МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

ТЕОРІЯ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ

ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

*Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра
за освітньою програмою «Акустичні електронні системи та
технології обробки акустичної інформації»
спеціальності 171 «Електроніка»*

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2021

Теорія випадкових процесів: Задачі для самостійної роботи [Електронний ресурс] : навч. посіб. для студ. спеціальності 171 «Електроніка»/ КПІ ім. Ігоря Сікорського ; уклад.: О.В. Гармаш. – Електронні текстові дані (1 файл: 1,771 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. – 44 с.

Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
(протокол № 7 від 13.05.2021р.)
за поданням Вченої ради факультету електроніки (протокол № 04/2021 від 26.04.2021 р.)
Електронне мережне навчальне видання

ТЕОРІЯ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ
ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТАЙНОЇ РОБОТИ

Укладачі: *Гармаш Оксана Вікторівна*, канд. техн. наук

Відповідальний редактор *Найда С.А* , д-р техн. наук, проф., завідувач кафедри акустичних та мультимедійних електронних систем КПІ ім. Ігоря Сікорського

Рецензент *Філліпова М.В.*, канд. техн. наук, доц., доцент кафедри виробництва приладів КПІ ім. Ігоря Сікорського

Навчальний посібник передбачений для самостійної роботи студентів з курсу «Теорія процесів та систем-2. Випадкові процеси» і містить 60 типових задач. Для самоперевірки всі задачі містять відповіді та відповідні короткі теоретичні відомості.

Передбачений для студентів спеціальності 171 Електроніка, освітньої програми «Акустичні електронні системи та технології обробки акустичної інформації», а також може бути корисним і для інших технічних спеціальностей.

ЗМІСТ

ВСТУП

Сучасний фахівець в галузі електроніки повинен вміти вирішувати різноманітні задачі дослідження та обробки реальних фізичних процесів, що мають випадковий характер.

Базові знання, уміння та навички вирішення таких задач студенти набувають при вивченні дисципліни «Теорія процесів та систем-2. Випадкові процеси».

В результаті вивчення дисципліни студенти повинні:

– *знати* основні поняття та визначення теорії випадкових процесів; основні класи та моделі реальних процесів; основні методи аналізу перетворень випадкових процесів;
– *вміти* обчислювати основні імовірнісні характеристики відгуків лінійних та нелінійних систем;
– *набути навички* вирішення типових прикладних задач теорії випадкових процесів.

Суттєву роль в засвоєнні дисципліни відіграє самостійна робота студентів, яка полягає в неперервному вивченні теоретичних відомостей, виконанні поточних завдань.

Запропоновані в посібнику типові задачі дозволяють закріпити лекційний матеріал в рамках дисципліни «Теорія процесів та систем-2. Випадкові процеси» що ведеться на кафедрі акустичних та мультимедійних електронних систем КПІ ім. Ігоря Сікорського.

Посібник містить 60 задач з основних розділів курсу. Відповіді до задач дозволяє студенту перевірити вірність отриманих результатів та закріпити знання отримані під час лекційних занять.

Теоретичні відомості, необхідні для виконання завдань, приводяться у скороченому вигляді перед описом кожної теми.

ТЕМА №1. ФУНКЦІЯ РОЗПОДІЛУ ВИПАДКОВОГО ПРОЦЕСУ

Короткі теоретичні відомості

Процес називається випадковим якщо попередньо (до експерименту) відомо лише безліч можливих результатів багаторазових експериментів при незмінних умовах. Для такого процесу результат конкретного експерименту передбачити не можна.

Випадковий процес $\xi(t)$ – це дійсна функція $\xi(t)=\xi(\omega,t)$ з областю визначення $\Omega\times T$ та з областю значень R, де Ω - простір елементарних подій, T - деякий проміжок часу, R - область дійсних чисел.

Випадковий процес є функцією двох змінних, фіксуючи кожен з них отримуємо різний математичний об'єкт.

При фіксованому моменті часу t_j випадковий процес $\xi(\omega,t)$ звертається у *випадкову величину* $\xi(\omega,t_j)=\xi_j(\omega)=\xi_j$.

При фіксованій елементарній події ω_k, що рівносильно проведенню експерименту, отримуємо детерміновану функцію $\xi(\omega_k,t)=x_k(t)$, яка називається *реалізацією* випадкового процесу $\xi(t)$.

