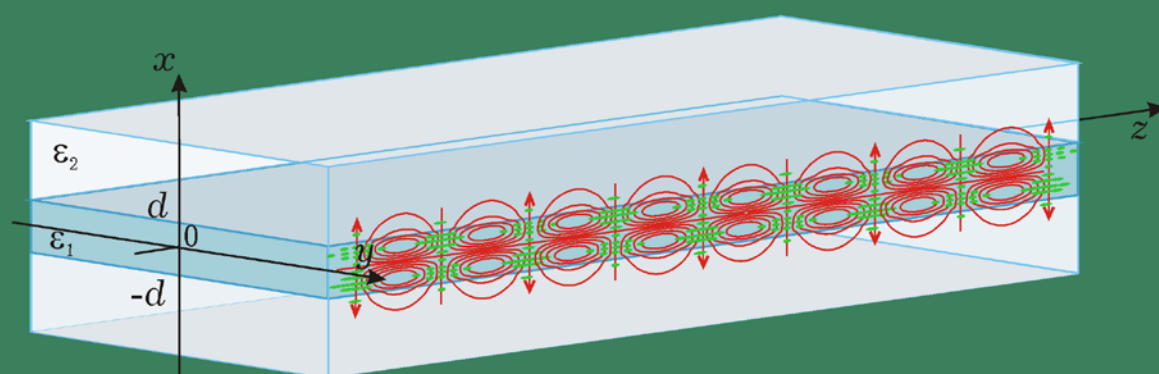


В.О.Москалюк, Т.А.Саурова

ТЕОРІЯ ПОЛЯ



Київ 2018

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

В. О. Москалюк, Т. А. Саурова

ТЕОРІЯ ПОЛЯ

*Затверджено Вченою радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як підручник для студентів,
які навчаються за спеціальністю 153 «Мікро- та наносистемна
техніка»,
спеціалізаціями «Електронні біомедичні системи і технології»,
«Інформаційні технології проектування в електроніці та
наносистемах», «Мікро- та наноелектронні прилади і пристрої»,
«Мікроелектронні інформаційні системи»*

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2018

Рецензенти: *Осинський В. І.*, д. т. н., професор, директор Центру оптоелектронних технологій НДІ Мікроприладів» НТК «ІМК» НАН України

Гончаров О. А., д.ф.-м.н., професор, головн. наук. співробітник інституту фізики НАНУ

Відповідальний редактор *В.І. Тимофєєв*, д-р.т.н., професор

Гриф надано Вченою радою КПІ ім. Ігоря Сікорського (протокол № 7 від 26.06.2018 р.)

Електронне мережне навчальне видання

Москалюк Володимир Олександрович, канд. техн. наук, професор

Саурова Тетяна Асадівна, канд. техн. наук

ТЕОРІЯ ПОЛЯ

Теорія поля [Електронний ресурс] : підручник для студ. спеціальності 153 «Мікро- та наносистемна техніка», спеціалізацій «Електронні біомедичні системи і технології», «Інформаційні технології проектування в електроніці та наносистемах», «Мікро- та наноелектронні прилади і пристрої», «Мікроелектронні інформаційні системи» / В. О. Москалюк, Т. А. Саурова; КПІ ім. Ігоря Сікорського. – Електронні текстові дані (1 файл: 8,43 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2018. – 244 с.

У даному посібнику представлені основи класичної макроскопічної теорії електромагнітного поля. розглянута система основних рівнянь теорії Максвелла. Розглянуто їх застосування для статичних, квазістаціонарних та височастотних електромагнітних процесів. Підбір матеріалу, використані приклади відповідають спрямованості на використання в електронній техніці. Третє видання доповнене описом нових типів хвилеводів та резонаторів.

Призначено для студентів напряму «Мікро- та наносистемна техніка», може бути корисною студентам інших напрямів і спеціальностей

© В. О. Москалюк, Т. А. Саурова, 2018

© КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2018

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА	5
1. СИСТЕМА РІВНЯНЬ ПОЛЯ	6
1.1. Рівняння Максвелла	7
1.2. Струм зміщення	11
1.3. Рівняння неперервності	13
1.4. Баланс електромагнітної енергії	15
1.5. Граничні умови	17
<i>Контрольні питання та вправи до розділу.....</i>	25
2. СТАТИЧНІ, СТАЦІОНАРНІ ТА КВАЗІСТАЦІОНАРНІ ПОЛЯ...	26
2.1. ЕЛЕКТРОСТАТИКА	26
2.1.1. Основні рівняння електростатики	26
2.1.2. Типи задач електростатики	29
2.1.3. Приклади розв'язку задач електростатики	31
2.1.4. Чисельний розрахунок електростатичних полів	50
2.2. МАГНІТОСТАТИКА	57
2.2.1. Основні рівняння магнітостатики	57
2.2.2. Приклади розрахунку магнітних полів	60
2.3. КВАЗІСТАЦІОНАРНІ ПОЛЯ ТА ЕЛЕКТРОННІ КОЛА	67
2.3.1. Умова квазістаціонарності	67
2.3.2. Найпростіші компоненти електронних кіл	68
2.3.3. Поля і електричні кола	73
<i>Контрольні питання та вправи до розділу.....</i>	76
3. ЗМІННІ ПОЛЯ. ХВИЛЬОВІ ПРОЦЕСИ	78
3.1. ОСНОВНІ РІВНЯННЯ	78
3.1.1. Рівняння Максвелла у комплексній формі	78
3.1.2. Граничні умови	80
3.1.3. Рівняння балансу енергії	80
3.2. ХВИЛЬОВЕ РІВНЯННЯ. ХВИЛЬОВА ФУНКЦІЯ	83
3.2.1. Хвильові рівняння – наслідки рівнянь Максвелла	83
3.2.2. Гармонійні хвилі. Основні параметри	86
3.2.3. Групова швидкість	88
3.3. ПЛОСКА ЕЛЕКТРОМАГНІТНА ХВИЛЯ	89
3.3.1. Розв'язок хвильових рівнянь	89
3.3.2. Поляризація електромагнітних хвиль	94
3.3.3. Параметри хвилі у різних середовищах	95
3.4. ХВИЛІ У ДОВГИХ ЛІНІЯХ	98
3.4.1. Телеграфні рівняння	99
3.4.2. Стоячі хвилі в лінії	103
3.4.3. Трансформація опору в лініях	110
<i>Контрольні питання та вправи до розділу.....</i>	112
4. ЕЛЕКТРОМАГНІТНІ ХВИЛІ БЛЯ ГРАНИЦІ РОЗДІЛУ	114
4.1. ВІДБИВАННЯ ЕЛЕКТРОМАГНІТНИХ ХВИЛЬ	114
4.2. ПРОХОДЖЕННЯ ХВИЛЬ ЧЕРЕЗ ШАР РЕЧОВИНИ	119

4.3 ПОХИЛЕ ПАДІННЯ ХВИЛЬ НА ГРАНИЦЮ РОЗДІЛУ	126
4.3.1. Поля біля границі розділу	127
4.3.2. Повне проходження хвилі, кут Брюстера	132
4.3.3. Повне внутрішнє відбивання	134
4.3.4. Відбивання від поверхні ідеального провідника	138
4.3.5. Площинний хвилевід	141
4.3.6. Відбивання від поверхні реальних металів	145
<i>Контрольні питання та вправи до розділу.....</i>	149
5. ХВИЛІ У ХВИЛЕВОДАХ	151
5.1. ОСНОВНІ ЗАКОНОМІРНОСТІ	151
5.1.1. Загальний вигляд розв'язку хвильових рівнянь	151
5.1.2. Дисперсія у хвилеводах	153
5.1.3. Типи хвиль у хвилеводах	156
5.1.4. Хвилі без дисперсії	157
5.2. ВИДИ ХВИЛЕВОДІВ	158
5.2.1. Прямокутний хвилевід	158
5.2.2. Одномодовий діапазон. Основна мода	162
5.2.3. Круглий трубчастий металевий хвилевід	166
5.2.4. Коаксіальний хвилевід	174
5.2.5. П- та Н-подібні хвилеводи	175
5.2.6. Діелектричні хвилеводи	177
5.2.7. Смушкові лінії передачі	184
5.3. ПЕРЕДАЧА ЕНЕРГІЇ ПО ХВИЛЕВОДУ	190
<i>Контрольні питання та вправи до розділу.....</i>	196
6. РЕЗОНАТОРИ	197
6.1. ЗАГАЛЬНІ ВЛАСТИВОСТІ	197
6.2. РЕЗОНАТОР ЯК ЗАКОРОЧЕНИЙ ВІДРІЗОК ХВИЛЕВОДУ	200
6.2.1. Граничні умови, умова резонансу	200
6.2.2. Розрахунок резонансних частот	201
6.3. ТИПИ РЕЗОНАТОРІВ	202
6.4. ДОБРОТНІСТЬ РЕЗОНАТОРІВ	218
6.4.1. Визначення добротності	218
6.4.2. Згасання енергії резонатора	221
6.4.3. Розрахунок добротності резонатора	223
6.5. ЗБУДЖЕННЯ ХВИЛЕВОДІВ І РЕЗОНАТОРІВ	226
<i>Контрольні питання та вправи до розділу.....</i>	234
<i>Додаток. Д. МАТЕМАТИЧНА ТЕОРІЯ ПОЛЯ</i>	235
1. Скалярні та векторні поля	235
2. Диференціальні оператори	236
3. Оператори Гамільтона та Лапласа	241
4. Деякі тотожності	241
5. Основні інтегральні теореми	242
РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА	243

ПЕРЕДМОВА

Курс «Теорія поля» - частина циклу професійної та практичної підготовки у навчальних планах бакалаврів електроніки. Мета цього курсу, по-перше, ознайомити студентів з фундаментальними закономірностями електромагнітних явищ, які базуються на системі рівнянь електромагнетизму, і сприяти створенню певного фізичного світогляду на багату різноманітними явищами дійсність, сформуванню набору простих фізичних моделей, за допомогою яких можна аналізувати більш складні ситуації, що зустрічаються в практиці фахівців з електронної техніки. По-друге, цей курс створює необхідну базу для цілого ряду наступних лекційних курсів у програмі підготовки бакалаврів електроніки, наприклад, з теорії електронних кіл, вакуумної і плазмової електроніки, твердотільної електроніки, квантової електроніки, циклу курсів з техніки і електроніки надвисоких частот і інших.

Дія будь-якого електронного приладу заснована на тій чи іншій взаємодії електронів з електромагнітним полем. Тому проблема створення компонентів електронної техніки включає не лише аналіз цієї взаємодії, але і розрахунок такого розподілу поля, який забезпечить потрібне функціонування приладу. Ці завдання взаємозв'язані, оскільки в загальному вигляді конфігурація поля залежить від характеру руху і розподілу зарядів, а їх поведінка, у свою чергу, від розподілу поля.

Важлива особливість підбору матеріалу курсу - спрямованість на підготовку фахівців з електронної техніки. Існуюча навчальна література, призначена зазвичай для підготовки фахівців з радіотехніки і зв'язку, розглядає електромагнітні поля в провідних і діелектричних середовищах, а напівпровідникові матеріали, найбільш поширені в електронній техніці, залишилися поза увагою. Крім того, в цьому курсі немає необхідності розглядати питання, пов'язані з поширенням електромагнітних хвиль в атмосфері і їх дифракцією, але необхідні фахівцям з радіотехніки і зв'язку.

Особливістю методу викладання матеріалу у цьому курсі на відміну від загальноприйнятих курсів фізики, де теорія поля розглядається на основі узагальнення окремих експериментальних фактів, є шлях від загального до часткового - від фундаментальних рівнянь електродинаміки до розв'язку окремих задач, що формують основні моделі теорії електромагнітного поля, використовувані в електронній техніці.

1. СИСТЕМА РІВНЯНЬ ПОЛЯ

Поняття електричного та магнітного поля вводять для характеристики сил взаємодії між зарядами. Розрізняють два види електричних сил, які діють на будь-який заряд q з боку інших зарядів та пропорційні даному заряду: $\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q[\mathbf{v} \times \mathbf{B}]$. Перша з них, що зветься силою Кулона, пропорційна напруженості електричного поля \mathbf{E} , інша – сила Лоренца, діє тільки на заряд, що рухається, і пропорційна векторному добутку швидкості його руху \mathbf{v} та індукції магнітного поля \mathbf{B} . З цього співвідношення і визначають звичайно \mathbf{E} як силу Кулона, що діє на одиничний заряд незалежно від його швидкості, а магнітну індукцію \mathbf{B} як силу Лоренца, яка діє також на одиничний заряд, що рухається з одиничною швидкістю, і спрямована перпендикулярно до векторів \mathbf{v} та \mathbf{B} . У загальному випадку вектори $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ та $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ – функції чотирьох змінних: трьох просторових координат та часу, тобто для характеристики силової дії на заряд треба знати шість скалярних функцій координат \mathbf{r} та часу t .

Для повної характеристики електромагнітного поля в довільному середовищі вказаної пари векторних функцій $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ та $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ недостатньо. Необхідно ще дві: $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ – вектор напруженості магнітного поля та $\mathbf{D}(\mathbf{r}, t)$ – вектор електричної індукції, які зв'язані з попередньою парою співвідношеннями:

$$\mathbf{B} = \mu\mu_0\mathbf{H}, \quad \mathbf{D} = \varepsilon\varepsilon_0\mathbf{E}. \quad (1.1)$$

Тут ε та μ – відповідно діелектрична та магнітна проникності середовища, $\varepsilon_0 = 10^{-9}/36\pi$ (Ф/м) і $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ (Гн/м) – відповідно діелектрична і магнітна сталі, причому $1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0} = c_0 = 3 \cdot 10^8$ (м/с), де c_0 – швидкість світла в вакуумі, а їх відношення визначає так званий хвильовий опір вакууму $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0} = 120\pi \approx 377$ (Ом). Необхідно також зазначити, що співвідношення (1.1) характеризують ізотропні середовища. Для *анізотропних* діелектрична чи магнітна проникності можуть бути різними для різних напрямків. У цьому випадку для характеристики середовища

використовують так звані тензори діелектричної та магнітної проникності середовища, що включають трійки параметрів $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$ та μ_x, μ_y, μ_z , які є коефіцієнтами пропорційності у скалярних співвідношеннях (1.1), а відповідні вектори \mathbf{B} та \mathbf{H} , чи \mathbf{D} та \mathbf{E} не співпадатимуть між собою за напрямком.

Для графічного наочного зображення електричного й магнітного полів використовують *силові лінії* (рис. 1,а), дотичні до яких вказують напрямок відповідного вектора, а густина ліній пропорційна його величині. Не менш наочним є спосіб «*векторного поля*», зображений на рис. 1,б, який є більш інформативним через те, що у дискретних вузлових точках можна визначити не тільки напрямок векторів поля, але у певному масштабі і їх величину.

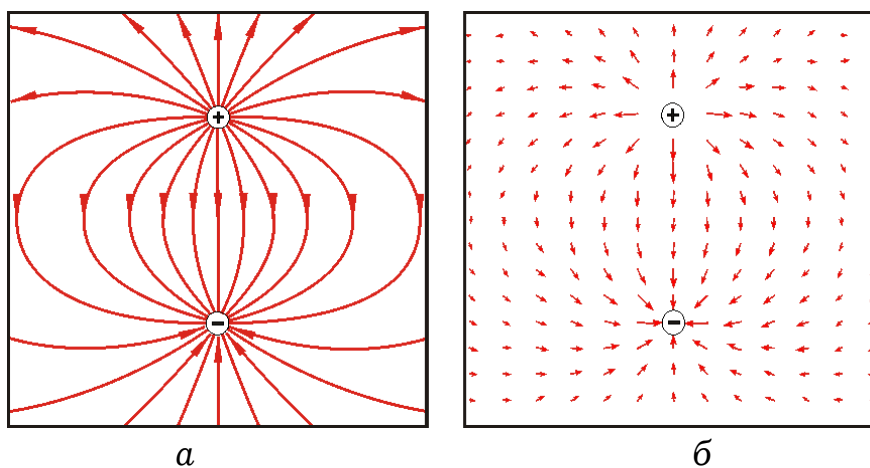


Рис. 1.1. Способи зображення векторних полів за допомогою силових ліній (а) та векторів для дискретного масиву точок (б)

Електричним та магнітним полям властивий *принцип суперпозиції*. Цей досить потужний принцип, який властивий польовій формі матерії, на відміну від речовинної, дозволяє незалежно розраховувати поля, що утворюються різними джерелами.

1.1. Рівняння Максвелла

Фундаментальною системою рівнянь, що описують електромагнітні поля, є рівняння Максвелла:

$$\text{rot}\mathbf{H} = \partial\mathbf{D}/\partial t + \mathbf{j}, \quad (1.2a)$$

$$\text{rot}\mathbf{E} = -\partial\mathbf{B}/\partial t, \quad (1.2б)$$

$$\text{div}\mathbf{D} = \rho, \quad (1.2в)$$

$$\text{div}\mathbf{B} = 0, \quad (1.2г)$$

де \mathbf{j} – густина струму провідності (А/м^2), $\mathbf{j} = \mathbf{e}_S \lim_{\Delta S \rightarrow 0} (\Delta i / \Delta S)$, Δi – струм, що протікає через елемент поверхні площею ΔS , перпендикулярний до ліній струму; \mathbf{e}_S – одиничний вектор нормалі до ΔS ; ρ – об’ємна густина заряду (Кл/м^3); $\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} (\Delta q / \Delta V_r)$; Δq – заряд, що знаходиться в об’ємі ΔV_r . Зауважимо, що величини ρ і \mathbf{j} – макроскопічні, які не враховують дискретність заряду та ліній струму. Саме тому теорія поля, що заснована на цих рівняннях, є *макроскопічною*. Вектор густини струму залежить від провідності середовища й пропорційний напруженості електричного поля

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}. \quad (1.3)$$

Це співвідношення відоме як *закон Ома у диференціальній формі*. Коефіцієнт пропорційності σ (См/м) – *питома електрична провідність* середовища, яка для анізотропних середовищ є тензорною величиною, що включає компоненти σ_x , σ_y , σ_z .

Рівняння (1.1) та (1.3) називають іноді *матеріальними рівняннями*, бо вони встановлюють зв’язок між деякими векторами, які входять в рівняння Максвелла, через параметри ϵ , μ та σ , що характеризують середовище.

Рівняння (1.2) – це система *диференціальних рівнянь* в частинних похідних, яка може бути розв’язана лише за додаткових умов, що визначають спосіб збудження полів або задають поля на границях області, що розглядається.

Іноді зручніше користуватися рівняннями Максвелла, які записані у формі *інтегральних співвідношень*. Для такого представлення всі члени першого і другого рівнянь (1.2) скалярно помножимо на вектор $d\mathbf{S}$ і проінтегруємо по поверхні S , обмеженій замкненим контуром l . Використовуючи потім теорему Стокса (див. Додаток до гл. 1) для заміни інтегралу по поверхні інтегралом по замкненому контуру (циркуляцією), одержимо

$$\begin{aligned} \oint_l \mathbf{H} d\mathbf{l} &= \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{D} d\mathbf{S} + \int_S \mathbf{j} d\mathbf{S} \\ \oint_l \mathbf{E} d\mathbf{l} &= - \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} d\mathbf{S} \end{aligned} \quad (1.4)$$

У правій частині цих рівнянь змінена послідовність диференціювання за часом і інтегрування по поверхні. Окрім того, оскільки визначений інтеграл по поверхні S вже не залежить від координат, частинна похідна за часом замінена на звичайну.

Якщо потім третє й четверте рівняння із (1.2) домножити на dV_r і проінтегрувати по об'єму V_r , обмеженому замкненою поверхнею S , то, скориставшись теоремою Остроградського-Гауса (див. додаток) для заміни інтеграла по об'єму інтегралом по замкненій поверхні (поток), одержимо

$$\begin{aligned} \oint_S \mathbf{D} d\mathbf{S} &= \int_{V_r} \rho dV_r \\ \oint_S \mathbf{B} d\mathbf{S} &= 0 \end{aligned} \quad (1.5)$$

Пари рівнянь (1.4) та (1.5) являють собою рівняння Максвелла в інтегральній формі.

Не має сенсу говорити про «виведення» рівнянь Максвелла з якихось більш загальних закономірностей, тому що якраз ці рівняння є найбільш фундаментальною системою рівнянь, яку має класична фізика для опису електромагнітних полів. Ця система була сформульована Максвеллом як узагальнення вже відомих законів електромагнетизму. Проілюструємо це кількома простими прикладами.

Приклад 1.1. Розглянемо прямий провідник, по якому протікає постійний ($\partial/\partial t = 0$) струм (рис. 1.2).

Навколо провідника виникає магнітне поле, яке може бути розраховане з першого рівняння Максвелла в інтегральній формі:

$$\oint_l \mathbf{H} dl = \int_S \mathbf{j} d\mathbf{S}.$$

Для інтегрування оберемо поверхню S , обмежену контуром l у вигляді кола з довільним радіусом r та центром на осі провідника і розташовану в площині,

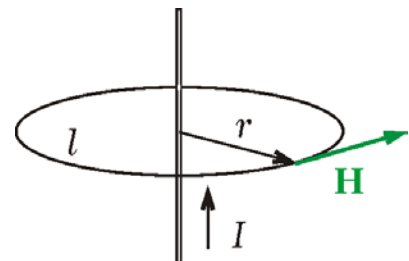


Рис. 1.2. Модель для розрахунку магнітного поля з осью симетрії навколо провідника зі струмом

перпендикулярній до осі провідника. Використовуючи очевидний факт осьової симетрії задачі, замінимо скалярний добуток векторів добутком їх довжин і винесемо H за знак інтеграла як величину, сталу вздовж контура інтегрування. Тоді $\oint_l dl = 2\pi r$, а інтеграл у правій частині дорівнюватиме повному струму I , який перетинає поверхню S , тому $H = I/2\pi r$. Дане співвідношення є виразом відомого закону для знаходження магнітного поля для провідника зі струмом.

Приклад 1.2. У просторі, де є магнітне поле, розглянемо деякий дротяний контур l (рис. 1.3). Відповідно до другого рівняння Максвелла в інтегральній формі

$$\oint_l \mathbf{E} d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} d\mathbf{S}$$

під дією змінного у часі магнітного поля у просторі виникає таке електричне поле, що його циркуляція дорівнює швидкості зміни інтегралу у правій частині, який є потоком Φ вектора магнітної індукції через поверхню (і не залежить від її форми), обмежену контуром. Для обраного контуру інтеграл у лівій частині – це електрорушійна сила (ЕРС), що виникає у контурі, причому $\text{ЕРС} = -d\Phi/dt$, що є виразом закону електромагнітної індукції, встановленого Фарадеєм.

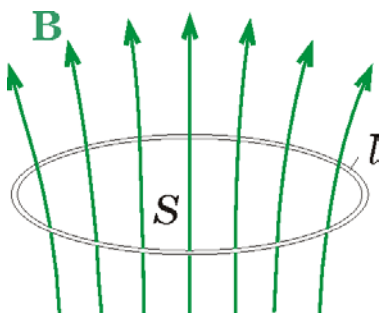


Рис. 1.3. До розрахунку ЕРС під дією змінного магнітного поля

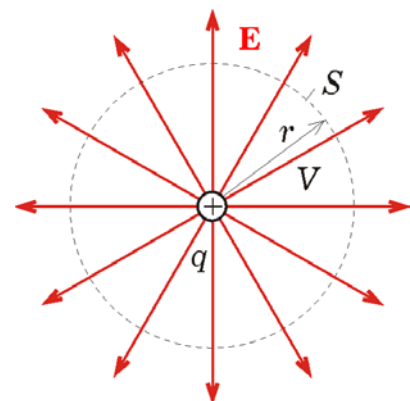


Рис. 1.4. Сферично симетричне поле точкового заряду

Приклад 1.3. Розглянемо точковий заряд q , навколо якого існує електричне поле, причому відповідно до третього рівняння Максвелла в інтегральній формі

$$\epsilon\epsilon_0 \oint_S \mathbf{E} d\mathbf{S} = \int_{V_r} \rho dV_r.$$

Це рівняння, яке іноді називають теоремою Гаусса, вказує на те, що потік вектора напруженості електричного поля, помножений на $\epsilon\epsilon_0$, через замкнену поверхню, дорівнює повному заряду, що міститься в об'ємі, обмеженому цією поверхнею. Якщо за поверхню інтегрування вибрати сферу (рис. 1.4) з центром у місці розташування заряду, то очевидно,

що через центральну симетрію вектори \mathbf{E} та $d\mathbf{S}$ будуть колінеарними, а величина напруженості постійна по всій поверхні інтегрування. Тому інтеграл у лівій частині дорівнює добутку E на поверхню сфери $4\pi r^2$, а інтеграл у правій частині – заряду q і $E = q/4\pi\epsilon\epsilon_0 r^2$. Якщо в електричне поле заряду q внести

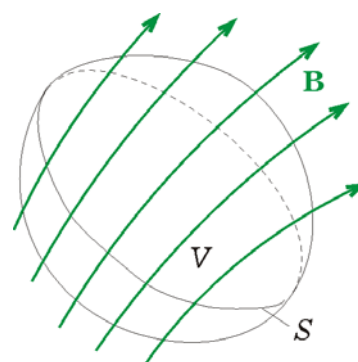


Рис. 1.5. Потік вектора магнітної індукції через замкнену поверхню

пробний заряд q' , то діюча на нього сила $F = q'E = qq'/4\pi\epsilon\epsilon_0 r^2$. Даний вираз являє собою запис закону Кулона про взаємодію між зарядами.

Приклад 1.4. Четверте рівняння Максвелла $\oint_S \mathbf{B} d\mathbf{S} = 0$ показує, що потік вектора магнітної індукції через замкнену поверхню дорівнює нулю, тобто вхідний потік дорівнює вихідному (рис. 1.5). Це означає, що магнітні силові лінії завжди замкнені і не мають ні початку, ні кінця, як це може бути з електричним полем, силові лінії якого зазвичай починаються або закінчуються на зарядах.

1.2. Струм зміщення

У розглянутих елементарних прикладах поза увагою залишився перший доданок у правій частині першого рівняння Максвелла. Для того, щоб зрозуміти його зміст, проаналізуємо ще одну ситуацію.

Приклад 1.5. Розглянемо дві пластини конденсатора (рис. 1.6), у колі якого протікає струм I . Виберемо контур інтегрування l у вигляді замкненої лінії, що охоплює провідник. Якщо поверхня S_1 , яка обмежена цим контуром, перетинає провідник, то

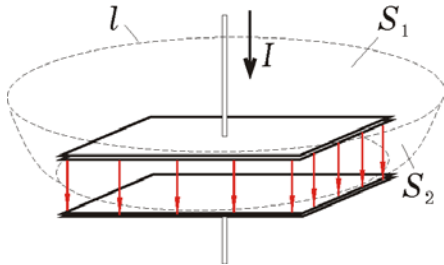


Рис. 1.6. Різні поверхні інтегрування спираються на той самий контур

$$\oint_l \mathbf{H} d\mathbf{l} = \int_{S_1} \mathbf{j} d\mathbf{S} = I.$$

Якщо виберемо іншу поверхню S_2 , обмежену цим же контуром, але яка проходить між пластинами конденсатора, то

$$\oint_l \mathbf{H} d\mathbf{l} = \frac{d}{dt} \int_{S_2} \mathbf{D} d\mathbf{S}.$$

Однак результат не повинен залежати від вибору поверхні інтегрування, тому праві частини останніх виразів мають бути рівними. Для цього і вводять поняття *струму зміщення*, яке є дещо незвичним, бо воно не пов'язане з переміщенням зарядів між пластинами, а тільки із зміною зарядів, що накопичуються на пластинах і викликають зміну напруженості електричного поля. У такому випадку струм провідності в колі конденсатора замикається струмом зміщення між його пластинами:

$$I_{\text{зм}} = \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{D} d\mathbf{S}. \quad (1.6)$$

Густина струму зміщення

$$\mathbf{j}_{\text{зм}} = \partial \mathbf{D} / \partial t. \quad (1.7)$$

Струм зміщення можливий тільки за наявності нестационарних процесів в електричних полях, що змінюються у часі. Поняття струму зміщення вперше було введено Максвеллом і стало досить важливим кроком у розумінні властивостей електромагнітного поля. Доцільність такого поняття стає зрозумілою при розгляді рівняння неперервності.

1.3. Рівняння неперервності

З рівнянь Максвелла витікає ще одне важливе співвідношення. Для того, щоб його одержати, подіємо оператором div на всі члени першого рівняння в (1.2). Оскільки $\text{div}(\text{rot } \mathbf{H})$ тотожно дорівнює нулю (див. додаток), то

$$\text{div}(\partial \mathbf{D} / \partial t) + \text{div} \mathbf{j} = 0.$$

Змінюючи порядок диференціювання за часом і за просторовими координатами і враховуючи, що $\text{div} \mathbf{D} = \rho$, одержуємо

$$\partial \rho / \partial t + \text{div} \mathbf{j} = 0. \quad (1.8)$$

Цей вираз, який називається *рівнянням неперервності*, або *законом збереження заряду*, показує, що зміна густини просторового заряду в даній точці можлива лише за рахунок розбіжності (дивергенції) струму. Остання назва стає особливо зрозумілою, якщо записати рівняння неперервності в інтегральній формі. Для цього помножимо обидва його доданки на dV_r і проінтегруємо за деяким об'ємом V_r , обмеженим замкненою поверхнею S . Використовуючи тому теорему Остроградського-Гаусса, одержуємо

$$\frac{d}{dt} \int_{V_r} \rho dV_r + \oint_S \mathbf{j} d\mathbf{S} = 0. \quad (1.9)$$

Сенс отриманого виразу полягає в тому, що швидкість зміни заряду усередині поверхні S дорівнює потоку вектора \mathbf{j} , тобто повному струму, через цю поверхню.

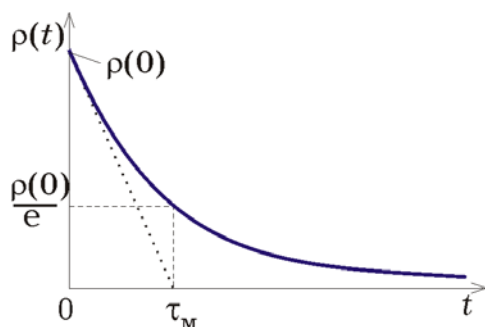
Більш наочним стає рівняння неперервності, якщо записати його в дещо іншій формі. Підставляючи в (1.8) $\text{div} \mathbf{D}$ замість ρ , змінюючи порядок диференціювання та враховуючи вираз (1.7) для струму зміщення, одержимо

$$\text{div}(\mathbf{j} + \mathbf{j}_{\text{зм}}) = 0. \quad 1.8a)$$

Така форма запису рівняння неперервності означає, що подібно до силових ліній магнітного поля (див. приклад 4) лінії *повного* (провідності + зміщення) струму є неперервними та замкненими.

Розглянемо ще два окремих випадки, які ілюструють зміст рівняння неперервності і мають важливе значення в електронній техніці.

Приклад 1.6. Якщо в однорідному середовищі, яке характеризується питомою електропровідністю, якимось чином створити об'ємний заряд, то очевидно, що за рахунок струмів провідності цей заряд буде «розпливатися», доки не розподілиться по всьому об'єму рівномірно, тобто до зникнення створюваного ним електричного поля. Це явище називається *релаксацією*, тобто поверненням до стану рівноваги. Проведемо кількісний аналіз процесу релаксації об'ємного заряду за допомогою рівняння неперервності, для чого замість густини струму підставимо його значення з (1.3), а замість $\text{div}\mathbf{E}$ – величину $\rho/\epsilon\epsilon_0$ із (1.1) (сталі величини $\epsilon\epsilon_0$ і σ можна винести за знак дивергенції). У результаті одержуємо диференціальне рівняння $\partial\rho/\partial t + \sigma\rho/\epsilon\epsilon_0 = 0$, розв'язком якого є експоненціальна функція (рис. 1.7):



$$\rho(t) = \rho(0)\exp(-t/\tau_M).$$

Рис.1.7. Експоненціальний спад густини просторового заряду в провідному середовищі

Величина $\tau_M \equiv \epsilon\epsilon_0/\sigma$ характеризує швидкість спадання об'ємного заряду й називається *максвелловим часом релаксації*. Треба мати на увазі, що за час $\Delta t = \tau_M$ об'ємний заряд зменшується в $e \approx 2,7$ рази. Приблизно вважається, що об'ємний заряд повністю зникає протягом часу, який дорівнює $(3...5)\tau_M$. В металах з високою провідністю цей час дуже

малий, порядку $10^{-17}...10^{-18}$ с. В діелектриках в залежності від їх провідності він дорівнює $10^{-2}...10^{-6}$ с. Описане явище спостерігається, наприклад, у такій простій ситуації, як розряд конденсатора за рахунок струмів провідності, що протікають через ізолюючий діелектрик. Час розряду визначається параметрами діелектрика – діелектричною проникністю та питомою провідністю середовища.

Приклад 1.7. Розглянемо вузол електричного кола (рис. 1.8), в якому сходяться декілька провідників, по яких протікають постійні

струми I_1, \dots, I_n . Оточимо даний вузол деякою замкненою поверхнею S і скористаємося рівнянням неперервності (1.9). Оскільки за *постійних* струмів заряд усередині поверхні не накопичується і не зникає, перший доданок дорівнює нулю. Другий доданок дорівнює повному струму, який протікає через поверхню S , тому

$$\sum_{k=1}^n I_k = 0 . \quad (1.10)$$

Це співвідношення зветься першим *законом Кірхгофа* і є одним з основних в теорії електронних кіл. Треба пам'ятати, що цей закон, строго кажучи, справедливий тільки для постійних струмів. Використання його для кіл змінного струму є наближеним і можливе за деяких умов, про які мова буде далі.

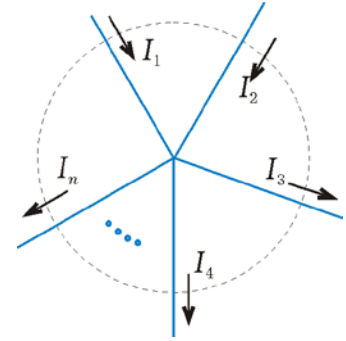


Рис.1.8. Сума постійних струмів через вузол дорівнює нулю

1.4. Баланс електромагнітної енергії

Для висвітлення питання про види електромагнітної енергії та її видозмінення зробимо спочатку деякі формальні перетворення. Помноживши скалярно перше з рівнянь Максвелла (1.2) на \mathbf{E} , а друге на \mathbf{H} , віднімемо від другого перше і перенесемо всі члени рівняння в ліву частину:

$$\mathbf{H} \text{rot} \mathbf{E} - \mathbf{E} \text{rot} \mathbf{H} + \mathbf{H}(\partial \mathbf{B} / \partial t) + \mathbf{E}(\partial \mathbf{D} / \partial t) + \mathbf{jE} = 0.$$

Перші два доданки можна замінити (див. додаток) дивергенцією векторного добутку \mathbf{E} на \mathbf{H} . Третє й четверте, вносячи перший співмножник під знак похідної та враховуючи (1.1), подамо у вигляді (скалярний добуток вектора самого на себе дорівнює квадрату його довжини): $\partial(\mu\mu_0 H^2 / 2) / \partial t$ і $\partial(\epsilon\epsilon_0 E^2 / 2) / \partial t$. Тоді

$$\text{div}[\mathbf{E} \times \mathbf{H}] + \partial(\mu\mu_0 H^2 / 2 + \epsilon\epsilon_0 E^2 / 2) / \partial t + \mathbf{jE} = 0. \quad (1.11)$$

Даний вираз – рівняння балансу електромагнітної енергії в диференціальній формі. У ньому векторний добуток $[\mathbf{E} \times \mathbf{H}] \equiv \mathbf{\Pi}$ називається *вектором Пойнтінга* і має розмірність $\text{В} \cdot \text{А} / \text{м}^2 = \text{Дж} / (\text{с} \cdot \text{м}^2) = \text{Вт} / \text{м}^2$. Фізичний зміст вектора Пойнтінга – це електромагнітна енергія, що проходить крізь одиничну площадку за одиницю часу, і яка називається густиною потоку потужності. Доданки під знаком похідної по часу вимірюються у джоулях на кубічний метр ($\text{Дж} / \text{м}^3$), їх фізичний зміст – енергія в одиниці об'єму або *густина енергії* відповідно магнітного й електричного полів.

Останній доданок вимірюється також у ватах на кубічний метр ($\text{Вт} / \text{м}^3$) і характеризує втрати електромагнітної енергії на нагрівання. Величина $\mathbf{jE} = \sigma E^2$ дорівнює кількості джоулевого тепла, яке виділяється в одиниці об'єму за одиницю часу.

Баланс електромагнітної енергії стає наочнішим, якщо записати (1.11) в інтегральній формі. Для цього всі члени (1.11) помножимо на dV_r і проінтегруємо по деякому об'єму V_r , обмеженому замкненою поверхнею S . Скориставшись теоремою Остроградського-Гауса, перейдемо для першого доданку до інтегрування по поверхні і одержимо

$$\oint_S \mathbf{\Pi} d\mathbf{S} + \frac{d}{dt} \left[\int_{V_r} \left(\frac{\varepsilon \varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{\mu \mu_0 H^2}{2} \right) dV_r \right] + \int_V \mathbf{jE} dV_r = 0. \quad (1.12)$$

Можна навести багато прикладів, в яких перетворення енергії описуються даним рівнянням балансу. Наприклад, у замкненому об'ємі, потік енергії через стінки якого відсутній, електромагнітна енергія може тільки зменшуватись ($\partial/\partial t < 0$) за рахунок втрат на нагрівання (третій доданок). Якщо електромагнітна енергія залишається сталою ($\partial/\partial t = 0$), це означає, що усередину даного об'єму через поверхню існує потік енергії, який покриває втрати на нагрівання.

При розгляданні подібних прикладів може виникнути питання, звідки береться електромагнітна енергія, на яке важко дати відповідь без досить глибокого аналізу різноманітних процесів *перетворення* енергії. Але для формального уявлення про джерела енергії у рівнянні балансу їх можна змодельовати за допомогою так званих *сторонніх джерел* струму або джерел напруги. У першому випадку в третьому доданку під \mathbf{j} треба розуміти суму густини

струму провідності і густини *стороннього струму* ($\mathbf{j} + \mathbf{j}_{\text{ст}}$). Аналогічно можна замінити \mathbf{E} сумою ($\mathbf{E} + \mathbf{E}_{\text{ст}}$), якщо зручніше подавати джерело енергії як джерело напруги. У такому разі фізичний зміст останнього доданку розширюється: він характеризує усі види перетворення енергії – не тільки перетворення електромагнітної енергії в теплову, але й перетворення інших видів енергії в електромагнітну.

1.5. Граничні умови

У розрахунках електричних та магнітних полів зустрічаються ситуації, коли силові лінії проходять через межі розділу середовищ. Безпосередній розв'язок диференціальних рівнянь Максвелла у цьому випадку неможливий і, як правило, рівняння розв'язують для кожного середовища окремо, а одержані розв'язки «зшивають» на границі розділу. Для цього використовують так звані *граничні умови*, які являють собою співвідношення між значеннями векторів поля по обидва боки від границі розділу.

Необхідно зауважити, що граничні умови не є чимось додатковим до рівнянь Максвелла. Вони виводяться з цих рівнянь на границі, яка вважається різкою, де функції розподілу полів не є неперервними, і тому в цій точці значення просторових похідних є невизначеними. Зазвичай граничні умови записують у вигляді чотирьох співвідношень – по два для електричних і магнітних полів: окремо для нормальних і дотичних складових.

Розглянемо спочатку виведення цієї умови для дотичних складових електричного поля з третього рівняння Максвелла

$$\oint_S \mathbf{D} d\mathbf{S} = \int_{V_r} \rho dV_r.$$

Як об'єм інтегрування візьмемо циліндр (рис. 1.9), з висотою Δh і площею основ ΔS , що лежать по обидві сторони від границі розділу середовищ. Розміри Δh і ΔS мають бути настільки малими, щоб у межах цього об'єму поля можна було вважати незмінними. Інтеграл у лівій частині представимо як суму трьох інтегралів: по верхній і нижній торцевих поверхнях і по бічній поверхні циліндра. З огляду на

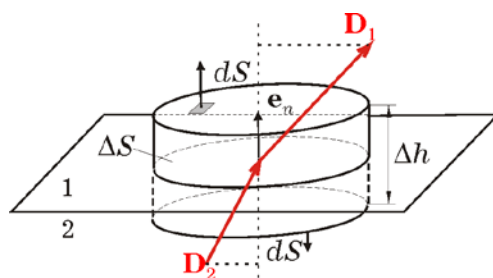


Рис.1.9. Вибір об'єму інтегрування при встановленні граничних умов для нормальних складових

взаємне розташування векторів $d\mathbf{S}$ і орта нормалі \mathbf{e}_n до границі розділу, можна записати

$$\mathbf{e}_n(\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2)\Delta S + \int_{S_{\text{бок}}} \mathbf{D}d\mathbf{S} = \Delta q, \quad (1.13a)$$

або

$$\mathbf{e}_n(\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) + \int_{S_{\text{бок}}} \mathbf{D}d\mathbf{S} / \Delta S = \Delta q / \Delta S. \quad (1.13b)$$

Тут Δq – весь заряд, зосереджений усередині обраного об'єму. Якщо потім зменшувати висоту циліндра ($\Delta h \rightarrow 0$), наближаючи його верхній і нижній торець до границі розділу, то очевидно, що потік вектора \mathbf{D} через бічну поверхню також буде прямувати до 0, як і заряд у правій частині, якщо густина заряду в розглянутому об'ємі має скінченні значення. У цьому випадку

$$D_{1n} - D_{2n} = 0. \quad (1.14)$$

де D_{1n} і D_{2n} – проекції векторів \mathbf{D}_1 і \mathbf{D}_2 на нормаль до границі розділу.

Однак, зустрічаються ситуації, коли заряд можна вважати зосередженим у дуже тонкому (макроскопічно – у нескінченно тонкому) шарі біля границі розділу і можна ввести поняття поверхневого заряду з *поверхневою густиною*

$$\rho_s = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \Delta q / \Delta S, \text{ (Кл/м}^2\text{)}. \quad (1.15)$$

Тоді у разі стягування торців циліндра до границі розділу ($\Delta h \rightarrow 0$) права частина (1.13a) буде прямувати до фіксованої величини, рівної $\rho_s \Delta S$, а рівність (1.13b) прийме вигляд

$$\mathbf{e}_n(\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) = \rho_s, \quad (1.16)$$

або в скалярній формі

$$D_{1n} - D_{2n} = \rho_s. \quad (1.17)$$

Останні співвідношення і являють собою одне з граничних умов для електричного поля й означають, що на границі розділу нормальна складова вектора електричної індукції має розрив, який

дорівнює поверхневій густині заряду. Якщо ж на границі немає заряду, то нормальна складова неперервна і $D_{1n} = D_{2n}$, або для векторів напруженості поля $\epsilon_1 E_{1n} = \epsilon_2 E_{2n}$.

Слід зазначити, що уявлення про нескінченно тонкий шар поверхневого заряду є ідеалізацією, прийнятною лише з макроскопічної точки зору. Надалі будуть розглянуті більш точні моделі, що дають уявлення про реальні розподіли заряду в приповерхневих шарах (див. *приклад 2.7*).

Звернувшись до четвертого рівняння Максвелла в інтегральній формі $\oint_S \mathbf{B} d\mathbf{S} = 0$, яке за структурою відрізняється від третього тільки нульовою правою частиною, можна подібним чином одержати, що на границі розділу двох середовищ

$$\mathbf{e}_n(\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) = 0, \quad (1.18)$$

тобто *проекції векторів магнітної індукції на нормаль до границі неперервні* $B_{1n} = B_{2n}$, а проекції векторів напруженості магнітного поля можуть відрізнятися через різні магнітні проникності середовищ: $\mu_1 H_{1n} = \mu_2 H_{2n}$.

Для одержання співвідношень між дотичними складовими векторів поля на границі розділу двох середовищ (горизонтальна площина на рис. 1.10) проведемо довільну площину S через орт нормалі \mathbf{e}_n до неї. Вона буде перпендикулярною до площини розділу, а напрямок орта \mathbf{e}_t уздовж лінії перетину ніяк не пов'язаний з орієнтацією векторів поля. У цій площині оберемо контур інтегрування у вигляді прямокутника, що лежить по обидві сторони від границі розділу, зі сторонами Δl і Δh настільки малими, щоб у межах площадки $\Delta S = \Delta l \Delta h$ поля можна вважати незмінними.

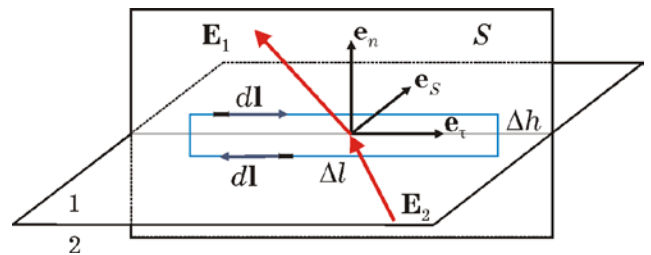


Рис.1.10. Вибір контуру інтегрування при встановленні граничних умов для дотичних складових

Проводячи інтегрування другого рівняння Максвелла в інтегральній формі $\oint_l \mathbf{E} d\mathbf{l} = -d(\int_S \mathbf{B} d\mathbf{S}) / dt$ по цьому контуру,

представимо циркуляцію вектора \mathbf{E} у лівій частині як суму інтегралів по верхній, нижній і бічних сторонах прямокутника. З огляду на сталість векторів поля уздовж контуру, а також взаємну орієнтацію орта \mathbf{e}_τ і векторів $d\mathbf{l}$, можна записати

$$\mathbf{e}_\tau(\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2)\Delta l + \int_{l_{\text{бок}}} \mathbf{E}d\mathbf{l} = -\mathbf{e}_S(d\mathbf{B}/dt)\Delta h\Delta l, \quad (1.19a)$$

або

$$\mathbf{e}_\tau(\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) + \int_{l_{\text{бок}}} \mathbf{E}d\mathbf{l} / \Delta l = -\mathbf{e}_S(d\mathbf{B}/dt)\Delta h, \quad (1.19b)$$

Стягуючи верхню і нижню сторони контуру до границі розділу ($\Delta h \rightarrow 0$), одержимо, що і третій доданок і права частина в останній рівності стають знехтувально малими, і воно приймає вигляд

$$\mathbf{e}_\tau(\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) = 0. \quad (1.20)$$

Оскільки напрямок орта \mathbf{e}_τ на границі розділу було обрано довільно, то проекція *різницевого* вектора напруженості електричного поля на *будь-який* напрямок дорівнює 0. Зокрема, це значить, що проекції векторів \mathbf{E}_1 і \mathbf{E}_2 на площину розділу середовищ однакові:

$$E_{1\tau} = E_{2\tau}, \quad (1.21)$$

а різницевий вектор матиме тільки нормальну складову, котра відповідно до (1.17) може бути тільки за наявності поверхневого заряду. Тому

$$[(\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) \times \mathbf{e}_n] = 0. \quad (1.22)$$

Останні три співвідношення можуть вважатися рівноцінними і являють собою граничну умову для дотичної складової вектора напруженості електричного поля.

Граничну умову для дотичних складових магнітного поля можна одержати за такою ж методикою, як і попередню, але скориставшись першим рівнянням Максвелла в інтегральній формі $\oint_l \mathbf{H}d\mathbf{l} = d(\int_S \mathbf{D}d\mathbf{S}) / dt + \int_S \mathbf{j}d\mathbf{S}$. Інтегруючи його по контуру, такому ж, як і на рис. 1.10, одержимо співвідношення

$$\mathbf{e}_\tau(\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2)\Delta l + \int_{l_{\text{бок}}} \mathbf{H}d\mathbf{l} = \mathbf{e}_S(d\mathbf{D}/dt)\Delta h\Delta l + \mathbf{e}_S\mathbf{j}\Delta h\Delta l, \quad (1.23a)$$

або

$$\mathbf{e}_\tau(\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) + \int_{l_{\text{бок}}} \mathbf{H}d\mathbf{l} / \Delta l = \mathbf{e}_S(d\mathbf{D}/dt)\Delta h + \mathbf{e}_S\mathbf{j}\Delta h, \quad (1.23б)$$

які відрізняється від (1.19) заміною \mathbf{E} на \mathbf{H} , \mathbf{B} на $-\mathbf{D}$ і тим, що у правій частині є другий доданок, який представляє струм провідності Δi , що протікає через площадку $\Delta S = \Delta h\Delta l$.

При стягуванні контуру до лінії Δl на границі розділу обидва доданки правої частини через скінченні значення векторів \mathbf{D} і \mathbf{j} стають знехтувально малими і

$$\mathbf{e}_\tau(\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = 0, \quad (1.24)$$

тобто дотичні складові вектора напруженості магнітного поля по обидві сторони від границі розділу однакові.

Однак, виняток складає ідеалізована ситуація, коли весь струм провідності протікає у нескінченно тонкому шарі біля границі розділу. Для такого *поверхневого струму* зручно ввести поняття *лінійної густини*

$$\mathbf{j}_s = \mathbf{e}_j \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \Delta I / \Delta l, \quad (\text{А/м}), \quad (1.25)$$

де орт \mathbf{e}_j збігається з напрямком ліній струму, а Δi – величина струму, що проходить по поверхні і перетинає відрізок Δl , перпендикулярний лініям струму (рис. 1.11).

У цьому випадку в разі стягування контуру інтегрування до границі розділу другий доданок у правій частині (1.23а) залишається незмінним, бо весь струм через площадку ΔS дорівнюватиме

$$\Delta I = \int_{\Delta S} \mathbf{j}d\mathbf{S} = \mathbf{e}_S \mathbf{j}_s \Delta l \quad (1.26)$$

Цей струм не залежатиме від розміру Δh . а вираз (1.23б) прийме вигляд

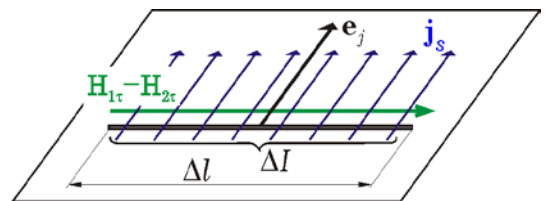


Рис.1.11. Поверхневий струм викликає розрив напруженості магнітного поля

$$\mathbf{e}_\tau(\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = \mathbf{e}_s \mathbf{j}_s. \quad (1.27)$$

Якщо площину S на рис. 1.10 вибрати перпендикулярною до ліній струму, так щоб орт \mathbf{e}_s збігався з \mathbf{e}_j , то (1.27) прийме більш просту форму запису

$$\mathbf{e}_\tau(\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = j_s. \quad (1.28a)$$

або

$$H_{1\tau} - H_{2\tau} = j_s. \quad (1.28b)$$

Ці співвідношення означають, що у разі протікання вздовж границі розділу поверхневого струму *дотичні складові векторів напруженості магнітного поля відрізняються на величину, рівну лінійній густині струму*. За напрямком ця різниця перпендикулярна лініям струму (рис. 1.11).

У підсумку співвідношення (1.17), (1.21) для електричного поля і (1.18), (1.28) для магнітного являють собою граничні умови, записані для нормальних і дотичних складових. Їх можна представити й у векторній формі. Якщо вважати, що поле в першому середовищі відоме, то вектор напруженості електричного поля у другому середовищі

$$\mathbf{E}_2 = \mathbf{e}_\tau E_{1\tau} + \mathbf{e}_n(\varepsilon_1 E_{1n}/\varepsilon_2 - \rho_s/\varepsilon_2 \varepsilon_0). \quad (1.29)$$

Це співвідношення показує, що дотична складова напруженості залишається такою ж, як і в першому середовищі. Нормальна складова змінюється, по-перше, за рахунок зміни діелектричної проникності речовини і, по-друге, за рахунок поля поверхневого заряду, якщо такий має місце на границі розділу. Він змінює нормальну складову вектора електричної індукції відповідно до (1.17) на величину ρ_s . Треба відзначити, що в (1.20) напрямок орта \mathbf{e}_τ на границі у принципі може бути будь-яким, але в (1.29) він повинен розташовуватися уздовж проекції \mathbf{E}_1 на границю розділу.

Для магнітного поля співвідношення (1.18) і (1.27) між векторами \mathbf{H}_1 і \mathbf{H}_2 на границі розділу також можна представити у векторній формі

$$\mathbf{H}_2 = \mathbf{e}_\tau H_{1\tau} + \mathbf{e}_n \mu_1 H_{1n}/\mu_2 + [\mathbf{e}_n \times \mathbf{j}_s]. \quad (1.30)$$

Звідси видно, що нормальна складова напруженості магнітного поля змінюється відповідно до зміни магнітної проникності

середовищ. Дотична складова залишається незмінною, якщо на границі немає поверхневих струмів. У протилежному випадку вектори \mathbf{H}_1 і \mathbf{H}_2 відрізняються на величину, що відповідає напруженості магнітного поля, створюваного поверхневими струмами. Величина цього розриву дорівнює лінійній густині струму, а напрямок визначається ортом векторного добутку $[\mathbf{e}_j \times \mathbf{e}_n]$.

Використовуючи наведені граничні умови, розглянемо дві прості моделі, що описують поля біля поверхні *ідеального провідника* і мають велике значення для розуміння подальшого матеріалу.

Приклад 1.8. Які особливості електричного поля біля поверхні ідеального металу? Для відповіді на це питання треба виходити з того, що якщо електрична провідність металу прямує до нескінченності, то усередині нього електричне поле має бути відсутнім. Але тоді з граничних умов (1.17) та (1.21) відразу витікає, що дотична складова поля над поверхнею дорівнює нулю, а *вектор напруженості електричного поля буде перпендикулярним до поверхні* (рис. 1.12) і *пропорційним поверхневій густині заряду* $E_1 = E_n = \rho / \epsilon \epsilon_0$. Цей висновок спрощено розповсюджується і на звичайні метали.



Рис.1.12. Електричне поле на поверхні ідеального металу створюється поверхневим зарядом і є перпендикулярним до неї

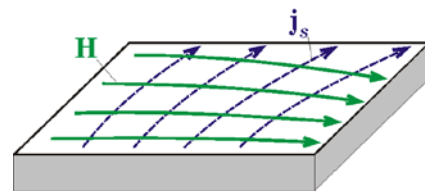


Рис.1.13. Струм на поверхні ідеального металу створює дотичне до неї магнітне поле

Приклад 1.9. Які особливості високочастотного магнітного поля біля поверхні ідеального металу? Як і в попередньому прикладі, основою для відповіді є той факт, що високочастотне поле в середину ідеального металу не проникає, тобто його магнітна складова дорівнює нулю навіть у немагнітних металах. Це означає, що нормальна складова вектора також дорівнює нулю, тому *магнітне поле буде дотичним до поверхні і перпендикулярним до ліній струму, а його напруженість дорівнюватиме поверхневій густині струму* (рис. 1.13):

$$H_1 = H_\tau = j_s.$$

Розглянемо ще один приклад, який показує, як використовуються граничні умови біля границі розділу двох середовищ.

Приклад 1.10. Нехай треба розрахувати напрямок та величину електричного поля у слюді ($\epsilon = 7$, $\sigma = 10^{-17}$ См/м), якщо біля її поверхні у повітрі напруженість поля дорівнює 10^3 В/м, а силові лінії направлені під кутом 45° до поверхні.

Значення питомої електричної провідності показує, що слюда – хороший діелектрик, тому зовнішнє поле не викликає на її поверхні

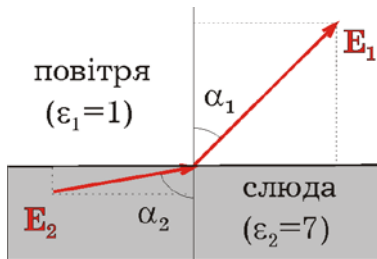


Рис. 1.14. Зміна напрямку і довжини вектора електричного поля на межі діелектричних середовищ

наведеного заряду ($\rho_s = 0$).

Використовуючи позначення на рис. 1.14, запишемо граничні умови для нормальної ($\epsilon_1 E_{1n} = \epsilon_2 E_{2n}$) і дотичної ($E_{1\tau} = E_{2\tau}$) складових електричного поля по обидва боки від границі. Оскільки $E_{1n} =$

$E_1 \cos \alpha_1 \approx 707$ В/м, то $E_{2n} = E_{1n} / \epsilon_2 \approx 101$ В/м, а $E_{2\tau} = E_{1\tau} = E_1 \sin \alpha_1 \approx 707$ В/м.

Звідси маємо $E_2 = \sqrt{E_{2n}^2 + E_{2\tau}^2} = 714$ В/м;

$\alpha_2 = \arctg(E_{2\tau} / E_{2n}) = 82^\circ$. Зауважимо, що із збільшенням діелектричної проникності

кут нахилу вектора напруженості поля зростає.

Цей факт використовують для формулювання *наближених граничних умов* при моделюванні електричних полів у напівпровідникових приладах. Найбільш вживані напівпровідникові матеріали мають діелектричну проникність, що значно перевищує 1 ($\epsilon_{Ge} = 16$, $\epsilon_{Si} = 12$, $\epsilon_{GaAs} = 13$). Через те, що нормальна складова напруженості у напівпровіднику обернено пропорційна його діелектричній проникності ($E_{2n} = E_{1n} / \epsilon_2$), а дотична не змінюється ($E_{1\tau} = E_{2\tau}$), наближено можна вважати $E_{2n} \approx 0$. Тобто для розрахунку розподілу електричного поля всередині напівпровідникових приладів приймають, що на їх вільних границях нормальна складова напруженості поля відсутня.

Контрольні питання та вправи до розділу

1.1. Дайте визначення усім операторам, а також способам їх знаходження, та фізичним величинам у рівняннях Максвелла.

1.2. Запишіть систему рівнянь Максвелла у різних формах (диференціальній, інтегральній, комплексній) та покажіть, як з них можна отримати основні закони електромагнетизму.

1.3. Сформулюйте визначення струму зміщення й покажіть, як це поняття об'єднує рівняння Максвелла в єдину систему рівнянь електромагнітного поля.

1.4. З рівнянь поля отримайте різні форми рівняння неперервності струму й покажіть на прикладах, для чого воно може бути використане.

1.5. Охарактеризуйте фізичний зміст кожного доданку у рівнянні балансу електромагнітної енергії, звернувши увагу на фізичний зміст вектора Пойнтинга та доцільність введення сторонніх джерел.

1.6. На основі загальної форми граничних умов опишіть ситуацію (поля, струми, заряди), яка виникає в разі наявності біля поверхні ідеального металу електричного та магнітного поля.

1.7. Виходячи з загальної форми граничних умов, поясніть, на чому ґрунтується наближеність граничної умови на поверхні напівпровідника: відсутність нормальної до його поверхні складової вектора електричного поля.

2. СТАТИЧНІ, СТАЦІОНАРНІ ТА КВАЗІСТАЦІОНАРНІ ПОЛЯ

У цьому розділі розглядатимемо поля, для яких можна знехтувати зміною їх у часі (статичні та стаціонарні), або ці зміни дуже повільні (квазістаціонарні). Головна особливість таких полів впливає з рівнянь Максвелла, якщо в них прийняти $\partial/\partial t = 0$. У цьому випадку повна система рівнянь поділяється на дві окремі системи

для електричних полів:

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \mathbf{E} &= 0, \\ \operatorname{div} \mathbf{D} &= \rho,\end{aligned}$$

для магнітних полів:

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \mathbf{H} &= \mathbf{j}, \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0.\end{aligned}\tag{2.1}$$

Такий поділ означає, що *статичні електричні та магнітні поля не залежать одне від одного і їх можна розглядати окремо.*

2.1. ЕЛЕКТРОСТАТИКА

2.1.1. Основні рівняння електростатики

Електростатика – це розділ теорії електромагнітного поля, який вивчає електричні поля, утворені нерухомими зарядами. Зрозуміло, що таку ситуацію треба розглядати лише як ідеалізовану, коли відсутнє перенесення заряду, тобто струми провідності, а таке, у свою чергу, можливе тільки для ідеальних діелектричних середовищ ($\sigma = 0$). У реальних ситуаціях статичними вважають такі поля, напруженість яких не змінюється суттєво протягом часу спостереження, тому рівняння електростатики безпосередньо виходять з другого й третього рівнянь Максвелла, якщо в них прийняти $\partial/\partial t = 0$:

диференціальна форма

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \mathbf{E} &= 0, \\ \operatorname{div} \mathbf{D} &= \rho,\end{aligned}$$

інтегральна форма

$$\begin{aligned}\oint_l \mathbf{E} d\mathbf{r} &= 0 \\ \oint_s \mathbf{D} d\mathbf{S} &= \oint_{V_r} \rho dV_r\end{aligned}\tag{2.2}$$

Перше з цих рівнянь означає, що електростатичне поле є «безвихровим», або *потенціальним*, тому що для нього, використовуючи тотожність $\text{rot grad } f(\mathbf{r}) \equiv 0$ (див. Додаток 1) можна ввести деяку скалярну величину $V(\mathbf{r})$, яка називається *електростатичним потенціалом*, і таку, що

$$\mathbf{E} = -\text{grad } V(\mathbf{r}). \quad (2.3)$$

Для з'ясування фізичного змісту потенціалу розглянемо роботу з переміщення заряду q в електростатичному полі між точками 1 і 2:

$$A = \int_1^2 \mathbf{F} d\mathbf{r} = q \int_1^2 \mathbf{E} d\mathbf{r}$$

Підінтегральний вираз з урахуванням (2.3) є повним диференціалом $-dV$, оскільки

$$\mathbf{E} d\mathbf{r} = E_x dx + E_y dy + E_z dz = -\left(\frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz \right) = -dV(x, y, z).$$

Тому

$$A = -q \int_1^2 dV = q(V_1 - V_2). \quad (2.4)$$

Звідси видно, що чітко визначений *фізичний зміст має різниця потенціалів*, яка дорівнює роботі з переміщення одиничного додатнього заряду ($q = +1$) між точками 1 і 2. Причому значення *потенціалу може бути визначене з точністю до деякого постійного доданку*, тому що заміна V на $V + \text{const}$ нічого не змінює. Якщо обрати початок відліку потенціалу, наприклад, в точці 2 ($V_2 = 0$), то поняття потенціалу набуває визначеності:

$$V(\mathbf{r}) = -\int_0^{\mathbf{r}} \mathbf{E} d\mathbf{r}. \quad (2.4a)$$

Потенціал даної точки \mathbf{r} є роботою з переміщення одиничного додатнього заряду з цієї точки у точку, де потенціал дорівнює нулю. У фізиці зазвичай нульовим приймають потенціал нескінченно віддаленої точки. У техніці таким вважають або

потенціал земної поверхні, або потенціал корпусу приладу, або потенціал спільної точки різних джерел живлення в електронних колах.

Треба відзначити, що результат інтегрування в (2.4) не залежить від траєкторії переміщення заряду між точками 1 і 2, а тільки від значень потенціалів у них. Звідси випливає, що *робота зовнішніх сил з переміщення заряду по замкненій траєкторії дорівнює 0*.

Важливою властивістю електростатичного поля є те, що під час вільного руху зарядженої частки її *повна енергія залишається незмінною*. Щоб це довести, помножимо скалярно обидві частини рівняння руху частки $d(m\mathbf{v})/dt = q\mathbf{E}$ на вектор швидкості \mathbf{v} і врахуємо, що $\mathbf{v}d(m\mathbf{v}) = d(mv^2/2) = dE_k$, а $q\mathbf{E}\mathbf{v} = q\mathbf{E}d\mathbf{r}/dt = -qdV/dt = -dU/dt$, де E_k – кінетична, а $U = qV$ – потенціальна енергія заряду q . Отже,

$$d(E_k + U)/dt = 0, \quad (2.5)$$

і зміна кінетичної енергії можлива тільки за рахунок відповідної зміни потенціальної.

Потенціал – скалярна функція координат, і його визначення є більш легкою задачею, ніж визначення напруженості поля, яка є векторною величиною і вимагає знання трьох скалярних (її проєкцій) функцій. Тому для розрахунку електростатичного потенціалу використовують звичайно друге рівняння (2.1), яке з урахуванням (1.1) та (2.2) у разі використання символічного оператора ∇ (див. Додаток 1) приймає вигляд

$$\nabla^2 V = -\rho/\epsilon\epsilon_0. \quad (2.6)$$

Це рівняння називається *рівнянням Пуассона*. Воно дозволяє знайти розподіл потенціалу в деякій області простору, якщо в ній відомий розподіл об'ємної густини заряду. Якщо в просторовій області, що розглядається, об'ємний заряд відсутній, розподіл потенціалу підпорядковується так званому *рівнянню Лапласа*:

$$\nabla^2 V = 0. \quad (2.7)$$

Іноді буває зручним використовувати рівняння Пуассона для вектора індукції електричного поля у формі

$$\nabla^2 \mathbf{D} = \text{grad } \rho. \quad (2.8)$$

яку можна отримати, якщо подіяти оператором grad на рівняння (1.2а), прийнявши до уваги тотожність $\text{grad div } \mathbf{D} \equiv \nabla^2 \mathbf{D}$ (див. додаток 1), дійсну для електростатичних полів, коли $\text{rot } \mathbf{E} = 0$.

2.1.2. Типи задач електростатики

Безпосередній розрахунок просторового розподілу напруженості електричного поля можна проводити за допомогою третього рівняння Максвелла або в інтегральній формі (теорема Гауса), або в диференціальній: з рівняння (1.2) чи з (2.8). Теорему Гауса зручно використовувати лише за деяких відносно простих розподілів поля, що мають ту чи іншу симетрію (прикладі 1.3, 2.1).

Істотно спрощує розрахунок поля використання поняття потенціалу, тому що знаходження просторового розподілу векторної функції $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ зводиться до знаходження тільки однієї скалярної функції $V(\mathbf{r})$ і потім за необхідності до визначення її градієнта відповідно до (2.3).

Формально можна виділити два типи задач, що зустрічаються у розрахунках електростатичних полів. Перший полягає у знаходженні такого розподілу зарядів у просторі $\rho(\mathbf{r})$, який забезпечує необхідний розподіл потенціалу $V(\mathbf{r})$. Це можна просто зробити відповідно до рівняння Пуассона (2.2) повторним диференціюванням функції $V(\mathbf{r})$ по координатах.

Більш складним є другий тип задач, коли для заданого у просторі розподілу зарядів необхідно знайти розподіл поля. У цьому випадку результат можна одержати інтегруванням рівняння Пуассона. У принципі це рішення може бути отримане у загальному вигляді. Для цього скористаємося *принципом суперпозиції*, узявши за основу розподіл потенціалу навколо точкового заряду у вигляді $V(\mathbf{r}) = q/4\pi\epsilon\epsilon_0 r$. Якщо початок координат не збігається з місцем розташування заряду, то $V(\mathbf{r}) = q/4\pi\epsilon\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|$, де \mathbf{r}_0 – координата місця розташування заряду, а \mathbf{r} – поточна координата довільної точки, у якій розраховується поле. Очевидно, що за наявності в просторі великої кількості зарядів q_i ($i = 1 \dots N$) потенціал можна знайти підсумовуванням

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{0i}|}.$$

Звідси легко перейти до неперервного розподілу заряду $\rho(\mathbf{r})$ в об'ємі V_r , якщо замінити q_i на $\rho(\mathbf{r})dV_r$, а підсумовування на інтегрування по координатах розташування зарядів (штриховані змінні):

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \int_{V_r'} \frac{\rho(r')dV_r'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (2.9)$$

Даний вираз є розв'язком рівняння Пуассона у загальному вигляді. Однак процедура інтегрування в (2.9) може виявитися складнішою, ніж розв'язок рівняння Пуассона. Тим більше, що задавати просторове розташування зарядів буває дуже складно. Наприклад, у тих випадках, коли поля створюються металевими електродами з відомими потенціалами на них, розподіл зарядів по їхній поверхні до розрахунку поля як правило ще невідомий.

У практичних конструкціях поля зазвичай можуть створюватися як системою електродів, так і зарядами в міжелектродному просторі. Якщо власними полями зарядів можна знехтувати, то розрахунок зводиться до інтегрування рівняння Лапласа з граничними умовами у вигляді відомих потенціалів на електродах (так звана крайова задача). Для таких задач існує єдина функція, що задовольняє рівнянню Лапласа і граничним умовам. Якщо ж між електродами існує просторовий заряд з відомим розподілом $\rho(\mathbf{r})$, то необхідно вирішувати рівняння Пуассона з заданою правою частиною.

Однак для електроніки найбільш характерні так називані *самоузгоджені задачі*. Вони мають місце, коли в міжелектродному просторі існують заряди, що рухаються (так звані рухливі носії заряду), а їхні власні поля співмірні з полями, які створюються зовнішніми джерелами. У такому разі не можна заздалегідь знати густину заряду $\rho(\mathbf{r})$ у рівнянні Пуассона, вона залежить від розподілу результуючого поля, що у свою чергу залежить від просторового розподілу зарядів. У цьому випадку необхідно узгоджено, тобто як систему, розв'язувати рівняння Пуассона й у тій чи іншій формі рівняння руху зарядів, яке описує сталий розподіл заряду. Підсумком розв'язку таких самоузгоджених задач є відомі розподіли потенціалу і густини заряду в просторі.

2.1.3. Приклади розв'язку задач електростатики

Математично розв'язання електростатичної задачі за відомих потенціалів на провідниках зводиться до знаходження функції, що задовольняє рівнянню Пуассона й приймає на границі області задане значення. Ця задача називається *задачею Діріхле*.

У більшості випадків розв'язання електростатичних задач зустрічає значні труднощі, і знайти аналітичний розв'язок рівнянь Пуассона або Лапласа вдається лише в окремих випадках з порівняно простою геометричною конфігурацією провідників. Не існує єдиного методу розв'язання електростатичних задач, і для різних типів застосовуються спеціальні засоби й методи розв'язання.

Розглянемо декілька прикладів розв'язання рівнянь електростатики. Їх детальний розв'язок наведено не тільки для ознайомлення з найпростішими моделями розподілу полів, до яких зводиться багато реальних ситуацій, а й з метою ознайомлення з *основними етапами розрахунку* електростатичних полів:

- вибором фізичної моделі, що включає припустиму ідеалізацію конфігурації електродів і зручне розташування відповідної системи координат;
- формуванням граничних умов на основі умови задачі;
- записом і розв'язанням основного рівняння (рівняння Лапласа або для середовища з об'ємним зарядом – рівняння Пуассона), а для задач з рухливими носіями зарядів – відповідною самоузгодженою системою рівнянь;
- знаходженням сталих інтегрування з граничних умов, аналізом одержаних результатів та, за необхідності, більш точного розв'язку задачі, зняттям деяких припущень з наступним повторним рішенням.

Приклад 2.1. Поле зарядженого провідника. Нехай необхідно розрахувати розподіл електричного поля, що виникає навколо зарядженого провідника, якщо задано його заряд. У разі вибору ідеальної моделі у вигляді нескінченно довгого і тонкого провoda з заданим зарядом ρ_l на одиницю довжини зручно скористатися теоремою Гаусса, як у прикладі 1.3. Обираючи поверхнею інтегрування співвісний із проводом циліндр з довільним радіусом r і довжиною Δl (рис. 2.1), можемо скористатися осьовою симетрією задачі. Силові лінії електричного поля, радіально розходячись від поверхні провoda, будуть колінеарні з вектором $d\mathbf{S}$ на бічній поверхні циліндра і перпендикулярні на його торцевих

поверхнях. Тому потік вектора \mathbf{D} через поверхню циліндра складатиметься тільки з потоку через бічну поверхню і дорівнюватиме $2\pi r\Delta l D$. З іншого боку, заряд усередині циліндра зосереджений на провіднику і дорівнює $\rho_l \Delta l$. З їхньої рівності одержуємо з урахуванням напрямку для вектора напруженості електричного поля

$$\mathbf{E}(r) = \mathbf{e}_r \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0 r} = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\mathbf{r}}{|r|^2}. \quad (2.10)$$

У декартових координатах ($\mathbf{e}_r = \mathbf{e}_x x/r + \mathbf{e}_y y/r$):

$$\mathbf{E}(x, y) = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \left(\mathbf{e}_x \frac{x}{x^2 + y^2} + \mathbf{e}_y \frac{y}{x^2 + y^2} \right). \quad (2.11)$$

Просторовий розподіл потенціалу знаходиться інтегруванням (2.11)

$$V(r) = -\int \mathbf{E} d\mathbf{r} = -\frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \ln r + C. \quad (2.12)$$

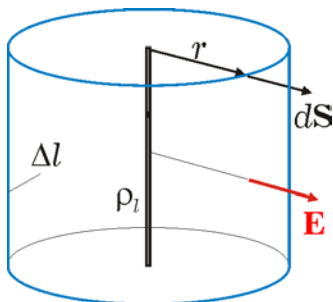


Рис. 2.1. Вибір об'єму і поверхні інтегрування для розрахунку поля зарядженої нитки визначається осью симетрії задачі

У декартових координатах ($r = \sqrt{x^2 + y^2}$):

$$V(x, y) = -\frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \ln \sqrt{x^2 + y^2} + C. \quad (2.13)$$

Константа інтегрування C може бути знайдена, якщо задати потенціал у деякій точці. Але треба зазначити, що в даній моделі відокремленого нескінченно тонкого проводу не існує точки простору, де зручно було б вибрати потенціал рівним 0.

Приклад 2.2. Поле двох заряджених провідників. Для розрахунку розподілу потенціалу в просторі біля двох паралельних

різномірно заряджених (із заданим зарядом $+\rho_l$ та $-\rho_l$ на одиницю довжини) провідників нескінченної довжини зручно скористатися *методом суперпозиції*. Для цього оберемо розташування декартової системи координат, як позначено на рис. 2.2, а, і запишемо вирази (2.13) для кожного провідника, змістивши їх на відстань $\pm d$ відповідно:

$$V_+(x, y) = -\frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \ln \sqrt{x^2 + (y - d)^2} + C_+,$$

$$V_-(x, y) = +\frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \ln \sqrt{x^2 + (y + d)^2} + C_-$$
(2.14)

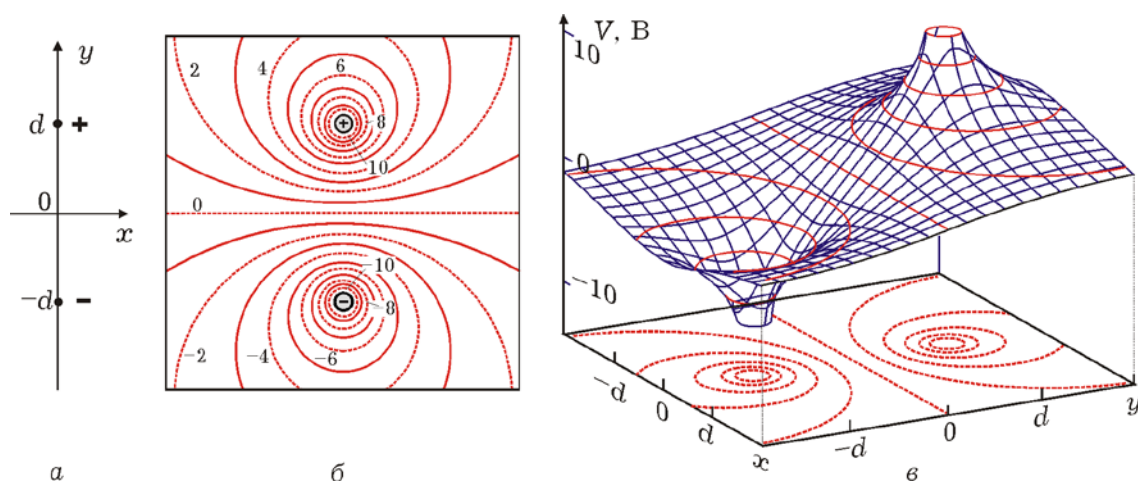


Рис. 2.2. Поле двох різномірно заряджених провідників (а) зручно представляти у вигляді екіпотенціальних ліній (б), що являють собою лінії рівної «висоти» на потенціальній функції $V(x, y)$ (в). Розподіл напруженості електричного поля зручно зображувати у вигляді силових ліній або векторного поля (рис. 1.1)

Тут індекси \pm відповідають знакові заряду провідника. Результуюче поле знаходиться підсумовуванням цих виразів, причому загальну константу $C_+ + C_-$ зручно вибрати рівною 0, якщо прийняти нульовим потенціал у точці $y = 0$:

$$V(x, y) = \frac{\rho_l}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{x^2 + (y + d)^2}{x^2 + (y - d)^2}.$$
(2.15)

Цей вираз дозволяє знайти потенціал будь-якої точки простору через заряд провідників. Розподіл потенціалу зручно зображувати за допомогою ліній рівного потенціалу або

еквіпотенціалей (рис. 2.2, б), які є лініями постійного рівня на «тривимірній» функції $V(x, y)$, зображеній на рис. 2.2, в. Рівняння i -ї еквіпотенціалі просто отримати з останнього виразу, якщо в ньому прийняти замість $V(x, y)$ фіксований потенціал V_i :

$$V_i = \frac{\rho_l}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{x^2 + (y + d)^2}{x^2 + (y - d)^2}. \quad (2.16)$$

Позначивши для стислості запису $2\pi\epsilon_0 V_i / \rho_l \equiv \alpha$, це рівняння можна представити у вигляді

$$x^2 + (y - d/\text{th}\alpha)^2 = (d/\text{sh}\alpha)^2. \quad (2.17)$$

Звідси видно, що еквіпотенціальні лінії являють собою кола з радіусом $d/\text{sh}\alpha$, зміщені назовні від точок $\pm d$ на відстань $d/\text{th}\alpha$ (рис. 2.2, б).

