:* $f(x) \equiv 1$ та $f(x) = e^{c^x}$, $x \in (0; \infty)$, $c = const > 0$.

6.16. *Відповідь:* $f(x) = \frac{c}{x}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $c = const > 0$.

6.17. *Розв'язання.* Для кожного раціонального r функція $f_r(x) = f(x+r) - f(r)$ є неперервною і приймає лише раціональні значення. Тому вона є сталою: існує таке раціональне значення c_r, що для будь-якого дійсного x виконується $f_r(x) = c_r$. З означення функції f_r зрозуміло, що константи c_r задовольняють функціональне рівняння Коші: для раціональних r_1 та r_2 має місце $c_{r_1+r_2} = c_{r_1} + c_{r_2}$. Але тоді $c_r = c_1 r$, а $f(r) = f(0) + c_1 r$. Тому, знову використовуючи неперервність функції f, маємо $f(x) = f(0) + c_1 x$ для всіх дійсних x. Таким чином, умову задачі можуть задовольняти лише лінійні функції з раціональним кутовим коефіцієнтом. Безпосередньо впевнюємося, що всі такі функції дійсно задовольняють умову. □

6.18. *Розв'язання.* Розглянемо спочатку найпростіший випадок, коли $f \equiv 0$. Оскільки функції g та h у правій частині рівняння мають різні аргументи, то з необхідністю одна з них тотожно дорівнює нулеві, а інша є довільною неперервною функцією.

Нехай тепер $f \not\equiv 0$. Поклавши $x = 0$, одержимо

$$f(y) = g(0)\, h(y).$$

Якщо $g(0) = 0$, то ми знову приходимо до випадку, коли $f \equiv 0$. Інакше позначимо $C_1 = g^{-1}(0)$ і одержимо

$$h(y) = C_1 f(y).$$

Аналогічно, покладаючи $y = 0$ та $C_2 = h^{-1}(0)$, одержуємо

$$g(x) = C_2 f(x).$$

Тоді

$$f(x+y) = C_1 C_2 f(x) f(y).$$

Після заміни

$$w(\cdot) = C_1 C_2 f(\cdot)$$

одержимо

$$w(x+y) = w(x) w(y).$$

Із задачі 6.3 маємо

$$w(x) = e^{cx}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Звідси маємо, що

$$\begin{aligned} f(x) &= C_1^{-1} C_2^{-1} e^{cx}, \\ g(x) &= C_2 f(x) = C_1^{-1} e^{cx}, \\ h(x) &= C_1 f(x) = C_2^{-1} e^{cx}. \end{aligned}$$

Отже, є такі розв'язки:

1. $f \equiv g \equiv 0$, h — довільна неперервна функція;
2. $f \equiv h \equiv 0$, g — довільна неперервна функція;
3. $f(x) = abe^{cx}, \quad g(x) = ae^{cx}, \quad h(x) = be^{cx}, \quad a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad c \in \mathbb{R}.$

Усі розв'язки на всю числову вісь можна одержати неперервним продовженням цих функцій. □

Розділ 7

7.6. *Доведення.* Перепишемо співвідношення $a_n^2 - a_n \to 2$, $n \to \infty$ наступним чином:

$$(a_n - 2)(a_n + 1) \to 0, \quad n \to \infty.$$

Зауважимо, що послідовність $\left(\frac{1}{a_n+1}, n \geq 1\right)$ є обмеженою, оскільки $a_n > 0$, при $n \geq 1$ та $a_n \nrightarrow 0, n \to +\infty$. Тоді

$$a_n - 2 = (a_n - 2)(a_n + 1) \cdot \frac{1}{(a_n + 1)} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0,$$

як добуток нескінченно малої та обмеженої послідовностей. Отже, $a_n \to 2$, $n \to \infty$. □

7.7. *Доведення.* З того, що $\frac{a_n}{n} \to 0$, $n \to \infty$, за означенням маємо: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N = N(\varepsilon)$ таке, що $\forall n \geq N$ виконується нерівність $\left|\frac{a_n}{n}\right| < \varepsilon$. Звідси випливає, що для всіх $n \geq N$: $|a_n| < n\varepsilon$.

Нехай n досить велике, тобто $n \geq N$. Тоді

$$0 \leq \frac{|\max\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}|}{n} \leq \frac{|\max\{a_1, a_2, \ldots, a_N\}|}{n} + \frac{|\max\{a_{N+1}, a_{N+2}, \ldots, a_n\}|}{n}.$$

При цьому

$$\frac{|\max\{a_1, a_2, \ldots, a_N\}|}{n} \to 0, \quad n \to \infty,$$

оскільки $\max\{a_1, a_2, \ldots, a_N\}$ не залежить від n. Зауважимо також, що

$$|a_{N+1}| < (N+1)\varepsilon, \quad |a_{N+2}| < (N+2)\varepsilon, \quad |a_{N+3}| < (N+3)\varepsilon, \ \ldots, \ |a_n| < n\varepsilon,$$

а отже $|\max\{a_{N+1}, a_{N+2}, \ldots, a_n\}| < n\varepsilon$. З цих міркувань випливає, що

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{|\max\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}|}{n} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{|\max\{a_1, a_2, \ldots, a_N\}|}{n} +$$

$$+ \limsup_{n\to\infty} \frac{|\max\{a_{N+1}, a_{N+2}, \ldots, a_n\}|}{n} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{n\varepsilon}{n} = \varepsilon.$$

Отже, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \max\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ існує і дорівнює 0, що й треба було довести. $\square$

7.8. *Розв'язання.* Перепишемо рівняння:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{2019}}{\Big(n - (n-1)\Big)\Big(n^{x-1} + n^{x-2}(n-1) + \ldots + n(n-1)^{x-2} + (n-1)^{x-1}\Big)} =$$

$$= \frac{1}{2020},$$

тобто

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{2019}}{\Big(n^{x-1} + n^{x-2}(n-1) + \ldots + n(n-1)^{x-2} + (n-1)^{x-1}\Big)} = \frac{1}{2020}.$$

В чисельнику і знаменнику дробу, який стоїть під знаком границі — многочлени. Тому границя буде дорівнювати числу лише тоді, коли степені многочленів чисельника та знаменника однакові. Найстарший степінь знаменника дорівнює $x - 1$. Звідси отримаємо, що

$$x - 1 = 2019, \quad \text{тобто} \quad x = 2020.$$

Проста перевірка показує, що при такому x границя дійсно дорівнює $1/2020$. $\square$

7.9. *Розв'язання.* а) Розкладемо дріб $\frac{1}{k(k+1)(k+2)}$ на прості дроби:

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{\frac{1}{2}}{k} - \frac{1}{k+1} + \frac{\frac{1}{2}}{k+2}.$$

Тоді

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{2}{k+1} + \frac{1}{k+2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{1} - \frac{2}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{4} + \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{2}{5} + \frac{1}{6}\right) + \ldots + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{1}{n-2} - \frac{2}{n-1} + \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{2}{n} + \frac{1}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right], \quad n \geq 1.$$

Отже, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{4}$.

б) Розпишемо a_n:

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k-1}{k!} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{k!}\right) =$$

$$= \frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{n!} = \left(1 - \frac{1}{n!}\right) \underset{n\to\infty}{\to} 1.$$

□

7.10. *Доведення.* Оскільки

$$a_n = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right)\left(1 - \frac{1}{4^2}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) =$$

$$= \frac{1\cdot 3}{2^2}\cdot\frac{2\cdot 4}{3^2}\cdot\frac{3\cdot 5}{4^2}\cdot\ldots\cdot\frac{(n-2)n}{(n-1)^2}\cdot\frac{(n-1)(n+1)}{n^2} = \frac{1\cdot(n+1)}{2\cdot n},$$

то існує

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot(n+1)}{2\cdot n} = \frac{1}{2}.$$

□

7.11. *Вказівка.* Скористатися лемою про три послідовності.

а) Оскільки

$$\sqrt[n^2]{1! + 2! + \ldots + n!} = e^{\frac{1}{n^2}\ln(1!+2!+\ldots+n!)}, \quad n \geq 1,$$

і

$$0 = \ln 1 \leq \ln(1! + 2! + \ldots + n!) \leq \ln(n\cdot n!) =$$

$$= \ln 1 + \ln 2 + \ldots + \ln n + \ln n \leq$$

$$\leq (n+1)\ln n,$$

то
$$0 \le \frac{1}{n^2}\ln(1!+2!+\ldots+n!) \le \frac{(n+1)\ln n}{n^2} \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$
Звідси
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n^2]{1!+2!+\ldots+n!} = e^0 = 1.$$

б) Справедливі оцінки:
$$1 = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}} \le \frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{n+\sqrt{n-1+\sqrt{n-2+\ldots+\sqrt{1}}}} \le$$
$$\le \frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{n+\sqrt{n-1+\sqrt{(n-2)+(n-3)+\ldots+2+1}}} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{n+\sqrt{n-1+\sqrt{\frac{(n-2)(n-1)}{2}}}} \le$$
$$\le \frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{n+\sqrt{n-1+\sqrt{n^2}}} = \frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{n+\sqrt{2n-1}} = \sqrt{\frac{n+\sqrt{2n-1}}{n}} \underset{n\to\infty}{\to} 1.$$
Отже,
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{n+\sqrt{n-1+\sqrt{n-2+\ldots+\sqrt{1}}}} = 1.$$

в) З оцінок
$$1 = \frac{n^n}{n^n} \le \frac{1+2^2+3^3+\ldots+n^n}{n^n} \le \frac{n^1+n^2+n^3+\ldots+n^n}{n^n} =$$
$$= \frac{n(n^n-1)}{n^n(n-1)} = \frac{n^n-1}{n^n-n^{n-1}} \quad \underset{n\to\infty}{\to} 1,$$
та леми про три послідовності випливає, що
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2^2+3^3+\ldots+n^n}{n^n} = 1.$$

г) *Відповідь:* 2020.

д) *Відповідь:* $\max\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$. □

7.11. *Вказівка.* Помітити, що серед трьох послідовних непарних чисел одне ділиться без залишку на 3. Тому для $a_n \ge 9$, одне з трьох чисел: a_n+2, a_n+4, a_n+6 є складеним. Звідси випливає, що $a_n < a_{n+1} \le a_n+6$, звідки $1-\frac{6}{a_{n+1}} \le \frac{a_n}{a_{n+1}} < 1$. Далі скористатися лемою про три послідовності.

Відповідь: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1$. □

Розділ 8

8.8. *Вказівка.* а) З рекурентного співвідношення можна знайти формулу загального члена послідовності:

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{2}, & n - \text{парне}, \\ 1 - \frac{n}{2(n+1)}, & n - \text{непарне}, \end{cases}$$

та довести справедливість цієї формули за індукцією. Тоді, очевидно, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}$.

б) Аналогічно. Неважко зробити припущення, що $a_n = \frac{1}{n}$, $n \geq 1$. Це припущення доводиться методом математичної індукції. Отже, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. □

8.9. *Доведення.* Знайдемо загальний член послідовності:

$$a_2 = \frac{3}{4}, \quad a_3 = \frac{\frac{3}{4}+3}{4} = \frac{15}{16}, \quad a_4 = \frac{\frac{15}{16}+3}{4} = \frac{63}{64}, \ldots$$

Виникає припущення, що $a_n = \frac{4^{n-1}-1}{4^{n-1}}$, $n \geq 1$. Його неважко довести методом математичної індукції.

Тоді

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{4^{n-1}-1}{4^{n-1}} = 1.$$

□

8.10. *Доведення.* Для того, щоб знайти загальний член послідовності (a_n), віднімемо від обох частин рекурентного співвідношення величину $\frac{1}{2}a_n$:

$$a_{n+1} - \frac{1}{2}a_n = a_n - \frac{1}{2}a_{n-1}, \quad n \geq 2.$$

Звідси випливає, що $a_n - \frac{1}{2}a_{n-1} = const$, для всіх $n \geq 2$. Але за умовою $a_2 - \frac{1}{2}a_1 = 2$. Отже, $a_n - \frac{1}{2}a_{n-1} = 2$, $n \geq 2$, звідки

$$a_n = 2 + \frac{1}{2}a_{n-1}, \quad n \geq 2.$$

Тоді

$$a_2 = \frac{5}{2} = 4 - \frac{3}{2}, \quad a_3 = \frac{13}{4} = 4 - \frac{3}{4}, \quad , a_4 = \frac{29}{8} = 4 - \frac{3}{8}, \ldots$$

Виникає припущення, що

$$a_n = 4 - \frac{3}{2^{n-1}}, \quad n \geq 1,$$

яке неважко доводиться методом математичної індукції.

Таким чином,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(4 - \frac{3}{2^{n-1}}\right) = 4.$$

□

8.11. *Розв'язання.* Перепишемо задане рекурентне співвідношення наступним чином:

$$a_n - a_{n-2} = -\frac{n^2+n-1}{(n+1)!}, \quad n \geq 3,$$

звідки

$$a_n - a_{n-2} = \frac{1-n(n+1)}{(n+1)!} = \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{(n-1)!}, \quad n \geq 3,$$

тобто

$$a_n = a_{n-2} - \frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{(n+1)!}, \quad n \geq 3.$$

Випишемо декілька перших елементів послідовності:

$$a_1 = \frac{2}{3}, \quad a_2 = \frac{1}{3},$$

$$a_3 = \frac{2}{3} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} = \frac{1}{6} + \frac{1}{4!}, \quad a_4 = \frac{1}{3} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} = \frac{1}{6} + \frac{1}{5!},$$

$$a_5 = \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!}\right) + \frac{1}{6!} - \frac{1}{4!} = \frac{2}{3} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{6!} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6!},$$

$$a_6 = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!}\right) + \frac{1}{7!} - \frac{1}{5!} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{7!} = \frac{1}{6} + \frac{1}{7!}, \ldots$$

Звідси виникає припущення, що загальний член послідовності (a_n) описується формулою:

$$a_n = \frac{1}{6} + \frac{1}{(n+1)!}, \quad n \geq 1.$$

Застосовуючи метод математичної індукції неважко це довести.

Таким чином, існує границя

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{(n+1)!}\right) = \frac{1}{6}.$$

□

8.12. *Вказівка.* Помітити, що

$$a_n = (1 + 4 + 4^2 + \ldots + 4^{n-2})b - (4 + 4^2 + \ldots + 4^{n-2})a,$$

а, отже,

$$a_n = 4^n \frac{b-a}{12} + \frac{4a-b}{3}.$$

Останнє співвідношення неважко доводиться методом математичної індукції. Тоді

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{4^n} = \frac{b-a}{12}.$$

$\square$

8.13. *Розв'язання.*

а) Припустимо, що границя існує. Позначимо $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Тоді з рекурентного співвідношення випливає, що

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4(1-a_n)},$$

звідки $a = \frac{1}{4(1-a)}$, тобто $a = \frac{1}{2}$.

Тепер за теоремою Вейєрштраса покажемо, що границя дійсно існує. Розглянемо декілька перших елементів послідовності:

$$a_1 = 0, \quad a_2 = \frac{1}{4}, \quad a_3 = \frac{1}{3}, \quad a_4 = \frac{3}{8}, \quad a_5 = \frac{2}{5}, \quad \ldots$$

Тоді можна зробити припущення, що послідовність є монотонно зростаючою та обмеженою зверху числом $\frac{1}{2}$.

Дійсно, покажемо, що $a_n < \frac{1}{2}$, $n \geq 1$, методом математичної індукції:

1. При $n = 1$: $a_1 = 0 < \frac{1}{2}$;
2. Припустимо, що при $n = k$: $a_k < \frac{1}{2}$;
3. Доведемо справедливість нерівності при $n = k+1$: $a_{k+1} = \frac{1}{4(1-a_k)} < \frac{1}{4\left(1-\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{2}$, що й треба було довести.