Кількість реалізацій залежить від закону розподілу випадкових величин, що входять у випадковий процес і від кількості проведених експериментів.

Для завдання випадкового процесу необхідно задати його закон розподілу, зокрема багатовимірну функцію розподілу $F(x_1,...,x_n;t_1,...,t_n)$.

Функція розподілу випадкового процесу $\xi(t)$ визначається наступним чином

$$F(x_1,...,x_n;t_1,...,t_n)=\mathbf{P}\{\xi(t_1)<x_1,...,\xi(t_n)<x_n\},\ \ n=1,2,3,...$$

Багатовимірна функція розподілу має $2n$ – змінних з них n – аргументів $\left(x_n\right)$ та n – параметрів $\left(t_n\right)$.

Два випадкових процеси є незалежними, якщо їх спільна функція розподілу дорівнює добутку функцій розподілу кожної з них

$$F_{12}\left(\vec{x},\vec{y};\vec{t},\vec{t}'\right)=F_1\left(\vec{x};\vec{t}\right)F_2\left(\vec{y};\vec{t}'\right)$$

В залежності від властивостей неперервності $F\left(\vec{x},\vec{t}\right)$ миттєві значення випадкових процесів можуть бути: неперервними, дискретними або змішаними.

Якщо функція розподілу випадкового процесу $\xi(t)$ є неперервною по всіх аргументам $x_k,\ k=\overline{1,n}$, то на ряду з функцією розподілу можна використовувати *щільність імовірностей* $p(x_1,...,x_n;t_1,...,t_n)$ у вигляді

$$p\left(x_1,...x_n;t_1,...t_n\right)=\frac{\partial^n F\left(x_1,...x_n;t_1,...t_n\right)}{\partial x_1\cdot\partial x_2\cdot...\cdot\partial x_n}.$$

Контрольні питання

1. Дати визначення випадкового процесу.
2. Що собою представляють миттєві значення випадкового процесу?
3. Що називається реалізацією випадкового процесу?
4. Що з фізичної точки зору означає фіксація елементарної події у випадкового процесу?
5. Дати визначення випадкової послідовності.
6. Дати визначення часового ряду.
7. Як визначається одновимірна функція розподілу випадкового процесу?
8. Дати визначення функції розподілу випадкового процесу.
9. Записати основні властивості функції розподілу випадкового процесу.
10. Як визначається щільність імовірностей випадкового процесу?

11. Записати основні властивості щільності імовірностей випадкового процесу.
12. Як визначається характеристична функція випадкового процесу?
13. Записати основні властивості характеристичної функції випадкового процесу.

Задачі для самостійної роботи

Задача №1.1

Випадковий процес задано формулою $\xi(t) = -\eta \cdot t \cdot E(t)$, де випадкова величина η рівномірно розподілена на інтервалі [-2;2].

Вказати кількість можливих реалізацій випадкового процесу. Записати аналітичний вираз для функції розподілу вказаного випадкового процесу в момент часу $t = 1.5$.

Відповідь: Незлічена кількість реалізацій.

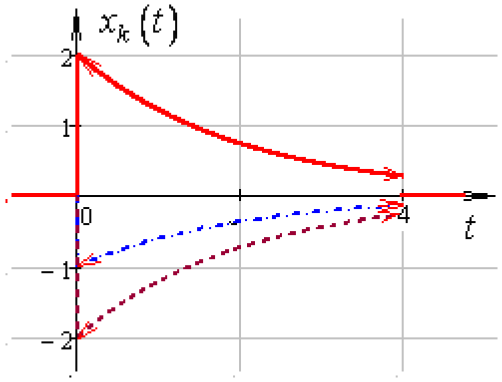
$$F_\xi(x, t = 1.5) = \begin{cases} 0, & x \le -3, \\ \dfrac{3 + x}{6}, & x \in (-3;3], \\ 1, & x > 3. \end{cases}$$

Задача №1.2

Випадковий процес задано формулою $\xi(t) = -\eta \exp(\alpha t) E(t) E(4 - t)$, де постійна $\alpha < 0$, випадкова величина η задана рядом розподілу

y_k	-2	1	2
p_k	0.2	0.5	0.3

Вказати кількість можливих реалізацій випадкового процесу, намалювати їх графіки. Записати аналітичний вираз для функції розподілу вказаного випадкового процесу в момент часу $t = -1$.