Отримані результати придатні, строго кажучи, тільки для нескінченно тонких провідників. Для проводів скінченного перетину можна скористатися наступним прийомом. Якщо задано радіус проводів a і потенціали на них $\pm V_0$, то можна сумістити поверхні проводів з еквіпотенціалами $V_i = \pm V_0$, радіус яких $d/\text{sh}\alpha_0 = a$. Звідси можна встановити зв'язок між потенціалом проводу і зарядом на ньому. Обмежуючись для спрощення випадком тонких проводів ($d \gg a$), коли $\alpha_0 \gg 1$, $\text{th}\alpha_0 \approx 1$ і $\text{sh}\alpha_0 \approx \exp(\alpha_0/2) = d/a$, одержимо

$$\rho_l = 2\pi\epsilon_0 V_0 / \ln(2d/a), \quad (2.18)$$

а розподіл потенціалу (2.15) запишемо у вигляді:

$$V(x, y) = \frac{V_0}{2 \ln(2d/a)} \ln \frac{x^2 + (y + d)^2}{x^2 + (y - d)^2}. \quad (2.19)$$

З (2.18) виходить ще один важливий результат: коефіцієнт пропорційності між зарядом на проводах ρ_l і напругою $2V_0$ між ними є ємністю проводів одиничної довжини або *погонною ємністю*:

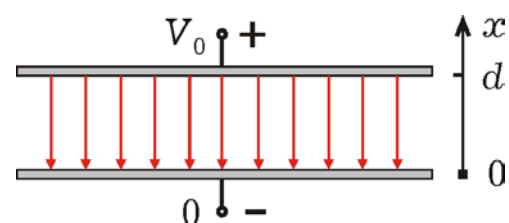
$$C_0 = \pi\epsilon_0 / \ln(2d/a), \quad (2.20)$$

Для більш товстих провідників отримані результати можна уточнити, якщо відстань між проводами збільшити у відповідності до зміщення еквіпотенціалей $\pm V_0$.

Приклад 2.3. Поле у плоскому конденсаторі. Нехай треба розрахувати розподіл електростатичного поля й потенціалу між пластинами плоского конденсатора. Розглянемо (рис. 2.3) ідеалізовану модель плоского конденсатора у вигляді паралельних нескінченних пластин, що дає можливість не враховувати крайові ефекти і вважати задачу одновимірною. Розмістимо вісь x перпендикулярно до пластин, обравши початок координат на пластині з меншим потенціалом, який приймемо рівним нулю: $V(0) = 0$. Тоді друга пластина, розташована на відстані d , буде мати потенціал $V(d) = V_0$, який дорівнює прикладеній між пластинами різниці потенціалів. Оскільки просторовий заряд між пластинами відсутній, задача зводиться до одновимірного рівняння Лапласа: $d^2V/dx^2 = 0$, розв'язок якого має вигляд $dV/dx = C_1$ і $V(x) = C_1x + C_2$. Використання сформульованих граничних умов дозволяє знайти сталі інтегрування: $C_2 = 0$ та $C_1 = V_0/d$. Отож, потенціал лінійно зростає від однієї пластини до другої: $V(x) = V_0x/d$, а коефіцієнт пропорційності чисельно дорівнює напруженості електричного поля $E = V_0/d$. У векторній формі $\mathbf{E} = -\mathbf{e}_x V_0/d$.

У розглянутій задачі напруженість поля не залежить від координат, і таке поле називають *однорідним*.

Рис.2.3. Поле між пластинами плоского конденсатора (без враховування крайових ефектів) однорідне, тобто не залежить від просторових координат



Приклад 2.4. Поле у циліндричному конденсаторі. Розглянемо аналогічну задачу для циліндричного конденсатора (рис. 2.4), який також умовно будемо вважати нескінченно довгим, щоб не враховувати крайових ефектів. На відміну від приклада 2.1 розглянемо розв'язок цієї задачі не за допомогою теореми Гаусса, а інтегруючи рівняння Лапласа. За даної конфігурації електродів зручно скористатися циліндричною системою координат з віссю z , що співпадає з віссю циліндра. Оскільки очевидно, що $\partial/\partial z = 0$

і $\partial/\partial\phi = 0$, рівняння Лапласа (вираз для оператора ∇^2 у циліндричних координатах див. у додатку 1) прийме вигляд

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} \left(r \frac{dV}{dr} \right) = 0$$

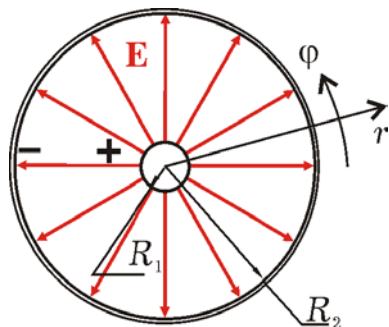


Рис. 2.4. Поле циліндричного (коаксіального) конденсатора однорідне по довжині і полярному куту й спадає в радіальному напрямку

Оскільки r величина змінна, то нулю дорівнює похідна, а вираз у дужках сталий, тому $dV/dr = C_1/r$ і $V(r) = C_1 \ln(r) + C_2$. Прийmemo потенціал зовнішнього циліндра $V(R_2) = 0$, тоді потенціал внутрішнього $V(R_1)$ дорівнюватиме прикладеній різниці потенціалів V_0 . Використовуючи ці умови як граничні для знаходження сталих інтегрування, одержуємо $C_1 = V_0/\ln(R_2/R_1)$, $C_2 = -C_1 \ln R_1$.

Отже, потенціал у циліндричному конденсаторі змінюється за логарифмічним законом:

$$V(r) = V_0 \frac{\ln(R_2/r)}{\ln(R_2/R_1)}, \quad (2.21)$$

а напруженість поля спадає обернено пропорційно відстані від центру

$$\mathbf{E} = -\mathbf{e}_r \frac{dV}{dr} = \mathbf{e}_r \frac{V_0}{\ln(R_2/R_1)} \cdot \frac{1}{r}. \quad (2.22)$$

Тут корисно зазначити, що отримані розподіли поля збігаються з результатами прикладу 2.1 для зарядженої нитки, однак тут константи інтегрування отримали визначеність через зручність задання граничних умов.

Для розрахунку ємності між електродами коаксіального конденсатора необхідно встановити зв'язок між зарядом, наприклад, на внутрішньому провіднику та його потенціалом. З цією метою скористаємося третім рівнянням Максвелла в інтегральній формі

(1.15). Поверхнею інтегрування виберемо циліндричну поверхню S , яка співпадає з поверхнею внутрішнього електрода довжиною Δl . Оскільки на ній вектори \mathbf{E} та $d\mathbf{S}$ колінеарні і значення вектора $\mathbf{D}(R_1) = \varepsilon\varepsilon_0\mathbf{E}(R_1)$ однакове у всіх точках, то інтегрування зводиться до перемноження $D(R_1) = \varepsilon\varepsilon_0V_0/R_1 \ln(R_2/R_1)$ та площі циліндричної поверхні $S = 2\pi R_1\Delta l$. Цей добуток за теоремою Гаусса дорівнює заряду $\Delta q = \rho_l\Delta l$ на відрізку внутрішнього електрода довжиною Δl . Із цієї рівності легко визначити коефіцієнт пропорційності між зарядом на одиниці довжини $\rho_l = \Delta q/\Delta l$ внутрішнього електрода та потенціалом V_0 на ньому:

$$C_0 = \frac{\rho_l}{V_0} = \frac{2\pi\varepsilon\varepsilon_0}{\ln(R_2/R_1)}. \quad (2.23)$$

Цей вираз і визначає так звану *погонну ємність* між коаксіальними провідниками циліндричної конструкції.

Приклад 2.5. Поле заряду над провідною поверхнею. Для розрахунку поля точкового заряду q , що знаходиться над металевою поверхнею на відстані a (рис. 2.5, а), зручно використовувати *метод дзеркальних відображень*. Електричне поле виникає між зарядом $+q$ і від'ємним зарядом, індукованим на провідній площині. Розподіл цього заряду по поверхні заздалегідь не відомий, що й утрудняє безпосередній розрахунок. Але відповідно до методу дзеркальних відображень це поле буде таким самим, як і поле між двома зарядами: заданим зарядом і точковим від'ємним зарядом $-q$, що знаходиться на такій же відстані a (рис. 2.5, б), але дзеркально щодо поверхні. Ця подібність ґрунтується на тім, що через симетрію задачі поверхня металу буде співпадати з еквіпотенціальною поверхнею, а силові лінії будуть перпендикулярні до площини симетрії, так само, як і силові лінії на поверхні провідника відповідно до граничних умов (приклад 1.8).

Розрахувати поле між двома зарядами можна, якщо скористатись, як і в прикладі 2.2, принципом суперпозиції, підсумовуючи поля точкових зарядів $\pm q$ у формі

$$\mathbf{E}_{\pm} = \frac{\pm q}{4\pi\varepsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}_{0\pm}|^2}, \quad (2.24)$$

де $\mathbf{r}_{0\pm} = \pm \mathbf{e}_x a$ – координати їхнього розташування (рис. 2.5, б).

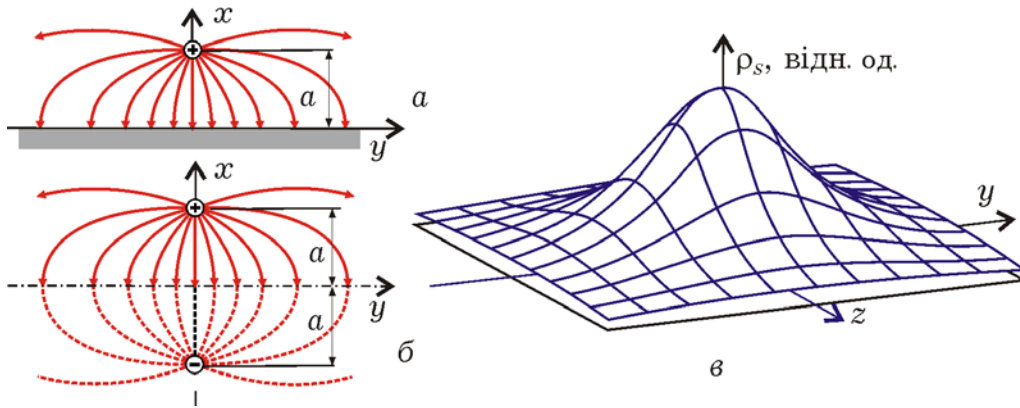


Рис. 2.5. Поле між точковим зарядом і індукованим на металевій поверхні зарядом протилежного знака (а) розраховується так само, як і поле між двома зарядами (б). Розподіл густини наведеного заряду по поверхні (в) такий, що об'єм фігури дорівнює зарядові над поверхнею.

З результатів такого розрахунку інтерес представляє розподіл напруженості електричного поля в площині $y0z$:

$$\mathbf{E} = -\mathbf{e}_x \frac{aq}{2\pi\epsilon_0 (a^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}. \quad (2.25)$$

Звідси випливає, по-перше, що в площині симетрії ($x = 0$), тобто і на металевій поверхні, напруженість поля буде мати тільки нормальну складову. По-друге, цей вираз визначає розподіл поверхневої густини заряду $\rho_s = \epsilon_0 E_n$ (див. приклад 1.8), а її інтегрування по всій поверхні $y0z$ дає результат $\iint_{y0z} \rho_s dydz = -q$.

Тобто, весь заряд, індукований на поверхні металу, є рівним за величиною і протилежним за знаком зарядові над поверхнею.

В електроніці метод дзеркальних відображень використовують для визначення форми потенціального бар'єра, що існує поблизу поверхні твердих тіл і перешкоджає виходу електронів. Якщо електрон із зарядом $-e$ вийшов з металу на відстань x (рис. 2.6), то з боку наведеного на поверхні заряду $+e$ на нього діє сила, що повертає його назад і яка іноді називається *силою дзеркального відображення*

$$F(x) = -e^2/4\pi\epsilon_0(2x)^2 = -e^2/16\pi\epsilon_0x^2. \quad (2.26)$$

Потенціальна енергія електрона у такому полі дорівнює роботі з подолання цієї сили в разі його переміщення із даної точки на нескінченність і визначається інтегруванням:

$$U(x) = \int_x^{\infty} F(x)dx = -e^2/16\pi\epsilon_0 x. \quad (2.27)$$

Отримана потенціальна функція (рис. 2.6, в) має природний початок відліку: $U(x) = 0$ для $x \rightarrow \infty$. Він відповідає мінімально можливій енергії вільного електрона у вакуумі і називається *рівнем вакууму*. Дана функція описує форму потенціального бар'єра поблизу поверхні, а робота, чинена електроном з подолання сил цього бар'єра, називається *роботою виходу*.

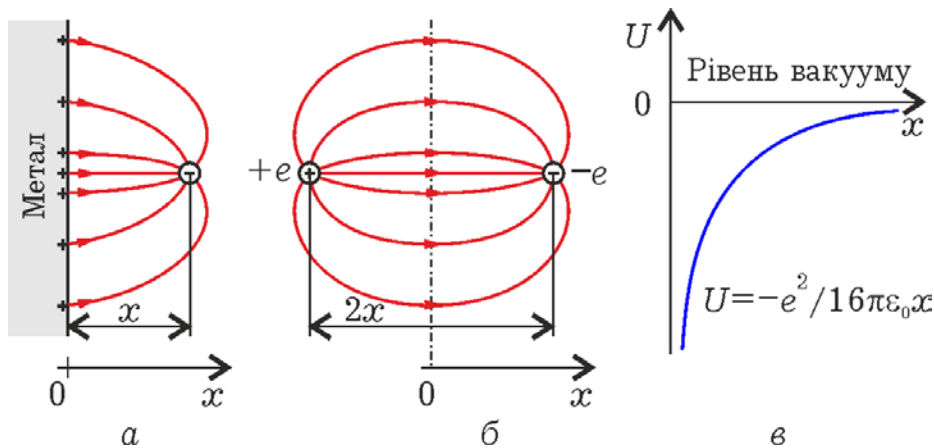


Рис. 2.6. На електрон, емітований з металу (а), діє сила «дзеркального відображення» (б), що визначає форму потенціального бар'єра (в), який перешкоджає виходові.

Приклад 2.5. Просторовий заряд у плоскому діоді. Як приклад самоузгодженої задачі розглянемо розподіл поля у плоскому конденсаторі (див. приклад 2.3) за наявності між його пластинами просторового заряду. Така ситуація має місце у вакуумному діоді, де електричне поле створюється не тільки джерелом анодної напруги, але і зарядом електронів, які емітовані з катода і рухаються у міжелектродному просторі до анода.

Як і в прикладі 2.3, розглянемо плоску конструкцію нескінченно широких електродів (рис. 2.7, а), правий з яких є анодом, а лівий (катод) є джерелом електронів з необмеженою емісією ($j_e = \infty$). Прийmemo початок відліку потенціалу на катоді ($V(0) = 0$), тоді потенціал анода $V(d) = V_a$. Вважаючи, що початкові

швидкості вильоту електронів з катода рівні 0 ($v(0) = 0$), ми повинні також прийняти, що $dV/dx|_{x=0} = 0$. Інакше за наявності прискорювального поля ($dV/dx > 0$) всі електрони досягали б анода, а для гальмівного ($dV/dx < 0$) жоден з електронів не попадав би в міжелектродний простір.

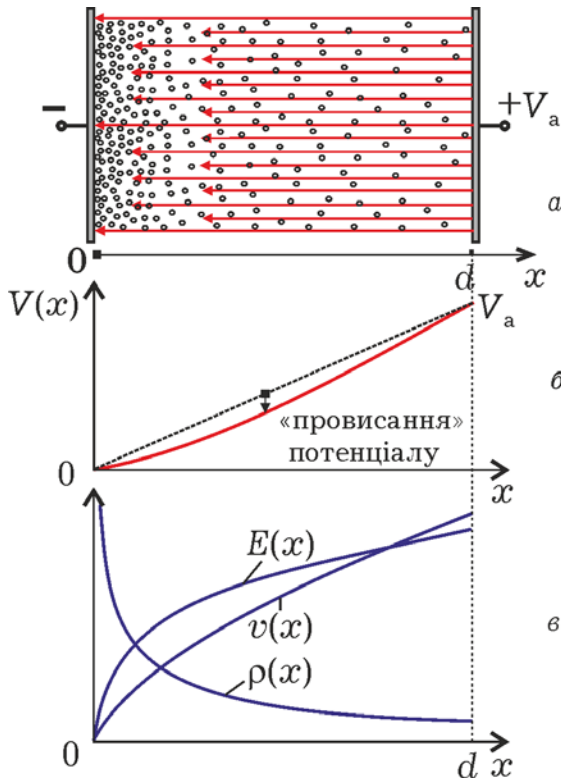


Рис. 2.7. Поле просторового заряду електронів у вакуумному діоді (а) послабляє поле зовнішнього джерела і викликає «провисання» розподілу потенціалу в порівнянні з плоским конденсатором (б). Таке поле не буде однорідним: розподіл напруженості поля визначає і вид розподілів швидкості і густини заряду (в)

Математична модель для аналізу цієї задачі може бути разом із граничними умовами для потенціалів на електродах записана у вигляді:

$$\begin{cases} d^2V/dx^2 = -\rho(x)/\epsilon_0, \\ j = v(x)\rho(x)/, \\ v(x) = \sqrt{2(e/m)V(x)}, \end{cases} \quad (2.28)$$

і являє собою самоузгоджену систему з рівняння Пуассона, рівняння неперервності (відзначимо, що $j = \text{const}(x)$, тобто густина струму в будь-якому перетині постійна) і рівняння руху електрона в статичному полі у вигляді співвідношення між швидкістю електрона та прискорювальним потенціалом, яке слідує з (2.5).

Послідовна підстановка $\rho(x)$ і $v(x)$ у рівняння Пуассона приводить до рівняння

$$\frac{d^2V}{dx^2} = \frac{j}{\epsilon_0 \sqrt{2(e/m)}} V^{-1/2},$$

якому після помноження лівої і правої частин на $2dV/dx$ можна надати вигляду

$$d\left(\frac{dV}{dx}\right) = \frac{2j}{\varepsilon_0\sqrt{2(e/m)}} V^{-1/2} dV.$$

Інтегруючи від значень на катоді ($dV/dx|_{x=0} = 0$, $V(0) = 0$) до поточних значень, одержимо

$$\frac{dV}{dx} = \sqrt{\frac{4j}{\varepsilon_0\sqrt{2(e/m)}}} V^{1/4}.$$

Розділяючи змінні і знову інтегруючи у межах від нульових до поточних значень, одержимо функцію розподілу потенціалу

$$V(x) = \left(\frac{9j}{4\varepsilon_0\sqrt{2(e/m)}}\right)^{2/3} x^{4/3}. \quad (2.29)$$

Звідси можуть бути отримані й інші розподіли: напруженості поля – $E(x) \sim x^{1/3}$, швидкості електронів – $v(x) \sim x^{2/3}$, густини електронного заряду – $\rho(x) \sim x^{-2/3}$.

Порівнюючи отриманий розподіл поля з полем у «холодному» (тобто без електронів) конденсаторі, бачимо (рис. 2.7, б), що присутні у міжелектродному проміжку електрони своїм зарядом викликають зниження потенціалу і «провисання» функції $V(x)$ на відміну від його лінійного розподілу в плоскому конденсаторі. Електричне поле також не буде однорідним, його напруженість спадає від максимального значення на аноді до нульового значення на катоді (рис. 2.7, в). Силові лінії не доходять до катода: починаючись на аноді, вони закінчуються на електронах, що створюють просторовий заряд. Густина просторового заряду, тобто і концентрація електронів, нескінченна на катоді, де швидкість руху електронів дорівнює нулеві, і поступово зменшується з прискоренням електронів до анода.

Отримані рішення дозволяють одержати ще один важливий результат. З виразу (2.29) для розподілу потенціалу в точці $x = d$, де $V(d) = V_a$, можна одержати для густини анодного струму

$$j = \frac{4\varepsilon_0 \sqrt{2e/m}}{9d^2} V_a^{3/2}. \quad (2.30)$$

Дане співвідношення визначає *вольт-амперну характеристику вакуумного діода* (рис. 2.8) і звичайно називається «*законом ступеня 3/2*». Для порівняння розглянемо її ідеалізований вигляд (штрихова лінія) без врахування просторового заряду. Якщо припустити, що всі електрони вилітають з катода з нульовими початковими швидкостями, то за від'ємного анодного потенціалу анодний струм буде відсутнім. Але для кожного, як завгодно малого додатного потенціалу анода, якщо електрони своїм полем не впливають на рух один одного, усі вони будуть досягати анода і створювати анодний струм, рівний струму емісії (режим насичення). Подібне насичення виявляється у діодах і за наявності просторового заряду, якщо струм емісії з катода є обмеженим. Але до настання насичення спостерігається *обмеження струму просторовим зарядом*, і в цьому режимі є *можливість керувати струмом* зміною анодної напруги.

У реальних діодах електрони емітуються з деякими початковими швидкостями, що залежать від виду емісії, і біля катода утворюється область від'ємного потенціалу (рис. 2.9) з характерним мінімумом V_{\min} і відповідним гальмівним електричним полем на ділянці між точками 0 та x_{\min} . Величина V_{\min} залежить як від початкових швидкостей електронів, так і від поля зовнішнього джерела. Саме ця область просторового заряду, називана іноді «*віртуальним катодом*», виконує регулюючі функції у режимі обмеження струму просторовим зарядом. Подолати область гальмуючого поля можуть тільки ті електрони, початкова енергія вильоту яких (у напрямку осі x) $mv^2(0)/2 > e|V_{\min}|$. Збільшення анодної напруги послаблює гальмуюче поле просторового заряду, зменшуючи значення V_{\min} і збільшуючи кількість електронів, що долають електричне поле та створюють анодний струм. За цих умов «*закон ступеня 3/2*» не виконується, але розглянута модель може служити гарним наближенням для області $x > x_{\min}$, якщо анодний потенціал відраховувати від мінімуму потенціалу «*віртуального катода*» (див. додаткову координатну систему на рис. 2.9).

Слід зазначити, що даний закон виявляється справедливим не тільки для плоскої конструкції, він досить універсальний і використовується як основа для моделювання керування струмом у багатьох вакуумних приладах.

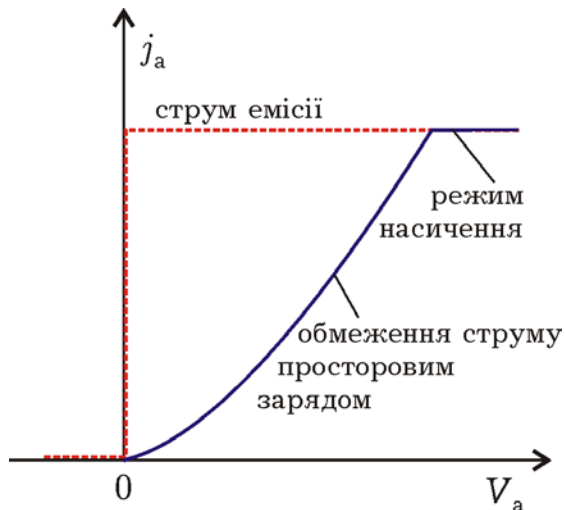


Рис. 2.8. Вольт-амперна характеристика ідеалізованого вакуумного діода з обмеженою емісією електронів і без впливу їхнього просторового заряду має ступінчастий вигляд (штрихова лінія). Просторовий заряд обмежує анодний струм (суцільна лінія) у разі його значення, меншого за струм емісії

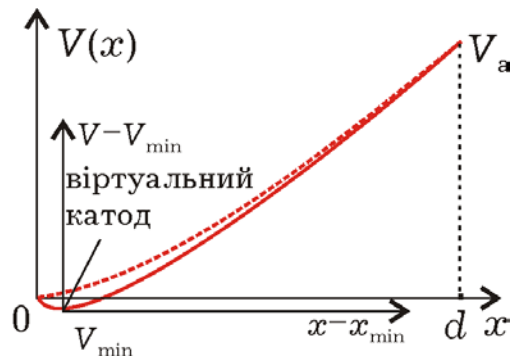


Рис. 2.9. Для скінченних значень швидкості вильоту електронів біля катода утворюється потенціальний мінімум з ділянкою гальмівного поля, що регулює величину анодного струму

Приклад 2.6. Екранування зовнішнього поля поверхнею провідної речовини. У прикладі 1.8, де розглядалися граничні умови для електричного поля біля поверхні ідеального металу, використовувалася модель нескінченно тонкого шару поверхневого заряду, який екранує внутрішню область від зовнішнього електричного поля. За реальних умов цей заряд концентрується у приповерхньому шарі скінченної товщини. Для формування фізичної моделі помістимо у плоский конденсатор з однорідним електричним полем (рис. 2.10, а) зразок провідної речовини, у якій провідність забезпечується вільними електронами. Під дією поля зовнішнього джерела електрони будуть зміщуватися до поверхні доти, поки внутрішнє поле, викликане зсувом зарядів, цілком не компенсує зовнішнє. Просторовий заряд, який утворюється біля поверхні і екранує зовнішнє поле, буде визначатися перевищенням концентрації електронів $n(x)$ над її значенням n_0 за відсутності поля, а об'ємна густина заряду дорівнюватиме

$$\rho(x) = -e[n(x) - n_0]. \quad (2.31)$$

Розподіл електронів у просторі $n(x)$ визначається спільною дією двох факторів: з одного боку, електричне поле буде

притягувати їх до поверхні, а з іншої, тепловий хаотичний рух буде приводити до їхньої дифузії від поверхні. У разі врівноважування цих процесів розподіл концентрації $n(x)$ може бути описаний розподілом Больцмана

$$n(x) = n_0 \exp[eV(x)/kT]. \quad (2.32)$$

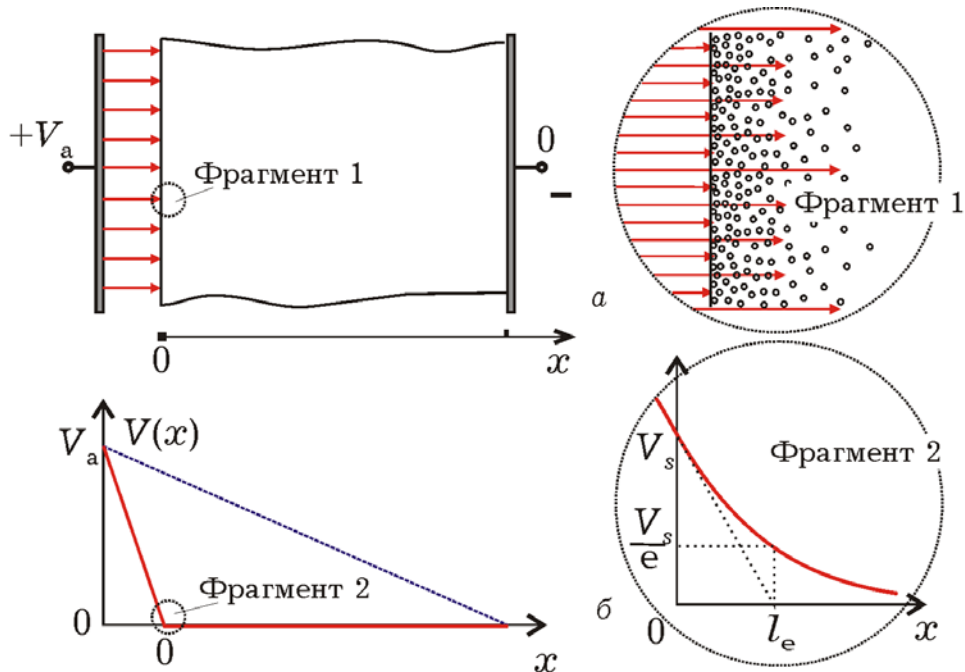


Рис. 2.10. Силві лінії зовнішнього електричного поля закінчуються на шарі поверхневого заряду, не проникаючи усередину провідної речовини. У кружках показано фрагменти розподілу поля і заряду в приповерхньому шарі у збільшеному масштабі

Співвідношення (2.31) і (2.32) разом із рівнянням Пуассона $d^2V/dx^2 = -\rho(x)/\epsilon\epsilon_0$ являють собою самоузгоджену систему рівнянь. Для формулювання граничних умов оберемо початок відліку потенціалу вдалині від поверхні ($V(\infty) = 0$) і будемо вважати заданим потенціал поверхні $V(0) = V_s$. Підставляючи $\rho(x)$ і $n(x)$ у рівняння Пуассона, одержимо

$$\frac{d^2V}{dx^2} = \frac{en_0}{\epsilon\epsilon_0} \{ \exp[eV(x)/kT] - 1 \}$$

Для спрощення розв'язку обмежимося випадком, коли потенціал $V(x) \ll kT/e$ і можна прийняти, що $e^\alpha \approx 1 + \alpha$ (величину kT/e іноді зовуть тепловим потенціалом). За такого припущення останнє рівняння спрощується до вигляду

$$\frac{d^2V}{dx^2} = \frac{e^2 n_0}{\epsilon \epsilon_0 kT} V(x),$$

а його розв'язок за заданих граничних умов матиме вигляд:

$$V(x) = V_s \exp(-x/l_e). \quad (2.33)$$

Тут уведено як позначення так називану *довжину екранування*

$$l_e = \sqrt{\epsilon \epsilon_0 kT / e^2 n_0}, \quad (2.34)$$

яка характеризує швидкість експонентного спадання (рис. 2.10, б) функції $V(x)$ і є мірою глибини проникнення електричного поля у речовину. На відстані l_e поверхневий потенціал зменшується в $e \approx 2,7$ разів, а на відстані $(3...5)l_e$ електричне поле вважається звичайно знехтувально малим.

Кількісна оцінка для металів з концентрацією електронів $10^{28}...10^{29} \text{ м}^{-3}$ дає значення довжини екранування порядку міжатомної відстані, що з макроскопічної точки зору цілком виправдовує модель нескінченно тонкого шару заряду, розглянуту в прикладі 1.8. Для напівпровідників з концентрацією $10^{22}...10^{20} \text{ м}^{-3}$ вона складає $0,1...1 \text{ мкм}$.

Ще одна інтерпретація величини l_e впливає з розгляду надлишкової концентрації електронів

$$\Delta n(x) = n(x) - n_0 \approx (en_0/kT)V(x) = \Delta n_s \exp(-x/l_e), \quad (2.35)$$

які створюють просторовий заряд (рис. 2.11). Тут $\Delta n_s = en_0 V_s / kT$ – концентрація надлишкових електронів на поверхні. Особливість цієї функції полягає в тому, що

$$\int_0^{\infty} \Delta n(x) dx = \Delta n_s l_e. \quad (2.35)$$

Цей результат дозволяє замість реального розподілу заряду використовувати спрощене уявлення про те, що всі електрони розташовані рівномірно з густиною Δn_s , але тільки у приповерхневому шарі товщиною l_e (рис. 2.11).

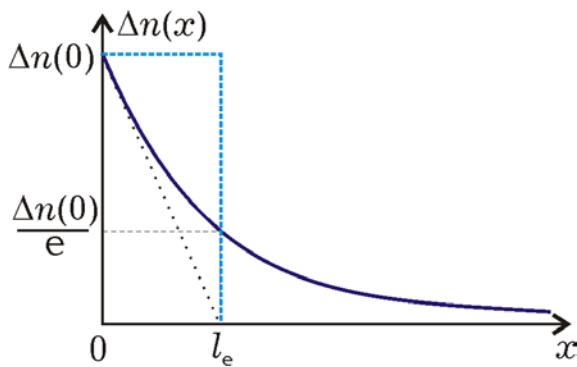


Рис. 2.11. Плавний розподіл надлишкової концентрації електронів (суцільна лінія) може бути замінений ступінчастим (штрихова лінія) з концентрацією, рівною поверхневому значенню, і товщиною шару, рівною довжині екранування

Важливий результат проведеного аналізу зв'язаний також з тим, що величина поверхневого заряду залежить від поверхневого потенціалу, що надає можливість керування поверхневою провідністю зміною потенціалу V_s .

В аналітичних розрахунках електричного поля при не досить складній конфігурації електродів із заданими граничними умовами може статися ефективним розв'язання рівнянь Пуассона або Лапласа *методом розділення змінних*. Суть цього методу полягає в тому, що невідому функцію розподілу потенціалу подають як добуток функцій, кожна з яких залежить тільки від однієї координати. Якщо підставити $V(x, y) = X(x)Y(y)$ (розглянемо для спрощення двовимірний випадок) у рівняння Лапласа та поділити на добуток XY , матимемо

$$\frac{1}{X} \cdot \frac{d^2X}{dx^2} + \frac{1}{Y} \cdot \frac{d^2Y}{dy^2} = 0$$

Сума двох незалежних між собою функцій може дорівнювати нулю тільки в тому випадку, коли кожна з них є сталою. Тому, позначаючи перший доданок k_x^2 , другий – k_y^2 , одержимо

$$d^2X/dx^2 - k_x^2 X = 0;$$

$$d^2Y/dy^2 - k_y^2 Y = 0.$$

Тут k_x і k_y – так звані *сталі розділення*, для яких справедливе співвідношення $k_x^2 + k_y^2 = 0$ і які треба визначати із додаткових умов.

У результаті одне рівняння у частинних похідних зводиться до двох звичайних диференціальних рівнянь, розв'язування яких значно простіше.

Приклад 2.8. Поле сітки над провідною поверхнею.

Представимо сітку (рис. 2.12, а) у вигляді тонких провідників, паралельних провідній площині, розташованих на відстані a один від одного і на відстані d від площини. Для використання методу розділення змінних у цій задачі зазначимо, що через періодичність структури розподіл поля також буде періодичною функцією координати x . Тому розподіл потенціалу для $y = \text{const}$ можна представити у вигляді суми гармонічних функцій. Якщо вибрати розташування координатної системи так, щоб початок осі x проходив через центр провідника, як на рис. 2.12, а, то можна обмежитися тільки парними функціями типу $\cos k_n x$, причому для кожної гармоніки необхідна своя функція $Y_n(y)$. У підсумку розподіл потенціалу представимо у вигляді:

$$V(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(y) \cos k_n x. \quad (2.36)$$

З умови періодичності потенціалу $V(x, y) = V(x + a, y)$ випливає, що $\cos k_n x = \cos k_n(x + a)$, тому $k_n a = 2\pi n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), відкіля знаходимо константи розділення $k_n = 2\pi n/a$. Підставляючи (2.36) у рівняння Лапласа і виконуючи описану процедуру розділення змінних, одержимо для кожної з функцій $Y_n(y)$

$$d^2 Y_n / dy^2 - k_n^2 Y_n = 0. \quad (2.37)$$

Розв'язок цього рівняння запишемо у вигляді

$$Y_n(y) = C_{1n} \exp(-k_n y) + C_{2n} \exp(+k_n y). \quad (2.38)$$

Для $n = 0$ рівняння (2.37) має особливий розв'язок. Воно приймає вигляд $d^2 Y_0 / dy^2 = 0$ та, як і поле в плоскому конденсаторі, описує лінійну складову потенціалу:

$$Y_0(y) = C_{10} y + C_{20}. \quad (2.39)$$

За заданих потенціалів на електродах (нехай сітка має нульовий потенціал, тобто $V(0, 0) = 0$, а металева поверхня деякий додатній $-V(x, -d) = V_a$) легко визначити, що $C_{20} = 0$, $C_{10} = -V_a/d$, а $Y_0(y) = -V_a y/d$. Очевидно також, що для області над сіткою ($y \rightarrow \infty$) необхідно прийняти, що коефіцієнти $C_{2n} = 0$, тому що потенціал там

не може нескінченно зростати. У просторі між площиною і сіткою можна скоротити кількість постійних, якщо знайти зв'язок між константами C_{1n} і C_{2n} з умови $V(x, -d) = V_a$. Подальше знаходження постійних інтегрування досить важке, для цього треба задавати конкретну форму поперечного перерізу провідників сітки. Але навіть без такої процедури можна зробити корисні висновки.

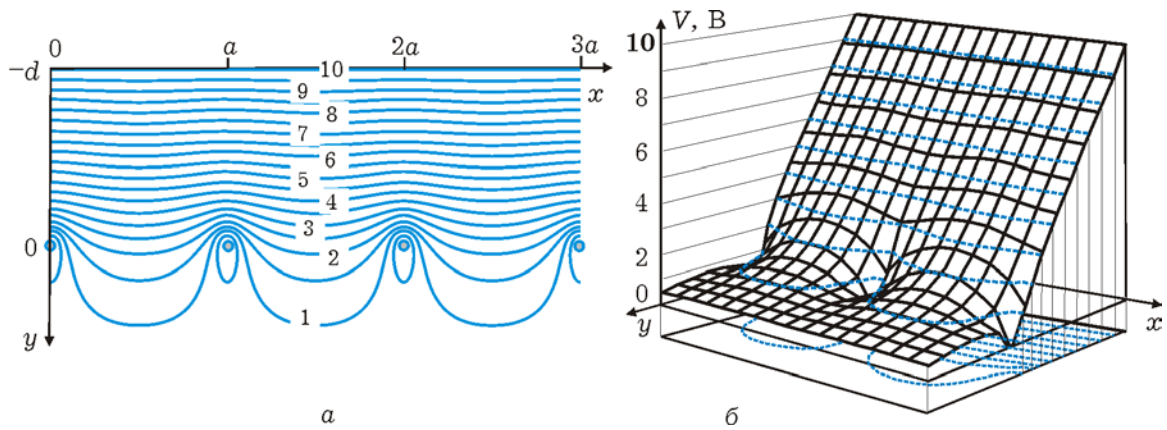


Рис. 2.12. Розподіл поля між сіткою і плоским електродом, представлений у вигляді екіпотенціалей із кроком 0,5 В (а), і відповідний потенціальний рельєф у косокутній проекції (б). Поле проникає у простір за сіткою на відстань порядку кроку сітки

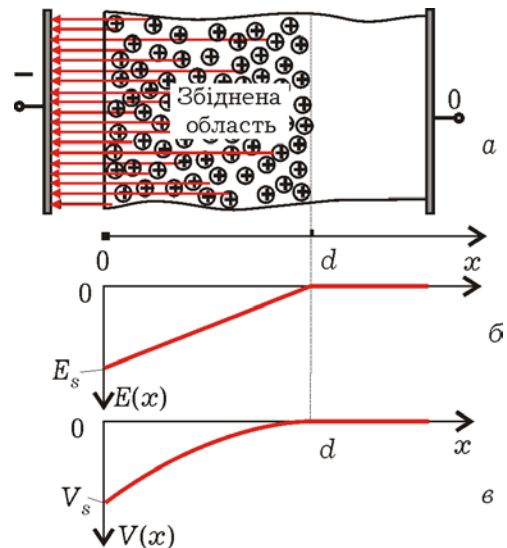
Поле додатного електрода проникає у простір над сіткою, експоненціально спадаючи за законом $\exp(-k_n y)$. Швидкість спаду визначається константою розділення k_n , а відстань, на яку проникає поле, складає величини порядку $1/k_n = a/2\pi n$ і обернено пропорційна номеру просторової гармоніки n . На рис. 2.12, а представлена картина поля у вигляді екіпотенціалей, розрахованих з кроком 0,5 В для нульового потенціалу сітки і $V_a = 10$ В. Вони є лініями однакового потенціалу на «тривимірній» функції $V(x, y)$, зображеній на рис. 2.12, б. На відстані від сітки, рівній її періодові, перша гармоніка послабляється в $e^{2\pi}$ раз, а інші гармоніки спадають ще швидше. Така властивість говорить про високу якість екранування зовнішніх полів сіткою.

Крім того, проникнення поля через сітку використовують для керування електронними потоками у вакуумних приладах.

Приклад 2.9. Поле збідненого шару в напівпровіднику.
Збіднений шар утворюється у багатьох напівпровідникових приладах: МДП-структурах, поблизу деяких контактів метал-напівпровідник, біля межі контакту різних напівпровідників та ін. Як

модельний об'єкт розглянемо зразок напівпровідника (рис. 2.13, а) з донорною домішкою, атоми якої за кімнатної температури, віддаючи свій «зайвий» електрон, стають позитивно зарядженими іонами. При створенні на поверхні яким-небудь чином від'ємного потенціалу V_s (наприклад, за допомогою зовнішнього джерела, як на рис. 2.10, а) електрони витісняються з приповерхньої області і там утвориться збіднений ними шар.

Рис. 2.13. Збіднений електронами шар просторового заряду біля поверхні донорного напівпровідника (а) та розподіл напруженості електричного поля (б) і потенціалу (в)



Для потенціалів V_s порядку десятих часток або одиниць вольт зарядом рухливих електронів можна знехтувати, і об'ємна густина заряду буде визначатися тільки концентрацією іонів домішки: $\rho = eN$. Якщо вважати, що домішка розподілена у напівпровіднику макроскопічно рівномірно, то відповідне рівняння Пуассона буде мати постійну праву частину. Для одновимірного випадку $d^2V/dx^2 = -eN/\epsilon\epsilon_0$. Двічі інтегруючи, одержимо $dV/dx = -(eN/\epsilon\epsilon_0)x + C_1$, $V(x) = -(eN/2\epsilon\epsilon_0)x^2 + C_1x + C_2$. Для визначення констант інтегрування приймемо початок відліку потенціалу на границі збідненої і нейтральної областей [$V(d) = 0$] і будемо вважати відомим потенціал поверхні [$V(0) = V_s < 0$]. Крім того, для визначення поки невідомої товщини збідненого шару необхідно використовувати ще одну умову – напруженість поля на границі областей спадає до 0 [$dV/dx|_{x=d} = 0$]. У результаті можна одержати (рис. 2.14), що вектор напруженості електричного поля спрямований від заряджених іонів домішки до поверхні і зменшується лінійно (б):

$$\mathbf{E}(x) = -\mathbf{e}_x \frac{dV}{dx} = -\mathbf{e}_x \frac{eN}{\epsilon\epsilon_0} (d - x), \quad (2.40)$$

потенціал параболічно зростає (ϵ) від значення $V_s < 0$ до 0:

$$V(x) = -\frac{eN}{2\epsilon\epsilon_0}(d-x)^2, \quad (2.41)$$

а товщина збідненої області і поверхневий потенціал зв'язані співвідношенням $V_s = -eNd^2/2\epsilon\epsilon_0$. Звідси випливає, що

$$d = \sqrt{2\epsilon\epsilon_0 |V_s|/eN}, \quad (2.42)$$

і товщина тим менша, чим більша концентрація домішки, а також залежить від поверхневого потенціалу. Цей факт використовується, наприклад, для керування провідністю поверхневого шару.

2.1.4. Чисельний розрахунок електростатичних полів.

У більшості розглянутих прикладів результати розрахунку розподілу поля отримані у вигляді аналітичних функцій, які дозволяють знайти потенціал або напруженість поля у будь-якій точці простору (за винятком, мабуть, деяких особливих точок). Однак для більш складної конфігурації електродів аналітичний розрахунок стає практично неможливим і доводиться використовувати так називані *чисельні методи інтегрування* рівнянь Лапласа або Пуассона. Вони дозволяють наближено розраховувати поле у визначених дискретних точках простору, причому кількість точок і точність розрахунку в них можна обирати будь-якими, у залежності від необхідного ступеня деталізації поля і трудомісткості розрахунків.

Одним з найбільш розповсюджених є *метод скінченних різниць*. В основу методу покладена заміна похідних у рівнянні Лапласа малими приростами. Розглянемо його для плоского поля $V(x, y)$. Надаючи по черзі аргументам x і y деякої неперервної функції $V(x, y)$ малого приросту з кроком h , можна приблизно (з точністю до величин другого порядку малості відносно h^2) замінити частинні похідні функції відношеннями різниць (рис. 2.14):

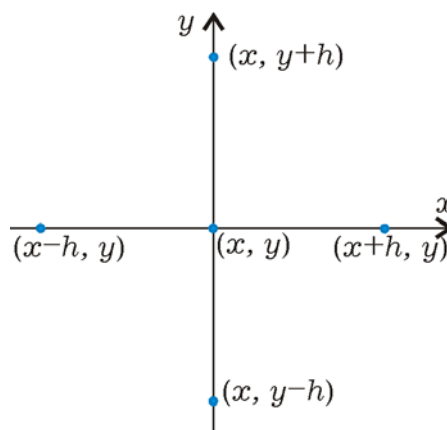
$$\frac{\partial V}{\partial x} \approx \begin{cases} [V(x, y) - V(x - h, y)] / h & \text{— ліворуч,} \\ [V(x + h, y) - V(x, y)] / h & \text{— праворуч,} \end{cases} \quad (2.43a)$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} \approx \begin{cases} [V(x, y) - V(x, y - h)] / h & \text{— внизу,} \\ [V(x, y + h) - V(x, y)] / h & \text{— вгорі.} \end{cases} \quad (2.43b)$$

Подібним чином частинні похідні другого порядку можна обчислити через приріст перших похідних:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} &\approx \frac{1}{h} \left[\frac{V(x+h, y) - V(x, y)}{h} - \frac{V(x, y) - V(x-h, y)}{h} \right] = \\ &= [V(x+h, y) + V(x-h, y) - 2V(x, y)] / h^2; \\ \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} &\approx [V(x, y+h) + V(x, y-h) - 2V(x, y)] / h^2; \end{aligned}$$

Рис. 2.14. П'ятиточкова схема для обчислення похідних через скінченні прирости і розрахунку потенціалів.



Для таких похідних двовимірне диференціальне рівняння Лапласа

$$\partial^2 V / \partial x^2 + \partial^2 V / \partial y^2 = 0$$

наближено можна замінити наступним алгебраїчним рівнянням:

$$V(x+h, y) + V(x-h, y) + V(x, y+h) + V(x, y-h) - 4V(x, y) = 0. \quad (2.44)$$

Дане різницеve рівняння зв'язує між собою значення шуканої функції у п'ятьох сусідніх точках, розташованих як зазначено на рис. 2.14. Простий фізичний зміст цього рівняння одержимо, якщо представити його у формі

$$V(x, y) = [V(x+h, y) + V(x-h, y) + V(x, y+h) + V(x, y-h)] / 4, \quad (2.45)$$

– потенціал у кожній точці простору дорівнює середньому арифметичному значенню потенціалів у сусідніх точках. Варто відзначити, що таке просте представлення рівняння Лапласа має місце тільки для прямокутних координат за рівних приростів

(кроків) по осях x и y , а в інших випадках воно матиме інший вигляд.

Порядок дій для організації розрахунку може бути наступним.

Вибір області інтегрування, де розраховується поле, – це частина алгоритму, яка найбільш важко формалізується. Найпростішою і зручною є прямокутна область, у межах якої локалізоване поле. Це може бути, наприклад, деяка область напівпровідникового приладу (рис. 2.15, а) з розташованими там електродами. Якщо поля не дуже локалізовані у деякій області простору, наприклад, для розрахунку поля системи зарядів, можна ввести деякий додатковий електрод з нульовим потенціалом (рис. 2.15, б), що «обрізає» поле на такій відстані від зарядів, де потенціал знехтувально малий, або установити довільну межу (рис. 2.15, в), на якій поле достатньо слабе, а потенціал змінюється повільно.

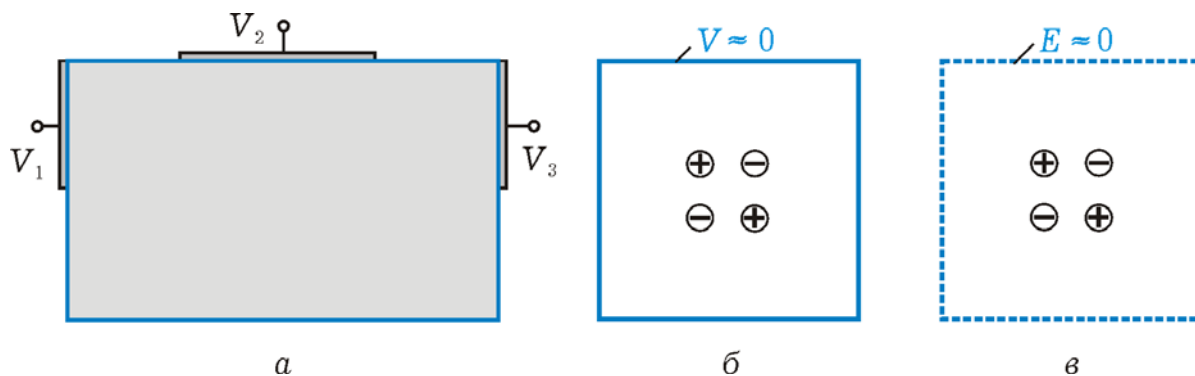


Рис. 2.15. Область чисельного розрахунку поля може бути обмежена природними границями напівпровідника (а), введенням електроду, що екранує, (б) там, де потенціал можна вважати нульовим, або вільною границею (в), де напруженість поля знехтувально мала.

Природно, що у процесі вибору області інтегрування варто враховувати симетрію конструкції і заданих потенціалів (електричного поля). Важливо, щоб обрана модель електродів не сильно спотворювала поле порівняно з полем у реальному об'єкті.

Дискретний масив точок, в яких розраховується потенціал, визначається точками перетину (вузлами) ліній сітки, що будується в області інтегрування. Кількість вузлів сітки визначається як необхідним ступенем деталізації поля, так і необхідною похибкою розрахунку, і зазвичай складає величини порядку 10...100 по кожній з координат. У найпростішому випадку крок сітки обирається постійним і однаковим вздовж осей x та y (рис. 2.16, а). Але часто крок сітки роблять змінним, так щоб у тих областях, де потенціал змінюється швидше, крок був дрібнішим (рис. 2.16, б).

Для складання основної частини *системи рівнянь* необхідно для усіх внутрішніх вузлових точок, що не збігаються з електродами і не розташовані на границі області інтегрування, тобто для точок з номерами $i = 1, \dots, (m - 1)$ і $j = 1, \dots, (n - 1)$ (на прикладі конструкції рис. 2.16, а) записати рівняння (2.44) у вигляді

$$-4V_{i,j} + V_{(i-1),j} + V_{(i+1),j} + V_{i,(j-1)} + V_{i,(j+1)} = 0. \quad (2.46)$$

Це рівняння для змінних i і j являє собою систему лінійних алгебраїчних рівнянь, яку треба розв'язати, доповнивши її співвідношеннями для розрахунку потенціалів в інших точках, де правило (2.46) не може бути використане. До таких точок відносяться вузли, де потенціали фіксовані напругою джерел живлення, і вузли на границі області інтегрування, для яких не існує чотирьох сусідніх вузлів. В останніх необхідно вводити інші правила для розрахунку потенціалів, так називані *граничні умови*.

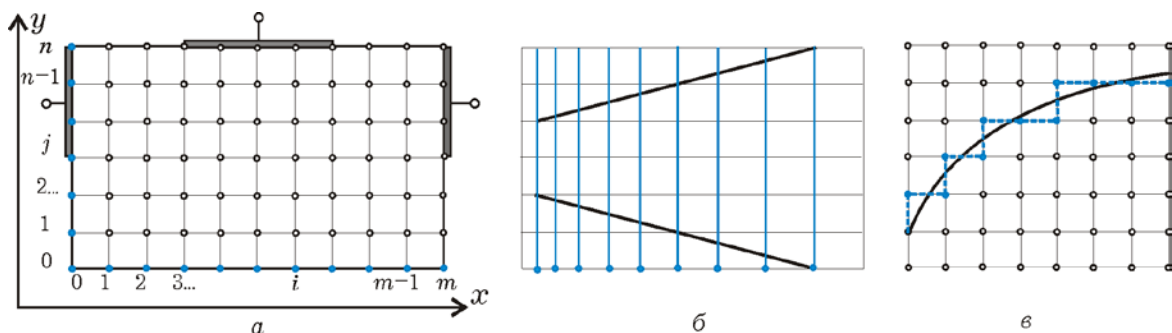


Рис. 2.16. Дискретизація простору інтегрування за допомогою сітки з постійним кроком (а). В області більш сильного поля (б) крок сітки може бути обраний більш дрібним. Електроди складного профілю (в) замінюються дискретним набором найближчих вузлів.

Граничні умови використовують двох видів. Умови *Діріхле* припускають присвоєння вузловим точкам, що збігаються з електродами, відомих значень потенціалів цих електродів. Якщо електроди мають складний профіль, то їх можна замінити ламаною лінією, що проходить по вузлах сітки і відхиляється від дійсної форми менш, ніж на половину кроку сітки (рис. 2.16, в).

У другому виді граничних умов, умовах *Неймана*, приймають рівність нулевій похідній від потенціалу в напрямку нормалі \mathbf{n} до границі: $\partial V / \partial \mathbf{n} = 0$. Вони виконуються на границі напівпровідник-повітря (див. розд. 1.5) наближено; для осей симетрії, де функція $V(\mathbf{n})$ має максимум або мінімум, ці умова є точними. Їх також

наближено використовують на такій відстані від електродів, де поле слабке і зміною потенціалу можна знехтувати для обраної точності розрахунків.

Реалізувати ці умови в обчисленнях можна різними способами. По-перше, можна присвоїти граничним точкам значення потенціалів приграничного ряду. Наприклад, для лівої границі (рис. 2.16, а) $V_{0,j} = V_{1,j}$, для нижньої границі $V_{i,0} = V_{i,1}$, і т.п. По-друге, подумки доповнивши сітку ще одним рядом вузлів за межами області інтегрування (рис. 2. 17, а), присвоюємо їм потенціал граничних точок ($V_{-1,j} = V_{0,j}$). Застосування (2.46) у цій вже п'ятиточковій схемі до граничних вузлів дає таке правило для обчислення в них потенціалу:

$$V_{0,j} = (V_{1,j} + V_{0,(j-1)} + V_{0,(j+1)})/3. \quad (2.47)$$

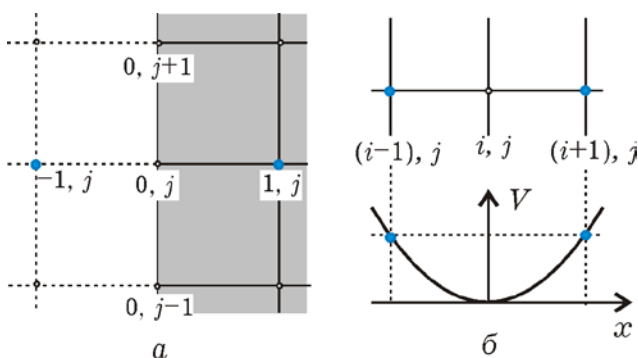


Рис. 2.17. Способи врахування граничних умов на поверхні напівпровідника (а) і на осі симетрії (б), що ґрунтуються на рівності нулевій похідної уздовж нормалі.

По-третє, розрахунок на границі можна робити так само, як і на осі симетрії (рис. 2.17, б), де похідна в напрямку осі також дорівнює 0, а симетричні потенціали однакові. Тому $V_{(i-1),j} = V_{(i+1),j}$, а для граничних точок

$$V_{0,j} = (2V_{1,j} + V_{0,(j-1)} + V_{0,(j+1)})/4. \quad (2.48)$$

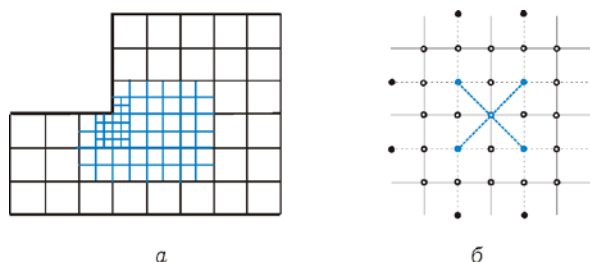
Вибір тієї чи іншої форми граничних умов Неймана обумовлюється в основному зручністю програмування процедури обчислень.

Розв'язок системи рівнянь (2.46), доповненої граничними умовами, можна робити одним з досить численних методів. Для пошуку найбільш ефективного методу необхідно прийняти до уваги, що матриця коефіцієнтів цієї системи буде сильно розрідженою: оскільки в (2.46) потенціал у кожній точці зв'язаний з потенціалами лише у чотирьох сусідніх точках, то у матриці буде багато нульових коефіцієнтів.

Широко поширеним і повчальним у разі ручних розрахунків є *ітераційний метод* (метод послідовних наближень). Насамперед задаються довільними початковими значеннями потенціалу у всіх внутрішніх вузлах і на вільних границях, де потрібно розраховувати потенціали. Цей масив значень $V^{(0)}_{i,j}$ разом з потенціалами на електродах становить так зване *нульове наближення*. Потім розраховують нові значення потенціалів у всіх внутрішніх вузлах сітки за формулою (2.46), а на вільних границях – відповідно до тієї чи іншої форми умов Неймана, і одержують *перше наближення*. Використовуючи розраховані потенціали $V^{(1)}_{i,j}$ і граничні значення, знаходять функції $V^{(2)}_{i,j}$ *другого* наближення і т.д. Ітераційний процес продовжується доти, поки $(n + 1)$ -е наближення не дасть у всіх вузлах значень потенціалу, які збігаються (у межах заданої точності) з n -м наближенням. Звісно, варто мати на увазі, що чим точніше буде обране нульове наближення, тим швидше буде йти процес збіжності і, відповідно, меншу кількість ітерацій буде потрібно для досягнення необхідної точності. Цьому ж сприяє і порядок проходження вузлів при перерахуванні: варто рухатися від електродів, де задані потенціали, до вільних границь.

Досить ефективно для зменшення часових витрат використовувати при організації обчислень наступний прийом: спочатку розв'язок варто знаходити для малої кількості клітинок сітки, розмір яких обирається приблизно з таким розрахунком, щоб у кожній частині області інтегрування було не менше двох рядків клітинок. Потім розв'язок уточнюють, зменшуючи крок сітки вдвічі, потім вчетверо і т.д. по всій області чи в тій її частині, де бажано мати більш точний розв'язок (рис. 2.18, а). За цих умов попередній розв'язок використовується для одержання нульового наближення для обчислень з більш дрібною сіткою. Для визначення нового нульового наближення у відсутніх в попередніх ітераціях точках може використовуватися те ж правило (2.46) п'ятиточкової схеми, але «сусідніми» вибираються вже розраховані значення потенціалів у вузлах, розташованих по діагоналі (рис. 2.18, б).

Рис. 2.18. Ділення кроку сітки навпіл може бути зроблене в окремій локальній області (а), де поле більш сильне. П'ятиточкова схема (б) для знаходження нульового наближення для більш дрібної сітки через розраховані значення потенціалів у вузлах (темні точки) сітки з попереднім кроком.



Розрахунок напруженості електричного поля провадиться за співвідношеннями $E_x = -\partial V/\partial x$, $E_y = -\partial V/\partial y$, що наближено обчислюються через скінченні різниці (2.43). Використовуючи значення похідних ліворуч і праворуч, можна знайти середнє арифметичне

$$E_{x\ i,j} = (V_{(i-1),j} - V_{(i+1),j})/2h. \quad (2.49a)$$

Аналогічно

$$E_{y\ i,j} = (V_{i,(j-1)} - V_{i,(j+1)})/2h. \quad (2.49б)$$

Однак, у деяких випадках, зручно використовувати додаткову польову сітку, що зсунута відносно потенціальної на $h/2$ (рис. 2.19) нагору і вправо. Значення складових напруженості в центрі виділеної на малюнку клітинки можна визначити за розрахованими потенціалами у найближчих вузлах потенціальної сітки:

$$E_x = (V_{i,j} - V_{(i+1),j} + V_{i,(j+1)} - V_{(i+1),(j+1)})/2h, \quad (2.50a)$$

$$E_y = (V_{i,j} - V_{i,(j+1)} + V_{(i+1),j} - V_{(i+1),(j+1)})/2h. \quad (2.50б)$$

Ці значення присвоюються всьому просторові усередині польової клітинки для подальшого розрахунку руху зарядів.

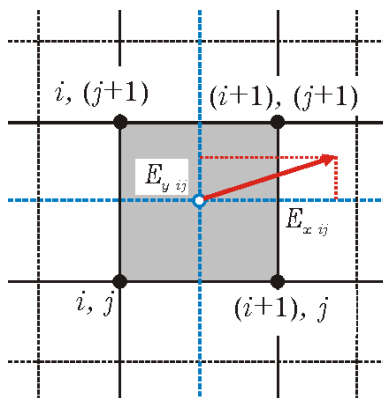


Рис. 2.19. Визначення напруженості поля у вузлі польової сітки (штрихові лінії) за знайденими значеннями потенціалів у найближчих вузлах потенціальної сітки (суцільні лінії)

Візуалізація результатів розрахунку необхідна для інтегрального сприйняття великого масиву чисел і уявлення про отриману функцію розподілу потенціалу чи напруженості поля.

Потенціальна функція часто зображується за допомогою ліній рівного потенціалу чи *еквіпотенціалей* із указаними на них значеннями потенціалу. Для цього весь діапазон зміни потенціалу розбивається на рівні інтервали і з'єднуються точки з однаковими потенціалами. Природно, що для знаходження певного значення на кожній лінії сітки необхідно використовувати ті чи інші методи інтерполяції. Такі приклади наведені на рис. 2.2, б і 2.12, а.

Інший розповсюджений спосіб полягає у побудові «тривимірної» потенціальної поверхні. Для цього в тій чи іншій косокутній системі координат будується просторова сітка (рис. 2.20) і у кожному з вузлів у певному масштабі по вертикальній осі відкладається розраховане значення потенціалу. Отримані сусідні точки потім з'єднуються у найпростішому випадку прямими лініями. Результати такої побудови наведені на рис. 2.2, в і 2.12, б.

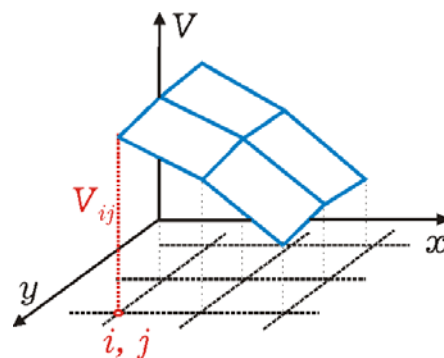


Рис. 2.20. Фрагмент побудови потенціальної поверхні

Там же зображені лінії постійного рівня цих поверхонь, що і є еквіпотенціальними лініями.

Розподіл напруженості електричного поля найпростіше зображувати у вигляді векторного поля, де для кожного вузла за розрахованими проекціями E_{xij} і E_{yij} в обраному масштабі будується вектор напруженості \mathbf{E}_{ij} . Приклад такого представлення наведений на рис. 1.1,б.

2.2. МАГНІТОСТАТИКА

2.2.1. Основні рівняння магнітостатики

Магнітостатика вивчає магнітні поля, що не змінюються в часі. Реально за статичні вважають такі поля, напруженість яких не змінюється істотно за час спостереження, тому рівняння магнітостатики безпосередньо виходять з першого і четвертого рівнянь Максвелла, якщо в них прийняти $\partial/\partial t = 0$:

диференціальна форма

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j}$$

$$\text{div } \mathbf{B} = 0$$

інтегральна форма

$$\oint_l \mathbf{H} d\mathbf{l} = \int_s \mathbf{j} d\mathbf{S} \quad (2.51a)$$

$$\oint_s \mathbf{B} d\mathbf{S} = 0 \quad (2.51б)$$

Важливою властивістю магнітостатичного поля є те, що воно не здійснює роботи у разі вільного руху заряду. Щоб це показати, помножимо скалярно обидві частини рівняння руху заряду в магнітному полі $d(m\mathbf{v})/dt = q[\mathbf{v} \times \mathbf{B}]$ на вектор швидкості \mathbf{v} і врахуємо, що $\mathbf{v}d(m\mathbf{v}) = d(mv^2/2) = dE_k$, а $[\mathbf{v} \times \mathbf{B}]\mathbf{v} \equiv 0$, де E_k – кінетична енергія заряду q . Отже

$$dE_k/dt = 0, \quad (2.52)$$

і зміни кінетичної енергії не відбувається. Зв'язано це з тим, що сила Лоренца $F_{\text{л}} = q[\mathbf{v} \times \mathbf{B}]$ перпендикулярна швидкості \mathbf{v} частки і не викликає прискорення уздовж траєкторії, а тільки скривлює її.

Технічно такі поля створюються постійними магнітами або електричними струмами, що протікають у провідному середовищі. У першому випадку відсутні макроскопічні струми ($\mathbf{j} = 0$), і магнітостатичне поле описується рівняннями

$$\text{rot } \mathbf{H} = 0 \quad \oint_l \mathbf{H} d\mathbf{l} = 0 \quad (2.53)$$

Це означає, що магнітостатичне поле є безвихровим і за характером просторового розподілу подібним до електростатичного поля. Така властивість дає можливість розраховувати розподіл магнітного поля для деякої скалярної функції, вводячи поняття *магнітостатичного потенціалу* $V_m(\mathbf{r})$, пов'язавши його з напруженістю магнітного поля співвідношенням, подібним до (2.3)

$$\mathbf{H} = -\text{grad } V_m(\mathbf{r}). \quad (2.54)$$

Підстановка (2.54) у рівняння $\text{div } \mathbf{B} = 0$ з урахуванням тотожності $\text{div grad } f \equiv \nabla^2 f$ приводить до рівняння Лапласа для магнітостатичного потенціалу

$$\nabla^2 V_m = 0. \quad (2.55)$$

Використання магнітостатичного потенціалу дозволяє для розрахунків розподілів магнітного поля використовувати добре відпрацьовані методи розв'язку (у тому числі і чисельного) рівняння Лапласа, а також аналогії з розподілом електростатичних полів за подібних граничних умов.

Треба пам'ятати, що магнітостатичний потенціал не має такого фізичного сенсу, пов'язаного з роботою, як електростатичний; *магнітне поле не здійснює роботи над зарядом.*

Магнітні поля, що створюються постійними електричними струмами, не зовсім коректно називати статичними, оскільки струм створюється рухом зарядів. Доречніше їх називати *стаціонарними*. Відповідно до першого рівняння з (2.51) такі поля не є безвихровими або потенціальними. Але і в цьому випадку, враховуючи друге рівняння з (2.51) і тотожність $\text{div}(\text{rot}\mathbf{A}) \equiv 0$, можна ввести поняття *векторного магнітного потенціалу* \mathbf{A} через співвідношення

$$\text{rot}\mathbf{A} = \mathbf{B}. \quad (2.56)$$

Якщо підставляти (2.56) у перше рівняння (2.51) у диференціальній формі, то в лівій його частині буде вираз $\text{rot}(\text{rot}\mathbf{A}) = \text{grad}(\text{div}\mathbf{A}) - \nabla^2\mathbf{A}$. Тут треба мати на увазі, що вектор \mathbf{A} введено через диференціальне співвідношення, тому зміна його на будь-яку константу не впливає на величину \mathbf{B} . Більш того, додавання до вектора \mathbf{A} будь-якого градієнтного поля $V(\mathbf{r})$ також не змінює вектора $\mathbf{B}(\mathbf{r})$, оскільки $\text{rot}(\text{grad}V) \equiv 0$. Це дозволяє накласти на вектор \mathbf{A} деяку додаткову умову, що спрощує розрахунок поля. Зазвичай для магнітостатичних полів обирають

$$\text{div}\mathbf{A} = 0. \quad (2.57)$$

За такого вибору перше рівняння (2.51) спрощується і приймає вигляд

$$\nabla^2\mathbf{A} = -\mu\mu_0\mathbf{j}. \quad (2.58)$$

У результаті для векторного магнітного потенціалу отримуємо рівняння Пуассона, яке на відміну від електростатичного є векторним, еквівалентним трьом скалярним. Природно, виникає питання про переваги використання вектора \mathbf{A} при розрахунках розподілу індукції $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ або напруженості $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ магнітного поля. По-перше, розв'язок рівняння Пуассона (2.58) можна отримати, як і для електростатичного потенціалу, у загальному вигляді

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (2.59)$$

За заданого розподілу струмів у просторі інтегрування (2.59) може опинитися більш простим, ніж інтегрування диференціального рівняння $\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j}$. По-друге, обчислення потоку вектора індукції через деяку поверхню вимагає знаходження поверхневого інтеграла $\Phi = \int_S \mathbf{B} d\mathbf{S}$. В той же час обчислення потоку через векторний магнітний потенціал проводиться через циркуляцію вектора \mathbf{A} по контуру, що обмежує дану поверхню

$$\Phi = \int_S \text{rot } \mathbf{A} d\mathbf{S} = \oint_l \mathbf{A} dl. \quad (2.60)$$

2.2.2. Приклади розрахунку магнітних полів

Приклад 2.10. Магнітне поле одиночного провідника. На відміну від прикладу 1.1 тут розглянемо, по-перше, круглий провідник скінченного діаметру (рис. 2.21, а). По-друге, розрахунок розподілу поля проведемо на основі диференціальної форми першого рівняння Максвелла: $\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j}$. Обираючи циліндричну систему координат (рис. 2.21,а) і виходячи з осьової симетрії для прямого нескінченно довгого провідника, приймемо: $\partial/\partial z = \partial/\partial \varphi = 0$. За цих умов від виразу для оператора rot у циліндричній системі координат (див. додаток) залишаються доданки

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{e}_r \cdot 0 - \mathbf{e}_\varphi \frac{\partial H_z}{\partial r} + \mathbf{e}_z \frac{1}{r} \frac{\partial(rH_\varphi)}{\partial r}.$$

Оскільки вектор густини струму, що протікає по провіднику, має тільки z -складову ($\mathbf{j} = \mathbf{e}_r \cdot 0 + \mathbf{e}_\varphi \cdot 0 + \mathbf{e}_z \cdot j(r)$), то вектор напруженості магнітного поля матиме тільки азимутальну φ -складову ($\mathbf{H} = \mathbf{e}_r \cdot 0 + \mathbf{e}_\varphi \cdot H(r) + \mathbf{e}_z \cdot 0$), а рівняння Максвелла для z -проекції набере вигляду

$$\frac{1}{r} \frac{d(rH)}{dr} = j(r). \quad (2.61)$$

Для області простору поза провідником ($r > R = d/2$), де струм відсутній ($j = 0$), $d(rH)/dr = 0$ і $rH = C_1$. Константа інтегрування може бути знайдена з граничної умови, якою виступає значення магнітного поля на поверхні $H(R)$: $C_1 = RH(R)$. У результаті $H(r) = H(R)R/r$.

Знаходження поля усередині провідника вимагає знання розподілу густини струму по його поперечному перетину. Якщо вважати провідник ідеальним, то усередині магнітне поле відсутнє (див. розд. 1.5), а весь струм протікає по поверхні з лінійною густиною $j_s = I/2\pi R$. Значення магнітного поля на поверхні дорівнює $H(R) = I/2\pi R$ (приклад 1.9). У результаті отримуємо розподіл поля довкола провідника

$$\mathbf{H} = \mathbf{e}_\varphi \cdot I/2\pi r. \quad (2.62)$$

У реальних провідниках питання про розподіл густини струму по поперечному перетину вимагає вельми детальних досліджень. Для постійного струму у тонких провідниках можна приблизно вважати, що струм розподілений рівномірно по перетину з густиною $j = I/\pi R^2 = \text{const}$, і рівняння (2.61) приймає вигляд

$$\frac{1}{r} \frac{d(rH)}{dr} = I/\pi R^2. \quad (2.63)$$

Просте інтегрування цього рівняння дає $rH = jr^2/2 + C_2$. Оскільки на осі провідника ($r = 0$) $H \neq \infty$, то $C_2 = 0$. Звідси усередині провідника

$$\mathbf{H}(r) = \mathbf{e}_\varphi \cdot Ir/2\pi R^2, \quad (2.64)$$

тобто напруженість поля лінійно зростає при віддаленні від осі (рис. 2.21,б), набуваючи на поверхні провідника такого ж значення, як і зовні $H(R) = I/2\pi R$.

Для подальшого використання представимо отриманий розподіл у декартових координатах. З рис. 2.22 слідує прості співвідношення для такого переходу:

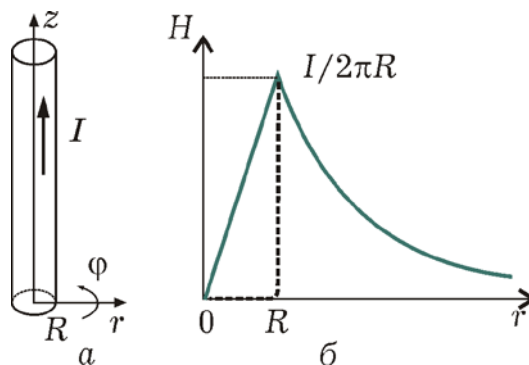


Рис. 2.21. Розподіл магнітного поля довкола циліндричного провідника із струмом. Штрихова лінія – для ідеального провідника

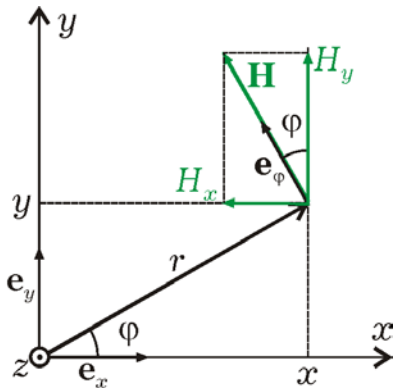


Рис. 2.22. Перехід від циліндричних координат до декартових

$$\mathbf{e}_\varphi = -\mathbf{e}_x \sin\varphi + \mathbf{e}_y \cos\varphi, \quad \cos\varphi = x/r, \\ \sin\varphi = y/r, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Підставляючи їх у вираз (2.62), отримаємо для вектора \mathbf{H} :

$$\mathbf{H} = \frac{I}{2\pi} \frac{-\mathbf{e}_x y + \mathbf{e}_y x}{x^2 + y^2}. \quad (2.65)$$

Рівняння кривих $dx/H_x = dy/H_y$, що описують силові лінії в координатах x і y (див. додаток 1), у разі підстановки проєкцій H_x і H_y з (2.5) набуває вигляду $x dx + y dy = 0$. Його розв'язок $x^2 + y^2 = C^2$ є рівнянням концентричних кіл, а константа інтегрування – їх радіусом.

Приклад 2.11. Магнітне поле двопровідної лінії.

Розглянемо два паралельних круглих провідника, по яких струми протікають у протилежних напрямках (рис. 2.23,а).

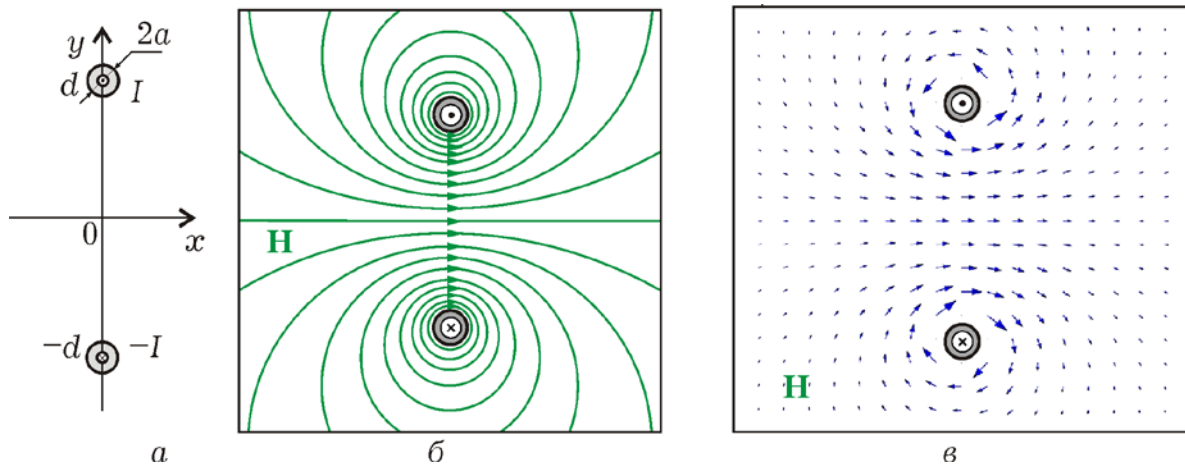


Рис. 2.23. Розташування координатних осей відносно провідників (а) і розподіл напруженості магнітного поля у вигляді силових ліній (б) і у вигляді векторного поля (в)

Для розрахунку розподілу магнітного поля, що створюється струмами, скористаємося методом суперпозиції полів довкола кожного провідника, які визначаються на основі розподілу в одиночному провіднику. Цей метод можна застосовувати, якщо магнітне поле одного провідника не впливає на розподіл густини

струму в іншому. Таке наближення можливе для нескінченно тонких провідників і наближено допустиме, коли відстань між провідниками істотно перевищує їх діаметр ($d \gg a$).