Нарешті, покажемо, що послідовність (a_n) є монотонно зростаючою. Для цього розглянемо різницю

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{4(1-a_n)} - \frac{1}{4(1-a_{n-1})} = \frac{1}{4} \cdot \frac{a_n - a_{n-1}}{(1-a_n)(1-a_{n-1})}.$$

Оскільки $a_n < \frac{1}{2}$, $n \geq 1$, то знаменник у правій частині рівності є додатним. Отже, вирази $(a_{n+1} - a_n)$ та $(a_n - a_{n-1})$ мають однакові знаки, тобто або $a_{n+1} \geq a_n \geq a_{n-1}$ або $a_{n+1} \leq a_n \leq a_{n-1}$, для всіх $n \geq 1$. Враховуючи, що перші елементи послідовності зростають, звідси випливає, що послідовність (a_n) є монотонно зростаючою. Отже, за теоремою Вейєрштраса існує границя $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, і як було знайдено раніше, дорівнює $\frac{1}{2}$.

б) Спочатку зауважимо, що $a_n > 0$, для всіх $n \geq 1$.

Припустимо, що границя $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ існує, і позначимо $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Тоді беручи границю від обох частин рекурентного співвідношення, отримаємо рівняння

$$a = \frac{1}{3}(1 + a + a^3),$$

звідки $a^3 - 2a + 1 = 0$. Це рівняння має три корені: $a = 1$, $a = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$, $a = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. Очевидно, число $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ не може бути границею послідовності.

Доведемо, що границя існує, та з'ясуємо, яке з двох додатних коренів рівняння є границею. Для цього випишемо декілька перших членів послідовності:

$$a_1 = 0, \quad a_2 = \frac{1}{2}, \quad a_3 = \frac{1}{2}, \quad a_4 = \frac{13}{24}, \quad a_5 = \frac{5}{9}, \quad \ldots$$

Можна припустити, що послідовність є зростаючою, починаючи з $n = 3$. Дійсно, розглянемо два сусідні елементи послідовності:

$$a_{n+1} = \frac{1}{3}(1 + a_n + a_{n-1}^3), \quad a_n = \frac{1}{3}(1 + a_{n-1} + a_{n-2}^3), \ \ n \geq 3.$$

Віднімаючи один від одного, отримаємо рівність:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{3}(a_n - a_{n-1}) + (a_{n-1} - a_{n-2})(a_{n-1}^2 + a_{n-1}a_{n-2} + a_{n-2}^2), \quad n \geq 3.$$

Для перших елементів послідовності виконується співвідношення $a_3 < a_4 < a_5$. Якщо припустити, що $a_n < a_{n+1}$ для перших k елементів, то використовуючи останнє співвідношення та метод математичної індукції, робимо висновок, що $a_n < a_{n+1}$ для всіх $n \geq 3$.

Нарешті, залишається показати, що послідовність є обмеженою зверху. Розглянемо спочатку менший з двох додатних коренів рівняння: $a = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. Зрозуміло, що

$$a_1 < \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \quad a_2 < \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \quad a_3 < \frac{-1+\sqrt{5}}{2}.$$

Виникає припущення, що $a_n < \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, для всіх $n \geq 1$. Перевіримо його методом математичної індукції:

1. При $n = 1$: $a_1 < \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$;

2. Припустимо, що для всіх $n \leq k$: $a_k < \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$;

3. Доведемо справедливість нерівності при $n = k + 1$:

$$a_{k+1} = \frac{1}{3}(1+a_k+a_{k-1}^3) < \frac{1}{3}\left(1 + \frac{-1+\sqrt{5}}{2} + \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^3\right) = \frac{-1+\sqrt{5}}{2},$$

що й треба було довести.

Отже, за теоремою Вейєрштраса послідовність має границю, і

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}.$$

в) З рекурентного рівняння випливає, що

$$a_n = \frac{1}{2}\left(a_{n-1} + \frac{a}{a_{n-1}}\right) > 0.$$

Тоді рекурентне рівняння можна переписати так:

$$2a_n a_{n-1} = a_{n-1}^2 + a,$$

або додавши і віднявши a_n^2:

$$0 \le (a_{n-1} - a_n)^2 = a_n^2 - a.$$

Отже,

$$a_n \ge \sqrt{a}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Крім того, з цієї оцінки та рекурентного рівняння випливає, що

$$a_n - a_{n-1} = \frac{a - a_{n-1}^2}{2a_{n-1}} \le 0,$$

звідки $a_n \le a_{n-1}$, тобто послідовність монотонно не зростає і обмежена знизу. Таким чином, за теоремою Вейєрштраса існує $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$. Взявши границю від обох частин рівняння, матимемо:

$$A = \frac{1}{2}\left(A + \frac{a}{A}\right), \quad \text{звідки} \quad A = \sqrt{a}.$$

Остаточно,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{a}.$$

□

8.14. *Розв'язання.* Доведемо, що, починаючи з деякого номеру, послідовність є спадною. Для цього достатньо показати, що існує $n \in \mathbb{N}$, для якого $a_n < \min\{a_{n-1}, a_{n-2}\}$. Дійсно, з цього випливатиме, що

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n} + \sqrt{a_{n-1}} < \sqrt{a_{n-1}} + \sqrt{a_{n-2}} = a_n < a_{n-1},$$

а отже, $a_{n+1} < \min\{a_n, a_{n-1}\}$. Продовжуючи ці міркування далі, отримаємо $a_{n+k} < \min\{a_{n+k-1}, a_{n+k-2}\}$ для будь-якого $k \geq 0$. З цього випливає, що $a_{n-1} > a_n > a_{n+1} > \ldots$, і послідовність спадає.

Безпосереднім обчисленням легко впевнитися, що $a_5 \approx 14.2 < \min\{49.4, 52.0\} \approx \min\{a_3, a_4\}$. Отже, послідовність спадає, починаючи з $n = 4$. Крім того, з $a_1 = 20 > 4$ та $a_2 = 2020 > 4$ випливає $a_3 > \sqrt{4}+\sqrt{4} = 4$ і, аналогічно, $a_n > 4$ для будь-якого $n \in \mathbb{N}$. Таким чином, послідовність є спадною та обмеженою знизу числом 4. Тому існує $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \geq 4$.

Переходячи в умові задачі до границі при $n \to \infty$, отримуємо $a = 2\sqrt{a}$, звідки $a = 4$.

Відповідь: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 4$. □

Розділ 9

9.4. *Вказівка.* Двічі застосувати теорему Штольця, поклавши на першому кроці

$$x_n = n^2, \quad y_n = 2^n, \;\; n \geq 1,$$

а на другому кроці:

$$x_n = 2n - 1, \quad y_n = 2^{n-1}, \;\; n \geq 1,$$

Відповідь: $\frac{a}{2}$. □

9.5. *Відповіді:* а) $\frac{1}{3}$; б) 0; в) $\frac{1}{2}$; г) $\frac{a}{a-1}$; д) $\frac{2}{5}$.

9.6. *Вказівка.* Подати b_n у наступному вигляді:

$$b_n = \alpha^{n-1} \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{\alpha^{k-1}} = \frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{\alpha^{k-1}}}{1/\alpha^{n-1}}, \quad n \geq 1,$$

та застосувати теорему Штольця.

Відповідь: $\frac{a}{1-\alpha}$. □

9.7. *Вказівка.* Застосувати теорему Штольця, поклавши

$$x_n = 1 \cdot a_1 + 2 \cdot a_2 + \ldots + n \cdot a_n, \quad y_n = n^2, \;\; n \geq 1.$$

Відповідь: $\frac{a}{2}$. □

9.8. *Розв'язання.* Покладемо $x_n = a_n$, $y_n = n$. Тоді за умовою

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{n - (n-1)} = \lim_{n\to\infty} (a_{n+1} - a_n) = a.$$

Отже, для введених послідовностей (x_n), (y_n) виконуються умови теореми Штольця, а значить існує

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = a.$$

$\square$

9.9. *Вказівка.* Запишемо A_n наступним чином:

$$A_n = \frac{a_1}{an}(ab_n) + \frac{a_2}{an}(ab_{n-1}) + \ldots + \frac{a_n}{an}(ab_1), \quad n \geq 1.$$

Покладемо

$$c_{nk} = \frac{a_{n-k+1}}{an}, \quad 1 \leq k \leq n, \quad n \geq 1,$$

та застосуємо до послідовності (ab_n) теорему Тьоплиця. Отримаємо, що $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = ab$.

Відповідь: ab. $\square$

Розділ 10

10.8. *Вказівка.* Розв'язання аналогічне до задачі 10.3.

Відповідь: $A^{-1} = -A - 2E$. $\square$

10.9. *Розв'язання.* Позначимо

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \ldots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \ldots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \ldots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

де A_{ij} — алгебраїчні доповнення до елементів a_{ij}. Розглянемо

$$\det A \cdot \det B = \det A \cdot \det B^T = \det(A \cdot B^T) = (\det A)^n.$$

Остання рівність справедлива, оскільки

$$A \cdot B^T = \begin{pmatrix} \det A & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \det A & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \det A \end{pmatrix}.$$

Це випливає з теореми Лапласа та теореми анулювання для визначників. Якщо матриця невироджена, то $\det B = (\det A)^{n-1}$ та $\alpha = n - 1$. Якщо матриця A вироджена, то α може бути довільним дійсним числом крім 0. $\square$

10.10. *Розв'язання.* Розглянемо співвідношення:

$$E = O + E = A^{2019} + E = A^{2019} + E^{2019} =$$
$$= (A + E)(A^{2018} - A^{2017} + A^{2016} - \ldots + A^2 - A + E).$$

Оскільки $\det E = 1 \neq 0$, то в правій частині останньої рівності кожна з матриць є також не виродженою, тобто $\det(A+E) \neq 0$. $\square$

10.11. *Розв'язання.*

$$E + AB = E + A - A^2,$$

$$(E + A - A^2)(E - A + A^2) = E - A^2 + 2A^3 - A^4 = E.$$

Відповідь: $E - A + A^2$. $\square$

10.12. *Вказівка.* Розв'язання аналогічне до задачі 10.4. *Відповідь:* O — нульова матриця. $\square$

10.13. *Розв'язання.* Нехай

$$P_k(x) = a_{k,0} + a_{k,1}x + a_{k,2}x^2 + \ldots + a_{k,n-2}x^{n-2}, \quad 1 \le k \le n.$$

Кожен такий многочлен можна представити як добуток двох матриць, а саме

$$P_k(x) = \begin{pmatrix} a_{k,0} & a_{k,1} & \ldots & a_{k,n-2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ \vdots \\ x^{n-2} \end{pmatrix}.$$

Тоді

$$P = \begin{pmatrix} P_1(\lambda_1) & \ldots & P_1(\lambda_n) \\ \vdots & & \vdots \\ P_n(\lambda_1) & \ldots & P_n(\lambda_n) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{1,0} & a_{1,1} & \ldots & a_{1,n-2} & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,0} & a_{n,1} & \ldots & a_{n,n-2} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \ldots & \lambda_n \\ \vdots & & & \vdots \\ \lambda_1^{n-2} & \lambda_2^{n-2} & \ldots & \lambda_n^{n-2} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} = A \cdot \Lambda.$$

Звідси $\det P = \det(A \cdot \Lambda) = \det A \cdot \det \Lambda = 0 \cdot 0 = 0$. $\square$

10.14. *Розв'язання.* Спочатку до 1-го рядка додамо усі інші. Тоді

$$x = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 11 \\ 0 & 2 & \ldots & 12 & 0 \\ & \vdots & & \vdots & \\ 0 & 19 & \ldots & 9 & 0 \\ 20 & 0 & \ldots & 0 & 10 \end{vmatrix} = 21 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ 0 & 2 & \ldots & 12 & 0 \\ & \vdots & & \vdots & \\ 0 & 19 & \ldots & 9 & 0 \\ 20 & 0 & \ldots & 0 & 10 \end{vmatrix}.$$

Далі до 2-го рядка додамо рядки з 3-го по 9-й, до 3-го — з 4-го по 8-й, до 4-го — з 5-го по 7-й, до 5-го рядка 6-й. Отримаємо

$$x = 21^5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 1 & 0 \\ & \vdots & & \vdots & \\ 0 & 19 & \dots & 9 & 0 \\ 20 & 0 & \dots & 0 & 10 \end{vmatrix}.$$

Далі від 1-го рядка віднімемо 2-й, від 2-го — 3-й, від 3-го — 4-й, від 4-го — 5-й. Отримаємо

$$x = 21^5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 1 & 0 \\ & \vdots & & \vdots & \\ 0 & 19 & \dots & 9 & 0 \\ 20 & 0 & \dots & 0 & 10 \end{vmatrix}.$$

Остаточно, від 10-го рядка віднімаємо 20 1-х, від 9-го — 19 2-х, від 8-го — 18 3-іх, від 7-го — 17 4-х, від 6-го — 16 5-х. Маємо

$$x = 21^5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 1 & 0 \\ & \vdots & & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots & -10 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -10 \end{vmatrix} = 21^5 \cdot (-10)^5 = -210^5.$$

□

10.15. *Розв'язання.* За теоремою Вієта: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$. Тепер додамо до першого рядка визначника всі інші:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_4 & x_1 & x_2 & x_3 \\ x_3 & x_4 & x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 & x_4 & x_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_4 & x_1 & x_2 & x_3 \\ x_3 & x_4 & x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 & x_4 & x_1 \end{vmatrix} = 0.$$

□

10.16. *Доведення.* Скористатися властивостями визначників: 1) визначник дорівнює сумі елементів деякого рядка або стовпця, помножених на відповідні їм алгебраїчні доповнення; 2) сума елементів будь-якого рядка або стовпця визначника, помножених на алгебраїчні доповнення до елементів іншого рядка (стовпця) дорівнює нулю. Запишемо ці твердження для стовпців матриці A:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij} = \det A, \quad j = \overline{1,n},$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ik} = 0, \quad k \neq j, \quad j = \overline{1,n}.$$

Зафіксуємо j і виберемо з цих рівностей ті, в яких зустрічаються алгебраїчні доповнення A_{ij} до елементів j-го стовпця матриці A:

$$\begin{cases} a_{11}A_{1j} + a_{21}A_{2j} + \ldots + a_{n1}A_{nj} = 0, \\ a_{12}A_{1j} + a_{22}A_{2j} + \ldots + a_{n2}A_{nj} = 0, \\ \ldots \\ a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj} = \det A, \\ \ldots \\ a_{1n}A_{1j} + a_{2n}A_{2j} + \ldots + a_{nn}A_{nj} = 0. \end{cases}$$

Додамо всі рівності:

$$A_{1j}(a_{11} + a_{12} + \ldots + a_{1n}) + A_{2j}(a_{21} + a_{22} + \ldots + a_{2n}) + \ldots +$$
$$+A_{nj}(a_{n1} + a_{n2} + \ldots + a_{nn}) = \det A,$$

або

$$\lambda(A_{1j} + A_{2j} + \ldots + A_{nj}) = \det A.$$

Звідси

$$\frac{1}{\det A}\Big(A_{1j} + A_{2j} + \ldots + A_{nj}\Big) = \frac{1}{\lambda}.$$

Ліва частина останньої рівності є якраз сумою елементів, що стоять у j-му рядку матриці $A^{-1} = B = (b_{jk})_{j,k=1}^{n}$, тобто ми отримали, що

$$\sum_{k=1}^{n} b_{jk} = \frac{1}{\lambda}.$$

Оскільки це справедливо для будь-якого $j = \overline{1,n}$, твердження повністю доведено. □

10.17. *Вказівка.* Ключовою ідеєю розв'язання є наступне твердження: якщо у матриці $A_{m\times n}$ кількість рядків менша кількості стовпців, тобто $m < n$, то $\det A^T A = 0$. Дійсно, $rang A^T A \leq rang A \leq m < n$, звідки матриця $A^T A$ має неповний ранг. Тому найкраще грати під другим номером:

яке б натуральне число m на назвав перший студент, у другого завжди є можливість назвати число n більше за m, що в свою чергу забезпечує $\det A^T A = 0$. $\square$

10.18. *Розв'язання.* Неважко перевірити, що $A \cdot A^T = A^T \cdot A = E$. Отже, домножуючи обидві частини рівності на $(A^T)^n$ зліва і на A^n справа, одержимо, що $X = E$.