Відповідь:

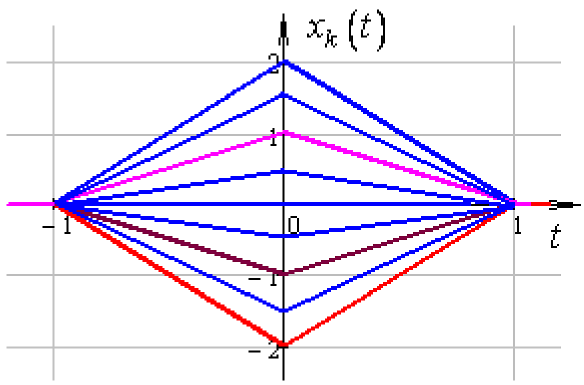
Кількість реалізацій – 3.

$$F_{\xi}(x, t=-1)=\begin{cases}0, & x \le 0,\\ 1, & x > 0.\end{cases}$$

Задача № 1.3

Випадковий процес задано формулою $\xi(t)=\eta(1-|t|)\,E(1-t)\,E(t+1),$ де випадкова величина η рівномірно розподілена на інтервалі [-2 , 2].

Вказати кількість можливих реалізацій випадкового процесу, намалювати їх графіки. Записати аналітичний вираз для функції розподілу вказаного випадкового процесу в момент часу $t=0.5$.



Відповідь:

Незлічена кількість реалізацій.

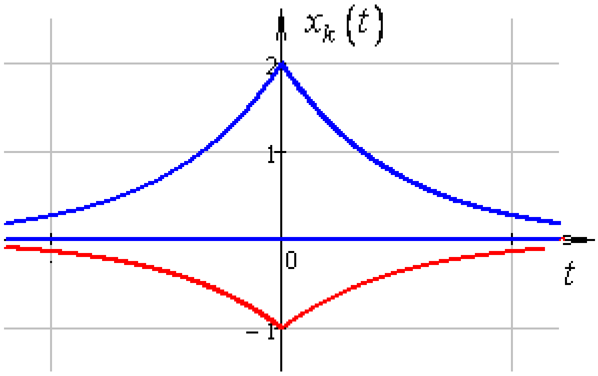
$$F_{\xi}(x, t=0.5)=\begin{cases}0, & x \le -1,\\ \dfrac{x+1}{2}, & x \in (-1;1],\\ 1, & x > 1.\end{cases}$$

Задача № 1.4

Випадковий процес задано формулою $\xi(t)=\eta\exp(-\alpha|t|)$ де постійна $\alpha>0$, випадкова величина η задана рядом розподілу

y_k	-1	0	2
p_k	0.5	0.2	0.3

Вказати кількість можливих реалізацій випадкового процесу, намалювати їх графіки. Записати аналітичний вираз для функції розподілу вказаного випадкового процесу.



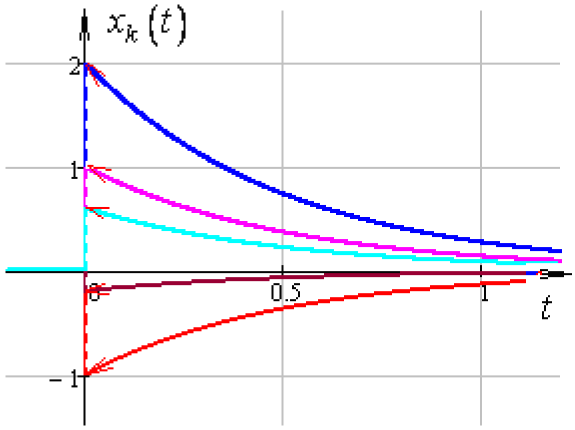
Відповідь: 3 реалізації.

$$F_\xi(x,t)=\begin{cases}0, & x\le -e^{-\alpha|t|},\\ 0.5, & x\in\left(-e^{-\alpha|t|};0\right],\\ 0.7, & x\in\left(0;2e^{-\alpha|t|}\right],\\ 1, & x>2e^{-\alpha|t|}.\end{cases}$$

Задача № 1.5

Випадковий процес задано формулою $\xi(t)=-\eta\exp(-\alpha t)E(t)$, де постійна $\alpha>0$, випадкова величина η рівномірно розподілена на інтервалі [-2 , 1].