Щоб скористатися результатами попереднього прикладу, необхідно у виразі (2.65) змістити початок відліку по осі y на $\pm d$ і змінити знаки відповідно до напрямку протікання струмів. У результаті отримаємо для верхнього провідника

$$\mathbf{H}_1 = \frac{I}{2\pi} \frac{-\mathbf{e}_x(y-d) + \mathbf{e}_y x}{x^2 + (y-d)^2}, \quad (2.66)$$

а для нижнього

$$\mathbf{H}_2 = \frac{I}{2\pi} \frac{\mathbf{e}_x(y+d) - \mathbf{e}_y x}{x^2 + (y+d)^2}. \quad (2.67)$$

Підсумовуючи останні вирази, після простих перетворень отримаємо

$$\mathbf{H} = \frac{I}{2\pi} \frac{\mathbf{e}_x 2a(x^2 - y^2 + d^2) + \mathbf{e}_y 4dxy}{[x^2 + (y-d)^2][x^2 + (y+d)^2]}. \quad (2.68)$$

Для представлення розподілу поля у вигляді сімейства силових ліній треба розв'язати рівняння $dx/H_x = dy/H_y$, яке після підстановки виразів для проєкцій з (2.68) набуває вигляду

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{x^2 - y^2 + d^2}. \quad (2.69)$$

Розв'язок цього рівняння можна представити у формі

$$x^2 + (y \pm C)^2 = C^2 - d^2, \quad (2.70)$$

де C – постійна інтегрування.

Даний вираз є рівнянням сімейства кіл, що мають радіус $\sqrt{C^2 - d^2}$, і центр яких зміщений по осі y на $\pm C$. Різні знаки тут відповідають різним напівплощинам $\mp y$. На рис. 2.23 зображено розподіл магнітного поля за допомогою сімейства силових ліній (б) і у вигляді векторного поля (в), розрахованого за виразом (2.68) для дискретного набору точок.

Для розрахунку *погонної індуктивності* необхідно зв'язати потік вектора магнітної індукції, що створюється у двопровідній лінії

з величиною струму. Поверхнею S для розрахунку потоку зручно обрати площину завдовжки Δl , що проходить між осями провідників для $x = 0$ в межах від $y = -d + a$ до $y = d - a$. У цьому перетині магнітне поле має тільки x -складову, рівну

$$\mathbf{H}_{(x=0)} = \frac{I}{\pi} \frac{\mathbf{e}_x d}{d^2 - y^2}. \quad (2.71)$$

Обираючи елементом поверхні інтегрування площадку $dS = \Delta l dy$, обчислимо

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} d\mathbf{S} = \frac{\mu\mu_0 \Delta l I}{\pi} \int_{-d+a}^{d-a} \frac{dy}{y^2 - d^2} = \frac{\mu\mu_0 \Delta l I}{\pi} \ln \frac{2d - a}{a}. \quad (2.72)$$

Коефіцієнт при I у правій частині для одиничної довжини ($\Delta l = 1$) дорівнює *погонній індуктивності двопровідної лінії*

$$L_0 = \frac{\mu\mu_0}{\pi} \ln \frac{2d}{a}. \quad (2.73)$$

Тут ми знехтували величиною a порівняно з $2d$, оскільки даний розподіл отримано з використанням принципу суперпозиції, що передбачає відсутність взаємного впливу магнітних полів на розподіл густини струмів, що можливо тільки у тонких провідниках, якщо $d \gg a$.

Отримане рішення можна поширити і на провідники скінченного діаметру, якщо їх контур поєднати з силовою лінією відповідного діаметру, а відстань обрати відповідно до зсуву їх центру.

Приклад 2.12. Магнітне поле коаксіальної лінії. Для коаксіальної двопровідної лінії (рис. 2.24,а), до якої підключено навантаження, струм протікає по провідниках у протилежних напрямках. Розподіл поля в просторі між провідниками знаходиться так само і має такий саме вигляд, як і для одиночного провідника (приклад 2.10):

$$\mathbf{H} = \mathbf{e}_\varphi \cdot I / 2\pi r. \quad (2.74)$$

За межами внутрішньої області ($r > R_2$) магнітне поле можна розрахувати, приймаючи, що струм рівномірно розподілений по

перетину зовнішнього провідника з густиною $j = -I/\pi(R_3^2 - R_2^2) = \text{const}$.

Розв'язок рівняння (2.74) має вигляд $rH = jr^2/2 + C_3$, де константу інтегрування C_3 можна знайти з умови $H(R_2) = I/2\pi R_2$:

$$C_3 = \frac{I}{2\pi} \left(1 + \frac{R_2^2}{R_3^2 - R_2^2} \right).$$

У результаті розподіл напруженості магнітного поля в зовнішньому провіднику може бути описаний виразом

$$\mathbf{H}(r) = \frac{I}{2\pi r} \frac{R_3^2 - r^2}{R_3^2 - R_2^2}. \quad (2.75)$$

Результуючий розподіл магнітного поля представлений на рис. 2.24 у вигляді силових ліній (в) і у вигляді радіальної залежності (б). На внутрішній поверхні зовнішнього провідника напруженість дорівнює лінійній густині поверхневого струму $H(R_2) = I/2\pi R_2$ і спадає углиб провідника. Якщо вважати зовнішній провідник ідеальним, то, як і в прикладі 2.10, в ньому магнітне поле відсутнє. Одним з головних підсумків цього рішення є те, що *магнітне поле не виходить за межі коаксіальної лінії*.

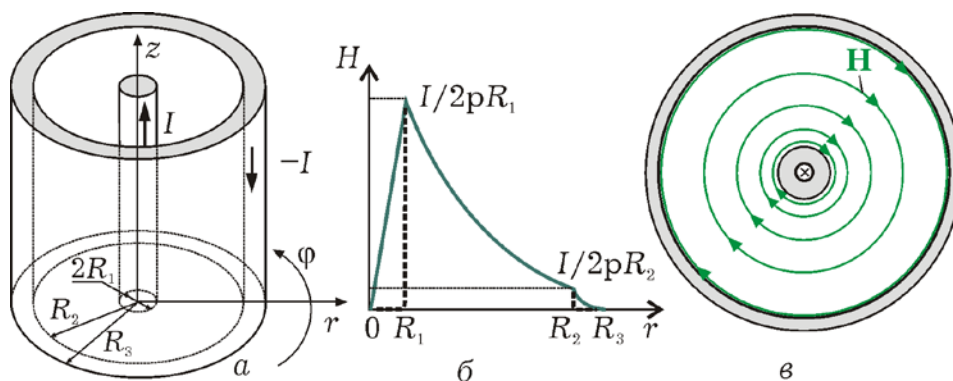


Рис. 2.24. Вибір координатної системи для коаксіальної лінії (а), радіальний розподіл напруженості магнітного поля (б) і розподіл поля у вигляді силових ліній (в). Штрихова лінія (б) – для ідеального провідника

Технічно важливим параметром коаксіальної лінії є *погонна індуктивність*, тобто індуктивність одиничної довжини. Для її розрахунку необхідно обчислити потік вектора магнітної індукції через поверхню, якою оберемо площину, що співпадає з радіальним

перетином довжиною Δl (рис. 2.25). Використання (2.74) приводить до результату

$$\int_S \mathbf{B} d\mathbf{S} = \frac{\mu\mu_0 I \Delta l}{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = \frac{\mu\mu_0 I \Delta l}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}, \quad (2.76)$$

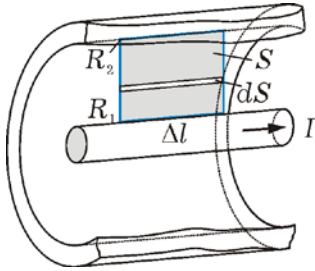


Рис. 2.25. Вибір поверхні інтегрування для розрахунку потоку вектора магнітної індукції

у якому коефіцієнт пропорційності між струмом і потоком визначає величину індуктивності. Приймаючи $\Delta l = 1$, отримуємо вираз для погонної індуктивності

$$L_0 = \frac{\mu\mu_0}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}. \quad (2.77)$$

Приклад 2.13. **Магнітне поле тороїдального соленоїда.**

Тороїдальний соленоїд є провідниковою котушкою, намотаною на поверхню тороїда. З N витків котушки на рис. 2.26 показаний тільки один виток у вигляді лінії струму I . Щільність намотування зазвичай характеризують числом витків на одиницю довжини $n = N/2\pi R_T$, де R_T – радіус осьової лінії тороїда.

Для розрахунку розподілу магнітного поля у такому соленоїді зручно скористатися першим рівнянням Максвелла в інтегральній формі

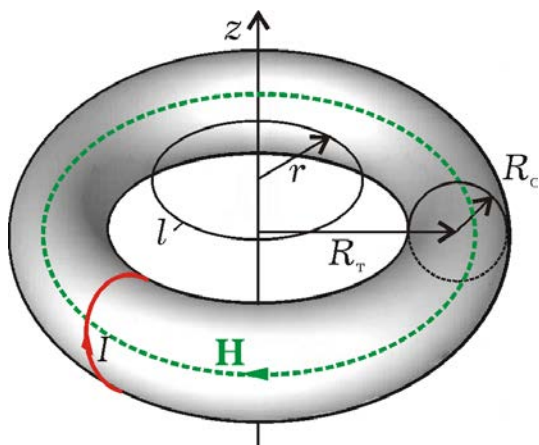


Рис. 2.26. Вибір координатної системи і контура інтегрування l для розрахунку магнітного поля в тороїдальному соленоїді

$$\oint_l \mathbf{H} d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{j} d\mathbf{S}. \quad (2.78)$$

Зауважимо, що інтеграл у правій частині є повним струмом I_S , який пронизує поверхню S , обмежену контуром інтегрування l . Зважаючи на очевидну осьову симетрію даної конструкції за контур інтегрування зручно

обрати коло довільного радіусу r з центром на осі z (рис. 2.26).

Очевидно, що у тих випадках, коли контур інтегрування проходить поза об'ємом соленоїда, лінії струму або не перетинають поверхню S , або перетинають її двічі у зворотних напрямках. Оскільки сумарний струм у цих випадках буде нульовим, то можна зробити висновок, що магнітне поле поза соленоїдом буде відсутнім. І лише у тому випадку, коли коло l проходить усередині об'єму соленоїда, кожна лінія струму перетинає поверхню інтегрування один раз, забезпечуючи сумарний струм $I_S = NI$. Інтеграл у лівій частині (2.78), як і в прикладі 1.1, дорівнює добутку магнітного поля H на довжину кола інтегрування $2\pi r$.

У результаті отримаємо

$$\mathbf{H} = \mathbf{e}_\varphi \frac{NI}{2\pi r} = \mathbf{e}_\varphi nI \frac{R_T}{r}. \quad (2.79)$$

Магнітне поле усередині тороїдального соленоїда зменшується при віддаленні від осі, але якщо радіус тороїда R_T помітно перевищує радіус намотування соленоїда R_c , то це зменшення незначне. Істотна особливість такого соленоїда полягає в тому, що магнітне поле зосереджене тільки усередині соленоїда, а поля розсіяння відсутні.

2.3. КВАЗІСТАЦІОНАРНІ ПОЛЯ ТА ЕЛЕКТРОННІ КОЛА

2.3.1. Умова квазістаціонарності

Нехай для заданих постійних напруг і струмів джерел знайдені координатні векторні функції $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ і $\mathbf{H}(\mathbf{r})$. Якщо напруги джерел *повільно* змінюються у часі за якимось законом $f(t)$, то ці функції також залежатимуть від часу за таким саме законом. Якщо вони міняються за величиною, зберігаючи свій просторовий розподіл, то функції $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ і $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ можна представити у вигляді

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r})f(t), \quad \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{H}(\mathbf{r})f(t). \quad (2.80)$$

Таке уявлення означає, що поля в усіх точках простору змінюються синхронно, але їх розподіл описується тими ж функціями, що і розподіл статичних полів. Такі поля називають

квазістаціонарними і відповідно розрахунок їх розподілу може проводитися так само як і статичних полів.

Необхідною умовою квазістаціонарності є можливість нехтувати запізнюванням, коли час запізнювання $\tau = l/c$ значно менший порівняно з T – характерним часом зміни полів. У електроніці часто використовують компоненти, в яких поля локалізуються в невеликих об'ємах простору. Якщо їх розміри l , в межах яких поля помітно відмінні від нуля, набагато менші за довжину хвилі джерела сигналу, то в них можна знехтувати запізнюванням. Їх називають *компонентами із зосередженими параметрами*.

2.3.2. Найпростіші компоненти електронних кіл

Найпростіші компоненти приладів електронної техніки – резистори, котушки індуктивності, конденсатори, відрізки з'єднувальних ліній. Крім названих електронні кола містять так звані активні компоненти, які безпосередньо перетворюють і підсилюють сигнали, перетворюють енергію з однієї форми в іншу, відображають інформацію і т.п. Ці компоненти вивчаються в інших курсах. Розглянемо лише найпростіші (пасивні) компоненти з точки зору їх схемотехнічних властивостей, тобто зв'язку між струмом і напругою.

Резистивні компоненти. Резистор у найпростішому варіанті – деякий об'єм речовини (рис. 2.27, а), у якому протікають струми провідності і для якого виконується співвідношення (1.3):

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}.$$

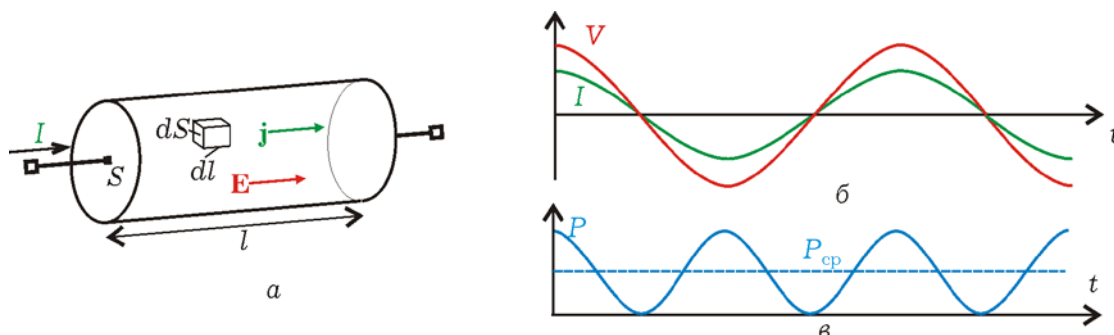


Рис. 2.27. Схематичне зображення резистора (а), миттєвих значень напруги і струму (б) та потужності (е)

Характерною особливістю таких компонентів є їх нагрівання під час протікання струму. Електрична потужність, яка перетворюється у теплову, описується останнім доданком рівняння балансу енергії (1.12)

$$P = \int_{V_r} \mathbf{j} \mathbf{E} dV_r. \quad (2.81)$$

Для з'ясування властивостей резистора як компонента електронного кола помножимо обидві частини рівності (1.3) на елементарний об'єм $dSdl$ і проінтегруємо по всьому об'єму. Інтеграл від $\mathbf{j}d\mathbf{S}$ у лівій частині – повний струм I , а інтеграл від $\mathbf{E}d\mathbf{l}$ у правій – різниця потенціалів на кінцях зразка. Тому $I l = \sigma S V$ або

$$V = IR, \quad (2.82)$$

де $R = l/\sigma S$ – опір.

Таким чином, для резисторів характерна пряма пропорційність між струмом, що протікає, і падінням напруги. Ця закономірність називається законом Ома, а коефіцієнт пропорційності – опором резистора.

Виконавши подібне інтегрування в (2.81), можна отримати

$$P = IV, \quad (2.83)$$

що відповідає закону Ленца–Джоуля.

Якщо прикладена напруга є гармонійною $V = V_m \cos \omega t$, струм змінюватиметься за таким саме законом (рис. 2.27, б) $I = I_m \cos \omega t$, а миттєва потужність

$$P = IV = I_m V_m \cos^2 \omega t = I_m V_m (1 + \cos 2\omega t)/2 \quad (2.84)$$

має деяку постійну складову та змінну, яка змінюється у часі з подвійною частотою (рис. 2.27, в). Усереднюючи (2.84) за часовий період T , отримаємо середню потужність, що нагріває резистор $P_{\text{ср}} = I_m V_m / 2$

Слід зауважити, що лінійна залежність між напругою та струмом (2.82) спостерігається тільки для початкової ділянки вольт-амперної характеристики резистора. У сильних електричних полях питома електрична провідність стає залежною від напруженості електричного поля і закон Ома порушується.

Індуктивні компоненти. Характерною ознакою індуктивних елементів є магнітне поле, яке виникає у разі протікання електричного струму. Зазвичай їх виконують у вигляді котушок з проводу для зосередження у малому об'ємі достатньо сильного поля. З магнітним полем пов'язано накопичення енергії, яка визначається з рівняння балансу енергії (1.12),

$$W_H = \int_{V_r} (\mu\mu_0 H^2 / 2) dV_r \quad (2.85)$$

та її потужність, як швидкість зміни енергії

$$P_H = \frac{d}{dt} \left[\int_{V_r} \frac{\mu\mu_0 H^2}{2} dV_r \right]. \quad (2.86)$$

Для з'ясування схемотехнічних властивостей таких елементів розглянемо котушку (рис. 2.28, а) з провідника без втрат, по якій протікає струм, і скористаємося другим рівнянням Максвела в інтегральній формі (1.4):

$$\oint_l \mathbf{E} d\mathbf{l} = - \frac{d}{dt} \int_s \mathbf{B} d\mathbf{S}. \quad (2.87)$$

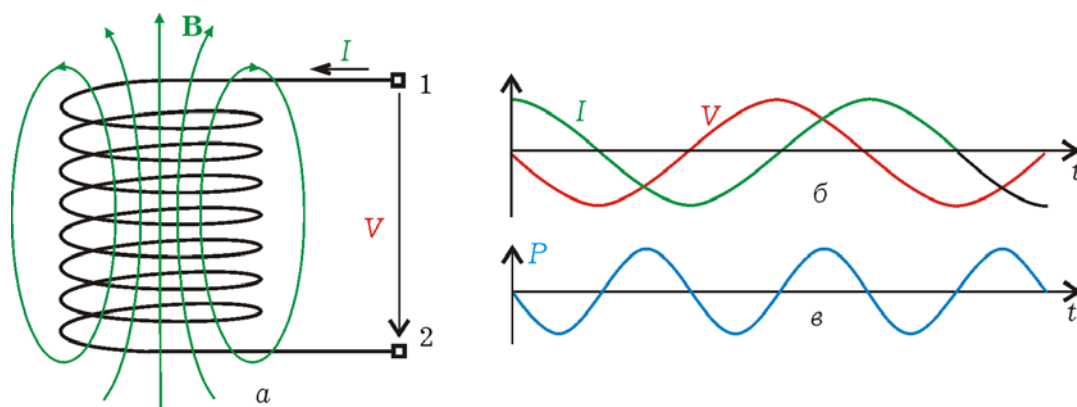


Рис. 2.28. Схематичне зображення котушки індуктивності (а), миттєвих значень напруги і струму (б) та потужності (в)

Оберемо контур інтегрування у вигляді замкненої лінії, яка проходить від точки 1 до точки 2 вздовж провідника зі струмом, і потім від точки 2 до точки 1 по вільному простору. Оскільки в ідеальному проводі електричне поле відсутнє, інтеграл на першій ділянці дорівнює нулю, а на другій – різниці потенціалів між точками 1 і 2, тобто падінню напруги на котушці (з протилежним

знаком). Інтеграл у правій частині дорівнює потоку вектора магнітної індукції через поверхню, обмежену вибраним контуром. Як відомо, цей потік пропорційний струму, тобто $\Phi_B = LI$, тому *напруга на котушці пропорційна швидкості змінення струму у часі*:

$$V = LdI/dt, \quad (2.88)$$

а коефіцієнт пропорційності L називають *індуктивністю*.

У разі роботи котушки на змінному струмі $I = I_m \cos \omega t$ напруга на ній буде дорівнювати $V = -\omega LI_m \sin \omega t$ і випереджати струм за фазою на $\pi/2$ (рис. 2.28, б). Миттєва потужність

$$P = IV = \frac{d}{dt} \left(\frac{LI^2}{2} \right) = -\frac{\omega LI_m^2}{2} \sin 2\omega t \quad (2.89)$$

змінюється у часі з подвійною частотою (рис. 2.28, в) і має чисто коливальний характер, так що її середнє за період значення дорівнює 0.

З використанням методу комплексних амплітуд $\partial/\partial t = i\omega$, $[I \rightarrow \dot{I} \exp(i\omega t), V \rightarrow \dot{V} \exp(i\omega t)]$ між комплексними амплітудами напруги й струму буде спостерігатись пряма пропорційність, тому що

$$\dot{V} = i\omega L \dot{I}. \quad (2.90)$$

Формально ця залежність для комплексних амплітуд аналогічна закону Ома, і коефіцієнт пропорційності $X_L = \omega L$ називається *індуктивним реактивним опором* котушки.

Ємнісні компоненти. Відмінною ознакою елементів, які мають ємнісні властивості, є електричне поле, що виникає у разі їх приєднання до джерела напруги. Як правило, такі компоненти виготовляють у вигляді двох металевих пластин з діелектричним прошарком так, щоб енергія електричного поля

$$W_E = \int_{V_r} \frac{\epsilon \epsilon_0 E^2}{2} dV_r, \quad (2.91)$$

була зосереджена у малому об'ємі. Швидкість зміни цієї енергії пов'язують з потужністю джерела напруги

$$P_E = \frac{d}{dt} \left[\int_{V_r} \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} dV_r \right]. \quad (2.92)$$

За змінної напруги на пластинах конденсатора (рис. 2.29, а) в його колі буде протікати струм I , який відповідно до рівняння неперервності дорівнюватиме струму зміщення (1.6) між пластинами конденсатора

$$I_{\text{зм}} = \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{D} d\mathbf{S}. \quad (2.93)$$

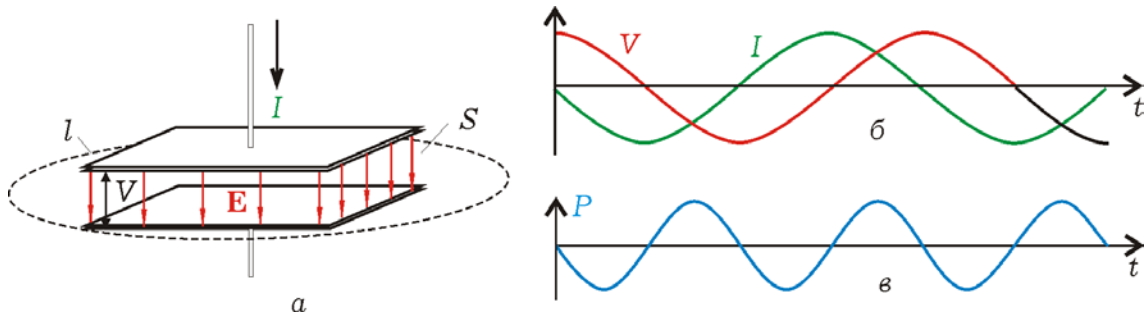


Рис. 2.29. Схематичне зображення конденсатора (а), миттєвих значень напруги і струму (б) та потужності (в)

Вважаючи для спрощення, що поле в конденсаторі однорідне і $E = V/d$, а $D = \varepsilon\varepsilon_0 E$, та не враховуючи крайових ефектів, з (2.93) отримаємо, що струм в колі конденсатора пропорційний швидкості зміни напруги у часі:

$$I = CdV/dt, \quad (2.94)$$

а коефіцієнт пропорційності $C = \varepsilon\varepsilon_0 S/d$ є ємністю конденсатора.

Приєднання до конденсатора змінної напруги $V = V_m \cos \omega t$ викликає в його колі протікання змінного струму $I = -\omega C V_m \sin \omega t$, фаза якого випереджатиме фазу напруги на $\pi/2$ (рис. 2.29, б). Миттєва потужність

$$P = IV = \frac{d}{dt} \left(\frac{CV^2}{2} \right) = -\frac{\omega C V_m^2}{2} \sin 2\omega t \quad (2.95)$$

змінюється у часі з подвійною частотою (рис. 2.29, в) і має чисто коливальний характер, так що її середнє за період значення дорівнює 0.

З використанням методу комплексних амплітуд ($\partial/\partial t = i\omega$) між комплексними амплітудами напруги і струму буде спостерігатись пряма пропорційність:

$$\dot{I} = i\omega C \dot{V}. \quad (2.96)$$

За формою ця рівність аналогічна закону Ома, а величина $1/\omega C = X_C$ називається *реактивним ємнісним опором*.

2.3.3. Поля і електричні кола

Основні рівняння. На низьких частотах, коли прийнятна умова квазістаціонарності, електронні пристрої зазвичай виготовляють у вигляді кіл на основі компонентів із зосередженими параметрами. Аналіз процесів у таких колах недоречно виконувати на основі рівнянь Максвелла у термінах теорії поля. Методи аналізу електронних кіл ґрунтуються на так званих законах Кірхгофа, перший з яких (1.10) отримано в розд. 1, як наслідок рівняння неперервності. Цей закон, строго кажучи, справедливий тільки для постійних струмів. Використання його для кіл змінного струму є наближенням і можливе лише за виконання умов *квазістаціонарності*.

Для встановлення змісту другого закону Кірхгофа розглянемо найпростіше електричне коло із зосередженими компонентами у вигляді, наприклад, послідовного з'єднання резистора, котушки індуктивності, конденсатора та джерела напруги (рис. 2.30). Для аналізу використаємо рівняння балансу енергії (1.12) в інтегральній формі, де у правій частині враховано потужність джерела напруги

$$\oint_S \mathbf{P} d\mathbf{S} + \frac{d}{dt} \left[\int_{V_r} \left(\frac{\varepsilon \varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{\mu \mu_0 H^2}{2} \right) dV_r \right] + \int_{V_r} \mathbf{j} \mathbf{E} dV_r = P. \quad (2.97)$$

Якщо вважати, що дане коло охоплене замкненою поверхнею S , яка є ідеальним екраном, і воно не взаємодіє з навколишнім оточенням, то перший доданок, що описує потік вектора Пойнтинга через поверхню S , у рівнянні (2.97) буде відсутнім.

Також вважатимемо всі компоненти ідеальними, тобто магнітне поле зосереджено тільки в котушці індуктивності, електричне – в конденсаторі, а теплові втрати – в резисторі. Це дає змогу, використовуючи співвідношення (2.84), (2.89) і (2.95), рівняння балансу (2.97) записати в термінах теорії електричних кіл

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{CV_C^2}{2} \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{LI^2}{2} \right) + IV_R = IE. \quad (2.98)$$

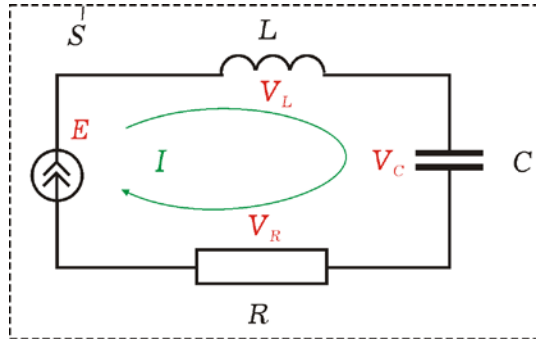


Рис. 2.30. Приклад найпростішого електричного кола з компонентів із зосередженими параметрами

Виконуючи диференціювання, матимемо

$$V_C C \frac{dV_C}{dt} + IL \frac{dI}{dt} + IV_R = IE. \quad (2.99)$$

Враховуючи (2.88) та (2.94), після скорочення отримаємо більш лаконічну форму, яка в теорії кіл відома як *другий закон Кірхгофа*

$$V_C + V_L + V_R = E. \quad (2.100)$$

Використовуючи розглянутий вище для компонентів зв'язок між напругою і струмом, отримаємо рівняння для знаходження сили струму в колі

$$\frac{1}{C} \int I dt + L \frac{dI}{dt} + IR = E \quad (2.101)$$

Це інтегро-диференціальне рівняння може бути використане для знаходження миттєвих значень струму за заданого закону зміни $E(t)$ напруги джерела. Якщо напруга джерела змінюється за гармонійним законом, зручно скористатися методом комплексних амплітуд, для якого рівняння (2.101) перетворюється у лінійне алгебраїчне

$$\left(R + i\omega L - \frac{i}{\omega C} \right) \dot{I} = \dot{E}. \quad (2.102)$$

Для кіл більш складної конфігурації потрібно розв'язувати систему рівнянь, які за формою є першими законами Кірхгофа для вузлів та другими – для замкнених контурів.

Передача енергії. Переходячи від термінів теорії поля на мову теорії кіл, під час аналізу енергетичних співвідношень необхідно пам'ятати, що енергія від джерела до навантаження передається у вигляді *потoku електромагнітної енергії поля між провідниками*. Найпростіше це можна довести на прикладі двопровідної коаксіальної лінії (рис. 2.31).

Потужність, що передається вздовж лінії, розрахуємо як потік вектора Пойнтинга через поперечний перетин між провідниками

$$P = \int_S [\mathbf{E} \times \mathbf{H}] d\mathbf{S}. \quad (2.103)$$

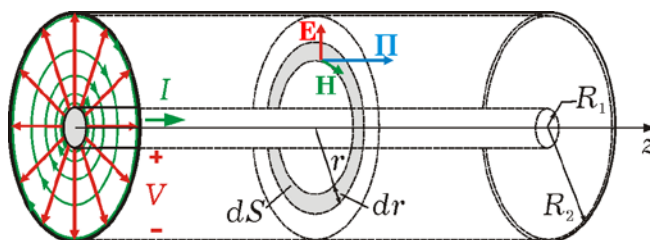


Рис. 2.31. Розподіл електричних та магнітних полів у двопровідній коаксіальній лінії та вибір поверхні інтегрування для знаходження потоку вектора Пойнтинга

Розподіли електричного та магнітного поля у такій конструкції розглянуто у прикладах 2.4 та 2.12 відповідно і задаються співвідношеннями

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}_r \frac{V}{\ln(R_2/R_1)} \cdot \frac{1}{r}, \quad (2.22)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{e}_\varphi \cdot I/2\pi r. \quad (2.74)$$

Поверхню інтегрування оберемо перпендикулярною до осі лінії, а її елемент $dS = 2\pi r dr$ у вигляді кільця радіусом r і шириною dr . Враховуючи напрямки векторів поля та вектора $d\mathbf{S}$, переходимо в (2.103) до добутку скалярних величин і інтегрування по радіусу від R_1 до R_2 .

$$P = 2\pi \int_S E H r dr = \frac{IV}{\ln(R_2/R_1)} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = IV. \quad (2.104)$$

Той факт, що потужність пропорційна силі струму може спонукати на помилкове уявлення про те, що енергія джерела передається вздовж провідників у вигляді кінетичної енергії електронів, які створюють електричний струм. Насправді, ця енергія руху електронів втрачається під час зіткнень електронів з кристалічною ґраткою і нагріває провідники.

Розглянемо елемент поверхні *неідеального* провідника (рис. 2.32), по якій протікає струм. Густина струму визначається провідністю металу та поздовжньою складовою напруженості електричного поля: $j = \sigma E_{\parallel}$. Ця складова приводить до того, що результуючий вектор електричного поля на відміну від ідеального металу (приклад 1.8) не буде нормальним до поверхні.

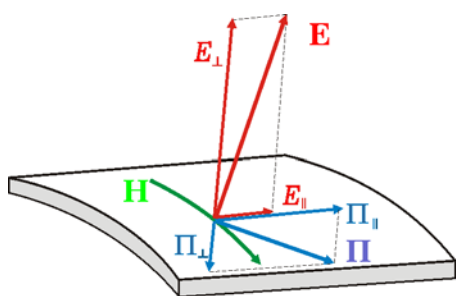


Рис. 2.32. Дотична до поверхні складова електричного поля обумовлює потік енергії вглиб металу

Наявність двох складових електричного поля означає, що вектор Пойнтинга також зручно представити через дві складові. Поздовжня складова $\Pi_{\parallel} = E_{\perp} H$ забезпечує потік енергії від джерела до навантаження вздовж лінії передачі. Поперечна складова вектора Пойнтинга $\Pi_{\perp} = E_{\parallel} H$ направлена вглиб металевої поверхні, де і згасає, викликаючи нагрівання металу.

Контрольні питання та вправи до розділу

2.1. Покажіть, як система чотирьох рівнянь Максвелла перетворюється на дві окремі системи для електростатичних та магнітостатичних полів. Що криється за цим перетворенням?

2.2. Покажіть, як з рівнянь Максвелла отримати рівняння Пуассона і Лапласа. Для чого вони потрібні?

2.3. Сформулюйте основні рівняння, типи та методи розв'язку задач електростатики, звернувши увагу на характерні для електроніки самоузгоджені задачі.

2.4. Описати розподіл електричного поля в плоскому і циліндричному конденсаторі.

2.5. Що таке: а) сили дзеркального відображення, б) довжина екранування, в) закон «ступеня $3/2$ »? У яких ситуаціях використовують ці поняття?

2.6. Опишіть суть методу скінченних різниць та порядок дій для чисельного інтегрування рівняння Лапласа.

2.7. Сформулюйте основні поняття та рівняння для розрахунку магнітних полів, звернувши увагу на відміну статичних та стаціонарних полів.

2.8. Описати розподіл магнітного поля а) навколо провідника зі струмом, б) у коаксіальній лінії передачі, в) у тороїдальному та циліндричному соленоїді.

2.9. Що таке квазістаціонарні поля? Як формулюється умова квазістаціонарності ?

2.10. Користуючись основними рівняннями електромагнетизму, поєднайте фізичну та схемотехнічну точки зору на найпростіші компоненти електроніки із зосередженими параметрами (резистивні, ємнісні, індуктивні). Користуючись рівнянням балансу електромагнітної енергії, скласти рівняння найпростішого електричного кола з компонентів із зосередженими параметрами.

2.11. У якому вигляді електрична енергія передається від джерела до навантаження?

3. ЗМІННІ ПОЛЯ. ХВИЛЬОВІ ПРОЦЕСИ

3.1. ОСНОВНІ РІВНЯННЯ

3.1.1. Рівняння Максвелла у комплексній формі

Властивості електричних кіл дуже часто вивчаються стосовно гармонійних процесів. У тих випадках, коли дія не є гармонійною, її подають як дискретну (ряд Фур'є) або неперервну (інтеграл Фур'є) суму гармонік, а поведінку кожної гармоніки вивчають незалежно. Таке подання можливе, якщо пристрої, що вивчаються, є лінійними, тобто описуються лінійними алгебраїчними або диференціальними рівняннями.

Переваги такого способу пов'язані з можливістю використання методу комплексних амплітуд, суть якого полягає ось у чому. Будь-яка фізична величина, що змінюється за гармонійним законом $a(t) = A_m \cos(\omega t + \varphi_0)$ замінюється у вихідних рівняннях її символічним зображенням у вигляді комплексної величини $\dot{a} = A_m \exp(i\omega t + \varphi_0) = \dot{A} \exp(i\omega t)$ і рівняння розв'язуються тільки для комплексних амплітуд $\dot{A} = A_m e^{i\varphi_0}$, оскільки часовий множник $\exp(i\omega t)$, який входить в усі члени рівняння, скорочується. Для відновлення правильної відповіді після розв'язання необхідно від одержаного розв'язку залишити тільки дійсну частину. Одна з переваг методу комплексних амплітуд для розв'язку диференціальних рівнянь у частинних похідних полягає у зменшенні кількості незалежних змінних, тому що $\partial \dot{a} / \partial t = i\omega \dot{a}$.

Отже, щоб записати рівняння Максвелла (1.2) у комплексній формі, замінюємо всі змінні відповідними комплексними амплітудами, а диференціювання по часу – множенням на $i\omega$. Якщо також у першому рівнянні замість густини струму підставити її значення з (1.3), одержимо

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}} &= i\omega \dot{\epsilon} \dot{\mathbf{E}}, \\ \operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}} &= -i\omega \dot{\mu}_0 \dot{\mathbf{H}}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Тут $\dot{\varepsilon} = \varepsilon - i\sigma/\omega\varepsilon_0$. Величина $\dot{\varepsilon}$, яка називається *комплексною діелектричною проникністю*, не має в цілому якого-небудь фізичного змісту, а введена заради зручності й симетрії запису рівнянь Максвела. Її можна представити так:

$$\dot{\varepsilon} = \varepsilon(1 - i\sigma/\omega\varepsilon_0) = \varepsilon(1 - itg\delta). \quad (3.2)$$

Величина $tg\delta$ називається *тангенсом кута діелектричних втрат*, за своїм фізичним змістом вона дорівнює відношенню струму провідності в середовищі до струму зміщення і є досить важливим електричним параметром, значення якого для різних речовин наводяться у довідниках. Значення $tg\delta$ може служити основою для класифікації речовини. Так, якщо $tg\delta \ll 1$, то переважаючими у речовині будуть струми зміщення, і вона є гарним діелектриком. Якщо $tg\delta \gg 1$, то таку речовину відносять до провідників, тому що в ній можуть протікати практично тільки струми провідності.

Для подальшого використання запишемо векторні рівняння Максвела (1.32) у проекціях на осі прямокутної системи координат:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial y} - \frac{\partial \dot{H}_y}{\partial z} &= -i\omega\dot{\varepsilon}\varepsilon_0\dot{E}_x; & \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial y} - \frac{\partial \dot{E}_y}{\partial z} &= i\omega\mu\mu_0\dot{H}_x; \\ \frac{\partial \dot{H}_x}{\partial z} - \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial x} &= -i\omega\dot{\varepsilon}\varepsilon_0\dot{E}_y; & \frac{\partial \dot{E}_x}{\partial z} - \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial x} &= i\omega\mu\mu_0\dot{H}_y; \\ \frac{\partial \dot{H}_y}{\partial x} - \frac{\partial \dot{H}_x}{\partial y} &= -i\omega\dot{\varepsilon}\varepsilon_0\dot{E}_z; & \frac{\partial \dot{E}_y}{\partial x} - \frac{\partial \dot{E}_x}{\partial y} &= i\omega\mu\mu_0\dot{H}_z; \end{aligned} \quad (3.3)$$

Для опису гармонійних процесів цілком достатньо лише двох рівнянь (3.1) у комплексній формі. Так, якщо застосувати оператор div до обох частин другого з цих рівнянь і врахувати тотожність $\text{div}(\text{rot}\vec{A}) \equiv 0$, одержимо четверте рівняння Максвела як наслідок другого. Аналогічно з першого рівняння можна одержати, що $\text{div}(\dot{\varepsilon}\varepsilon_0\dot{\mathbf{E}}) \equiv 0$. Це відповідає третьому рівнянню Максвела для середовища без просторового заряду. Може постати питання, чи не протирічить це третьому рівнянню Максвела, яке безпосередньо для комплексних амплітуд має вигляд

$$\operatorname{div}(\dot{\epsilon}\epsilon_0\dot{\mathbf{E}}) = \dot{\rho},$$

де величина ϵ є дійсною. Якщо тут замінити $\dot{\rho}$ з рівняння неперервності у комплексній формі

$$i\omega\dot{\rho} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0 \quad (3.4)$$

та врахувати $\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}$, то одержимо

$$\operatorname{div}(\epsilon\epsilon_0 + \sigma/i\omega)\mathbf{E} = \operatorname{div}(\dot{\epsilon}\epsilon_0\dot{\mathbf{E}}) = 0,$$

де діелектрична проникність ϵ вже комплексною. Отже, незалежними з усіх чотирьох рівнянь Максвелла (для гармонійних полів) є тільки перші два.

3.1.2. Граничні умови

Подання рівнянь Максвелла у комплексній формі вимагає відповідної корекції комплексної форми запису граничних умов. Співставивши рівняння (1.2) та (1.32), неважко здогадатися, що комплексну форму запису граничних умов можна одержати безпосередньо з (1.13) – (1.16), формально поклавши в них $\rho = 0$ та $\mathbf{j} = 0$:

$$\begin{aligned} \dot{D}_{1n} &= \dot{D}_{2n}, & \dot{E}_{1\tau} &= \dot{E}_{2\tau}, \\ \dot{B}_{1n} &= \dot{B}_{2n}, & \dot{H}_{1\tau} &= \dot{H}_{2\tau}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Треба тільки пам'ятати, що вектор $\dot{\mathbf{D}}$ включає комплексну діелектричну проникність $\dot{\mathbf{D}} = \dot{\epsilon}\epsilon_0\dot{\mathbf{E}}$.

3.1.3. Рівняння балансу енергії

Рівняння балансу енергії у диференціальній формі (1.11) або в інтегральній формі (1.12) записані для миттєвих значень і не є лінійними щодо амплітуд полів. Тому, строго кажучи, для них не можна використовувати метод комплексних амплітуд, безпосередньо замінюючи миттєві значення їх комплексними амплітудами. Дійсно,

якщо поля змінюються за гармонійним законом: $\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \mathbf{E}_m(\mathbf{r})\cos\omega t$, $\mathbf{H}(\mathbf{r},t) = \mathbf{H}_m(\mathbf{r})\cos(\omega t + \varphi)$, то миттєве значення вектора Пойнтинга

$$\mathbf{\Pi}(\mathbf{r},t) = [\mathbf{E}_m(\mathbf{r}) \times \mathbf{H}_m(\mathbf{r})] \cos\omega t \cos(\omega t + \varphi). \quad (3.6)$$

Використовуючи тотожні тригонометричні перетворення, можна представити

$$\cos\omega t \cos(\omega t + \varphi) = [\cos\varphi (1 + \cos 2\omega t) - \sin\varphi \sin 2\omega t]/2.$$

Цей вираз показує, що в спектрі миттєвих значень вектора Пойнтинга присутня деяка постійна складова, пропорційна $\cos\varphi$, і дві змінні, що змінюються з подвоєною частотою 2ω . Друга з них, пропорційна $\sin\varphi$ і відмінна від 0, якщо між змінами електричного і магнітного поля існує часовий фазовий зсув, відповідає так званій *реактивній* потужності. Частина, що містить $\cos\varphi$ і максимальна для $\varphi = 0$, відповідає *активній* потужності. Вона містить складову, що не лише коливається з подвоєною частотою, але і деяку постійну, яка і відповідає за перенесення енергії. Її значення можна знайти, якщо вектор Пойнтинга (3.6) усереднити за період коливань:

$$\mathbf{\Pi}_{\text{cp}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{\Pi}(\mathbf{r},t) dt = \frac{1}{2} [\mathbf{E}_m(\mathbf{r}) \times \mathbf{H}_m(\mathbf{r})] \cos\varphi. \quad (3.7)$$

Решта всіх доданків дорівнює 0.

Якщо використовувати метод комплексних амплітуд, замінюючи $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ на $\dot{\mathbf{E}}(\mathbf{r})e^{i\omega t}$, а $\mathbf{H}(\mathbf{r},t)$ на $\dot{\mathbf{H}}(\mathbf{r})e^{i\omega t}$, де для даного випадку $\dot{\mathbf{H}}(\mathbf{r}) = H_m(\mathbf{r})e^{i\varphi}$, то такий саме результат можна отримати наступним способом. Вводячи поняття *комплексного вектора Пойнтинга*

$$\dot{\mathbf{\Pi}} = \frac{1}{2} [\dot{\mathbf{E}} \times \dot{\mathbf{H}}^*], \quad (3.8)$$

легко показати, що його дійсна частина відповідає середньому потоку активної потужності

$$\text{Re } \dot{\mathbf{\Pi}} = \mathbf{\Pi}_{\text{cp}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} [\mathbf{E}_m(\mathbf{r}) \times \mathbf{H}_m(\mathbf{r})] \cos\varphi, \quad (3.9)$$

а уявна частина

$$\operatorname{Im} \dot{\mathbf{P}} = \mathbf{P}_\sim = \frac{1}{2} [\mathbf{E}_m(\mathbf{r}) \times \mathbf{H}_m(\mathbf{r})] \sin \varphi \quad (3.10)$$

дорівнює амплітуді реактивної потужності, що коливається.

Отримати з рівнянь Максвелла відповідне рівняння балансу для комплексної потужності можна з рівнянь (3.1) подібно до того, як це робилося для виводу (1.11). З другого рівняння (3.1), скалярно помноженого на $\dot{\mathbf{H}}^*$, віднімемо рівняння, комплексно спряжене до першого і скалярно помножене на $\dot{\mathbf{E}}$. За такої умови праву частину першого не об'єднуємо для введення комплексної діелектричної проникності. У результаті отримаємо вираз

$$\dot{\mathbf{H}}^* \operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}} - \dot{\mathbf{E}} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}}^* = -i\omega \mathbf{B} \dot{\mathbf{H}}^* + i\omega \mathbf{D}^* \dot{\mathbf{E}} - \mathbf{j}^* \dot{\mathbf{E}}.$$

Ліва частина є $\operatorname{div} [\dot{\mathbf{E}} \times \dot{\mathbf{H}}^*] = 2 \operatorname{div} \dot{\mathbf{P}}$, а в правій частині $\mathbf{B} \dot{\mathbf{H}}^* = \mu \mu_0 |\dot{\mathbf{H}}|^2 = 2w_H$ відповідає подвоєній об'ємній густині магнітної енергії, $\mathbf{D}^* \dot{\mathbf{E}} = \varepsilon \varepsilon_0 |\dot{\mathbf{E}}|^2 = 2w_E$ – подвоєній об'ємній густині електричної енергії, а $\mathbf{j}^* \dot{\mathbf{E}} = \sigma |\dot{\mathbf{E}}|^2$ – усередненій за період подвоєній густині потужності втрат на нагрівання. У результаті рівняння балансу енергії у комплексній формі можна представити у вигляді

$$\operatorname{div} \dot{\mathbf{P}} + i\omega (w_H - w_E) + \mathbf{j}^* \dot{\mathbf{E}} / 2 = 0. \quad (3.11)$$

Для переходу до інтегральної форми помножимо всі доданки (3.11) на dV_r і проінтегруємо по об'єму V_r . Використовуючи теорему Остроградського-Гаусса для заміни інтеграла по об'єму від дивергенції вектора Пойнтинга на інтеграл по замкнутій поверхні S , що оточує цей об'єм, отримаємо

$$\oint_S \dot{\mathbf{P}} d\mathbf{S} + i\omega \int_{V_r} (w_H - w_E) dV_r + \int_{V_r} \mathbf{j}^* \dot{\mathbf{E}} dV_r / 2 = 0. \quad (3.12)$$

Як вже наголошувалося у розд. 1.4, для спрощення аналізу балансу енергії, пов'язаної з різними видами її перетворення, часто

використовують поняття *сторонніх джерел*. Врахувати їх вплив можна, вводячи у третій доданок $\dot{\mathbf{j}}_{\text{ст}}$, або $\dot{\mathbf{E}}_{\text{ст}}$ залежно від моделі джерела. Але формально найпростіше у правій частині (3.12) поставити комплексну потужність сторонніх джерел.

Сенс доданків у рівнянні балансу енергії простіше зрозуміти, якщо (3.12) представити окремо для дійсних і уявних частин

$$\operatorname{Re} \oint_S \dot{\mathbf{I}} d\mathbf{S} + \frac{\sigma}{2} \int_V |\dot{\mathbf{E}}|^2 dV = \operatorname{Re} \dot{P}_{\text{ст}}, \quad (3.13)$$

$$\operatorname{Im} \oint_S \dot{\mathbf{I}} d\mathbf{S} + \omega \int_V (w_H - w_E) dV = \operatorname{Im} \dot{P}_{\text{ст}}. \quad (3.14)$$

Ці вирази є рівняннями балансу для середньої за період активної і амплітуди коливань реактивної потужності. Якщо, наприклад, джерело знаходиться усередині даного об'єму, то його активна потужність витрачається на нагрівання провідного середовища, і (або) на створення потоку вектора Пойнтинга назовні. Якщо втрати на нагрівання відсутні, то вся потужність джерела йде на випромінювання. Реактивна потужність джерела також може виходити з об'єму (перший доданок в 3.14) і запасатися у вигляді енергії полів (другий доданок). Якщо в об'ємі відсутнє джерело, то втрати на нагрівання визначають різницю вхідних і вихідних потоків активної потужності. У енергетично ізольованому об'ємі поля можуть існувати за відсутності джерела і втрат, їх реактивна енергія коливатиметься з подвоєю частотою. Різні знаки перед w_E і w_H показують, що запасена реактивна енергія переходить з енергії електричного поля в енергію магнітного і навпаки.

3.2. ХВИЛЬОВЕ РІВНЯННЯ. ХВИЛЬОВА ФУНКЦІЯ.

3.2.1. Хвильові рівняння – наслідки рівнянь Максвелла

Заслуга Максвелла полягала в тому, що ним було введено поняття струму зміщення, що дозволило об'єднати раніш незалежні співвідношення теорії електромагнетизму в єдину систему рівнянь – рівняння Максвелла. Наслідки цього можна уявити, розглядаючи структуру перших двох рівнянь (3.2). Припустимо, що струмом провідності, який протікає у деякому середовищі, збуджується

вихрове магнітне поле (відповідно до першого рівняння 1.2,а). Якщо струм змінюється в часі, так само змінюється й магнітне поле, яке збуджує (відповідно до другого рівняння 1.2,б) вихрове електричне поле. Але змінне електричне поле викликає струм зміщення, який, як і струм провідності, у свою чергу приводить до збудження вихрового магнітного поля. Таким чином, процес взаємного збудження полів, почавшись, може продовжуватися як завгодно довго у часі і передаватися у просторі. Подібні процеси називають *хвильовими*. Для більш глибокого розуміння суті й властивостей хвиль зробимо деякі формальні перетворення. Розглядаючи поки що для спрощення середовище без вільних зарядів ($\rho = 0, j = 0$), подіємо оператором rot на обидва рівняння Максвелла:

$$\text{rot}(\text{rot } \mathbf{H}) = \varepsilon\varepsilon_0\partial(\text{rot } \mathbf{E})/\partial t; \quad \text{rot}(\text{rot } \mathbf{E}) = -\mu\mu_0\partial(\text{rot } \mathbf{H})/\partial t.$$

Підставляючи у їх праві частини $\text{rot } \mathbf{E}$ і $\text{rot } \mathbf{H}$ з рівнянь Максвелла і враховуючи тотожність $\text{rot}(\text{rot } \mathbf{A}) = \text{grad div } \mathbf{A} - \nabla^2 \mathbf{A}$, в якій треба прийняти $\text{div } \mathbf{A} = 0$ відповідно до третього й четвертого рівнянь Максвелла, одержуємо розділення системи на два незалежних рівняння другого порядку:

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0 \partial^2 \mathbf{E}/\partial t^2 = 0; \tag{3.15}$$

$$\nabla^2 \mathbf{H} - \varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0 \partial^2 \mathbf{H}/\partial t^2 = 0.$$

Рівняння такого типу в математичній фізиці називають *хвильовими*. Уявлення про те, що таке хвиля, можна одержати, розглядаючи для спрощення одновимірне хвильове рівняння для деякої скалярної функції $u(x, t)$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0. \tag{3.16}$$

Безпосередньою підстановкою можна впевнитися, що розв'язок цього рівняння має вигляд

$$u(x, t) = C^+ f(x - vt) + C^- f(x + vt), \tag{3.17}$$

де конкретний вид функції f не має значення, вона тільки має бути такою, що двічі диференціюється. Визначальною тут є *структура аргументу*, куди входять координата і час у вигляді лінійної комбінації.

Функції типу $f(x \pm vt)$, точніше будь-які функції аргументу $(x \pm vt)$, математично описують такі процеси, які *називають хвилями*. Щоб уявити характер цих функцій, згадаємо, що функція $f(x - a)$ повторює вигляд функції $f(x)$, але зсунута вправо на величину a .

На рис. 3.1 зображені дві «фотографії» деякої функції $f(x - vt)$, зроблені через проміжок часу Δt . Вони відрізняються лише тим, що всі точки другої кривої зсунуті у бік більших значень x на величину $\Delta x = v\Delta t$. Тому з часом вся функція зміщується вправо зі швидкістю $v = \Delta x / \Delta t$. Стосовно до гармонійних хвильових процесів, коли може бути введене поняття фази, ця швидкість називається *фазовою*.

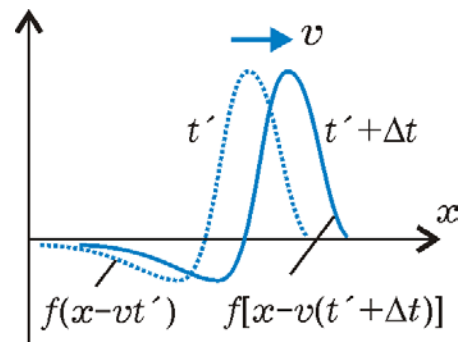


Рис. 3.1. Запізнювання функції $f(x - vt)$ обумовлене структурою аргументу

Легко уявити, що функція $f(x + vt)$ описує процес, який розповсюджується із швидкістю v у напрямку, зворотньому до осі x . Отже доданки у виразі (3.17) – це *пряма і зворотня хвилі*. Якщо розглядати поширення хвиль по відношенню до джерела їх збудження, то звичайно використовують терміни «падаюча» і «відбита» хвиля.

Фізична природа такої структури аргументу $(ax + bt)$, що включає лінійну комбінацію координати і часу, пов'язана з скінченною швидкістю поширення і, відповідно, із *запізнюванням*. Дійсно, якщо в точці $x = 0$ сформована якась часова функція $f(t)$, то в точці на відстані x вона буде за формою такою ж $f(t')$, але зсунутою у часі: $t' = t - \Delta t$. Оскільки запізнювання $\Delta t = x/v$ визначається відстанню і швидкістю поширення, то в аргументі хвильових функцій з'являється координата, пропорційна запізнюванню.

Вирази (3.17) описують так звані незгасні хвилі. Якщо хвиля згасає або зростає в просторі, замість сталих інтегрування C^\pm використовують відповідні координатні функції, які характеризують

закон змінення. Такою ситуація буде, як ми побачимо далі, наприклад, у середовищі із скінченим значенням питомої електропровідності.

3.2.2. Гармонійні хвилі. Основні параметри

У електронній техніці часто мають справу з гармонійними хвильовими процесами, які описують хвильовими функціями аргументу $\omega(t \pm x/v_\phi) = \omega t \pm kx$, який називають *фазою хвилі*, що включає часову ωt і просторову kx частини:

$$u(x, t) = C^+ \frac{\sin}{\cos}(\omega t - kx + \phi_0^+) + C^- \frac{\sin}{\cos}(\omega t + kx + \phi_0^-). \quad (3.18)$$

Подвійний запис тут означає, що можна обирати будь-яку з функцій. Залежно від цього будуть ті або інші значення початкових фаз ϕ_0^\pm для падаючої і відбитої хвилі.

Характерні параметри гармонічних хвиль:

ω – кругова частота часових коливань, що показує зміну фази за одиницю часу;

$k = \omega/v_\phi$ – фазова постійна поширення або хвильове число, що характеризує зміну фази хвилі на одиниці довжини;

v_ϕ – фазова швидкість, тобто швидкість поширення точок з даною фазою. Якщо ввести поняття *фронту хвилі*, як сукупності точок з однаковою фазою, то швидкість переміщення фронту визначатиметься фазовою швидкістю.

Параметри хвилі ω і k пов'язані з *часовим періодом* T і *просторовим періодом* λ (довжина хвилі) однотипними співвідношеннями $\omega = 2\pi/T$, $k = 2\pi/\lambda$. Треба відмітити, що хвиля є періодичною функцією двох незалежних аргументів – координати і часу. В цьому випадку необхідно говорити і про два *незалежні періоди* – просторовий (λ) і часовий (T). Проте, для більшості реальних фізичних процесів між ними зазвичай існує деякий внутрішній зв'язок, який викликаний наявністю *дисперсії*, що виявляється у залежності фазової швидкості від частоти $v_\phi(\omega)$. У різних областях фізики цей закон дисперсії традиційно описують функцією $k(\omega)$, або $\omega(k)$.

У випадках, коли напрямок розповсюдження не співпадає з жодною з координатних осей, хвильові функції мають аргумент $\omega t \pm \mathbf{k}\mathbf{r}$. Тут $\mathbf{k} = \mathbf{e}_x k_x + \mathbf{e}_y k_y + \mathbf{e}_z k_z$ – хвильовий вектор, який має довжину, що дорівнює хвильовому числу, і напрямок, який співпадає з напрямком розповсюдження хвилі або з вектором фазової швидкості; \mathbf{r} – радіус-вектор. Оскільки $\mathbf{k}\mathbf{r} = k_x x + k_y y + k_z z$, можна ввести поняття хвильових чисел вздовж координатних осей, які дорівнюють проєкціям вектора \mathbf{k} на ці вісі. Їм відповідають довжини хвиль $\lambda_{x,y,z} = 2\pi/k_{x,y,z}$, які відраховуються вздовж напрямку координатних осей. Це схематично зображено на рис. 3.2, де суцільними лініями показані «гребені» хвиль, а штриховими «западини». Ясно, що довжина хвилі в будь-якому з напрямків не менша за довжину хвилі, що відраховується вздовж напрямку розповсюдження.

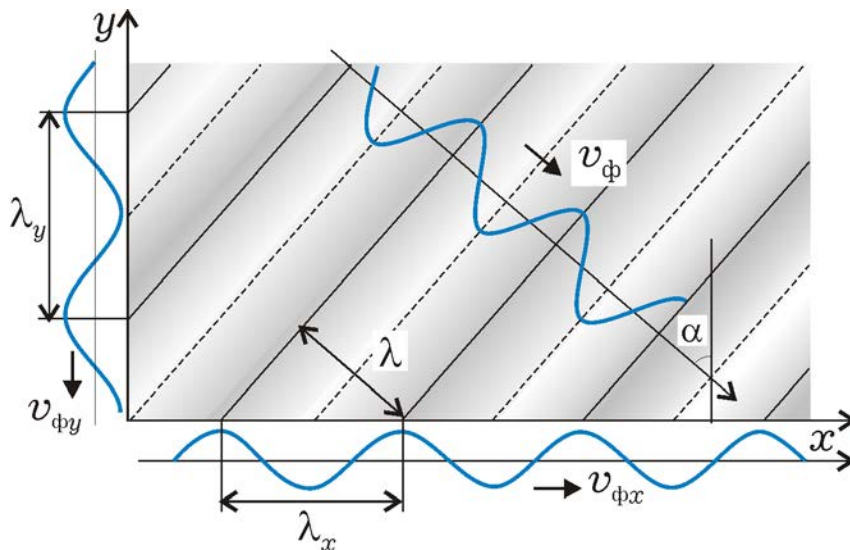


Рис. 3.2. При похилому падінні хвилі відносно деякого напрямку довжина хвилі і фазова швидкість більші за відповідні значення у вільному просторі (вздовж напрямку поширення)

Аналогічно можна ввести поняття фазової швидкості вздовж того чи іншого напрямку: $v_{\phi i} = \omega/k_i$, ($i = x, y, z$) причому ця швидкість завжди не менша за фазову швидкість вздовж напрямку розповсюдження хвилі. В окремому випадку, коли хвиля розповсюджується перпендикулярно до якого-небудь напрямку, фазова швидкість й довжина хвилі вздовж нього нескінченно великі.

3.2.3. Групова швидкість

Поняття групової швидкості зазвичай зв'язують із швидкістю переміщення у просторі максимуму «обвідної» так званого «хвильового пакету» (рис. 3.3), за допомогою якого передається деякий сигнал. Всі сигнали можуть бути представлені або дискретною (ряд Фур'є), або неперервною (інтеграл Фур'є) сумою простих гармонійних складових. З цілого ряду причин у процесі поширення електромагнітних хвиль спостерігається явище дисперсії, через що фазова швидкість окремих частотних складових буде різною. Це приведе до того, що форма пакету змінюватиметься з його переміщенням у просторі, і різні точки обвідної переміщатимуться з різною швидкістю.

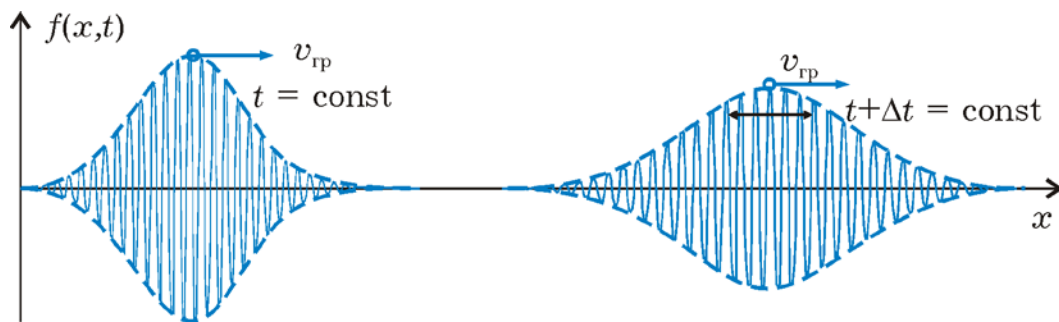


Рис. 3.3. Групова швидкість визначається швидкістю зміщення функції, що огинає «хвильовий пакет»

Для більш коректного визначення групової швидкості розглянемо найпростіший «хвильовий пакет», що складається з двох гармонійних хвильових процесів з близькими значеннями частоти і хвильового числа, віддаленими від деяких середніх значень ω і k на $\Delta\omega$ і Δk відповідно:

$$a(x, t) = A_{m_1} \cos[(\omega + \Delta\omega)t - (k + \Delta k)x] + A_{m_2} \cos[(\omega - \Delta\omega)t - (k - \Delta k)x].$$

Простими тригонометричними перетвореннями такий пакет можна представити (для спрощення прийемо амплітуди рівними) у вигляді:

$$a(x, t) = 2A_m \cos(\Delta\omega t - \Delta k x) \cos(\omega t - kx). \quad (3.19)$$

Такий процес, подібний до «биття» двох гармонійних коливань, можна представити (рис. 3.4) як деяку хвилю з хвильовим множником $\cos(\omega t - kx)$, тобто з середніми параметрами ω і k . Косинус, що стоїть при амплітуді, можна розглядати як функцію, що огинає даний хвильовий пакет. Але цей косинус також є хвильовим процесом з параметрами $\Delta\omega$ і Δk , який переміщується з часом у просторі з швидкістю $\Delta\omega/\Delta k$. Цю величину і приймають за швидкість «пакету», тобто групову швидкість.

Можна показати, що для більш складних сигналів, які представляються як неперервна сума гармонійних (інтеграл Фур'є), групова швидкість визначається відношенням нескінченно малих приростів $d\omega$ і dk , або похідною

$$v_{\text{гр}} = \frac{d\omega}{dk}. \quad (3.20)$$

Для знаходження групової швидкості необхідно знати закон дисперсії, який представляється як залежність між ω і k , або у вигляді залежності фазової швидкості від частоти.

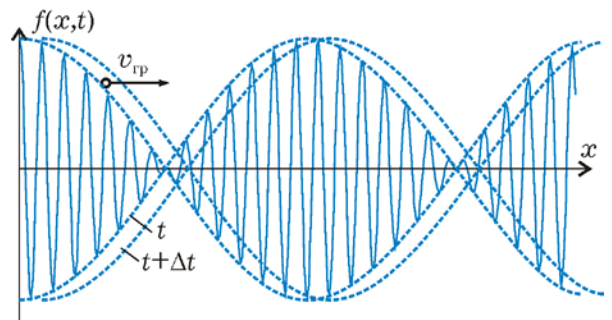


Рис. 3.4. Обвідна групи з двох гармонічних хвиль представляє собою хвилю з параметрами $\Delta\omega$ і Δk

3.3. ПЛОСКА ЕЛЕКТРОМАГНІТНА ХВИЛЯ В ОДНОРІДНОМУ СЕРЕДОВИЩІ.

3.3.1. Розв'язок хвильових рівнянь

Повертаючись до електромагнітних хвиль, треба відзначити, що відповідно до рівняння (3.15) векторні електричні й магнітні поля будуть розповсюджуватись у вигляді незгасних хвиль (для середовища без вільних зарядів) із швидкістю $v = 1 / \sqrt{\epsilon\epsilon_0\mu\mu_0}$, яка залежить від параметрів середовища.

Якщо провести процедуру, аналогічну виведенню рівнянь (3.15), але над рівняннями Максвелла у комплексній формі, то для

комплексних амплітуд векторів електричного й магнітного поля одержимо:

$$\nabla^2 \dot{\mathbf{E}} + \dot{\gamma}^2 \dot{\mathbf{E}} = 0; \quad \nabla^2 \dot{\mathbf{H}} + \dot{\gamma}^2 \dot{\mathbf{H}} = 0, \quad (3.21)$$

Ці рівняння за формою співпадають з (3.1), якщо в останніх прийняти $\partial/\partial t = i\omega$, $\partial^2/\partial t^2 = -\omega^2$, але треба звернути увагу на те, що прийняте при виведенні (3.15) спрощення про відсутність вільних зарядів тут не має місця, тому що втрати в середовищі враховуються у комплексній діелектричній проникності. Величина

$$\dot{\gamma} = \omega \sqrt{\dot{\epsilon} \epsilon_0 \mu \mu_0} = k - i\alpha, \quad (3.22)$$

що введена як позначення, називається *комплексною сталою поширення* електромагнітної хвилі. Дійсна її частина – хвильове число, а уявна характеризує згасання хвилі.

Як найпростішу модель електромагнітного хвильового процесу розглянемо *плоску хвилю*, що розповсюджується в однорідному середовищі. Така назва пов'язана із формою *фронтів хвилі*, тобто поверхні, всі точки якої мають однакову фазу. Ця модель важлива для розуміння загальних властивостей та параметрів електромагнітних хвиль, незважаючи на те, що вона є ідеалізацією реальних хвиль. Дійсно, звичайно електромагнітні хвилі ближчі до сферичних (рис. 3.5), що розходяться радіально від джерела збудження. Але з достатньою точністю подалей від джерела і для обмеженої області простору можна вважати фронт хвилі плоским і прийняти $\partial/\partial x = \partial/\partial y = 0$. Для кількісного аналізу виберемо напрямок осі z , співпадаючим із напрямком розповсюдження хвилі або із напрямком вектора Пойнтінга. Оскільки $\mathbf{\Pi} = [\mathbf{E} \times \mathbf{H}]$, то $E_z = H_z = 0$ і вектори \mathbf{E} та \mathbf{H} лежать у поперечній площині. Обмежуючи розгляд гармонійними процесами, скористаємося рівняннями Максвелла у комплексній формі для проєкцій на координатні вісі (3.3):

$$\begin{cases} d\dot{H}_y / dz = -i\omega \dot{\epsilon} \epsilon_0 \dot{E}_x, & \begin{cases} d\dot{H}_x / dz = i\omega \dot{\epsilon} \epsilon_0 \dot{E}_y, \\ d\dot{E}_x / dz = -i\omega \mu \mu_0 \dot{H}_y, & \begin{cases} d\dot{E}_y / dz = i\omega \mu \mu_0 \dot{H}_x. \end{cases} \end{cases} \end{cases} \quad (3.23)$$

Як бачимо, рівняння розділяються на дві незалежні системи: одна – для проєкцій \dot{E}_x і \dot{H}_y , друга – для \dot{E}_y і \dot{H}_x . Це означає, по-

перше, що їх розв'язки можна розглядати незалежно; по-друге, вибираючи напрямок осі x , співпадаючим з напрямком силових ліній електричного поля ($\dot{E}_x = \dot{E}$, $\dot{E}_y = 0$), автоматично одержуємо нульовий розв'язок для другої системи ($\dot{H}_x = 0$, $\dot{H}_y = \dot{H}$). Тому

$$\begin{cases} d\dot{H} / dz = -i\omega\dot{\epsilon}\epsilon_0\dot{E}, \\ d\dot{E} / dz = -i\omega\dot{\mu}\mu_0\dot{H}. \end{cases} \quad (3.24)$$

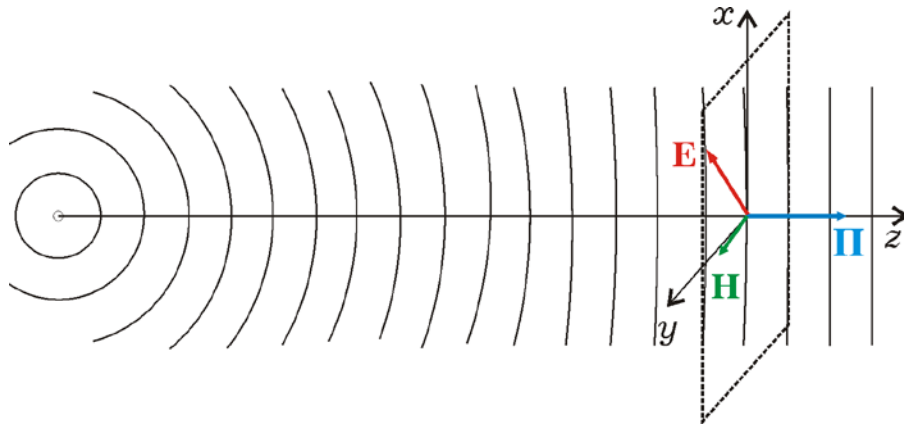


Рис. 3.5. На значній відстані від джерела та в обмеженій області простору фронт хвилі можна вважати плоским

Прийняте припущення про сталість напрямку вектора E обмежує розгляд випадком так званої лінійно поляризованої хвилі. Можна точно довести, що вектори E і H завжди перпендикулярні один до одного незалежно від типу хвилі.

Для розв'язання останньої системи рівнянь необхідно розділити змінні. Це досягається диференціюванням кожного рівняння і підстановкою замість перших похідних їх значень з (3.24). З урахуванням позначення (3.22) одержимо рівняння

$$\begin{aligned} d^2\dot{E} / dz^2 + \dot{\gamma}^2\dot{E} &= 0, \\ d^2\dot{H} / dz^2 + \dot{\gamma}^2\dot{H} &= 0, \end{aligned}$$

які тотожні хвильовим рівнянням (3.21) для одновимірного випадку ($\partial/\partial x = \partial/\partial y = 0$). Їх розв'язок має вигляд

$$\begin{aligned} \dot{E} &= \dot{E}^+ e^{-i\dot{\gamma}z} + \dot{E}^- e^{i\dot{\gamma}z} \\ \dot{H} &= \dot{H}^+ e^{-i\dot{\gamma}z} - \dot{H}^- e^{i\dot{\gamma}z}. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Тут \dot{E}^{\pm} і \dot{H}^{\pm} – сталі інтегрування, що грають роль комплексних амплітуд хвиль, кількість яких збільшилась до чотирьох у результаті підвищення порядку вихідних рівнянь. Для зменшення їх кількості підставимо (3.25) в одне з рівнянь (3.24) і, враховуючи рівність коефіцієнтів при однакових функціях, одержимо:

$$\frac{\dot{E}^+}{\dot{H}^+} = \frac{\dot{E}^-}{\dot{H}^-} = \frac{\dot{\gamma}}{\omega \dot{\epsilon} \epsilon_0} = \sqrt{\frac{\mu \mu_0}{\dot{\epsilon} \epsilon_0}} = \dot{Z}_c. \quad (3.26)$$

Ця величина, що дорівнює відношенню амплітуди електричного поля до амплітуди магнітного поля для кожної з хвиль, називається *хвильовим опором середовища*. Для вакууму $\dot{Z}_c = 120\pi \approx 377$ Ом. Використовуючи (3.26), можна записати:

$$\begin{aligned} \dot{E} &= \dot{E}^+ e^{-i\dot{\gamma}z} + \dot{E}^- e^{i\dot{\gamma}z}, \\ \dot{H} &= (\dot{E}^+ e^{-i\dot{\gamma}z} - \dot{E}^- e^{i\dot{\gamma}z}) / \dot{Z}_c. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Якщо врахувати, що $\dot{\gamma}$ – величина комплексна, і підставивши (3.22) у вираз (3.27), одержимо

$$\begin{aligned} \dot{E} &= \dot{E}^+ e^{-\alpha z} e^{-ikz} + \dot{E}^- e^{\alpha z} e^{ikz}, \\ \dot{H} &= (\dot{E}^+ e^{-\alpha z} e^{-ikz} - \dot{E}^- e^{\alpha z} e^{ikz}) / \dot{Z}_c. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Для відновлення дійсних значень необхідно вирази для комплексних амплітуд (3.28) помножити на $e^{i\omega t}$ і взяти дійсну частину. В результаті для електричного поля (для магнітного аналогічно) одержимо

$$\begin{aligned} E &= \text{Re}(\dot{E} e^{i\omega t}) = E_m^+ e^{-\alpha z} \cos(\omega t - kz + \varphi_0^+) + \\ &+ E_m^- e^{\alpha z} \cos(\omega t + kz + \varphi_0^-). \end{aligned} \quad (3.29)$$

Тут φ_0^+ і φ_0^- – початкові фази, що залежать від вибору початку відліку часу та (або) координати.

Графіки цих функцій для двох фіксованих моментів часу, що відрізняються на Δt , це гармонійні функції (рис. 3.5), амплітуди яких змінюються вздовж координати x за експоненціальним законом:

спадають для падаючої хвилі (рис. 3.5, а) й зростають для відбитої (рис. 3.5, б), тобто згасають вздовж напрямку їх розповсюдження. Величина α визначає швидкість згасання і називається коефіцієнтом згасання.

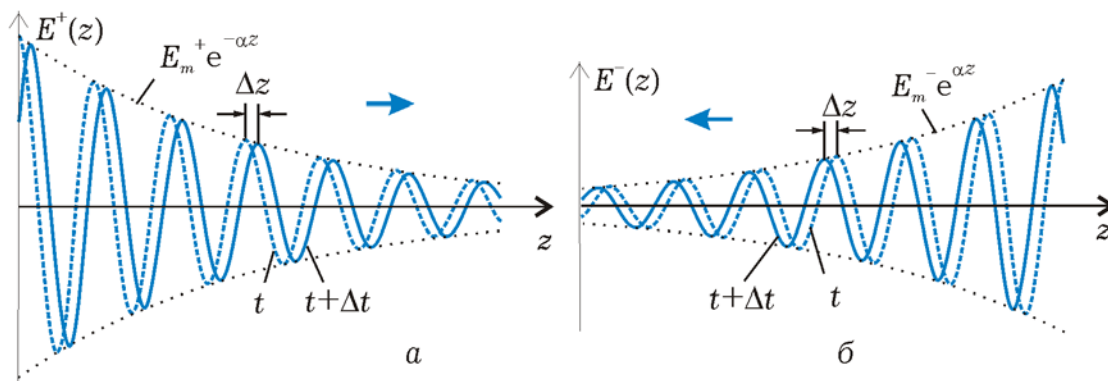


Рис. 3.6. Миттєві значення прямої (а) та зворотної (б) хвилі для фіксованих моментів часу. Амплітуди хвиль згасають у напрямку їх поширення

Цілком природно, що в однорідному середовищі може існувати тільки хвиля, яка буде розповсюджуватися від джерела збудження. Формально це досягається вибором сталої інтегрування $E_m^- = 0$. Крім того, вибором початку відліку завжди можна отримати початкову фазу $\varphi^+ = 0$. Тому для однорідного й нескінченного середовища

$$E = E_m^+ e^{-\alpha z} \cos(\omega t - kz)$$

$$H = (E_m^+ / |\dot{Z}_c|) e^{-\alpha z} \cos(\omega t - kz - \varphi_z);$$

де $|\dot{Z}_c|$ і φ_z – відповідно модуль і фаза комплексного значення хвильового опору середовища.

Для середовища без втрат ($\text{tg}\delta = 0$) хвильовий опір – величина дійсна і вектори \mathbf{E} і \mathbf{H} змінюються у часі і просторі синфазно (рис. 3.7). У середовищі з втратами змінювання \mathbf{H} відстають по фазі від \mathbf{E} тим більш, чим більші втрати.

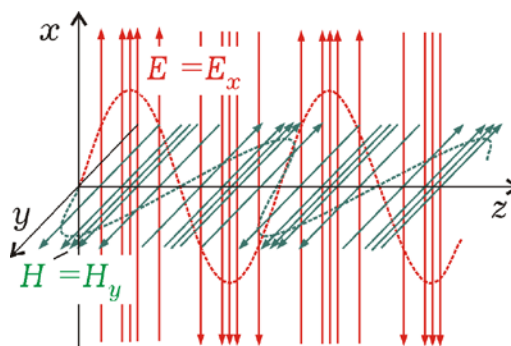


Рис. 3.7. Просторовий розподіл електричного та магнітного полів. Значення напруженості поля пропорційні густині силових ліній

3.3.2. Поляризація електромагнітних хвиль

Поляризація електромагнітної хвилі – її властивість, пов'язана з просторовою орієнтацією векторів поля. Зазвичай за напрям поляризації обирають орієнтацію вектора електричного поля.

Під час розгляду моделі плоскої електромагнітної хвилі у попередньому розділі ми обрали напрям осі x уздовж вектора електричного поля, передбачаючи, що його орієнтація не змінюється у просторі, і він завжди розташований у площині xOz . Ця ситуація відповідає *лінійній* поляризації, а якщо вісь x стосовно природного простору направлена вертикально, то говорять про *вертикальну* поляризацію (рис. 3.8, а).