Відповідь: $X = E$. $\square$

10.19. *Вказівка.* Переконатись, що $(A-B)^3 = A-B$. Тому $\det(A-B) = \pm 1; 0$. $\square$

10.20. *Розв'язання.* Уведемо в розгляд слід матриці — суму її діагональних елементів: $trA = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{kk}$. Безпосередньо перевіряються дві властивості сліду:

i) $tr(A \pm B) = trA \pm trB$,

ii) $trAB = trBA$.

Тоді справедливі рівності:

$$0 = trAB - trAB = trAB - trBA = tr(AB - BA) = trE = n,$$

де n — порядок матриць A, B, E. Звідси випливає, що таких матриць не існує. $\square$

10.21. *Розв'язання.* Помітимо, що якщо A — цілочисельна квадратна матриця, то A^{-1} існує й є цілочисельною тоді і тільки тоді, коли $\det A \in \{1, -1\}$. Дійсно, нехай $\det A \in \{1, -1\}$. Позначимо через A^* матрицю, приєднану до A. Очевидно, A^*, що складається з алгебраїчних доповнень для відповідних елементів A, є цілочисельною. Тоді матриця $A^{-1} = \frac{A^*}{\det A}$ також є цілочисельною. Навпаки, якщо існує цілочисельна матриця A^{-1}, то $\det A \cdot \det A^{-1} = 1$, і, оскільки $\det A$ і $\det A^{-1}$ — цілі числа, то $\det A \in \{1, -1\}$.

Знайдемо визначник матриці A, що задана в умові. Для цього віднімемо перший рядок матриці A від кожного з наступних. Визначник отриманої матриці дорівнює $(m-k)^{n-1}$ і збігається з $\det A$. Очевидно, що $(m-k)^{n-1} \in \{1, -1\}$ тоді і тільки тоді, коли $|m - k| = 1$.

Відповідь: всі пари (k, m), для яких $|m - k| = 1$. $\square$

Розділ 11

11.10. *Доведення.* Розглянемо одну з трьох рівностей, наприклад, $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}$, і помножимо її скалярно на вектор $\overrightarrow{c}$. Тоді отримаємо, що мішаний добуток $(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \cdot \overrightarrow{c} = 0$, звідки випливає, що вектори $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ —

компланарні. Тому існують числа α, β такі, що $\overrightarrow{c} = \alpha\overrightarrow{a} + \beta\overrightarrow{b}$. Підставимо замість $\overrightarrow{c}$ його розклад за базисом векторів $\overrightarrow{a}$ і $\overrightarrow{b}$ у задані рівності:

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \overrightarrow{b} \times (\alpha\overrightarrow{a} + \beta\overrightarrow{b}) = (\alpha\overrightarrow{a} + \beta\overrightarrow{b}) \times \overrightarrow{a},$$

або

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = -\alpha(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) = -\beta(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}),$$

звідки $\alpha = -1$, $\beta = -1$. Таким чином, $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c} = \overrightarrow{0}$, що й треба було довести. □

11.11. *Розв'язання.* Нехай вектор $\overrightarrow{x}$ має координати $\overrightarrow{x} = (\alpha, \beta, \gamma)$. З умови, що $\overrightarrow{x} \perp \overrightarrow{a}$ випливає, що

$$\beta + \gamma = 0.$$

Запишемо скалярний добуток векторів $\overrightarrow{x}$ і $\overrightarrow{b}$. З одного боку $\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{b} = \alpha + \beta$, а з іншого — $\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{b} = |\overrightarrow{x}| \cdot |\overrightarrow{b}| \cdot \cos\frac{\pi}{4} = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$, звідки отримаємо наступну рівність

$$\alpha + \beta = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}.$$

Виражаючи з двох отриманих рівностей β і γ через α, отримаємо, що вектор $\overrightarrow{x} = (\alpha, 2\alpha, -2\alpha)$. Нарешті, оскільки трійка векторів $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{x}$ — права, то $(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \cdot \overrightarrow{x} > 0$. Тому

$$0 < \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ \alpha & 2\alpha & -2\alpha \end{vmatrix} = 3\alpha,$$

звідки $\alpha > 0$. Таким чином, $\overrightarrow{x} = (\alpha, 2\alpha, -2\alpha)$, де $\alpha > 0$. □

11.12. *Розв'язання.* Оскільки

$$(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{m}) \cdot \overrightarrow{b} = 3,$$

то з властивості мішаного добутку випливає, що

$$(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \cdot \overrightarrow{m} = -3.$$

З іншого боку,

$$(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \cdot \overrightarrow{m} = |\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}| \cdot |\overrightarrow{m}| \cdot \cos\varphi,$$

де φ — кут між векторами $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ та $\overrightarrow{m}$. Отже, враховуючи, що $|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2} = 3$, $|\overrightarrow{m}| = 1$, отримаємо, що $\cos\varphi = -1$, тобто $\varphi = \pi$.

Звідси випливає, що $\overrightarrow{m} \parallel \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$, тобто має координати $\overrightarrow{m} = (2\alpha, -\alpha, 2\alpha)$. Скориставшись тим, що $|\overrightarrow{m}| = 1$ та тим, що $\overrightarrow{m}$ протилежно напрямлений до $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$, отримаємо, що $\overrightarrow{m} = \Big(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\Big)$. □

11.13. *Доведення.* Помножимо задану рівність на вектор $\overrightarrow{OC}$ скалярно справа. Отримаємо

$$(\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}) \cdot \overrightarrow{OC} + (\overrightarrow{OB} \times \overrightarrow{OC}) \cdot \overrightarrow{OC} + (\overrightarrow{OC} \times \overrightarrow{OA}) \cdot \overrightarrow{OC} = 0,$$

звідки випливає, що мішаний добуток $(\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}) \cdot \overrightarrow{OC} = 0$, а значить вектори $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ та $\overrightarrow{OC}$ — компланарні. Доведемо тепер, що точки A, B, C лежать на одній прямій. Для цього помножимо задану рівність на вектор $\overrightarrow{OC}$ векторно:

$$\overrightarrow{OC} \times (\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}) + \overrightarrow{OC} \times (\overrightarrow{OB} \times \overrightarrow{OC}) + \overrightarrow{OC} \times (\overrightarrow{OC} \times \overrightarrow{OA}) = \overrightarrow{0}.$$

Скориставшись формулою для подвійного векторного добутку, отримаємо

$$\overrightarrow{OA}(\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OB}) - \overrightarrow{OB}(\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OA}) + \overrightarrow{OB}(\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OC}) -$$
$$-\overrightarrow{OC}(\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC}) + \overrightarrow{OC}(\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC}) - \overrightarrow{OA}(\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OC}) = \overrightarrow{0},$$

звідки

$$(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC})(\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OB}) + (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB})(\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC}) + (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA})|\overrightarrow{OC}|^2 = \overrightarrow{0}.$$

Але $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AB}$. Тому

$$\overrightarrow{CA}(\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OB}) + \overrightarrow{BC}(\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC}) + \overrightarrow{AB}|\overrightarrow{OC}|^2 = \overrightarrow{0}.$$

Крім того, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$, тобто

$$-(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC})(\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OB}) + \overrightarrow{BC}(\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC}) + \overrightarrow{AB}|\overrightarrow{OC}|^2 = \overrightarrow{0}.$$

З останньої рівності отримаємо:

$$\overrightarrow{AB}\Big(|\overrightarrow{OC}|^2 - (\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OB})\Big) = \overrightarrow{BC}\Big((\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OB}) - (\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC})\Big),$$

звідки випливає, що $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{BC}$, а отже точки A, B, C лежать на одній прямій. □

11.14. *Доведення.* Скористаємося властивістю мішаного добутку, яка говорить про те, що мішаний добуток не змінюється при циклічній перестановці векторів, та формулою для подвійного векторного добутку:

$$(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \cdot (\overrightarrow{c} \times \overrightarrow{d}) = ((\overrightarrow{c} \times \overrightarrow{d}) \times \overrightarrow{a}) \cdot \overrightarrow{b} = \Big(\overrightarrow{d}(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{c}) - \overrightarrow{c}(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{d})\Big) \cdot \overrightarrow{b} =$$

$$= (\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{d})(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{c}) - (\overrightarrow{c} \cdot \overrightarrow{b})(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{d}) = \begin{vmatrix} (\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{c}) & (\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{d}) \\ (\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{c}) & (\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{d}) \end{vmatrix},$$

що й треба було довести. □

11.15. *Доведення.* З геометричної інтерпретації мішаного добутку випливає, що мішаний добуток — об'єм орієнтованого паралелепіпеда, побудованого на трьох векторах. Розглянемо з цієї точки зору заданий визначник

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0,5 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & -\sqrt{3} \\ -3\sqrt{3} & 7 & 2 \end{vmatrix}.$$

Він являє собою об'єм паралелепіпеда (зі знаком + або -), побудованого на векторах $\overrightarrow{a} = (\cos\alpha, \sin\alpha, 0,5)$, $\overrightarrow{b} = (\sin\alpha, \cos\alpha, -\sqrt{3})$ та $\overrightarrow{c} = (-3\sqrt{3}, 7, 2)$. Ці вектори мають відповідно довжини: $|\overrightarrow{a}| = \sqrt{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha + 0,25} = \frac{\sqrt{5}}{2}$, $|\overrightarrow{b}| = \sqrt{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha + 3} = 2$, $|\overrightarrow{c}| = \sqrt{27 + 49 + 4} = \sqrt{80}$. Зрозуміло, що максимальний об'єм при заданих довжинах сторін має прямий паралелепіпед, тобто такий, у якого ребра попарно ортогональні, і об'єм такого паралелепіпеда дорівнює добутку довжин ребер. Отже, в нашому випадку,

$$V_{max} = |\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{b}| \cdot |\overrightarrow{c}| = \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{80} = 20,$$

що й треба було довести.

Рівність буде досягатися у випадку, коли $\overrightarrow{a} \perp \overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{a} \perp \overrightarrow{c}$, $\overrightarrow{b} \perp \overrightarrow{c}$, тобто

$$\begin{cases} \cos\alpha\sin\alpha + \sin\alpha\cos\alpha - 0,5\sqrt{3} = 0, \\ -3\sqrt{3}\cos\alpha + 7\sin\alpha + 1 = 0, \\ -3\sqrt{3}\sin\alpha + 7\cos\alpha - 2\sqrt{3} = 0. \end{cases}$$

З першого рівняння системи маємо $2\cos\alpha\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, звідки $\sin 2\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, тобто $2\alpha = (-1)^n\frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, звідки $\alpha = (-1)^n\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$. Таким чином, корені системи слід шукати серед точок

$$\alpha = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, \quad \alpha = \frac{\pi}{3} + 2\pi n, \quad \alpha = \frac{7\pi}{6} + 2\pi n, \quad \alpha = \frac{4\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Безпосередньою перевіркою знаходимо, що розв'язком системи є лише $\alpha = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Отже, рівність досягається при $\alpha = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. □

11.16. *Доведення.* Подамо вектори $\overrightarrow{A_1B_1}$, $\overrightarrow{A_2B_2}$, $\ldots$, $\overrightarrow{A_nB_n}$ у вигляді суми 2-х векторів:

$$\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2B_1};$$

$$\overrightarrow{A_2B_2} = \overrightarrow{A_2A_3} + \overrightarrow{A_3B_2};$$

$$\dots$$

$$\overrightarrow{A_nB_n} = \overrightarrow{A_nA_1} + \overrightarrow{A_1B_n}.$$

Тоді

$$\overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{A_2B_2} + \ldots + \overrightarrow{A_nB_n} = (\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} + \ldots \overrightarrow{A_nA_1}) + (\overrightarrow{A_1B_n} + \overrightarrow{A_2B_1} + \ldots \overrightarrow{A_nB_{n-1}}).$$

Якщо кожний з векторів $\overrightarrow{A_1B_n}$, $\overrightarrow{A_2B_1}$, ..., $\overrightarrow{A_nB_{n-1}}$ повернути на 60° навколо його початку, то вони будуть збігатися відповідно з векторами $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_2A_3}$, ..., $\overrightarrow{A_nA_1}$, сума яких дорівнює $\overrightarrow{0}$. При цьому, вектор, який дорівнює сумі векторів $\overrightarrow{A_1B_n}$, $\overrightarrow{A_2B_1}$, ..., $\overrightarrow{A_nB_{n-1}}$ також повернеться на 60°, а його модуль не зміниться. Таким чином,

$$\overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{A_2B_2} + \ldots + \overrightarrow{A_nB_n} = \overrightarrow{0}.$$

□

11.17. *Розв'язання.* Позначимо точку O — центр кола. Для кожного фіксованого $k = \overline{1,n}$ виконується $\overrightarrow{BA_k} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OA_k}$. Тобто

$$\sum_{k=1}^{n} |BA_k|^2 = \sum_{k=1}^{n} (\overrightarrow{BA_k}, \overrightarrow{BA_k}) = \sum_{k=1}^{n} (\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OA_k}, \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OA_k}) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \Big((\overrightarrow{BO}, \overrightarrow{BO}) + 2(\overrightarrow{BO}, \overrightarrow{OA_k}) + (\overrightarrow{OA_k}, \overrightarrow{OA_k}) \Big) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \Big(|BO|^2 + 2(\overrightarrow{BO}, \overrightarrow{OA_k}) + |OA_k|^2 \Big) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \Big(1 + 2(\overrightarrow{BO}, \overrightarrow{OA_k}) + 1 \Big) = 2n + 2\sum_{k=1}^{n} (\overrightarrow{BO}, \overrightarrow{OA_k}) =$$

$$= 2n + 2\left(\overrightarrow{BO}, \sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{OA_k} \right)$$

Сума в останньому скалярному добутку дорівнює 0, оскільки A_k — вершини правильного n-кутника, а O — його центр. Отже,

$$\sum_{k=1}^{n} |BA_k|^2 = 2n.$$

Відповідь: $2n$. □

11.18. *Розв'язання.* Скористаємося результатом задачі 11.9. Нехай $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{OC}$. Знайдемо визначник матриці Грама векторів $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$. Для цього обчислимо наступні скалярні добутки:

$$(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{a}) = 6^2 = 36; \quad (\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{b}) = 6^2 = 36; \quad (\overrightarrow{c} \cdot \overrightarrow{c}) = 3^2 = 9;$$

$$(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}) = \frac{(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{a}) + (\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{b}) - ((\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}) \cdot (\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}))}{2} = \frac{6^2 + 6^2 - 4^2}{2} = 28;$$

$$(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{c}) = \frac{(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{a}) + (\overrightarrow{c} \cdot \overrightarrow{c}) - ((\overrightarrow{a} - \overrightarrow{c}) \cdot (\overrightarrow{a} - \overrightarrow{c}))}{2} = \frac{6^2 + 3^2 - 7^2}{2} = -2;$$

$$(\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{c}) = \frac{(\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{b}) + (\overrightarrow{c} \cdot \overrightarrow{c}) - ((\overrightarrow{b} - \overrightarrow{c}) \cdot (\overrightarrow{b} - \overrightarrow{c}))}{2} = \frac{6^2 + 3^2 - 5^2}{2} = 10.$$

Тому,

$$|\Gamma| = \begin{vmatrix} (\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{a}) & (\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}) & (\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{c}) \\ (\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}) & (\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{b}) & (\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{c}) \\ (\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{c}) & (\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{c}) & (\overrightarrow{c} \cdot \overrightarrow{c}) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 36 & 28 & -2 \\ 28 & 36 & 10 \\ -2 & 10 & 9 \end{vmatrix} = -256.$$

Такого бути не може, бо в тривимірному просторі визначник матриці Грама дорівнює квадрату мішаного добутку, тобто невід'ємний. □

Розділ 12

12.8. *Розв'язання.* Маршрут подорожі повинен перетинати екватор щонайменше у двох точках. З умови симетрії випливає, що це будуть дві діаметрально протилежні точки. Частина маршруту, що проходитиме по нижній половині планети, матиме таку ж довжину, що і та, що проходитиме по її верхній частині. Отже достатньо знайти найкоротший маршрут, що поєднує дві протилежні точки на екваторі.