Вказати кількість можливих реалізацій випадкового процесу, намалювати їх графіки. Записати аналітичний вираз для функції розподілу вказаного випадкового процесу.



Відповідь:

Незлічена кількість реалізацій.

Для $t>0$

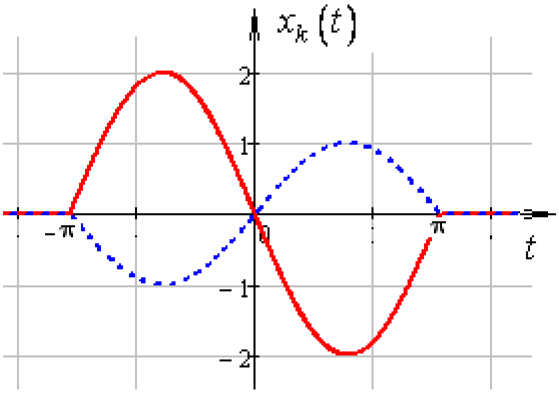
$$F_\xi(x,t)=\begin{cases}0, & x\le -e^{-\alpha t},\\ \dfrac{1+xe^{\alpha t}}{3}, & x\in\left(-e^{-\alpha t};2e^{-\alpha t}\right],\\ 1, & x>2e^{-\alpha t}.\end{cases}$$

Задача № 1.6

Випадковий процес задано формулою $\xi(t) = \eta \cdot \sin t \cdot E(t+\pi)E(\pi - t)$, де випадкова величина η задана рядом розподілу

y_k	-2	1
p_k	0.6	0.4

Вказати кількість можливих реалізацій випадкового процесу, намалювати їх графіки. Записати аналітичний вираз для функції розподілу вказаного випадкового процесу в момент часу $t = -\dfrac{\pi}{6}$.



Відповідь: 2 реалізації.

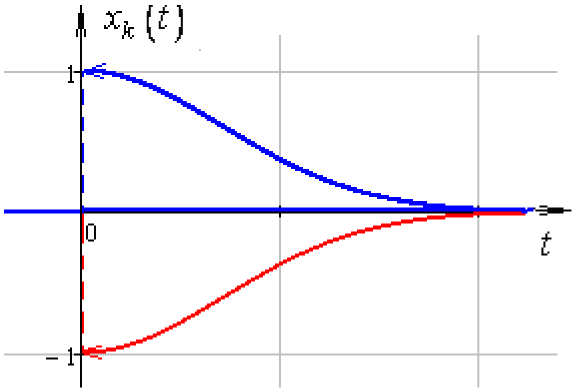
$$F_\xi\left(x, t = -\frac{\pi}{6}\right) = \begin{cases} 0, & x \le -\dfrac{1}{2}, \\ 0.4, & x \in \left(-\dfrac{1}{2}; 1\right], \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

Задача № 1.7

Випадковий процес задано формулою $\xi(t) = \eta \exp(-\alpha^2 t^2)$, де α - постійна, випадкова величина η задана рядом розподілу

y_k	-1	0	1
p_k	0.3	0.2	0.5

Вказати кількість можливих реалізацій випадкового процесу, намалювати їх графіки. Записати аналітичний вираз для функції розподілу вказаного випадкового процесу.



Відповідь: 3 реалізації.