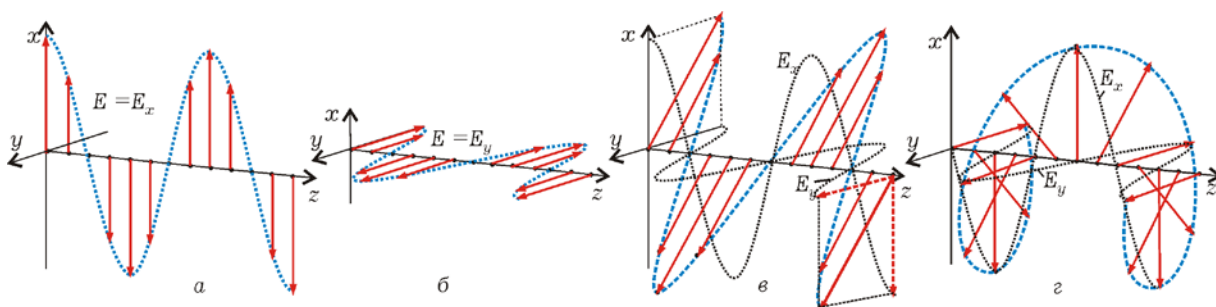


Рис. 3.8. Орієнтація векторів електричного поля для вертикальної (а), горизонтальної (б), похилої (в) та кругової (г) поляризацій. Значення напруженості поля пропорційні довжині векторів

Якщо напрям вектора \mathbf{E} пов'язати з віссю y , то обнулятиметься перша система рівнянь з (3.23), і ми отримаємо аналогічний (3.23) розв'язок другої системи, але вектор електричного поля буде розташований у площині yOz . Це відповідає *горизонтальній* поляризації (рис. 3.8, б).

Проте такий вибір можливий тільки у разі збереження просторової орієнтації векторів поля, що спостерігається далеко не завжди. Системи рівнянь (3.23) є незалежними і їх спільний розв'язок для необмеженого непоглинаючого середовища повинен мати вигляд суми хвиль, що біжать:

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}_x E_{mx} \cos(\omega t - kz + \varphi_{0x}) + \mathbf{e}_y E_{my} \cos(\omega t - kz + \varphi_{0y}). \quad (3.30)$$

Природно, що параметри хвилі ω і k мають бути однаковими для обох проекцій, а амплітуди і початкові фази можуть розрізнятися. Якщо, наприклад, фази однакові, то орієнтація вектора \mathbf{E} у просторі зберігатиметься у процесі поширення і хвиля буде поляризованою також лінійно, але під деяким кутом до осей x і y (рис. 3.8, в). Величина цього кута залежить від співвідношення між амплітудами проекцій вектора електричного поля.

Але за різних початкових фаз орієнтація вектора електричного поля не зберігається. Наприклад, для фазового зсуву між амплітудами на $\pm\pi/2$ і рівних амплітуд (рис. 3.8, г) довжина вектора \mathbf{E} залишається незмінною, а його кінець у просторі описуватиме спіраль постійного радіусу, а у фіксованій точці простору – коло. Це відповідає *круговій* поляризації, яка залежно від знаку фазового зсуву і відповідно від напрямку обертання може бути *правою круговою* або *лівою круговою* поляризацією. За інших фазових зсувів і різних амплітуд E_{mx} і E_{my} можна отримати *еліптично поляризовану* хвилю.

3.3.3. Параметри хвилі у різних середовищах.

Розглянемо детально, як змінюються основні параметри хвилі, збудженої на якійсь частоті ω , в залежності від властивостей середовища. Спочатку зробимо деякі підготовчі перетворення. Відповідно до (3.22) і (3.2)

$$\dot{\gamma} = k - i\alpha = \omega\sqrt{\dot{\epsilon}\epsilon_0\mu\mu_0} = (\omega / c)\sqrt{\epsilon\mu(1 - i \operatorname{tg} \delta)}.$$

Для зручності розділення $\dot{\gamma}$ на дійсну та уявну частини приймемо до уваги, що

$$\begin{aligned} |\dot{\gamma}|^2 &= k^2 + \alpha^2 = (\omega / c)^2 \epsilon\mu \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \delta}, \\ \operatorname{Re}(\dot{\gamma}^2) &= k^2 - \alpha^2 = (\omega / c)^2 \epsilon\mu. \end{aligned}$$

Звідси, складаючи ці вирази, а потім їх віднімаючи, легко одержати

$$\begin{aligned}
k &= (\omega / c) \sqrt{\varepsilon \mu (\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \delta} + 1)} / 2, \\
\alpha &= (\omega / c) \sqrt{\varepsilon \mu (\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \delta} - 1)} / 2.
\end{aligned}
\tag{3.31}$$

Вираз для комплексного хвильового опору для загального випадку можна записати у формі

$$\dot{Z}_c = \sqrt{\frac{\mu \mu_0}{\varepsilon \varepsilon_0 \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \delta}}} e^{i\delta/2}.
\tag{3.32}$$

Проаналізуємо параметри хвилі для чотирьох найпростіших, але досить характерних в інженерній практиці випадків.

1. *Вакуум* ($\varepsilon = 1$, $\mu = 1$, $\operatorname{tg} \delta = 0$). Безпосередньо з (3.31) одержуємо, що в вакуумі згасання електромагнітної хвилі відсутнє ($\alpha = 0$), хвиля розповсюджується із швидкістю $c_0 = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$ і має довжину хвилі $\lambda_0 = 2\pi/k = 2\pi c_0/\omega = c_0/f$. Крім того, хвильовий опір вакууму $Z_{c0} = \sqrt{\mu_0 / \varepsilon_0} = 120\pi$ Ом – величина дійсна, і вектори електричного й магнітного полів змінюються синфазно.

2. *Ідеальний діелектрик* ($\varepsilon > 1$, $\mu = 1$, $\operatorname{tg} \delta = 0$). Відміни від попереднього випадку полягають в тому, що тут швидкість розповсюдження, довжина хвилі і хвильовий опір зменшуються в $\sqrt{\varepsilon}$ раз:

$$c_\varepsilon = c_0/\sqrt{\varepsilon}, \lambda_\varepsilon = \lambda_0/\sqrt{\varepsilon}, Z_{c\varepsilon} = Z_{c0}/\sqrt{\varepsilon}.
\tag{3.33}$$

3. *Діелектрик з малими втратами* ($\varepsilon > 1$, $\mu = 1$, $\operatorname{tg} \delta \ll 1$). Нехтуючи у виразі (3.31) для k величиною $\operatorname{tg}^2 \delta$, одержуємо, що швидкість і довжина хвилі залишаються такими ж, як і в ідеальному діелектрику. Таке наближення не можна зробити у виразі для α . Скористаємось наближеною формулою $\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \delta} \approx 1 + \operatorname{tg}^2 \delta / 2$ і одержимо

$$\alpha \approx \omega \operatorname{tg} \delta / 2c_\varepsilon = \pi \operatorname{tg} \delta / \lambda_\varepsilon = \sigma Z_{c\varepsilon} / 2,
\tag{3.34}$$

тобто коефіцієнт згасання прямо пропорційний питомій електричній провідності середовища.

При проходженні відстані l амплітуда хвилі зменшується в $e^{\alpha l}$ разів, а її енергія в $\beta = e^{2\alpha l}$. Звичайно згасання виражають у децибелах, які визначаються таким чином:

$$\beta \text{ (дБ)} = 10 \lg \beta = 10 \lg (e^{2\alpha l}) \approx 8,686 \alpha l. \quad (3.35)$$

З виразу (3.32) для малих втрат можна вважати, що $|\dot{Z}_{c\varepsilon}| = Z_{c\varepsilon} = Z_{c0}/\sqrt{\varepsilon}$, а $\varphi_Z = \delta/2$, тобто зміни магнітного поля запізнюються по фазі на $\delta/2$ відносно змін електричного.

4. *Провідне середовище*, в якому струми провідності переважають над струмами зміщення ($\text{tg}\delta \gg 1$). У цьому випадку, як витікає з (3.31), для $\text{tg}\delta \gg 1$ можна знехтувати різницею між фазовою сталою і сталою згасання:

$$k \approx \alpha \approx (\omega / c_0) \sqrt{\varepsilon \mu \text{tg} \delta / 2} = \sqrt{\omega \mu \mu_0 \sigma / 2}. \quad (3.36)$$

Хвильовий опір такого середовища є комплексною величиною і тому, якщо $\text{tg}\delta \gg 1$, $\delta \approx \pi/2$, $\exp(i\delta/2) \approx (1+i)/\sqrt{2}$, то з (3.35)

$$\dot{Z}_c = (1+i) \sqrt{\omega \mu \mu_0 / 2\sigma}. \quad (3.37)$$

Одержані результати дозволяють зробити ряд практично важливих висновків.

По-перше, з рівності $k \approx \alpha$ випливає, що поглинання хвилі відбувається на відстанях порядку довжини хвилі. Більш точно глибину поглинання прийнято оцінювати величиною

$$\Delta = 1 / \alpha = \sqrt{2 / \omega \mu \mu_0 \sigma} = 1 / \sigma \text{Re}(\dot{Z}_c). \quad (3.38)$$

У дійсності на відстані Δ відбувається послаблення амплітуди в $e \approx 2,71$ рази. Вважають, що практично поглинання хвилі відбувається на відстанях (3...5) Δ . У такому разі зміна фази хвилі складає (3...5) рад.

Цей же результат означає, що електромагнітне поле біля поверхні провідника проникає у нього на величину порядку Δ . Відповідно і струми провідності протікають лише в

приповерхневому шарі. Вказане явище називається *поверхневим ефектом (скін-ефектом)*. Товщина поверхневого шару зменшується із зростанням частоти, тому цей ефект помітний перш за все на високих частотах. Наприклад, для міді Δ (мкм) $\approx 66/\sqrt{f(\text{МГц})}$ і на частоті 1000 МГц $\Delta \approx 2$ мкм. Для ідеального провідника $\sigma \rightarrow \infty$, $\Delta \rightarrow 0$ і електромагнітне поле усередині нього відсутнє.

Другий важливий висновок випливає з (3.37). Під час розповсюдження хвилі у провіднику зміни магнітного поля відстають по фазі від змін електричного поля. В ідеальному провіднику $\Delta\phi \rightarrow \pi/4$, а хвильовий опір $Z_c \rightarrow 0$.

Третій важливий висновок полягає в тому, що присутність втрат у середовищі приводить до залежності фазової швидкості хвилі від частоти:

$$v_\phi = \omega/k \sim \sqrt{\omega}.$$

Це явище називається *дисперсією*, а функція $v_\phi(\omega)$ – *законом дисперсії*. Часто в теорії хвильових процесів закон дисперсії подають як залежність $k(\omega)$, причому відсутність дисперсії відповідає лінійній залежності, а характер дисперсії визначається відхиленням $k(\omega)$ від прямої. Причиною дисперсії можуть бути не тільки втрати в середовищі розповсюдження, а й, як побачимо далі, конфігурація ліній передачі електромагнітних хвиль.

3.4. ХВИЛІ У ДОВГИХ ЛІНІЯХ

На низьких частотах немає особливих проблем об'єднання електронних компонентів у кола за допомогою звичайних провідників. Однак на високих частотах, коли *довжина провідників стає співмірною з довжиною хвилі сигналу*, через скінченність часу розповсюдження електромагнітного збудження потенціал у різних точках вздовж провідника буде різним. За цих умов стають невірними закони Ома й Кірхгофа, на яких заснована теорія кіл, і точний аналіз процесів тут можливий тільки на основі теорії поля. Однак, доцільним може бути хвильовий підхід, в основі якого лежить теорія розповсюдження *хвиль струму й напруги* вздовж лінії передачі.

3.4.1. Телеграфні рівняння

В однорідній двопровідній лінії (рис. 3.9), де спостерігається суттєве запізнення поширення сигналу, струм і напруга є функціями координат і часу, тому

$$dV(x, t) = (\partial V / \partial x) dx + (\partial V / \partial t) dt,$$

$$dI(x, t) = (\partial I / \partial x) dx + (\partial I / \partial t) dt.$$

Для аналізу процесів, що виникають під час передачі сигналу вздовж лінії через його запізнення, необхідно знати швидкість його поширення, яка визначається параметрами лінії. Провідники ліній мають скінченний опір, який треба враховувати, особливо за великої їх довжини. У процесі протікання струму навколо проводів утворюється магнітне поле, величина якого визначається їх індуктивністю. Неідеальність ізоляції породжує струми витoku між проводами, які залежать від провідності діелектрика. Нарешті, змінне електричне поле між проводами викликає протікання струму зміщення, що моделюється ємністю між проводами. Ці параметри рівномірно (для однорідних ліній) розподілені вздовж всієї довжини проводів, тому пристрої, що включають відрізки довгих ліній, є *колами з розподіленими параметрами*. Для ліній передачі зручно задавати четвірку так званих *погонних* (у розрахунку на одиницю довжини) параметрів: погонний опір r_0 [Ом/м], погонна індуктивність L_0 [Гн/м], погонна провідність g_0 [См/м] та погонна ємність C_0 [Ф/м]. За допомогою цих параметрів моделюють омичний опір та індуктивні властивості провідників, а також струми витoku і струми зміщення в діелектричному середовищі між провідниками лінії.

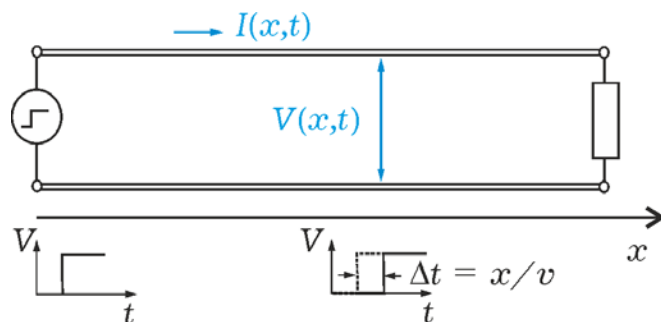


Рис. 3.9. Скінченна швидкість поширення викликає запізнювання сигналу, через що струм і напруга стають функціями координат.

Для складання основних рівнянь, що описують динаміку зміни струму й напруги вздовж лінії, розглянемо диференціальний

відрізок лінії довжиною dx з відомими погонними параметрами. Для такого відрізка лінії цілком придатна схемна модель із зосередженими параметрами (рис. 3.10, а).

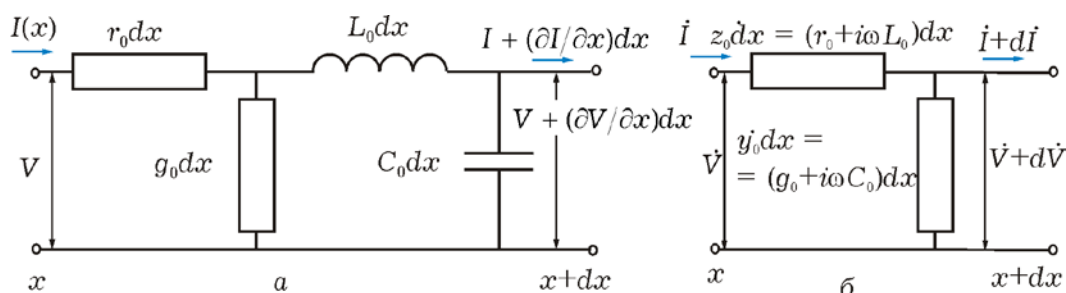


Рис. 3.10. Схемна модель диференціальної ділянки довгої лінії може бути представлена через зосереджені параметри у дійсній (а) та комплексній формі (б).

Природно, що зміна напруги $(\partial V/\partial x)dx$ між провідниками у даний момент часу визначається падінням напруги на омичному $(Ir_0 dx)$ та індуктивному $(L_0(\partial I/\partial t)dx)$ опорах провідників. Аналогічно, зміна струму в проводі $(\partial I/\partial x)dx$ на ділянці dx відбувається за рахунок струму витoku $Vg_0 dx$ та струму зміщення $C_0(\partial V/\partial t)dx$. Звідси, скорочуючи на dx всі доданки, одержимо

$$\partial V/\partial x = -r_0 I - L_0(\partial I/\partial t); \tag{3.39}$$

$$\partial I/\partial x = -g_0 V - C_0(\partial V/\partial t).$$

Одержані диференціальні рівняння у частинних похідних називають *телеграфними*, тому що за їх допомогою був проведений аналіз розповсюдження телеграфних сигналів на великі відстані.

Надалі обмежимося розглядом тільки гармонійних процесів $V(x, t) = V_m(x)\cos(\omega t + \varphi_0) = \text{Re}(\dot{V}(x)e^{i\omega t})$ та $I(x, t) = I_m(x)\cos(\omega t + \varphi_0) = \text{Re}(\dot{I}(x)e^{i\omega t})$ з використанням методу комплексних амплітуд. У цьому випадку модель елементарної ділянки може бути зображена як показано на рис. 3.10,б через комплексні зосереджені погонні параметри $\dot{z}_0 = r_0 + i\omega L_0$ та $\dot{y}_0 = g_0 + i\omega C_0$, а телеграфні рівняння для комплексних амплітуд набувають вигляду:

$$\begin{cases} d\dot{V} / dx = -\dot{z}_0 \dot{I}, \\ d\dot{I} / dx = -\dot{y}_0 \dot{V}. \end{cases} \quad (3.40)$$

Розділити цю систему на незалежні рівняння можна повторним диференціюванням і перехресною підстановкою перших похідних з рівнянь (3.40):

$$\frac{d^2 \dot{V}}{dx^2} = \dot{\gamma}^2 \dot{V}; \quad \frac{d^2 \dot{I}}{dx^2} = \dot{\gamma}^2 \dot{I}. \quad (3.41)$$

Тут введено позначення

$$\sqrt{\dot{z}_0 \dot{y}_0} = \sqrt{(r_0 + i\omega L_0)(g_0 + i\omega C_0)} \equiv \dot{\gamma} = \alpha + ik, \quad (3.42)$$

де величину $\dot{\gamma}$ називають *комплексною сталою розповсюдження*, а розв'язок (3.41) постає у вигляді прямих (падаючих) та зворотних (відбитих) хвиль струму і напруги:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \dot{V}^+ e^{-\dot{\gamma}x} + \dot{V}^- e^{\dot{\gamma}x}; \\ \dot{I} &= \dot{I}^+ e^{-\dot{\gamma}x} - \dot{I}^- e^{\dot{\gamma}x}. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Тут \dot{V}^+ , \dot{V}^- , \dot{I}^+ і \dot{I}^- – сталі інтегрування, що мають смисл комплексних амплітуд відповідних хвиль. Зменшити їх кількість можна, якщо підставити розв'язок (3.43) у вихідні рівняння (3.40) й прирівняти коефіцієнти біля однакових функцій. У результаті одержимо зв'язок між амплітудами струму й напруги для хвиль однакового напрямку:

$$\frac{\dot{V}^+}{\dot{I}^+} = \frac{\dot{V}^-}{\dot{I}^-} = \sqrt{\frac{r_0 + i\omega L_0}{g_0 + i\omega C_0}} \equiv \dot{Z}_0, \quad (3.44)$$

де \dot{Z}_0 називають *хвильовим опором лінії*.

Привертає увагу, що це відношення однакове для хвиль, що падають, та відбитих і визначається погонними параметрами лінії. Використовуючи зв'язок та позначення (3.44), запишемо:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \dot{V}^+ e^{-\dot{\gamma}x} + \dot{V}^- e^{\dot{\gamma}x}; \\ \dot{I} &= (\dot{V}^+ e^{-\dot{\gamma}x} - \dot{V}^- e^{\dot{\gamma}x}) / \dot{Z}_0. \end{aligned} \quad (3.45)$$

Відновити з (3.45) миттєві значення дійсних функцій можна за правилом $V(x,t) = \text{Re}[\dot{V}(x)e^{i\omega t}]$. Враховуючи комплексний характер сталої розповсюдження, одержимо для напруги

$$V(x,t) = V_m^+ e^{-\alpha x} \cos(\omega t - kx + \varphi^+) + V_m^- e^{\alpha x} \cos(\omega t + kx + \varphi^-). \quad (3.46)$$

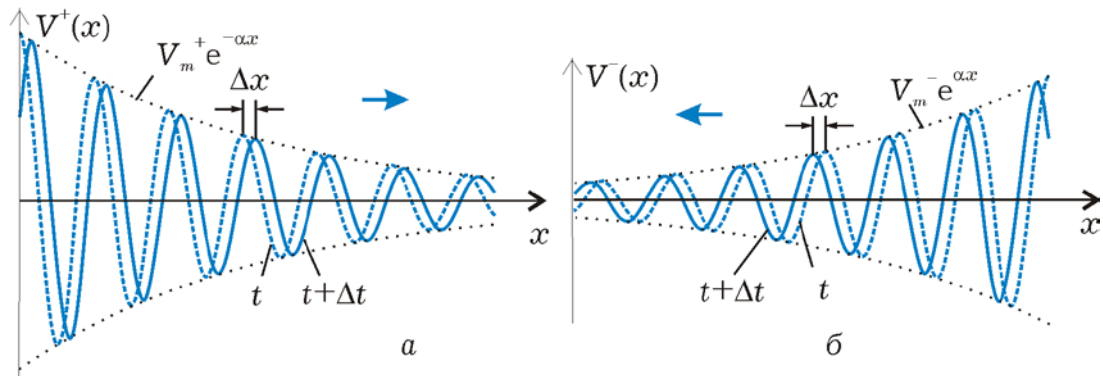


Рис. 3.11. Миттєві «фотографії» падаючої (а) та відбитої (б) хвилі напруги. Як падаюча, так і відбита хвилі затухають у напрямку свого поширення.

Підсумок розв'язання телеграфного рівняння полягає в тому, що у довгій лінії поширення збудження відбувається у вигляді хвильових процесів, причому величина α характеризує згасання хвиль, а k – хвильове число (рис. 3.11). Треба також пам'ятати, що фазова швидкість розповсюдження хвиль $v_\phi = \omega/k$ у загальному випадку залежить від частоти збудження, а це свідчить про наявність дисперсії.

У ряді випадків, особливо на високих частотах, можна знехтувати згасанням в лінії. Це можливо, якщо $r_0 \ll \omega L_0$ та $g_0 \ll \omega C_0$, тобто активний опір провідників має бути багато меншим за індуктивний, а струми витoku між проводами меншими за струми зміщення. У такому разі стала розповсюдження $\dot{\gamma} = i\omega\sqrt{L_0 C_0} = ik$ (тобто $\alpha = 0$), фазова швидкість $v_\phi = 1/\sqrt{L_0 C_0}$ (тобто дисперсія відсутня), а хвильовий опір $Z_0 = \sqrt{L_0 / C_0}$ є дійсною величиною. Розв'язки (3.45) для лінії без втрат приймають вигляд:

$$\begin{aligned}\dot{V} &= \dot{V}^+ e^{-ikx} + \dot{V}^- e^{ikx}; \\ \dot{I} &= (\dot{V}^+ e^{-ikx} - \dot{V}^- e^{ikx}) / Z_0.\end{aligned}\quad (3.47)$$

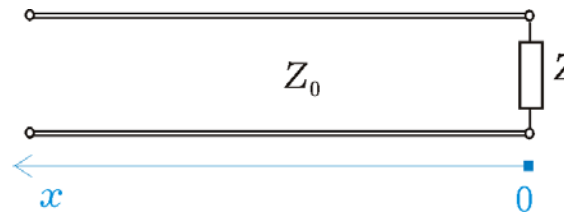
Подальше визначення сталих інтегрування \dot{V}^\pm можливе, якщо відома потужність джерела, що задає амплітуду падаючої хвилі, та умови на навантажувальному кінці лінії, які визначають ступінь відбивання.

3.4.2. Стоячі хвилі в лінії

Для подальшого аналізу зручно поміняти початок і напрямок відліку, як це вказано на рис. 3.12. Поки не визначені сталі інтегрування, це можна зробити просто замінивши знак у фазових множниках (3.47):

$$\begin{aligned}\dot{V}(x) &= \dot{V}^+ e^{ikx} + \dot{V}^- e^{-ikx}; \\ \dot{I}(x) &= (\dot{V}^+ e^{ikx} - \dot{V}^- e^{-ikx}) / Z_0.\end{aligned}\quad (3.48)$$

Рис. 3.12. Початок відліку зручно обрати у місці підключення навантаження.



Ступінь відбивання зручно характеризувати за допомогою комплексного коефіцієнта відбивання

$$\dot{\rho} = \dot{V}^- / \dot{V}^+ = |\dot{\rho}| e^{i\varphi_0}, \quad (3.49)$$

що включає модуль $|\dot{\rho}| = V_m^- / V_m^+$, який дорівнює відношенню амплитуд відбитої та падаючої хвиль, і фазу відбивання $\varphi_0 = \varphi_0^- - \varphi_0^+$, яка показує зсув фази хвилі у місці відбивання.

Щоб зрозуміти, від чого і як залежить ступінь відбивання, розділимо перший вираз з (3.48) на другий для точки підмикання навантаження ($x = 0$). Враховуючи, що $\dot{V}(0) = \dot{V}_H$, $\dot{I}(0) = \dot{I}_H$, а їх відношення $\dot{V}_H / \dot{I}_H = \dot{Z}_H$, одержимо

$$\dot{Z}_H = Z_0 \frac{\dot{V}^+ + \dot{V}^-}{\dot{V}^+ - \dot{V}^-} = Z_0 \frac{1 + \dot{\rho}}{1 - \dot{\rho}}. \quad (3.50)$$

Звідси видно, що коефіцієнт відбивання повністю визначається опором навантаження, точніше, його співвідношенням з хвильовим опором лінії передачі

$$\dot{\rho} = \frac{\dot{Z}_H - Z_0}{\dot{Z}_H + Z_0}. \quad (3.51)$$

Отже, за заданих опорів \dot{Z}_H і Z_0 може бути знайдений коефіцієнт відбивання (його модуль і фаза), а значить відомими стають функції розподілу струму й напруги вздовж лінії передачі з точністю до постійного співмножника (комплексної амплітуди падаючої хвилі):

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= \dot{V}^+(e^{ikx} + \dot{\rho}e^{-ikx}); \\ \dot{I}(x) &= \dot{V}^+(e^{ikx} - \dot{\rho}e^{-ikx}) / Z_0. \end{aligned} \quad (3.52)$$

Ці вирази, записані у вигляді суми падаючих і відбитих хвиль, також можна представити в іншому еквівалентному вигляді, виносячи за дужки експоненту з просторовим набігом фази і відновивши для наочності часовий множник

$$\begin{aligned} \dot{V}(x, t) &= \dot{V}^+(1 + \dot{\rho}e^{-i2kx})e^{i(\omega t + kx)}; \\ \dot{I}(x, t) &= \dot{I}^+(1 - \dot{\rho}e^{-i2kx})e^{i(\omega t + kx)}. \end{aligned} \quad (3.52a)$$

Такий запис визначає напругу і струм для кожної точки довгої лінії у вигляді тільки падаючої хвилі, але з *амплітудами, залежними від координати*. Для розробки пристроїв, що використовують відрізки ліній передачі, часто треба знати розподіл *амплітуди* напруги і (або) струму вздовж лінії. Для дійсних амплітуд

$$V_m(x) = |\dot{V}(x)| = |\dot{V}^+| |e^{ikx} + \dot{\rho}e^{-ikx}| = V_m^+ |1 + \dot{\rho}e^{-i2kx}|; \quad (3.53)$$

$$I_m(x) = |\dot{I}(x)| = |\dot{I}^+| |e^{ikx} - \dot{\rho}e^{-ikx}| = I_m^+ |1 - \dot{\rho}e^{-i2kx}|;$$

Ці функції є періодичними з просторовим періодом $\Delta x = \lambda/2$, на якому аргумент експоненти $2k\Delta x$ змінюється на 2π . Характерними для них є точки з максимальною амплітудою, так звані *пучності*, і точки з мінімальною амплітудою – *вузли*. Така ситуація виникає за рахунок суперпозиції коливань, викликаних падаючою і відбитою хвилями. Результат накладення залежить від різниці фаз, з якими зустрічаються хвилі у даній точці. Її можна отримати, віднімаючи аргументи при косинусах у (3.46),

$$\Delta\varphi = (\omega t - kx + \varphi_0^-) - (\omega t + kx + \varphi_0^+) = -2kx + \varphi_0. \quad (3.54)$$

Пучності утворюються в тих точках, де ця різниця кратна 2π . Такі коливання є *синфазними* і їх результуюча амплітуда дорівнюватиме сумі $V_m^+ + V_m^- = V_{m \max}$. Вузли відповідають тим точкам, де падаюча і відбита хвилі зустрічаються з фазовим зсувом кратним непарному числу π . За рахунок *протифазності* таких коливань амплітуда у вузлах дорівнюватиме різниці $V_m^+ - V_m^- = V_{m \min}$. Відбита хвиля струму має додатковий зсув по фазі на π у порівнянні з відбитою хвилею напруги, про що свідчить знак «-» перед другим доданком для струму в (3.52) і (3.53). Це приводить до того, що просторово вузлам струму відповідають пучності напруги і навпаки.

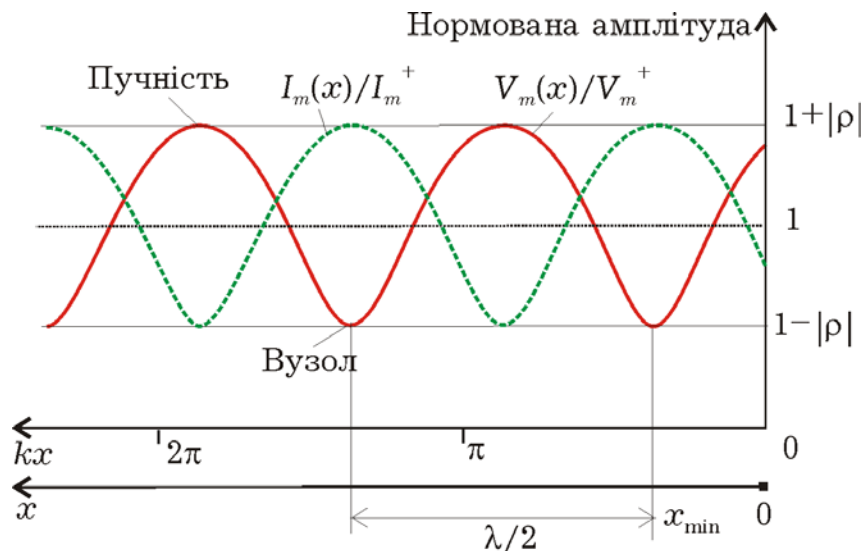


Рис. 3.13. Суперпозиція падаючої і відбитої хвиль приводить до періодичної зміни амплітуди з просторовим періодом у половину довжини хвилі. Розподіли амплітуд хвиль напруги і струму вздовж лінії зсунуті відносно один одного на чверть довжини хвилі.

Примітно, що різниця фаз $\Delta\varphi$ у (3.54) не залежить від часу: у кожній точці вона визначається лише зсувом фази при відбиванні φ_0 і подвоєним («туди і назад») просторовим набігом фази $2kx$ між точкою x і точкою підключення навантаження. Тому крива розподілу амплітуд, а значить і положення вузлів і пучностей, не залежить від часу. З цим і пов'язана назва – «стояча хвиля».

Для більш детального аналізу функцій розподілу амплітуд розглянемо графічний спосіб їх визначення. В кожній точці напруга знаходиться як сума двох доданків: падаючої хвилі $V^+ = \text{Re}[\dot{V}^+ e^{i(\omega t + kx)}]$ (початкова фаза φ^+ звичайно може бути прийнята рівною 0) і відбитої хвилі $V^- = \text{Re}[\dot{V}^- e^{i(\omega t - kx + \varphi_0)}]$. Результируюча напруга – $V(x,t) = \text{Re}[\dot{V}(x)e^{i\omega t}]$, де комплексну амплітуду зручно знайти на комплексній площині (рис. 3.14,а) як суму вектора з довжиною $|\dot{V}^+|$ та просторовою частиною фази kx і вектора з довжиною $|\dot{V}^-| = |\rho||\dot{V}^+|$ та фазою $(\varphi_0 - kx)$, що складається із зсуву при відбиванні $\varphi_0 = \varphi_0^- - \varphi_0^+$ та просторового набігу $-kx$. Дійсна амплітуда напруги дорівнює довжині сумарного вектора.

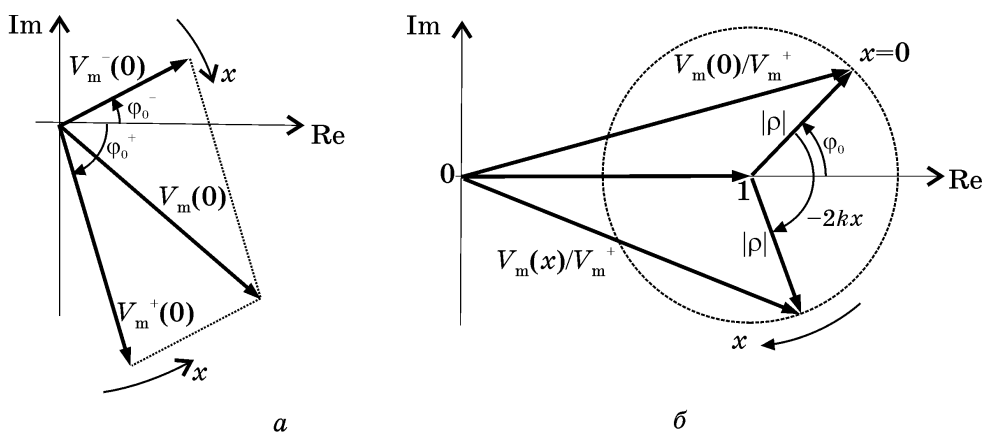


Рис. 3.14. Графічний спосіб визначення результируючої амплітуди на комплексній площині (а). Те саме для векторів, нормованих на амплітуду падаючої хвилі (б)

З переміщенням від навантаження фаза kx збільшується, і вектор падаючої хвилі обертається проти годинникової стрілки, а вектор відбитої у зворотному напрямі. У точках, де ці вектори збігаються за напрямом, утворюється пучність, а там, де вони протилежні – вузол.

Таку побудову зручніше робити, пронормувавши всі доданки на комплексну напругу падаючої хвилі. У цьому разі комплексна

амплітуда падаючої хвилі зображується одиничним вектором, а відбитої — вектором ρe^{-i2kx} (рис. 3.14,б). У точці приєднання навантаження ($x = 0$) амплітуда нормованої напруги дорівнює 1. У довільній точці x' фаза падаючої хвилі збільшиться, а фаза відбитої — зменшиться на kx' . У результаті додатковий зсув між ними складатиме $2kx'$ і нормована амплітуда знаходиться як довжина вектора $1 + \rho e^{-i2kx'}$. З переміщенням від навантаження до джерела кінець результуючого вектора напруги описує коло $|\dot{\rho}| = \text{const}$ (із центром в точці 1), періодично проходячи через точки максимуму $|\dot{V} / \dot{V}^+|_{\text{max}} = 1 + |\dot{\rho}|$, де падаюча і відбита хвилі синфазні, і мінімуму $|\dot{V} / \dot{V}^+|_{\text{min}} = 1 - |\dot{\rho}|$, де вони протифазні. Оскільки нормований вектор відбитої хвилі обертається за годинниковою стрілкою з «подвоєною частотою» за рахунок зустрічного набігу фази (kx — для падаючої і $-kx$ — для відбитої), то період функції розподілу амплітуди напруги дорівнює π вздовж фазової осі kx і $\lambda/2$ — по координатній осі x . Цей факт широко використовується для вимірювання довжини хвилі в лінії. Практично важливо також те, що крива $V_m(x)$ більш гостра в околі мінімуму.

Перший від навантаження вузол x_{min} розташований в тому місці, де фазовий зсув $\Delta\varphi(x_{\text{min}}) = \pi$. Звідси витікає, що відповідно до (3.54) його розташування однозначно пов'язане з фазою коефіцієнта відбивання: $\varphi_0 = \pi + 2kx_{\text{min}} = \pi(1 + 4x_{\text{min}}/\lambda)$. Цей факт використовують для знаходження фази коефіцієнта відбивання по вимірюваному положенню вузла стоячої хвилі.

Розподіл амплітуди струму вздовж лінії повторює розподіл напруги, але максимумами струму співпадають з мінімумами напруги і навпаки. Це відбувається через те, що умови відбивання для хвиль струму й напруги різні. При відбиванні від навантаження хвиля струму має додатковий зсув фази на 180° (знак «-» перед другим доданком у виразі (3.53) для струму).

Отже, в результаті накладання двох зустрічних хвиль виходить, що напруга $V(x, t) = V_m(x)\cos(\omega t + \varphi_V(x))$ і струм $I(x, t) = I_m(x)\cos(\omega t + \varphi_I(x))$ в різних точках лінії передачі мають різні значення амплітуди і фази. Розподіл амплітуд не залежить від часу, тому така суперпозиція називається *стоячою хвилею*. Криву розподілу амплітуди прийнято кількісно характеризувати *коефіцієнтом стоячої хвилі (КСХ)*, який дорівнює відношенню максимальної й мінімальної амплітуд

$$КСХ = \frac{|\dot{V}|_{\max}}{|\dot{V}|_{\min}} = \frac{1 + |\dot{\rho}|}{1 - |\dot{\rho}|} \quad (3.55)$$

й однозначно пов'язаний з модулем коефіцієнта відбивання. Діапазон можливих значень КСХ лежить у межах від 1 до ∞ (рис. 3.15).

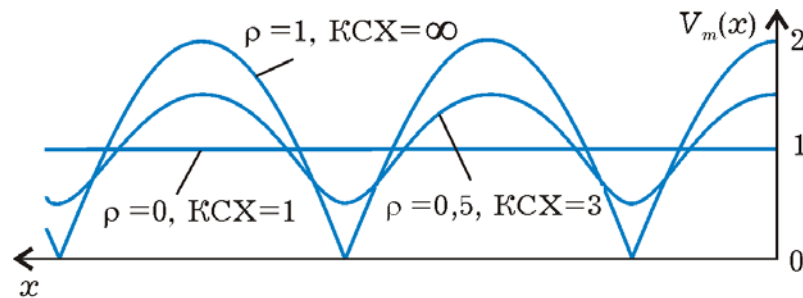


Рис. 3.15. Форма просторового розподілу амплітуди напруги характеризується коефіцієнтом стоячої хвилі.

Ступінь відбивання визначає і величину потужності, яка поступає з лінії у навантаження. Миттєва потужність визначається добутком струму $i(x, t)$ і напруги $V(x, t)$. Вона є досить складною функцією координати і часу і містить деяку постійну складову і змінну, що змінюється з часом з частотою 2ω . Якщо обмежитися тільки середньою за часовий період потужністю, яка і визначає активну потужність, що передається з лінії у навантаження, то її легко визначити як дійсну частину комплексної потужності. Комплексна потужність, що передається по лінії передачі, може бути знайдена через комплексні амплітуди напруги і струму (3.48): Підстановка значень з (3.52) дає

$$\begin{aligned} P_{\text{н}} &= \frac{1}{2} \operatorname{Re}[\dot{V}^+ \dot{I}^{+*} (1 + \dot{\rho} e^{-i2kx})(1 - \dot{\rho}^* e^{i2kx})] = \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Re}[\dot{V}^+ \dot{I}^{+*} (1 - |\dot{\rho}|^2)] = P^+ (1 - |\dot{\rho}|^2), \end{aligned} \quad (3.56)$$

де P^+ – потужність падаючої хвилі. Даний результат показує, що потужність, що відбивається від навантаження, визначається квадратом модуля коефіцієнта відбивання $\dot{\rho}$. Інколи використовують

коефіцієнт відбивання потужності $R = P^-/P^+$, який пов'язаний з амплітудним коефіцієнтом відбивання співвідношенням $R = |\rho|^2$.

3.4.3. Трансформація опору в лініях

Кількісні розрахунки для пристроїв, які включають відрізки ліній передачі, часто проводять у термінах опорів. Введемо поняття комплексного опору в даній точці, як відношення комплексних амплітуд струму й напруги. Оскільки напруга й струм різні для різних точок лінії, то у загальному випадку й опір залежить від координати

$$\dot{Z}(x) = \dot{V}(x)/\dot{I}(x). \quad (3.57)$$

Встановити цей закон змінення можна, підставляючи сюди вирази для напруги й струму з (3.52). Підставляючи також замість ρ його зв'язок (3.51) з опором навантаження, після тотожних перетворень одержимо

$$\dot{Z}(x) = Z_0 \frac{\dot{Z}_H + iZ_0 \operatorname{tg} kx}{Z_0 + i\dot{Z}_H \operatorname{tg} kx}. \quad (3.58)$$

Цей вираз показує, як опір навантаження \dot{Z}_H трансформується в опір $\dot{Z}(x)$ у даній точці лінії. Аналогічний вираз

$$\dot{Z}_2 = Z_0 \frac{\dot{Z}_1 + iZ_0 \operatorname{tg} k(x_2 - x_1)}{Z_0 + i\dot{Z}_1 \operatorname{tg} k(x_2 - x_1)} \quad (3.59)$$

показує закон трансформації опору з точки x_1 в точку x_2 .

На завершення розглянемо два окремих, але характерних приклади.

1. *Режим узгодження* («біжучої» хвилі). З виразу (3.51) виходить, що відбивання відсутнє, якщо лінія навантажена на опір, що дорівнює хвильовому $\dot{Z}_H = Z_0$. У цьому випадку в лінії буде існувати тільки пряма хвиля, амплітуда її у всіх точках буде однаковою (рис. 3.16) і КСХ = 1. Однаковим і рівним хвильовому буде також опір у будь-якій точці вздовж лінії (3.58). Потужність, що передається у навантаження, буде максимальною і дорівнюватиме потужності падаючої хвилі (3.56). Звичайно на

практиці режиму узгодження з цілого ряду причин віддається найбільша перевага.

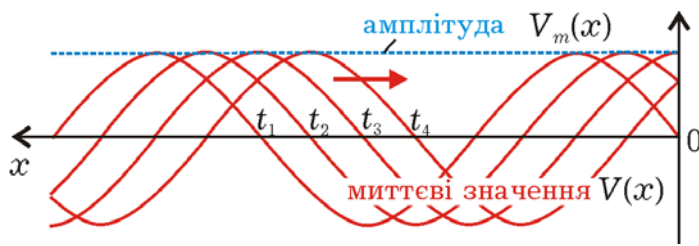


Рис. 3.16. Миттєві «фотографії» хвильового процесу для режиму прямої хвилі. Амплітуда хвилі у всіх точках однакова.

у лінії, навантаженої на чисто реактивне навантаження $\dot{Z}'_H = 0 + iX'_H$. Фізично це означає, що таке навантаження не поглинає енергію і хвиля повністю відбивається. В цьому випадку утворюється чисто стояча хвиля з нульовою амплітудою у вузлах і подвоєною у пучностях, що відповідає КСХ = ∞ . Подібна ситуація має місце також і для режиму короткого замикання ($\dot{Z}'_H = 0, \rho = -1$), або холостого ходу ($\dot{Z}'_H = \infty, \rho = 1$).

На практиці режим повного відбивання найчастіше реалізують за допомогою короткого замикання лінії. За цих умов $\rho = -1$ і в лінії утворюються чисто стоячі хвилі напруги й струму з розподілом амплітуд, вказаним на рис. 3.17,б. Розподіли для миттєвих значень легко відновити з (3.48) для комплексних амплітуд за умови $\dot{V}^- = -\dot{V}^+$:

$$\begin{aligned} V(x, t) &= -2V_m^+ \sin kx \sin \omega t, \\ I(x, t) &= 2V_m^+ \cos kx \cos \omega t. \end{aligned} \quad (3.60)$$

Строго кажучи, ці вирази, отримані як сума двох зустрічних хвиль з рівними амплітудами, описують не хвильовий процес, а коливання (рис. 3.17,а) з подвоєною амплітудою у вузлах і нульовою у пучностях. Формальною ознакою цього є відсутність аргументу, куди координата і час входять як лінійна комбінація.

Опір короткого замикання $Z_H = 0$ трансформується у чисто реактивний опір, що змінюється вздовж лінії за законом (рис. 3.17,в)

$$\dot{Z}(x) = iZ_0 \operatorname{tg} kx. \quad (3.61)$$

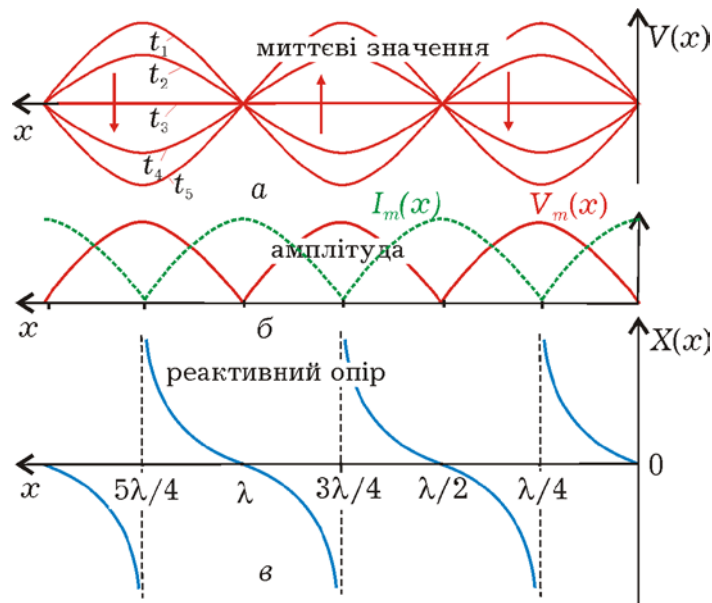


Рис. 3.17. Розподіл миттєвих значень хвилі напруги (а), її амплітуди (б) та реактивного опору (в) вздовж лінії для короткого замикання

Ця властивість використовується для створення елементів, вхідний опір яких буде чисто реактивним. У техніці реактивні елементи часто конструюють як відрізки короткозамкнених ліній, їх називають *шлейфами*. Так, вхідний опір для відрізка довжиною, меншою за $\lambda/4$, має індуктивний характер, більшою за $\lambda/4$, але меншою за $\lambda/2$ – емнісний характер. Величина реактивності може бути довільною в залежності від довжини відрізка. Цікаво відзначити, що чвертьхвильові відрізки, довжина яких кратна непарному числу чвертей довжин хвиль, мають нескінченно великий вхідний опір, який відповідає режиму холостого ходу. Ця його властивість знаходить широке вживання у техніці елементів лінії передачі. Вхідний опір короткозамкнених напівхвильових відрізків, довжина яких кратна цілому числу половин довжин хвиль, дорівнює нулю. Вони також мають *резонансні властивості*.

Режими, що розглянуто, є «крайніми». У проміжних випадках за нерівності опору навантаження і хвильового опору в лінії встановлюється режим *змішаних хвиль*, який можна розглядати як суперпозицію режимів біжучої і чисто стоячої хвилі. За цих умов КСХ буде відмінним від 1, у вузлах амплітуда коливань не буде нульовою, а у пучностях – подвоєною. Опір уздовж лінії змінюватиметься відповідно до (3.58) для даного значення \dot{Z}_H , а

потужність падаючої хвилі повністю не поглинатиметься таким навантаженням (3.56), частка її, пропорційна $|\rho|^2$ відбиватиметься.

У технічних пристроях такий режим має цілу низку недоліків (додаткові втрати в лінії за рахунок коливань реактивної енергії, погіршення частотних характеристик і так далі). Для компенсації цього і отримання режиму хвилі, що біжить, використовують так звані *узгоджуючі пристрої*, які, будучи включеними перед навантаженням, створюють відбиту хвилю, рівну за амплітудою і з протилежною фазою відносно хвилі, відбитої від навантаження. У результаті інтерференції цих хвиль у лінії перед узгоджуючим пристроєм, встановлюється режим біжучої хвилі. Такий пристрій має бути чисте реактивним, щоб не створювати додаткові втрати енергії. Для його розрахунку за допомогою виразу (3.58) знаходять в лінії таку точку x^* , в якій опір має активну складову, рівну хвильовому опором: $Z(x^*) = Z_0 \pm iX(x^*)$. Включення в цьому місці узгоджуючого елемента, наприклад, шлейфу з реактивним опором $\mp X(x^*)$, тобто таким саме за величиною, але протилежного знаку, приводить до того, що сумарний опір дорівнюватиме хвильовому. У результаті навантаження разом з узгоджуючим елементом можна розглядати як узгоджене, що забезпечує режим біжучої хвилі. У такому разі між навантаженням і узгоджуючим елементом буде режим стоячих хвиль. Зазвичай таких точок x^* , що задовольняють умові узгодження, може бути багато, але обирати треба таку, яка знаходиться як можна ближче до навантаження.

Контрольні питання та вправи до розділу

3.1. Використовуючи особливості методу комплексних амплітуд, подати основні співвідношення теорії поля (рівняння Максвелла, граничні умови, рівняння балансу електромагнітної енергії) у комплексній формі.

3.2. Покажіть, що хвильові рівняння для електричних та магнітних полів є наслідком рівнянь Максвелла. Який загальний вигляд має розв'язок хвильового рівняння?

3.3. Опишіть, що таке гармонічна хвиля та які параметри їй властиві.

3.4. Сформулюйте умову, за якої необхідно скористатися методами теорії кіл з розподіленими параметрами. Що моделює

кожен з чотирьох погонних параметрів довгої лінії? На яких рівняннях ґрунтується теорія таких кіл?

3.5. Від чого залежить і якими параметрами описується ступінь відбивання в лінії передачі? Від чого залежить положення першого (від навантаження) мінімуму на кривій розподілу амплітуди напруги вздовж лінії?

3.6. Що таке стояча хвиля, чому утворюються вузли і пучності? Намалювати графік розподілу амплітуд хвиль напруги і струму вздовж лінії за заданого коефіцієнта відбивання.

3.7. Що криється за терміном «трансформація опору вздовж довгої лінії»? Вкажіть закон трансформації. Як трансформується опір навантаження уздовж короткозамкненої лінії?

3.8. Опишіть модель плоскої електромагнітної хвилі у необмеженому просторі. Дайте її зображення для вертикальної та горизонтальної поляризації з допомогою силових ліній.

3.9. Як змінюються параметри електромагнітної хвилі у діелектричному середовищі без втрат, у середовищі з малими й великими втратами (у металі) порівняно з параметрами у вакуумі? Поясніть, що таке скін-ефект.

3.10. Що таке режим узгодження у лінії і як його забезпечити? У чому полягає принцип його створення за допомогою реактивних елементів?

4. ЕЛЕКТРОМАГНІТНІ ХВИЛІ БІЛЯ ГРАНИЦІ РОЗДІЛУ СЕРЕДОВИЩ

4.1. ВІДБИВАННЯ ЕЛЕКТРОМАГНІТНИХ ХВИЛЬ

У нескінченному однорідному середовищі можливе існування лише хвилі, яка розповсюджується від джерела збудження. Відбивання спостерігається тільки за наявності неоднорідності, зміни параметрів середовища. Для дослідження основних закономірностей і параметрів відбивання розглянемо найпростішу модель відбивання плоскої хвилі від границі розділу двох середовищ (рис. 4.1) за умови її перпендикулярного падіння на границю. Нехай границя розділу двох середовищ, що відрізняються хвильовим опором та сталою поширення, розташована у точці $z = 0$. Електромагнітна хвиля розповсюджується зліва направо, зазнає часткового відбивання від границі і проходить у друге середовище. Для опису полів запишемо

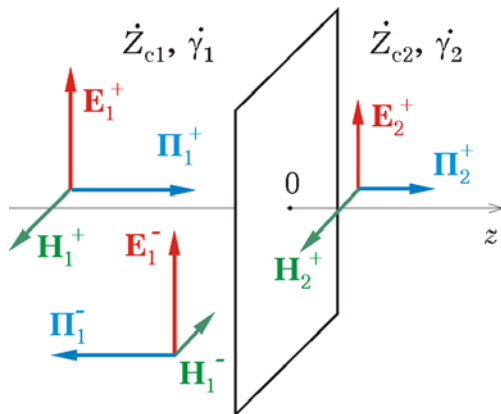


Рис. 4.1. Позначення для аналізу поведінки електромагнітної хвилі біля границі розділу двох середовищ.

розв'язок хвильового рівняння (3.25) для обох середовищ: зліва від границі у вигляді суми падаючої та відбитої хвиль

$$\begin{aligned} \dot{E}_1 &= \dot{E}_1^+ e^{-i\gamma_1 z} + \dot{E}_1^- e^{i\gamma_1 z}, \\ \dot{H}_1 &= \dot{H}_1^+ e^{-i\gamma_1 z} - \dot{H}_1^- e^{i\gamma_1 z}, \end{aligned} \quad (4.1)$$

а справа від границі у вигляді тільки падаючої хвилі

$$\begin{aligned} \dot{E}_2 &= \dot{E}_2^+ e^{-i\gamma_2 z}, \\ \dot{H}_2 &= \dot{H}_2^+ e^{-i\gamma_2 z}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Тут $\dot{E}_1^+, \dot{H}_1^+, \dot{E}_1^-, \dot{H}_1^-, \dot{E}_2^+, \dot{H}_2^+$ – поки невідомі сталі інтегрування, що мають смисл комплексних амплітуд відповідних хвиль.

Зазначимо, що знак «-» перед другим доданком для магнітного поля в (4.1) пов'язаний з напрямом потоку енергії у відбитій хвилі: взаємна орієнтація векторів електричного і магнітного поля повинна змінитися так, щоб вектор Пойнтинга у точці відбивання змінив напрям.

Для зменшення кількості сталих інтегрування скористаємося зв'язком (3.26) між відповідними амплітудами електричних та магнітних полів:

$$\dot{E}_1^+ / \dot{H}_1^+ = \dot{E}_1^- / \dot{H}_1^- = \dot{Z}_{c1}, \quad \dot{E}_2^+ / \dot{H}_2^+ = \dot{Z}_{c2}.$$

Вводячи деякі безрозмірні параметри – *коефіцієнт відбивання* $\dot{\rho} = \dot{E}_1^- / \dot{E}_1^+$ і *коефіцієнт проходження* $\dot{\tau} = \dot{E}_2^+ / \dot{E}_1^+$, одержимо вирази для складових поля у вигляді

$$\dot{E}_1 = \dot{E}_1^+ (e^{-i\dot{\gamma}_1 z} + \dot{\rho} e^{i\dot{\gamma}_1 z}), \quad \dot{H}_1 = \dot{E}_1^+ (e^{-i\dot{\gamma}_1 z} - \dot{\rho} e^{i\dot{\gamma}_1 z}) / \dot{Z}_{c1}, \quad (4.3, a)$$

$$\dot{E}_2 = \dot{E}_1^+ \dot{\tau} e^{-i\dot{\gamma}_2 z}, \quad \dot{H}_2 = \dot{E}_1^+ \dot{\tau} e^{-i\dot{\gamma}_2 z} / \dot{Z}_{c2}. \quad (4.3, б)$$

Мета цього дослідження – визначити ступінь відбивання й проходження електромагнітної хвилі, тобто визначити коефіцієнти $\dot{\rho}$ і $\dot{\tau}$, залежно від параметрів середовищ. Для цього проведемо «зшивання» відповідних функцій по обидва боки від границі на основі граничних умов. Оскільки вектори \mathbf{E} і \mathbf{H} паралельні границі, то $\dot{E}_1(-0) = \dot{E}_2(+0)$, $\dot{H}_1(-0) = \dot{H}_2(+0)$ і з (4.3) у точці $z = 0$ матимемо $1 + \dot{\rho} = \dot{\tau}$ і $1 - \dot{\rho} = \dot{\tau} \dot{Z}_{c1} / \dot{Z}_{c2}$. Розглядаючи останні два вирази як систему рівнянь відносно $\dot{\rho}$ і $\dot{\tau}$, у результаті її розв'язку одержимо вирази

$$\dot{\rho} = \frac{\dot{Z}_{c2} - \dot{Z}_{c1}}{\dot{Z}_{c2} + \dot{Z}_{c1}}, \quad (4.4)$$

$$\dot{\tau} = \frac{2\dot{Z}_{c2}}{\dot{Z}_{c2} + \dot{Z}_{c1}},$$

Вони дозволяють розраховувати коефіцієнти відбивання та проходження за відомих параметрів середовищ. Зазначимо, що у загальному випадку коефіцієнти $\dot{\rho}$ і $\dot{\tau}$ – комплексні величини, модуль яких характеризує відносну амплітуду хвиль \dot{E}_1^- та \dot{E}_2^+ , а

фаза – зміну фази хвилі на поверхні під час відбивання та проходження.

Аналізуючи одержані вирази, можна побачити, що значення модуля коефіцієнта відбивання лежить у межах $0 \leq |\dot{\rho}| \leq 1$. Однією з крайніх ситуацій є випадок однакових середовищ ($\dot{Z}_{c1} = \dot{Z}_{c2}$), коли відбивання відсутнє, тому що фактично відсутня границя розділу. Те саме має місце, наприклад, для двох діелектриків з однаковою діелектричною проникністю. Повне відбивання електромагнітної хвилі відбувається від поверхні ідеально провідного середовища ($\sigma \rightarrow \infty, \dot{Z}_{c2} \rightarrow 0$). У цьому випадку $\dot{\rho} = -1 = 1 \cdot e^{i\pi}$ і амплітуда хвилі під час відбивання не змінюється. Знак «-» для коефіцієнта відбивання означає, що фаза хвилі електричного поля у площині відбивання змінюється на 180° , а фаза хвилі магнітного поля залишається незмінною (другі доданки для \dot{H}_1 та \dot{E}_1 у (4.3) відрізняються знаком).

У результаті накладення падаючих і відбитих хвиль перед поверхнею відбивання утворюється так звана *стояча хвиля*. Особливості цього явища можна зрозуміти, розглядаючи аналітичний вираз (4.3,a) для випадку $\dot{\rho} = -1$ і для спрощення $\alpha = 0$ ($\dot{\gamma} = k$). Відновлюючи часовий множник $\exp(i\omega t)$ і залишаючи дійсну частину, одержимо

$$\begin{aligned} E_1 &= 2E_m^+ \sin kz \cdot \sin(\omega t + \varphi) \\ H_1 &= 2H_m^+ \cos kz \cdot \cos(\omega t + \varphi) \end{aligned} \quad (4.5)$$

Дані вирази описують не хвильовий процес, а гармонічні коливання, амплітуда і фаза яких залежать від поздовжньої координати. Миттєві «фотографії» цих коливань, зображені на рис. 4.2,a, зроблено через проміжки часу $T/8$ і нагадують коливання струни. У межах одного півперіоду коливання відбуваються синфазно, але їхня амплітуда у різних точках різна.

Розподіл амплітуди, нормованої на амплітуду падаючої хвилі, показаний на рис. 4.2,b. Характерною особливістю є наявність *вузлів*, тобто точок з нульовою амплітудою, і *пучностей*, де амплітуда максимальна і вдвічі перевищує амплітуду падаючої хвилі. Причому положення цих точок у просторі незмінне, що й пояснює використання назву – *стояча хвиля*. Причину такої ситуації зрозуміти неважко – вузли утворюються у тих точках, де падаюча і відбита хвилі зустрічаються у протифазі. Для електричного поля вузли розташовані на відстанях, кратних півхвилі, тому що на цих

відстанях «набігання» фази при проходженні хвилі туди й назад складає ціле число періодів, а протифазність забезпечується зсувом фази на 180° у процесі відбивання. Оскільки для магнітного поля фаза під час відбивання не змінюється, то у тих саме точках падаюча й відбита магнітні хвилі будуть зустрічатись синфазно і утворювати пучності. Легко уявити, що між двома сусідніми вузлами електричного поля будуть розташовані вузли магнітного і навпаки.

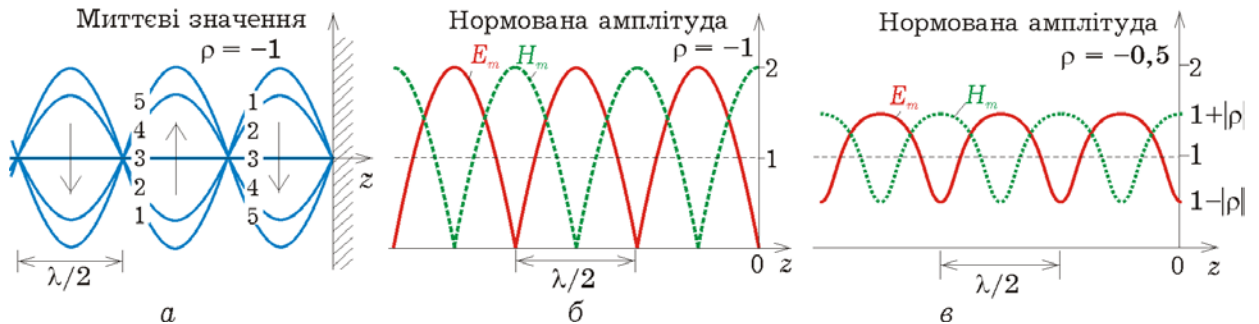


Рис. 4.2. Просторовий розподіл миттєвих значень коливань (а) та їх нормованих амплітуд (б) для повного відбивання ($\rho = -1$) та (в) часткового ($\rho = -0,5$): суцільні лінії для електричного поля, штрихові – для магнітного.

Подібне явище спостерігається і для неповного відбивання. Для опису процесів у загальному випадку, коли $0 \leq |\rho| < 1$, можна подати вирази (4.3) для полів над поверхнею відбивання, поновивши для наочності часовий множник $\exp(i\omega t)$ та вважаючи $\dot{\gamma} = k$ (втрати відсутні), у вигляді:

$$\begin{aligned} \dot{E}_1 &= E_1^+ (1 + \rho e^{i2k_1 z}) e^{i(\omega t - k_1 z)}, \\ \dot{H}_1 &= E_1^+ (1 - \rho e^{i2k_1 z}) e^{i(\omega t - k_1 z)} / Z_{c1}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

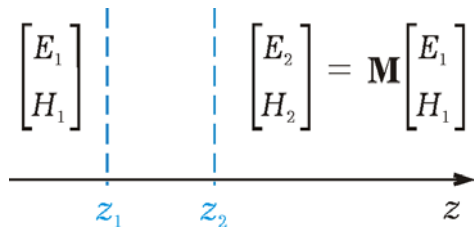
Така форма запису на відміну від (4.3), де поля подаються як сума падаючої та відбитої хвилі, відповідає тільки одній хвилі, що падає, але з амплітудою, яка змінюється залежно від координати (величину E_1^+ вважатимемо дійсною):

$$\begin{aligned} E_m(z) &= E_1^+ |1 + \rho e^{i2k_1 z}|, \\ H_m(z) &= E_1^+ |1 - \rho e^{i2k_1 z}| / Z_{c1}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Ці функції періодичні у просторі і набувають максимальних значень, у $(1+|\rho|)$ раз більших за амплітуду падаючої хвилі, у точках, що зветься пучностями. Між ними знаходяться вузли, де амплітуда мінімальна і становить $(1-|\rho|)$ від падаючої хвилі. З часом просторове положення цих точок не змінюється, тому для процесів, що описуються виразами (4.6), і використовують назву «стояча хвиля».

Графіки розподілу амплітуд електричного та магнітного полів (рис. 4.2,в) повністю збігаються з такими для амплітуд відповідно напруги і струму у довгій лінії передачі (див. розд. 3.4). Зазначимо також, що вирази для коефіцієнтів відбивання електромагнітної хвилі від границі розділу середовищ та хвилі напруги від навантаження у довгій лінії є подібними за умови відповідної заміни величин. Така аналогія ґрунтується на тому, що ці процеси описуються фактично однаковими хвильовими рівняннями.

Для поглиблення цієї аналогії розглянемо, як змінюються комплексні амплітуди електричного та магнітного полів при проходженні хвилею деякої відстані між точками z_1 та z_2 (рис. 4.3). Запишемо вирази для полів відповідно у цих точках у вигляді суми падаючої та відбитої хвиль:



$$\begin{aligned} \dot{E}_1 &= \dot{E}^+ e^{-ikz_1} + \dot{E}^- e^{ikz_1}, \\ \dot{H}_1 &= (\dot{E}^+ e^{-ikz_1} - \dot{E}^- e^{ikz_1}) / Z_c, \\ \dot{E}_2 &= \dot{E}^+ e^{-ikz_2} + \dot{E}^- e^{ikz_2}, \\ \dot{H}_2 &= (\dot{E}^+ e^{-ikz_2} - \dot{E}^- e^{ikz_2}) / Z_c. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Рис. 4.3. Позначення до виводу матриці передачі шару однорідного середовища між двома точками.

За допомогою тотожних перетворень, вилучивши з цих виразів амплітуди \dot{E}^+ та \dot{E}^- , отримаємо вирази для \dot{E}_2 та \dot{H}_2 через

амплітуди \dot{E}_1 та \dot{H}_1 та відстань $\Delta z = z_2 - z_1$:

$$\begin{aligned} \dot{E}_2 &= \dot{E}_1 \cos k\Delta z - i\dot{H}_1 Z_c \sin k\Delta z, \\ \dot{H}_2 &= -i(\dot{E}_1 / Z_c) \sin k\Delta z + \dot{H}_1 \cos k\Delta z. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Цю пропорціональність між амплітудами можна описати матричним співвідношенням (рис. 4.3): матриці-стовбці з амплітуд \dot{E} та \dot{H} зв'язані матрицею передачі

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \cos k\Delta z & -iZ_c \sin k\Delta z \\ -i \sin k\Delta z / Z_c & \cos k\Delta z \end{bmatrix}. \quad (4.10)$$

Матриця передачі для шару речовини при проходженні електромагнітних хвиль повністю співпадає з матрицею передачі відрізка довгої лінії для хвиль напруги і струму. Відмінність у знаках пов'язана з протилежними напрямками відліку поздовжньої координати: у довгій лінії напрямом $x > 0$ вибрано від навантаження до джерела. Вона зникає у (4.10), якщо координату z_2 взяти меншою за z_1 , тобто за від'ємних значень Δz .

Ще одна аналогія спостерігається для трансформації опору. Якщо ввести поняття комплексного опору для даної точки z як відношення амплітуд електричного та магнітного полів $\dot{E}(z) / \dot{H}(z) \equiv \dot{Z}(z)$, то, поділивши перший вираз (4.9) на другий, після простих тотожних перетворень отримаємо:

$$\dot{Z}_2 = Z_c \frac{\dot{Z}_1 - iZ_c \operatorname{tg} k\Delta z}{Z_c - i\dot{Z}_1 \operatorname{tg} k\Delta z}. \quad (4.11)$$

Тобто відношення комплексних амплітуд \dot{E} та \dot{H} змінюється (трансформується) у просторі за таким самим законом, як і відношення \dot{V} та \dot{I} вздовж довгої лінії (3.59) з урахуванням напрямку відліку. Використовуючи цю аналогію, за наявності стоячих електромагнітних хвиль можна робити розрахунки, подібні до аналізу властивостей довгих ліній на основі теорії кіл з розподіленими параметрами.

4.2. ПРОХОДЖЕННЯ ХВИЛЬ ЧЕРЕЗ ШАР РЕЧОВИНИ

Розглянемо падіння плоскої електромагнітної хвилі на шар речовини товщиною d з хвильовим опором Z_{c2} , що межує з двома напівнескінченими середовищами з хвильовими опорами Z_{c1} та Z_{c3} (рис. 4.4). Падаюча хвиля зазнає часткового відбивання як від

першої, так і від другої границі розділу, і проходить у третє середовище. Повний аналіз цього процесу можна провести, як і у попередньому розділі, зшиваючи з допомогою граничних умов вирази, подібні (4.1) для перших двох середовищ та (4.2) для третього, на кожній границі розділу.

Проте основні властивості шару речовини можна дослідити на основі коефіцієнта відбивання $\rho = \dot{E}_1^- / \dot{E}_1^+$ у першому середовищі. Вираз для нього просто отримати, використовуючи схемну модель (рис. 4.5,а), побудовану на аналогії з довгими лініями. У ній різні середовища моделюються відрізками довгих ліній з відповідними хвильовими опорами Z_{0i} та хвильовими числами $k_i = 2\pi/\lambda_i$ ($i = 1, 2, 3$). Оскільки третя лінія для $z > d$ нескінченна і в ній не існує відбитої хвилі, то відношення амплітуд напруги і струму $\dot{V}_3^+ / \dot{I}_3^+$ у всіх точках однакове і дорівнює хвильовому опорі Z_{03} . Тому її можна замінити зосередженим навантаженням з опором, рівним Z_{03} , приєднаним до відрізка другої лінії (рис. 4.5,б). Використовуючи закон трансформації опорів (3.58), перерахуємо це навантаження через відрізок лінії з довжиною d та хвильовим опором Z_{02} на її вхід ($z = 0$):

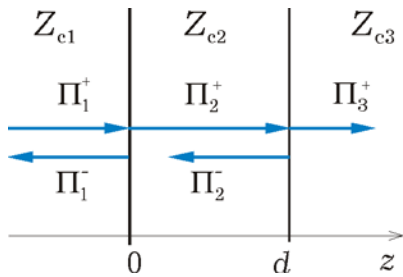


Рис. 4.4. Позначення для аналізу проходження хвилі через шар речовини між двома границями розділу середовищ.

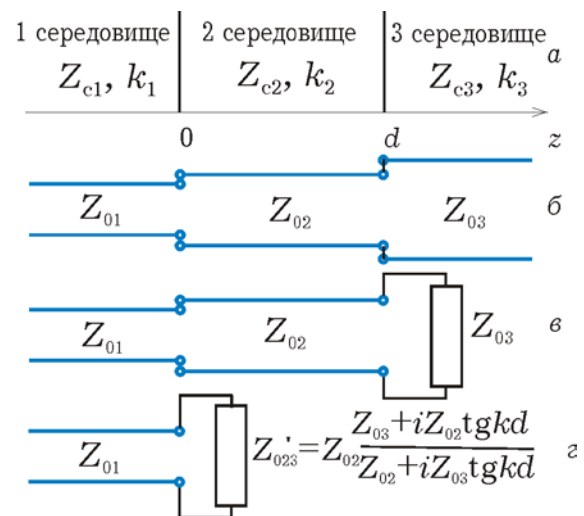


Рис. 4.5. Схемна модель шару речовини товщиною d між двома середовищами у вигляді відрізків довгих ліній (а) та її трансформування у разі перерахунку опорів (б,в).

$$\dot{Z}'_{03} = Z_{02} \frac{Z_{03} + iZ_{02} \operatorname{tg} k_2 d}{Z_{02} + iZ_{03} \operatorname{tg} k_2 d}. \quad (4.12)$$

Таким чином друга і третя лінія сприймаються першою лінією як еквівалентне навантаження з опором \dot{Z}'_{03} (рис. 4.5,в). Тому коефіцієнт відбивання у першій лінії дорівнюватиме

$$\dot{\rho} = \frac{\dot{Z}'_{03} - Z_{01}}{\dot{Z}'_{03} + Z_{01}} = \frac{Z_{02}(Z_{03} - Z_{01}) + i(Z_{02}^2 - Z_{01}Z_{03}) \operatorname{tg} k_2 d}{Z_{02}(Z_{03} + Z_{01}) + i(Z_{02}^2 + Z_{01}Z_{03}) \operatorname{tg} k_2 d}. \quad (4.13)$$

Коефіцієнт відбивання електромагнітних хвиль від першої границі розділу середовищ описується таким саме виразом із відповідною заміною індексів ($Z_{0i} \rightarrow Z_{ci}$).

Аналіз цього виразу показує, що *повне відбивання* можливе за умови, коли шар речовини являє собою ідеально провідне середовище ($Z_{c2} = 0$). Незалежно від опору третього середовища та товщини шару коефіцієнт відбивання дорівнює -1 , тобто відбита і падаюча хвилі на першій границі розділу протифазні.

Якщо третє середовище є ідеальним провідником ($Z_{c3} = 0$), то протифазне відбивання спостерігається на другій границі розділу ($z = d$). За цих умов $\dot{Z}'_{03} = iZ_{02} \operatorname{tg} k_2 d$ і коефіцієнт відбивання (4.13) у площині першої границі має комплексно спряжені чисельник та знаменник, тому $|\dot{\rho}| = 1$, а його фаза залежить від товщини шару та відношення хвильових опорів Z_{01} та Z_{02} .

Повне проходження ($\dot{\rho} = 0$) можливе у трьох випадках. Для кожного з них необхідно сформулювати дві умови, за яких дійсна та уявна частини чисельника у (4.13) дорівнюватимуть 0.

а) У найпростішому випадку, прирівнюючи нулю вирази у дужках чисельника, отримаємо $Z_{c1} = Z_{c2} = Z_{c3}$. Фактично ця рівність відповідає трьом однаковим середовищам, коли границі розділу відсутні. Але можливо, що різні середовища мають однакові хвильові опори, наприклад, досить поширеним є випадок, коли два різних діелектрики мають однакову діелектричну проникність.

б) Якщо обрати перше й третє середовища з однаковими хвильовими опорами ($Z_{c1} = Z_{c3}$), а товщину шару незалежно від хвильового опору Z_{c2} кратною половині довжини хвилі ($d = n\lambda_2/2$, $n = 1, 2, 3, \dots$), то у цьому разі $\operatorname{tg} k_2 d = 0$ і відбивання буде відсутнім. Тому так звана «півхвильова пластина», занурена в інше середовище, буде прозорою. З цієї ж причини півхвильовий відрізок довгої лінії, ввімкнений в іншу лінію, не буде викликати відбивання хвилі.

Фізична суть цього явища стає зрозумілою, якщо порівняти між собою коефіцієнти відбивання $\rho_1 = (Z_{c2} - Z_{c1}) / (Z_{c2} + Z_{c1})$ тільки від першої границі та $\rho_2 = (Z_{c3} - Z_{c2}) / (Z_{c3} + Z_{c2})$ тільки від другої. За умови $Z_{c1} = Z_{c3}$ ці коефіцієнти відрізняються лише знаком, тому відбиті хвилі мають однакові амплітуди та протилежні фази у площинах відбивання. Додатковий набіг фази хвилі, відбитої від другої границі, відповідає проходженню нею відстані d «туди й назад» і складає $2k_2d = 2\pi n$. Такі хвилі у першому середовищі, як протифазні та рівні за амплітудою, гасять одна одну і результуюча відбита хвиля буде відсутньою.

в) Умови ще однієї можливості повного проходження хвилі через шар речовини можна з'ясувати, попередньо поділивши чисельник та знаменник (4.13) на $\text{tg}k_2d$. Тоді дійсна частина чисельника для різних Z_{c1} та Z_{c3} може дорівнювати нулю за рахунок $\text{ctg}k_2d = 0$, а уявна – за умови $Z_{c2}^2 = Z_{c1}Z_{c3}$. Це означає, що товщина шару повинна бути кратною непарній кількості чвертей довжини хвилі ($d = (2n - 1)\lambda_2/4$, $n = 1, 2, 3, \dots$), а його електричні параметри – відповідати умові $Z_{c2} = \sqrt{Z_{c1}Z_{c3}}$.

Таку властивість *чвертьхвильового шару* використовують в оптиці для виготовлення так званих «просвітлених» лінз, наносячи на поверхню лінзи плівку речовини з діелектричною проникністю $\epsilon_{\text{плівки}} = \sqrt{\epsilon_{\text{лінзи}}}$ та товщиною, що відповідає чверті довжини хвилі червоного кольору, щоб саме у цьому діапазоні зменшити відбивання світла.

У кабельній та хвилеводній техніці подібне використовується у вигляді *чвертьхвильових трансформаторів* для узгодженого з'єднання двох ліній передачі з хвильовими опорами Z_{01} та Z_{02} за допомогою відрізка лінії з хвильовим опором $Z_{0\text{тр}} = \sqrt{Z_{01}Z_{02}}$ та довжиною у чверть хвилі.

Фізична суть такої властивості шару на відміну від попереднього випадку пов'язана з тим, що коефіцієнти відбивання від кожної границі у цьому разі однакові за амплітудою та фазою, а протифазність відбитих від границь хвиль забезпечується додатковим для другої хвилі набігом фази на відстані $2d$: $2k_2d = (2n - 1)\pi$. Тому в результаті їх інтерференції у першому середовищі відбита хвиля буде відсутньою.

Слід пам'ятати, що розглянуті властивості пов'язані з певною довжиною хвилі і є *резонансними*: у разі відхилення частоти коливань від розрахункової модуль коефіцієнта відбивання досить швидко зростає. Для розширення смуги частот, у якій проходження хвилі можна вважати достатньою мірою повним, використовують не один шар узгоджуючої речовини, а два і більше, або декілька чвертьхвильових трансформаторів для з'єднання довгих ліній з різними хвильовими опорами. На рис. 4.6 зображені приклади таких з'єднань. Одна з можливостей вибору хвильового опору трансформаторів, що часто використовується на практиці, полягає у тому, що відношення коефіцієнтів відбивання від кожного окремого з'єднання пропорційне відношенню біноміальних коефіцієнтів. Наприклад, для двох трансформаторів – 1:2:1, для трьох – 1:3:3:1 і так далі. Не вдаючись до відносно складної теорії таких ступінчастих переходів між двома лініями, це можна просто зрозуміти, розглядаючи два трансформатори (рис. 4.6,а) як поєднання в одній конструкції двох окремих чвертьхвильових трансформаторів, зсунутих на відстань $\lambda/4$. Відповідно хвиля з половинною амплітудою, відбитої від другого з'єднання, гаситься відбитою хвилею від першого, а друга половина – від третього з'єднання.