Зробимо розгортку верхньої частини поверхні планети (яка представляє собою усічений конус), розрізавши її вздовж відрізка, що сполучає обрану точку A на екваторі і північний полюс (вершину конуса) O. Іншу точку на екваторі (діаметрально протилежну до A) позначимо B. Точка B буде серединою дуги отриманого сектора. Найкоротший шлях між двома точками - це пряма, тобто відрізок AB.

Довжина дуги AB дорівнює половині довжини екватора планети, тобто $\frac{1}{2}2\pi\frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi a\sqrt{2}}{2}$. Радіус сектора - це сторона квадрата, тобто він дорівнює a. Тому $\angle AOB = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}$, звідки маємо, що

$$|AB| = 2a\sin\left(\frac{1}{2}\angle AOB\right) = 2a\sin\frac{\pi\sqrt{2}}{4}.$$

Відповідь: Найкоротша кругосвітня подорож має довжину $4a\sin\frac{\pi\sqrt{2}}{4}$. □

12.9. *Розв'язання.* Нехай шукана точка має координати $(x_0; y_0)$. Враховуючи симетрію графіка, будемо вважати, що $y_0 < 0$, а також без обмеження загальності покладемо $p > 0$.

Перейдемо до полярної системи координат з центром в точці $(x_0; y_0)$. Тобто $x = x_0 + r\cos\varphi; y = y_0 + r\sin\varphi$.

Рівняння нашої параболи в цій системі координат буде мати вигляд

$$r = \frac{2p\cos\varphi - 2y_0\sin\varphi}{\sin^2\varphi}.$$

Площу сегмента параболи будемо шукати за формулою

$$S = \frac{1}{2}\int\limits_{\varphi_0}^{\varphi_0+\frac{\pi}{2}} r^2(\varphi)d\varphi,$$

де φ_0 — кут нахилу нормалі до параболи в точці $M_0(x_0; y_0)$. Оскільки вектор нормалі дорівнює $(p, -y_0)$, то $tg\varphi_0 = -\frac{y_0}{p}$.

Обчислимо інтеграл:

$$\int\limits_{\varphi_0}^{\varphi_0+\frac{\pi}{2}} r^2(\varphi)d\varphi = \int\limits_{\varphi_0}^{\varphi_0+\frac{\pi}{2}} \frac{4p^2\cos^2\varphi - 8py_0\sin\varphi\cos\varphi + 4y_0^2\sin^2\varphi}{\sin^4\varphi}d\varphi =$$

$$= -\frac{4}{3}p^2\left(\operatorname{ctg}^3\varphi\right)\Big|_{\varphi_0}^{\varphi_0+\frac{\pi}{2}} + 4py_0\frac{1}{\sin^2\varphi}\Big|_{\varphi_0}^{\varphi_0+\frac{\pi}{2}} - 4y_0^2\left(\operatorname{ctg}\varphi\right)\Big|_{\varphi_0}^{\varphi_0+\frac{\pi}{2}} =$$

$$= -\frac{4}{3}p^2\left(-\operatorname{tg}^3\varphi_0 - \operatorname{ctg}^3\varphi_0\right) +$$

$$= +4py_0\left(\frac{1}{\cos^2\varphi_0} - \frac{1}{\sin^2\varphi_0}\right) - 4y_0^2\left(-\operatorname{tg}\varphi_0 - \operatorname{ctg}\varphi_0\right) = -\frac{4}{3}\frac{\left(y_0^2+p^2\right)^3}{py_0^3}.$$

Знайшовши похідну цієї функції по y_0 і прирівнявши її до 0, отримаємо шукані точки максимуму.

Відповідь: $\left(\frac{p}{2}, \pm p\right)$. □

12.10. *Розв'язання.* Розглянемо дугу параболи $y = ax^2$ всередині кола $x^2 + (y-1)^2 = 1$, за умови, що $a > \frac{1}{2}$. Парабола і коло перетинаються в трьох точках: $(0;0)$ та $\left(\pm a^{-1}\sqrt{2a-1}; a^{-1}(2a-1)\right)$.

Довжина дуги параболи між точками $(0;0)$ та $\left(a^{-1}\sqrt{2a-1}; a^{-1}(2a-1)\right)$ може бути обчислена за формулою:

$$L = \int\limits_0^{a^{-1}\sqrt{2a-1}} \sqrt{1+(2ax)^2}dx = \frac{1}{2a}\int\limits_0^{2\sqrt{2a-1}} \sqrt{1+t^2}dt =$$

$$= \frac{1}{2a}\int\limits_0^{2\sqrt{2a-1}} (\sqrt{1+t^2} - t + t)dt =$$

$$= \frac{1}{2a}\int\limits_0^{2\sqrt{2a-1}} (\sqrt{1+t^2} - t)dt + \frac{1}{2a}\frac{(2\sqrt{2a-1})^2}{2} =$$

$$= \frac{1}{2a}\int\limits_0^{2\sqrt{2a-1}} (\sqrt{1+t^2} - t)dt + \frac{2a-1}{a} =$$

$$= \frac{1}{2a}\int\limits_0^{2\sqrt{2a-1}} (\sqrt{1+t^2} - t)dt + 2 - \frac{1}{a} = \frac{1}{2a}\left(\int\limits_0^{2\sqrt{2a-1}} (\sqrt{1+t^2} - t)dt - 2\right) + 2.$$

Покажемо, що вираз в дужках додатний. Тоді довжина дуги буде більша 2, а довжина всієї параболи, що міститься всередині кола, більша 4.

Для $t = 2ax \geq 0$ виконується

$$\sqrt{1+t^2} - t = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}+t} > \frac{1}{2\sqrt{1+t^2}} \geq \frac{1}{2(1+t)}.$$

Звідки отримаємо

$$\int\limits_0^{2\sqrt{2a-1}} (\sqrt{1+t^2} - t)dt \geq \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\sqrt{2a-1}} \frac{1}{t+1}dt = \frac{\ln(1+2\sqrt{2a-1})}{2} > 2$$

при досить великих значеннях a.

Відповідь: Можна. □

12.11. *Розв'язання.* Розглянемо три випадки.

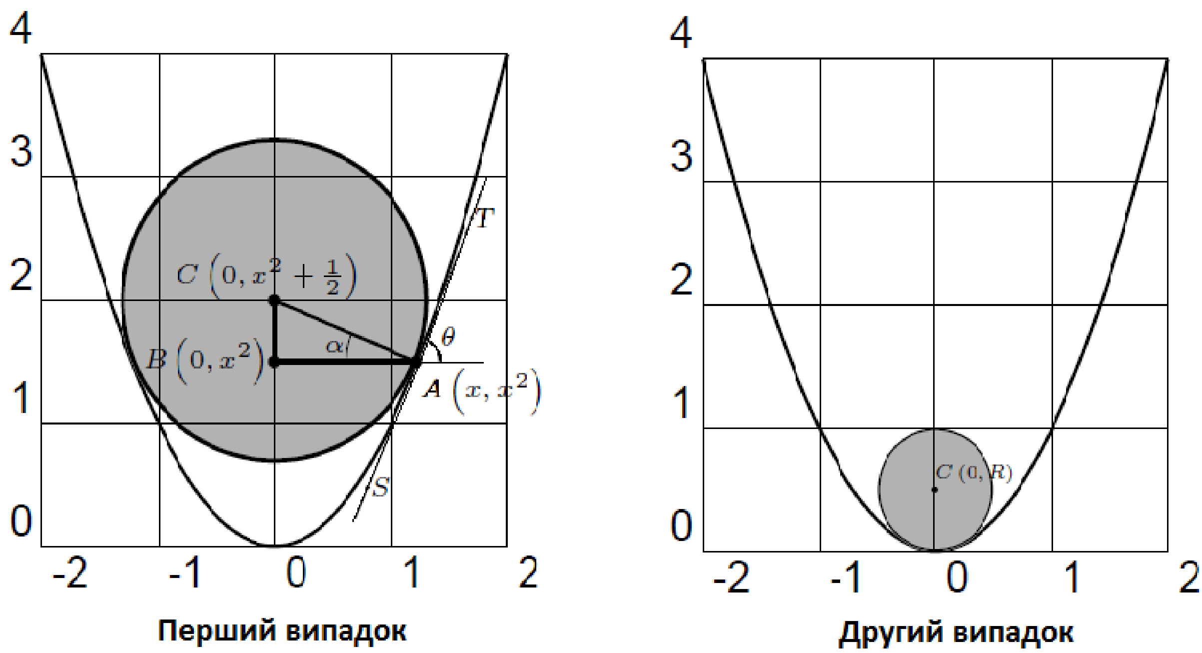
а) Задана точка A лежить на заданому колі l з центром в деякій точці O. В такому випадку інше коло може дотикатися до даного і проходити при цьому через точку A лише в тому випадку, коли точка A і є точкою дотику. Центром такого кола може бути будь-яка точка прямої OA за виключенням самих точок O та A.

б) Задана точка A лежить всередині заданого кола l. Нехай точка P — центр деякого кола, що дотикається до заданого і проходить через точку A. Тоді радіус такого кола буде рівний $|PA|$ і з умови дотику двох кіл, одне з яких лежить всередині іншого (інакше коло не пройде через точку A), випливає, що $|PA| + |PO| = r$, де r — радіус заданого кола l. Множина точок P, що задовольняє останньому рівнянню — це еліпс з фокусами в точках O і A.

в) Задана точка A лежить зовні заданого кола l. Аналогічно до міркувань пункту б), отримаємо рівняння для центрів шуканих кіл у вигляді $|PO| - |PA| = r$, якщо дотик кіл внутрішній, і $|PA| - |PO| = r$, якщо дотик кіл зовнішній. В будь-якому випадку, множина точок P — це гіпербола.

Відповідь: В залежності від розташування заданої точки це може бути: еліпс; гіпербола або пряма без двох точок. □

12.12. *Розв'язання.* Розглянемо переріз параболоїда і кулі площиною XOZ в усталеному стані. В залежності від радіуса кулі можливі 2 випадки (див. мал. 17.1).



Мал. 17.1

Розглянемо перший випадок. В точці дотику $A(x; x^2)$ параболи $z = x^2$

та кола проведемо дотичну ST, кутовий коефіцієнт $\operatorname{tg}\theta$ якої дорівнює $2x$. Зважаючи на те, що кут $\angle CAT = 90^\circ$, отримаємо $\operatorname{ctg}\alpha = 2x$. Тому $\frac{|AB|}{|BC|} = 2x$ і $|BC| = \frac{1}{2}$. Таким чином, центр кола C має координати $\left(0; x^2 + \frac{1}{2}\right)$. Для знаходження величини x залишилось застосувати теорему Піфагора до трикутника ABC: $x^2 = R^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2$. Тому $C\left(0; R^2 + \frac{1}{4}\right)$.

При $R = \frac{1}{2}$, виходить $R^2 + \frac{1}{4} = R$. Це означає, що при $R < \frac{1}{2}$ ми маємо другий випадок і $C(0; R)$.

Відповідь: $(0; 0; R)$, якщо $R < \frac{1}{2}$, і $C(0; 0; R^2 + \frac{1}{4})$, якщо $R \geq \frac{1}{2}$. □

12.13. *Розв'язання.* Позначимо $P(a, a^2)$, $Q(b, b^2)$. Тоді

$$PQ^2 = (a^2 - b^2)^2 + (a - b)^2.$$

Рівняння нормалі до параболи в точці P має вигляд

$$y - a^2 = -\frac{1}{2a}(x - a).$$

Оскільки за умовою Q лежить на цій нормалі, то, підставляючи координати Q в останнє рівняння, отримаємо $b = -\left(a + \frac{1}{2a}\right)$. Тоді

$$PQ^2 = \left(1 + \frac{1}{4a^2}\right)^2 + \left(2a + \frac{1}{2a}\right)^2 = 3 + \frac{3}{4a^2} + 4a^2 + \frac{1}{16a^4}.$$

Позначимо $c = \frac{1}{4a^2}$, тоді

$$PQ^2 = 3 + 3c + c^2 + \frac{1}{c} = f(c).$$

Знайдемо мінімум цієї функції на $(0, +\infty)$. Для цього знайдемо корені похідної:

$$0 = f'(c) = 3 + 2c - \frac{1}{c^2} \text{ або } 2c^3 + 3c^2 = 1.$$

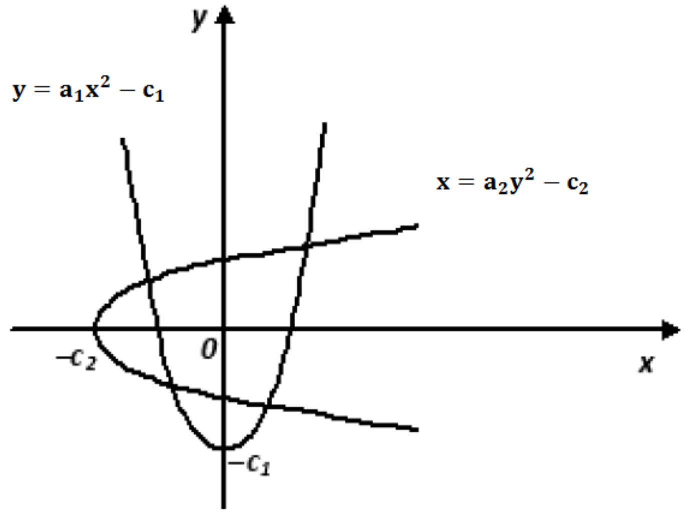
Легко бачити, що на $(0, +\infty)$ це рівняння має єдиний розв'язок, а саме $c = \frac{1}{2}$, який є мінімумом функції $f(c)$ на $(0, +\infty)$.

Підставляючи, отримаємо:

$$PQ^2 = 3 + \frac{3}{2} + \frac{1}{4} + 2 = \frac{27}{4},\ PQ = \frac{3\sqrt{3}}{2},\ a = \pm\frac{1}{2\sqrt{c}} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Відповідь: $\min(PQ) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$, $P\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right)$. □

12.14. *Розв'язання.* Оберемо прямокутну декартову систему координат Oxy так, щоб осі Ox і Oy співпали з осями парабол, а гілки було спрямовано в додатних напрямах координатних осей (див. мал. 17.2). Тоді рівняння парабол матимуть вигляд: $y = a_1x^2 - c_1$ і $x = a_2y^2 - c_2$, де $a_1 > 0$, $a_2 > 0$.