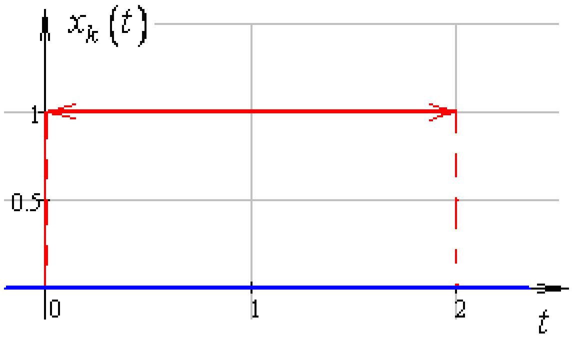
$$F_\xi(x,t)=\begin{cases}0, & x\le -e^{-(\alpha t)^2},\\ 0.3, & x\in\left(-e^{-(\alpha t)^2};0\right],\\ 0.5, & x\in\left(0;e^{-(\alpha t)^2}\right],\\ 1, & x>e^{-(\alpha t)^2}.\end{cases}$$

Задача № 1.8

Випадковий процес задано формулою $\xi(t)=\eta^2 E(t)E(2-t)$, де випадкова величина η задана рядом розподілу

y_k	-1	0	1
p_k	0.2	0.5	0.3

Вказати кількість можливих реалізацій випадкового процесу, намалювати їх графіки. Записати аналітичний вираз для функції розподілу вказаного випадкового процесу в момент часу $t=1.25$.



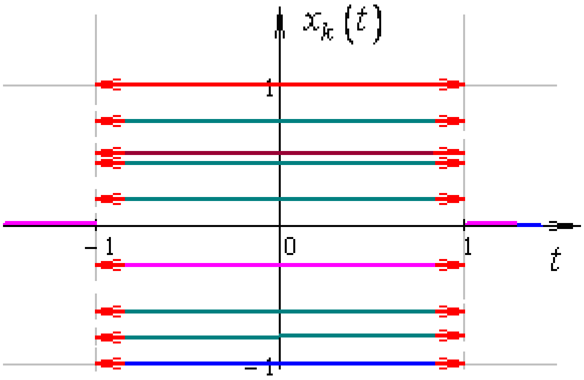
Відповідь: 2 реалізації.

$$F_\xi(x,t=1.25)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ 0.5, & x\in(0;1],\\ 1, & x>1.\end{cases}$$

Задача № 1.9

Випадковий процес задано формулою $\xi(t)=\eta\cdot E(t+1)\cdot E(1-t)$, де η-випадкова величина, рівномірно розподілена на інтервалі [-1 , 1].

Вказати кількість можливих реалізацій випадкового процесу, намалювати їх графіки. Записати аналітичний вираз для функції розподілу вказаного випадкового процесу в момент часу $t = 0.75$.



Відповідь: Незлічена кількість реалізацій.

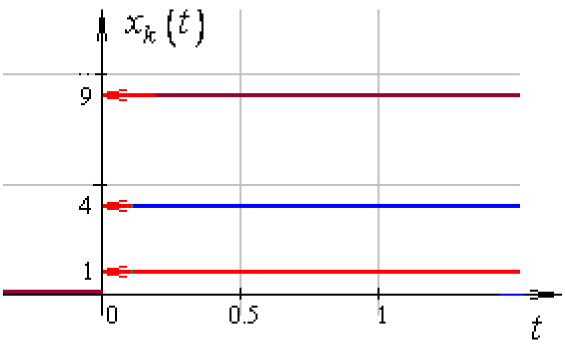
$$F_\xi(x, t = 0.75) = \begin{cases} 0, & x \le -1, \\ \dfrac{x+1}{2}, & x \in (-1; 1], \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

Задача № 1.10

Випадковий процес задано формулою $\xi(t) = \eta^2 E(t)$, де випадкова величина η задана рядом розподілу

y_k	-2	1	3
p_k	0.1	0.3	0.6

Вказати кількість можливих реалізацій випадкового процесу, намалювати їх графіки. Записати аналітичний вираз для функції розподілу вказаного випадкового процесу в момент часу $t = 10$.



Відповідь: 3 реалізації.

$$F_\xi(x, t = 10) = \begin{cases} 0, & x \le 1, \\ 0.3, & x \in (1; 4] \\ 0.4, & x \in (4; 9] \\ 1, & x > 9. \end{cases},$$

ТЕМА №2. МАТЕМАТИЧНЕ СПОДІВАННЯ ТА КОРЕЛЯЦІЙНА ФУНКЦІЯ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ

Короткі теоретичні відомості

При аналізі випадкових процесів іноді не обов'язково знати закон розподілу, достатнім є знати моментні функції цих процесів.