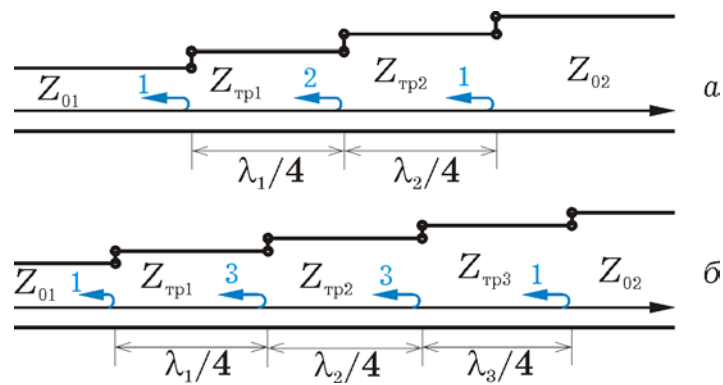


Рис. 4.6. З'єднання довгих ліній двома (а) та трьома (б) чвертьхвильовими трансформаторами. Цифри позначають відносні значення амплітуд хвиль, відбитих від окремих місць з'єднань.

Так само тритрансформаторний перехід з відношенням відбитих амплітуд 1:3:3:1 (рис. 4.6,б) можна уявити як поєднання двох попередніх переходів з відношенням 1:2:1, зсунутих також на

$\lambda/4$. Продовжуючи цей принцип на випадок n -трансформаторного з'єднання, неважко зрозуміти, що відношення амплітуд хвиль, відбитих від окремих місць з'єднань, має бути таким самим, як відношення коефіцієнтів розкладу бінома $(a + b)^n$.

Подібні принципи можуть бути використані в оптиці для створення багатошарових невідбиваючих плівок для оптичних лінз. Певні труднощі тут пов'язані лише з підбором речовини для окремих шарів, котрі мали б точно підібрані значення діелектричної проникності.

Розглянемо ще один приклад багатошарової структури. Нехай у повітрі з хвильовим опором Z_{c0} розміщено декілька пар шарів з хвильовими опорами Z_{c1} та Z_{c2} , що чергуються (рис. 4.7), і товщина кожного шару дорівнює чверті довжини хвилі у відповідному середовищі. Трансформуючи опір Z_{c0} спочатку через чвертьхвильовий відрізок з опором Z_{c2} згідно (4.11), матимемо $Z_{c0}' = Z_{c2}^2/Z_{c0}$, а потім перераховуючи Z_{c0}' через відрізок довжиною $\lambda_2/4$ з опором Z_{c1} , отримаємо $Z_{c0}'' = Z_{c1}^2/Z_{c0}' = (Z_{c1}/Z_{c2})^2 Z_{c0}$.

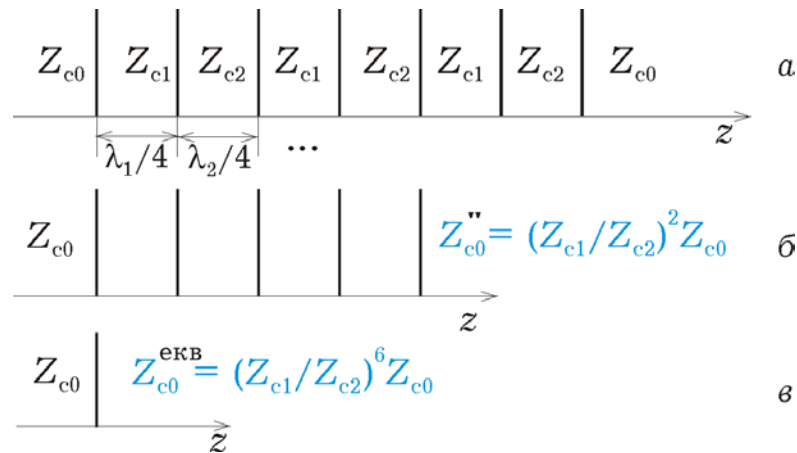


Рис. 4.7. Багатошарова структура з чвертьхвильових плівок, що чергуються (а), трансформування опору другого напівнескінченного середовища через одну пару шарів (б) та через всю багатошарову структуру (в).

Продовжуючи цю процедуру, можна уявити всю багатошарову структуру (рис. 4.7,в) як деяке еквівалентне середовище з хвильовим опором

$$Z_{c0}^{\text{екв}} = (Z_{c1}/Z_{c2})^{2n} Z_{c0}, \quad (4.14)$$

де n – кількість пар шарів у структурі. У такому разі коефіцієнт відбивання хвилі, що падає на n -шарову структуру, дорівнює

$$\rho = \frac{Z_{c0}^{\text{ЭКВ}} - Z_{c0}}{Z_{c0}^{\text{ЭКВ}} + Z_{c0}} = \frac{(Z_{c1}/Z_{c2})^{2n} - 1}{(Z_{c1}/Z_{c2})^{2n} + 1}. \quad (4.15)$$

З цього виразу видно, що для різних речовин шарів незалежно від співвідношення Z_{c1}/Z_{c2} модуль коефіцієнта відбивання прямує до 1 зі збільшенням кількості шарів. Якщо, наприклад, діелектрична проникність шарів відрізняється у 4 рази, то $Z_{c1}/Z_{c2} = 2$ і коефіцієнт відбивання дорівнює 0,6 для $n = 1$; 0,88 для $n = 2$; 0,97 для $n = 3$ і т.д. Тобто якісна дзеркальна поверхня може бути не тільки металевою, її можна виготовити з діелектричних плівок, що чергуються. З простої фізичної точки зору це пояснюється тим, що коефіцієнти відбивання від сусідніх границь будуть рівні за модулем та різні за знаком. Додатковий зсув фази на 180° забезпечується різницею ходу двічі по $\lambda/4$ на товщині кожного шару «туди й назад». Таким чином усі відбиті хвилі будуть синфазними і їх амплітуди підсумовуватимуться.

Таку інтерференцію відбитих хвиль часто використовують для створення ефективного режиму короткого замикання у лініях передачі. На рис. 4.8 зображено конструкцію на основі коаксіальної лінії, що має два потовщення центрального провідника довжиною по $\lambda/4$ з такою ж відстанню між ними. За своїми властивостями ця конструкція подібна багат шаровій структурі, що розглянута вище, при $n = 2$ та заміні позначень Z_{c0} та Z_{c2} на Z_0 , а Z_{c1} на Z_{01} . Якщо вибрати конкретні розміри лінії, наприклад, $D = 17,5$ мм, $d = 5$ мм, $d_1 = 16,5$ мм, то за формулою, що буде наведена у гл.5 для розгляду коаксіального хвилеводу, можна розрахувати хвильові опори основної коаксіальної лінії $Z_0 = 75$ Ом та чвертьхвильових відрізків лінії з потовщеним внутрішнім провідником $Z_{01} = 3,5$ Ом.

Трансформуючи опір Z_0 з перерізу 4 послідовно через чвертьхвильові відрізки до перерізу 1, отримаємо, що вся конструкція являє собою для основної коаксіальної лінії деяке еквівалентне навантаження з опором $Z_{\text{н}}^{\text{ЭКВ}} = (Z_{01}/Z_0)^4 Z_0$. Цей вираз збігається з (4.14) з точністю до позначень для $n = 2$. За заданих розмірів і відповідних хвильових опорів $Z_{\text{н}}^{\text{ЭКВ}} = 3,5 \cdot 10^{-4}$ Ом. Таке навантаження забезпечує коефіцієнт відбивання -1 з точністю до

шостого знаку, майже такий самий, як і для короткого замикання лінії (але без омичного контакту між провідниками !).

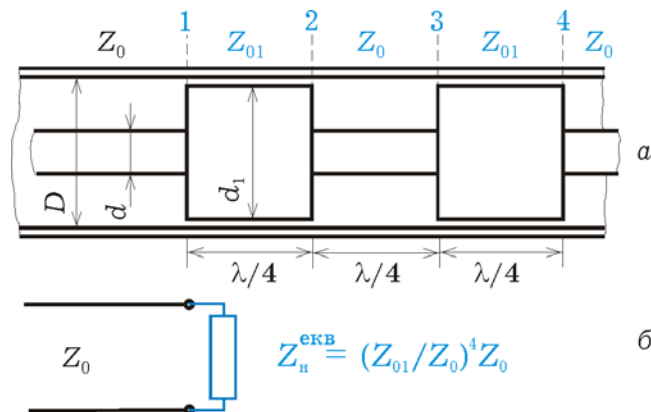


Рис. 4.8. Ступінчасте з'єднання чвертьхвильових відрізків коаксіальних ліній як короткозамикаюча структура (а) та її схемна модель у вигляді довгої лінії з еквівалентним навантаженням (б).

Слід пам'ятати, що така властивість спостерігається на тій частоті f_0 , де товщини плівок (або відрізків ліній) дорівнюватимуть чверті довжини хвилі. Але на частоті, наприклад, у два рази вищій, ніж f_0 , така структура буде прозорою, бо плівки вже будуть півхвильовими. На частоті $3f_0$ товщина шарів становитиме $3\lambda/4$ і структура знову буде віддзеркалювати. Таким чином на частотній шкалі смуги відбивання хвиль чергуються зі смугами пропускання. Ці властивості є загальними для періодичних структур і широко використовуються для виготовлення різноманітних фільтруючих пристроїв у оптиці та надвисокочастотній техніці.

4.3. ПОХИЛЕ ПАДІННЯ ХВИЛЬ НА ГРАНИЦЮ РОЗДІЛУ

Для похилого падіння електромагнітної хвилі на границю розділу двох середовищ, як і для нормального, спостерігається відбивання та проходження хвилі у друге середовище. Однак на відміну від нормального падіння тут за певних умов можливі особливі випадки повного проходження або повного відбивання. Одна з примітних особливостей поведінки хвиль біля границі розділу пов'язана з спрямовуючою дією поверхні. Це легко уявити з рис.

4.9,а. Перпендикулярні до поверхні потоки падаючої та відбитої хвиль спрямовані назустріч один одному і утворюють вертикальну періодичну структуру полів у вигляді *стоячих* хвиль. Сума поздовжніх складових утворює потік вздовж поверхні, що поширюється у вигляді хвилі, що *біжить*. Така особливість використовується для створення хвилеводів – систем, що спрямовують поширення електромагнітних хвиль.

4.3.1. Поля біля границі розділу

Для опису полів поблизу від границі розділу проведемо через вектор Пойнтинга для падаючої хвилі Π^+ перпендикулярно до поверхні відбивання так звану площину падіння (рис. 4.9). Вона буде проходити також через вектори Пойнтинга для відбитої (Π^-) та заломленої (Π^{\prime}) хвиль, бо у процесі відбивання перпендикулярного до неї потоку енергії не виникає. Слід зазначити, що термін «заломлена хвиля» походить із променевої оптики і використання його у хвильовій теорії виправдано лише з точки зору зміни напрямку поширення хвилі після проходження її у друге середовище.

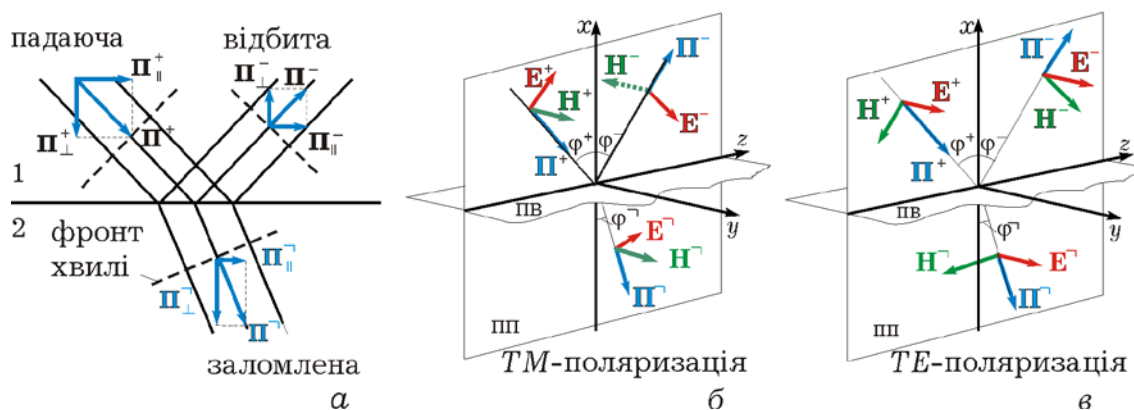


Рис. 4.9. Умовне зображення поведінки хвиль біля границі розділу двох середовищ (а), орієнтація векторів поля та вектора Пойнтинга для *ТМ*- (б) і *ТЕ*-хвиль (в) відносно площини падіння (ПП) та площини відбивання (ПВ).

Позначимо кути падіння φ^+ , відбивання φ^- і заломлення φ^{\prime} як кути між нормаллю до границі розділу та відповідними напрямками поширення хвиль. Координатні осі зручно зв'язати з границею розділу, як вказано на рис. 4.9. У цьому випадку фаза хвильового множника (х.м.) для хвилі, що поширюється під кутом до границі

розділу, не буде мати доданку, що характеризує зміну фази в y -напрямі:

$$\text{х.м.} = \exp[i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})] = \exp[i(\omega t - k_x x - k_z z)]. \quad (4.16)$$

Для похилого падіння поведінка хвилі біля границі залежить від напрямку її поляризації, тому аналіз зручно робити окремо для хвиль з різною поляризацією. Будемо називати *ТМ*-хвилею (від англ. *Transverse Magnetic Field*) випадок, коли вектор \mathbf{E} співпадає з площиною падіння, а вектор \mathbf{H} є паралельним до границі розділу (рис. 4.9,б), тобто поперечним до координати z . Іноді таку ситуацію називають *паралельною поляризацією* відповідно до розміщення вектора \mathbf{E} відносно площини падіння. Інший випадок відповідає *перпендикулярній поляризації* (рис. 4.9,в): вектор \mathbf{E} залишається перпендикулярним до площини падіння, а вектор \mathbf{H} – паралельним. Ми будемо використовувати для такої поляризації назву – *ТЕ*-хвиля (*Transverse Electric Field*).

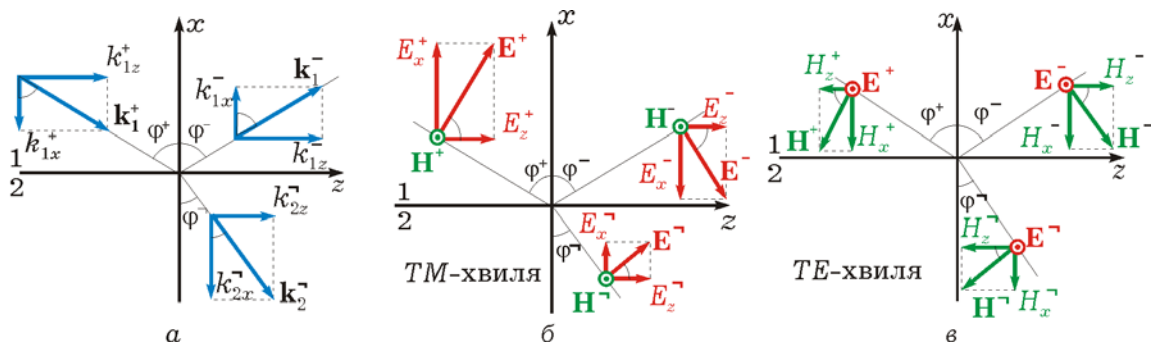


Рис. 4.10. Проекції хвильового вектора (а) та векторів поля на координатні осі: б – для *ТМ*-хвиль (вектор магнітного поля має тільки y -проекцію), в – для *ТЕ*-хвиль (вектор електричного поля має тільки y -проекцію).

Спочатку розглянемо *ТМ*-хвилі, для яких вектор електричного поля має проекції E_x та E_z , а вектор магнітного поля тільки H_y . Вирази для комплексних амплітуд цих складових легко отримати, проектуючи вектори \mathbf{E} , \mathbf{H} та \mathbf{k} на відповідні осі координат (рис. 4.10). Тоді матимемо:

для падаючої хвилі

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_x^+ &= \dot{E}^+ \sin \varphi^+ \\ \dot{E}_z^+ &= \dot{E}^+ \cos \varphi^+ \\ \dot{H}_y^+ &= \dot{E}^+ / Z_{c1} \end{aligned} \right\} \times \exp[i(k_1 x \cos \varphi^+ - k_1 z \sin \varphi^+)], \quad (4.17)$$

для відбитої хвилі

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_x^- &= -\dot{E}^- \sin \varphi^- \\ \dot{E}_z^- &= \dot{E}^- \cos \varphi^- \\ \dot{H}_y^- &= -\dot{E}^- / Z_{c1} \end{aligned} \right\} \times \exp[i(-k_1 x \cos \varphi^- - k_1 z \sin \varphi^-)], \quad (4.18)$$

для заломленої хвилі вирази відрізняються від (4.17) тільки відповідними індексами

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_x^- &= \dot{E}^- \sin \varphi^- \\ \dot{E}_z^- &= \dot{E}^- \cos \varphi^- \\ H_y^- &= \dot{E}^- / Z_{c2} \end{aligned} \right\} \times \exp[i(k_2 x \cos \varphi^- - k_2 z \sin \varphi^-)]. \quad (4.19)$$

У цих виразах для спрощення прийнято, що комплексні сталі поширення $\dot{\gamma}_{1,2}$ (3.22) включають тільки хвильові числа $k_{1,2}$, а сталі згасання $\alpha_{1,2} = 0$. Це виправдано, якщо розглядати тільки ближню до границі розділу зону, де поглинанням хвилі можна знехтувати. Подібне можна віднести і до хвильових опорів: вважатимемо їх дійсними величинами, а ті випадки, де принципово необхідно враховувати втрати і вважати їх комплексними, будуть обумовлені окремо.

Для визначення сталих інтегрування, якими є амплітуди \dot{E}^+ , \dot{E}^- та \dot{E}^- , скористаємося граничними умовами у вигляді рівностей дотичних складових полів на поверхні розділу ($x = 0$):

$$\dot{H}_y^+ \Big|_{x=+0} + \dot{H}_y^- \Big|_{x=+0} = \dot{H}_y^- \Big|_{x=-0}, \quad (4.20,а)$$

$$\dot{E}_z^+ \Big|_{x=+0} + \dot{E}_z^- \Big|_{x=+0} = \dot{E}_z^- \Big|_{x=-0}. \quad (4.20,б)$$

Підставляючи у першу граничну умову вирази для складових з (4.17) – (4.19) для $x = 0$, отримаємо рівність

$$\frac{\dot{E}^+}{Z_{c1}} e^{-ik_1 z \sin \varphi^+} + \frac{\dot{E}^-}{Z_{c1}} e^{-ik_1 z \sin \varphi^-} = \frac{\dot{E}^-}{Z_{c2}} e^{-ik_2 z \sin \varphi^-}, \quad (4.21)$$

яка повинна виконуватись у довільній точці вздовж осі z . Це можливо, якщо аргументи експонент між собою рівні:

$$k_1 \sin \varphi^+ = k_1 \sin \varphi^- = k_2 \sin \varphi^-. \quad (4.22)$$

Звідси випливають два відомих закони: 1) *кут відбивання дорівнює куту падіння*

$$\varphi^- = \varphi^+, \quad (4.23)$$

2) *відношення синусів кутів падіння та заломлення обернено пропорційне відношенню хвильових чисел у відповідних середовищах:*

$$\frac{\sin \varphi^-}{\sin \varphi^+} = \frac{k_1}{k_2} = \sqrt{\frac{\epsilon_1 \mu_1}{\epsilon_2 \mu_2}}. \quad (4.24)$$

В оптиці цей закон відомий як закон Снелля (Снелліуса), де у правій частині стоїть відношення показників заломлення $n_1/n_2 = \sqrt{\epsilon_1} / \sqrt{\epsilon_2}$.

У разі виконання (4.22) перша гранична умова (4.21) приймає вигляд

$$\dot{E}^+ + \dot{E}^- = \dot{E}^- Z_{c1} / Z_{c2}, \quad (4.25)$$

і відповідно друга (4.20,б) з урахуванням (4.23):

$$\dot{E}^+ - \dot{E}^- = \dot{E}^- \cos \varphi^- / \cos \varphi^+. \quad (4.26)$$

Із цих двох умов можуть бути знайдені лише дві сталі інтегрування, наприклад, амплітуди відбитої та заломленої хвиль за відомої амплітуди падаючої хвилі. У такому випадку зручно їх пронормувати на \dot{E}^+ і позначити $\dot{E}^- / \dot{E}^+ \equiv \rho$, $\dot{E}^- / \dot{E}^+ \equiv \tau$, тоді

$$\begin{cases} 1 + \rho = \tau Z_{c1} / Z_{c2}, \\ 1 - \rho = \tau \cos \varphi^- / \cos \varphi^+. \end{cases} \quad (4.27)$$

Розв'язуючи цю систему відносно ρ і τ , отримуємо так звані *формули Френеля для ТМ-хвиль*

$$\dot{\rho}_{TM} = \frac{Z_{c2} \cos \varphi^- - Z_{c1} \cos \varphi^+}{Z_{c2} \cos \varphi^- + Z_{c1} \cos \varphi^+}, \quad (4.28)$$

$$\dot{\tau}_{TM} = \frac{2Z_{c2} \cos \varphi^+}{Z_{c2} \cos \varphi^- + Z_{c1} \cos \varphi^+}, \quad (4.29)$$

які дозволяють визначати ступінь відбивання та проходження електромагнітних хвиль за відомих параметрів середовищ і заданого кута падіння.

Необхідно зазначити, що вирази (4.28) і (4.29) у граничному випадку $\varphi^+ = 0$ дають значення, які співпадають з коефіцієнтами відбивання та проходження за формулою (4.4) для нормального падіння.

Для *TE*-хвиль подібний аналіз треба проводити окремо. Як видно з рис. 4.10,в, у цьому випадку вектор \mathbf{E} має тільки одну складову E_y , а вектор \mathbf{H} дві – H_x та H_z , причому

для падаючої хвилі:

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_y^+ &= E^+ \\ \dot{H}_x^+ &= -\dot{E}^+ \sin \varphi^+ / Z_{c1} \\ \dot{H}_z^+ &= -\dot{E}^+ \cos \varphi^+ / Z_{c1} \end{aligned} \right\} \times \exp[i(k_1 x \cos \varphi^+ - k_1 z \sin \varphi^+)], \quad (4.30)$$

для відбитої хвилі:

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_y^- &= \dot{E}^- \\ \dot{H}_x^- &= -\dot{E}^- \sin \varphi^- / Z_{c1} \\ \dot{H}_z^- &= \dot{E}^- \cos \varphi^- / Z_{c1} \end{aligned} \right\} \times \exp[i(-k_1 x \cos \varphi^- - k_1 z \sin \varphi^-)] \quad (4.31)$$

і для заломленої хвилі:

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_y^- &= \dot{E}^- \\ \dot{H}_x^- &= -\dot{E}^- \sin \varphi^- / Z_{c1} \\ \dot{H}_z^- &= -\dot{E}^- \cos \varphi^- / Z_{c1} \end{aligned} \right\} \times \exp[i(k_2 x \cos \varphi^- - k_2 z \sin \varphi^-)]. \quad (4.32)$$

Тут, як і для *TM*-хвиль, сталі інтегрування можуть бути знайдені з граничних умов, аналогічних (4.20). Після відповідних перетворень закони відбивання (4.23) та заломлення (4.24) залишаються такими самими, а формули Френеля для *TE*-хвиль матимуть вигляд:

$$\dot{\rho}_{TE} = \frac{Z_{c2} \cos \varphi^+ - Z_{c1} \cos \varphi^-}{Z_{c2} \cos \varphi^+ + Z_{c1} \cos \varphi^-}, \quad (4.33)$$

$$\dot{\tau}_{TE} = \frac{2Z_{c2} \cos \varphi^+}{Z_{c2} \cos \varphi^+ + Z_{c1} \cos \varphi^-}. \quad (4.34)$$

Ці формули для $\varphi^+ = 0$ дають ті ж співвідношення, що і при нормальному падінні, бо тут коефіцієнти відбивання та проходження визначені через відношення співнапрямлених векторів електричного поля.

В отриманих виразах слід звернути увагу на дві обставини. Перша пов'язана з тим, що проєкції хвильових векторів у обох середовищах на границю розділу рівні між собою (4.22):

$$k_1 \sin \varphi^\pm = k_2 \sin \varphi^\mp \equiv K. \quad (4.35)$$

Це означає, що вирази для всіх складових поля мають спільний хвильовий множник $\exp[i(\omega t - Kz)]$, який описує хвильовий процес, що поширюється вздовж границі розділу зі сталою поширення $K \leq k_{1,2}$ і відповідно з довжиною хвилі вздовж границі $\Lambda = 2\pi/K \geq 2\pi/k_{1,2} = \lambda_{1,2}$. Тому і фазова швидкість цього процесу $v_\phi = \omega/K$ вздовж границі буде більшою за швидкість $\omega/k_{1,2}$ у напрямку поширення в обох середовищах, або, як кажуть, у вільному середовищі.

Друга характерна особливість пов'язана з відміною формул Френеля для *TE*- і *TM*-хвиль. Тому й поведінка хвиль з різною поляризацією біля границі розділу середовищ, як це побачимо у наступних прикладах, може бути різною.

4.3.2. Повне проходження хвилі через границю, кут Брюстера

Формули Френеля для коефіцієнтів відбивання мають у чисельнику різницю, тому природнім є питання, чи можна здійснити фізичні умови, за яких відбита хвиля буде відсутньою ($\rho = 0$). Розглянемо ці умови спочатку для *TM*-хвиль. Рівність доданків у чисельнику (4.28) подамо у вигляді $Z_{c1}^2 \cos^2 \varphi^+ = Z_{c2}^2 \cos^2 \varphi^-$, де замінимо $\cos^2 \varphi^+ = 1 - \sin^2 \varphi^+$ і з урахуванням закону заломлення $\cos^2 \varphi^- = 1 - \sin^2 \varphi^- = 1 - (k_1/k_2)^2 \sin^2 \varphi^+$. Розв'язуючи останню рівність відносно $\sin^2 \varphi^+$, отримаємо умову, за якої відбивання від границі розділу буде відсутнім:

$$\sin^2 \varphi^+ = \frac{1 - (Z_{c2}/Z_{c1})^2}{1 - (k_1 Z_{c2}/k_2 Z_{c1})^2} = \frac{1 - \mu_2 \varepsilon_1 / \mu_1 \varepsilon_2}{1 - (\varepsilon_1 / \varepsilon_2)^2}. \quad (4.36)$$

Саме за такого значення кута падіння, що залежить від параметрів середовищ, спостерігається *повне проходження* хвилі у друге середовище. Ці параметри повинні задовольняти умові $1 \geq (1 - \mu_2 \varepsilon_1 / \mu_1 \varepsilon_2) / [1 - (\varepsilon_1 / \varepsilon_2)^2] \geq 0$. Звідси видно, що дана умова нездійсненна за однакових діелектричних проникностей середовищ. Характерним є випадок двох різних діелектричних середовищ з $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$ та $\mu_1 = \mu_2 = 1$. Тоді з (4.36) $\sin^2 \varphi^+ = 1 / (1 + \varepsilon_1 / \varepsilon_2)$, або враховуючи, що $\sin^2 \varphi \equiv 1 / (1 + \text{ctg}^2 \varphi)$, отримаємо

$$\varphi^+ = \text{arctg} \sqrt{\varepsilon_2 / \varepsilon_1}. \quad (4.37)$$

Аналогічно, прирівнюючи нулю чисельник (4.33), можна отримати умову повного проходження *TE*-хвилі через границю у вигляді:

$$\sin^2 \varphi^+ = \frac{1 - (Z_{c1}/Z_{c2})^2}{1 - (k_1 Z_{c1}/k_2 Z_{c2})^2} = \frac{1 - \mu_1 \varepsilon_2 / \mu_2 \varepsilon_1}{1 - (\mu_1 / \mu_2)^2}. \quad (4.38)$$

На відміну від (4.36) дана умова може бути виконана лише для речовин з різною магнітною проникністю. Якщо $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$ то звідси можна отримати, що *TE*-хвиля не відбиватиметься від границі розділу за умови

$$\varphi^+ = \text{arctg} \sqrt{\mu_2 / \mu_1}. \quad (4.39)$$

На рис. 4.11 зображено розраховані за формулами (4.28) та (4.33) залежності коефіцієнтів відбивання від кута падіння. Їх вигляд суттєво відрізняється для хвиль різної поляризації. Тому, наприклад, у разі падіння на поверхню розділу діелектричних середовищ електромагнітної хвилі зі змішаною поляризацією під кутом, що визначається (4.37), *TM*-складова хвилі повністю проходить у друге середовище. Відбита хвиля міститиме тільки *TE*-складову і поляризується таким чином, що вектор **E** буде паралельним до границі розділу. Це явище відоме в оптиці як *закон Брюстера*, а значення кута падіння (4.37) зветься *кутом Брюстера*.

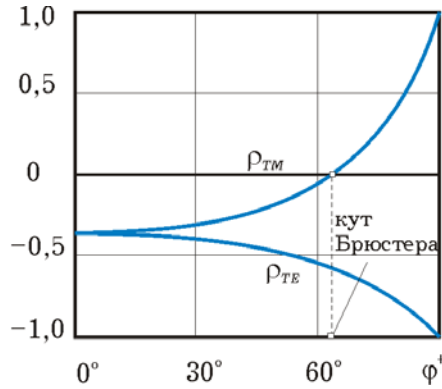


Рис. 4.11. Залежність коефіцієнтів відбивання хвиль різної поляризації від кута падіння на границю розділу повітря-скло ($\epsilon_1 = 1$, $\epsilon_2 = 4$).

для TE - і TM -хвиль відбита хвиля стає *еліптично поляризованою*.

Фізичне пояснення такій поведінці електромагнітних хвиль пов'язане з особливостями поглинання та перевипромінювання хвиль електронами кристалічної ґратки твердого тіла, але такий розгляд знаходиться поза межами класичної макроскопічної теорії поля.

4.3.3. Повне внутрішнє відбивання

Ще одна цікава ситуація спостерігається за умови $k_1 > k_2$, або, як іноді кажуть в оптиці, якщо перше середовище має більшу оптичну густину. У цьому разі кут заломлення більший за кут падіння і досягає значення у 90° вже для $\varphi^+ < 90^\circ$. Наприклад, якщо електромагнітна хвиля падає з боку скла ($\epsilon_1 = 4$) на границю його з повітрям ($\epsilon_1 = 1$), то з (4.24) витікає, що $\sin\varphi^- = 1$ ($\varphi^- = 90^\circ$) для $\sin\varphi^+ = 1/2$ ($\varphi^+ = 30^\circ$) і хвиля у другому середовищі поширюється вздовж границі розділу. Тобто, за умови

$$\varphi^+ \geq \arcsin(k_2 / k_1) = \arcsin \sqrt{\epsilon_2 \mu_2 / \epsilon_1 \mu_1} \quad (4.40)$$

дійсне значення кута заломлення буде відсутнім і відповідно не існуватиме хвилі, що проходить у друге середовище. Це і є умовою *повного внутрішнього відбивання*.

Для сонячного світла властива спонтанна поляризація квантів, і за умови освітлення ним діелектричної поверхні під таким кутом відбите світло буде *горизонтально поляризованим*. Подібне спостерігається також для хвилі, що лінійно поляризована під деяким кутом до площини падіння. За кутів падіння, більших за кут Брюстера, через різні фази коефіцієнтів відбивання

Щоб це довести, зазначимо, що $\cos\varphi^- = \sqrt{1 - \sin^2\varphi^-} = \sqrt{1 - (k_1/k_2)^2 \sin^2\varphi^+}$. Для кутів падіння, більших за (4.40), вираз під коренем стає від'ємним і значення косинуса стає уявним:

$$\cos\varphi^- = i\sqrt{(k_1/k_2)^2 \sin^2\varphi^+ - 1} = \pm i|\cos\varphi^-|. \quad (4.41)$$

У такому разі формули (4.28) та (4.33) для коефіцієнта відбивання матимуть у чисельнику та знаменнику комплексно спряжені вирази, модулі яких мають однакові значення. Тому, наприклад, для *ТМ*-хвиль

$$\dot{\rho}_{TM} = -\frac{Z_{c1} \cos\varphi^+ \mp iZ_{c2} |\cos\varphi^-|}{Z_{c1} \cos\varphi^+ \pm iZ_{c2} |\cos\varphi^-|} = 1 \cdot e^{i2\psi_0}, \quad (4.42)$$

і відбивання буде повним, бо $|\dot{\rho}| = 1$ незалежно від степені нерівності (4.40). Від цього залежить зсув фази відбивання, який тут зручно позначити як $2\psi_0$.

Уявлення про структуру поля над поверхнею повного внутрішнього відбивання можна отримати, додаючи вирази для однойменних проекцій поля падаючої та відбитої хвиль для $\dot{E}^- = \dot{E}^+ e^{i2\psi_0}$. Наприклад, підсумовуючи вирази (4.17) та (4.18) для проекцій комплексних амплітуд, отримаємо для *ТМ*-хвиль для $k_{1x} = k_1 \cos\varphi^+$:

$$\begin{aligned} \dot{E}_x &= i2E^+ \sin\varphi^+ \sin(k_{1x}x - \psi_0) e^{-i(Kz - \psi_0)}, \\ \dot{E}_z &= 2E^+ \cos\varphi^+ \cos(k_{1x}x - \psi_0) e^{-i(Kz - \psi_0)}, \\ \dot{H}_y &= i2(E^+/Z_{c1}) \sin(k_{1x}x - \psi_0) e^{-i(Kz - \psi_0)}. \end{aligned} \quad (4.43)$$

Домножуючи ці вирази на часовий множник $e^{i\omega t}$ та залишаючи тільки дійсну частину, перейдемо від комплексних амплітуд до дійсних миттєвих значень

$$\begin{aligned} E_x &= -2E_m^+ \sin\varphi^+ \sin(k_{1x}x - \psi_0) \sin(\omega t - Kz + \psi_0), \\ E_z &= 2E_m^+ \cos\varphi^+ \cos(k_{1x}x - \psi_0) \cos(\omega t - Kz + \psi_0), \\ H_y &= -2(E_m^+/Z_{c1}) \sin(k_{1x}x - \psi_0) \sin(\omega t - Kz + \psi_0). \end{aligned} \quad (4.44)$$

Якщо подібні перетворення провести з виразами (4.30) та (4.31), для митєвих значень проекцій полів TE -хвиль матимемо

$$\begin{aligned} E_y &= 2E_m^+ \cos(k_{1x}x - \psi_0) \cos(\omega t - Kz + \psi_0), \\ H_x &= -2(E_m^+/Z_{c1}) \sin \varphi^+ \cos(k_{1x}x - \psi_0) \cos(\omega t - Kz + \psi_0), \\ H_z &= 2(E_m^+/Z_{c1}) \cos \varphi^+ \sin(k_{1x}x - \psi_0) \sin(\omega t - Kz + \psi_0). \end{aligned} \quad (4.45)$$

Головна особливість полів над поверхнею повного внутрішнього відбивання впливає з наявності у виразах (4.44) та (4.45) хвильових множників у вигляді $\sin(\omega t - Kz + \psi_0)$ або $\cos(\omega t - Kz + \psi_0)$. Ці вирази описують хвильовий процес, що поширюється вздовж координати z , тобто паралельно поверхні відбивання, зі сталою поширення $K = k_1 \sin \varphi^+$ і з фазовою швидкістю $v_\phi = \omega/K = c_1/\sin \varphi^+$ та довжиною хвилі $\Lambda = 2\pi/K = \lambda_1/\sin \varphi^+$. Треба звернути увагу на те, що останні величини *більші* відповідно за швидкість світла та довжину хвилі у напрямку її падіння у першому середовищі.

Важливо також те, що амплітудна частина виразів (4.44) та (4.45) містить періодичні множники $\sin(k_{1x}x - \psi_0)$ або $\cos(k_{1x}x - \psi_0)$. Це означає утворення стоячої хвилі у вертикальному напрямку, перпендикулярному до площини відбивання. На висоті, де множники приймають нульові значення, утворюються вузли, а там, де вони мають максимальні значення, амплітуди відповідних складових поля подвоюються (пучності). Зазначимо також, що проекції E_x та H_y , або E_y та H_x , поперечні до напрямку поширення, описуються однаковими функціями.

Найцікавіша особливість цього процесу полягає в тому, що електромагнітні поля існують і *по той бік від поверхні* внутрішнього відбивання. Це можна зрозуміти на основі виразів (4.19) та (4.32), де $\cos \varphi^-$ приймає уявне значення (4.41). Тоді хвильовий множник матиме вигляд

$$\exp[i(\omega t \pm i k_2 x |\cos \varphi^-| - Kz)] = \exp(\mp k_2 x |\cos \varphi^-|) \exp[i(\omega t - Kz)]. \quad (4.46)$$

Процес, що описується таким виразом, являє собою хвилю, що поширюється вздовж поверхні відбивання з тим же хвильовим числом і з тією ж фазовою швидкістю, як і в першому середовищі. Але амплітуда цієї хвилі з віддаленням від поверхні (нагадаємо, що йдеться про область $x < 0$) зменшується за експоненціальним

законом $\exp(k_2|\cos\varphi^-|x)$. Якщо друге середовище нескінченне, то фізичний зміст має тільки нижній знак у (4.46). Можна вважати, що ці поля локалізовані у приповерхневому шарі, товщина якого має порядок $\Delta x = 1/k_2|\cos\varphi^-|$, і тому вони утворюють так звану *поверхневу хвилю*.

Наочне уявлення про структуру полів біля поверхні повного внутрішнього відбивання можна отримати з рис. 4.12, де з допомогою векторів електричного і магнітного поля зображено структуру полів для *TM*- та *TE*-хвиль, що відповідають виразам (4.44) – (4.46) у фіксований момент часу. З часом уся картина поля переміщується вздовж поверхні з фазовою швидкістю v_φ .

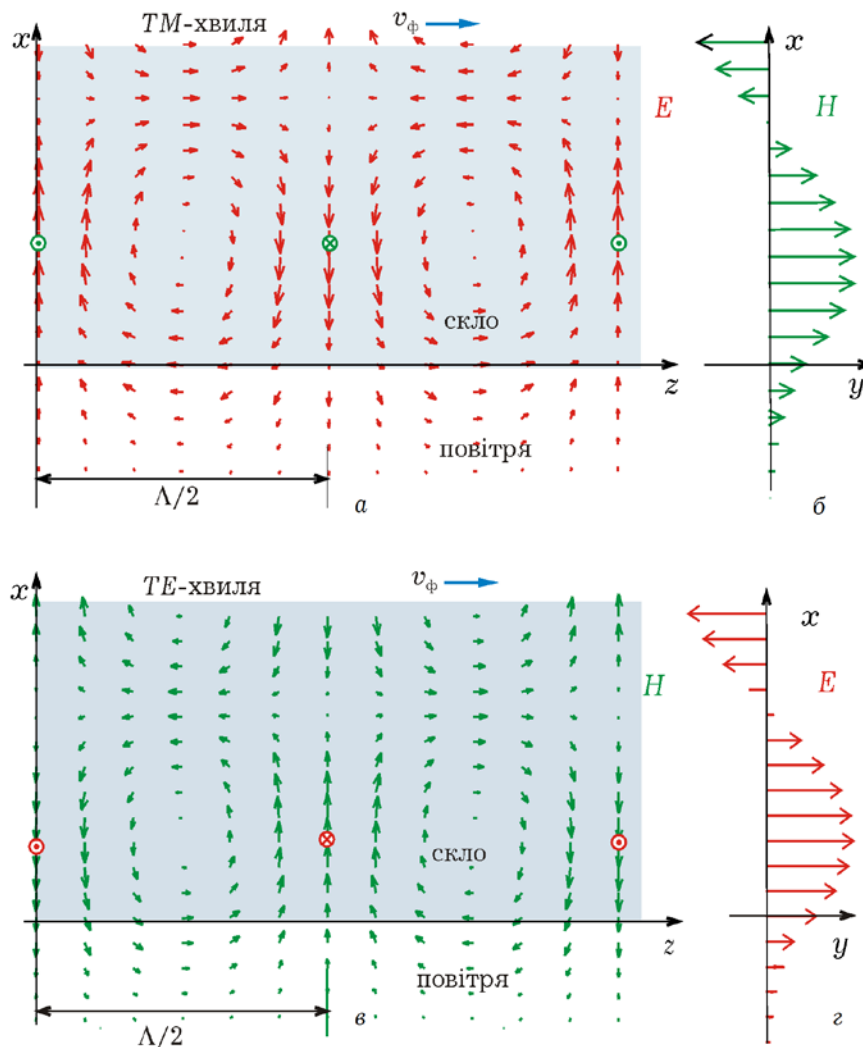


Рис. 4.12. Миттєві «фотографії» просторового розподілу векторів електричного (а) та магнітного (б) поля біля поверхні повного внутрішнього відбивання для *TM*-хвилі, що падає на границю розділу скло-повітря ($\varepsilon_1/\varepsilon_2 = 4/1$) під кутом $\varphi^+ = 60^\circ$. Те саме для магнітного (в) і електричного (г) поля у випадку *TE*-хвилі.

Погодити між собою явище повного відбивання від поверхні та проникнення полів у середовище за поверхнею допомагає уявлення, що хвиля відбивається не безпосередньо від границі розділу, а ніби розподілено, заходячи у другу область у вигляді деяких крайових полів (рис. 4.12), які й утворюють поверхневу хвилю. Тоді зрозумілим стає факт проходження хвилі під тим самим кутом (падіння), якщо на деякій відстані від поверхні повного внутрішнього відбивання розмістити таке саме середовище, як і перше. У такому разі амплітуда хвилі, що туди проходить, у відповідності з законом (4.46) експоненціально спадатиме із збільшенням цієї відстані.

4.3.4. Відбивання від поверхні ідеального провідника

Повне відбивання електромагнітних хвиль, як і для нормального падіння, має місце, коли друге середовище є ідеально провідним ($\sigma \rightarrow \infty$, $Z_{c2} = 0$). Коефіцієнти відбивання за формулою (4.28) або (4.33) у цьому випадку мають значення $\rho = -1$.

Конфігурація полів над поверхнею, подібно до випадку повного внутрішнього відбивання, залежить від напрямку поляризації хвилі. Для *ТМ*-хвилі вирази для складових поля можна отримати з (4.45), поклавши в них $\psi_0 = \pi/2$, бо $\rho_{TM} = 1 \cdot e^{i\pi}$ (індекс 1 у позначенні параметрів середовищ опускаємо, бо в другому середовищі електромагнітні поля відсутні):

$$\begin{aligned} E_x &= 2E_m^+ \sin \varphi^+ \cos k_x x \cos(\omega t - Kz), \\ E_z &= -2E_m^+ \cos \varphi^+ \sin k_x x \sin(\omega t - Kz), \\ H_y &= 2(E_m^+/Z_c) \cos k_x x \cos(\omega t - Kz). \end{aligned} \quad (4.47)$$

Для *ТЕ*-хвиль $\rho_{TE} = -1 = 1 \cdot e^{i\pi}$, тому $\psi_0 = \pi/2$ і з (4.45) матимемо:

$$\begin{aligned} E_y &= -2E_m^+ \sin k_x x \sin(\omega t - Kz), \\ H_x &= 2(E_m^+/Z_c) \sin \varphi^+ \sin k_x x \sin(\omega t - Kz), \\ H_z &= -2(E_m^+/Z_c) \cos \varphi^+ \cos k_x x \cos(\omega t - Kz). \end{aligned} \quad (4.48)$$

Ці вирази описують хвилю (рис. 4.13), що біжить вздовж відбиваючої поверхні у напрямку координати z із сталою поширення $K < k$, фазовою швидкістю $v_\phi = \omega/K > c$ та довжиною хвилі

$\Lambda = 2\pi/K > \lambda$. Амплітуда цих хвиль періодично залежить від відстані x над поверхнею металу, що характерно для стоячої хвилі (рис. 4.13,в). На самій поверхні ($x = 0$) відповідно до граничних умов відсутні дотичні складові E_z та E_y електричного поля та нормальна проекція H_x магнітного поля. Тут розміщені вузли для тих складових, які мають множник $\sin k_x x$. Такі самі вузли мають місце на таких відстанях Δx , де $k_x x = n\pi$ ($n = 1, 2, 3, \dots$), тобто

$$\Delta x = n\pi/k_x = n\pi/k\cos\varphi^+ = n\lambda/2\cos\varphi^+ = n\lambda_x/2. \quad (4.49)$$

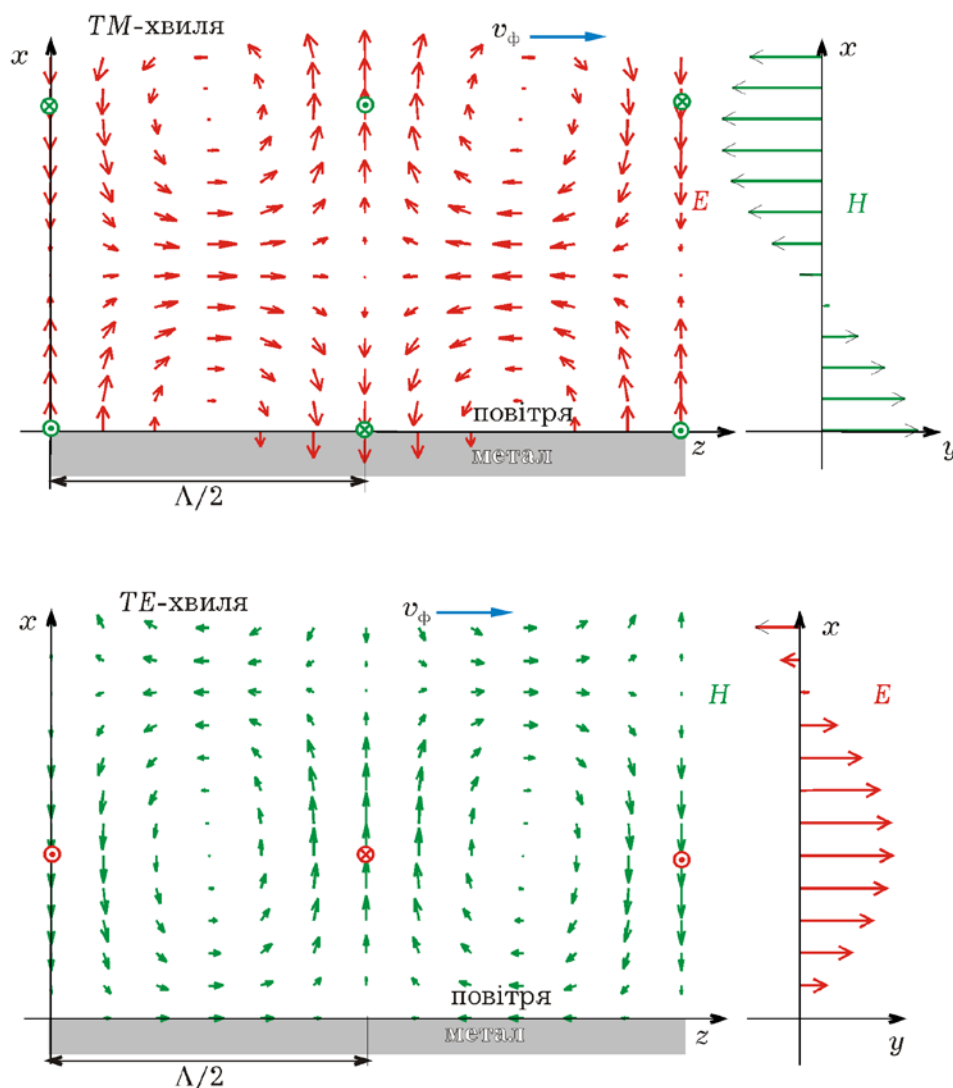


Рис. 4.13. Те саме, що й на рис. 4.12, але для повного відбивання від поверхні ідеального провідного середовища.

Посередині між вузлами у точках, де $\sin k_x x = \pm 1$, розміщені пучності для цих складових і їх амплітуди подвоюються. Нормальна складова електричного поля E_x та паралельні складові магнітного

поля H_y та H_z , вирази для яких містять множник $\cos k_x x$, у цих же точках мають вузли. Для такої структури поля місцями рівних амплітуд є площини $x = \text{const}$, а місцями рівних фаз – $z = \text{const}$. Подібні хвилі називають *неоднорідними*, на відміну від плоскої хвилі, яка є однорідною.

Дуже корисним є уявлення про неоднорідну хвилю як суперпозицію двох плоских однорідних хвиль. Це ясно, по-перше, з того, що формально вирази (4.47) та (4.48) одержані як сума виразів (4.17), (4.18) і відповідно (4.30), (4.31). По-друге, це можна показати на прикладі *TE*-хвилі, зображуючи падаючу (рис. 4.14,*а*) та відбиту (рис. 4.14,*б*) хвилі з допомогою плоских фронтів, що чергуються. Причому суцільні та штрихові лінії відповідають таким місцям, де напруженості поля максимальні і вектори поля мають протилежні напрями. Суперпозицію цих рисунків треба зробити так (рис. 4.14,*в*), щоб на поверхні металу виконувались відповідні граничні умови: дотичні складові електричного поля повинні бути протилежними, а магнітного – співпадаючими. Складаючи вектори полів для падаючої та відбитої хвиль у характерних точках перетину фронтів матимемо, що їх напрям відповідає рис. 4.13, який побудовано на основі виразів (4.48).

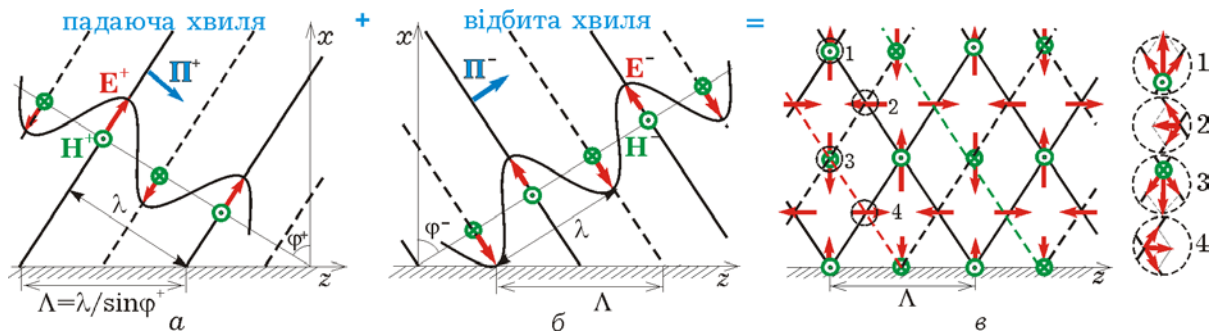


Рис. 4.14. Умовне зображення плоских *TM*-хвиль: падаючої (*а*), відбитої (*б*) та їх суперпозиції (*в*). Точки 1 – 4 відповідають характерним місцям перетину фронтів і напрямам електричного і магнітного полів (порівняти з рис. 4.13,*а*).

Неважко також уявити, що з часом fronti падаючої хвилі переміщуються вправо-вниз (у напрямку падіння), відбитої – вправо-вгору, а їх суперпозиція – тільки вправо, вздовж поверхні відбивання. Просторовий період, тобто довжина цієї хвилі, і відповідно швидкість у напрямку поширення, як видно з рис. 4.14,

більші за довжину хвилі і швидкість у вільному просторі (у напрямку падіння або відбивання):

$$\Lambda = \lambda/\sin\varphi^+, \quad v_\phi = c/\sin\varphi^+, \quad (4.50)$$

що відповідає формальному співвідношенню (4.36).

4.3.5. Площинний хвилевід

Таке уявлення дозволяє створити деяку модель, дуже корисну для розуміння процесів у хвилеводах. Поставимо питання, чи можна у просторі над ідеально відбиваючою поверхнею, де поширюється неоднорідна хвиля, розмістити ідеально провідну площину так, щоб не порушити структуру електромагнітної хвилі. Це можна зробити у тих місцях, де виконуватимуться такі самі граничні умови, як і на відбиваючій поверхні. Враховуючи періодичність структури поля у перпендикулярному до поверхні напрямку, таку площину можна розмістити паралельно поверхні на відстані d , кратній півперіоду стоячої хвилі.

На відміну від (4.49) тут у переліку цілих чисел, як побачимо далі, може мати місце нульове значення. У результаті матимемо дві відбиваючі поверхні, які й утворюють так званий «площинний хвилевід». Між ними можуть розповсюджуватись електромагнітні хвилі з структурами TE - або TM -хвиль, які мають вигляд відповідно до рис. 4.13, якщо не звертати увагу на поля над верхньою площиною. Ці хвилі можна уявити як плоску хвилю, що, по чергово відбиваючись від площин, просувається вздовж хвилеводу. Необхідною умовою такого незгасаючого поширення хвилі є, як показано на рис. 4.15, співпадання фази двічі відбитої хвилі з фазою «початкової» падаючої хвилі. Це досягається у разі виконання співвідношення між довжиною хвилі і відстанню d , яке залежить від кута падіння, відповідно до (4.49)

$$d = n\lambda/2\cos\varphi^+, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (4.51)$$

Одним з найважливіших висновків є те, що у такому хвилеводі можуть розповсюджуватись хвилі з різноманітними конфігураціями полів, або, як їх називають, *модами*. Формально вони відрізняються номером n і позначаються TE_n або TM_n . Фізичний зміст номера моди

пов'язують з кількістю напівперіодів картини розподілу поля, що розміщується між площинами.



Рис. 4.15. Поширення хвиль у площинному хвилеводі можна розглядати як суперпозицію плоских хвиль, що відбиваються від стінок хвилеводу

Приклад 4.1. Які моди можуть існувати між двома металевими поверхнями з відстанню $d = 2$ см на частоті 30 ГГц?

Перш за все, виходячи з фізично можливих значень кута падіння, зазначимо, що $0 < \cos\phi^+ < 1$ і кожній моді властива деяка мінімальна відстань $d_{n\min} = n\lambda/2$, така, що у разі $d < d_{n\min}$ поширення даної моди неможливе. Позначимо на числовій осі d (рис. 4.16) величини $d_{n\min}$ для різних мод, починаючи з $n = 1$, за довжин падаючої хвилі $\lambda = c/f = 1$ см ($d_{1\min} = 0,5$ см, $d_{2\min} = 1$ см, $d_{3\min} = 1,5$ см, $d_{4\min} = 2$ см,...). На цій же діаграмі символом стрілки вправо позначимо область значень d , за яких дана мода може існувати у

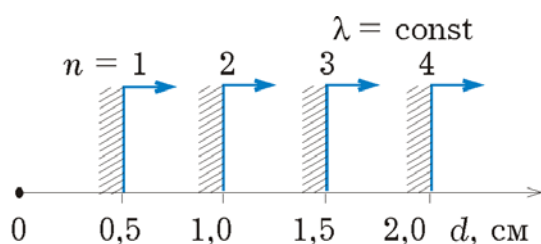


Рис. 4.16. Діаграма для ілюстрації умов поширення тих чи інших мод у «площинному» хвилеводі для заданої довжини хвилі $\lambda = 1$ см

такому хвилеводі. З неї видно, що для заданої відстані 2 см умова поширення моди ($d > d_{n\min}$) виконуватиметься тільки для перших трьох мод за кутів падіння $\phi^+ = \arccos(d_{n\min}/d)$, тобто 76° , 60° та 41° відповідно.

На рис. 4.17 зображено конфігурацію

полів для перших трьох TM - та TE -мод згідно з рис. 4.13. Кожна мода має своє значення довжини хвилі у хвилеводі $\Lambda = \lambda/\sin\phi^+$, тобто 1,03, 1,15 та 1,52 см відповідно. Для четвертої моди спостерігається

критична ситуація, коли $d = d_{4\min}$, $\varphi^+ = 0^\circ$, а довжина хвилі та фазова швидкість вздовж хвилевода – нескінченно великі.

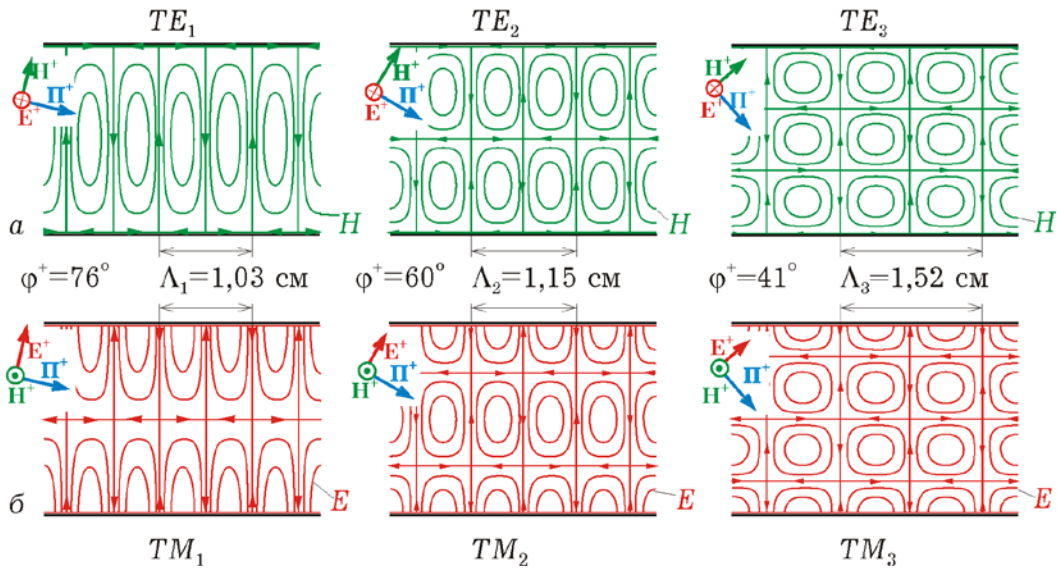


Рис. 4.17. Розподіл магнітного поля для перших трьох TE -мод (а) та електричного (б) для TM -мод у «площинному» хвилеводі за довжини падаючої хвилі 1 см та відстані між площинами 2 см. Кожній моді відповідає своє значення кута падіння та довжини хвилі у хвилеводі

Таким чином, з наведеного прикладу ясно, що за конкретних умов (довжина хвилі, відстань) у хвилеводі може існувати *фіксоване число мод*, для яких виконується умова $d > n\lambda/2$. Це – з деяких причин небажане явище, і у більшості практичних випадків намагаються забезпечити умови для поширення тільки однієї моди, або так званий *одномодовий режим*.

Приклад 4.2. Для хвилевода з відстанню між металевими пластинами $d = 2$ см визначити умови, за яких поширюватимуться хвилі у вигляді тільки однієї моди.

Виходячи з виразу (4.51) та можливих значень $\cos\varphi^+$, запишемо умову поширення тієї чи іншої моди у вигляді $\lambda < 2d/n$. Величину $2d/n$ природньо вважати деяким граничним значенням в умові поширення і її називають *критичною довжиною хвилі* $\lambda_{\text{кр}}$. На числовій осі довжин хвиль (рис. 4.18) відкладемо значення $\lambda_{\text{кр}}$ для декількох перших мод ($\lambda_{1\text{кр}} = 4$ см, $\lambda_{2\text{кр}} = 2$ см, $\lambda_{3\text{кр}} = 1,33$ см, $\lambda_{4\text{кр}} = 1$ см). У цих же точках поставимо такі ж символи, як і на рис. 4.16, – стрілки для позначення області $\lambda < \lambda_{\text{кр}}$, де n -мода може

поширюватися, та штрихування в області $\lambda > \lambda_{\text{нкр}}$, де вона не може існувати.

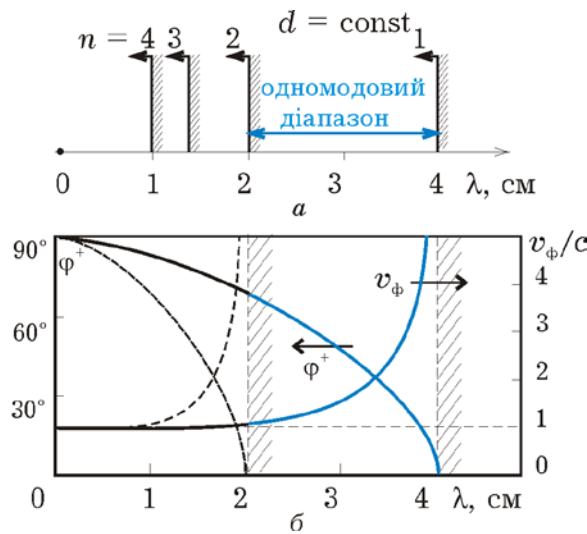


Рис. 4.18. Діаграма (а), що ілюструє умови поширення різних мод у «площинному» хвилеводі з заданою відстанню $d = 2$ см. Перша мода може існувати без домішок інших у діапазоні довжин хвиль від 2 до 4 см. Залежність (б) фазової швидкості та кута падіння від довжини хвилі для першої та другої моди

З цієї діаграми ясно, що поширення *тільки однієї* моди можливе, якщо хвилевод збуджувати хвилею з довжиною $\lambda_{1\text{кр}} > \lambda > \lambda_{2\text{кр}}$, тобто від 2 см до 4 см, або на частоті від 7,5 ГГц до 15 ГГц. У цьому діапазоні виконуватиметься умова поширення тільки першої моди, яку звать *основною*, а для всіх інших, або *вищих*, хвилевод буде занадто вузьким ($\lambda > 2d/n$). Треба також пам'ятати, що кожній довжині хвилі відповідатиме певний кут падіння (рис.4.18,б), значення якого можна визначити з (4.51) – $\cos\phi^+ = \lambda/\lambda_{\text{нкр}}$, та відповідна довжина хвилі Λ і фазова швидкість (4.50):

$$v_{\text{м}} = c/\sin\phi^+ = c/\sqrt{1 - \cos^2\phi^+} = c/\sqrt{1 - (\lambda/\lambda_{\text{кр}})^2}. \quad (4.52)$$

Це співвідношення показує (рис. 4.18,б) залежність фазової швидкості від довжини хвилі (частоти) та визначає закон дисперсії, як побачимо далі, не тільки для розглянутої моделі «площинного» хвилеводу, а й для багатьох реальних хвилеводів.

По за увагою нашого розгляду залишилось нульове значення числа n у (4.51). На перший погляд йому відповідає нереальне значення $d = 0$. Виявляється, що можливе існування хвилі з $n = 0$ за довільного d , але за умови поширення плоскої електромагнітної хвилі паралельно провідним площинам, коли $\cos\varphi^+ = 0$. Крім того, необхідно, щоб відповідно до граничних умов на поверхні ідеального металу силові лінії електричного поля були перпендикулярними до площин, а магнітного – паралельними. Цій вимозі задовольняє лише хвиля з поляризацією, що була названа TE , для $\varphi^+ = 90^\circ$ (рис. 4.19). Але у цьому разі і електричні і магнітні силові лінії не мають поздовжньої складової, а є тільки поперечними до напрямку поширення, тому для такої моди використовують назву – TEM . Характерною особливістю TEM -моди є співпадання параметрів хвилі у хвилеводі і вільному просторі ($v_{\text{ф}} = c$, $\Lambda = \lambda$), бо $\sin\varphi^+ = 1$ і $\lambda_{\text{кр}} \rightarrow \infty$ незалежно від частоти. Це означає, що TEM -моді властива відсутність дисперсії.

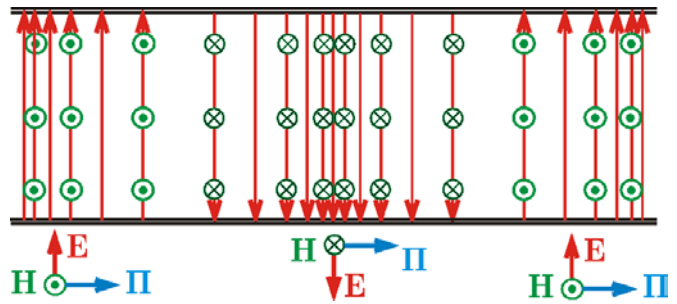


Рис. 4.19. Орієнтація векторів поля для плоскої хвилі (моди TEM) у площинному хвилеводі

4.3.6. Відбивання від поверхні реальних металів

Особливості відбивання електромагнітних хвиль від поверхні реальних металів пов'язані з їх електричними параметрами: комплексним хвильовим опором $\dot{Z}_{\text{см}}$ та комплексною сталою поширення $\dot{\gamma}_m = k_m - i\alpha_m$.

Приклад 4.3. Визначити коефіцієнт відбивання хвилі з частотою $f = 10$ ГГц від поверхні міді з $\sigma = 5,8 \cdot 10^7$ См/м.

Подано хвильовий опір міді через параметр $Z_{c0} = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}$ для вакууму, враховуючи, що для металів $\text{tg}\delta = \sigma/\omega\epsilon\epsilon_0 \gg 1$. Тоді

$$\dot{Z}_{\text{см}} = \sqrt{\mu\mu_0/\epsilon\epsilon_0(1 - i \text{tg}\delta)} \approx (1 + i)Z_{c0}\sqrt{\omega\mu\epsilon_0/2\sigma}. \quad (4.53)$$

Оскільки $\omega = 2\pi f$ і для міді $\mu \approx 1$, після підстановки числових значень у (4.53) отримаємо, що $\sqrt{\omega\mu\varepsilon_0/2\sigma} \approx 6,9 \cdot 10^{-5}$. Коефіцієнт відбивання для нормального падіння хвилі з боку повітря (вакууму) на поверхню міді за формулою (4.4) дорівнює

$$\dot{\rho} = [(1+i)6,9 \cdot 10^{-5} - 1] / [(1+i)6,9 \cdot 10^{-5} + 1] \approx -0,9998.$$

Для хвиль оптичного діапазону, тобто на частотах порядку 10^{14} Гц, він буде відрізнятись від -1 у другому знаку.

Із скінченної провідності металів впливає *перша особливість* – не вся енергія падаючої електромагнітної хвилі відбивається, як від поверхні ідеального провідника, деяка частина її проходить у метал і там поглинається, перетворюючись у теплову. В електронній техніці звичайно використовують метали з високою провідністю і для багатьох практичних випадків, як видно з наведеного прикладу, відбивання можна вважати повним, з майже таким саме розподілом полів над поверхнею, як і для ідеального провідника. Неідеальність звичайно треба брати до уваги, коли необхідно розрахувати втрати енергії у металевих провідниках.

Приклад 4.4. Визначити кут заломлення хвилі, що проходить, за відомого кута падіння для тих самих даних, що й у попередньому прикладі.

Подамо сталу поширення хвилі $\dot{\gamma}_m = k_m - i\alpha_m$ у металі через хвильове число $k = \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ для вакууму, враховуючи, що для металів $\text{tg}\delta = \sigma/\omega\varepsilon\varepsilon_0 \gg 1$

$$\dot{\gamma}_m = \omega\sqrt{\mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0(1 - i \text{tg}\delta)} \approx (1 - i)k\sqrt{\sigma\mu/2\omega\varepsilon_0}. \quad (4.54)$$

Порівнюючи значення хвильових чисел у металі (дійсна частина $\dot{\gamma}_m$) та у вакуумі, бачимо, що відношення k_m/k дорівнює $\sqrt{\sigma\mu/2\omega\varepsilon_0}$, що для міді на частоті 10 ГГц становить $0,7 \cdot 10^4$. Скориставшись законом заломлення (4.24), маємо $\sin\varphi^- = \sin\varphi^+/0,7 \cdot 10^4$ і $\varphi^- \approx 0$ навіть за $\sin\varphi^+ = 1$.

Розглянутий приклад ілюструє *ще одну важливу особливість* поведінки електромагнітних хвиль біля поверхні реальних металів: практично незалежно від кута падіння хвилі, що пройшла у метал, поширюється *перпендикулярно* до його поверхні. Відповідно у цьому

ж напрямі через поверхню існує потік енергії у метал, який задається вектором Пойнтинга $\mathbf{\Pi}_n$ (рис. 4.20,а). Цей потік обумовлений перпендикулярними до $\mathbf{\Pi}_n$ та дотичними до поверхні складовими електричного та магнітного полів, що відрізняється від граничних умов на поверхні ідеального провідника (приклад 1.8). Принциповим є те, що саме скінченна провідність обумовлює наявність дотичної складової електричного поля E_τ у разі протікання струму по поверхні металу. Враховуючи, що відношення комплексних амплітуд електричного та магнітного полів дорівнює хвильовому опору $\dot{Z}_{\text{см}}$, та напрямі їх векторів, можемо записати для дотичних складових:

$$\dot{\mathbf{E}}_\tau = \dot{Z}_{\text{см}} \left[\dot{\mathbf{H}}_\tau \times \mathbf{e}_n \right], \quad (4.55)$$

де \mathbf{e}_n – орт нормалі до поверхні, спрямований вглиб металу (напрямок осі x на рис. 4.20 порівняно з попередніми для зручності змінено на зворотній). Тоді вектор Пойнтинга, що визначає втрати у металі, може бути знайдений через складові поля на поверхні

$$\dot{\mathbf{\Pi}}_n = \left[\dot{\mathbf{E}}_\tau \times \dot{\mathbf{H}}_\tau^* \right] / 2 = \dot{Z}_{\text{см}} \left[\left[\dot{\mathbf{H}}_\tau \times \mathbf{e}_n \right] \times \dot{\mathbf{H}}_\tau^* \right] / 2 = \mathbf{e}_n \dot{Z}_{\text{см}} \left| \dot{H}_\tau \right|^2 / 2. \quad (4.56)$$

Амплітуди полів спадають вглиб металу за законом $\exp(-\alpha_m x)$, де $\alpha_m = k\sqrt{\sigma\mu/2\omega\epsilon_0} = \sqrt{\omega\sigma\mu\mu_0/2}$ – уявна частина сталої поширення $\dot{\gamma}_m$ (4.54), бо електричне поле викликає струми провідності і нагрівання металу. Густина струму спадає за тим самим законом (рис.4. 20,б), що й електричне поле $j(x) = \sigma E_\tau(x) = \sigma E_\tau(0)\exp(-\alpha_m x)$. Якщо провести інтегрування $j(x)$ по всій товщі металу ($0 < x < \infty$)

$$\int_0^\infty j(x)dx = \sigma E_\tau(0) \int_0^\infty \exp(-\alpha x)dx = \sigma E_\tau(0) / \alpha_m, \quad (4.57)$$

то з останнього виразу можна уявити, що начебто весь струм розподілено рівномірно з тією ж густиною $j(0) = \sigma E_\tau(0)$, що й на поверхні (рис. 4.20,в), але тільки у шарі товщиною

$$\Delta = 1/\alpha_m = \sqrt{2/\omega\mu\mu_0\sigma}. \quad (4.58)$$

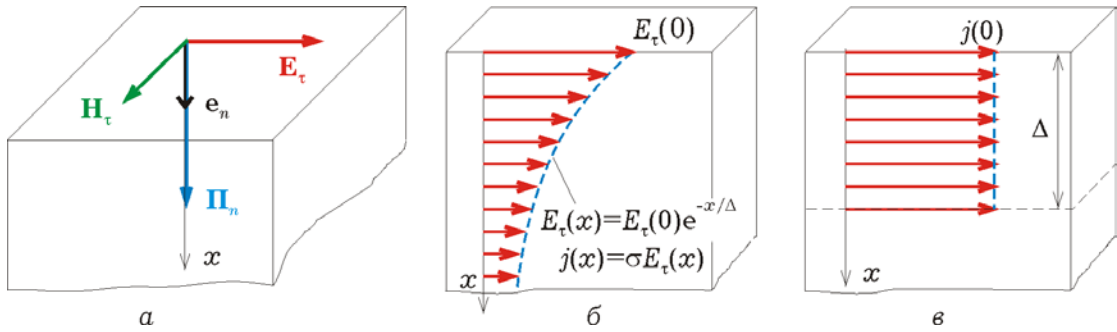


Рис. 4.20. Дотичні складові E_t і H_t на поверхні реального металу (а), обумовлені нормальним потоком енергії у метал, розподіл електричного поля та струмів провідності у товщі металу (б) та еквівалентне подання (в) приповерхневого шару. Напрямок осі x змінено на зворотній порівняно з попередніми рисунками.

Це явище розглядалось у розд. 3.3.3 як скін-ефект і в електронній техніці використовується для захисту (екранування) пристроїв від впливу зовнішніх електромагнітних полів. Для цього товщина металевого екрану повинна бути не меншою, ніж декілька Δ . Звичайно вважають, що хвиля повністю поглинається у шарі товщиною $(3 \dots 5)\Delta$.

Для розрахунку потужності втрат електромагнітної енергії на нагрівання треба проінтегрувати вектор Пойнтинга $\mathbf{\Pi}_n$ по поверхні металу S , що розглядається, тоді

$$P_{\tau} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[\int_S \mathbf{\Pi}_n d\mathbf{S} \right] = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[\dot{Z}_{\text{см}} \int_S |\dot{H}_\tau|^2 dS \right] = \frac{1}{2\sigma\Delta} \int_S |\dot{H}_\tau|^2 dS. \quad (4.59)$$

Тут враховано, по-перше, що вектор $d\mathbf{S}$ має напрям, співпадаючий з \mathbf{e}_n , тому $\mathbf{e}_n d\mathbf{S} = dS$; по-друге, вираз (4.53) для хвильового опору металу з використанням значення для Δ має вигляд $\dot{Z}_{\text{см}} = (1 + i)/\sigma\Delta$.

Труднощі інтегрування (4.59) викликані перш за все тим, що знаходження функцій розподілу полів на поверхні *реального* металу є дуже важкою задачею навіть за відносно простих випадків. Для спрощення звичайно приймають так звані *наближені граничні умови Щукіна-Леонтовича*, згідно з якими вважають, що втрати у реальному металі несуттєво впливають на конфігурацію магнітного і нормальної складової електричного поля біля його поверхні, а

дотична складова електричного поля може бути розрахована подібно до (4.55)

$$\dot{\mathbf{E}}_{\tau} = \dot{Z}_{\text{см}} \left[\dot{\mathbf{H}}_{\tau}^{(0)} \times \mathbf{e}_n \right], \quad (4.60)$$

але тут використовують значення магнітного поля $\dot{\mathbf{H}}_{\tau}^{(0)}$ на поверхні ідеального провідника. Відповідно для розрахунків теплових втрат в інтеграл (4.59) підставляють розподіл $|\dot{H}_{\tau}^{(0)}|^2$, знайдений для ідеального випадку.

На заключення звернемо увагу на один параметр, який широко використовується у практиці, – *поверхневий опір* R_s . Це є опір паралелепіпеда товщиною Δ , верхня грань якого лежить на поверхні металу і має форму квадрата з *одиночною* стороною. Використовуючи відому формулу для опору, можна показати, що його опір $R_s = 1/\sigma\Delta$. Фактично, з врахуванням скін-ефекту, це є опором стовпчика нескінченної товщини вглиб металу з квадратною основою на поверхні з струмом, що протікає у приповерхневому шарі. Цікаво, що цей опір не залежить від розміру квадратної ділянки, бо він пропорційний довжині і обернено пропорційний ширині.

Контрольні питання та вправи до розділу

4.1. Прослідкуйте, у чому спостерігається аналогія між хвильовими електромагнітними процесами біля границі розділу і хвилями напруги і струму у довгій лінії? На чому ґрунтується ця аналогія?

4.2. Які процеси спостерігаються біля поверхні розділу двох середовищ для нормального падіння на неї плоскої електромагнітної хвилі? Від чого залежить коефіцієнт відбивання хвилі? За яких умов можливе повне проходження та повне відбивання від границі розділу?

4.3. За яких умов можливе повне проходження та повне відбивання плоскої електромагнітної хвилі у разі нормального її падіння на шар речовини між двома границями розділу? Які властивості мають пів- та чвертьхвильові шари.

4.4. Які основні кількісні співвідношення виконуються у разі похилого падіння плоскої електромагнітної хвилі на границю розділу

двох середовищ? Від чого залежить коефіцієнт відбивання та коефіцієнт проходження хвилі?

4.5. За яких умов спостерігається повне проходження плоскої електромагнітної хвилі через границю розділу двох середовищ? У чому сутність закону Брюстера? Розрахуйте значення кута Брюстера для границі повітря та води ($\epsilon = 4$).

4.6. Сформулюйте, за яких умов можливе повне внутрішнє відбивання та опишіть особливості структури полів по обидві сторони від поверхні відбивання, звертаючи увагу на параметри поверхневої хвилі.