Мал. 17.2

Оскільки за умовою параболи перетинаються в чотирьох точках, то $c_1 > 0$, $c_2 > 0$. Нехай $M_0(x_0, y_0)$ – будь-яка з чотирьох точок перетину парабол. Тоді координати цієї точки задовольняють систему рівнянь:

$$\begin{cases} y_0 = a_1x_0^2 - c_1, \\ x_0 = a_2y_0^2 - c_2. \end{cases}$$

Поділимо обидві частини першого рівняння на $a_1 \neq 0$, а другого — на $a_2 \neq 0$, після чого додамо перше рівняння до другого:

$$x_0^2 + y_0^2 - \frac{y_0}{a_1} - \frac{x_0}{a_2} - \frac{c_1}{a_1} - \frac{c_2}{a_2} = 0.$$

Виділивши повні квадрати, дістанемо:

$$\left(x_0 - \frac{1}{2a_2}\right)^2 + \left(y_0 - \frac{1}{2a_1}\right)^2 = \frac{c_1}{a_1} + \frac{c_2}{a_2} + \frac{1}{4a_1^2} + \frac{1}{4a_2^2}.$$

Таким чином, точка $M_0(x_0, y_0)$ лежить на колі з центром $O\left(\frac{1}{2a_2}, \frac{1}{2a_1}\right)$ і радіусом $R = \sqrt{\frac{c_1}{a_1} + \frac{c_2}{a_2} + \frac{1}{4a_1^2} + \frac{1}{4a_2^2}}$. □

12.15. *Розв'язання.* Розташуємо наші прямі в площині XOY так, щоб точка перетину співпадала з початком координат, а вісь OX була бісектрисою кута 60° (тобто кут між прямими та віссю OX складає 30°). Тоді рівняння цих прямих буде мати вигляд

$$y = \frac{1}{\sqrt{3}}x \quad \text{та} \quad y = -\frac{1}{\sqrt{3}}x.$$

Позначимо координати кінців одиничної хорди як $M_1(x_1;y_1)$ та $M_2(x_2;y_2)$. Оскільки кінці хорди лежать на наших прямих, то $y_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}x_1$, $y_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}x_2$. Оскільки довжина хорди дорівнює 1, то має виконуватись рівність

$$(x_1 - x_2)^2 + \frac{1}{3}(x_1 + x_2)^2 = 1.$$

Нехай середина хорди має координати $M(x;y)$. Тоді $x = \frac{x_1+x_2}{2}$, $y = \frac{x_1-x_2}{2\sqrt{3}}$. Звідси легко побачити, що середина хорди описує еліпс

$$\frac{x^2}{3/4} + \frac{y^2}{1/12} = 1.$$

В нашій площині XOY фокуси еліпса мають координати $F_{1,2}\left(\pm\sqrt{\frac{2}{3}};0\right)$. □

12.16. *Розв'язання.* Позначимо цей трикутник через ABC (прямий кут при вершині B), а координати його вершин через (a,a^2), (b,b^2), (c,c^2). Запишемо умову перпендикулярності прямих AB і BC: $\frac{b^2-a^2}{b-a} \cdot \frac{b^2-c^2}{b-c} = -1$, звідки $(a+b)(b+c) = -1$. Оскільки за умовою a,b,c є цілими числами, то одне з чисел $a+b$ і $b+c$ рівне 1, а інше — (-1), що й означає, що один катет паралельний прямій $y = x$, а інший — прямій $y = -x$. □

12.17. *Розв'язання.* Виберемо прямокутну декартову систему координат Oxy так, щоб осі Ox й Oy були асимптотами рівнобічної гіперболи, а гілки гіперболи розташовувалися в першому і третьому квадрантах. Тоді рівняння рівнобічної гіперболи буде мати вигляд $y = \frac{1}{x}$. Складемо рівняння дотичної до гіперболи в довільній точці $C\left(x_0, \frac{1}{x_0}\right)$, що належить гіперболі:

$$y = \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x_0^2}(x - x_0) = \frac{2}{x_0} - \frac{x}{x_0^2}.$$

Нехай x_1 і x_2 — абсциси точок перетину дотичної з осями координат Oy і Ox (асимптотами гіперболи) відповідно. Тоді $x_1 = 0$, $x_2 = 2x_0$. Тому $x_0 = \frac{x_1+x_2}{2}$, а це означає, що відрізок будь-якої дотичної до рівнобічної гіперболи, який лежить між її асимптотами, поділяється точкою дотику навпіл, що й треба було довести. □

12.18. *Розв'язання.* Перш за все зауважимо, що

$$(x,y) \in B_r \quad \Leftrightarrow \quad (x-r)^2 + (y-r)^2 \le r^2 + 1 \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad r^2 - r(2x+2y) + (x^2 + y^2 - 1) \le 0.$$

Тому

$$(x,y) \in \bigcup_{r\in\mathbb{R}} B_r \quad \Leftrightarrow \quad \exists r \in \mathbb{R}\colon r^2 - r(2x+2y) + (x^2 + y^2 - 1) \le 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \mathcal{D}(x, y) \geq 0,$$

де через $\mathcal{D}(x, y)$ позначено дискримінант квадратного тричлена у попередній формулі:

$$\mathcal{D}(x, y) = (2x + 2y)^2 - 4(x^2 + y^2 - 1) = 8xy + 4.$$

Отже,

$$(x, y) \in \bigcup_{r \in \mathbb{R}} B_r \quad \Leftrightarrow \quad 8xy + 4 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad xy \geq -\frac{1}{2}.$$

Відповідь: $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon xy \geq -\frac{1}{2}\right\}$. □

Розділ 13

13.11. *Доведення.* Нехай функція $f(x)$ задовольняє умові задачі. Розглянемо функцію $g(x) = f(x) + x - 1$, визначену на відрізку $[0; 1]$. Оскільки вона є неперервною, причому $g(0) = -1, g(1) = 1$, то існує таке число $c \in (0; 1)$, що $g(c) = 0$, тобто $f(c) = 1 - c$. За теоремою Лагранжа, знайдуться точки $a \in (0; c), b \in (c; 1)$, для яких

$$f'(a) = \frac{f(c) - f(0)}{c}, \quad f'(b) = \frac{f(1) - f(c)}{1 - c},$$

а це означає, що

$$f'(a)f'(b) = \frac{1 - c}{c} \cdot \frac{c}{1 - c} = 1.$$

□

13.12. *Доведення.* Нехай

$$F(x) = \begin{vmatrix} f(a) & \varphi(a) & \psi(a) \\ f(b) & \varphi(b) & \psi(b) \\ f(x) & \varphi(x) & \psi(x) \end{vmatrix}.$$

$F(a) = F(b) = 0$, отже існує така точка $\xi \in (a; b)$, що $F'(\xi) = 0$. □

13.13. *Доведення.* Якщо многочлен $p(x)$ має кратний корінь, то цей же корінь матимуть і многочлени $p'(x)$ і $q(x) = p(x) - p'(x)$. Але в нашому випадку $q(x) = \frac{x^n}{n!}$ має єдиний корінь $x = 0$, який не є коренем многочлена $p(x)$. □

13.14. *Розв'язання.* Покладемо $f(x) = x^3 - 3x + c$. Припустимо, що рівняння $f(x) = 0$ має 2 різні корені x_1 та x_2 на інтервалі $(0; 1)$, тобто $f(x_1) = 0$ та $f(x_2) = 0$. Отже, на проміжку $[x_1; x_2]$ для функції $f(x)$ виконуються умови теореми Ролля, звідки випливає, що існує точка $x_0 \in (x_1; x_2)$

така, що $f'(x_0)=0$. Але $f'(x)=3x^2-3=3(x-1)(x+1)$, а отже $f'(x_0)=0$ тоді і тільки тоді, коли $x_0=\pm 1\notin(x_1;x_2)$. Отримали протиріччя.

$\square$

13.15. *Доведення.* Оскільки f неперервна, то

$$\exists\ y_1\in(0;1)\ \text{така, що}\quad f(y_1)=\frac{1}{n};$$
$$\exists\ y_2\in(y_1;1)\ \text{така, що}\quad f(y_2)=\frac{2}{n};$$
$$\dots$$
$$\exists\ y_{n-1}\in(y_{n-2};1)\ \text{така, що}\quad f(y_{n-1})=\frac{n-1}{n}.$$

Тоді, за теоремою Лагранжа

$$\exists\ x_1\in(0;y_1)\ \text{така, що}\quad f'(x_1)=\frac{f(y_1)-f(0)}{y_1-0};$$
$$\exists\ x_2\in(y_1;y_2)\ \text{така, що}\quad f'(x_2)=\frac{f(y_2)-f(y_1)}{y_2-y_1};$$
$$\dots$$
$$\exists\ x_n\in(y_{n-1};1)\ \text{така, що}\quad f'(x_n)=\frac{f(1)-f(y_{n-1})}{1-y_{n-1}}.$$

Тоді

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{f'(x_i)}=\frac{y_1-0}{\frac{1}{n}-0}+\frac{y_2-y_1}{\frac{2}{n}-\frac{1}{n}}+\ldots+\frac{1-y_{n-1}}{1-\frac{n-1}{n}}=n.$$

$\square$

13.16. *Вказівка.* Застосувати теорему Лагранжа для функції $y=\ln x$ на проміжку $[a;b]$. $\square$

13.17. *Доведення.* Розглянемо неперервну функцію

$$f(x)=\frac{x}{x+1}-\ln(x+1),\quad x\geq 0.$$

Оскільки

$$f'(x)=\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{1}{x+1}=-\frac{x}{(x+1)^2}<0,\quad x>0,$$

то

$$\forall x>0\quad f(x)<f(0)=0.$$

$\square$

13.18. *Доведення.* Для $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

$$\frac{2\cos x}{1+\cos x} < \frac{\sin x}{x} \quad \Leftrightarrow \quad 2x\cos x < \sin x\,(1+\cos x) \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad 2x\cos x < \sin x + \sin x \cos x \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{tg} x + \sin x - 2x > 0.$$

Функція

$$f\,(x) = \mathrm{tg} x + \sin x - 2x$$

є неперервною та монотонно зростаючою на $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$, оскільки

$$f'\,(x) = \frac{1}{\cos^2 x} + \cos x - 2 > \frac{1}{\cos^2 x} + \cos^2 x - 2 =$$

$$= \left(\frac{1}{\cos x} - \cos x\right)^2 > 0, \quad x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right).$$

Тому

$$f\,(x) = \mathrm{tg} x + \sin x - 2x > f\,(0) = 0, \quad x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right),$$

тобто для всіх $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

$$\frac{2\cos x}{1+\cos x} < \frac{\sin x}{x}.$$

□

13.19. *Доведення.* Позначимо

$$f\,(x) = \ln\left(1 + x^p\right), \quad x \geq 0.$$

Знайдемо

$$f'\,(x) = \frac{p\,x^{p-1}}{1+x^p}, \quad f''\,(x) = p\,x^{p-2}\frac{p-1-x^p}{\left(1+x^p\right)^2}.$$

Оскільки $f''\,(x) > 0$ при $x < \sqrt[p]{p-1}$ та $f''\,(x) < 0$ при $x > \sqrt[p]{p-1}$, то

$$\max f'(x) = f'\left(\sqrt[p]{p-1}\right) = \frac{p-1}{\sqrt[p]{p-1}}.$$

Тому

$$f\,(x) = \int_0^x f'\,(t)\,dt \leq \int_0^x \frac{p-1}{\sqrt[p]{p-1}}dt = \frac{(p-1)x}{\sqrt[p]{p-1}}, \quad x \geq 0.$$

□

13.20. *Розв'язання.* Застосуємо теорему Лагранжа для функції $f^2(x)$ на відрізку $[\frac{\pi}{6} + 2\pi n, \frac{5\pi}{6} + 2\pi n]$ для кожного фіксованого $n \in \mathbb{N}$. Згідно з цією теоремою знайдеться $x_n \in (\frac{\pi}{6} + 2\pi n, \frac{5\pi}{6} + 2\pi n)$ таке, що

$$f^2\Big(\frac{5\pi}{6} + 2\pi n\Big) - f^2\Big(\frac{\pi}{6} + 2\pi n\Big) = 2f(x_n)f'(x_n)\cdot\frac{4\pi}{6}.$$

За умовою $f(x_n)f'(x_n) \geq \sin x_n > \frac{1}{2}$. Отже,

$$f^2\Big(\frac{5\pi}{6} + 2\pi n\Big) - f^2\Big(\frac{\pi}{6} + 2\pi n\Big) > \frac{2\pi}{3},$$

звідки випливає, що скінченна границя $\lim_{n\to\infty} f^2(x_n)$ не може існувати. Тому і границя $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ теж не існує.

Відповідь: ні. □

Розділ 14

14.9. *Доведення.* Позначимо

$$\beta_k = 2 - \alpha_k > 0.$$

Тоді

$$\sum_{k=1}^{n} \beta_k = 2n - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k = 2n - 1$$

і за нерівністю Коші

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{2-\alpha_k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{2+\alpha_k-2}{2-\alpha_k} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{2}{2-\alpha_k} - 1\right) = 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\beta_k} - n \geq$$

$$\geq \frac{2n}{\sqrt[n]{\beta_1 \cdot \ldots \cdot \beta_n}} - n \geq \frac{2n^2}{\beta_1 + \ldots + \beta_n} - n = \frac{2n^2}{2n-1} - n = \frac{n}{2n-1}.$$

□

14.10. *Вказівка.* Скористатися нерівністю Коші між середніми гармонічним, геометричним, арифметичним з $x_1 = a$, $x_2 = x_3 = \ldots = x_n = 1$. □

14.11. *Розв'язання.* Скористаємося нерівністю Коші між середнім арифметичним та середнім геометричним, попередньо переписавши ліву частину нерівності наступним чином:

$$a^4 + b^4 + c^4 = \frac{a^4+a^4+b^4+c^4}{4} + \frac{a^4+b^4+b^4+c^4}{4} + \frac{a^4+b^4+c^4+c^4}{4} \geq$$

$$\geq \sqrt[4]{a^4 \cdot a^4 \cdot b^4 \cdot c^4} + \sqrt[4]{a^4 \cdot b^4 \cdot b^4 \cdot c^4} + \sqrt[4]{a^4 \cdot b^4 \cdot c^4 \cdot c^4} =$$

$$= a^2bc + ab^2c + abc^2 = abc(a+b+c) = abc,$$

що й треба було довести. Рівність виконується при $a = b = c = \frac{1}{3}$. □

14.12. *Вказівка.* Розглянути функцію $y = x\ln x$. Ця функція є опуклою донизу для всіх $x > 0$. Тому за нерівністю Йєнсена (при $q_1 = q_2 = \frac{1}{2}$), отримаємо

$$\frac{x+y}{2}\ln\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y\right) \leq \frac{1}{2}x\ln x + \frac{1}{2}y\ln y.$$

□

14.13. *Розв'язання.* Прологарифмуємо обидві частини нерівності і поділимо на n:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k \ln a_k \geq \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\right) \ln \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\right).$$

Отримали нерівність Йєнсена для опуклої донизу функції $y = x\ln x$. □

14.14. *Розв'язання.* Запишемо нерівність Йєнсена для опуклої донизу функції $y = \sqrt{1+x^2}$:

$$\sqrt{1+\left(\frac{\sum_{k=1}^{n} m_k x_k}{\sum_{k=1}^{n} m_k}\right)^2} \leq \frac{\sum_{k=1}^{n} m_k\sqrt{1+x_k^2}}{\sum_{k=1}^{n} m_k},$$

або

$$\sqrt{\left(\sum_{k=1}^{n} m_k\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^{n} m_k x_k\right)^2} \leq \sum_{k=1}^{n} m_k\sqrt{1+x_k^2} = \sum_{k=1}^{n}\sqrt{m_k^2 + (m_k x_k)^2}.$$

Залишається покласти $m_k = a_k$, $x_k = \frac{b_k}{a_k}$, $k = \overline{1,n}$. □

14.15. *Вказівка.* Застосувати нерівність Гельдера. □

14.16. *Розв'язання.* Застосуємо нерівність Гельдера 2 рази:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k c_k\right) \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^3\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} (b_k c_k)^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{2}{3}} \leq$$

$$\leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^3\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \left[\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^{\frac{3}{2}\cdot 2}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} c_k^{\frac{3}{2}\cdot 2}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{2}{3}},$$

що й треба було довести. □

Розділ 15

15.22. *Розв'язання.* Розглянемо

$$\int_1^{n+1} \ln[x]dx = \int_1^2 \ln[x]dx + \int_2^3 \ln[x]dx + \int_3^4 \ln[x]dx + \ldots + \int_n^{n+1} \ln[x]dx =$$

$$= \int_1^2 \ln 1 dx + \int_2^3 \ln 2 dx + \int_3^4 \ln 3 dx + \ldots + \int_n^{n+1} \ln n dx =$$

$$= \ln 1 + \ln 2 + \ln 3 + \ldots + \ln n = \ln n!.$$

Тоді рівняння набуває вигляду

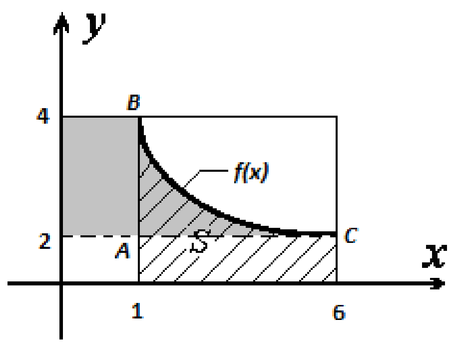
$$\exp\left\{\ln n!\right\} = 5040,$$

звідки

$$n! = 5040,$$

а отже, $n = 7$. □

15.23. *Розв'язання.* Скористаємося теоремою про існування і монотонність оберненої функції та геометричною інтерпретацією інтеграла (див. мал. 17.3).