Математичне сподівання випадкового процесу $\xi(t)$ визначається в такому вигляді

$$m(t) = \mathbf{M}\{\xi(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x dF(x,t)$$

Математичне сподівання - це середнє по всіх реалізацій, навколо якого змінюються миттєві значення випадкового процесу.

У випадку, коли математичне сподівання постійне, тобто $m(t) = m = const$ його називають *постійної складовою* випадкового процесу $\xi(t)$. Математичне сподівання яке змінюється в часі носить назву тренда випадкового процесу.

Одновимірні моментні функції бувають початковими $\alpha_n(t)$ і центральними $\mu_n(t)$, і визначаються відповідно

$$\alpha_k(t) = \mathbf{M}\left\{\xi^k(t)\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} x^k dF(x,t),$$

$$\mu_k(t) = \mathbf{M}\left\{\left(\overset{\circ}{\xi}(t)\right)^k\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} \left[x - m(t)\right]^k dF(x,t),$$

де k - порядок моментної функції.

На практиці найчастіше застосовують перший початковий момент $\alpha_1(t) = m(t)$ і другий центральний момент $\mu_2(t) = D(t) = \sigma^2(t)$ називається *дисперсією* випадкового процесу.

$$\mu_2(t) = D(t) = \sigma^2(t) = \mathbf{M}\left\{\left(\overset{\circ}{\xi}(t)\right)^2\right\} = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[x - m(t)\right]^2 dF(x,t).$$

де $\sigma(t)$ – *середнє квадратичне відхилення*, яке визначається як $\sigma(t) = +\sqrt{D(t)}$.

Дисперсія випадкового процесу $\xi(t)$ характеризує розкид миттєвих значень процесу щодо його математичного сподівання $m(t)$.

Коваріаційна функція і *кореляційна функція* випадкового процесу визначаються відповідно

$$K(t_1,t_2) = \mathbf{M}\{\xi(t_1)\xi(t_2)\}, \qquad R(t_1,t_2) = \mathbf{M}\left\{\overset{\circ}{\xi}(t_1)\overset{\circ}{\xi}(t_2)\right\}.$$

Запишемо вираз що зв'язує коваріаційну і кореляційну функції

$$K(t_1,t_2) = R(t_1,t_2) + m(t_1)\cdot m(t_2),$$

$$R(t_1,t_2) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[x_1 - m(t_1)\right]\cdot\left[x_2 - m(t_2)\right]p(x_1,x_2,t_1,t_2)dx_1dx_2.$$

Кореляційна функція характеризує ступінь лінійного зв'язку між двома миттєвими значеннями випадкового процесу

$$R(t,t+\tau) = \mathbf{M}\left\{\overset{\circ}{\xi}(t)\overset{\circ}{\xi}(t+\tau)\right\},$$

де τ – інтервал кореляції.

Інтервалом кореляції називається такий мінімальний інтервал часу $\tau = \tau_0$, починаючи з якого миттєві значення випадкового процесу є некорельованими.

Нормована кореляційна функція

$$r(t_1,t_2) = \frac{R(t_1,t_2)}{\sigma(t_1)\cdot\sigma(t_2)}.$$

При аналізі взаємодії між двома процесами досліджують взаємну кореляційну функцію

$$R_{12}(t_1,t_2)=\mathbf{M}\left\{\overset{\circ}{\xi}_1(t_1)\overset{\circ}{\xi}_2(t_2)\right\}$$

Взаємна кореляційна функція характеризує степінь лінійної залежності або зв’язку між миттєвими значеннями двох випадкових процесів $\xi_1(t)$ і $\xi_2(t)$.

Два випадкових процеси є некорельованими, якщо їх взаємна кореляційна функція дорівнює нулю, тобто $R_{12}(t_1,t_2)=0$.

Розглянемо детерміновану функцію $x(t)=g(t,c_1,c_2,...,c_s)$. Якщо хоча б один з параметрів c_k являє собою випадкову величину, тоді процес $x(t)$ є випадковим процесом, який називається *конструктивним випадковим процесом*.

$$c_k,\quad k=\overline{1,s}\quad \xi(t)=g(t,\eta_1,...,\eta_s),$$

η_k - випадкова величина, $\xi(t)=\eta\cdot g(t)$ – елементарний випадковий процес.