4.7. опишіть структуру полів для TE - і TM -хвиль та параметри неоднорідної хвилі, що має місце над ідеальною металевою поверхнею у разі похилого падіння на неї плоскої електромагнітної хвилі. Як утворюється «площинний» хвилевід, та які властивості хвиль можна спостерігати за допомогою цієї моделі?

4.8. Які особливості відбивання електромагнітної хвилі від поверхні реальних металів? Як розрахувати втрати енергії в металі використовуючи граничні умови Щукіна-Леонтовича?

5. ХВИЛІ У ХВИЛЕВОДАХ

Лініями передачі електромагнітної енергії на надвисоких частотах служать так звані хвилеводи у вигляді металевих труб з різноманітними конфігураціями поперечного перерізу. У цьому розділі будуть розглянуті основні закономірності розповсюдження хвиль у хвилеводах, які мають не тільки важливе прикладне значення, але й фундаментальне, світоглядне.

5.1. ОСНОВНІ ЗАКОНОМІРНОСТІ

5.1.1. Загальний вигляд розв'язку хвильових рівнянь

Розглянемо так званий регулярний хвилевід (рис. 5.1), тобто хвилевід, що має переріз у поперечній площині xy , однаковий вздовж осі z . Припустимо також, що втрати енергії у металевих стінках та заповнюючому середовищі відсутні ($\alpha = 0$).

Отримані у розд. 3 хвильові рівняння (3.21) для векторів \mathbf{E} і \mathbf{H} еквівалентні шести скалярним рівнянням для проекцій і для хвилеводів без втрат мають вигляд

$$\nabla^2 \dot{F} + k^2 \dot{F} = 0. \quad (5.1)$$

Тут під $\dot{F}(x, y, z, t)$ треба розуміти будь-яку з проекцій вектора електричного або магнітного поля на координатні осі. Часова

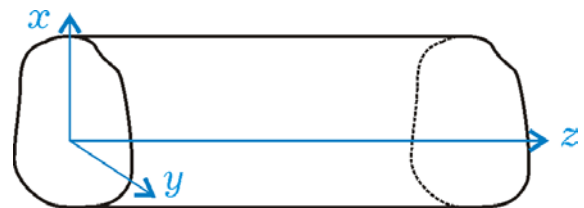


Рис. 5.1. Розміщення координатних осей у регулярному хвилеводі

залежність $\dot{F}(t) \sim \exp(i\omega t)$ вже визначена методом комплексних амплітуд, що використовується. З проведеного розгляду хвильових процесів слідує, що поля у хвилеводі можна подати в загальному вигляді як суперпозицію падаючих і відбитих хвиль, які розповсюджуються вздовж хвилеводів (вісь z), і шукати розв'язок хвильових рівнянь у вигляді:

$$\dot{F}(x, y, z, t) = \dot{F}^+(x, y)e^{i(\omega t - Kz)} + \dot{F}^-(x, y)e^{i(\omega t + Kz)}. \quad (5.2)$$

Тут треба зробити припущення, що хвильове число має величину $K \neq k$, тобто вважати, що у загальному випадку в хвилеводі довжина хвилі $\Lambda = 2\pi/K$ не дорівнює довжині хвилі $\lambda = 2\pi/k$ у необмеженому просторі і відповідно фазова швидкість $v_\phi = \omega/K$ хвилі вздовж хвилеводу відмінна від швидкості світла $c = \omega/k$. Подібна ситуація має місце при скісному падінні плоскої хвилі на поверхню, що відбиває (див. розд. 3).

Функції $\dot{F}^\pm(x, y)$ характеризують розподіл полів у поперечній площині хвилевода і грають роль амплітуд падаючої й відбитої хвиль для різних проєкцій. Причому, ці функції подібні і відрізняються тільки сталим множником, тому що задовольняють однаковим диференціальним рівнянням. Якщо залежність полів від поздовжньої координати нами визначена, то вигляд хвильових рівнянь можна спростити. У цьому легко впевнитись, підставивши вираз (5.2) у хвильові рівняння (5.1). Оскільки для (5.2) $\partial/\partial z = \pm iK$, а $\partial^2/\partial z^2 = -K^2$, то

$$\nabla_{x,y}^2 \dot{F}^\pm(x, y) + (k^2 - K^2) \dot{F}^\pm(x, y) = 0. \quad (5.3)$$

Тут $\nabla_{x,y}^2$ – оператор Лапласа, який включає в себе похідні тільки по поперечних координатах.

Розпочинаючи розв'язання рівняння (5.3), нагадаємо, що функції $\dot{F}^\pm(x, y)$, які характеризують розподіл полів у поперечному перерізі хвилеводу, подібні. Тому для з'ясування їх загальних закономірностей обмежимося розглядом лише падаючої хвилі. Рівняння типу (5.3) у частинних похідних зручно розв'язувати методом розділення змінних, що описаний у підрозд. 2.1.3. Позначивши $\dot{F}^+(x, y) = X(x) \cdot Y(y)$ і виконавши описану процедуру розділення, одержимо замість (5.3) два рівняння:

$$d^2X/dx^2 + k_x^2 X = 0, \quad d^2Y/dy^2 + k_y^2 Y = 0. \quad (5.4)$$

Тут через k_x і k_y позначені так звані сталі розділення, для яких виконується рівність $k_x^2 + k_y^2 = k^2 - K^2$, або

$$k_x^2 + k_y^2 + K^2 = k^2, \quad (5.5)$$

і які іноді називають (по аналогії з k і K) поперечними хвильовими числами, незважаючи на те, що у поперечному напрямку розповсюдження хвиль не відбувається.

Розв'язок рівнянь (5.4) можна подати у вигляді гармонійних функцій:

$$X(x) = C_x \frac{\sin}{\cos}(k_x x + \varphi_x); \quad Y(y) = C_y \frac{\sin}{\cos}(k_y y + \varphi_y).$$

Подвійний запис означає, що виходячи із зручності можна обирати будь-яку з функцій, поки сталі інтегрування φ_x і φ_y не визначені.

Одержані вирази дозволяють записати загальний вигляд розв'язку хвильових рівнянь для будь-якої із складових електричного й магнітного полів у формі

$$\dot{F}^+(x,y) = C^+ \frac{\sin}{\cos}(k_x x + \varphi_x) \frac{\sin}{\cos}(k_y y + \varphi_y). \quad (5.6)$$

Цей вираз показує, що гармонійні змінення напруженості аналогічні полям стоячої хвилі у поперечному перерізі, а в поздовжньому напрямку в хвилеводі існує хвильовий процес, який характеризується поздовжнім хвильовим числом K . Сталі інтегрування φ_x і φ_y та сталі розділення k_x і k_y звичайно знаходяться з граничних умов, що можуть бути сформульовані для кожного конкретного хвилеводу.

5.1.2. Дисперсія у хвилеводах

З'ясуємо, що криється за нашим припущенням відносно відмінності хвильових чисел у хвилеводі та вільному просторі. Для цього позначимо різницю $(k^2 - K^2)$ виразом $(2\pi/\lambda_{кр})^2$, що за формою співпадає з виразом хвильових чисел через відповідні довжини хвиль. Скоротивши всі члени цієї рівності на $(2\pi)^2$, одержимо $1/\lambda_{кр}^2 = 1/\lambda^2 - 1/\Lambda^2$, звідки

$$\Lambda = \lambda / \sqrt{1 - (\lambda / \lambda_{\text{кр}})^2}. \quad (5.7)$$

Оскільки фазова швидкість розповсюдження хвилі у хвилеводі пов'язана з довжиною хвилі у хвилеводі співвідношенням $v_{\text{ф}} = \Lambda f$, аналогічним до $c = \lambda f$, то

$$v_{\text{ф}} = c / \sqrt{1 - (\lambda / \lambda_{\text{кр}})^2}. \quad (5.8)$$

Щоб з'ясувати фізичний зміст формально введеної величини $\lambda_{\text{кр}}$, замінимо під коренем відношення довжин хвиль оберненим відношенням відповідних частот ($f_{\text{кр}} = c / \lambda_{\text{кр}}$) і запишемо:

$$\begin{aligned} v_{\text{ф}} &= c / \sqrt{1 - (f_{\text{кр}} / f)^2}, \\ \Lambda &= \lambda / \sqrt{1 - (f_{\text{кр}} / f)^2}, \\ K &= k \sqrt{1 - (f_{\text{кр}} / f)^2}. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Перше з цих співвідношень показує, що фазова швидкість залежить від частоти, і характеризує закон *дисперсії для хвилеводу*, який зображено графіком на рис. 5.2.

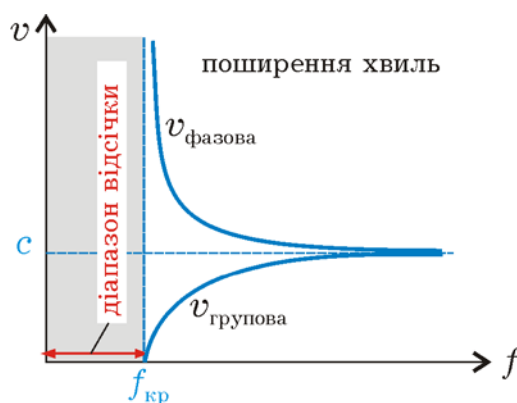


Рис. 5.2. Загальний вигляд закону дисперсії електромагнітних хвиль у хвилеводах

Важливою особливістю цієї залежності є те, що у хвилеводі $v_{\text{ф}} > c$. Не менш важлива особливість даного закону пов'язана з тим, що дійсні значення фазової швидкості, а значить, і нормальне розповсюдження електромагнітних хвиль по хвилеводу можливе лише для області частот $f > f_{\text{кр}}$. Звідси зрозумілим стає фізичний зміст позначення $f_{\text{кр}}$: *критична частота* — це гранична частота, що поділяє

діапазон нормального розповсюдження електромагнітних полів у вигляді хвиль і так званий *діапазон відсічки* $f < f_{\text{кр}}$. Подібний зміст має й *критична довжина хвилі* $\lambda_{\text{кр}}$, як деяке граничне значення довжини хвилі (відміряне у вільному просторі) між вказаними діапазонами, але на шкалі довжин хвиль. Умова розповсюдження у термінах довжин хвиль формулюється у вигляді нерівності $\lambda < \lambda_{\text{кр}}$, однак довжина хвилі у хвилеводі інша, ніж (на тій же частоті) у вільному просторі; вона завжди більша ($\Lambda > \lambda$), і з наближенням до критичного режиму прямує до нескінченності.

Такий закон дисперсії визначає ще одну корисну залежність – групової швидкості від частоти: *добуток групової і фазової швидкості дорівнює квадрату швидкості світла* $v_{\text{ф}}v_{\text{гр}} = c^2$. Це можна довести, скориставшись визначеннями $v_{\text{ф}}v_{\text{гр}} = (\omega/K)(d\omega/dK) = d(\omega^2)/d(K^2)$. А оскільки $(k^2 - K^2) = (2\pi/\lambda_{\text{кр}})^2$ і враховуючи рівність $k = \omega/c$, отримуємо, що остання похідна дорівнює c^2 . Відповідна частотна залежність групової швидкості наведена на рис. 5.2.

Розуміння такого закону дисперсії було б неповним без з'ясування особливостей поведінки електромагнітних полів у *режимі відсічки*. Якщо будемо намагатися збуджувати хвилевід на частоті, нижчій за критичну, то у відповідності з (5.9) фазова швидкість, довжина хвилі, а значить, і хвильове число у хвилеводі повинні бути уявними величинами. Тому хвильові множники в (5.2) приймають форму $e^{\pm|K|z} e^{i\omega t}$, яка показує, що складові поля у всіх точках хвилеводу коливаються синфазно у часі, а амплітуда коливань вздовж хвилеводу спадає експоненціально. Таке явище не можна назвати поглинанням, тому що воно спостерігається у хвилеводах без втрат, а можна уявити як деякі крайові поля, що існують на деякій відстані від місця збудження, але не здатні збудити електромагнітну хвилю, що біжить по хвилеводу. Істотно, що групова швидкість у цьому діапазоні дорівнюватиме 0.

Окрім розглянутого у даному розділі явища, дисперсія у хвилеводі можлива також за рахунок втрат у стінках хвилеводу, або в заповнюючому діелектрику, подібно до того, як це мало місце для плоскої хвилі.

5.1.3. Типи хвиль у хвилеводах

Для з'ясування питання про класифікацію хвиль за різними типами зробимо спочатку деякі формальні перетворення. Скористаємось виразами рівнянь Максвелла у проекціях на осі координат (3.3) і будемо вважати для спрощення, що у хвилеводі розповсюджується тільки падаюча хвиля. Це не змінить загальності висновків, тому що функції $\dot{F}^+(x, y)$ і $\dot{F}^-(x, y)$ подібні. Оскільки характер зміни полів вздовж осі z задається виразом (5.2), то в (3.3) приймемо, що $\partial/\partial z = -iK$.

Розглядаючи потому перше і п'яте рівняння як систему для \dot{E}_x і \dot{H}_y , а друге й четверте як систему для \dot{E}_y та \dot{H}_x , і розв'язуючи ці системи рівнянь, одержимо такі вирази для поперечних складових полів через поздовжні:

$$\begin{aligned}\dot{E}_x &= -i(K\partial\dot{E}_z/\partial x + \omega\mu\mu_0\partial\dot{H}_z/\partial y)/(k^2 - K^2); \\ \dot{H}_y &= -i(\omega\varepsilon\varepsilon_0\partial\dot{E}_z/\partial x + K\partial\dot{H}_z/\partial y)/(k^2 - K^2); \\ \dot{E}_y &= -i(K\partial\dot{E}_z/\partial y - \omega\mu\mu_0\partial\dot{H}_z/\partial x)/(k^2 - K^2); \\ \dot{H}_x &= i(\omega\varepsilon\varepsilon_0\partial\dot{E}_z/\partial y - K\partial\dot{H}_z/\partial x)/(k^2 - K^2); \end{aligned} \quad (5.10)$$

Структура цих виразів однотипна: перший доданок у чисельнику визначається поздовжньою складовою електричного поля, другий – поздовжньою складовою магнітного поля. Очевидно, можливе існування таких структур хвиль, у яких відсутня поздовжня складова або електричного, або магнітного поля. Відповідно виділяють дві групи хвиль: так звані *TE*-хвилі і *TM*-хвилі.

1. **TE-хвилі** характеризуються відсутністю поздовжньої складової електричного поля ($E_z = 0$). Однією з особливостей таких хвиль є те, що відношення поперечних складових електричного й магнітного полів не залежить від координат. Це відношення називається хвильовим опором хвилеводу, причому

$$Z_0^{TE} = \left| \frac{E_x}{H_y} \right| = \left| \frac{E_y}{H_x} \right| = \frac{E_\perp}{H_\perp} = \frac{\omega\mu\mu_0}{K} = Z_c \frac{\Lambda}{\lambda} = Z_c / \sqrt{1 - (f_{кр}/f)^2}. \quad (5.11)$$

2. **ТМ-хвилі** характеризуються відсутністю поздовжньої складової магнітного поля ($H_z = 0$). Хвильовий опір хвилеводу для цих хвиль

$$Z_0^{TM} = \left| \frac{E_x}{H_y} \right| = \left| \frac{E_y}{H_x} \right| = \frac{E_{\perp}}{H_{\perp}} = \frac{K}{\omega \epsilon \epsilon_0} = Z_c \frac{\lambda}{\Lambda} = Z_c \sqrt{1 - (f_{кр}/f)^2} \quad (5.12)$$

3. Чи можливе існування таких електромагнітних хвиль, у яких обидві поздовжні складові відсутні ($E_z = H_z = 0$)? На перший погляд у цьому випадку всі поздовжні складові в (5.10) приймають нульові значення, тому існування таких полів неможливе. Це дійсно так, за виключенням випадку, коли знаменник у (5.10) також прямує до нуля ($K \rightarrow k$). Отож, можливе існування так званих **ТЕМ-хвиль** ($E_z = H_z = 0$), але необхідною умовою цього є рівність $K = k$. Для таких хвиль характерна відсутність дисперсії ($v_{\phi} = c$).

Доцільність проведеної класифікації полягає у тому, що порівняно легко можна кількісно аналізувати лише окремі типи хвиль, а будь-які складні поля можна подати як їх суперпозицію.

У практиці хвилеводної техніки існують *інші системи позначень* типів хвиль. За ознакою наявності поздовжньої складової магнітного поля ($H_z \neq 0$) розрізняють так звані *магнітні* або **Н-хвилі** (аналог *ТЕ*-хвиль за попередньою класифікацією). Хвилі, що мають поздовжньою складовою електричне поле ($E_z \neq 0$) називають *електричними* або **Е-хвилями** (аналог *ТМ*-хвилям). *ТЕМ*-хвилі за однолітерною системою іноді називають **Т-хвилями**. Надалі будемо дотримуватись першої системи позначень.

5.1.4. Хвилі без дисперсії

Чи можливе розповсюдження у хвилеводах (без втрат) таких електромагнітних хвиль, для яких не спостерігається дисперсія? Які необхідні умови треба виконати для існування таких хвиль і якими параметрами вони повинні характеризуватися?

Формули (5.7) – (5.9) справедливі, якщо $(k^2 - K^2) > 0$. Якраз ця нерівність була вихідною для наступних висновків про характер дисперсії у хвилеводах. І якщо можливе існування *бездисперсійних* хвиль, то необхідною умовою цього є рівність $(k^2 - K^2) = 0$ або $k = K$. Вона означає, що швидкість розповсюдження таких хвиль дорівнює

швидкості світла ($v_{\phi} = c$) у середовищі, що заповнює хвилевід, а довжина хвилі у хвилеводі дорівнює довжині хвилі у вільному просторі ($\Lambda = \lambda$). Ці самі рівності можна одержати, якщо в (5.7 – 5.9) формально прийняти $\lambda_{кр} \rightarrow \infty$, або $f_{кр} \rightarrow 0$. Приймаючи до уваги фізичний зміст $f_{кр}$, можна зробити висновок, що *хвилі без дисперсії не мають режиму відсічки*, тобто їх розповсюдження у хвилеводі можливе на будь-яких частотах, включаючи найнижчі. Про характер полів у хвилеводі без дисперсії можна судити з рівняння (5.3), якщо в ньому прийняти $k = K$:

$$\nabla_{x,y}^2 \dot{F}^{\pm}(x, y) = 0. \quad (5.13)$$

Даний вираз за формою співпадає з двовимірним рівнянням Лапласа, яке описує статичні поля. Але оскільки граничні умови на стінках хвилеводу і для змінних і для статичних полів однакові, можна зробити висновок, що, по-перше, характер розподілу полів у поперечному перерізі хвилеводу для хвиль без дисперсії такий самий, як і для статичних полів, і, по-друге, розповсюдження хвиль без дисперсії можливе лише у хвилеводах, які допускають існування статичних полів. До них відносяться такі лінії передачі, як коаксіальний хвилевід, смужкова лінія і т.п., що мають як мінімум два провідники й допускають приєднання джерела постійної напруги.

Далі буде розглянуто, що для *TE*- або *TM*-хвиль можливе існування нескінченної множини їх мод. Хвилі *TEM*, розподіл поперечних полів для яких такий саме, як і статичних, за заданої конфігурації хвилеводу мають єдиний розв'язок рівнянь Лапласа і, отже, не мають різновидностей.

5.2. ВИДИ ХВИЛЕВОДІВ

5.2.1. Прямокутний хвилевід

Найпростіша модель для кількісного дослідження процесів розповсюдження електромагнітних хвиль у хвилеводах – прямокутний хвилевід (рис. 5.3), тобто металева труба з прямокутним поперечним перерізом з розмірами $a \times b$.

Прямокутні хвилеводи широко використовуються для передачі електромагнітних хвиль у сантиметровому та міліметровому діапазонах, особливо за високих рівнів потужності. Для спрощення будемо вважати, що втрати в стінках хвилеводу і в діелектрику, що його заповнює, відсутні. Це дає можливість простіше сформулювати граничні умови: на стінках хвилеводу відсутня дотична складова електричного поля ($E_z = E_y = 0$ для $x = 0$ і $x = a$, $E_z = E_x = 0$ для $y = 0$ і $y = b$).

Щоб не визначати сталі інтегрування для кожної складової поля, скористуємося таким засобом: запишемо вирази для поздовжньої складової поля у формі (5.6), а поперечні

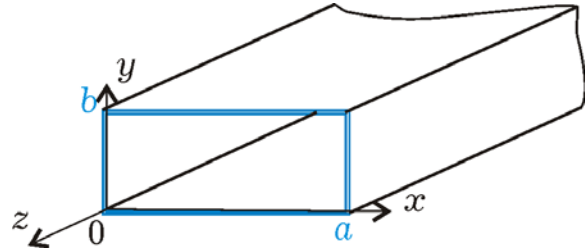


Рис. 5.3. Перетин прямокутного хвилевода

знайдемо з (5.10). У цьому разі можна обійтись без формулювання граничних умов для магнітного поля. Крім того, допущення про нескінченну довжину хвилеводу дозволяє розглядати лише падаючу хвилю. Деякі особливості *TE*- і *TM*-хвиль вимагають їх роздільного аналізу.

***TE*-хвилі** ($E_z = 0$). Запишемо вираз для амплітуди (хвильовий множник пропускаємо) поздовжньої складової магнітного поля:

$$\dot{H}_z = iH_0 \cos(k_x x + \varphi_x) \cos(k_y y + \varphi_y). \quad (5.14)$$

Підставляючи (5.14) у (5.10), одержуємо вирази для поперечних складових:

$$\begin{aligned} \dot{E}_x &= -H_0 k_y \omega \mu_0 \cos(k_x x + \varphi_x) \sin(k_y y + \varphi_y) / (k^2 - K^2); \\ \dot{E}_y &= H_0 k_x \omega \mu_0 \sin(k_x x + \varphi_x) \cos(k_y y + \varphi_y) / (k^2 - K^2); \\ \dot{H}_x &= -H_0 k_x K \sin(k_x x + \varphi_x) \cos(k_y y + \varphi_y) / (k^2 - K^2); \\ \dot{H}_y &= -H_0 k_y K \cos(k_x x + \varphi_x) \sin(k_y y + \varphi_y) / (k^2 - K^2); \end{aligned} \quad (5.15)$$

Приймаючи відповідно до граничних умов $E_y = 0$ для $x = 0$ та $x = a$, одержуємо $\varphi_x = 0$ і $k_x = m\pi/a$, де $m = 0, 1, 2, 3, \dots$. Приймаючи $E_x = 0$ на широких стінках хвилеводу ($y = 0$, $y = b$), одержуємо $\varphi_y =$

0 та $k_y = n\pi/b$, де $n = 0,1,2,3,\dots$. Визначення сталих інтегрування та сталих розділення дозволяє одержати вирази для комплексних амплітуд TE -хвиль:

$$\begin{aligned}\dot{E}_x &= -H_0 Z_0^{TE} k_y K \cos(m\pi x/a) \sin(n\pi y/b)/(k_x^2 + k_y^2); \\ \dot{E}_y &= H_0 Z_0^{TE} k_x K \sin(m\pi x/a) \cos(n\pi y/b)/(k_x^2 + k_y^2); \\ \dot{H}_x &= -H_0 k_x K \sin(m\pi x/a) \cos(n\pi y/b)/(k_x^2 + k_y^2); \\ \dot{H}_y &= -H_0 k_y K \cos(m\pi x/a) \sin(n\pi y/b)/(k_x^2 + k_y^2); \\ \dot{H}_z &= iH_0 \cos(m\pi x/a) \cos(n\pi y/b); \end{aligned} \quad (5.16)$$

Стала H_0 може бути визначена з початкових умов або, наприклад, за відомої потужності, що передається по хвилеводу.

Дуже важливий результат отриманого розв'язку полягає у тому, що у хвилеводі можлива нескінченна множина різних типів (мод) хвиль, кожна з яких характеризується певною парою значень чисел m і n та позначається TE_{mn} . З виразів (5.16) легко зрозуміти фізичний зміст цих чисел: вони показують кількість напівперіодів поля, яка вкладається відповідно вздовж широкої й вузької стінок хвилеводу. Числа m і n можуть незалежно одне від одного приймати будь-які цілі додатні (від'ємні нічого нового не дають) значення. Винятком є випадок одночасної рівності $m = 0$ і $n = 0$, коли всі поперечні складові приймають нульові значення. Найпростішу конфігурацію полів мають природньо типи хвиль з найменшими індексами. На рис. 5.4. зображено розподіл поздовжньої складової магнітного поля у поперечному перерізі для деяких мод. Штриховими лініями для хвилі TE_{32} виділені «ланки», в яких розподіл поля має такий саме вигляд, як і для хвилі TE_{11} .

Другий важливий результат полягає у тому, що визначення сталих розділення k_x і k_y дозволяє з рівності (5.5) знайти критичну довжину хвилі

$$\lambda_{кр} = 2/\sqrt{(m/a)^2 + (n/b)^2}, \quad (5.17)$$

яка залежить від типу хвилі й розмірів хвилевода.

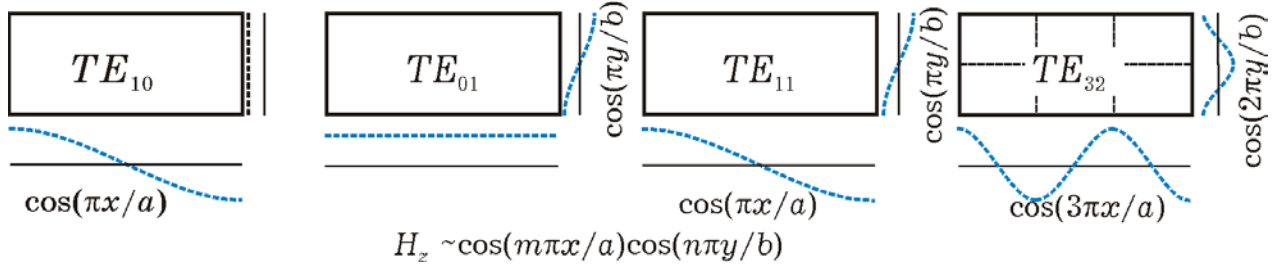


Рис. 5.4. Характерні функції розподілу поздовжньої складової магнітного поля у поперечному перерізі хвилевода для деяких TE -мод. Числа m і n визначають кількість напівперіодів стоячої хвилі відповідно вздовж широкої та вузької стінок

TM -хвилі ($H_z = 0$). У даному випадку зручно обрати вираз для поздовжньої складової електричного поля у формі

$$\dot{E}_z = iE_0 \sin(k_x x + \varphi_x) \sin(k_y y + \varphi_y). \quad (5.18)$$

Поперечні складові визначаються підстановкою E_z у (5.10):

$$\begin{aligned} \dot{E}_x &= E_0 k_x K \cos(k_x x + \varphi_x) \sin(k_y y + \varphi_y) / (k^2 - K^2); \\ \dot{E}_y &= E_0 k_y K \sin(k_x x + \varphi_x) \cos(k_y y + \varphi_y) / (k^2 - K^2); \\ \dot{H}_x &= -E_0 k_y \omega \epsilon \epsilon_0 \sin(k_x x + \varphi_x) \cos(k_y y + \varphi_y) / (k^2 - K^2); \\ \dot{H}_y &= E_0 k_x \omega \epsilon \epsilon_0 \cos(k_x x + \varphi_x) \sin(k_y y + \varphi_y) / (k^2 - K^2); \end{aligned} \quad (5.19)$$

Вибір E_z у формі (5.18) зручний тим, що використання граничних умов приводить до тих самих значень сталих інтегрування ($\varphi_x = \varphi_y = 0$) і сталих розділення ($k_x = m\pi/a$, $k_y = n\pi/b$). Остаточні вирази для складових після підстановки сталих приймають вигляд

$$\begin{aligned} \dot{E}_x &= E_0 k_x K \cos(m\pi x/a) \sin(n\pi y/b) / (k_x^2 + k_y^2); \\ \dot{E}_y &= E_0 k_y \sin(m\pi x/a) \cos(n\pi y/b) / (k_x^2 + k_y^2); \\ \dot{E}_z &= iE_0 \sin(m\pi x/a) \sin(n\pi y/b); \\ \dot{H}_x &= -(E_0/Z_0^{TM}) k_y K \sin(m\pi x/a) \cos(n\pi y/b) / (k_x^2 + k_y^2); \\ \dot{H}_y &= (E_0/Z_0^{TM}) k_x K \cos(m\pi x/a) \sin(n\pi y/b) / (k_x^2 + k_y^2); \end{aligned} \quad (5.20)$$

Тут, як і для TE -хвиль, можлива нескінченна множина типів хвиль, які позначаються TM_{mn} . Істотна відміна лише в тому, що для TM -хвиль неможливі нульові значення жодного з індексів m і n , тому що для таких значень $E_z = 0$, а тому дорівнюватимуть нулю і всі інші складові поля.

На рис. 5.5 схематично зображено розподіл поздовжньої складової електричного поля вздовж широкої і вузької стінок хвилеводу. Найпростішим з TM -хвиль буде розподіл для хвилі TM_{11} . Решта мод повторюють розподіл TM_{11} $m \times n$ раз. Вираз для розрахунку критичної довжини хвилі типів хвиль такий саме, як і для хвиль TE_{mn} .

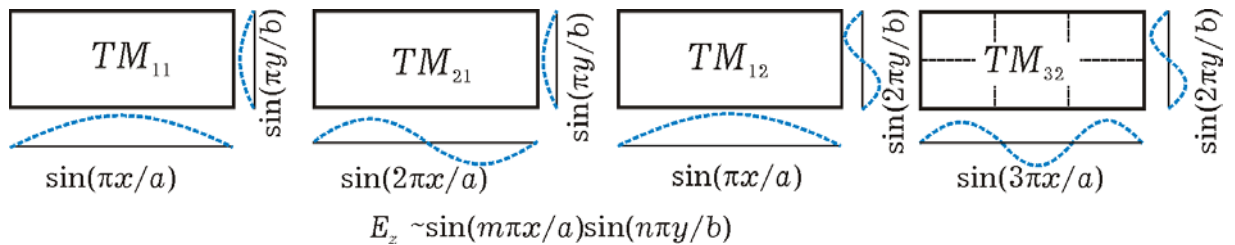


Рис. 5.5. Характерні функції розподілу поздовжньої складової електричного поля у поперечному перерізі хвилевода для деяких TM -мод. Числа m і n визначають кількість напівперіодів стоячої хвилі відповідно вздовж широкої та вузької стінок

5.2.2. Одномодовий діапазон. Основна мода

На прикладі прямокутного хвилеводу, використовуючи одержані результати, можна розглянути деякі загальні закономірності, пов'язані з розповсюдженням різних мод у хвилеводах, і правила для вибору геометричних розмірів хвилеводу. З ряду причин хвилевід використовують звичайно у так званому *одномодовому режимі*, тобто на тих частотах, на яких у хвилеводі може розповсюджуватись лише одна мода. Для знаходження цього діапазону розглянемо діаграму (рис. 5.6), на якій вздовж осі частот нанесені значення $f_{кр} = c/\lambda_{кр}$, які можуть бути розраховані за значеннями $\lambda_{кр}$ для різних індексів m і n . Найменше значення $f_{кр}$ буде мати хвиля TE_{10} . Решта мод мають більші значення $f_{кр}$, їх взаємне розташування буде залежати від співвідношення розмірів a і b . Якщо $a > 2b$, то найближчим до $f_{кр}^{10}$ буде $f_{кр}^{20}$, у протилежному

випадку $f_{кр}^{01}$. Зауважимо, що деякі моди мають однакові значення $f_{кр}$ (наприклад, TE_{11} і TM_{11}), вони називаються *виродженими*.

Якщо збуджувати хвилевід на деякій частоті, позначеній на діаграмі $f_{ген}$, то у хвилеводі будуть розповсюджуватись лише моди TE_{10} , TE_{20} , TE_{01} , для яких виконується умова розповсюдження $f_{кр}^{mn} < f_{ген}$. Для решти мод буде режим відсічки.

Зі зменшенням частоти збудження у режим відсічки попадають хвилі TE_{01} , потім TE_{20} і останньою TE_{10} . Звідси ясно, що лише для хвилі TE_{10} можна знайти діапазон частот, у якому вона зможе розповсюджуватись без домішки інших хвиль. Тому мода TE_{10} називається *основною*, а решта – *вищими*.

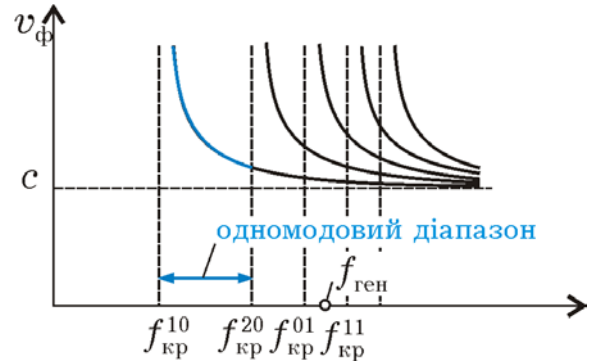


Рис. 5.6. Визначення одномодового діапазона за критичними частотами хвилеводних мод

Діапазон одномодового режиму хвилеводу лежить у границях від $f_{кр}$ основної моди до $f_{кр}$ найближчої вищої моди. Використовуючи це правило, неважко розрахувати геометричні розміри a і b хвилеводу, який забезпечує передачу електромагнітних хвиль у заданому діапазоні частот. Треба пам'ятати, що реальний діапазон дещо вузький за розглянутий, тому що у разі використання хвилеводу в режимі, близькому до критичного, суттєво збільшуються втрати енергії й зростає поглинання хвилі.

Враховуючи особливе значення моди TE_{10} , на завершення охарактеризуємо розподіл її полів. Аналітичні вирази для комплексних амплітуд складових поля легко одержати з (5.16) при $m = 1, n = 0$:

$$\begin{aligned} \dot{E}_x &= 0; & \dot{H}_y &= 0 & ; \\ \dot{E}_y &= H_0 Z_c(2a/\lambda) \sin(\pi x/a); \\ \dot{H}_x &= -H_0 (2a/\lambda) \sin(\pi x/a); \\ \dot{H}_z &= iH_0 \cos(\pi x/a); \end{aligned} \tag{5.21}$$

Нагадаємо, що для знаходження миттєвих значень необхідно помножити ці функції на хвильовий множник $\exp(\omega t - Kz)$ і від добутку залишити тільки дійсну частину. У результаті отримаємо

$$\begin{aligned}\dot{E}_y &= H_0 Z_c(2a/\lambda) \sin(\pi x/a) \cos(\omega t - Kz); \\ \dot{H}_x &= -H_0 (2a/\Lambda) \sin(\pi x/a) \cos(\omega t - Kz); \\ \dot{H}_z &= iH_0 \cos(\pi x/a) \sin(\omega t - Kz); \end{aligned} \quad (5.21a)$$

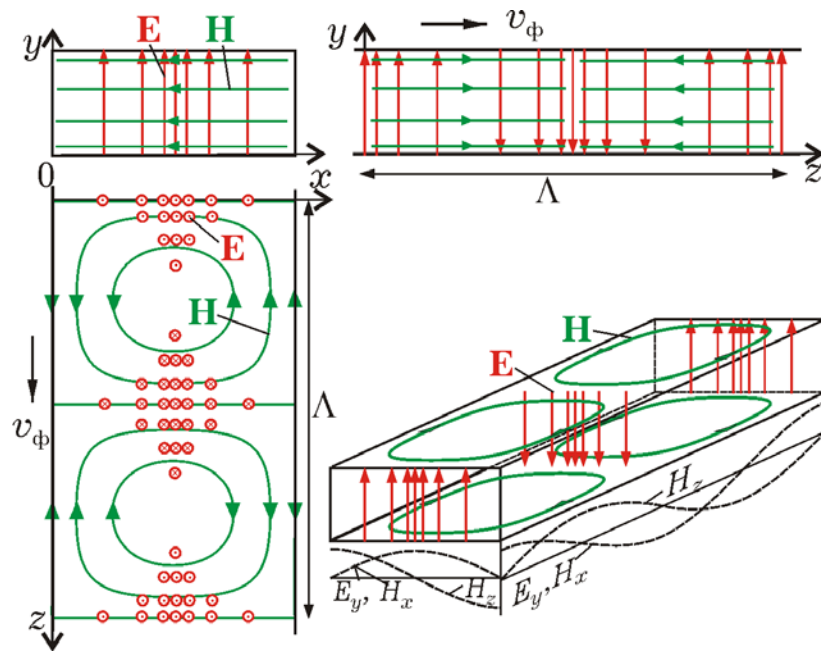


Рис. 5.7. Різні проєкції розподілу силових ліній електричного і магнітного поля

На рис. 5.7 зображена «фотографія» силових ліній електричного і магнітного поля. Електричні силові лінії мають лише одну складову і з'єднують широкі стінки. Найбільше значення E_y має у центрі хвилеводу, а на бічних стінках зменшується до нуля. Магнітні силові лінії являють собою замкнені лінії, що лежать в площинах, паралельних широким стінкам. На рис. 5.8 подано векторні поля для електричного та магнітного поля, розподіл електричних струмів, що протікають у площині широкої стінки, а також розподіл векторів Пойнтинга. Важливою особливістю є те, що положення максимумів поперечних складових E і H співпадають. У цих саме точках має максимальне значення й поздовжня складова

вектора Пойнтинга. З часом вся картина переміщується вздовж осі z з фазовою швидкістю: $v_{\phi} = c/\sqrt{1 - (\lambda/2a)^2}$.

З наближенням частоти до критичного значення фазова швидкість та довжина хвилі у хвилеводі, тобто й просторовий період поля (рис. 5.7), зростають до нескінченності, поперечна складова $H_x \rightarrow 0$ і магнітне поле стає поздовжнім, а коливання у всіх точках хвилеводу відбуваються синфазно. Вектор Пойнтинга для такого режиму визначається тільки складовими H_z і E_y і буде направлений перпендикулярно до осі хвилеводу. Це означає, що передачі енергії по хвилеводу не відбувається.

На рис. 5.8,в зображено розподіл векторного поля густини струмів на широкій стінці хвилеводу. Відповідно до граничних умов на поверхні ідеального металу сімейство векторів струму перпендикулярне сімейству векторів поля. Практично важливо, що посередині широкої стінки струми мають лише поздовжню складову.

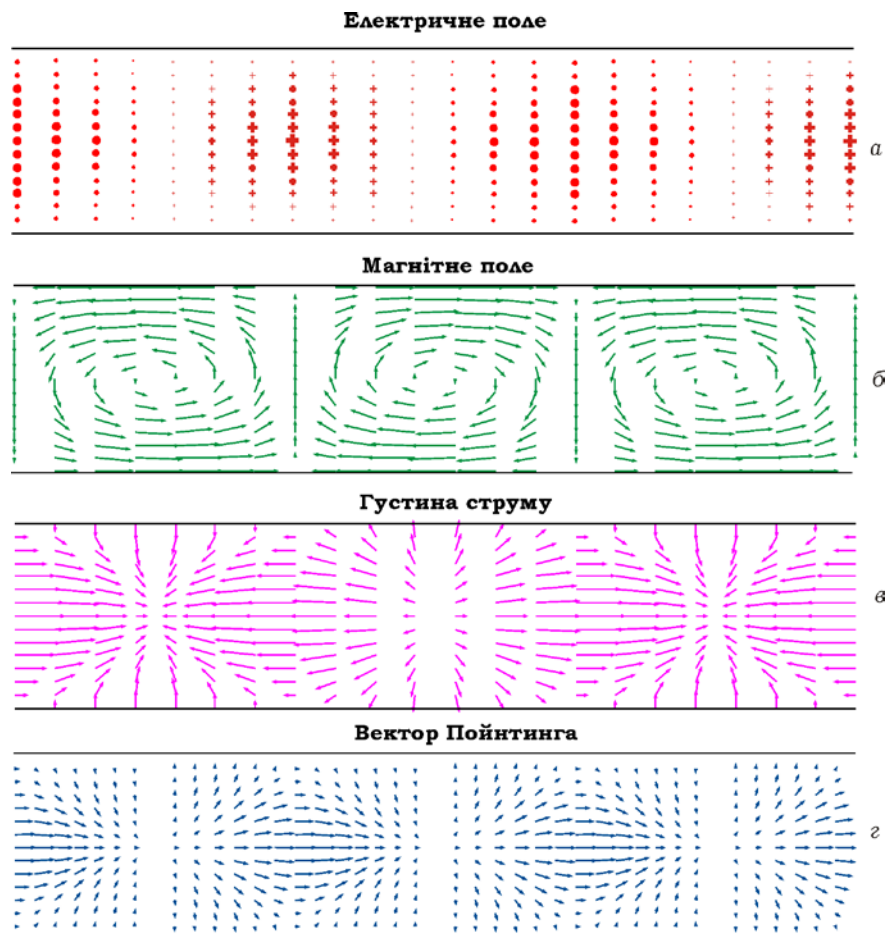


Рис. 5.8. Розподіл електричного (а) і магнітного (б) поля, густини поверхневого струму (в) та векторів Пойнтинга (г) у площині широкої стінки хвилеводу для основної моди TE_{10} .

Ще одна особливість полягає у тому, що у тих місцях, де лінії струму сходяться або розходяться, електричне поле відсутнє. Саме тут буде найбільша швидкість зміни електричного поля і відповідно найбільша густина струмів зміщення між широкими стінками, які замикають струми провідності на стінках.

Описана картина розподілу полів та векторів Пойнтинга подібна до таких у площинному хвилеводі (розд. 4.3.5.). Така аналогія дозволяє уявити розповсюдження основної моди у прямокутному хвилеводі як суперпозицію плоских хвиль, що відбиваючись від вузьких стінок, поширюються вздовж хвилеводу.

Для повноти уявлення про характер розподілу полів для вищих мод наведемо ескізи силових ліній електричного та магнітного полів для найпростіших мод з ненульовими індексами TE_{11} та TM_{11} (рис. 5.9).

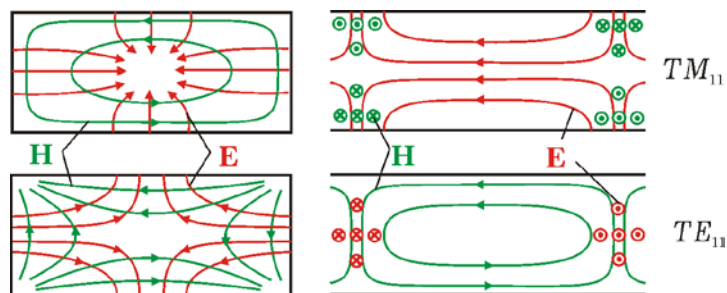


Рис. 5.9. Конфігурація силових ліній електричного та магнітного полів для вищих мод TE_{11} та TM_{11}

Для більш високих мод з індексами, що перевищують одиницю, ескізи розподілу полів у поперечному перетині можуть бути побудовані повторенням ескізів простіших мод, як це зображено на рис. 5.4 та рис. 5.5.

5.2.3. Круглий трубчастий металевий хвилевід

Кількісне дослідження процесів поширення електромагнітних хвиль у трубчастому металевому хвилеводі круглого перерізу (надалі – круглий хвилевід) подібне до аналізу прямокутного хвилеводу. Однак, для цього зручніше застосувати циліндричну систему координат (рис. 5.10), яка дозволяє більш просто сформулювати граничні умови. Так, нехтуючи втратами у стінках

хвилеводу і діелектрику, що його заповнює, граничні умови на поверхні ідеально провідного циліндра записують так:

$$E_{\varphi}(R) = 0, E_z(R) = 0, H_r(R) = 0, \quad (5.22)$$

де E_{φ} , E_z , H_r - відповідно азимутальна, поздовжня та радіальна складові напруженості електричного і магнітного полів.

Для знаходження структури поля необхідно розв'язати хвильові рівняння (3.21), або для скалярних складових електричного і магнітного полів (5.1), які у циліндричній системі координат мають вигляд:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} + k^2 F = 0. \quad (5.23)$$

Для переходу від (5.23) до рівнянь у звичайних похідних використаємо метод розділення змінних, для чого приймемо

$$F(r, \varphi, z) = P(r) \cdot \Phi(\varphi) \cdot Z(z). \quad (5.24)$$

Підставляючи (5.24) у (5.23), отримаємо

$$\frac{1}{P} \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + \frac{1}{rP} \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \Phi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = -k^2. \quad (5.25)$$

Тут четвертий доданок для функції $Z(z)$, як і права частина, не залежить від координат і у разі позначення

$$\frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = -K^2 \quad (5.26)$$

є рівнянням у звичайних похідних, розв'язок якого знаходиться як лінійна комбінація функцій $e^{\pm iKz}$, причому нижній знак відповідає прямій хвилі, нижній - зворотній

З урахуванням останнього позначення подамо (5.25) у вигляді

$$\frac{r^2}{P} \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + \frac{r}{P} \frac{\partial P}{\partial r} + (k^2 - K^2)r^2 + \frac{1}{\Phi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = 0$$

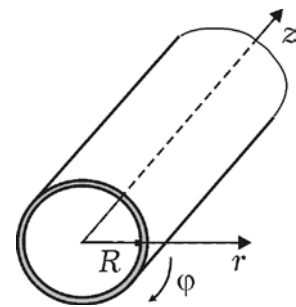


Рис. 5.10. Розміщення осей циліндричної системи координат при дослідженні круглого трубчастого металевого хвилеводу

За такої структури рівняння останній доданок також не залежить від координат, тому перейдемо до звичайних похідних і позначимо

$$\frac{1}{\Phi} \frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} = -m^2. \quad (5.27)$$

Розв'язок цього рівняння пропорційний функціям $\cos m\varphi$ або $\sin m\varphi$ ($m = 0, 1, 2, 3, \dots$), які задовольняють умові азимутальної періодичності $\Phi(\varphi) = \Phi(\varphi + 2\pi)$. Вибір тієї чи іншої функції залежить від початку відліку азимутальної координати

Частина рівняння (5.25), яка утворилась після відокремлення змінних у результаті позначень (5.26) та (5.27), є рівнянням у звичайних похідних відносно радіальної функції $P(r)$. З уведенням позначення

$$r\sqrt{k^2 - K^2} = \zeta$$

воно набуває канонічного вигляду, що відповідає рівнянню Бесселя

$$\zeta^2 \frac{d^2P}{d\zeta^2} + \zeta \frac{dP}{d\zeta} + P(\zeta^2 - m^2) = 0. \quad (5.28)$$

Його розв'язок для цілочисельних значень m визначається лінійною комбінацією відповідних функцій Бесселя першого $J_m(\zeta)$ і другого $N_m(\zeta)$ роду m -го порядків.

$$P(\zeta) = C_1 J_m(\zeta) + C_2 N_m(\zeta). \quad (5.29)$$

Графіки функцій $J_m(\zeta)$ подано на рис. 5.11, функції $N_m(\zeta)$ не відповідають фізичним значенням напруженості поля, бо для $r \rightarrow 0$ мають особливість: $N_m(\zeta) \rightarrow -\infty$.

У підсумку розв'язок рівняння (5.25) у частинних похідних для падаючої хвилі у нескінченному хвилеводі можна подати у вигляді

$$F(r, \varphi, z) = C_0 J_m \left(r\sqrt{k^2 - K^2} \right) \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} m\varphi \cdot e^{-iKz}. \quad (5.30)$$

У такій формі можна представити всі проекції електричного та магнітного поля. Але дотримуючись алгоритму, що описаний у

розділі 3, зручніше визначити таким чином лише поздовжні складові E_z, H_z , а поперечні - $E_r, E_\varphi, H_r, H_\varphi$ знайти через поздовжні.

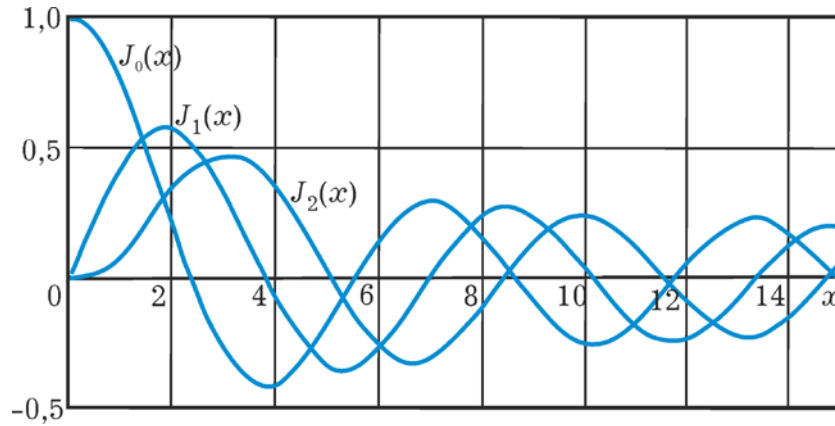


Рис. 5.11. Функції Бесселя першого роду нульового, першого і другого порядку.

Векторні рівняння Максвелла (3.1) у проєкціях на осі циліндричної системи координат мають вигляд:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial E_\varphi}{\partial z} &= -i\omega\mu\mu_0 H_r, & \frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial H_\varphi}{\partial z} &= i\omega\varepsilon\varepsilon_0 E_r, \\
 \frac{\partial E_r}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial r} &= -i\omega\mu\mu_0 H_\varphi, & \frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r} &= i\omega\varepsilon\varepsilon_0 E_\varphi, \\
 (5.31) & & & \\
 \frac{1}{r} \frac{\partial(rE_\varphi)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial E_r}{\partial \varphi} &= -i\omega\mu\mu_0 H_z, & \frac{1}{r} \frac{\partial(rH_\varphi)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial H_r}{\partial \varphi} &= i\omega\varepsilon\varepsilon_0 E_z.
 \end{aligned}$$

Як і для прямокутного хвилеводу, звідси отримуємо вирази для поперечних складових полів хвилеводу через поздовжні (E_z, H_z), враховуючи відому залежність вздовж осі z ($\partial/\partial z = -iK$):

$$\begin{aligned}
 E_r &= \frac{i}{k^2 - K^2} \left(K \frac{\partial E_z}{\partial r} + \frac{\omega\mu\mu_0}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} \right); \\
 E_\varphi &= \frac{i}{k^2 - K^2} \left(\frac{K}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} - \omega\mu\mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial r} \right); \\
 H_r &= \frac{-i}{k^2 - K^2} \left(\frac{\omega\varepsilon\varepsilon_0}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} - K \frac{\partial H_z}{\partial r} \right); \tag{5.32}
 \end{aligned}$$

$$H_{\varphi} = \frac{i}{k^2 - K^2} \left(\omega \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial r} + \frac{K}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} \right).$$

З (5.32) випливає, що для $H_z = 0$ поле у круглому хвилеводі визначається тільки поздовжньою складовою електричного поля, тобто поширюється *ТМ*-хвиля. У разі $E_z = 0$ поле хвилеводу визначається тільки поздовжньою складовою магнітного поля, що відповідає *ТЕ*-хвилі.

Вибір поздовжньої проекції електричного поля відповідно до (5.30) у вигляді

$$E_z = iE_0 J_m \left(r\sqrt{k^2 - K^2} \right) \cos m\varphi \cdot e^{-iKz}$$

приводить до поперечних складових поля **ТМ-хвилі** ($H_z = 0$)

$$\begin{aligned} E_r &= E_0 \frac{K}{\sqrt{k^2 - K^2}} J'_m \left(r\sqrt{k^2 - K^2} \right) \cos m\varphi e^{-jKz}, \\ E_{\varphi} &= -E_0 \frac{Km}{r(k^2 - K^2)} J_m \left(r\sqrt{k^2 - K^2} \right) \sin m\varphi e^{-jKz}, \\ H_r &= E_0 \frac{\omega \varepsilon \varepsilon_0 m}{r(k^2 - K^2)} J_m \left(r\sqrt{k^2 - K^2} \right) \sin m\varphi e^{-jKz}, \\ H_{\varphi} &= E_0 \frac{\omega \varepsilon \varepsilon_0}{\sqrt{k^2 - K^2}} J'_m \left(r\sqrt{k^2 - K^2} \right) \cos m\varphi e^{-jKz}. \end{aligned} \tag{5.33}$$

де $J_m (J'_m)$ – функція Бесселя (похідна функції Бесселя) першого роду m -го порядку. Постійна E_0 може бути визначена з початкових умов або, наприклад, за відомої потужності, яка передається по хвилеводу.

Граничні умови (5.24) виконуються, якщо

$$J_m \left(R\sqrt{k^2 - K^2} \right) = 0. \tag{5.34}$$

Коливальному характеру функцій Бесселя відповідає безліч значень аргументу

$$A_{mn} = R\sqrt{k^2 - K^2},$$

для яких функція дорівнює нулю (рис. 5.11). Такі значення аргументу називають коренями функції Бесселя: n – номер кореня ($n = 1, 2, 3, \dots$).

Як і для хвиль у прямокутному хвилеводі, індекси m і n у круглому хвилеводі визначають нескінченну множину мод. Структуру поля у площині поперечного перерізу визначає індекс n , вказуючи на кількість варіацій поля уздовж радіуса, а індекс m характеризує кількість періодів поля по колу хвилеводу ($m = 0, 1, 2, 3, \dots$).

Складові поля **ТЕ-хвилі** ($E_z = 0$) визначаються вибором поздовжньої проекції магнітного поля

$$H_z = iH_0 J_m \left(r\sqrt{k^2 - K^2} \right) \cos m\varphi \cdot e^{-jKz};$$

і описуються співвідношеннями:

$$\begin{aligned} H_r &= H_0 \frac{K}{\sqrt{k^2 - K^2}} J'_m \left(r\sqrt{k^2 - K^2} \right) \cos m\varphi e^{-jKz}, \\ H_\varphi &= -H_0 \frac{Km}{r(k^2 - K^2)} J_m \left(r\sqrt{k^2 - K^2} \right) \sin m\varphi e^{-jKz}, \\ E_r &= -H_0 \frac{\omega\mu_0 m}{r(k^2 - K^2)} J_m \left(r\sqrt{k^2 - K^2} \right) \sin m\varphi e^{-jKz}, \\ E_\varphi &= -H_0 \frac{\omega\mu_0}{\sqrt{k^2 - K^2}} J'_m \left(r\sqrt{k^2 - K^2} \right) \cos m\varphi e^{-jKz}. \end{aligned} \quad (5.35)$$

Задовольняє граничні умови (5.24) виконання рівності

$$J'_m \left(R\sqrt{k^2 - K^2} \right) = 0,$$

тобто корені похідної функції Бесселя першого роду m -го порядку

$$B_{mn} = R\sqrt{k^2 - K^2}$$

визначають множину ТЕ-мод.

У круглому хвилеводі ТМ- і ТЕ-моди також характеризуються критичною довжиною хвилі (частотою), що визначається, як і для прямокутного, з рівності $k^2 - K^2 = (2\pi/\lambda_{кр})^2$

$$\lambda_{\text{кр}}^{TM} = \frac{2\pi R}{A_{mn}}; \quad f_{\text{кр}}^{TM} = \frac{1}{2\pi\sqrt{\epsilon\mu}} \frac{A_{mn}}{R};$$

$$\lambda_{\text{кр}}^{TE} = \frac{2\pi R}{B_{mn}}; \quad f_{\text{кр}}^{TE} = \frac{1}{2\pi\sqrt{\epsilon\mu}} \frac{B_{mn}}{R} \quad (5.36)$$

Ці значення залежать від номера моди і розміру (радіуса) хвилевода. На основі (5.31) і відомих значень коренів функцій Бесселя J_m , J'_m у таблиці 1 наведено формули розрахунку критичних довжин хвиль, що відповідають модам з найменшими індексами (m, n).

Таблиця 1

m	0			1			2		
n	1	2	3	1	2	3	1	2	3
A_{mn} (корені J_m)	2,405	5,52	$\frac{8,65}{4}$	3,832	7,016	$\frac{10,17}{3}$	5,135	8,417	$\frac{11,6}{2}$
$\lambda_{\text{кр}}/R$	2,613	1,138	$\frac{0,72}{6}$	1,640	0,895	0,618	1,223	0,746	$\frac{0,54}{0}$
TM-моди	TM_{01}	TM_{02}	TM_{03}	TM_{11}	TM_{12}	TM_{13}	TM_{21}	TM_{22}	TM_{23}

m	0			1			2		
n	1	2	3	1	2	3	1	2	3
B_{mn} (корені J'_m)	3,832	7,016	$\frac{10,17}{3}$	1,841	5,331	8,536	$\frac{3,05}{4}$	$\frac{6,70}{6}$	$\frac{9,96}{9}$
$\lambda_{\text{кр}}/R$	1,640	0,895	0,618	3,413	1,179	0,736	$\frac{2,05}{7}$	$\frac{0,93}{7}$	$\frac{0,63}{0}$
TE-моди	TE_{01}	TE_{02}	TE_{03}	TE_{11}	TE_{12}	TE_{13}	TE_{21}	TE_{22}	TE_{23}

З наведених даних видно, що найбільше значення критичної довжини хвилі ($\lambda_{\text{кр}}^{TE_{11}} = 3,413R$) має тип хвилі TE_{11} і, відповідно, є основною модою у круглому хвилеводі. Відзначимо, що нижчому типу не характерне найменше значення індексу m . Найближчою вищою модою є TM_{01} -хвиля. Тому одномодовий діапазон у круглому хвилеводі обмежується нерівністю

$$\lambda_{\text{кр}}^{TM_{01}} < \lambda < \lambda_{\text{кр}}^{TE_{11}},$$

що чисельно відповідає відношенням

$$2,613R < \lambda < 3,413R \quad \text{або} \quad 0,293\lambda < R < 0,383\lambda.$$

На рис. 5.12 зображені розподіли полів основної моди. Відзначимо подібність структури полів основних мод круглого TE_{11} і прямокутного хвильоводів TE_{10} , якщо уявно деформувати поперечний переріз з кола у прямокутник.

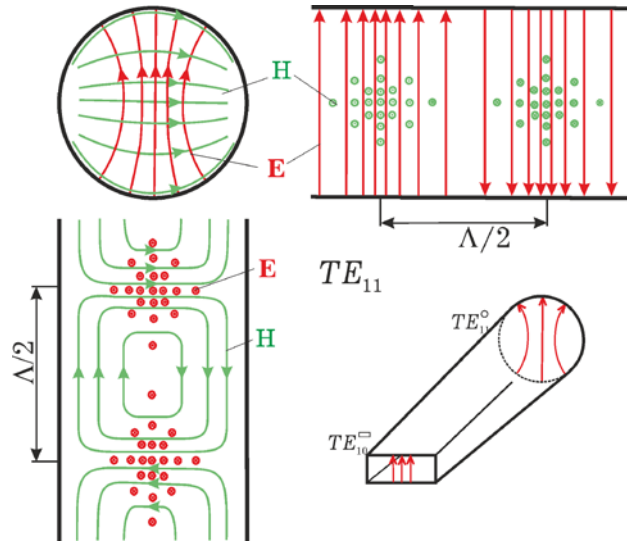


Рис. 5.12. Структура полів основної TE_{11} моди круглого хвильоводу. На вставці показана трансформація полів у разі плавної зміни форми поперечного перерізу

Аналіз даних таблиці 1 показує, що, як і для прямокутного хвильоводу, модам круглого хвильоводу також характерно виродження. Так, наприклад, попарно виродженими є моди TE_{0n} і TM_{1n} . Відповідно до (5.33, 5.35) хвилі круглого хвильоводу дворазово вироджені (крім хвиль типу TM_{0n}).

Технологічно виготовити круглий хвильвід, у порівнянні з прямокутним, простіше. Однак застосування його для передачі енергії обмежене через нестійкість площини поляризації основної моди коливань. Привабливими з точки зору практичного використання є моди з $m = 0, n = 1$ TE_{01} та TM_{01} (рис. 5.13).

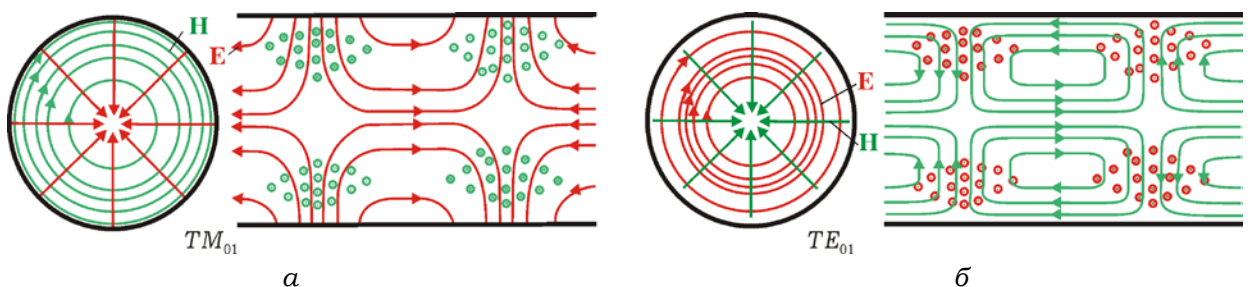


Рис. 5.13. Структура полів найближчої вищої моди TM_{01} (а) і вищої моди TE_{01} (б) круглого хвильоводу

На відміну від TE_{11} полю найближчій вищої моди TM_{01} характерна кругова симетрія. Зазначена властивість знаходить застосування в обертових сполучних елементах НВЧ тракту. Особливістю хвилі TE_{01} є відсутність поздовжньої складової струму, що протікає у стінках хвилеводу і відповідно її низьке згасання. Перша особливість вказує на перевагу (без додаткових втрат) використання моди TE_{01} при стикуванні хвилеводних секцій. Друга визначає можливість їх використання для високоефективних напрямних систем телекомунікації (для міліметрового і короткохвильового сантиметрового діапазону довжин хвиль), високочастотних пристроїв НВЧ.

5.2.4. Коаксіальний хвилевід

Коаксіальний хвилевід – найбільш розповсюджена лінія передачі. Використовуються як тверді, наповнені повітрям хвилеводи (фідери), так і гнучкі, з діелектричним заповненням (коаксіальні кабелі).

Основним типом хвилі для коаксіального хвилеводу є TEM -хвиля, яка характеризується відсутністю дисперсії і як наслідок – рівністю фазової швидкості й швидкості світла для данного діелектричного середовища. Характер розподілу полів у поперечній площині для TEM -хвиль, що біжать, співпадає з розподілом статичних полів і знаходиться з рівняння Лапласа. Ці розподіли розглядалися у прикладах 2.11 для магнітного поля і в 2.4 для електростатичного поля. Одержати аналітичний вираз для полів TEM -хвилі, що біжить, можна, розглядаючи у виразах для статичних полів струм і напругу як миттєві значення, які дорівнюють відповідним амплітудам, помноженим на хвильовий множник:

$$\begin{aligned} E &= (V_m/r \ln(D/d)) \cos(\omega t - kz); \\ H &= (I_m/2\pi r) \cos(\omega t - kz). \end{aligned} \quad (5.37)$$

Напрямок векторів \mathbf{E} та \mathbf{H} і характер їх змінення у просторі для фіксованого моменту часу показані на рис. 5.14. З часом вся картина розподілу полів зміщується вздовж осі z зі швидкістю світла у середовищі, яке заповнює хвилевід.

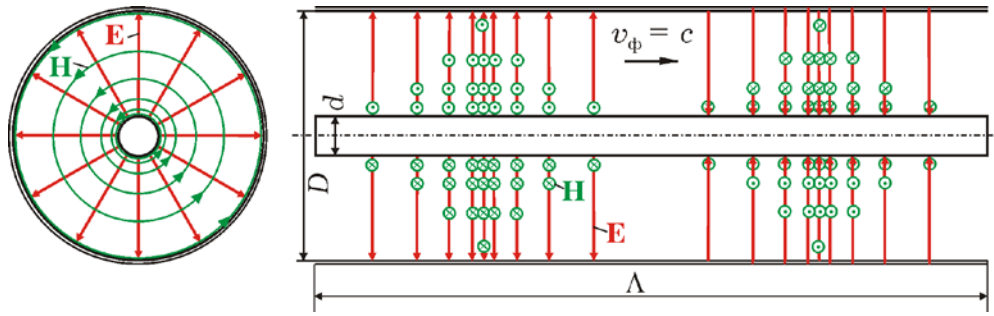


Рис. 5.14. Розподіл силових ліній електричного і магнітного полів для основної TEM моди у поперечному перетині коаксіального хвилеводу є аналогічним до їх розподілів для статичних полів

Важливим параметром коаксіальних ліній є так званий *еквівалентний хвильовий опір*, який у даному випадку визначається як відношення амплітуд *напруги й струму* для падаючої хвилі. Враховуючи, що для TEM -хвиль відношення амплітуд E та H дорівнює *хвильовому опору середовища* (3.26), з (5.37) одержуємо

$$Z_0 = V_m/I_m = 60\sqrt{\mu/\epsilon} \ln(D/d) \text{ (Ом)} . \quad (5.38)$$

Коаксіальний хвилевід можна використовувати для будь яких частот, включаючи постійний струм. Однак на високих частотах, як і в прямокутному хвилеводі, у ньому можуть збуджуватись вищі моди TE і TM типів. Тому верхня частота використання обмежена найближчою вищою модою TE_{11} , яка має критичну довжину хвилі, що приблизно дорівнює довжині середнього кола поперечного перерізу коаксіальної лінії. З цієї причини для більш високочастотних хвилеводів треба обирати менші поперечні розміри, а це викликає додаткові втрати енергії. Тому, особливо для хвилеводів з діелектричним заповненням, діапазон їх використання може обмежуватись допустимим згасанням.

5.2.5. П- та Н-подібні хвилеводи

Крім порожнистих хвилеводів з опуклим поперечним перерізом (прямокутний, круглий) для ряду задач техніки НВЧ застосовують хвилеводи з увігнутим поперечним перерізом (П, Н)

(рис. 5.15). У порівнянні з хвилеводом прямокутного перетину П- і Н-хвилеводи характеризуються:

- розширеним одномодовим частотним діапазоном за однакових зовнішніх геометричних розмірів (a , b);
- істотно меншими розмірами поперечного перерізу (a , b) за однакової робочої смуги частот в одномодовому режимі;
- високою напруженістю електричного поля в області зазору, що утворений додатково введеними стінками хвилеводу;
- зниженою пробивною міцністю;
- підвищеною величиною втрат.

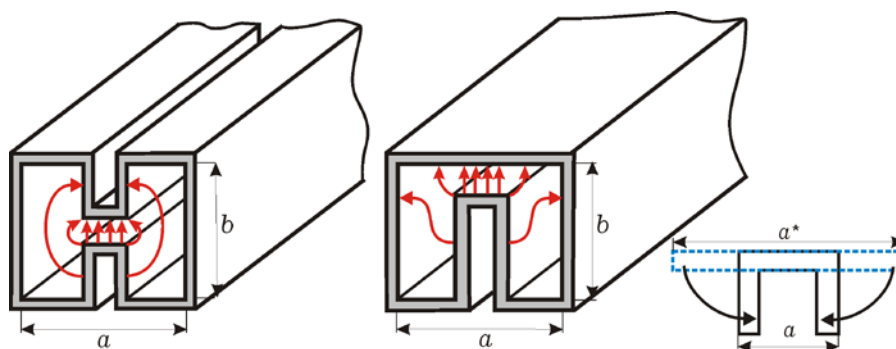


Рис. 5.15. П- та Н-подібні хвилеводи

Першу та другу особливості можна зрозуміти, якщо П-подібний хвилевід спрощено уявити як деформований прямокутний, як це зображено на рис. 5.15. У такому разі критична довжина хвилі основної моди визначатиметься подвоєним розміром a^* (дуже наближено), що значно більше за розмір $2a$ відповідного прямокутного хвилеводу.

Зазначені особливості пояснюють основні області їх застосування: для передачі НВЧ коливань низької і помірної потужності; у змішувальних пристроях для прийому електромагнітних хвиль; як елементи і вузли вакуумних, плазмових НВЧ приладів.

5.2.6. Діелектричні хвилеводи

З просуванням в область більш коротких (міліметрових, субміліметрових) довжин хвиль і відповідним зменшенням

поперечних розмірів застосування порожнистих хвилеводів обмежують такі фактори:

- значне зниження пробивної потужності;
- суттєве зростання втрат;
- технологічні проблеми виготовлення напрямних систем (з малими розмірами поперечного перерізу, що необхідно для забезпечення одномодового режиму роботи);
- масогабаритні параметри і ін.

Альтернативною передавальною лінією у зазначеному діапазоні довжин хвиль є *діелектричний хвилевід*. Розглянуті вище порожнисті металеві хвилеводи відносять до напрямних систем *закритого типу*. Відповідно до моделі площинного хвилеводу (див. розд. 4.3.4.) процес передачі електромагнітної енергії, тобто напрямну дію у таких системах, можна розглядати через багаторазове відбивання хвилі від обмежуючих металевих поверхонь.

На відміну від металевих, в основу принципу дії в діелектричних хвилеводах. покладено явище *повного внутрішнього відбивання* електромагнітної хвилі, яке спостерігається на межі поділу двох діелектриків (див. розд. 4.3.3.). Характерною особливістю повного внутрішнього відбивання є існування так званої *поверхневої хвилі* по той бік поверхні відбивання, яка створюється крайовими полями, котрі «провисають» через межу поділу. Амплітуда цієї хвилі спадає з віддаленням від межі, і тим сильніше, чим кут падіння більший за граничне значення (4.40). Якщо кут падіння менший граничного, заломлена хвиля «висвітлюється» і напрямний ефект втрачається. Відповідно до цього такі хвилеводи відносять до напрямних систем відкритого типу.

Плоский діелектричний хвилевід

У розділі 4.3 на основі моделі плоскої хвилі досліджено поведінку електромагнітної хвилі у разі похилого падіння на межу поділу двох середовищ. Отримано опис структури поля біля межі розділу для випадку проходження хвилею з оптично більш щільного до менш щільного середовища. Показано, що для повного внутрішнього відбивання результируючій структурі поля (див. рис. 4.12) відповідає:

– у першому середовищі (оптично більш щільному) – стояча хвиля у напрямку, перпендикулярному до границі розділу, (вирази для складових поля містять періодичні множники $\sin(k_{1x}x - \psi_0)$ або $\cos(k_{1x}x - \psi_0)$) і хвиля, що біжить уздовж поверхні розділу двох середовищ (4.44, 4.45);

– у другому середовищі (оптично менш щільному) – утворення поверхневої хвилі, що біжить уздовж поверхні розділу, амплітуда якої спадає з віддаленням від межі за експоненціальним законом $\exp(\mp k_2 x |\cos \varphi^-|)$ у поперечному напрямку (4.46).

Вдovж осі z поле всередині хвилеводу і зовні (поверхнева хвиля) поширюються с однаковою фазовою швидкістю і сталою поширення (4.35) $K \equiv k_1 \sin \varphi^+ = k_2 \sin \varphi^-$.

Аналогічні розв'язки для плоского діелектричного хвилеводу (рис. 5.16) можна отримано на основі хвильового рівняння, не вдаючись до моделі плоскої хвилі. Вказану напрямну систему отримують, розміщуючи пластину з діелектрика оптично більш щільного (ϵ_1) у шар іншого, оптично менш щільного ($\epsilon_2 < \epsilon_1$). Розподіл полів визначають з використанням стандартної методики: розв'язку хвильових рівнянь для кожного із середовищ з урахуванням граничних умов: рівність дотичних складових електричного і магнітного полів.

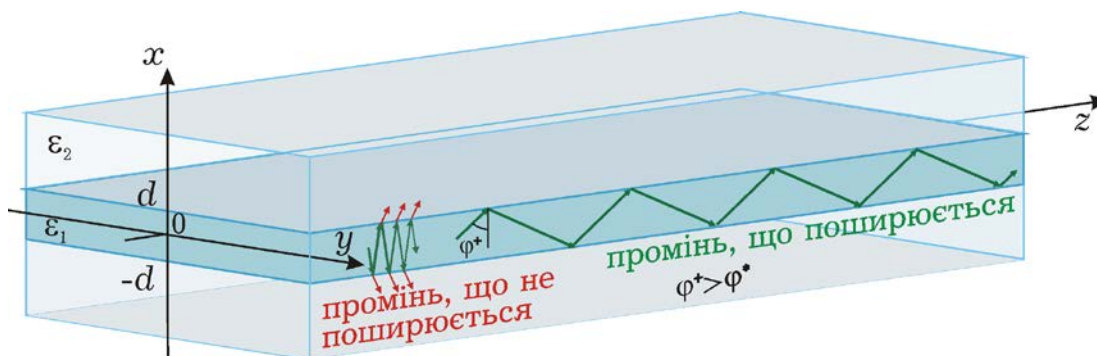


Рис. 5.16. Розміщення системи координат для дослідження плоского діелектричного хвилеводу. Поширення хвиль відбувається за умови повного внутрішнього відбивання від межі поділу

У результаті такого аналізу визначають моди плоского діелектричного хвилеводу. Відсутність залежності поля від поперечної координати y (якщо ширина хвилеводу у багато разів перевищує його товщину) призводить до існування типів коливань,

які позначаються лише одним індексом m ($n = 0$): TE_m, TM_m , як це мало місце для хвилеводу, утвореного двома металевими площинами (розд. 3.5) Умови поширення у хвилеводі мод TE_m і TM_m однакові, тобто ці моди попарно вироджені. На рис. 5.17 наведено силові лінії полів для перших трьох TM мод. Нижчим типом коливання є дві моди – TE_1, TM_1 .

Критична довжина хвилі і частота моди визначаються співвідношеннями

$$\lambda_{\text{кр}}^{(m)} = \frac{4d}{m-1} \sqrt{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}; \quad f_{\text{кр}}^{(m)} = \frac{c(m-1)}{4d\sqrt{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}}. \quad (5.39)$$

Ці вирази можна отримати на основі міркувань, подібних до тих, які використовувались при розгляді металевого площинного хвилеводу. Різниця у тому, що там критичною вважалась ситуація для нормального падіння на площину відбивання ($\varphi^+ = 0$), а для діелектричного хвилеводу кут падіння має дорівнювати критичному значенню (4.40) $\varphi^* = \arcsin \sqrt{\varepsilon_2/\varepsilon_1}$. Тобто у формулу (4.51) треба підставити $\cos \varphi^* = \sqrt{1 - \sin^2 \varphi^*} = \sqrt{1 - \varepsilon_2/\varepsilon_1}$. Відповідно одномодовий діапазон визначається співвідношеннями

$$4d\sqrt{\varepsilon_1 - \varepsilon_2} = \lambda_{\text{кр}}^{(m=2)} < \lambda < \lambda_{\text{кр}}^{(m=1)} \rightarrow \infty;$$

$$0 = f_{\text{кр}}^{(m=1)} < f < f_{\text{кр}}^{(m=2)} = \frac{c}{4d\sqrt{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}}.$$

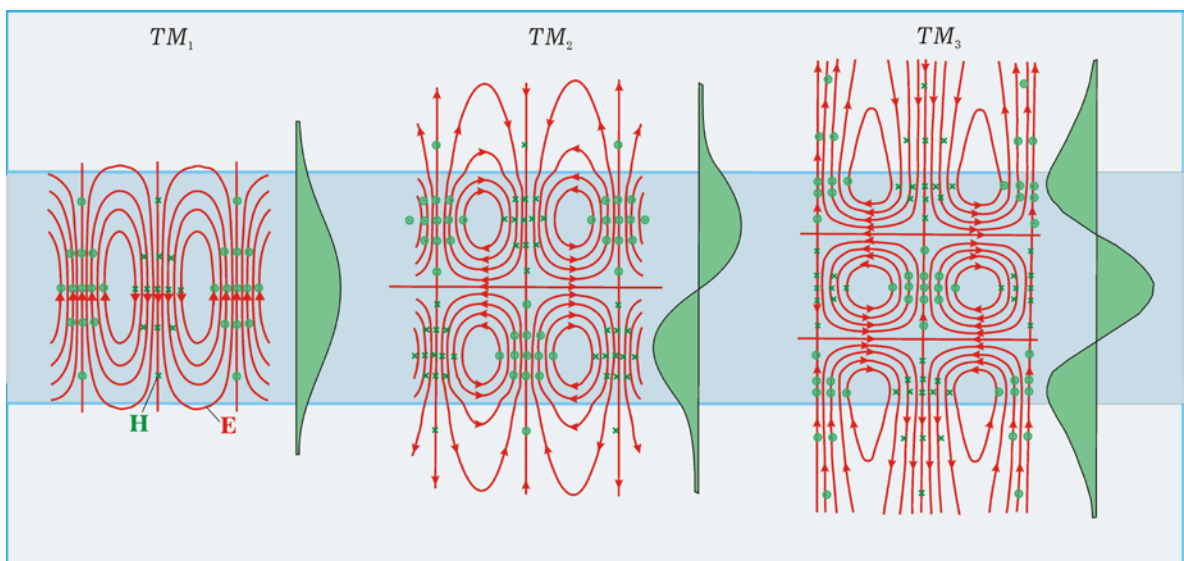


Рис. 5.17. Структура полів трьох нижчих електричних мод плоского діелектричного хвилеводу; поруч для кожної моди наведено розподіл поперечних складових магнітного поля

Слід зазначити, що для критичної ситуації у формулі (4.46) $\cos\varphi = 0$ і за межами хвилеводу амплітуда полів основної моди вздовж осі x буде постійною. Це відповідає плоскій хвилі, що поширюється вздовж хвилеводу і не має режиму відсічки ($f_{\text{кр}} = 0$).