Мал. 17.3

Оскільки $S = \int\limits_1^6 f(x)\,dx = 15$ — заштрихована на малюнку площа, то площа криволінійного трикутника ABC дорівнює $S_{ABC} = 15 - 2 \cdot 5 = 5$. Отже, шуканий інтеграл $\int\limits_2^4 f^{-1}(x)\,dx$ — це площа криволінійного сектора між функцією $f(x)$ та віссю OY (замальована на малюнку), а тому

$$\int\limits_2^4 f^{-1}(x)\,dx = S_{ABC} + 1 \cdot 2 = 7.$$

□

15.24. *Розв'язання.* Використаємо формулу інтегрування частинами

$$\int\limits_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x}dx = \int\limits_0^1 \operatorname{arctg} x \cdot d\left(\ln(1+x)\right) =$$

$$= \operatorname{arctg} x \cdot \ln(1+x)\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 \frac{\ln(x+1)}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{8}\ln 2.$$

(див. задачу 15.19). □

15.25. *Розв'язання.* Проінтегруємо два рази частинами:

$$I=\int_0^\pi \frac{x^2dx}{1-\cos x}=\int_0^\pi \frac{x^2dx}{2\sin^2\frac{x}{2}}=\begin{vmatrix} u=x^2 & du=2xdx \\ dv=\frac{dx}{2\sin^2\frac{x}{2}} & v=-\mathrm{ctg}\frac{x}{2}\end{vmatrix}=$$

$$=-x^2\mathrm{ctg}\frac{x}{2}\Big|_0^\pi+2\int_0^\pi x\mathrm{ctg}\frac{x}{2}dx=\lim_{\varepsilon\to0}\left(\varepsilon^2\mathrm{ctg}\frac{\varepsilon}{2}\right)+2\int_0^\pi x\mathrm{ctg}\frac{x}{2}dx.$$

Обчислимо

$$\lim_{\varepsilon\to0}\left(\varepsilon^2\mathrm{ctg}\frac{\varepsilon}{2}\right)=\lim_{\varepsilon\to0}\left(\frac{\varepsilon^2}{\mathrm{tg}\frac{\varepsilon}{2}}\right)=\left|\mathrm{tg}\frac{\varepsilon}{2}\sim\frac{\varepsilon}{2},\varepsilon\to0\right|=\lim_{\varepsilon\to0}2\varepsilon=0.$$

Тому

$$I=2\int_0^\pi x\mathrm{ctg}\frac{x}{2}dx=2\int_0^\pi x\frac{\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}dx=\begin{vmatrix} u=x & du=dx \\ dv=\frac{\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}dx & v=2\ln\sin\frac{x}{2}\end{vmatrix}=$$

$$=4x\ln\sin\frac{x}{2}\Big|_0^\pi-4\int_0^\pi\ln\sin\frac{x}{2}dx=4\pi\ln\sin\frac{\pi}{2}-4\lim_{\varepsilon\to0}\left(\varepsilon\ln\sin\frac{\varepsilon}{2}\right)-$$

$$-4\int_0^\pi\ln\sin\frac{x}{2}dx=\left|\frac{x}{2}=t\right|=0-4\lim_{\varepsilon\to0}\frac{\ln\sin\frac{\varepsilon}{2}}{\frac{1}{\varepsilon}}-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin t dt.$$

Обчислимо

$$\lim_{\varepsilon\to0}\frac{\ln\sin\frac{\varepsilon}{2}}{\frac{1}{\varepsilon}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=|\text{правило Лопіталя}|=\lim_{\varepsilon\to0}\frac{\left(\ln\sin\frac{\varepsilon}{2}\right)'}{\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)'}=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to0}\frac{\left(\frac{1}{2}\mathrm{ctg}\frac{\varepsilon}{2}\right)'}{\left(\frac{-1}{\varepsilon^2}\right)'}=-\frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to0}\frac{\varepsilon^2\cos\frac{\varepsilon}{2}}{\sin\frac{\varepsilon}{2}}=-\lim_{\varepsilon\to0}\frac{\frac{\varepsilon}{2}}{\sin\frac{\varepsilon}{2}}\cdot\varepsilon\cos\frac{\varepsilon}{2}=-1\cdot0=0.$$

Скориставшись зауваженням 15.1, отримаємо, що $I=\pi\ln2$. □

15.26. *Розв'язання.* Покажемо, що

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(\alpha x)\cos^{\alpha-2}xdx=0,\quad\text{для будь-якого}\quad\alpha\geq2.$$

Дійсно,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(\alpha x)\cos^{\alpha-2}xdx=$$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\alpha-1)x\cos^{\alpha-1}x dx - \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\alpha-1)x \sin x \cos^{\alpha-2} x dx =$$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\alpha-1)x\cos^{\alpha-1}x dx + \frac{1}{\alpha-1}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\alpha-1)x d(\cos^{\alpha-1}x) =$$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\alpha-1)x\cos^{\alpha-1}x dx + \frac{1}{\alpha-1}\sin(\alpha-1)x\cos^{\alpha-1}x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} -$$

$$- \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\alpha-1)x\cos^{\alpha-1}x dx = 0.$$

Таким чином,

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2016x)\cos^{2014}x dx = 0.$$

□

15.27. *Розв'язання.* а) Позначимо шуканий інтеграл через I. Тоді

$$I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\mathrm{ctg}^{2019}x} = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2019}x dx}{\sin^{2019}x + \cos^{2019}x} = \left|x = \frac{\pi}{2} - t\right| =$$

$$= -\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{\sin^{2019}(\frac{\pi}{2}-t)dt}{\sin^{2019}(\frac{\pi}{2}-t)+\cos^{2019}(\frac{\pi}{2}-t)} = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{2019}t dt}{\sin^{2019}t + \cos^{2019}t}.$$

Звідси

$$2I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2019}x}{\sin^{2019}x+\cos^{2019}x}dx + \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{2019}x}{\sin^{2019}x+\cos^{2019}x}dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} 1dx = \frac{\pi}{2}.$$

Отже, $I = \dfrac{\pi}{4}$.

б) Позначимо шуканий інтеграл через I. Тоді

$$I = \int\limits_0^{\pi} \frac{\cos^2\frac{x}{2}dx}{3\pi^2+4\pi x-4x^2} = \int\limits_0^{\pi} \frac{\cos^2\frac{x}{2}dx}{(2x+\pi)(3\pi-2x)} = \left|x = \pi - t\right| =$$

$$=\int\limits_0^{\pi}\frac{\cos^2\frac{\pi-t}{2}dt}{(2t+\pi)(3\pi-2t)}=\int\limits_0^{\pi}\frac{\sin^2\frac{t}{2}dt}{(2t+\pi)(3\pi-2t)}.$$

Звідси

$$2I=\int\limits_0^{\pi}\frac{\cos^2\frac{x}{2}dx}{(2x+\pi)(3\pi-2x)}+\int\limits_0^{\pi}\frac{\sin^2\frac{x}{2}dx}{(2x+\pi)(3\pi-2x)}=$$

$$=\int\limits_0^{\pi}\frac{dx}{(2x+\pi)(3\pi-2x)}=\frac{1}{4\pi}\int\limits_0^{\pi}\Big(\frac{1}{2x+\pi}+\frac{1}{3\pi-2x}\Big)dx=$$

$$=\frac{1}{8\pi}\Big(\ln|2x+\pi|\Big|_0^{\pi}-\ln|2x-3\pi|\Big|_0^{\pi}\Big)=\frac{\ln 3}{4\pi}.$$

Отже, $I=\dfrac{\ln 3}{8\pi}$.

в) Позначимо шуканий інтеграл через I та зробимо в ньому заміну $x=\pi-t$:

$$I=\int\limits_0^{\pi}\frac{x\sin x dx}{\mathrm{ch}^2\left(\frac{\cos x}{2}\right)}=\int\limits_0^{\pi}\frac{(\pi-t)\sin(\pi-t)dt}{\mathrm{ch}^2\left(\frac{\cos(\pi-t)}{2}\right)}=\int\limits_0^{\pi}\frac{(\pi-t)\sin t dt}{\mathrm{ch}^2\left(\frac{\cos t}{2}\right)}.$$

Тоді

$$2I=\int\limits_0^{\pi}\frac{x\sin x dx}{\mathrm{ch}^2\left(\frac{\cos x}{2}\right)}+\int\limits_0^{\pi}\frac{(\pi-x)\sin x dx}{\mathrm{ch}^2\left(\frac{\cos x}{2}\right)}=\pi\int\limits_0^{\pi}\frac{\sin x dx}{\mathrm{ch}^2\left(\frac{\cos x}{2}\right)}=$$

$$=-2\pi\int\limits_0^{\pi}\frac{d\left(\frac{\cos x}{2}\right)}{\mathrm{ch}^2\left(\frac{\cos x}{2}\right)}=-2\pi\cdot\mathrm{th}\left(\frac{\cos x}{2}\right)\Big|_0^{\pi}=-2\pi\left(-\mathrm{th}\frac{1}{2}\right)=4\pi\cdot\mathrm{th}\frac{1}{2}.$$

Отже, $I=4\pi\mathrm{th}\frac{1}{2}$.

г) Позначимо шуканий інтеграл через I.

$$I=\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{(e^x+1)\cos x}=\Big|x=-t\Big|=\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{dt}{(e^{-t}+1)\cos t}=\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{e^t dt}{(e^t+1)\cos t}.$$

Тоді

$$2I=\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{(e^x+1)\cos x}+\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{e^x dx}{(e^x+1)\cos x}=\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\cos x}=\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x dx}{\cos^2 x}=$$

$$= \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{d(\sin x)}{(1-\sin^2 x)} = -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sin x - 1}{\sin x + 1}\right|\Bigg|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \ln\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}\right).$$

Отже, $I = \ln\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}}$.

д) Застосовуючи прийом "рефлексії" як і в попередніх інтегралах, матимемо:

$$I = \int\limits_3^7 \frac{\ln(x+2)dx}{\ln(24+10x-x^2)} = \int\limits_3^7 \frac{\ln(x+2)dx}{\ln(x+2)+\ln(12-x)} = \Big|x \to 10-x\Big| =$$

$$= \int\limits_3^7 \frac{\ln(12-x)dx}{\ln(12-x)+\ln(x+2)},$$

звідки

$$I = \frac{1}{2}\int\limits_3^7 \frac{\ln(12-x)+\ln(x+2)dx}{\ln(x+2)+\ln(12-x)}dt = \frac{1}{2}\int\limits_3^7 dx = 2.$$

е) Позначимо шуканий інтеграл через I.

$$I = \int\limits_{-1}^{1} x^{2013}\ln(1+e^x)dx = \Big|x=-t\Big| = \int\limits_{-1}^{1} (-t)^{2013}\ln(1+e^{-t})dt =$$

$$= -\int\limits_{-1}^{1} t^{2013}\ln\frac{1+e^t}{e^t}dt = -\int\limits_{-1}^{1} t^{2013}\ln(1+e^t)dt + \int\limits_{-1}^{1} t^{2013}\ln(e^t)dt =$$

$$= -I + \int\limits_{-1}^{1} t^{2014}dt = -I + \frac{2}{2015}.$$

Отримали рівняння на інтеграл: $I = -I + \frac{2}{2015}$, звідки $I = \frac{1}{2015}$.

є) Позначимо шуканий інтеграл через I та зробимо в ньому заміну:

$$I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \left(x - \frac{\pi}{8}\right)^{2020} \ln(1+\operatorname{tg} x)\,dx = \Big|x \to \frac{\pi}{4} - x\Big| =$$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \left(x - \frac{\pi}{8}\right)^{2020} \ln\left(\frac{2}{1+\operatorname{tg} x}\right)\,dx,$$

звідки

$$2I = \ln 2 \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \left(x - \frac{\pi}{8}\right)^{2020} dx = \frac{2\ln 2}{2021} \cdot \left(\frac{\pi}{8}\right)^{2021},$$

а отже, $I = \frac{\ln 2}{2021} \cdot \left(\frac{\pi}{8}\right)^{2021}$. □

15.28. *Розв'язання.* Зробимо заміну: $x = \operatorname{tg} \varphi$ та перетворимо підінтегральний вираз:

$$\int\limits_0^1 \frac{x^4(1-x^2)^5\,dx}{(1+x^2)^{10}} = \Big|x = \operatorname{tg}\varphi\Big| = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{tg}^4\varphi(1-\operatorname{tg}^2\varphi)^5}{(1+\operatorname{tg}^2\varphi)^{10}} \cdot \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi} =$$

$$= \frac{1}{2^4}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^4 2\varphi \cos^5 2\varphi d\varphi = \frac{1}{2^5}\left(\frac{\pi^5}{5\cdot 4^5} - \frac{2\cdot\pi^7}{7\cdot 4^7} + \frac{\pi^9}{9\cdot 4^9}\right).$$

□

15.29. *Розв'язання.* Спочатку перетворимо підінтегральний вираз:

$$I = \int\limits_1^{\sqrt{2}} \frac{1}{x} \ln\frac{2-2x^2+x^4}{2x-2x^2+x^3}dx = \int\limits_1^{\sqrt{2}} \frac{1}{x}\ln\frac{\frac{2}{x^2}-2+x^2}{\frac{2}{x}-2+x}dx =$$

$$= \int\limits_1^{\sqrt{2}} \frac{1}{x}\ln\left(\frac{2}{x^2}-2+x^2\right)dx - \int\limits_1^{\sqrt{2}}\frac{1}{x}\ln\left(\frac{2}{x}-2+x\right)dx.$$

Розглянемо окремо другий інтеграл і зробимо в ньому заміну $x = t^2$:

$$\int\limits_1^{\sqrt{2}} \frac{1}{x}\ln\left(\frac{2}{x}-2+x\right)dx = \Big|x = t^2\Big| = 2\int\limits_1^{\sqrt[4]{2}}\frac{1}{t}\ln\left(\frac{2}{t^2}-2+t^2\right)dt.$$

Тоді

$$I = \int\limits_1^{\sqrt{2}} \frac{1}{x}\ln\left(\frac{2}{x^2}-2+x^2\right)dx - 2\int\limits_1^{\sqrt[4]{2}}\frac{1}{x}\ln\left(\frac{2}{x^2}-2+x^2\right)dx =$$

$$= \int\limits_1^{\sqrt{2}} \frac{1}{x}\ln\left(\frac{2}{x^2}-2+x^2\right)dx - \int\limits_1^{\sqrt[4]{2}}\frac{1}{x}\ln\left(\frac{2}{x^2}-2+x^2\right)dx - \int\limits_1^{\sqrt[4]{2}}\frac{1}{x}\ln\left(\frac{2}{x^2}-2+x^2\right)dx =$$

$$= \int\limits_{\sqrt[4]{2}}^{\sqrt{2}} \frac{1}{x} \ln\left(\frac{2}{x^2} - 2 + x^2\right) dx - \int\limits_{1}^{\sqrt[4]{2}} \frac{1}{x} \ln\left(\frac{2}{x^2} - 2 + x^2\right) dx = 0,$$

оскільки

$$\int\limits_{\sqrt[4]{2}}^{\sqrt{2}} \frac{1}{x} \ln\left(\frac{2}{x^2} - 2 + x^2\right) dx = \left| x = \frac{\sqrt{2}}{u} \right| = -\int\limits_{\sqrt[4]{2}}^{1} \frac{1}{u} \ln\left(\frac{2}{u^2} - 2 + u^2\right) du =$$

$$= \int\limits_{1}^{\sqrt[4]{2}} \frac{1}{u} \ln\left(\frac{2}{u^2} - 2 + u^2\right) du.$$

□

15.30. *Розв'язання.* Позначимо цей інтеграл через I. Після заміни $t = \frac{2020}{x}$ отримаємо

$$I = \int\limits_{20}^{101} \frac{\ln\left(\frac{2020^2}{t}\right)}{2020 + t^2}\, dt.$$