Для опису реальних процесів використовуються конструктивні процесі, які враховують їх фізику виникнення.

Математичне сподівання конструктивного випадкового процесу

$$m(t)=\mathbf{M}\{g(t,y_1,...,y_s)\}=\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}...\int_{-\infty}^{\infty}}_{s} g(t,y_1,...,y_s)\,p_\eta(y_1,...,y_s)dy_1\cdot...\cdot dy_s.$$

В даному випадку замість кореляційної функції процесу знаходять коваріаційну функцію

$$K(t_1,t_2)=\mathbf{M}\{\xi(t_1)\xi(t_2)\}=$$

$$=\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}...\int_{-\infty}^{\infty}}_{s} g(t_1,y_1,...,y_s)g(t_2,y_1,...,y_s)\,p_\eta(y_1,...,y_s)dy_1\cdot...\cdot dy_s$$

Кореляційну функцію конструктивного випадкового процесу знаходять враховуючи її зв'язок із коваріаційною функцією за формулою

$$R(t_1,t_2)=K(t_1,t_2)-m(t_1)m(t_2).$$

Контрольні питання

1. Як визначається математичне сподівання випадкового процесу?
2. Який фізичний зміст має математичне сподівання випадкового процесу? Проілюструйте графіком.
3. Який випадковий процес називається центрованим?
4. Що таке постійна складова випадкового процесу?
5. Що називається трендом випадкового процесу?
6. Як визначається дисперсія випадкового процесу?
7. Який фізичний зміст має дисперсія випадкового процесу?
8. Що таке середнє квадратичне відхилення випадкового процесу?
9. Як визначаються одновимірні початкові моментні функції випадкового процесу?
10. Як визначаються одновимірні центральні моментні функції випадкового процесу?
11. Записати формулу для обчислення одновимірної початкової моментної функції порядку s випадкового процесу з використанням функції розподілу.
12. Записати формулу для обчислення одновимірної початкової моментної функції порядку s випадкового процесу з використанням характеристичної функції.
13. Записати формулу для обчислення одновимірної центральної моментної функції порядку s випадкового процесу.
14. Записати формулу, що пов’язує дисперсію випадкового процесу та початкові моменті функції.

Задачі для самостійної роботи

Задача № 2.1

Математичне сподівання та кореляційна функції випадкового процесу $\xi_1(t)$ відповідно дорівнюють $m_{\xi 1}(t) = t + 4$, $R_{\xi 1}(t_1, t_2) = t_1 \cdot t_2$. Знайти математичне сподівання, кореляційну функцію и дисперсію випадкового процесу $\xi_2(t) = 5 \cdot t \cdot \xi_1(t) + 2$.

Відповідь: $m_{\xi_2}(t) = 5t^2 + 20t + 2$,

$R_{\xi_2}(t_1, t_2) = 25t_1^2 t_2^2$, $\sigma_{\xi_2}^2(t) = 25t^4$.

Задача № 2.2

Випадковий процес має вигляд $\xi(t) = 2 + \eta_1 t + \eta_2 t^2$, де η_1 та η_2 - некорельовані випадкові величини з математичними сподіваннями $m_{\eta_1} = -3$, $m_{\eta_2} = 2$ та $D_{\eta_1} = 2$, $D_{\eta_2} = 3$. Знайти математичне сподівання, кореляційну функцію та дисперсію випадкового процесу $\xi(t)$.

Відповідь: $m_\xi(t) = 2t^2 - 3t + 2$,

$R_\xi(t_1, t_2) = 2t_1 t_2 + 3t_1^2 t_2^2$, $\sigma_\xi^2(t) = 2t^2 + 3t^4$.

Задача № 2.3

Випадковий процес задано формулою $\xi(t) = t + \eta \cdot \cos(t)$, де η – випадкова величина з математичним сподіванням, рівним 2, та дисперсією, рівною 1. Знайти математичне сподівання, кореляційну функцію та дисперсію випадкового процесу $\xi(t)$.

Відповідь: $m_\xi(t) = t + 2\cos(t)$, $R_\xi(t_1, t_2) = \cos(t_1)\cos(t_2)$, $\sigma_\xi^2(t) = \cos^2(t)$.