Останні співвідношення вказують на додаткову (крім габаритних розмірів) можливість керування «одномодовим» режимом: зміною параметрів середовищ. Зокрема для збільшення критичної частоти основної моди слід обирати діелектричну проникність другого середовища близькою до ε_1 .

Ще одне зауваження треба зробити щодо параметрів діелектрика. В оптиці традиційно «оптична густина» визначається таким параметром як показник заломлення. Враховуючи, що $\varepsilon = n^2$, у формулах (5.39) і наступних для оптичних хвилеводів слід замість $\sqrt{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}$ використовувати $\sqrt{n_1^2 - n_2^2}$.

Розподіл поперечних складових на рис. 5.17, які визначають потік енергії вздовж хвилеводу, схематично відображає характерні особливості, що зв'язують моди площинного діелектричного хвилеводу:

- на поверхні площинного хвилеводу амплітуда поверхневої хвилі підвищується зі збільшенням номера моди;
- водночас зі збільшенням номера моди згасання поверхневої хвилі послаблюється;
- найбільша локалізація енергії у хвилеводі відповідає нижчому типу коливань.

Це вказує на можливість керування співвідношенням внеску внутрішнього і зовнішнього полів у процесі передачі електромагнітної енергії. Неідеальність матеріалу хвилеводу – скінченна величина провідності діелектрика – призводить до втрат енергії коливань. Знизити такі втрати можна за рахунок збільшення частки енергії поверхневої хвилі. Це досягається зменшенням оптичної густини матеріалу хвилеводу, що сприяє меншій локалізації енергії всередині плоского діелектричного хвилеводу. Іншим способом делокалізації поля всередині плоского діелектричного хвилеводу є зменшення його товщини.

Круглий діелектричний хвилевід

Для електромагнітних хвиль функцію напрямної системи виконує і круглий діелектричний (з проникністю ϵ_1) стрижень, розміщений в оптично менш щільному діелектрику ($\epsilon_2 < \epsilon_1$). Опис структури поля отримують на основі стандартної методики: розв'язку хвильового рівняння у циліндричній системі координат. Відзначимо лише якісну сторону результату:

- як і для круглого (трубчастого) металевого хвилеводу, моди направляючої системи розрізняються індексами m і n , що описують відповідно азимутальний і радіальний розподіл поля;
- як і для площинного діелектричного хвилеводу, вдовж межі розділу поширюється поверхнева хвиля, амплітуда якої спадає з віддаленням від межі;
- електричні (E_{mn}) і магнітні (H_{mn}) моди існують лише для аксіально симетричних ($m = 0$) хвиль;
- аксіально несиметричні хвилі ($m \neq 0$) мають гібридний характер, тобто є суперпозицією хвиль E_{mn} і H_{mn} , які мають однакові умови поширення, характеризуються наявністю поздовжніх складових електричного і магнітного полів і позначаються HE_{mn} або EH_{mn} ;
- основною хвилею є мода EH_{11} , тому що має нульове значення критичної частоти, у якій переважає лінійно поляризована складова, поперечним складовим поля відповідає слабка залежність від кута; особливо поблизу осі хвилеводу і за невеликих значень ϵ_1 ;
- поле за межами хвилеводу – поле поверхневої хвилі – властивості лінійної поляризації не має;
- критичні умови поширення вищих типів коливань описуються складними співвідношеннями, що визначаються параметрами середовищ і номером моди;
- зі зниженням частоти частка енергії, що переноситься поверхневою хвилею зростає.

Оптоволокно

У техніці для передачі хвиль оптичного діапазону застосовується подібна структура, так зване оптоволокно (світловод). Оптичне волокно конструктивно являє собою діелектричний стрижень або нитку (серцевину), що покритий шаром діелектрика (оболонкою) з меншим показником заломлення (рис. 5.18).

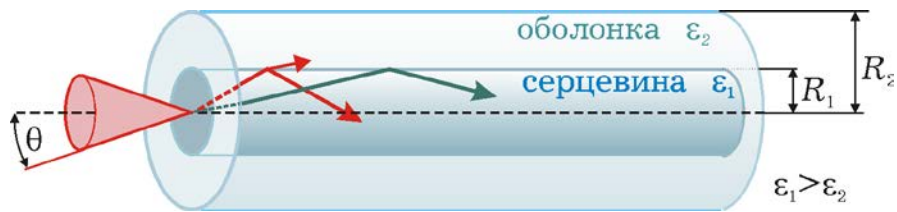


Рис. 5.18. Конструкція оптичного хвилевода

Направляюча дія світловода заснована на явищі повного внутрішнього відбивання, що забезпечується у разі падіння променя світла на торець оптоволока під кутом (*кутова апертура*), що не перевищує критичного значення

$$\theta = \arcsin \sqrt{n_1^2 - n_2^2} = \arcsin NA,$$

який визначається параметром NA , так званою *числовою апертурою* волокна. Зазвичай використовують діелектрики для серцевини і оболонки з незначною відміною показників заломлення

$$\Delta \approx \frac{n_1 - n_2}{n_1} \ll 1.$$

Для пошуку і опису структури полів хвиль, що направляються, можна скористатися рівняннями Максвелла і граничними умовами. У наближенні нескінченної товщини оболонки знаходять розв'язок хвильових рівнянь, записаних окремо для області серцевини і оболонки (в циліндричній системі координат):

$$F(r) \approx \begin{cases} J_m(k_1 r), & r < R_1 \\ K_m(k_2 r), & r > R_1 \end{cases},$$

де J_m , K_m – відповідно функції Бесселя першого роду і модифіковані функції другого роду порядку m . Поперечні сталі поширення k_1 , k_2 визначають швидкість зміни радіального розподілу полів у відповідних областях направляючої системи:

- $J_m(k_1 r)$ вказує на число осциляцій полів у серцевині;
- $K_m(k_2 r)$ характеризує ступінь проникнення полів в оболонку.

Врахування граничних умов – неперервність складових електричного і магнітного полів на межі поділу серцевини і оболонки – визначає безліч мод. Моді позначають індексами m і n , що характеризують відповідно просторовий азимутальний і радіальний розподіл полів у серцевині і оболонці. Слід зазначити, що кожному кореню функції Бесселя відповідають дві моди – (m, n) і $(-m, n)$ – з однаковими сталими поширення. Нижчим типом коливань є мода з $m = 0, n = 1$. Для поширення у волокні тільки однієї моди використовують більш тонкі серцевини, радіус яких визначається нерівністю:

$$2\pi \frac{R_1}{\lambda} NA < 2,405.$$

Це співвідношення визначає одномодовий діапазон довжин хвиль $\lambda > \lambda_{кр} = 2,61R_1\sqrt{n_1^2 - n_2^2}$, що забезпечується для хвилеводу з діаметром

$$2R_1 < 0,76\lambda / \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$$

і реалізується обранням малого значення радіуса серцевини R_1 і близьких параметрів середовищ оптоволока, тобто малою величиною числової апертури (рис. 5.19).

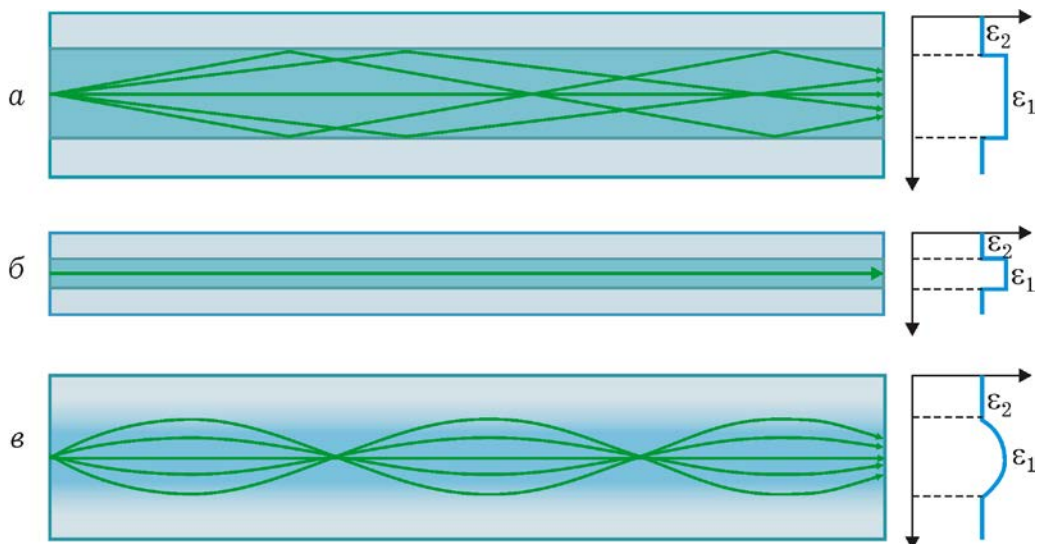


Рис. 5.19. Поширення світлових променів у різних світловодах: a – ступінчастому багатомодовому, b – ступінчастому одномодовому, c – градієнтному багатомодовому

Практичне застосування знаходять як одномодовий, так і багатомодовий режим передачі електромагнітної енергії в оптичному діапазоні. Одномодове оптоволокно, що характеризується меншими втратами і спотвореннями сигналу, відсутністю модового шуму (у

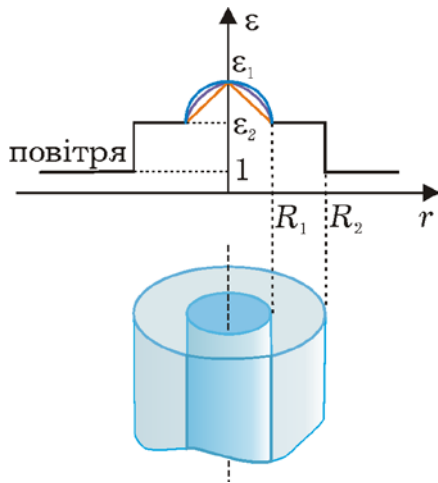


Рис. 5.20. Градієнтне оптоволокно

порівнянні з багатомодовим світловодом), є одним з елементів високошвидкісних оптичних систем зв'язку, оптичних сенсорів (амплітудного, фазового, поляризаційного типу) і т.д. Зовнішньою відмінною ознакою багатомодового оптоволокна є великий діаметр сердцевини. Різниця групових швидкостей мод, що поширюються, приводить до розширення оптичного імпульсу на виході із світловода, що обмежує швидкість систем зв'язку на його основі. Вирівнювання групових швидкостей різних мод досягають застосуванням градієнтних волокон, показник заломлення сердцевини

яких повільно (з різною кривизною профілю) зменшують від центру до границі з оболонкою (рис. 5.20).

Наближено кількість мод, що може одночасно поширюватись, оцінюють співвідношенням

$$M \approx \left(\frac{4R_1}{\lambda} \right)^2 (n_1^2 - n_2^2),$$

яке вказує на доцільність застосування шару оболонки в конструкції оптоволокна. Діелектричному стрижню, що оточений повітрям, відповідає більш висока збираюча світло здатність (параметр NA). Однак чинниками, що обмежують його застосування, як спрямовуючої системи, є поширення істотно більшої кількості мод та необхідність додаткової мінімізації діаметра сердцевини для забезпечення одномодового режиму.

5.2.7. Смушкові лінії передачі

В інтегральних схемах надвисоких частот застосовують смушкові лінії передачі (СЛП), що за конструкцією являють собою

кілька металевих смужок і (або) пластин, які розмежовані діелектриком (або повітрям) (рис. 5.21).

Перевагами СЛП є:

- хороші масогабаритні параметри;
- технологічність;
- висока надійність, відтворюваність;
- можливість інтеграції елементів із зосередженими та розподіленими параметрами;
- створення на їх основі компактних пристроїв НВЧ тракту різного призначення.

Основними недоліками СЛП є низька максимальна потужність, втрати на випромінювання, що зростають із просуванням у міліметровий діапазон довжин хвиль.

Цей тип ліній передачі використовується в основному для поширення *ТЕМ*-хвиль, для яких фазова швидкість дорівнює швидкості світла у вільному просторі з урахуванням діелектричного заповнення. Проте підвищення частоти вносить зміни у структуру поля, створюючи так звану квазі-*ТЕМ* хвилю. Префікс «квазі» вказує на наявність поздовжніх складових полів, зростання яких з підвищенням частоти призводить до прояву дисперсії. Причина їх появи описана в розд. 2.3.3 і викликана скінченим опором смужки, який зростає за рахунок скін-ефекту. Інший фактор пов'язаний з перерозподілом енергії між діелектричним та повітряним середовищем і відповідною зміною ефективної діелектричної проникності.

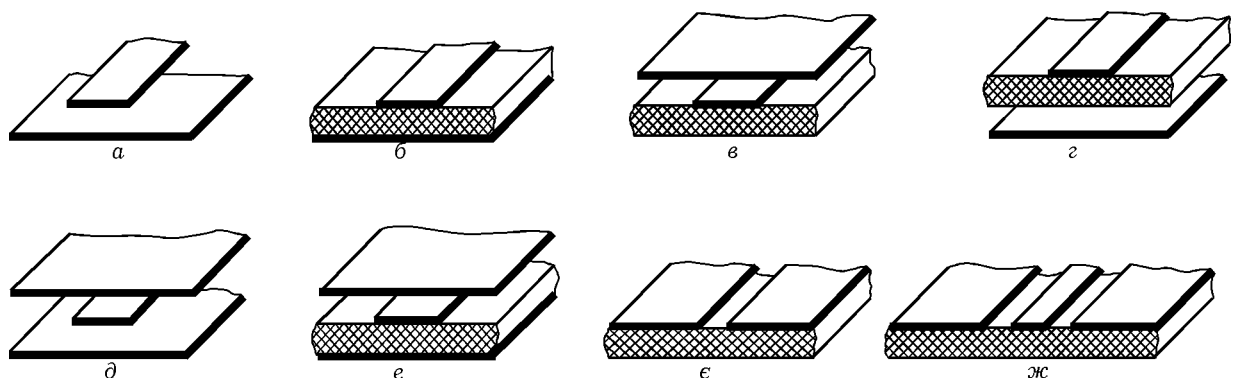


Рис. 5.21. Смужкові лінії педачі: *a, б, в, г* – мікросмужкові несиметричні з різним повітряним або діелектричним заповненням; *д, е* – мікросмужкові симетричні; *е* – щілинна; *ж* - копланарна

Найбільш поширеними серед смужкових ліній є мікросмужкові, щілинні і копланарні лінії.

Мікросмужкові лінії

Розрізняють два типи мікросмужкових ліній: симетричні і несиметричні (рис. 5.21). Симетрична СЛП конструктивно складається з двох металевих площин, що розділені діелектриком зі вставкою металевої смужки.

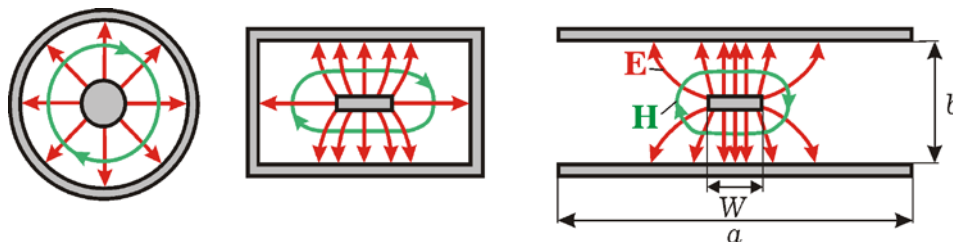


Рис. 5.22. Зміна структури TEM -моди у разі деформування коаксіальної лінії

Строгий аналіз полів в зазначених структурах досить складний: вимагає врахування різноманітних граничних умов, що відповідають різним областям напрямної системи. Уявити розподіл поля дозволяє підхід, що заснований на розгляді смужкової лінії, як деформованої коаксіальної лінії.

На рис. 5.22 наведена зміна форми силових ліній електричного і магнітного полів основної моди (TEM), що виникає у разі уявного деформування поперечного перерізу коаксіального хвилеводу. На завершальному етапі (видаляючи вузькі бічні стінки) отримуємо структуру поля основної моди у симетричній смужковій лінії (СЛ).

Нагадаємо, що для TEM -хвиль розподіл полів має такий саме вигляд, як і для статичних або стаціонарних. Таким чином, у СЛ, що має дві площини симетрії, електромагнітна хвиля поширюється вздовж центрального провідника та локалізується в об'ємі діелектрика за рахунок екрануючої дії зовнішніх провідників.

Аналогічний прийом уявної деформації поперечного перерізу коаксіальної лінії, в якій поширюється TE_{11} -хвиля, дозволяє отримати наближену структуру поля найближчої вищої моди СЛП (рис. 5.23). Ця мода визначає верхню межу одномодового діапазону частот.

За однакових верхніх граничних частот мікросмужкові лінії, у порівнянні з прямокутними хвилеводами, характеризуються чотириразовим (для повітряного заповнення) зниженням пробивної потужності, більш високим рівнем втрат. Остання властивість обмежує використання їх (особливо несиметричних СЛ) для передачі сигналів на великі відстані. Зниження згасання електромагнітної хвилі досягають застосуванням високоякісного діелектрика, широкої смужки з провідника товщиною у 3 - 5 разів більшою, ніж скін-шар.

Хвильовий опір СЛ описується складною функціональною залежністю (від її геометричних параметрів, характеристик діелектричного середовища) і становить 20 - 100 Ом.

У *несиметричних* мікросмужкових лініях (МСЛ) застосовують діелектричну підкладку з високим значенням ϵ_d ($\epsilon_d \geq 10$). У порівнянні з повітряним заповненням конструктивні елементи МСЛ мають зменшені у $\sqrt{\epsilon_d}$ разів розміри. МСЛ складається з двох провідників різної ширини, розділених шаром діелектрика. На відміну від симетричної смужкової лінії, МСЛ є більш відкритою направляючою системою, що може розглядатися як її недолік (вплив зовнішніх полів або взаємний вплив полів аналогічних структур). Однак, останнє покладено в основу принципу дії зв'язаних МСЛ, які використовуються для розробки пристроїв НВЧ різного призначення: спрямовані відгалужувачі, фільтри, лінії затримки, узгоджувальні елементи. Мікросмужкові схеми часто розміщують у екрануючому корпусі. На практиці істотного зниження електромагнітної енергії, що випромінюється з МСЛ, досягають п'ятиразовим (і більше) перевищенням ширини заземленого провідника a над відстанню між пластинами h .

Основною модою у МСЛ є квазі-ТЕМ хвиля, поздовжні складові якої обумовлені перш за все значним опором мікросмужки та несиметричністю заповнення лінії діелектриком і залежать від геометричних параметрів структури, характеристик середовищ і частотного діапазону.

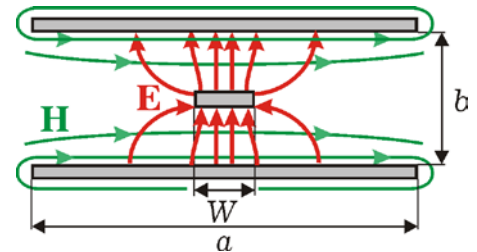


Рис. 5.23. Конфігурація полів для найближчої вищої моди TE_{11} у симетричній смужковій лінії

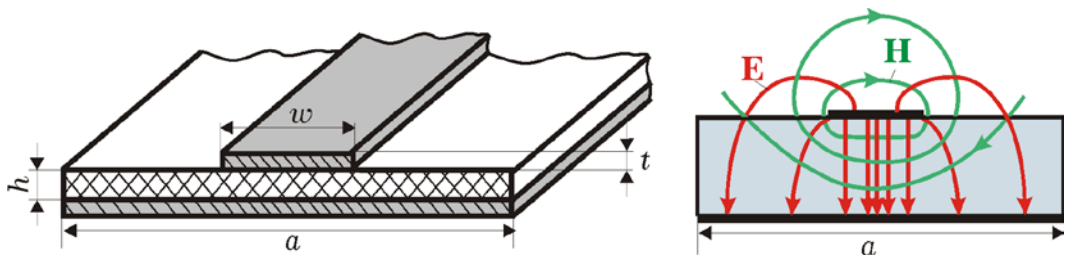


Рис. 5.24. Конструкція мікросмушкової лінії та структура поля основної моди

З наведеної на рис. 5.24 наближеної структури поля квазі-ТЕМ хвилі можна помітити, що для відносно широкій металевій смужці ($w/h \rightarrow \infty$) електричне поле концентрується (подібно до плоского конденсатора) у міжелектродному (між мікросмушкою і екраном) просторі. Співвідношення енергій, що передаються під і над смужкою (у діелектрику і повітрі), характеризує такий параметр як ефективна діелектрична проникність $\epsilon_{\text{еф}}$. Широкій смужці відповідає $\epsilon_{\text{еф}}$, що є близькою до діелектричної проникності матеріалу підкладки. Вузкій смужці ($w/h \rightarrow 0$) відповідає $\epsilon_{\text{еф}} \approx 0,5(\epsilon_d + 1)$, що вказує на співмірність енергій, що передаються у повітрі і діелектрику.

Хвильовий опір МСЛ зазвичай обирають рівним 50 Ом, що потрібно для з'єднання з вузлами, елементами, блоками НВЧ.

Щілинна лінія

Ескіз конструкції щілинної лінії наведено на рис. 5.25. Для мінімізації втрат на випромінювання застосовують діелектричну підкладку з високим значенням ϵ_d ($\epsilon_d > 5$).

Хоча основною модою симетричної ЩЛ має бути хвиля ТЕМ, але зазвичай щілина може утворюватись не між двома незалежними провідними шарами, а витравлюватись у тому самому заземленому електроді. У такому разі основною є TE_{10} -хвиля, поля якої концентруються поблизу щілини і поширюються уздовж неї (рис. 5.25).

Особливості поля нижчого типу коливань ЩЛ чимось нагадують поля основної моди прямокутного хвилевода:

- силові лінії напруженості електричного поля перпендикулярні до стінок щілини;
- магнітне поле є еліптично поляризованим.

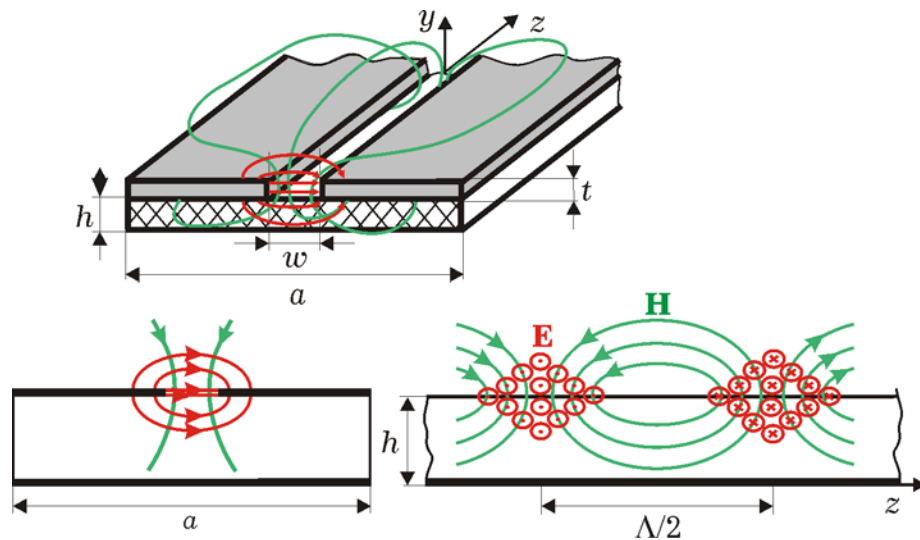


Рис. 5.25. Щілинна лінія: конструкція та структура поля моди TE_{10}

Перша властивість вказує на зручність застосування ЩЛ за необхідності паралельного з'єднання у гібридних схемах елементів із зосередженими параметрами. Друга властивість знаходить застосування у пристроях управління поширенням НВЧ сигналу.

Відзначимо, що у ЩЛ, на відміну від МСЛ, за однакових габаритних параметрів технологічно простіше реалізувати високі значення хвильового опору, що спрощує узгодження компонентів НВЧ.

Копланарна лінія

Третьою за поширеністю направляючою системою в інтегральних схемах НВЧ є копланарна лінія (КПЛ), яка конструктивно являє (у найпростішому варіанті) три металеві пластинки, що розташовані на одному боці діелектричної підкладки (рис. 5.26).

Особливістю копланарної лінії є можливість існування двох основних мод TEM -хвилі: парної (розподіл поля є симетричним відносно центрального провідника) і непарної (поле асиметрично). Якщо потенціали крайніх провідників однакові, але відрізняються від потенціалу центрального провідника, тоді в КПЛ поширюється парний тип хвиль (рис. 5.26, б). В інших випадках утворюється непарний тип (рис. 5.26, в).

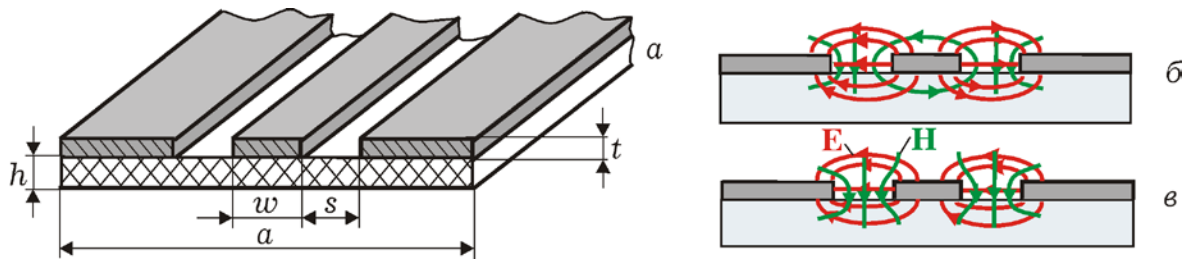


Рис. 5.26. Копланарна лінія: конструкція (а) та структура поля парної (б) і непарної (в) мод

Хвилі *TEM* парного і непарного типів мають різні характеристики (коефіцієнт уповільнення, хвильовий опір, згасання, дисперсія). Поширення електромагнітного поля відбувається уздовж щілин між провідниковими смужками. Основна мода КПЛ не має нижньої частоти відсічення, хоча на високих частотах з'являється поздовжня складова електричного поля і спостерігається дисперсія (квазі-*TEM*). Використання підкладки з високим значенням ϵ_d забезпечує істотне зменшення довжини хвилі у лінії і сприяє локалізації поля поблизу границі розділу діелектрик-повітря.

У даний час запропоновано велику кількість типів напрямних ліній (у тому числі і смужкові), які крім виконання основного призначення, є гнучким інструментом конструювання елементів, функціональних вузлів, блоків НВЧ різного призначення. Смужкові напрямні системи застосовують у діапазоні 0,1 - 30 ГГц і навіть у міліметровому діапазоні довжин хвиль. Подальше просуванням у НВЧ область утруднене через жорсткі технологічні допуски, збільшення втрат та ін.

5.3. ПЕРЕДАЧА ЕНЕРГІЇ ПО ХВИЛЕВОДУ

Потік енергії для електромагнітної хвилі визначається вектором Пойнтинга. Для гармонійних процесів зручно вводити комплексний вектор Пойнтинга $\dot{\mathbf{P}} = [\dot{\mathbf{E}} \times \dot{\mathbf{H}}^*] / 2$, так, що його дійсна частина відповідає середньому за часовий період потоку активної потужності (розд. 3). Тому вся середня потужність, яка передається у хвилеводі, визначається інтегруванням по поперечному його перетину

$$P = \operatorname{Re} \oint_S \mathbf{\dot{H}} d\mathbf{S} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_S [\dot{\mathbf{E}} \times \dot{\mathbf{H}}^*] d\mathbf{S}. \quad (5.40)$$

Обираючи поверхнею інтегрування перетин, перпендикулярний до поздовжньої осі хвилеводу, для якого $d\mathbf{S} = \mathbf{e}_z dS$, матимемо для декартових координат

$$P = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_S [\dot{\mathbf{E}} \times \dot{\mathbf{H}}^*] \mathbf{e}_z dS = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_S (\dot{E}_x \dot{H}_y^* - \dot{E}_y \dot{H}_x^*) dS. \quad (5.41)$$

Цей вираз показує, що у передачі енергії бере участь лише поздовжня складова вектора Пойнтинга, яка виражається через поперечні складові електричних та магнітних полів. Поздовжні складові поля викликають поперечні коливання електромагнітної енергії, які уявляють як реактивну енергію, що не приймає участі у передачі енергії. Але треба мати на увазі, що ці коливання приводять до створення додаткових струмів у стінках хвилеводу, або струмів провідності у діелектричному заповненні, тобто до додаткових втрат енергії.

Подальшого спрощення можна досягти враховуючи співвідношення між різнойменними поперечними проекціями електричного та магнітного поля (див. розд. 5.1.3). Такі проекції між собою описуються однаковими функціями, тому їх відношення не залежатиме від координат і дорівнюватиме хвильовому опору хвилеводу для того чи іншого типу хвиль відповідно до (5.11) для TE -хвиль, або (5.12) для TM -хвиль

$$\frac{\dot{E}_x}{\dot{H}_y} = -\frac{\dot{E}_y}{\dot{H}_x} = \frac{\dot{E}_\perp}{\dot{H}_\perp} = \dot{Z}_0. \quad (5.42)$$

Використовуючи ці співвідношення, формулу (5.42) можна подати через поперечні складові тільки електричного або тільки магнітного поля

$$P = \operatorname{Re} \frac{1}{2\dot{Z}_0} \int_S |\dot{E}_\perp|^2 dS = \operatorname{Re} \frac{\dot{Z}_0}{2} \int_S |\dot{H}_\perp|^2 dS, \quad (5.43)$$

де $|\dot{E}_\perp|^2 = E_{mx}^2 + E_{my}^2 = E_{m\perp}^2$ та $|\dot{H}_\perp|^2 = H_{mx}^2 + H_{my}^2 = H_{m\perp}^2$.

Наприклад, для основної моди TE_{10} у прямокутному хвилеводі $\dot{E}_y = H_0 Z_c(2a/\lambda) \sin(\pi x/a) \equiv E_0 \sin(\pi x/a)$, де $E_0 \equiv H_0 Z_c(2a/\lambda)$ –

максимальне значення напруженості електричного поля у центрі хвилеводу. Якщо хвилевід не заповнено діелектриком, то підстановка амплітуди поля у першу частину (5.44) дає

$$P = \frac{E_0^2}{2Z_0^{TE_{10}}} \int_0^a \int_0^b \sin^2(\pi x / a) dx dy = \frac{E_0^2 ab}{4Z_0^{TE_{10}}} = \frac{E_0^2 ab}{4Z_{c0}} \sqrt{1 - (f_{кр} / f)^2}.$$

Кількісна оцінка дає, що для хвилеводу розмірами $23 \times 10 \text{ мм}^2$ на частоті у 1,5 рази вищій за критичну для передачі потужності в 1 Вт максимальна напруженість електричного поля має становити близько 3 кВ/м. Оскільки пробивна напруженість для повітря складає близько 30 кВ/см, то за такої напруженості можна передавати потужність близько 1 кВт. Ці оцінки показують, що прямокутні хвилеводи можуть служити для передачі досить великих рівнів електромагнітної потужності. Зниження частоти за інших рівних умов приводить до зменшення поперечних складових полів і зменшення потужності. Формально передача припиняється на частоті, що дорівнює критичній.

Якщо у хвилеводі існують втрати енергії, то амплітуди хвиль спадатимуть експоненціально за законом $e^{-\alpha z}$. Відповідно потужність, що передається хвилеводом, буде залежати від поздовжньої координати

$$P(z) = P(0) \exp(-2\alpha z). \quad (5.44)$$

Тут коефіцієнт α характеризує швидкість згасання електромагнітної хвилі. Її зазвичай виражають у логарифмічних одиницях – децибелах: $L = 10 \lg(P_1 / P_2)$, де P_1 і P_2 – потужність у перетинах, що відстоять один від одного на одиницю довжини. Відповідно до (5.44) $L = 10 \lg e^{2\alpha} = 0,8686\alpha$ (дБ/м).

Диференціюючи (5.44), можна записати $dP = -2\alpha P dz$, звідки, використовуючи позначення $dP / dz = -p_1$, запишемо

$$\alpha = p_1 / 2P. \quad (5.45)$$

Введена величина p_1 відповідає швидкості зменшення потужності вздовж хвилеводу, яке викликане втратами у хвилеводі. Співвідношення (5.45) може бути використане для розрахунку

коефіцієнта затухання α через потужність втрат на одиниці довжини p_1 .

Серед причин, що приводять до втрат, насамперед треба вказати втрати на нагрівання металевих стінок у разі протікання у приповерхневому скін-шарі струмів провідності, які пов'язані з дотичною складовою магнітного поля. Для розрахунку потужності цих втрат треба відповідно до (4.59) провести інтегрування по поверхні стінок, але, обираючи в елементі $dS = dl \cdot dz$ довжину $dz = 1$, залишаємо як контур інтегрування периметр стінок хвилеводу l :

$$p_1^M = \frac{1}{2\sigma\Delta} \int_l |\dot{H}_\tau|^2 dl. \quad (5.46)$$

У такому разі

$$\alpha^M = \frac{1}{2\sigma\Delta \operatorname{Re} \dot{Z}_0} \frac{\int_l |\dot{H}_\tau|^2 dl}{\int_S |\dot{H}_\perp|^2 dS} \quad (5.47)$$

У цьому виразі можна замінити $1/\sigma\Delta$ поверхневим опором R_s , а для малих втрат вважати \dot{Z}_0 дійсною величиною відповідно до (5.11) або (5.12).

Виконання нескладних процедур інтегрування у (5.47) для виразів (5.21) полів основної моди у прямокутному хвилеводі приводить до виразу

$$\alpha^M = \frac{a + 2b(f_{\text{кр}} / f)^2}{2\sigma\Delta Z_{c0} ab \sqrt{1 - (f_{\text{кр}} / f)^2}}$$

Частотна залежність коефіцієнта затухання (рис. 5.27, а) зростає поблизу режиму відсічки через зменшення потужності, що передається, з наближенням до критичної частоти. На високих частотах втрати визначаються в основному впливом скін-ефекту, поступово зростаючи з підвищенням частоти. У робочому діапазоні коефіцієнт затухання має порядок 0,01 дБ/м.

Для основної *ТЕМ*-моди у коаксіальному хвилеводі підстановка виразів (5.37) у (5.47) і подальше інтегрування по двох контурах внутрішнього і зовнішнього провідників та проміжку між ними дає

$$\alpha^M = \frac{D + d}{\sigma \Delta Z_{c0} D d \ln(D / d)}$$

Тут Z_{c0} хвильовий опір середовища, що заповнює хвилевід. Частотна залежність α^M визначається лише товщиною скін-шару, яка зменшується відповідно до (3.38) $\Delta = \sqrt{2 / \omega \mu_0 \sigma}$.

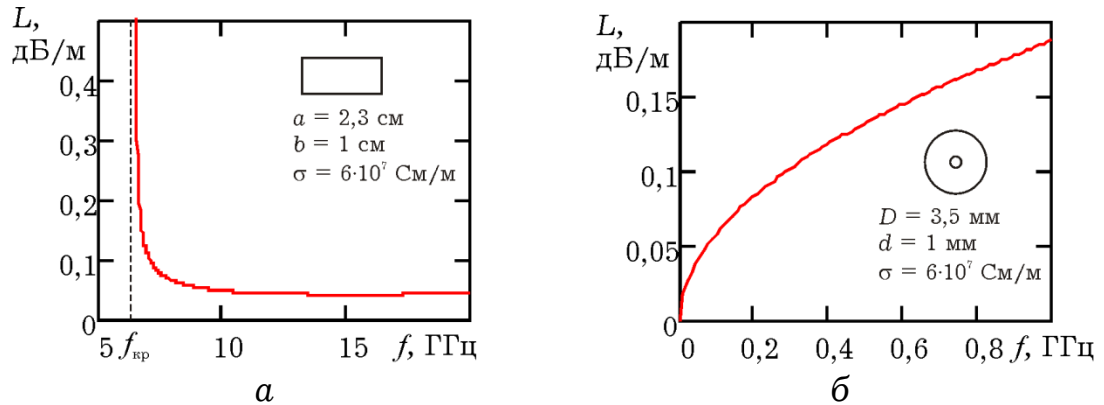


Рис. 5.27. Залежність логарифмічного коефіцієнта затухання для прямокутного (а) та коаксіального (б) хвилеводів від частоти

Для коаксіального хвилеводу через відсутність режиму відсічки для основної TEM -моди втрати визначаються лише нагріванням скін-шару і зростають пропорційно \sqrt{f} (рис. 5.27, б).

Друга причина втрат енергії може існувати у хвилеводах з діелектричним заповненням. Через скінченну провідність діелектрика електричне поле викликати у ньому струми провідності і його нагрівання. Ця потужність відповідає третьому доданку у рівнянні балансу енергії (3.12), з якого для об'єму одиничної довжини можна отримати

$$p_1^d = \int_S \mathbf{j}^* \cdot \mathbf{E} dS / 2 = \frac{\sigma}{2} \int_S |\dot{\mathbf{E}}|^2 dS, \quad (5.48)$$

де σ - питома електропровідність діелектрика, а інтегрування ведеться по поперечному перетину хвилеводу. З (5.45) та (5.48) отримаємо

$$\alpha^{\text{д}} = \frac{\sigma \operatorname{Re} \dot{Z}_0}{2} \frac{\int_S |\dot{E}|^2 dS}{\int_S |\dot{E}_{\perp}|^2 dS} = \frac{\sigma \operatorname{Re} \dot{Z}_0}{2} \frac{\int_S \left(|\dot{E}_{\perp}|^2 + |\dot{E}_z|^2 \right) dS}{\int_S |\dot{E}_{\perp}|^2 dS}. \quad (5.49)$$

Слід звернути увагу на те, що втрати викликають і поздовжні і поперечні складові електричного поля, а передача енергії відбувається тільки за рахунок поперечних. Для TE -хвиль $\dot{E}_z = 0$ і інтеграли у чисельнику і знаменнику скорочуються. Вважаючи також, що для діелектрика, який заповнює хвилевід, $\operatorname{tg} \delta \ll 1$, та приймаючи до уваги (5.11), маємо $\operatorname{Re} \dot{Z}_0^{TE} \approx \omega \mu_0 / K$. У результаті можна представити

$$\alpha^{\text{д}} = \frac{\sigma Z_0^{TE}}{2} = \frac{k \operatorname{tg} \delta}{2 \sqrt{1 - (f_{\text{кр}} / f)^2}}. \quad (5.50)$$

Використовуючи співвідношення (5.10) між поперечними та поздовжніми проекціями, можна з (5.49) отримати такий самий вираз для коефіцієнта поглинання і для TM -хвиль. Пропорційність коефіцієнта поглинання тангенсу діелектричних втрат є очікуваним результатом. Також зрозумілим є збільшення втрат при наближенні до критичного режиму з боку високих частот через зменшення ролі поперечних складових поля, які визначають передачу енергії і її втрати, і зростання ролі поздовжніх, які викликають лише втрати.

Треба мати на увазі, що наведений аналіз є наближеним, бо у даних розрахунках використовуються вирази для розподілу полів, отриманих у результаті аналізу ідеального хвилеводу. Як зазначалося у розд. 2.3.3, для протікання струму по поверхні реальних металів має існувати дотична складова електричного поля. Це суттєво ускладнює розв'язок рівнянь Максвелла для хвилеводів із втратами, тому розрахунок потужності втрат у стінках проводиться на основі наближених граничних умов Щукіна-Леонтовича (4.60), де за основу береться розподіл поля у ідеальному хвилеводі. Також розрахунок діелектричних втрат можна вважати коректним, якщо у комплексній сталій поширення $\dot{\gamma} = k - i\alpha$ можна прийняти, що $k \gg \alpha$, і відповідно для хвилеводу $K \gg \alpha$.

Контрольні питання та вправи до розділу

5.1. Охарактеризуйте закон дисперсії електромагнітних хвиль у хвилеводі, тобто покажіть, як змінюються параметри хвилі зі зміною її частоти. Які асимптоти має графік залежності фазової швидкості від частоти? Дайте визначення поняття критичної частоти.

5.2. Що таке позамежний хвилевід? Поясніть особливості електромагнітних процесів у разі збудження хвилеводу у режимі «відсічки».

5.3. Поясніть, що таке хвилеводні моди та на які типи вони поділяються. Які особливості мають різні типи хвиль щодо картини розподілу поля, хвильового опору та закону дисперсії. Які особливості *ТЕМ*-хвилі? У яких хвилеводах вона може поширюватися?

5.4. Які типи хвиль можуть поширюватись у прямокутному хвилеводі? Поясніть систему позначень хвилеводних мод та яка з них і чому саме зветься основною. Опишіть розподіл поля для основної моди прямокутного хвилеводу.

5.5. Яким чином, обираючи діапазон частот або розміри хвилеводу, забезпечити поширення у хвилеводі тільки однієї моди?

5.6. Як, використовуючи модель «площинного» хвилеводу (розділ 4), представити розповсюдження полів основної моди у прямокутному хвилеводі через поширення плоскої хвилі?

5.7. Опишіть структуру полів основної моди у коаксіальному хвилеводі та вкажіть, чим визначається діапазон частот одномодового режиму. Яка різниця між хвильовим опором та еквівалентним хвильовим опором коаксіального хвилеводу?

5.8. Якими функціями описується розподіл полів у круглому хвилеводі? Наведіть розподіл полів для його основної моди та порівняйте його з полями основної моди у прямокутному хвилеводі.

5.9. Опишіть фізичне явище, яке лежить в основі передачі хвиль у діелектричних хвилеводах, світлопроводах? Опишіть принцип дії діелектричних хвилеводів. В залежності від області застосування опишіть їх різновиди та конструктивні особливості.

5.10. Опишіть різновиди смужкових хвилеводів та типи хвиль, що в них використовують. Чим обмежується частотний діапазон таких хвилеводів?

5.11. Яким чином розрахувати потужність, що передається хвилеводом? Яка роль поперечних та поздовжніх складових полів у цьому процесі?

5.12. Від чого залежать втрати енергії, яка передається по хвилеводу? Які основні фактори визначають їх частотну залежність?

6. РЕЗОНАТОРИ

6.1. ЗАГАЛЬНІ ВЛАСТИВОСТІ

Резонатор є коливальною системою, в якій можливе існування власних коливань на певних частотах, званих резонансними. Резонансні властивості мають різні коливальні системи: натягнута струна, маятник, коливальний контур, пружна пластина, пружина і так далі. Резонансна частота коливальної системи залежить від її параметрів. Так для маятника - важка на нитці - частота власних коливань визначається масою важка і довжини нитки, а у разі коливального контура - номіналами його реактивних компонентів (ємності і індуктивності).

Явище резонансу в коливальній системі проявляється істотним зростанням амплітуди (A) вимушених коливань, що виникає у разі збігу частоти зовнішнього джерела збудження з власною частотою системи. У техніці явище резонансу застосовується для селекції сигналів певної частоти, посилення, генерації сигналів.

Як коливальну систему в електроніці зазвичай використовують коливальний контур, що представляє паралельне

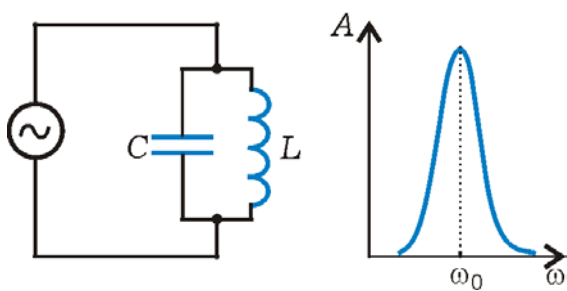


Рис. 6.1. Електронна коливальна система: паралельний коливальний контур

або послідовне з'єднання ємнісного (C) і індуктивного (L) елементів із зосередженими параметрами. Власна (резонансна) частота коливань LC -контура визначається співвідношенням:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (6.1)$$

З (6.1) витікає, що для істотного підвищення резонансної частоти коливального контура - з метою просування в область НВЧ-діапазону - необхідно зменшувати ємність конденсатора і величину індуктивності котушки. Слід

зазначити, що коливальний контур використовується на низьких частотах, за яких геометричні розміри коливальної системи істотно менші за довжину хвилі. Це пов'язано з тим, що, по-перше, виготовлення реактивних елементів, що характеризуються мінімальними значеннями зосереджених параметрів, зв'язане з рядом труднощів. По-друге, у НВЧ діапазоні геометричні розміри вказаної системи стають порівнянними з довжиною хвилі, що призводить до випромінювання накопичуваної енергії у навколишній простір і, значить, до втрати резонансних властивостей.

Можливість побудови альтернативних коливальному контуру для області НВЧ систем виходить з рівнянь Максвелла. Проте, для її пошуку проведемо уявний експеримент. Так, за фіксованих параметрів конденсатора - ємності C , подальше збільшення ω_0 отримаємо, наприклад, за рахунок зменшення індуктивності L . У свою чергу скорочення величини L може бути досягнуте за рахунок зменшення товщини і кількості витків (мінімум до одного) котушки, а також використання властивості паралельного з'єднання індуктивних елементів. В результаті подальшого зменшення величини індуктивності L обкладинки конденсатора будуть накоротко замкнені паралельно з'єднаними провідниками, що у граничному випадку призводить до утворення суцільної металевої стінки (рис. 6.2). Таким чином, в області НВЧ діапазону коливальний контур вироджується в обмежений металевою поверхнею об'єм - резонатор, порожнина якого має резонансні властивості.

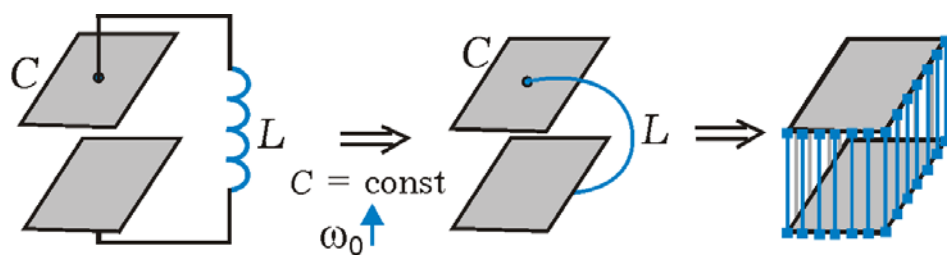


Рис. 6.2. Уявний експеримент побудови коливальної системи НВЧ діапазону

Відомо, що у процесі вільних коливань (зовнішнє джерело відключене) запасена у коливальному контурі енергія циркулює, переходячи з енергії електричного поля, зосередженого між пластинами конденсатора, в енергію магнітного поля, локалізованого

в котушці індуктивності і назад. У об'ємному резонаторі також відбувається взаємне перетворення енергії електричного і магнітного полів, і сумарна енергія резонатора (за відсутності втрат) зберігається скільки завгодно довго. Проте у цьому разі немає яскраво виражених компонентів, що характеризуються величинами L і C , можна говорити про ємність і індуктивність лише наближено, як про елементи з розподіленими параметрами. І на відміну від коливального контура в об'ємному резонаторі безперервний обмін між енергіями електричного і магнітного полів відбувається в єдиному об'ємі простору.

Аналіз і розрахунок об'ємних резонаторів проводять аналогічно дослідженням хвилеводів: методом теорії поля. Для цього рівняння Максвелла, представлені у вигляді хвильових рівнянь,

$$\begin{cases} \nabla^2 \dot{\mathbf{E}}(x, y, z) + k^2 \dot{\mathbf{E}}(x, y, z) = 0 \\ \nabla^2 \dot{\mathbf{H}}(x, y, z) + k^2 \dot{\mathbf{H}}(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

розв'язують методом розділення змінних.

Так, у декартовій системі координат величину напруженості електричного (магнітного) поля представляють у вигляді добутку трьох функцій $\dot{X}(x)$, $\dot{Y}(y)$, $\dot{Z}(z)$ і, використовуючи метод розділення змінних, отримують рішення, аналогічне рішенню (5.6) для хвилевода

$$\dot{F}(x, y, z) = C \frac{\sin}{\cos}(k_x x + \varphi_x) \frac{\sin}{\cos}(k_y y + \varphi_y) \frac{\sin}{\cos}(Kz + \varphi_z).$$

Для дослідження об'ємного резонатора зручно скористатися результатами, отриманими для хвилевода, якщо його розглядати як відрізок регулярного металевих хвилевода, обмеженого з обох боків ідеально провідними поверхнями, розташованими перпендикулярно його подовжній координаті (рис. 6.3.).

6.2. РЕЗОНАТОР ЯК ЗАКОРОЧЕНИЙ ВІДРІЗОК ХВИЛЕВОДУ

6.2.1. Граничні умови, умова резонансу

Збережемо прийняті напрями координатних осей i для закороченого хвилеводу. На відміну від хвилеводу нескінченної довжини, розподіл *поперечних* складових електричного поля з урахуванням відбитої хвилі описуватиметься співвідношенням виду

$$\dot{E}_{\perp} = \dot{E}_{m_{\perp}}^{+} e^{i(\omega t - Kz)} + \dot{E}_{m_{\perp}}^{-} e^{i(\omega t + Kz)}, \quad (6.2)$$

де $\dot{E}_{m_{\perp}}^{+}$ і $\dot{E}_{m_{\perp}}^{-}$ - комплексні амплітуди поперечних складових напруженості електричного поля хвилі, що падає, і відбитої, які відповідають конкретному хвилеводу. На обох металевих поверхнях повинні виконуватися граничні умови - електричне поле має бути тільки перпендикулярним до металевих стінок, тобто, для вказаних поперечних полів необхідно накласти додаткові умови:

$$E_{\perp} \Big|_{z=0} = 0. \quad (6.3)$$

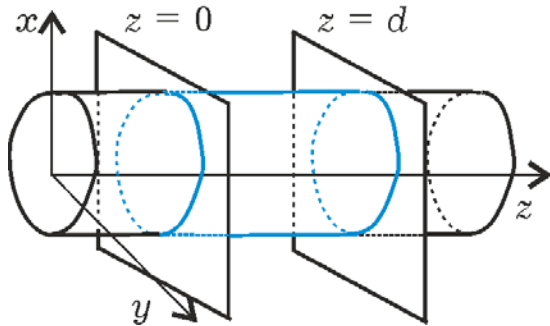


Рис. 6.3. Представлення резонатора як відрізка хвилеводу, закороченого двома відбиваючими площинами

Підставивши у вираз (6.2) $z = 0$ і $z = d$, отримаємо:

$$0 = (\dot{E}_{m_{\perp}}^{+} + \dot{E}_{m_{\perp}}^{-}) e^{i\omega t},$$

$$\dot{E}_{m_{\perp}}^{+} e^{-iKd} + \dot{E}_{m_{\perp}}^{-} e^{iKd} = 0.$$

З (6.4) слідує простий висновок $(\dot{E}_{m_{\perp}}^{+} = -\dot{E}_{m_{\perp}}^{-})$: амплітуди хвиль, що падають і відбиваються, мають бути рівними, а фази зсунуті на π . З урахуванням цього співвідношення (6.5) запишемо так:

$$E_{m_{\perp}}^{+} (e^{-iKd} - e^{iKd}) e^{i\omega t} = 0,$$

яке з урахуванням формули Ейлера набирає вигляду

$$-2i\dot{E}_{m\perp}^+ \sin(Kd) e^{i\omega t} = 0. \quad (6.6)$$

Рівняння (6.6) виконується для

$$K = \frac{\pi l}{d}, \quad l = (0), 1, 2, \dots \quad (6.7)$$

Звідси витікає, що у таких системах поля, що характеризуються додатковим числом l , можуть існувати тільки за певного набору значень подовжнього хвильового числа K . Таким чином, на відміну від хвилеводних мод, що характеризуються числами m і n (TE_{mn} , TM_{mn}), резонансні моди описуються набором трьох чисел: m , n і l (TE_{mnl} , TM_{mnl}). Резонансні TEM моди від відповідної хвилеводної моди відрізняються значенням числа l (TEM_l : TEM_1 , TEM_2 , TEM_3). Отже, для закороченого відрізка хвилевода поля існуватимуть за умови, що поперечні хвильові числа порожнистого резонатора дорівнюють поперечним хвильовим числам відповідного хвилеводу, а подовжнє хвильове число K визначається співвідношенням (6.7). Це дозволяє на основі аналізу, проведеного для хвилеводів, розрахувати частоти власних коливань резонатора.

6.2.2. Розрахунок резонансних частот

Для розрахунку резонансних частот скористаємося відомим співвідношенням (5.5)

$$k_x^2 + k_y^2 + K^2 = k^2,$$

у якому, як отримано для хвилеводних структур, два перших доданки визначають величину критичної довжини хвилі у відповідному хвилеводі

$$k_x^2 + k_y^2 = (2\pi / \lambda_{кр})^2.$$

Тоді з врахуванням (6.7) і $k = \frac{\omega_0}{c}$, де ω_0 - кругова резонансна частота, отримаємо співвідношення

$$\left(\frac{2\pi}{\lambda_{\text{кр}}}\right)^2 + \left(\frac{\pi l}{d}\right)^2 = \left(\frac{\omega_0}{c}\right)^2$$

для розрахунку власних частот резонатора

$$\omega_0 = c \sqrt{\left(\frac{2\pi}{\lambda_{\text{кр}}}\right)^2 + \left(\frac{\pi l}{d}\right)^2},$$

або у вигляді

$$f_0^{mnl} = \frac{c}{2} \sqrt{\left(\frac{2}{\lambda_{\text{кр}}^{mn}}\right)^2 + \left(\frac{l}{d}\right)^2}. \quad (6.8)$$

Відзначимо важливу особливість отриманого результату. Коливальний контур, як коливальна система, що характеризується однією резонансною частотою, в області НВЧ діапазону модифікується у коливальну систему, що конструктивно представляє порожнистий резонатор, якій відповідає вже *нескінченна множина резонансних частот*, визначуваних довжиною резонатора і типом хвильової моди.

Моду резонатора, що має мінімальне значення резонансної частоти, називають *нижчою* або *основною* модою коливань. Усі інші коливання є *вищими* модами. Як і для хвильових мод, деяким резонансним модам характерне виродження: їм відповідають однакові значення резонансних частот. Таким чином, кожна мода характеризується власною резонансною частотою і описується набором з трьох чисел (m, n, l), які дозволяють отримати уявлення про конфігурацію полів у конкретному резонаторі.

6.3. ТИПИ РЕЗОНАТОРІВ

Для визначення типу резонатора використовують різні класифікаційні ознаки, однією з яких виступає електрична довжина. Розкрити суть цього поняття допоможе співвідношення (6.7), якщо врахувати, що величина хвильового числа у подовжньому напрямі K може бути розрахована за відомого значення довжини хвилі у хвильоводі

$$K = \frac{2\pi}{\Lambda}.$$

Тоді умова резонансу записується так

$$d = l \cdot \frac{\Lambda}{2}, \quad l = (0), 1, 2, \dots \quad (6.9)$$

Таке формулювання умови резонансу означає: в резонаторі існують поля у вигляді тільки тих мод, для яких на довжині «відсіченого об'єму хвилеводу» укладається ціле число півхвиль. Отже, фізичний зміст третього індексу резонансної моди - l - аналогічний першим двом (m, n), що характеризують хвилеводні моди: показує кількість півхвиль (варіацій поля), що укладаються уздовж відповідного напрямку.

Таким чином, для існування резонансних мод довжина резонатора має бути кратній половині довжини хвилі у відповідному хвилеводі. Такий резонатор називають півхвильовим, що стає цілком логічним, якщо провести наступний уявний експеримент. Якщо у довільній точці (з подовжньою координатою) z закороченого хвилеводу «запустити» хвилю, що біжить, то досягаючи, приміром, правої металевої стінки, що ідеально проводить, вона відбивається. Оскільки коефіцієнт відбивання $\rho = -1$, то фаза відбитої від стінки у точці $z = d$ хвилі, окрім просторового набігу, додатково збільшується на величину π . Коли відбита хвиля досягає лівої металевої поверхні ($z = 0$) станеться її повторне відбивання з відповідним додатковим зсувом фази на величину π . Сумарний же просторовий набіг фази під час досягнення хвилею вихідної точки z відповідає цілому числу довжин хвиль Λ і складе величину, кратну 2π . Оцінка підсумкового балансу фаз, що включає сумарний просторовий набіг ($2\pi n$) і додатковий зсув фази (2π), пов'язаний з двократним відбиванням від металевих стінок, показує, що у разі багатократного проходження хвилею вихідної точки z її фаза залишається незмінною. Іншими словами, збуджені одного разу власні коливання підтримуються вказаною коливальною системою і за відсутності втрат поля резонансних мод існуватимуть вічно. Очевидно, що у разі суперпозиції падаючої і відбитої хвиль у даній системі *утворюється стояча хвиля*, яка за умови рівності амплітуд цих

хвиль у вузлах має нульову амплітуду коливань. У цьому резонаторі вузли зокрема утворюються і на поверхнях, що обмежують відрізок хвилеводу, де відсутня дотична складова електричного поля.

Під *електричною довжиною* зазвичай розуміють довжину резонатора, виражену у довжинах хвиль. У розглянутому резонаторі існування резонансних мод практично визначається тільки просторовим набігом фази, яка має бути кратна довжині хвилі, що і забезпечується «півхвильовим» подовжнім розміром резонатора. Таким чином, *електрична довжина* резонатора кратна числу півхвиль і тому цей резонатор називають *півхвильовим*.

У розділі 3 показано, що за наявності стоячих електромагнітних хвиль для аналізу процесів можна використовувати теорію довгих ліній, на основі якої отримано, що повне віддзеркалення хвилі, що падає, відбувається як у режимі короткого замикання, так і режимі холостого ходу. Конструктивна реалізація в резонаторі режиму, аналогічного короткому замиканню довгої лінії, дозволяє отримати півхвильовий резонатор. Проведемо уявний експеримент: на одній з площин, що обмежують відрізок хвилеводу ($z = d$) реалізуємо режим, аналогічний режиму холостого ходу в довгій лінії. Враховуючи, що режиму холостого ходу відповідає коефіцієнт віддзеркалення $\rho = 1$, що означає віддзеркалення хвилі без зміни фази, сумарний зсув фази хвилі за рахунок двократного віддзеркалення в коливальній системі визначатиметься тільки вкладом, що вноситься відбиванням від другої ($z = 0$) металевої поверхні, що ідеально проводить, і складе величину π . Отже, існування резонансних мод можливе, якщо фаза хвилі зберігається при повторному проходженні нею будь-якої точки з подовжньою координатою z . Вказана умова досягається при

$$d = \frac{\Lambda}{4}(2l + 1), \quad l = 0, 1, 2, \dots$$

Це означає, що довжина резонатора має бути кратна непарному числу чвертей довжин хвиль, і відповідно до величини електричної довжини цей резонатор називають *чвертьхвильовим*.

Розглянемо інший поширений спосіб класифікації резонаторів за формою хвилеводу.

Прямокутний резонатор. Розглянемо детальніше резонатор, отриманий з відрізка прямокутного хвилеводу. Його обмеження ідеально провідними площинами утворює порожнистий прямокутний паралелепіпед (рис. 6.4.). Резонансні властивості, як відзначалося вище, має обмежений його стінками об'єм.

Зважаючи, що значення критичної довжини хвилі мод прямокутного хвилеводу визначається набором чисел m, n з (5.17)

$$\lambda_{\text{кр}}^{mn} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}},$$

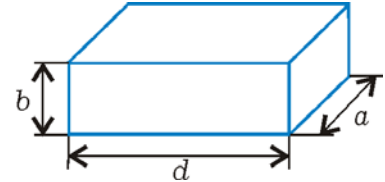


Рис. 6.4. Конструкція прямокутного резонатора

формулу розрахунку резонансної частоти можна з (6.8) представити у вигляді

$$f_0^{mnl} = \frac{c}{2} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 + \left(\frac{l}{d}\right)^2}.$$

Опис полів резонансних мод у прямокутному резонаторі можна отримати на основі відповідних результатів для прямокутного хвилеводу; підсумувавши падаючу і відбиту хвилі і виконавши додаткові граничні умови (6.3).

Для ТМ-хвиль проекції електричного і магнітного поля хвилі, що падає і відбитої, мають наступний вигляд:

$$\dot{E}_x^+ = \frac{k_x K}{k^2 - K^2} \dot{E}_0^+ \cos k_x x \cdot \sin k_y y \cdot e^{-iKz};$$

$$\dot{E}_x^- = -\frac{k_x K}{k^2 - K^2} \dot{E}_0^- \cos k_x x \cdot \sin k_y y \cdot e^{iKz};$$

$$\dot{E}_y^+ = \frac{k_y K}{k^2 - K^2} \dot{E}_0^+ \sin k_x x \cdot \cos k_y y \cdot e^{-iKz};$$

$$\dot{E}_y^- = -\frac{k_y K}{k^2 - K^2} \dot{E}_0^- \sin k_x x \cdot \cos k_y y \cdot e^{iKz};$$

$$\begin{aligned}
\dot{E}_z^+ &= i\dot{E}_0^+ \sin k_x x \cdot \sin k_y y \cdot e^{-iKz}; \\
\dot{E}_z^- &= i\dot{E}_0^- \sin k_x x \cdot \sin k_y y \cdot e^{iKz}; \\
\dot{H}_x^+ &= -\frac{\omega\dot{\epsilon}\epsilon_0 k_y}{k^2 - K^2} \dot{E}_0^+ \sin k_x x \cdot \cos k_y y \cdot e^{-iKz}; \\
\dot{H}_x^- &= -\frac{\omega\dot{\epsilon}\epsilon_0 k_y}{k^2 - K^2} \dot{E}_0^- \sin k_x x \cdot \cos k_y y \cdot e^{iKz}; \\
\dot{H}_y^+ &= \frac{\omega\dot{\epsilon}\epsilon_0 k_x}{k^2 - K^2} \dot{E}_0^+ \cos k_x x \cdot \sin k_y y \cdot e^{-iKz}; \\
\dot{H}_y^- &= \frac{\omega\dot{\epsilon}\epsilon_0 k_x}{k^2 - K^2} \dot{E}_0^- \cos k_x x \cdot \sin k_y y \cdot e^{iKz}; \\
\dot{H}_z^+ &= 0; \quad \dot{H}_z^- = 0,
\end{aligned}$$

де $k_x = \frac{\pi m}{a}$, $k_y = \frac{\pi n}{b}$, K - проекції хвильового вектору на відповідні осі координат. У записі виразів для відбитої хвилі враховано, що її відповідні поперечні хвильові числа дорівнюють поперечним хвильовим числам хвилі, що падає, а подовжнє хвильове число (як проекція хвильового вектору на вісь z) протилежне подовжньому хвильовому числу хвилі, що падає.

У точці $z = 0$ з виразів для \dot{E}_x витікає, що

$$\dot{E}_0^- = \dot{E}_0^+.$$

З другої граничної умови виходить, що $K = \frac{\pi l}{d}$. Підсумувавши значення відповідних проекцій хвилі, що падає і відбитої, і використовуючи формули Ейлера, отримаємо наступне співвідношення для \dot{E}_x :

$$\begin{aligned}
\dot{E}_x &= \dot{E}_x^+ + \dot{E}_x^- = \dot{E}_0^+ \frac{k_x K}{k^2 - K^2} \cos k_x x \cdot \sin k_y y \cdot (e^{-iKz} - e^{iKz}) = \\
&= -2i\dot{E}_0^+ \frac{k_x K}{k^2 - K^2} \cos k_x x \cdot \sin k_y y \cdot \sin Kz.
\end{aligned}$$

Аналогічно можна отримати вирази для інших проекцій поля. Таким чином, проекції поля TM -хвилі мають наступний вигляд:

$$\dot{E}_x = -2i\dot{E}_0^+ \frac{k_x K}{k^2 - K^2} \cos k_x x \cdot \sin k_y y \cdot \sin Kz;$$

$$\dot{E}_y = -2i\dot{E}_0^+ \frac{k_y K}{k^2 - K^2} \sin k_x x \cdot \cos k_y y \cdot \sin Kz;$$

$$\dot{E}_z = i\dot{E}_0^+ \sin k_x x \cdot \sin k_y y \cdot \cos Kz;$$

$$\dot{H}_x = -2\dot{E}_0^+ \frac{\omega \dot{\epsilon} \epsilon_0 k_y}{k^2 - K^2} \sin k_x x \cdot \cos k_y y \cdot \cos Kz;$$

$$\dot{H}_y = 2\dot{E}_0^+ \frac{\omega \dot{\epsilon} \epsilon_0 k_x}{k^2 - K^2} \cos k_x x \cdot \sin k_y y \cdot \cos Kz;$$

$$\dot{H}_z = 0.$$

Знайдемо дійсні миттєві значення проекцій поля TM -хвилі, для чого помножимо кожен комплексну проекцію на множник $e^{i\omega t}$ і залишимо дійсну частину від отриманого виразу:

$$E_x = 2E_0^+ \frac{k_x K}{k^2 - K^2} \cos k_x x \cdot \sin k_y y \cdot \sin Kz \cdot \sin \omega t;$$

$$E_y = 2E_0^+ \frac{k_y K}{k^2 - K^2} \sin k_x x \cdot \cos k_y y \cdot \sin Kz \cdot \sin \omega t;$$

$$E_z = -2E_0^+ \sin k_x x \cdot \sin k_y y \cdot \cos Kz \cdot \sin \omega t;$$

$$H_x = -2E_0^+ \frac{\omega \dot{\epsilon} \epsilon_0 k_y}{k^2 - K^2} \sin k_x x \cdot \cos k_y y \cdot \cos Kz \cdot \cos \omega t;$$

$$H_y = 2E_0^+ \frac{\omega \dot{\epsilon} \epsilon_0 k_x}{k^2 - K^2} \cos k_x x \cdot \sin k_y y \cdot \cos Kz \cdot \cos \omega t;$$

$$H_z = 0.$$

Для TE -мод на основі виразів електричного і магнітного поля хвилі, що падає і відбитої

$$\begin{aligned}
\dot{E}_x^+ &= \frac{\omega\mu\mu_0 k_y}{k^2 - K^2} \dot{H}_0^+ \cos k_x x \cdot \sin k_y y \cdot e^{-iKz} \\
\dot{E}_y^+ &= -\frac{\omega\mu\mu_0 k_x}{k^2 - K^2} \dot{H}_0^+ \sin k_x x \cdot \cos k_y y \cdot e^{-iKz}; \\
\dot{E}_z^+ &= i\dot{E}_0^+ \sin k_x x \cdot \sin k_y y \cdot e^{-iKz}; \\
\dot{E}_z^+ &= 0; \\
\dot{H}_x^+ &= \frac{k_x K}{k^2 - K^2} \dot{H}_0^+ \sin k_x x \cdot \cos k_y y \cdot e^{-iKz}; \\
\dot{H}_y^+ &= \frac{k_y K}{k^2 - K^2} \dot{H}_0^+ \cos k_x x \cdot \sin k_y y \cdot e^{-iKz}; \\
\dot{H}_z^+ &= -i\dot{H}_0^+ \cos k_x x \cdot \cos k_y y \cdot e^{-iKz}; \\
\\
\dot{E}_x^- &= \frac{\omega\mu\mu_0 k_y}{k^2 - K^2} \dot{H}_0^- \cos k_x x \cdot \sin k_y y \cdot e^{iKz}; \\
\dot{E}_y^- &= -\frac{\omega\mu\mu_0 k_x}{k^2 - K^2} \dot{H}_0^- \sin k_x x \cdot \cos k_y y \cdot e^{iKz}; \\
\dot{E}_z^- &= i\dot{E}_0^- \sin k_x x \cdot \sin k_y y \cdot e^{iKz}; \\
\dot{E}_z^- &= 0; \\
\dot{H}_x^- &= -\frac{k_x K}{k^2 - K^2} \dot{H}_0^- \sin k_x x \cdot \cos k_y y \cdot e^{iKz} \\
\dot{H}_y^- &= \frac{k_y K}{k^2 - K^2} \dot{H}_0^- \cos k_x x \cdot \sin k_y y \cdot e^{iKz}; \\
\dot{H}_z^- &= -i\dot{H}_0^- \cos k_x x \cdot \cos k_y y \cdot e^{iKz}.
\end{aligned}$$

отримаємо наступні вирази для компонент поля в прямокутному резонаторі:

$$\begin{aligned}
E_x &= -2\dot{H}_0^+ \frac{\omega\mu\mu_0 k_y}{k^2 - K^2} \cos k_x x \cdot \sin k_y y \cdot \sin Kz \cdot \sin \omega t; \\
E_y &= 2\dot{H}_0^+ \frac{\omega\mu\mu_0 k_x}{k^2 - K^2} \sin k_x x \cdot \cos k_y y \cdot \sin Kz \cdot \sin \omega t; \\
E_z &= 0;
\end{aligned}$$

$$H_x = 2H_0^+ \frac{k_x K}{k^2 - K^2} \sin k_x x \cdot \cos k_y y \cdot \cos Kz \cdot \cos \omega t;$$

$$H_y = 2H_0^+ \frac{k_y K}{k^2 - K^2} \cos k_x x \cdot \sin k_y y \cdot \cos Kz \cdot \cos \omega t;$$

$$H_z = 2H_0^+ \cos k_x x \cdot \cos k_y y \cdot \sin Kz \cdot \cos \omega t.$$

Як видно з виразів для проєкцій хвильових чисел, комбінація трьох натуральних чисел - m , n , l - визначає існування різних мод коливань - TM_{mnl} , TE_{mnl} - у прямокутному резонаторі на резонансних частотах:

$$\omega_0^{mnl} = c \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{l\pi}{d}\right)^2}.$$

Для $l = 0$ звідси витікає, що власна кругова частота резонатора чисельно дорівнює критичній частоті хвилеводу. У такому разі для структури поля TE -хвилі граничні умови на поверхні відбиваючих стінок, які обмежують хвилевід, не виконуються. Таким чином, TE -моди для $l = 0$ існувати не можуть, і для резонансних TE -мод можливі тільки ненульові значення числа $l = 1, 2, 3, \dots$. Для $l = 0$ існування полів TM -мод у резонаторі можливе для $f = f_{кр}$. Тоді ($f = f_{кр}$), довжина хвилі в хвилеводі $\Lambda = \infty$, і довжина резонатора може бути довільною ($d = \frac{\Lambda}{2} l = \infty \cdot 0$). Таким чином, для TM -мод числа $l = 0, 1, 2, 3, \dots$ можуть приймати будь-які значення.

Слід зазначити, що можливість існування в електродинамічній системі полів для $l = 0$ необхідно розглядати для конкретних типів резонаторів.

У прямокутному резонаторі найчастіше використовується мода TE_{101} , епюри розподілу силових ліній електричного і магнітного полів якої представлені на рис. 6.5.

Співставлення структур електромагнітного поля основної хвилеводної і резонансної моди показує, що уздовж обраного напрямку подовжньої координати резонатора силові лінії електричного і магнітного поля коливання TE_{101} зміщені відносно розподілу їх у полі хвилеводної моди TE_{10} на чверть довжини хвилі.

Особливість процесів в резонаторі полягає в тому, що у деякі моменти часу енергія коливальної системи є тільки енергією електричного поля, а енергія магнітного поля у такому разі дорівнює нулю. В інші моменти часу, навпаки, енергія резонатора зосереджена тільки в енергії магнітного поля, про що свідчить коливання в часі електричного і магнітного поля за гармонійним законом, але із зсувом фаз на $\pi/2$. У будь-якій області резонатора в середньому передача енергії відсутня, не дивлячись на те, що рух енергії не припиняється.

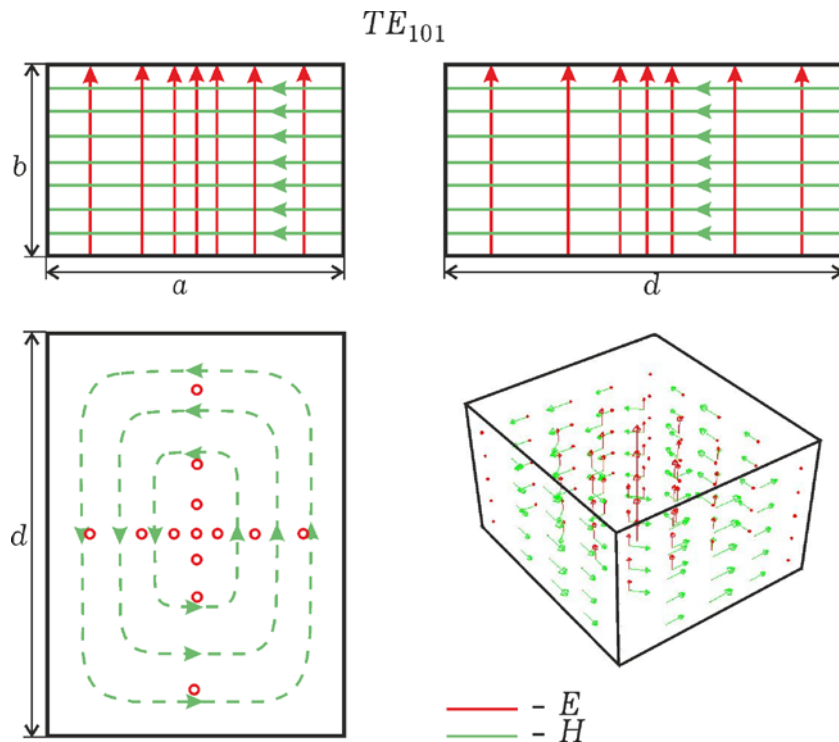


Рис. 6.5. Різні проекції силових ліній електричного і магнітного поля резонансної моди TE_{101} у прямокутному резонаторі

Слід зазначити, що на відміну від прямокутного хвилевода, вибір подовжньої осі для прямокутного резонатора довільний: усі три напрями є рівноправними. Вибір координатних осей уздовж сторін вказаної коливальної системи визначає назву і орієнтацію структури поля резонансної моди у просторі (рис. 6.6.).

Наприклад, якщо поміняти осі координат $x \rightarrow y$, $y \rightarrow z$ і $z \rightarrow x$, то хвиля, що позначається в початковій системі координат як TE_{101} , в отриманій системі координат називатиметься TM_{110} . Таким чином,

у прямокутному резонаторі класифікація полів (на коливання типу TE , TM) має відносний характер.

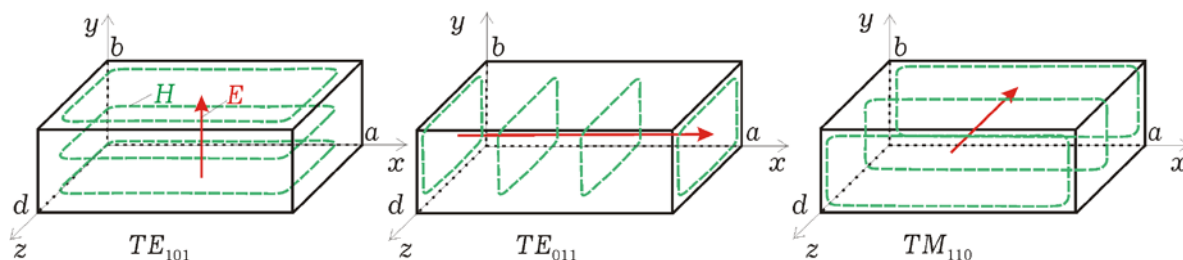


Рис. 6.6. До питання про класифікацію мод у прямокутному резонаторі

Циліндричний резонатор. Як і для прямокутного резонатора, циліндричний резонатор можна отримати обмеженням круглого хвилеводу ідеально провідними площинами (рис. 6.7). Підсумовуванням полів хвилі круглого хвилеводу, що падає і відбитої, і врахуванням граничних умов отримаємо вирази для комплексних амплітуд компонент поля циліндричного резонатора:

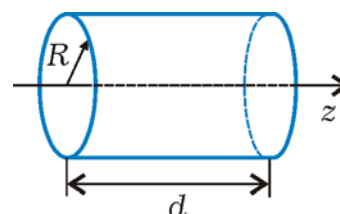


Рис. 6.7. Конструкція циліндричного резонатора.

- для TM -мод:

$$\begin{aligned} \dot{E}_r &= -\frac{K}{\sqrt{k^2 - K^2}} J'_n \left(r\sqrt{k^2 - K^2} \right) \Phi(n\varphi) \sin(Kz); \\ \dot{E}_\phi &= -\frac{Kn}{r\sqrt{k^2 - K^2}} J_n \left(r\sqrt{k^2 - K^2} \right) \Phi'(n\varphi) \sin(Kz); \\ \dot{E}_z &= J_n \left(r\sqrt{k^2 - K^2} \right) \Phi(n\varphi) \cos(Kz); \\ \dot{H}_r &= \frac{i n \omega \epsilon \epsilon_0}{r\sqrt{k^2 - K^2}} J_n \left(r\sqrt{k^2 - K^2} \right) \Phi'(n\varphi) \cos(Kz); \\ \dot{H}_\phi &= -\frac{i \omega \epsilon \epsilon_0}{\sqrt{k^2 - K^2}} J'_n \left(r\sqrt{k^2 - K^2} \right) \Phi(n\varphi) \cos(Kz); \\ \dot{H}_z &= 0, \end{aligned}$$

де $K = \frac{\pi l}{d}$, $l = 0, 1, 2, \dots$; J'_n , $\Phi'(n\varphi)$ - похідні функцій J_n , $\Phi(n\varphi)$; J_n - функції Бесселя n -го порядку; $\Phi(n\varphi)$ - функція азимутальної координати, що описує розподіл поля у поперечному перерізі круглого резонатора.