Додаючи цей інтеграл до початкового, одержуємо

$$2I = \int\limits_{20}^{101} \frac{\ln(2020x) + \ln\left(\frac{2020^2}{x}\right)}{2020 + x^2}\, dx = 3\ln(2020) \int\limits_{20}^{101} \frac{dx}{2020 + x^2} =$$

$$= \frac{3\ln(2020)}{\sqrt{2020}} \cdot \left(\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{101}{20}} - \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{20}{101}}\right).$$

Отже,

$$I = \frac{3\ln(2020)}{2\sqrt{2020}} \cdot \left(\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{101}{20}} - \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{20}{101}}\right).$$

□

15.31. *Розв'язання.* а) Позначимо шуканий інтеграл через I та зробимо в ньому заміну $x = \frac{1}{t}$:

$$I = \int\limits_{0}^{\infty} \frac{x^{2009}}{x^{4021} + x^{4020} + x + 1} dx = \left| x = \frac{1}{t} \right| = \int\limits_{\infty}^{0} \frac{\frac{1}{t^{2009}} \cdot \frac{-1}{t^2} dt}{\frac{1}{t^{4021}} + \frac{1}{t^{4020}} + \frac{1}{t} + 1} =$$

$$= \int\limits_{0}^{\infty} \frac{t^{2010} dt}{t^{4021} + t^{4020} + t + 1}.$$

Тоді

$$2I = \int\limits_0^{\infty} \frac{x^{2009}}{x^{4021}+x^{4020}+x+1}dx + \int\limits_0^{\infty} \frac{x^{2010}}{x^{4021}+x^{4020}+x+1}dx =$$

$$= \int\limits_0^{\infty} \frac{x^{2009}(x+1)}{x^{4021}+x^{4020}+x+1}dx = \int\limits_0^{\infty} \frac{x^{2009}(x+1)}{(x+1)(x^{4020}+1)}dx =$$

$$= \int\limits_0^{\infty} \frac{x^{2009}}{x^{4020}+1}dx = \frac{1}{2010}\int\limits_0^{\infty} \frac{d(x^{2010})}{x^{4020}+1} = \frac{1}{2010}\operatorname{arctg}\left(x^{2010}\right)\Big|_0^{\infty} = \frac{\pi}{4020}.$$

б) Як і в пункті а), застосовуючи принцип “інверсії”, отримаємо:

$$I = \int\limits_0^{\infty} \frac{\ln(2x)\,dx}{1+x^2} = \left|x \to \frac{1}{x}\right| = \int\limits_0^{\infty} \frac{\ln\left(\frac{2}{x}\right)\,dx}{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)x^2} = \int\limits_0^{\infty} \frac{\ln 2 - \ln x}{x^2+1}\,dx,$$

звідки

$$I = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\infty} \frac{(\ln(2x) + \ln 2 - \ln x)\,dx}{1+x^2} = \ln 2\int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+1} = \frac{\pi}{2}\ln 2.$$

$\square$

15.32. *Розв'язання.* Розглянемо окремо інтеграл $I = \int\limits_{-1}^{1} \frac{dt}{(e^t+1)(t^2+x)}$ та зробимо заміну $t = -u$:

$$I = \int\limits_{-1}^{1} \frac{dt}{(e^t+1)(t^2+x)} = |t = -u| = \int\limits_{-1}^{1} \frac{du}{(e^{-u}+1)(u^2+x)} =$$

$$= \int\limits_{-1}^{1} \frac{e^u du}{(e^u+1)(u^2+x)}.$$

Тоді

$$2I = \int\limits_{-1}^{1} \frac{dt}{(e^t+1)(t^2+x)} + \int\limits_{-1}^{1} \frac{e^t dt}{(e^t+1)(t^2+x)} = \int\limits_{-1}^{1} \frac{dt}{(t^2+x)} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{x}}\Big|_{-1}^{1} = \frac{2}{\sqrt{x}}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Таким чином,

$$\frac{2}{\sqrt{x}}\mathrm{arctg}\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{\pi}{2},$$

або

$$\mathrm{arctg}\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{\pi}{4}\sqrt{x}.$$

Звідси підбором отримаємо, що корінь рівняння $x = 1$. Зауважимо, що інших коренів це рівняння мати не може, оскільки на спільній області визначення ($x > 0$) функція $y = \mathrm{arctg}\frac{1}{\sqrt{x}}$ є спадною, а функція $y = \frac{\pi}{4}\sqrt{x}$ є зростаючою. □

15.33. *Розв'язання.* Скористаємося рекурентною формулою

$$I_n = \int \frac{dx}{(a^2+x^2)^n} = \frac{1}{2a^2(n-1)}\left(\frac{x}{(x^2+a^2)^n - 1} + (2n-3)I_{n-1}\right).$$

Враховуючи межі інтегрування, а також те, що в нашому випадку $a = 1$, отримаємо

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \frac{2n-3}{2(n-1)}\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^{n-1}} = \ldots = \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} =$$

$$= \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\mathrm{arctg}x\Big|_0^\infty = \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\frac{\pi}{2}.$$

□

15.34. *Розв'язання.* Виконаємо заміну $x + \frac{a}{x} = \sqrt{y^2+4a}$, тобто $y^2 = \left(x - \frac{a}{x}\right)^2$, $y = x - \frac{a}{x}$, $dx = \frac{dy}{1+\frac{a}{x^2}}$, $x = \frac{y+\sqrt{y^2+4a}}{2}$. Тоді отримаємо

$$\int_0^\infty f\left(x + \frac{a}{x}\right)dx = \int_{-\infty}^\infty f(\sqrt{y^2+4a})\frac{dy}{1 + \frac{2a}{y^2+2a+y\sqrt{y^2+4a}}}.$$

Після заміни в останньому інтегралі y на $-y$, отримаємо

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty f(\sqrt{y^2+4a})\left(\frac{y^2+2a+y\sqrt{y^2+4a}}{y^2+4a+y\sqrt{y^2+4a}} + \frac{y^2+2a-y\sqrt{y^2+4a}}{y^2+4a-y\sqrt{y^2+4a}}\right)dy =$$

$$= \int_0^\infty f(\sqrt{y^2+4a})dy.$$

□

15.35. *Розв'язання.* Розглянемо інтеграл $I = \int\limits_0^\infty \frac{e^{-x^2}dx}{x^2+0.5}$ і проінтегруємо його частинами:

$$I = \int\limits_0^\infty \frac{e^{-x^2}dx}{x^2+0.5} = \begin{vmatrix} u = \frac{e^{-x^2}}{x^2+0.5} & du = \frac{-2xe^{-x^2}(x^2+0.5)-2xe^{-x^2}}{(x^2+0.5)^2}dx \\ dv = dx & v = x \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{xe^{-x^2}}{x^2+0.5}\Big|_0^\infty - \int\limits_0^\infty \frac{-2x^2e^{-x^2}(x^2+0.5+1)}{(x^2+0.5)^2}dx =$$

$$= 0 + 2\int\limits_0^\infty \frac{x^2e^{-x^2}}{x^2+0.5}dx + 2\int\limits_0^\infty \frac{x^2e^{-x^2}}{(x^2+0.5)^2}dx =$$

$$= 2\int\limits_0^\infty \frac{(x^2+0.5-0.5)e^{-x^2}}{x^2+0.5}dx + 2\int\limits_0^\infty \frac{(x^2+0.5-0.5)e^{-x^2}}{(x^2+0.5)^2}dx =$$

$$= 2\int\limits_0^\infty e^{-x^2}dx - \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x^2}}{x^2+0.5}dx + 2\int\limits_0^\infty \frac{e^{-x^2}}{x^2+0.5}dx - \int\limits_0^\infty \frac{e^{-x^2}}{(x^2+0.5)^2}dx =$$

$$= 2\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2} - I + 2I - \int\limits_0^\infty \frac{e^{-x^2}}{(x^2+0.5)^2}dx = \sqrt{\pi} + I - \int\limits_0^\infty \frac{e^{-x^2}}{(x^2+0.5)^2}dx.$$

Отримаємо рівняння:

$$I = \sqrt{\pi} + I - \int\limits_0^\infty \frac{e^{-x^2}}{(x^2+0.5)^2}dx,$$

звідки

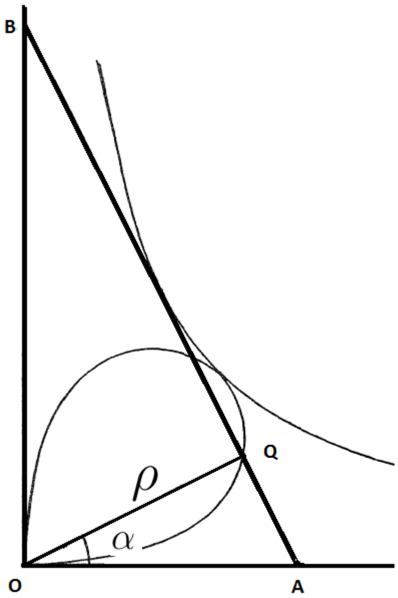
$$\int\limits_0^\infty \frac{e^{-x^2}}{(x^2+0.5)^2}dx = \sqrt{\pi}.$$

$\square$

15.36. *Розв'язання.* Оскільки точка дотику відрізка AB з гіперболою $xy = 1$ є серединою відрізка AB, то площа трикутника AOB дорівнює $S_{AOB} = 2xy = 2$. Покладемо $OQ = \rho$ і $\angle AOQ = \alpha$ (див. мал. 17.4).

Тоді

$$S_{AOB} = 2 = \frac{1}{2}|OQ|\Big(|AQ| + |QB|\Big) = \frac{1}{2}\rho(\rho\operatorname{tg}\alpha + \rho\operatorname{ctg}\alpha) =$$



Мал. 17.4

$$= \frac{\rho^2}{2\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{\rho^2}{\sin 2\alpha},$$

звідки

$$\rho^2 = 2\sin 2\alpha,$$

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho^2\, d\alpha = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin 2\alpha\, d\alpha = 1.$$

□

Розділ 16

16.7. *Вказівка.* Нехай $M_0(x_0, y_0, z_0)$ — це така точка на поверхні Ω, що відстань від M до M_0 є найменшою. Тоді вектор нормалі $\overrightarrow{n}$ до поверхні Ω в точці M_0 є паралельним до $\overrightarrow{M_0M}$. Маємо

$$\overrightarrow{n}(2x_0, 4y_0, -1) \quad \text{та} \quad \overrightarrow{M_0M}(1 - x_0, -y_0, 2 - z_0).$$

Координати точки M_0 мають задовольняти систему рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{1 - x_0}{2x_0} = -\dfrac{y_0}{4y_0} = \dfrac{2 - z_0}{-1}, \\ z_0 = x_0^2 + 2y_0^2. \end{cases}$$

Маємо три точки $M_0'(-1, 0, 1)$, $M_0''\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{2-\sqrt{3}}{2}\right)$ та $M_0'''\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{2+\sqrt{3}}{2}\right)$.

Звідси знаходимо, що найменша відстань від точки M до поверхні Ω дорівнює

$$\left|\overrightarrow{M_0M'''}\right| = \frac{11-6\sqrt{3}}{2}.$$

$\square$

16.8. *Вказівка.* Див. задачу 16.1.
Відповідь: $\frac{5}{2\sqrt{3}}$. $\square$
16.9. *Вказівка.* Розглянути задачу окремо в двох областях

$$D_1 = D \cap \{(x,y) : x - y^2 \leq 0\} \quad \text{та} \quad D_2 = D \cap \{(x,y) : x - y^2 \geq 0\}.$$

$\square$

16.10. *Розв'язання.* Нехай $M_0(x_0, y_0)$ — точка дотику. Тоді рівняння дотичної має вигляд

$$l : y = y_0 - \frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}(x - x_0).$$

Звідси знаходимо точки перетину дотичної з осями координат

$$A\left(\frac{a^2}{x_0}, 0\right) \quad \text{та} \quad B\left(0, \frac{b^2}{y_0}\right).$$

Тому площа даного трикутника буде дорівнювати

$$S = \frac{a^2 b^2}{2x_0 y_0}.$$

Отже, потрібно знайти такі значення x, y, що функція

$$S(x,y) = \frac{a^2 b^2}{2xy}$$

набуває свого мінімуму при умові, що

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Запишемо функцію Лагранжа

$$L(x,y;\lambda) = \frac{a^2 b^2}{2xy} + \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right).$$

Маємо

$$\begin{cases} L'_x = -\frac{a^2 b^2}{2x^2 y} + \frac{2\lambda x}{a^2}, \\ L'_y = -\frac{a^2 b^2}{2xy^2} + \frac{2\lambda y}{b^2}. \end{cases}$$

Координати точки мінімуму будуть розв'язками системи рівнянь

$$\begin{cases} -\frac{a^2b^2}{2x^2y} + \frac{2\lambda x}{a^2} = 0, \\ -\frac{a^2b^2}{2xy^2} + \frac{2\lambda y}{b^2} = 0, \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \end{cases}$$

Отримаємо, що $x = \frac{a}{\sqrt{2}}$, $y = \frac{b}{\sqrt{2}}$, $\lambda = ab$, тобто шукана точка має координати $M_0\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}}\right)$.

Додатково треба перевірити, що $d^2L\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}}; ab\right) > 0$. □

16.11. *Розв'язання.* Нехай шукана площина перетинає декартові осі в точках $A(A, 0, 0)$, $B(0, B, 0)$ та $C(0, 0, C)$. Тоді її рівняння можна записати наступним чином

$$P : \frac{x}{A} + \frac{y}{B} + \frac{z}{C} = 1.$$

Об'єм тетраедра в цьому випадку буде дорівнювати $V = \frac{1}{6}ABC$. Тому найменший об'єм тетраедра буде дорівнювати мінімуму функції

$$V(A, B, C) = \frac{1}{6}ABC$$

при умові

$$\frac{a}{A} + \frac{b}{B} + \frac{c}{C} = 1.$$

Запишемо функцію Лагранжа

$$L(A, B, C; \lambda) = \frac{1}{6}ABC + \lambda\left(\frac{a}{A} + \frac{b}{B} + \frac{c}{C} - 1\right).$$

Маємо

$$\begin{cases} L'_A = \frac{1}{6}BC - \frac{\lambda a}{A^2}, \\ L'_B = \frac{1}{6}AC - \frac{\lambda b}{b^2}, \\ L'_C = \frac{1}{6}AB - \frac{\lambda c}{C^2}. \end{cases}$$

Координати точки мінімуму будуть розв'язками системи рівнянь

$$\begin{cases} \frac{1}{6}BC - \frac{\lambda a}{A^2} = 0, \\ \frac{1}{6}AC - \frac{\lambda b}{b^2} = 0, \\ \frac{1}{6}AB - \frac{\lambda c}{C^2} = 0, \\ \frac{a}{A} + \frac{b}{B} + \frac{c}{C} = 1. \end{cases}$$

Отримаємо, що $A = 3a, B = 3b, C = 3c, \lambda = \frac{27abc}{2}$. Тобто, рівняння шуканої площини має вигляд

$$P : \frac{x}{3a} + \frac{y}{3b} + \frac{z}{3c} = 1.$$

Додатково треба перевірити, що $d^2L(3a, 3b, 3c; \frac{27abc}{2}) > 0$. □

16.12. *Вказівка.* Перейти до полярних координат. □

16.13. *Вказівка.* Перейти до полярних координат. □

16.14. *Розв'язання.* Область визначення функції — $\mathbb{R}^2$. Знайдемо стаціонарні точки функції $f(x, y)$ з умови

$$\begin{cases} f'_x = 0, \\ f'_y = 0. \end{cases}$$

Маємо

$$\begin{cases} 2x = 0, \\ \cos y = 0, \end{cases}$$

звідки випливає, що точки $M_n\left(0, \frac{\pi}{2} + \pi n\right), n \in \mathbb{Z}$ є стаціонарними. Перевіримо достатню умову екстремумів. Запишемо

$$\begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -\sin y \end{vmatrix} = -2\sin y > 0,$$

якщо $y = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$. Тобто екстремуми існують в точках $M_{2k}, k \in \mathbb{Z}$. Оскільки $f''_{xx}(M_{2k}) = 2 > 0$, то вони є точками мінімуму. □

16.15. *Розв'язання.* Оскільки f — неперервна функція, а множина D — замкнена та обмежена, то f досягає максимуму на D. Покажемо, що цей максимум досягається в одній з вершин октаедра D, які мають координати $(1, 0, 0)$, $(-1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, -1, 0)$, $(0, 0, 1)$ та $(0, 0, -1)$.