Власна частота такого резонатора визначається виразом

$$\omega_0^{nml} = \sqrt{\left(\frac{B_{nm}}{R}\right)^2 + \left(\frac{\pi l}{d}\right)^2},$$

де $B_{nm} = \frac{2\pi R}{\lambda_{кр}^{nm}}$, $\lambda_{кр}^{nm} = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - K^2}}$; $k = \frac{\omega_0}{c}$; R - радіус хвилевода.

- Для TE -мод:

$$\dot{E}_r = -\frac{n\omega\mu\mu_0}{r\sqrt{k^2 - K^2}} J_n\left(r\sqrt{k^2 - K^2}\right) \Phi'(n\varphi) \sin(Kz);$$

$$\dot{E}_\phi = \frac{\omega\mu\mu_0}{\sqrt{k^2 - K^2}} J'_n\left(r\sqrt{k^2 - K^2}\right) \Phi(n\varphi) \sin(Kz);$$

$$\dot{E}_z = 0;$$

$$\dot{H}_r = -\frac{iK}{\sqrt{k^2 - K^2}} J'_n\left(r\sqrt{k^2 - K^2}\right) \Phi(n\varphi) \cos(Kz);$$

$$\dot{H}_\phi = -\frac{inK}{r\sqrt{k^2 - K^2}} J_n\left(r\sqrt{k^2 - K^2}\right) \Phi'(n\varphi) \cos(Kz);$$

$$\dot{H}_z = -iJ_n\left(r\sqrt{k^2 - K^2}\right) \Phi(n\varphi) \sin(Kz);$$

$$\omega_0^{nml} = \sqrt{\left(\frac{A_{nm}}{R}\right)^2 + \left(\frac{\pi l}{d}\right)^2},$$

де $A_{nm} = \frac{2\pi R}{\lambda_{кр}^{nm}}$, $\lambda_{кр}^{nm} = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - K^2}}$; k , K - хвильові числа у вільному

просторі і хвилеводі уздовж осі z відповідно.

Структура силових ліній електричного і магнітного поля резонансних мод TM_{010} і TE_{111} циліндричного резонатора представлена на рис. 6.8.

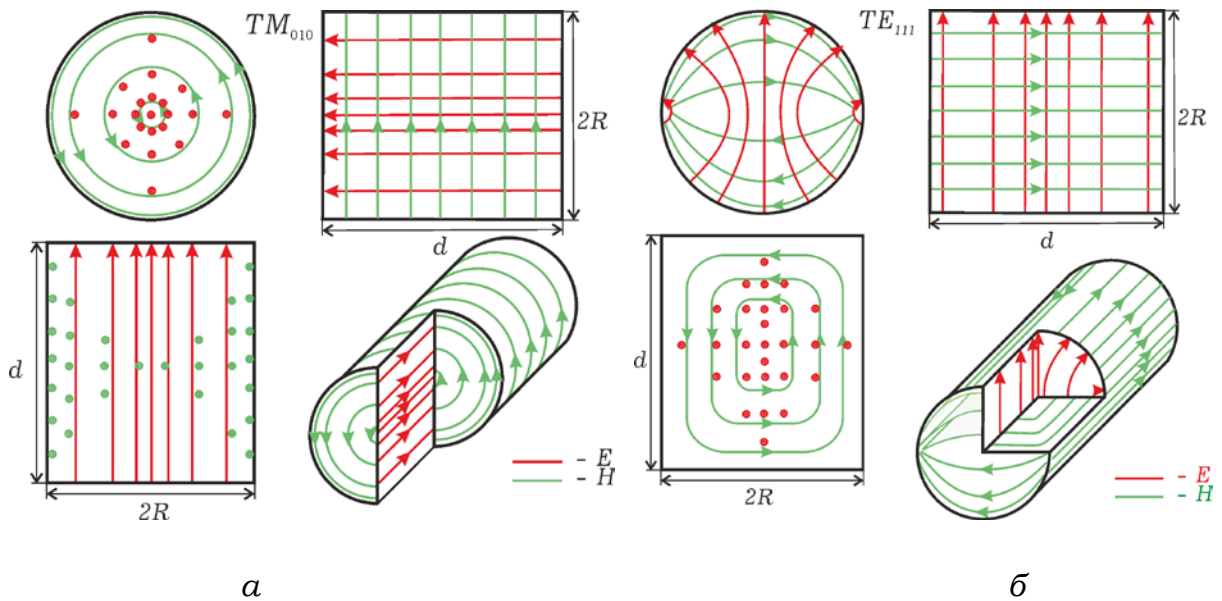


Рис. 6.8. Різні проекції силових ліній електричного і магнітного поля в циліндричному резонаторі: *а* - резонансної моди TM_{010} ; *б* - резонансної моди TE_{111}

Для нижчого типу коливання (TM_{010}) резонансна частота

$$\omega_0^{nml} = \frac{A_{nm}}{R}$$

не залежить від довжини резонатора, що дає можливість робити «конструкції з дуже невеликими габаритами». Залежність же значення ω_0^{nml} від довжини коливальної системи дозволяє реалізувати високоточний хвилемір, для чого в конструкції циліндричного резонатора одну з короткозамикаючих металевих стінок виконують у вигляді рухливого поршня, що дозволяє змінювати резонансну частоту. У цьому резонаторі напрям осі z вже прив'язаний до об'єму резонатора і ділення полів на TM і TE вже не є відносним.

Коаксіальний резонатор. Конструктивно коаксіальний резонатор виконаний із закороченого з двох сторін відрізка коаксіального хвилеводу.

Цей тип резонаторів представляє інтерес можливістю збудження TEM -мод. Вирази для компонент поля резонансних мод

отримаємо з відповідних виразів для поля TEM -хвилі коаксіального хвилеводу :

$$\dot{E}_r = -\frac{i\dot{V}}{r \ln(R_2 / R_1)} \sin\left(\frac{l\pi}{d} z\right);$$

$$l = 1, 2, 3,$$

$$\dot{H}_\phi = \frac{\dot{I}}{2\pi r} \cos\left(\frac{l\pi}{d} z\right).$$

З представлених співвідношень видно, що на відміну від коаксіального хвилеводу, в якому існує єдина мода TEM -хвилі, в коаксіальному резонаторі відповідно до його довжини

$$d = l \frac{\Lambda}{2}$$

виникають різні моди TEM_l . На рис. 6.9. представлено розподіл полів нижчої (TEM_1) резонансної моди.

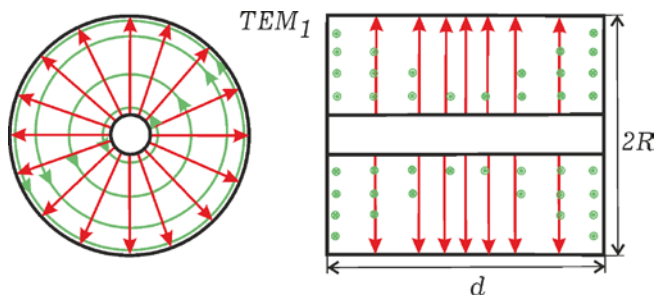


Рис. 6.9. Розподіл силових ліній електричного і магнітного поля основної (TEM_1) резонансної моди в коаксіальному резонаторі.

У п. 5.1.4 показано, що для TEM -хвиль характерною є рівність довжини хвилі у хвилеводі і у вільному просторі $\lambda = \Lambda$, тобто резонанс у коаксіальному резонаторі виникає, коли довжина d кратна половині довжини хвилі у вільному просторі.

Власні частоти резонансних мод TEM_1 ($\lambda_{кр} = \infty$) визначаються співвідношенням:

$$\omega_0 = c \frac{l\pi}{d}.$$

За кваліфікаційною ознакою - величиною електричної довжини - даний резонатор відноситься до півхвильового типу. Чвертьхвильовий тип коаксіального резонатора реалізують

створенням між центральним провідником і однією із закорочуючих стінок проміжку величиною Δl , значно меншою λ , що призводить до виникнення області з підвищеною напруженістю електричного поля, дія якої еквівалентна конденсатору.

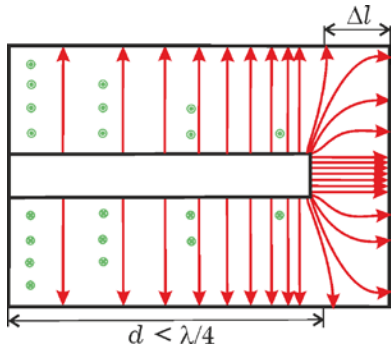


Рис. 6.10. Конструкція чвертьхвильового коаксіального резонатора

Таким чином, для отримання коливальної системи потрібно, щоб короткозамкнений відрізок коаксіальної лінії мав індуктивний характер, що можливо за його довжини, меншій за $\lambda / 4$ (рис. 6.10.). Слід зазначити, що зменшення геометричних розмірів - довжини коаксіального резонатора - призводить до погіршення найважливішого параметра коливальних систем - добротності.

Квазізосереджені резонатори. У техніці НВЧ знаходять застосування порожнисті резонатори, для яких так саме, як і для коливальних контурів, характерним є просторовий розподіл електричного і магнітного поля. До такого типу - квазізосередженого - відносять, наприклад, резонатори, вживані у клістріні (рис. 6.11.) і магнетроні (рис. 6.12.).

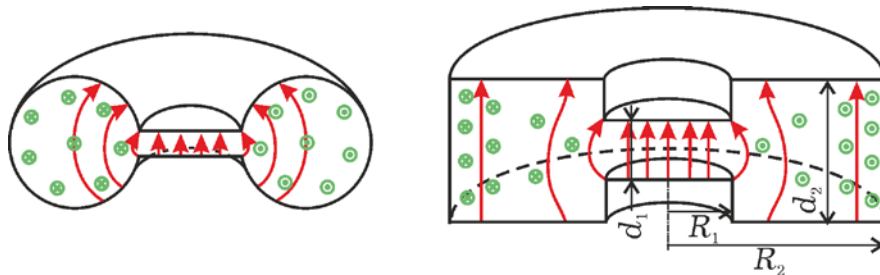


Рис. 6.11. Квазізосереджений тороїдальний резонатор.

У квазізосереджених резонаторах електричне поле зосереджене у вузьких ($d \ll \lambda$) квазістаціонарних проміжках, а магнітне - в прилеглому об'ємі конструкції, що забезпечує необхідну взаємодію їх з електронним потоком, покладену в основу принципу дії НВЧ приладу. У такому разі проміжок можна розглядати як ємнісний елемент коливального контура із зосередженим

параметром $C_{\text{екв}}$, а примикаючу порожнину – як індуктивний елемент $L_{\text{екв}}$. Значення резонансної частоти квазістаціонарного резонатора за відомих величин $C_{\text{екв}}$ і $L_{\text{екв}}$ може бути розраховане за формулою, що відповідає коливальному контуру із зосередженими параметрами.

Вказаний підхід для аналізу тороїдального резонатора (рис. 6.11.) дозволяє оцінити параметри еквівалентних реактивних компонентів. Розрахункові співвідношення еквівалентної ємності, отриманої на основі формули для плоского конденсатора

$$C_{\text{екв}} = \frac{\epsilon_0 S}{d_1} = \frac{\epsilon_0 \pi R_1^2}{d_1}$$

і еквівалентної індуктивності

$$L_{\text{екв}} = \frac{\Phi}{I} = \frac{\int_{S_{\perp}} B dS}{I} = \frac{\mu_0 d_2}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

дозволяють отримати формулу для резонансної частоти

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2d_2}{\epsilon_0 \mu_0 d_2 R_1^2 \ln \frac{R_2}{R_1}}}$$

Аналогічний прийом дозволяє отримати розрахункове співвідношення резонансної частоти магнетронного резонатора, відмітною особливістю якого є наявність декількох ідентичних (рис. 6.12, а) або різних (рис. 6.12, б) коливальних систем.

Резонатор біжучої хвилі, є замкненим кільцеподібним відрізком прямокутного хвилеводу, довжина якого кратна цілому числу довжин хвиль у даному хвилеводі (рис. 6.13.). На відміну від розглянутих вище коливальних систем, для яких характерне утворення стоячої хвилі електромагнітного поля, особливістю цього типу резонаторів, являється здійснення резонансу в режимі хвилі, що біжить. Для збудження коливань у такому резонаторі його приєднують до іншого хвилеводу за допомогою спрямованого відгалужувача, отвори зв'язку в якому розташовані на відстанях у

чверть довжини хвилі так, щоб збуджувана в резонаторі хвиля мала циклічне поширення. За допомогою таких пристроїв можна добитися фільтрації хвиль з певними частотами в прямокутному хвилеводі.

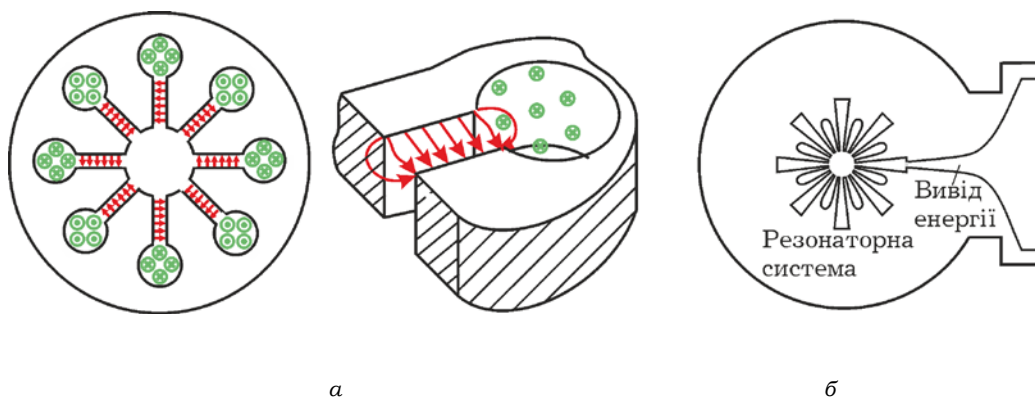


Рис. 6.12. Квазісфереджені резонатори магнетронного типу

Відкриті резонатори. У НВЧ, КВЧ і оптичному діапазоні знаходять застосування так звані відкриті резонатори (типу Фабрі-Перо), відмітною ознакою яких є відсутність замкненої металевої оболонки.

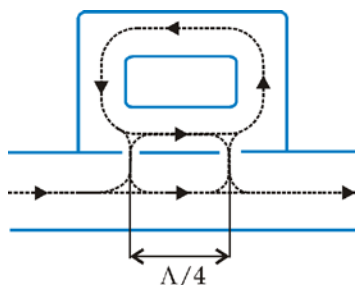


Рис. 6.13. Схема конструкції резонатора хвилі, що біжить

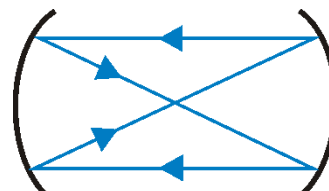


Рис. 6.14. Схематична конструкція відкритого резонатора типу Фабрі-Перо

У простому випадку відкритий резонатор (рис. 6.14.) складається з двох плоских або параболічно зігнутих ідеально відзеркалювальних поверхонь (дзеркал). У разі правильного підбору кривизни поверхонь і відстані між ними хвиля при багатократному віддзеркаленні може потрапити в точку початкового поширення у фазі, що відповідає умові виникнення резонансу. У міру зростання власних частот для об'ємних резонаторів характерний ефект згущування спектру, тоді як спектр відкритого резонатора є значно

«розрідженим» через відсутність утворення мод у поперечних напрямках. Вказана властивість відкритих резонаторів, незважаючи на можливість випромінювання енергії в навколишній простір, робить їх незамінними елементами для ряду застосувань; головним чином, у лазерній техніці.

Діелектричні резонатори - перспективні коливальні системи відкритого типу або екрановані реалізують на основі діелектриків з

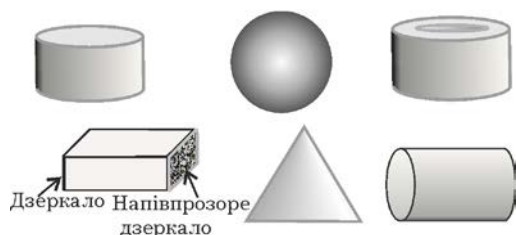


Рис. 6.15. Деякі форми діелектричних резонаторів.

високою проникністю, надаючи йому форми циліндра, паралелепіпеда, сфери, призми, і так далі (рис. 6.15.) Явище повного внутрішнього відбивання, що лежить в основі принципу дії вказаних резонаторів, призводить до локалізації електромагнітної хвилі усередині об'єму і згасання за межами діелектрика.

Найбільше застосування діелектричні резонатори отримали у лазерній техніці, фотоніці.

6.4. ДОБРОТНІСТЬ РЕЗОНАТОРІВ

6.4.1. Визначення добротності

Якість резонаторів характеризують добротністю - параметром, що визначає ширину смуги частот, в якій спостерігається резонанс

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}$$

Ширину смуги резонансу (пропускання) $\Delta\omega$ прийнято визначати із залежності амплітуди коливань від частоти (рис. 6.16) на рівні $1/\sqrt{2} \approx 0,707$ від максимальної амплітуди, спостережуваної на власній частоті резонатора ω_0 . У цьому разі енергія, зосереджена в резонаторі, зменшується вдвічі. Як видно з рис. 6.16., чим вужча смуга пропускання $\Delta\omega$, тим яскравіше виражені вибіркові

властивості коливальної системи і вища величина добротності резонатора.

Таке визначення добротності резонатора зазвичай використовують у теорії електронних кіл, схемотехніці. Інша форма - енергетична - визначення цього параметра, яка відображує його фізичний зміст, є універсальною і застосовується у дослідженні резонаторів методами теорії поля.

Якщо запасену в резонаторі енергію позначити W_3 , а енергію втрат за один період W_{π}^T , то добротність резонатора прямо пропорційна (з коефіцієнтом 2π) відношенню енергії, запасеної в резонаторі, до енергії втрат за один період коливань :

$$Q = 2\pi \frac{W_3}{W_{\pi}^T}. \quad (6.10)$$

Ця форма представлення найважливішого параметра резонаторів дозволяє трактувати добротність як характеристику, що відображує кількість коливань, яка здійснює резонатор до того, як станеться їх загасання.

Таким чином, величина Q залежить від співвідношення енергій: запасеної в резонаторі і енергії втрат. Якщо в (6.10) енергію втрат за один період коливань W_{π}^T виразити через величину потужності втрат в резонаторі P_{π}

$$W_{\pi}^T = P_{\pi} T,$$

то

$$Q = 2\pi \frac{W_3}{P_{\pi} T} = \frac{2\pi}{T} \frac{W_3}{P_{\pi}} = \omega_0 \frac{W_3}{P_{\pi}}. \quad (6.11)$$

Потужність втрат, у загальному випадку викликаних різними чинниками, можна розділити на дві групи:

- внутрішні втрати резонатора;

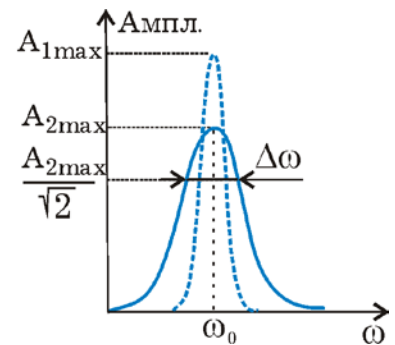


Рис. 6.16. Графік резонансної залежності

- зовнішні втрати.

Тоді з урахуванням того, що

$$P_{\Pi} = P_{\text{вн}} + P_{\text{зовн}},$$

співвідношення для добротності резонатора запишемо у наступному вигляді:

$$\frac{1}{Q_{\text{н}}} = \frac{P_{\Pi}}{\omega_0 W_3} = \frac{P_{\text{вн}} + P_{\text{зовн}}}{\omega_0 W_3} = \frac{P_{\text{вн}}}{\omega_0 W_3} + \frac{P_{\text{зовн}}}{\omega_0 W_3} = \frac{1}{Q_{\text{вн}}} + \frac{1}{Q_{\text{зовн}}}. \quad (6.12)$$

У цьому записі $Q_{\text{н}}$ є добротністю резонатора за умови впливу зовнішніх чинників, визначуваних взаємодією коливальної системи з навколишнім простором, включаючи зовнішні пристрої кіл зв'язку. Найчастіше на резонатор впливає навантаження (наприклад, хвилевід). Тоді $Q_{\text{н}}$ називають *навантаженою добротністю* резонатора. Як видно з (6.12), величина $Q_{\text{н}}$ складається з *власної добротності* резонатора $Q_0 = Q_{\text{вн}}$ і добротності навантаження $Q_{\text{зовн}}$. Перетворимо останній вираз

$$\frac{1}{Q_{\text{н}}} = \frac{1}{Q_0} + \frac{1}{Q_{\text{зовн}}} = \frac{1}{Q_0} \left(1 + \frac{Q_0}{Q_{\text{зовн}}} \right) = \frac{1}{Q_0} \left(1 + \frac{P_{\text{зовн}}}{P_{\text{вн}}} \right) = \frac{1}{Q_0} (1 + \beta_{\text{зв}}).$$

Коефіцієнт $\beta_{\text{зв}}$ називають коефіцієнтом зв'язку, який визначає вплив навантаження на резонатор, це міра зв'язку резонатора з навантаженням, яка виражає долю потужності зовнішніх втрат $P_{\text{зовн}}$ по відношенню до потужності втрат безпосередньо усередині резонатора $P_{\text{вн}}$. Знаючи коефіцієнт зв'язку і власну (ненавантажену) добротність резонатора можна визначити навантажену добротність:

$$Q_{\text{н}} = \frac{Q_0}{1 + \beta_{\text{зв}}}.$$

Коефіцієнт зв'язку завжди більший за нуль, отже, навантажена добротність резонатора менша власної добротності. Значить, наявність навантаження зменшує добротність резонатора,

причому, чим більша величина коефіцієнта зв'язку, тим навантаження буде краще «відчувати» поле резонатора, знижуючи його добротність.

6.4.2. Згасання енергії резонатора

Для оцінки швидкості згасання запасеної енергії розглянемо ізольовану від зовнішнього середовища коливальну систему, тобто за відсутності потоків енергії усередину і назовні резонатора. Даній системі відповідає рівняння балансу електромагнітної енергії в інтегральній формі:

$$\frac{d}{dt} \int_V (w_E + w_H) dV + \int_V \mathbf{j} \mathbf{E} dV = 0. \quad (6.13)$$

Інтеграл $\int_V (w_E + w_H) dV$ описує запасену в резонаторі енергію W_3 (електричного $w_E = \epsilon \epsilon_0 E^2 / 2$ і магнітного поля $w_H = \mu \mu_0 H^2 / 2$), а $\int_V \mathbf{j} \mathbf{E} dV = 0$ - потужність втрат P_{π} . Перепишемо рівняння балансу енергії у наступному вигляді:

$$\frac{d}{dt} W_3 + P_{\pi} = 0.$$

Виражаючи потужність втрат P_{π} з (6.11) через параметр добротності резонатора

$$P_{\pi} = W_3 \frac{\omega_0}{Q},$$

отримаємо диференціальне рівняння відносно запасеної у резонаторі енергії :

$$\frac{d}{dt} W_3 + \frac{\omega_0}{Q} W_3 = 0. \quad (6.14)$$

Позначивши $\tau_w = Q/\omega_0$, розв'язок рівняння (6.14) отримаємо у вигляді

$$W_s(t) = W_s(0) e^{-t/\tau_w}. \quad (6.15)$$

З (6.15) витікає, що електромагнітна енергія, запасена резонатором в початковий момент часу $W_s(0)$, спадає за експоненціальним законом. Величина τ_w , звана сталою часу загасання енергії, характеризує тривалість часу, впродовж якого енергія резонатора зменшується в $e \approx 2,71$ раз (рис. 6.17.).

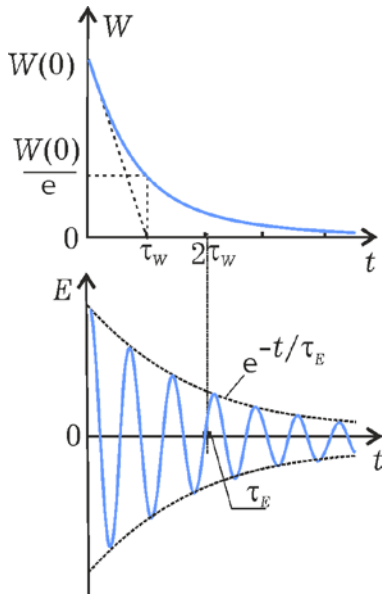


Рис. 6.17. Процес загасання енергії W і амплітуди поля у резонаторі.

Отриманий результат дозволяє представити формулу добротності резонатора у вигляді

$$Q = \tau_w \omega_0,$$

що розкриває фізичний зміст цього параметра: кількість радіанів коливань, спостережуваних у резонаторі за час, коли їх енергія зменшується в 2,7 разів. Оскільки можна вважати, що енергія коливань стане рівною нулю за час $(3...5)\tau_w$, то Q є характеристикою тривалості коливань («дзвону» резонатора).

Враховуючи, що енергія поля пропорційна квадрату амплітуди напруженості електричного (магнітного) поля - $W \sim E^2$ (H^2) - отримаємо співвідношення

$$E_m = E_m(0) e^{-\frac{t}{2\tau_w}}$$

$$H_m = H_m(0) e^{-\frac{t}{2\tau_w}}.$$

Отже, амплітуди полів власних коливань резонатора, що описуються гармонійними функціями, спадають за експоненціальними залежностями

$$E(t) = E_m(0) \begin{matrix} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \end{matrix} \cdot e^{-\frac{t}{\tau_E}};$$

$$H_m = H_m(0) \frac{\sin(\omega t)}{\cos(\omega t)} \cdot e^{-\frac{t}{\tau_H}}$$

з постійними часу згасання амплітуд коливань поля τ_E, τ_H , що удвічі перевищують сталу часу згасання енергії τ_W (рис. 6.17.).

$$\tau_E = \tau_H = 2\tau_W.$$

Відповідно до (6.16), за відомих значень сталих часу згасання амплітуди коливань і власної частоти резонатора ω_0 неважко визначити добротність резонатора

$$Q = 0,5\tau_E\omega_0 = 0,5\tau_H\omega_0.$$

6.4.3. Розрахунок добротності резонатора

У середині самого резонатора мають місце два види втрат:

- втрати в стінках $P_{ст}$ резонатора,
- втрати в діелектрику, що заповнює резонатор P_d

$$P_{внут} = P_d + P_{ст}.$$

Тоді власну добротність резонатора Q_0 можна представити у такому вигляді:

$$\frac{1}{Q_0} = \frac{P_{ст} + P_d}{\omega_0 W_3} = \frac{P_{ст}}{\omega_0 W_3} + \frac{P_d}{\omega_0 W_3} = \frac{1}{Q_{ст}} + \frac{1}{Q_d}.$$

Потужність втрат у металі визначається співвідношенням (див. п. 4.3.5) :

$$P_{ст} = \frac{1}{2\sigma\Delta} \int_S |H_\tau|^2 dS,$$

де σ - провідність металу стінок резонатора, $\Delta = \sqrt{\frac{2}{\omega_0 \sigma \mu_0}}$ - товщина скін-шару, в якому умовно зосереджений увесь поверхневий струм. Враховуючи, що в резонаторі з часом

відбувається коливальний процес безперервного перетворення (перекачування) енергії магнітного поля в енергію електричного поля і назад, розглянемо момент часу, для якого запасена в електричному полі енергія дорівнює нулю. У такому разі запасена в резонаторі енергія визначатиметься максимальним значенням енергії магнітного поля:

$$W_3 = \int_V \frac{\mu\mu_0 H_m^2}{2} dV.$$

Тоді для часткової добротності Q_{ct} отримаємо

$$Q_{ct} = \frac{\omega_0 W_3}{P_{ct}} = \frac{\omega_0 \int_V \frac{\mu\mu_0 H_m^2}{2} dV}{\frac{1}{2\sigma\Delta} \operatorname{Re} \int_S \dot{H}_\tau^2 dS} = \frac{\frac{\omega_0 \mu\mu_0}{2} \int_V |H|^2 dV}{\frac{1}{2\sigma\Delta} \int_S |H_\tau|^2 dS} = \frac{\sigma\Delta\omega_0 \mu\mu_0 \int_V |H|^2 dV}{\int_S |H_\tau|^2 dS}.$$

Відношення вказаних інтегралів залежить від структури полів резонансної моди, розмірів і форми резонатора. Але для прямокутного резонатора і деяких інших систем, враховуючи, що під знаками інтегралів стоять значення напруженостей магнітного поля одного порядку, його наближено можна замінити відношенням об'єму резонатора до площі його внутрішньої поверхні:

$$Q_{ct} \approx \frac{V}{S\Delta}. \quad (6.17)$$

Тут стоїть відношення об'єму порожнини, де накопичується енергія поля, до об'єму приповерхневого шару, де вона втрачається. З (6.17) можна також зробити висновок: за однакового об'єму резонаторів, найбільшу добротність має резонатор з найменшою внутрішньою поверхнею, тобто сферичний резонатор.

Визначимо часткову добротність, що визначається втратами у діелектрику Q_d . Оскільки ці втрати викликані струмами провідності, то відповідно до третього доданку в рівнянні балансу електромагнітної енергії (6.13) запишемо

$$P_d = \frac{\sigma}{2} \int_V E_m^2 dV.$$

Запасену в резонаторі енергію представимо через максимальну енергію електричного поля (коли енергія магнітного поля дорівнює нулю) :

$$W_s = \int_V \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E_m^2}{2} dV.$$

Тоді часткова добротність Q_d буде рівною

$$Q_d = \frac{\omega_0 W_s}{P_d} = \frac{\omega_0 \int_V \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E_m^2}{2} dV}{\frac{\sigma}{2} \int_V E_m^2 dV} = \frac{\omega_0 \varepsilon\varepsilon_0 \int_V |E|^2 dV}{\frac{\sigma}{2} \int_V |E|^2 dV} = \frac{\omega_0 \varepsilon\varepsilon_0}{\sigma} = \frac{1}{\operatorname{tg} \delta}.$$

Таким чином, часткова добротність Q_d резонатора, яка визначається втратами у діелектрику, обернено пропорційна до тангенса кута діелектричних втрат $\operatorname{tg} \delta$. Тоді власну добротність резонатора можна знайти із наступного співвідношення:

$$\frac{1}{Q_0} = \frac{1}{Q_m} + \frac{1}{Q_d} = \frac{\int_S |H_\tau|^2 dS}{\sigma \Delta \omega_0 \mu \mu_0 \int_V |H|^2 dV} + \operatorname{tg} \delta.$$

Як видно, у разі ідеального металу ($\sigma \rightarrow \infty$) і ідеального діелектрика ($\operatorname{tg} \delta = 0$) величина власної добротності резонатора прямує до нескінченності, тобто в резонаторі, як замкнутій системі, незгасаючі вільні коливання енергії можуть тривати скільки завгодно довго. Проте у реальних резонаторах, що характеризуються високим значенням (десятки тисяч) добротності, наявність втрат призводить до досить швидкого згасання запасеної енергії. Так, приміром, зменшення запасеної енергії в 100 (1000) разів у високодобротному об'ємному резонаторі з $Q = 10^5$ на частоті $f_0 = 1$ ГГц станеться за час

$$t = 0,159 \frac{Q}{f_0} \ln \left(\frac{W_3(t)}{W_3(0)} \right)$$

порядку десятих долей мілісекунд. Для підтримки незгасаючих коливань резонансній системі потрібна енергія стороннього джерела. Окрім компенсації енергії втрат, його дія призводить до переходу від режиму вільних коливань до режиму вимушених коливань, за якого частота електромагнітних коливань у резонаторі співпадає з частотою стороннього джерела.

6.5. ЗБУДЖЕННЯ ХВИЛЕВОДІВ І РЕЗОНАТОРІВ

Термін «збудження хвилеводу» означає створення в ньому електромагнітного поля заданої моди. Введено в п. 1.4 поняття сторонніх джерел (струму або напруги) описує одну з необхідних умов збудження електромагнітної хвилі у хвилеводі або резонаторі. Так, наприклад, задача збудження електромагнітних полів у хвилеводі вимагає розв'язку вже неоднорідного хвильового рівняння

$$\nabla^2 \dot{F} + k^2 \dot{F} = -j_{\text{ст}}$$

з урахуванням граничних умов на його стінках. Не розглядаючи теоретичного дослідження задачі збудження електромагнітної хвилі, розглянемо лише її практичну реалізацію, а саме можливі способи передачі енергії електромагнітної хвилі від стороннього джерела (генератора) до того чи іншого хвилеводу або резонатора.

Найпоширенішими є три способи збудження хвилі:

- штирем (електричний диполь): збуджується змінне електричне поле, яке в свою чергу породжує змінне магнітне поле;
- петлею зв'язку (магнітний диполь): збуджується змінне магнітне поле, яке у свою чергу породжує змінне електричне поле;
- отвором або щілиною (комбінований): збуджується змінне електричне або магнітне поле.

В основі дії зазначених способів збудження покладено створення у хвилеводі або резонаторі хоча б «однієї силової лінії» електричного або магнітного поля, конфігурація якого відповідає структурі поля необхідної моди.

Електричний збудник конструктивно являє собою коаксіальний хвилевід, центральний провідник (штир) якого довший зовнішнього. Розміщують штир в області максимальної напруженості електричного поля збуджуваної моди, просторово орієнтуючи його уздовж силових ліній. Приклади електричного способу збудження деяких мод представлені на рис. 6.18.

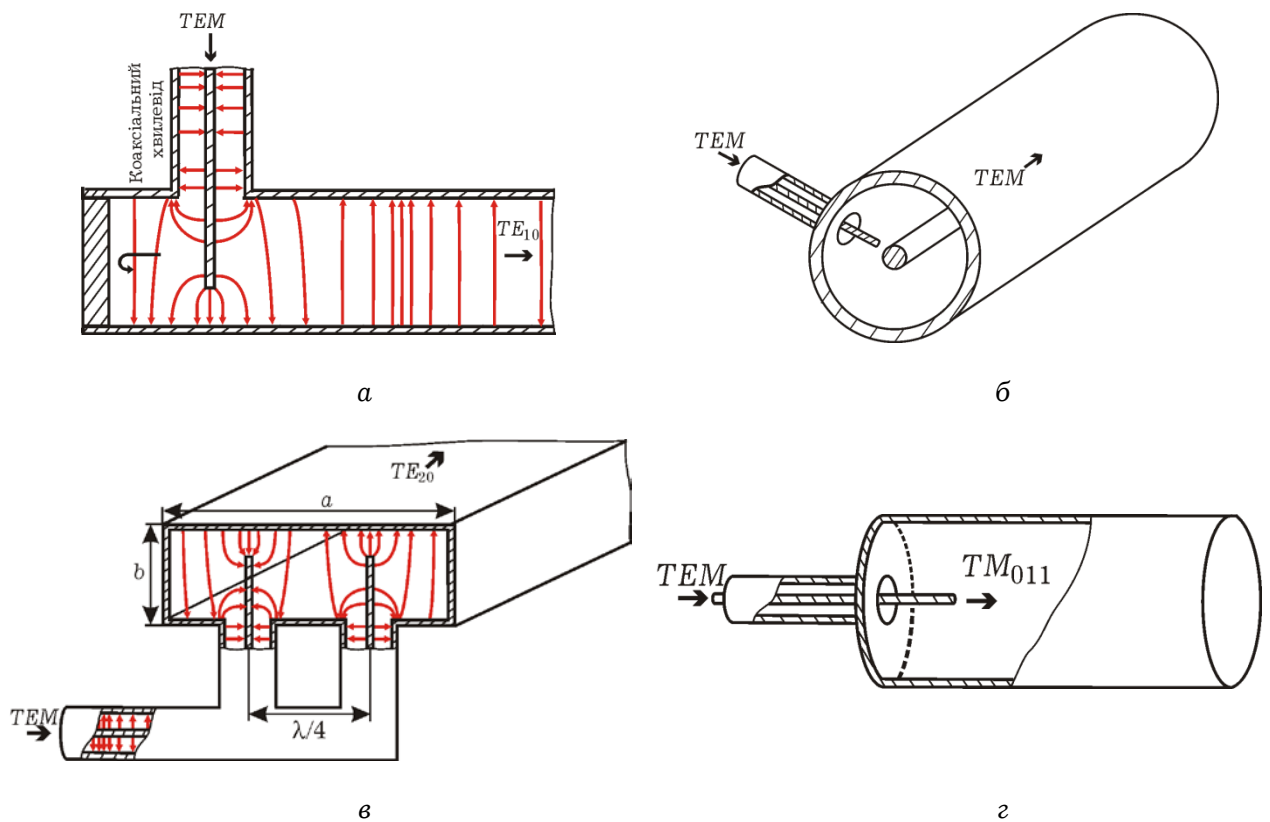


Рис. 6.18. Приклади електричного способу збудження хвилеводних мод у прямокутному хвилеводі (а, в); коаксіальному хвилеводі (б); круглому резонаторі (г)

Для збудження у прямокутному хвилеводі основної моди штир вводять у порожнину хвилеводу через його широкую стінку. Перенесення високочастотного поля від зовнішнього джерела (генератора) на основній моді коаксіальної лінії призводить до виникнення між штирем і стінками хвилеводу змінного електричного поля, яке в свою чергу породжує змінне магнітне поле. У такому

разі конфігурація полів у ближній зоні збудника буде досить складною, але її можна подати як суперпозицію полів тих вищих TE - і TM -мод, структурі яких характерний максимум напруженості електричного поля посеред широкої стінки хвилеводу (TE_{10} , TE_{30} , TE_{11} , TM_{11} та ін). Зазначене розташування електричного збудника виключає формування мод, в структурі яких для $x = a/2$ відсутня електрична компонента, і які позначаються парним значенням m (TE_{20} , TM_{21} , TE_{40} , TM_{41} , тощо). Підбором геометричних розмірів хвилеводу для вищих мод може бути створений режим відсічення. Збуджені у хвилеводі моди поширюються в обидва боки від збудника. Для придушення поширення моди уздовж небажаного напрямку застосовують

- узгоджене навантаження (поглинач);
- короткозамкнений відрізок хвилеводу (відбивач, шлейф).

Останній іноді реалізують за допомогою рухомого металевого поршня, положенням якого забезпечується узгодження джерела НВЧ коливань з навантаженням.

Залежно від розміщення штиря на стінці прямокутного хвилеводу можна домогтися збудження як хвиль TE_{10} , TE_{30} , TE_{50} ..., так і хвиль TE_{20} , TE_{40} , TE_{60} , ... У першому випадку поле у хвилеводі симетричне, отже збудник має знаходитися посередині широкої стінки. В іншому розподіл поля непарний, отже, необхідно два збудника, які розташовані симетрично відносно широкої стінки і «коливаються» у протифазі. Необхідна різниця фаз може бути забезпечена затримкою сигналу від джерела за рахунок різниці ходу хвилі в коаксіальному хвилеводі. На рис. 6.18, в це схематично зображено включенням півхвильового відрізка коаксіального хвилеводу.

Магнітний збудник конструктивно являє собою коаксіальний хвилевід, центральний провідник якого загнутий у вигляді петлі зв'язку (індуктивного витка). Розміщують петлю зв'язку в області максимальної напруженості магнітного поля збуджуваної моди, орієнтуючи площину петлі перпендикулярно до його силових ліній. У такому разі струм, що протікає по витку, створює змінне магнітне поле, просторовий розподіл якого збігається з конфігурацією магнітної компоненти збуджуваної моди. За такого способу збудження електромагнітної хвилі у ближній зоні петлі зв'язку поле також являє суперпозицію різних мод, згасанням або поширенням

яких можна управляти підбором геометричних розмірів збуджуваних направляючих систем або резонаторів.

Приклад магнітного способу збудження представлено на рис. 6.19. У разі магнітного способу збудження основної моди у прямокутному хвилеводі петля зв'язку коаксіального хвилеводу має бути закорочена на його вузьку стінку.

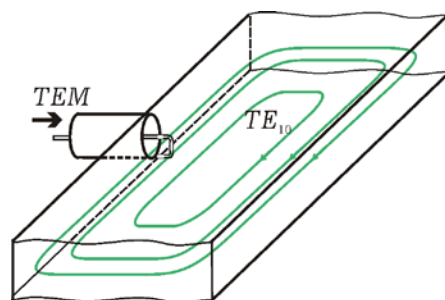


Рис. 6.19. Приклад магнітного способу збудження основної моди у прямокутному хвилеводі

Комбінований спосіб збудження електромагнітної хвилі реалізується за допомогою отвору зв'язку або щілини у спільній стінці збуджуючої та збуджуваної системи. Вибір геометричних розмірів і положення щілини визначають її властивість (випромінююча чи не випромінююча), а також структуру поля, потужність і поляризацію збуджуваної моди. Головна вимога для передачі електромагнітної енергії з однієї системи в іншу: щілина повинна переривати лінії струмів, що протікають по поверхні стінки (рис. 6.20, а).

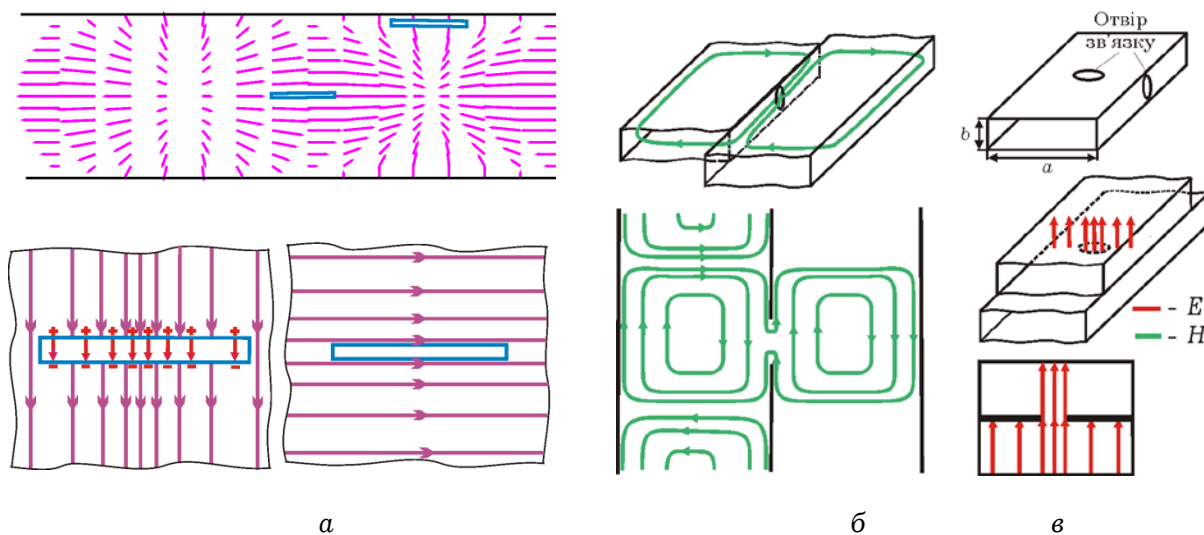


Рис. 6.20. Приклади комбінованого способу збудження хвилеводних мод у прямокутному хвилеводі

У такому разі струм, що притікає до щілини, призводить до накопичення на одній її стороні додатних зарядів, а на іншій до наведення від'ємного заряду такої ж величини, тобто створюється

власне електричне поле щілини, яке сприяє перевипромінюванню енергії поля з області збудження у простір збуджуваної системи (хвилевід, резонатор). Паралельна, яка не перетинає лінії поверхневих струмів, щілина практично не випромінює електромагнітного поля. Це пов'язано з тим, що мала ширина щілини буде приводити до наведення істотно меншого заряду, і як наслідок, малої потужності власного поля щілини. Невипромінюючі щілини застосовують для включення в НВЧ тракт вимірювальних пристроїв (наприклад, зонда вимірювальної лінії).

Розташування отвору зв'язку, як і в випадку щілини, дозволяє збуджувати необхідний тип коливань. Збудження за допомогою отвору можна уявити як «проникнення» хвилі з системи збудження у збуджувану область. Наприклад, при розміщенні отвору зв'язку на вузькій стінці прямокутного хвилеводу (рис. 6.20, б) збудження електромагнітної хвилі здійснюється за рахунок проникнення магнітного поля. Розміщення отвору на широкій стінці хвилеводу (рис. 6.20, в) викликає збудження за рахунок проникнення електричного поля. Взаємодія цих двох збуджуваних хвиль залежить від розмірів отвору і його місцезнаходження на широкій стінці та кута між осями хвилеводу.

Для збудження хвиль у смужкових хвилеводах (рис. 6.21) також використовують електричний збудник. Зокрема, у двозв'язних смужкових хвилеводах для збудження *TEM*-хвилі можна безпосередньо приєднати провідники хвилеводу до провідників коаксіального хвилеводу, від якого відбувається збудження.

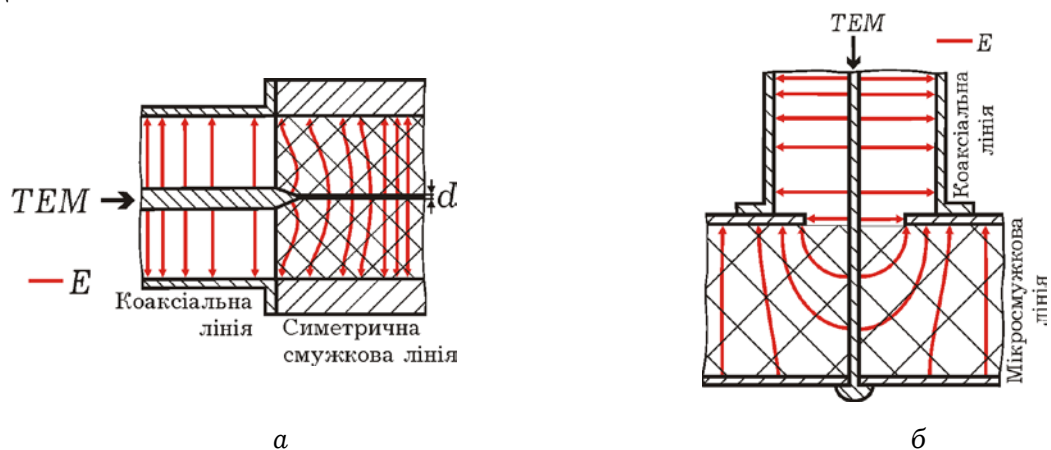


Рис. 6.21. Контактний спосіб збудження симетричної смужкової лінії (а) та несиметричної смужкової лінії через отвір у підкладці (б)

Слід зазначити, що розглянуті вище способи збудження хвилі у хвилеводі не є спрямованими, оскільки у хвилеводі виникають відразу дві хвилі, які поширюються в обидва боки. Отримати спрямоване збудження або відгалуження хвилі можна за допомогою використання двох отворів зв'язку, розташованих на відстані $\Lambda/4$ один від одного (рис 6.22, а). Утворені у збуджуваному хвилеводі дві зворотні хвилі з різницею ходу $\Lambda/2$ у результаті суперпозиції гасять одна одну, а дві інші накладаються у фазі і поширюються у вигляді падаючої хвилі. Однак даний тип відгалужувача є вузькосмуговим, тому що відстань між щілинами пов'язано з певною довжиною хвилі у хвилеводі. Застосування декількох послідовно розташованих щілин (рис 6.22, б) певних конфігурацій дозволяє розширити діапазон частот такого спрямованого відгалужувача електромагнітної енергії.

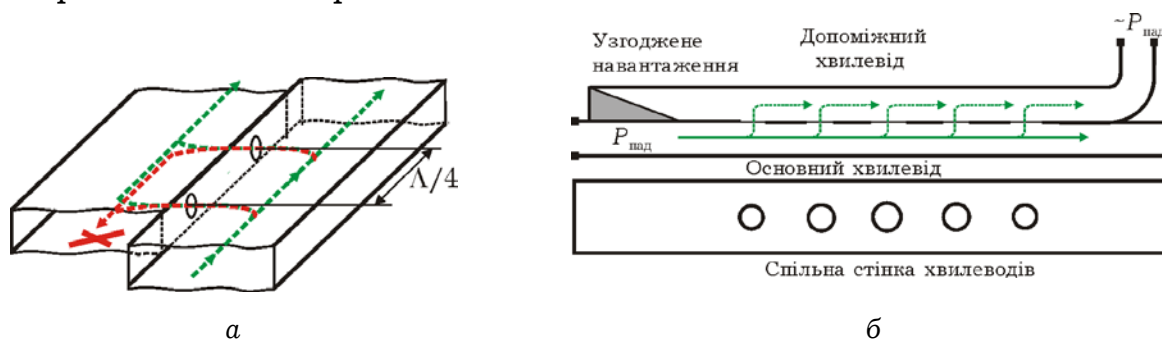


Рис. 6.22. Направлений відгалужувач: а – інтерференція хвиль, що пройшли у допоміжний хвилевод, б – спосіб розширення частотного діапазону та підвищення направленості

Засобом збудження електромагнітних хвиль можуть служити також:

- електронний потік (наприклад, збудження резонаторів у клістронах) (рис. 6.23, а);
- хвилеводний перехід - хвилевід змінного перерізу; трансформує структуру поля при плавній зміні співвідношення розмірів і форми перерізу хвилеводу (рис. 6.23, б);
- перехідники різних типів; служать для збудження направляючої системи іншого типу (наприклад, хвилеводно-мікросмужковий перехід, рис. 6.21);
- ступінчасті переходи з одного розміру хвилевода на інший.

Останні являють собою відрізки хвилеводів довжиною у чверть довжини хвилі (чвертьхвильові трансформатори). Їх хвильові опори

розраховують таким чином, щоб відбиті від з'єднань хвилі гасились. Один з варіантів подібної інтерференції розглянуто у п. 4.2, де коефіцієнти відбивання обирались пропорційними біноміальним коефіцієнтам. Більшу ширину смуги пропускання можна отримати, використовуючи поліноми Чебишева.

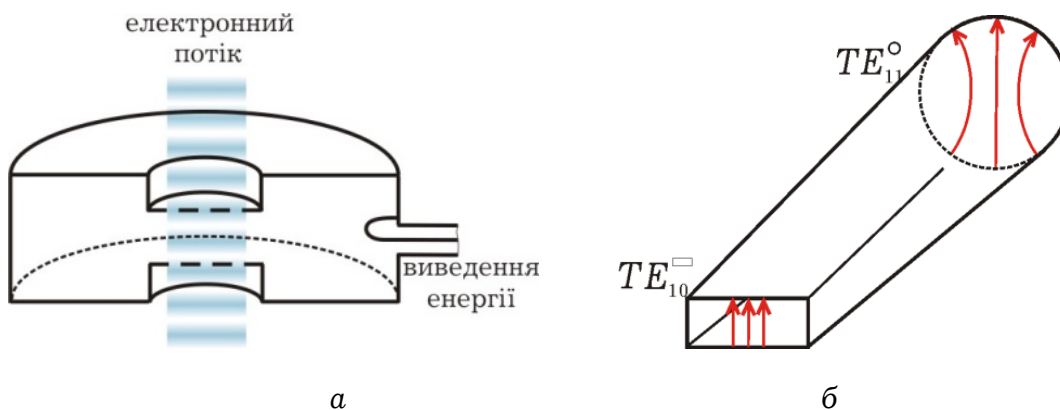


Рис. 6.23. Засоби збудження електромагнітних хвиль: електронним потоком (а); хвилеводний перехід з прямокутного хвилеводу на круглий (б)

Збудження електромагнітних хвиль оптичного діапазону. Існують три поширених способи збудження електромагнітних хвиль оптичного діапазону:

- торцевим стикуванням;
- призменним елементом (перехідною призмою);
- дифракційною решіткою (ґратчастим елементом зв'язку).

У торцевому способі введення (рис. 6.24, а) оптичного випромінювання (ОВ) поєднують торці джерела і світловода, зберігаючи зазор для налаштування максимальної ефективності передачі світла. Торцевий спосіб введення ОВ є найбільш простим, однак йому притаманні суттєві втрати потужності за рахунок відмінностей просторових параметрів потоку випромінювання на виході світловипромінювача і геометричних розмірів світловодного шару хвилеводу; ефекту віддзеркалення; наявності різних збуджуваних мод.

У світловоді збуджується та мода, структура поперечного розподілу полів якої відповідає збудженню ОВ. Для підвищення ефективності торцевого способу введення додатково застосовують

лінзу. Ефективність збудження максимальна у разі введенні ОВ під апертурним кутом $\theta = \arcsin \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$ (п. 5.2.6) .

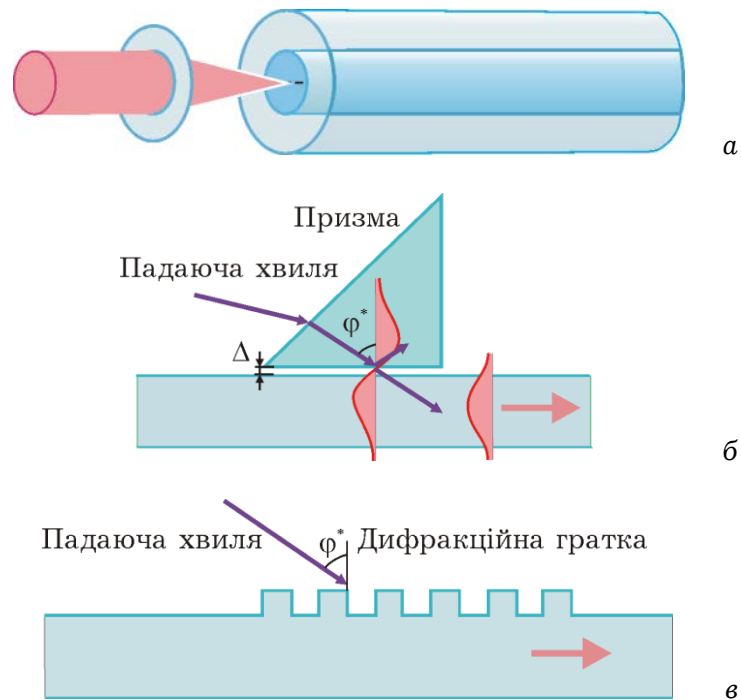


Рис. 6.22. Способи збудження електромагнітних хвиль оптичного діапазону: торцевим стикуванням (а); призмним елементом (б); ґратчастим елементом (в).

Оскільки хвиля у світловоді поширюється через повне внутрішнє відбивання, то безпосередньо «запустити» хвилю у світловод зі сторони бічної поверхні під потрібним кутом неможливо. Але це можна зробити, використовуючи призму (рис. 6.24, б). Промінь направляється під таким кутом на скошену поверхню призми, щоб після заломлення в ній попадав на нижній її край так, щоб відбувалося повне внутрішнє віддзеркалення. Однак за невеликої відстані (менше довжини хвилі) між поверхнею повного внутрішнього відбивання призми і поверхнею світловода, відбувається оптичне «тунелювання»; хвиля проникає у світловод і поширюється у ньому.

ґратчастий елемент зв'язку (рис. 6.24, в) конструктивно являє собою нанесені на поверхні хвилеводу «штрихи (гофри)» з кроком порядку довжини хвилі. Умовою збудження хвилеводної моди є кут падіння, для якого фазовий зсув між сусідніми «штрихами» кратний 2π . Довжина нижньої частини призмного і ґратчастого елемента

зв'язку повинні відповідати діаметру (ширині) пучка. Управління модою збуджуваної хвилі відбувається зміною кута падіння.

Відзначимо, що розглянуті пристрої введення електромагнітної енергії мають властивість взаємності, тобто їх можна застосовувати і для її виведення.

Контрольні питання та вправи до розділу

6.1. Що таке резонатор для НВЧ діапазону, які його конструктивні особливості, чим він відрізняється від коливального контуру?

6.2. Дайте визначення резонатора та сформулюйте умову резонансу, розглядаючи його як відрізок хвилеводу.

6.3. Наведіть конструктивні особливості найбільш вживаних різновидів резонаторів та зобразіть наближені ескізи конфігурації полів для основних мод.

6.4. Дайте визначення добротності резонатора, поясніть, від чого вона залежить та на які властивості резонатора вона впливає.

6.5. Чим відрізняється півхвильовий резонатор від чвертьхвильового за конструктивними ознаками та умовами резонансу?

6.6. Яка умова резонансу у півхвильовому резонаторі? Розрахувати довжину коаксіального резонатору для частот 1 ГГц, 5 ГГц, 10 Гц.

6.7. Яка умова резонансу у чвертьхвильовому резонаторі? Розрахувати довжину коаксіального резонатору для частот 1 ГГц, 5 ГГц, 10 ГГц.

6.8. Які основні принципи та способи збудження хвиль у хвилеводах та резонаторах?

6.9. Які наслідки слід очікувати від збудження електромагнітної хвилі у прямокутному хвилеводі зі зміною розташування електричного (магнітного, комбінованого) збудника на поверхні вузької (широкої) стінки ?

6.10. Які фактори впливають на потужність збуджуваної моди у направляючих лініях електромагнітного поля (на прикладі прямокутного чи круглого хвилеводу) ?

6.12. Запропонуйте способи збудження основної моди у циліндричному хвилеводі (резонаторі).

Д. МАТЕМАТИЧНА ТЕОРІЯ ПОЛЯ.

1. Скалярні та векторні поля

Скалярна величина V , яка приймає певні значення в кожній точці простору \mathbf{r} , називається скалярною функцією точки, або *скалярним полем* $V = V(\mathbf{r})$ (наприклад, поле температури, потенціалу і т. д.). Визначаючи точку \mathbf{r} її координатами, одержуємо вираз скалярного поля у вигляді функції трьох змінних обраної системи координат: у декартовій – $V(x, y, z)$, циліндричній – $V(r, \varphi, z)$ та сферичній – $V(r, \varphi, \theta)$.

Скалярне поле можна зображувати з допомогою поверхонь однакового рівня, які утворюються точками, для яких функція $V(\mathbf{r})$ має одне й те саме значення $V(\mathbf{r}) = \text{const}$. Надаючи константі різних значень, отримуємо сукупність таких поверхонь.

Для двовимірного поля, яке залежить тільки від двох змінних, наприклад, x та y , замість поверхні матимемо лінію постійного рівня (ізолінію). З рівняння $V(x, y) = \text{const}$ для різних значень константи можна отримати сімейство ізоліній, наприклад, лінії однакової температури (ізотерми), лінії постійного тиску (ізобари) або однакової висоти на географічних картах, лінії однакового потенціалу (ізопотенціалі або, частіше, екіпотенціалі), тощо. Звичайно, на цих лініях треба вказувати відповідні значення, які обирають з певним інтервалом (рис. Д.1).

Векторна функція \mathbf{E} , яка приймає у кожній точці простору певне значення, називається *векторним полем* $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r})$. Векторне поле можна визначити за допомогою трьох скалярних функцій від трьох координат. Наприклад, у декартовій системі координат

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{e}_x E_x(x, y, z) + \mathbf{e}_y E_y(x, y, z) + \mathbf{e}_z E_z(x, y, z),$$

де $\mathbf{e}_{x, y, z}$ – орти відповідних координатних осей.

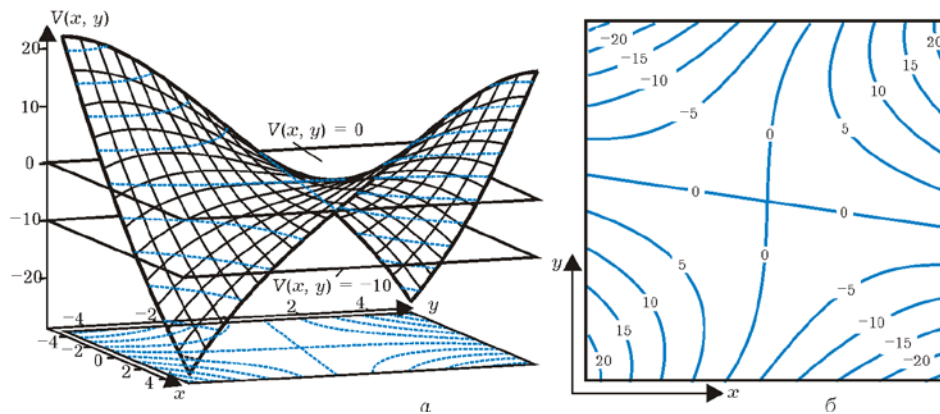


Рис. Д.1. Зображення двовимірного скалярного поля (а) у вигляді функції $V(x, y)$. Лінії її перетину з горизонтальними площинами утворюють лінії рівного рівня (штрихові). Їх сімейство, спроектоване на площину xy , утворює плоске зображення (б) поля з позначенням „висоти” рівня перетинаючої площини.

Векторні поля зображують за допомогою силових ліній (для силових полів), або ліній потоку (для полів швидкості, струму тощо) таким чином, щоб дотичні до них відповідали напрямку векторів, а їх щільність – значенню довжин векторів. Ці лінії задовольняють рівнянню

$$dx/E_x = dy/E_y = dz/E_z,$$

або для двовимірних полів $\mathbf{E}(x, y)$

$$dx/E_x = dy/E_y.$$

Побудова силових ліній потребує додаткових обчислювальних витрат для розв’язку диференціальних рівнянь, тому частіше використовують інший спосіб. Він полягає у побудові векторів поля для певної дискретної сукупності точок простору, як це зображено на рис. П.1.2.

2. Диференціальні оператори

У теорії поля звичайно використовують три види операторів, пов’язаних з операціями диференціювання по просторових координатах:

градієнт – оператор, що діє на скалярну функцію, а результатом є векторна функція – $\text{grad}f(\mathbf{r}) = \mathbf{A}(\mathbf{r})$;

дивергенція – оператор, результатом дії якого на векторну функцію є скалярна – $\text{div } \mathbf{A}(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r})$;

ротор (інакше *ротація* або *вихор*) – оператор, що діючи на векторну функцію утворює також векторну функцію – $\text{rot } \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mathbf{B}(\mathbf{r})$ (іноді позначають „curl”).

Градiєнтом скалярної функції V називають вектор, направлений по нормалі \mathbf{e}_n до поверхні постійного рівня функції V у бік її зростання і який чисельно дорівнює зміненню функції V в даній точці поля на одиницю довжини вздовж нормалі, тобто швидкості:

$$\text{grad } V = \mathbf{e}_n dV/dn.$$

Фізично градієнт характеризує максимальну просторову швидкість зміни функції V у даній точці поля. На рис. Д.2.

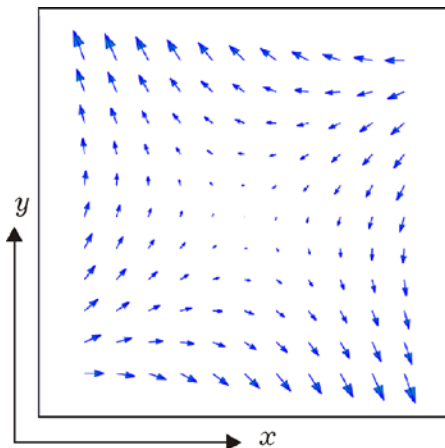


Рис. Д.2. Зображення двовимірного векторного поля у вигляді векторів поля, побудованих для обраного масиву точок простору.

зображено вектори, які є градієнтом функції $V(x, y)$, представленої на рис. Д.1.

Правила обчислення градієнта у декартовій системі (x, y, z)

$$\text{grad } V = \mathbf{e}_x \frac{\partial V}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial V}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial V}{\partial z},$$

у системі циліндричних координат (r, φ, z)

$$\text{grad } V = \mathbf{e}_r \frac{\partial V}{\partial r} + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \varphi} + \mathbf{e}_z \frac{\partial V}{\partial z},$$

у системі сферичних координат (r, φ, θ)

$$\text{grad } V = \mathbf{e}_r \frac{\partial V}{\partial r} + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \varphi} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta}.$$

Диференціал скалярного поля

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz = d\mathbf{n} \cdot \text{grad } V$$

Градiєнт від неявної функції

$$\text{grad } V(\varphi(\mathbf{r})) = (\partial V / \partial \varphi) \text{grad } \varphi(\mathbf{r})$$

В основі поняття дивергенції лежить поняття *поток* вектора $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ через поверхню. Він обчислюється таким чином: 1) поверхня S розбивається (рис. Д.3) на n малих („елементарних“) площадок dS_i , які вважаються плоскими, яким відповідають перпендикулярні до них вектори $d\mathbf{S}_i$ і в межах яких векторне поле можна вважати незмінним; 2) підраховується скалярний добуток $\mathbf{A}_i d\mathbf{S}_i$ для кожної площадки, тобто вектор \mathbf{A}_i проектується на напрям вектора $d\mathbf{S}_i$ і довжина проєкції помножується на dS_i з урахуванням знаку; 4) отримані таким чином для кожної площадки скалярні добутки підсумовуються; 5) робиться граничний перехід при $n \rightarrow \infty$ і $dS \rightarrow 0$:

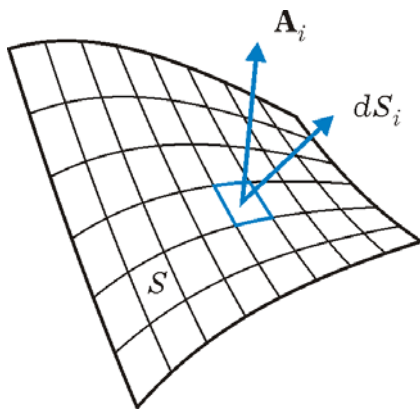


Рис. Д.3. До обчислення потоку вектора \mathbf{A} через поверхню S .

$$P = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \mathbf{A}_i d\mathbf{S}_i = \int_S \mathbf{A} d\mathbf{S}.$$

Отриманий інтеграл і називається потоком вектора $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ через поверхню S . Наприклад, якщо \mathbf{A} є вектором швидкості води, то P дорівнює її об'єму, що перетинає поверхню S за одиницю часу.

Дивергенція вектора \mathbf{A} є математична операція, здійснювана над векторною

функцією, яка визначається таким чином:

$$\text{div } \mathbf{A} = \lim_{\Delta V_r \rightarrow 0} \left(\oint_S \mathbf{A} d\mathbf{S} / \Delta V_r \right)$$

В чисельнику дробу стоїть інтеграл по замкненій поверхні S , що оточує елементарний об'єм ΔV_r , або потік вектора \mathbf{A} через замкнену поверхню. Граничним переходом елементарний об'єм стягується в точку. Таким чином, $\text{div}\mathbf{A}$ характеризує поле в точці. В залежності від взаємного напрямку вектора \mathbf{A} і нормалі до площі $d\mathbf{S}$ дивергенція може бути додатньою (якщо \mathbf{A} і $d\mathbf{S}$ утворюють гострий кут) або від'ємною (якщо кут тупий).

Щоб $\text{div}\mathbf{A}$ була відмінною від нуля, необхідно мати в об'ємі ΔV_r або джерело поля вектора \mathbf{A} (дивергенція додатня), або споживач цього поля (стік). В останньому випадку силові лінії \mathbf{A} направлені усередину об'єму ΔV_r ; $\text{div}\mathbf{A}$ – від'ємна.

Правила обчислення дивергенції у декартовій системі (x, y, z)

$$\text{div}\mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z},$$

у циліндричних координатах (r, φ, z)

$$\text{div}\mathbf{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}.$$

В основі поняття ротору лежить поняття *циркуляції* вектора $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ по деякій замкненій кривій l . Вона обчислюється таким чином: 1) крива розбивається довільним чином на n „елементарних” ділянок довжиною dl_i (рис. Д.4), які можна вважати прямими, кожній

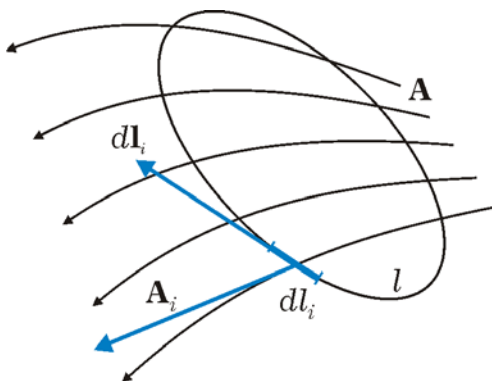


Рис. Д.4. До обчислення циркуляції вектора \mathbf{A} по контуру l .

з яких відповідає дотичний до неї вектор $d\mathbf{l}_i$ (з врахуванням напрямку обходу кривої), і такими, що в її межах вектор \mathbf{A}_i можна прийняти незмінним; 2) підраховується скалярний добуток $\mathbf{A}_i d\mathbf{l}_i$ для кожної ділянки, тобто вектор \mathbf{A}_i проектується на напрям вектора $d\mathbf{l}_i$ і довжина проєкції домножається на dl_i з урахуванням знаку; 4) отримані таким чином для кожної ділянки

скалярні добутки підсумовуються; 5) робиться граничний перехід при $n \rightarrow \infty$ і $dl \rightarrow 0$:

$$C = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \mathbf{A}_i d\mathbf{l}_i = \oint_l \mathbf{A} d\mathbf{l}.$$

Ротор вектора \mathbf{A} – математична операція, здійснювана над векторною функцією, яка визначається таким чином:

$$\text{rot } \mathbf{A} = \mathbf{e}_n \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \left(\oint_S \mathbf{A} d\mathbf{l} / \Delta S \right).$$

У чисельнику дробу стоїть інтеграл по замкненому контуру l , що обмежує елементарну площу ΔS , \mathbf{e}_n – одиничний вектор, нормальний до площадки ΔS . Граничним переходом елементарна площадка стягується в точку. При цьому на кожному кроці її зменшення напрям площадки встановлюється так, щоб дріб приймав максимальне значення. Таким чином, ротор характеризує поле в точці і являє собою вектор, орієнтований по нормалі до площі, вздовж границі якої здійснюється обхід в контурному інтегралі. Нормаль і напрям обходу зв'язані правилом правого гвинта: напрям обходу співпадає з рухом рукоятки, нормаль – з поступальним рухом гвинта. Якщо інтеграл по контуру дорівнює нулю, то і $\text{rot } \mathbf{A} = 0$. Поле, здатне створювати обертання турбіни, що міститься в ньому, має ротор.

Правила обчислення ротора:

у декартовій системі (x, y, z) :

$$\text{rot } \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \mathbf{e}_x \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \mathbf{e}_y \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \mathbf{e}_z \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right)$$

у циліндричній системі координат:

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{e}_r \left(\frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial H_\varphi}{\partial z} \right) + \mathbf{e}_\varphi \left(\frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r} \right) + \mathbf{e}_z \left(\frac{1}{r} \frac{\partial (r H_\varphi)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial H_r}{\partial \varphi} \right).$$

3. Оператори Гамільтона та Лапласа

Для скорочення запису при використанні диференціальних операторів іноді використовують оператор Гамільтона ∇ („набла”). Це оператор, який записується як символічний вектор

$$\nabla = \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z}.$$

З його застосуванням градієнт знаходиться як дія оператора на скалярну функцію – $\text{grad}V = \nabla V$, дивергенція як скалярний добуток оператора набла і векторної функції – $\nabla \mathbf{A} = \text{div} \mathbf{A}$, а ротор як їх векторний добуток – $\text{rot} \mathbf{A} = [\nabla \times \mathbf{A}]$.

Дворазове застосування оператора ∇ до скалярної функції приводить до оператора Лапласа (лапласіана):

$$\nabla(\nabla V) = \text{div}(\text{grad}V) = \nabla^2 V = \Delta V,$$

де $\nabla \nabla = \nabla^2$ або Δ — оператор Лапласа. Він обчислюється через другі похідні по координатах

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

(у декартових координатах);

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

(у циліндричних координатах).

4. Деякі тотожності

$$\nabla(\nabla \times \mathbf{A}) = \text{div}(\text{rot} \mathbf{A}) \equiv 0;$$

$$\nabla \times (\nabla V) = \text{rot}(\text{grad}V) \equiv 0$$

$$\text{rot}(\text{rot} \mathbf{A}) = \text{grad}(\text{div} \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A},$$

$$\text{div}[\mathbf{A} \times \mathbf{B}] = \mathbf{B} \text{rot} \mathbf{A} - \mathbf{A} \text{rot} \mathbf{B},$$

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(V\mathbf{A}) &= \mathbf{A}\operatorname{grad}V + V\operatorname{div}\mathbf{A}, \\ \operatorname{grad}(V\psi) &= V\operatorname{grad}\psi + \psi\operatorname{grad}V, \\ \operatorname{rot}(V\mathbf{A}) &= [\operatorname{grad}V \times \mathbf{A}] + V\operatorname{rot}\mathbf{A}.\end{aligned}$$

5. Основні інтегральні теореми

Теорема Остроградського-Гауса:

$$\oint_S \mathbf{A} d\mathbf{S} = \int_{V_r} \operatorname{div} \mathbf{A} dV_r$$

Скалярний потік поля \mathbf{A} крізь замкнену поверхню \mathbf{S} дорівнює інтегралу від дивергенції \mathbf{A} , розповсюдженому на об'єм V_r , який обмежений замкненою поверхнею \mathbf{S} (об'ємний інтеграл перетворюється в поверхневий).

Теорема Стокса:

$$\oint_l \mathbf{A} dl = \int_S \operatorname{rot} \mathbf{A} d\mathbf{S}.$$

Циркуляція векторного поля по замкненій кривій l дорівнює потоку ротора цього вектора крізь поверхню \mathbf{S} , обмежену контуром l (інтеграл по поверхні перетворюється в інтеграл по контуру).

Теорема Гріна:

$$\oint_S \operatorname{grad} V d\mathbf{S} = \int_{V_r} \nabla^2 V dV_r$$

Потік градієнта скалярної функції крізь замкнену поверхню дорівнює поверхневому інтегралу від результату дії лапласіана на цю функцію.

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Москалюк В. А. Теория поля : учеб. пособие / В. А. Москалюк. – Київ : НТУУ «КПІ», 2013. – 152 с.
2. Москалюк В. О. Теорія поля [Електронний ресурс] : консп. лекцій / В. О. Москалюк, Т. А. Саурова ; [НТУУ «КПІ», рекомендовано вченою радою ФЕМ, протокол № 05/15 від 25.05.2015 р.]. – Київ, 2015. – 198 с. – 12,4 п. л.
3. Москалюк В. О. Теорія поля : консп. лекцій / В.О. Москалюк, Т. А. Саурова. – Вид. 3-тє, випр. і допов. – Київ : НТУУ «КПІ», 2017. – 221 с., іл. 130.
4. Москалюк В. О. Хвилеводи і резонатори : консп. лекцій до розд. курсу «Теорія поля» / В. О. Москалюк, Т. А. Саурова; [Рекомендовано радою ф-ту електроніки, протокол № 05/17 від 25.05.2017 р.]. – Київ : НТУУ «КПІ», 2017. – 78 с., іл. 43.
5. Никольский В. В. Электродинамика и распространение радиоволн / В. В. Никольский. – 2-е изд. – М., Наука, 1978. – 543 с.
6. Москалюк В. О. Теорія поля [Електронний ресурс] : метод. вказівки до РГР з курсу / В. О. Москалюк, І. Д. Шовкун ; [гриф надано вченою радою ФЕМ НТУУ «КПІ», протокол № 05/14 від 26.05.14 р.). – 20 с.
7. Воробьёв Г. С. Теория электромагнитного поля и основы техники СВЧ : учеб. пособие / С. В. Соколов, Л. Д. Писаренко, В. О. Журба. – Сумы : Изд-во СумГУ, 2010. – 420 с.
8. Бессонов Л. А. Теоретические основы электротехники. Электромагнитное поле / Л. А. Бессонов. – М. : Высш. школа, 1986. – 263 с.
9. Вольман В. И. Техническая электродинамика / В. И. Вольман, Ю. В. Пименов. – М. : Связь, 1971. – 487 с.
10. Григорьев А. Д. Электродинамика и техника СВЧ / А. Д. Григорьев. – М. : Высш. школа, 1990. – 336 с.
11. Ландау Л. Д. Теория поля / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – Изд. 5-е. – М. : Наука, 1967. – 460 с.
12. Взятыйшев В. Ф. Диэлектрические волноводы / В. Ф. Взятыйшев. – М. : Советское радио, 1970. – 216 с.
13. Лебедев И. В. Техника и приборы СВЧ, т.1 / И.В. Лебедев. – М. : Высш. школа, 1970. – 440 с.
14. Федоров Н. Н. Основы электродинамики. – Учеб. пособие для ВУЗов / Н. Н. Федоров. – М. : Высш. школа, 1980. – 399 с.
15. Петров Б. М. Электродинамика и распространение радиоволн / Б. М. Петров. – Учебник для ВУЗов. – 2-е изд., испр. – М. : Горячая линия – Телеком, 2007. – 558 с.