Припустимо супротивне і позначимо точку максимуму через (x_0, y_0, z_0), де $x_0, y_0, z_0 \in (-1, 1)$. Тоді існує $\varepsilon > 0$ таке, що $(x_0, y_0, z_0 + \varepsilon)$ і $(x_0, y_0, z_0 - \varepsilon)$ теж належать D. Але як функція від z f є опуклою вниз, і тому

$$f(x_0, y_0, z_0) < \frac{1}{2}\big(f(x_0, y_0, z_0 + \varepsilon) + f(x_0, y_0, z_0 - \varepsilon)\big).$$

Це суперечить тому, що (x_0, y_0, z_0) — точка максимуму.

Підставляючи вершини октаедра D, отримаємо, що

$$\max_{(x,y,z)\in D} f(x, y, z) = 1 + \max\{|a|, |b|, |c|\}.$$

Відповідь: $1 + \max\{|a|, |b|, |c|\}$. □

16.16. *Вказівка.* Потрібно мінімізувати площу еліпса, тобто функцію $S = \pi ab$, за умови, що коло та еліпс мають 2 спільні дотичні. Тобто це задача на умовний екстремум. Знайдемо умову у алгебраїчному вигляді. Нехай $(x_0; y_0)$ — точка дотику (наприклад, в першій чверті, тобто $y_0 > 0$). Тоді, прирівнюючи похідні, матимемо

$$-\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0} = \frac{1 - x_0}{y_0},$$

звідки

$$x_0 = \frac{a^2}{a^2 - b^2}.$$

Крім того, точка $(x_0; y_0)$ належить як еліпсу, так і колу, звідки отримаємо ще дві умови:

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1, \quad (x_0 - 1)^2 + y_0^2 = 1.$$

Виключивши з трьох останніх співвідношень x_0 та y_0, та спростивши отриманий вираз, приходимо до умови на параметри a та b:

$$a^2 - a^2 b^2 + b^4 = 0.$$

Далі, складаємо функцію Лагранжа

$$L(a, b; \lambda) = \pi ab + \lambda(a^2 - a^2 b^2 + b^4)$$

та знаходимо її стаціонарні точки $M_i(a; b; \lambda)$:

$$M_1(0; 0; 0), \quad M_2\left(\frac{3}{\sqrt{2}}; \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}; \frac{\pi}{\sqrt{3}}\right), \qquad M_3\left(-\frac{3}{\sqrt{2}}; -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}; \frac{\pi}{\sqrt{3}}\right),$$

$$M_4\left(-\frac{3}{\sqrt{2}}; \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}; -\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right), \quad M_5\left(\frac{3}{\sqrt{2}}; -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}; -\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right).$$

Нарешті, достатньо перевірити знак d^2L в точці M_2, бо a, b — півосі еліпса, а значить $a > 0$, $b > 0$. Дійсно, за умови $2a(1 - b^2)da + (4b^3 - 2a^2 b)db = 0$,

$$d^2L(M_2) = \frac{36\pi}{3\sqrt{3}} da^2 > 0,$$

що означає, що точка (M_2) є точкою умовного мінімуму.

Відповідь: $a = \frac{3}{\sqrt{2}}$ $b = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$. □

Розділ 17

17.9. *Розв'язання.* Зафіксуємо елемент a_1 множини $X = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ і будемо розглядати тільки підмножини, які містять a_1. Число таких підмножин дорівнює числу підмножин множини $\{a_2, \ldots, a_n\}$, тобто числу

2^{n-1}. Отже, $k \geq 2^{n-1}$. З іншого боку, нехай вибрано більше 2^{n-1} підмножин множини X. Розіб'ємо всі можливі підмножини X на 2^{n-1} пар, об'єднавши в одну пару підмножину та її доповнення. Тоді за принципом Діріхле хоча б дві вибрані підмножини утворюють пару, а отже, не перетинаються. Таким чином, $k = 2^{n-1}$. □

17.10. *Розв'язання.* Будемо називати кожних трьох попарно знайомих між собою людей «+»-трійкою, а кожних трьох (чотирьох) попарно незнайомих «–»-трійкою («–»-четвіркою). Кількість елементів довільної скінченної множини M будемо позначати як $|M|$.

1. Нехай A — множина, яка не містить жодної «+»-трійки і жодної «–»-трійки, а x — довільна людина з A. Тоді множина A, крім x, складається з підмножини A^+ знайомих з x людей і з підмножини A^- людей, незнайомих з ним. Будь-які двоє осіб з A^+ незнайомі (інакше вони утворюють «+»-трійку з x), тому $|A^+| \leq 2$ (інакше A^+ містить «–»-трійку). Будь-які двоє осіб з A^- знайомі (інакше вони утворюють «–»-трійку з x), тому $|A^-| \leq 2$ (інакше A^- містить «+»-трійку). Звідси $|A| = |A^+| + |A^-| + 1 \leq 5$. Таким чином, серед будь-яких 6 або більше осіб завжди знайдеться або троє попарно знайомих, або троє попарно незнайомих.

2. Нехай B — множина, яка не містить жодної «+»-трійки і жодної «–»-четвірки, x — довільна людина з B. Тоді множина B, крім x, складається з підмножини B^+ знайомих з x людей і з підмножини B^- людей, незнайомих з ним. Будь-які двоє осіб з B^+ незнайомі (інакше вони утворюють «+»-трійку з x), тому $|B^+| \leq 3$ (інакше B^+ містить «–»-четвірку). Множина ж B^- не може містити ні «–»-трійок (інакше разом з x вони утворять «–»-четвірку), ні «+»-трійок. Тому за пунктом а) $|B^-| \leq 5$. Тоді $|B| = |B^+| + |B^-| + 1 \leq 9$. Покладемо $|B| = 9$. Тоді для кожного елемента $|B^+| = 3$ і $|B^-| = 5$. Отже, кожна людина в B знайома рівно з трьома іншими людьми. Тоді загальна кількість пар знайомих людей в B дорівнює $\frac{3 \cdot 9}{2} = \frac{27}{2}$, що неможливо. Отже $|B| < 9$.

3. Наведемо приклад такої множини B з восьми осіб, позначивши вершинами людей, а факт знайомства ребрами.

□

17.11. *Вказівка.* а) Скористатися біномом Ньютона:

$$(\sqrt{2} + \sqrt[4]{3})^{100} = \sum_{k=0}^{100} C_{100}^{k} 2^{\frac{k}{2}} 3^{\frac{100-k}{4}},$$

звідки зрозуміло, що доданок буде раціональним лише тоді, коли k — парне, причому $100 - k \vdots 4$. Таких чисел 26.

б) *Відповідь:* 51. □

17.12. *Розв'язання.* Введемо події: A_3={число ділиться на 3}, A_4={число ділиться на 4}. Тоді за формулою включення-виключення кількість чисел від 1 до 2020, що націло діляться на 3 або 4:

$$N(A_3 \cup A_4) = N(A_3) + N(A_4) - N(A_3 \cap A_4) = 673 + 505 - 168 = 1010.$$

Але серед них є ті, що діляться і на 5. Їх потрібно виключити, а отже, необхідно обчислити кількість тих чисел від 1 до 2020, що націло діляться хоча б на одне з чисел: на 15 або на 20. Знову введемо події: A_{15}={число ділиться на 15}, A_{20}={число ділиться на 20}. Тоді

$$N(A_{15} \cup A_{20}) = N(A_{15}) + N(A_{20}) - N(A_{15} \cap A_{20}) = 134 + 101 - 33 = 202.$$

Таким чином, кількість чисел, що задовольняє умови задачі:

$$N(A_3 \cup A_4) - N(A_{15} \cup A_{20}) = 1010 - 202 = 808.$$

□

17.13. *Розв'язання.* Загальна кількість послідовностей довжини n, що складаються лише з цифр 0, 1 та 2, дорівнює 3^n. Введемо події: A_0={послідовність не містить цифру 0}, A_1={послідовність не містить цифру 1}, A_2={послідовність не містить цифру 2}. За формулою включення-виключення обчислимо кількість елементів у об'єднанні $A_1 \cup A_2 \cup A_3$:

$$N(A_0 \cup A_1 \cup A_2) = N(A_0) + N(A_1) + N(A_2) -$$
$$-N(A_0 \cap A_1) - N(A_0 \cap A_2) - N(A_1 \cap A_2) + N(A_0 \cap A_1 \cap A_2) =$$
$$= 3 \cdot 2^n - 3 \cdot 1^n + 0 = 3 \cdot 2^n - 3.$$

Тому кількість послідовностей довжини n, що містять кожну цифру хоча б один раз: $3^n - 3 \cdot 2^n + 3$. □

17.14. *Вказівка.* Задача аналогічна до задачі 17.13.

Відповідь:

$$m^n - C_m^1(m-1)^n + C_m^2(m-2)^n - \ldots + (-1)^m C_m^m \cdot 0^n.$$

□

17.15. *Вказівка.* Задача аналогічна до задачі 17.6.

Відповідь: 12. □

17.16. *Вказівка.* З умови випливає, що число не може містити цифру 0, а тому всі цифри числа вибираються з множини $\{1, 2, \ldots, 9\}$. При цьому цифри можуть повторюватися. Тому виберемо з множини $\{1, 2, \ldots, 9\}$ п'ять цифр, можливо з повтореннями. Кількість способів це зробити дорівнює кількості комбінацій з повтореннями з 9 по 5, тобто $\overline{C}_9^5 = C_{9+5-1}^5 = C_{13}^5 = 1287$. Далі розташувати вибрані цифри у порядку неспадання є єдиний спосіб.

Відповідь: $C_{13}^5 = 1287$. □

17.17. *Розв'язання.* За умовою задачі, будь-які 5 осіб не можуть відкрити сейф. Тому у них немає ключа від якогось замка. При цьому, будь-який інший член комісії має володіти цим ключем. Отже, потрібно встановити $C_9^5 = 126$ замків. 4 ключа від кожного замка віддаються деякій четвірці членів комісії, причому різні ключі роздаються різним четвіркам. Крім того, якщо зберуться будь-які 6 членів комісії, то серед них буде по одному представнику від кожної четвірки і вони зможуть відкрити всі замки.

В загальному випадку знадобиться C_n^{m-1} замків та $n - m + 1$ ключ до кожного з них. □

17.18. *Розв'язання.* Позначимо довільний номер $\overline{abcd}$. Нас цікавлять такі номери, що $a + b = c + d$. Будемо розглядати всі можливі суми $a + b$: 0, 1, 2, ..., 18.

Зауважимо, що номерів з сумою $a + b = 0$ та сумою $a + b = 18$ є по одному — це $\overline{0000}$ та $\overline{9999}$.

Розглянемо суму $a + b = 1$. В цьому випадку можливі лише такі види номерів: $\overline{01cd}$ та $\overline{10cd}$, де останні 2 цифри $\overline{cd}$ можуть складати одну з 2-х перших комбінацій — або $\overline{01}$ або $\overline{10}$. Отже, номерів з сумою $a + b = 1$ є всього $2^2 = 4$. Аналогічно для суми $a + b = 17$ — таких номерів теж $2^2 = 4$.

Розглянемо суму $a + b = 2$. В цьому випадку можливі лише такі варіанти: $\overline{02cd}$, $\overline{20cd}$ та $\overline{11cd}$, де останні 2 цифри $\overline{cd}$ можуть складати одну з 3-х перших комбінацій — або $\overline{02}$ або $\overline{20}$ або $\overline{11}$. Отже, номерів з сумою $a + b = 2$ є всього $3^3 = 9$. Аналогічно для суми $a + b = 16$ — таких номерів теж $3^3 = 9$.

І т.д. Очевидно, найбільша кількість номерів має суму $a + b = 9$. Дійсно, це номери виду $\overline{09cd}$, $\overline{90cd}$, $\overline{18cd}$, $\overline{81cd}$, $\overline{27cd}$, $\overline{72cd}$, $\overline{36cd}$, $\overline{63cd}$, $\overline{45cd}$, $\overline{54cd}$, де останні 2 цифри $\overline{cd}$ можуть складати одну з 10-и перших комбінацій — $\overline{09}$, $\overline{90}$, $\overline{18}$, $\overline{81}$, $\overline{27}$, $\overline{72}$, $\overline{36}$, $\overline{63}$, $\overline{45}$, $\overline{54}$. Отже, всього номерів з сумою $a + b = 9$ — $10^2 = 100$ штук.

Отже, кількість щасливих номерів:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + 9^2 + 10^2 + 9^2 + \ldots + 3^2 + 2^2 + 1^2 =$$

$$= 2(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 9^2) + 10^2 = 2 \cdot \frac{9 \cdot 10 \cdot 19}{6} + 100 = 670.$$

При підрахунку ми скористалися відомою формулою для суми квадратів перших n натуральних чисел:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

$\square$

Література

[1] Беркович Ф.Д., Федий В.С., Шлыков В.И. *Задачи студенческих математических олимпиад с указаниями и решениями: учебное пособие*, Ростов н/Д.: Феникс, 2008, 171 с.

[2] Булдигін В. В., Ільєнко А. Б., Орловський І. В., *Математичні олімпіади – 2012 : Методичні вказівки до розв'язання задач для студентів усіх форм навчання*, К.: НТУУ «КПІ», 2013, 42 с.

[3] Булдигін В. В., Ільєнко А. Б., Орловський І. В., *Математичні олімпіади – 2011 : Методичні вказівки до розв'язання задач для студентів усіх форм навчання*, К.: НТУУ «КПІ», 2012, 33 с.

[4] Булдигін В. В., Ільєнко А. Б., Орловський І. В., *Математичні олімпіади – 2010 : Методичні вказівки до розв'язання задач для студентів усіх форм навчання*, К.: НТУУ «КПІ», 2011, 36 с.

[5] Булдигін В. В., Ільєнко А. Б., Орловський І. В., *Математичні олімпіади – 2009 : Методичні вказівки до розв'язання задач для студентів усіх форм навчання та школярів*, К.: НТУУ «КПІ», 2010, 48 с.

[6] Булдигін В. В., Ільєнко А. Б., Орловський І. В., *Математичні олімпіади – 2008 : Методичні вказівки до розв'язання задач для студентів усіх форм навчання та школярів*, К.: НТУУ «КПІ», 2008, 40 с.

[7] Булдигін В.В., Гайдей В. А., Жук В.А., Орловський І. В., *Математичні олімпіади – 2007 : Методичні вказівки до розв'язання задач*, К.: НТУУ «КПІ», 2007, 28 с.

[8] Булдигін В. В., Кушніревич В. А., Шкабара О. С., Ясінський В. В., *Студентські математичні олімпіади. Збірник задач*, НТУУ «КПІ», Київ, 2002, 175 с.

[9] Виленкин Н.Я., *Индукция. Комбинаторика. Пособие для учителей*, М.: «Просвещение», 1976, 48 с.

[10] Вишенський В.А., Перестюк М.О. *Комбінаторика: перші кроки*, Кам'янець-Подільський: «Аксіома», 2010, 323 с.

[11] Дороговцев А.Я., *Математический анализ. Сборник задач*, К.: «Вища школа», 1987, 408 с.

[12] Пенцак Є.Я., Юрчишин А.С., *Функційні рівняння: методичний посібник*, Львів: Ред.-вид. відділ Львів. ун-ту, 1998, 112 с.

[13] Садовничий В.А., Подколзин А.С., *Задачи студенческих олимпиад по математике*, М.: «Наука», 1978, 208 с.

[14] Садовничий В.А., Григорян А.А., Конягин С.В. *Задачи студенческих математических олимпиад*, М.: Издательство московского университета, 1987, 310 с.

[15] Серпинский В., *250 задач по элементарной теории чисел*, М: Просвещение, 1968, 162 с.

[16] *Зарубежные математические олимпиады*. Под ред. И.Н. Сергеева, М: Наука. Гл. ред. физ.–мат. лит. 1987, 416 с.