Задача № 2.4

Випадковий процес задано формулою $\xi(t)=\eta_1 t+\eta_2 t^2$. Некорельовані випадкові величини η_1,η_2 рівномірно розподілені на інтервалах [0,1] и [2,4] відповідно. Знайти математичне сподівання, кореляційну функцію та дисперсію випадкового процесу $\xi(t)$.

Відповідь: $m_\xi(t)=\dfrac{t}{2}+3t^2$,

$$R_\xi(t_1,t_2)=\frac{t_1 t_2}{12}+\frac{t_2^2\,t_1^2}{3},\ \sigma_\xi^2(t)=\frac{t^2}{12}+\frac{t^4}{3}.$$

Задача № 2.5

Випадковий процес задано формулою $\xi(t)=(\eta-2)\cdot t$, де випадкова величина η має математичне сподівання, рівне 4, та одиничну дисперсію. Знайти математичне сподівання, кореляційну функцію та дисперсію випадкового процесу $\xi(t)$.

Відповідь: $m_\xi(t)=2t$,

$$R_\xi(t_1,t_2)=t_1 t_2,\ \sigma_\xi^2(t)=t^2.$$

Задача № 2.6

Випадковий процес задано формулою $\xi(t)=2\exp(-\eta\cdot t)$, де η- випадкова величина, рівномірно розподілена на інтервалі [0,2]. Знайти математичне сподівання та коваріаційну функцію випадкового процесу $\xi(t)$.

Відповідь: $m_\xi(t)=\dfrac{1-e^{-2t}}{t}$,

$$K_\xi(t_1,t_2)=\frac{2}{t_1+t_2}\left(1-e^{-2(t_1+t_2)}\right).$$

Задача № 2.7

Знайти математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення випадкового процесу $\xi(t)=\eta e^{-t}$, де випадкова величина η має нормальний закон розподілу $N(3,2)$.

Відповідь: $m_{\xi}\left(t\right)=3e^{-t}$,

$\sigma_{\xi}^{2}\left(t\right)=4e^{-2t}$, $\sigma_{\xi}\left(t\right)=2e^{-t}$.

Задача № 2.8

Випадковий процес задано формулою $\xi(t)=\eta t^2+\gamma t,\quad t>0$, де η,γ – незалежні випадкові величини з гауссівським розподілом $N(0,1)$ та $N(1,2)$, відповідно. Знайти математичне сподівання та кореляційну функцію випадкового процесу $\xi(t)$.

Відповідь: $m_{\xi}\left(t\right)=t$, $R_{\xi}\left(t_1,t_2\right)=t_1^2t_2^2+4t_1t_2$.

Задача № 2.9

Випадковий процес задано формулою $\xi(t)=\eta\sin\left(t\right)$, випадкова величина η має нормальний закон розподілу $N(1,2)$. Знайти математичне сподівання та середнє квадратичне відхилення випадкового процесу $\xi(t)$.

Відповідь: $m_{\xi}(t)=\sin\left(t\right)$, $\sigma_{\xi}(t)=2\left|\sin\left(t\right)\right|$.

Задача № 2.10

Знайти кореляційну функцію випадкового процесу $\xi(t)=-\eta e^{-t}$, де випадкова величина η розподілена рівномірно на інтервалі $[1,3]$.

Відповідь: $R_{\xi}\left(t_1,t_2\right)=\dfrac{e^{-\left(t_1+t_2\right)}}{3}$

ТЕМА №3. СТАЦІОНАРНІ ВИПАДКОВІ ПРОЦЕСИ

Короткі теоретичні відомості

Серед випадкових процесів є такі, які ведуть себе більш менш регулярно з часом. Регулярність означає, що в середньому всі реалізації будуть себе поводити приблизно однаково.

Процес $\xi(t)$ є стаціонарним, якщо його імовірнісні характеристики не залежать від початку координат, тобто імовірнісні характеристики процесів $\xi(t)$ та $\xi(t-\Delta)$, де $\Delta \neq 0$, співпадають.

Розрізняють два види стаціонарності: в вузькому та в широкому сенсі.

Випадковий процес називається стаціонарним в вузькому сенсі, якщо виконується умова

$$F(x,t-\Delta) = |t=\Delta| = F(x,0) = F(x),$$

$$F(x_1,x_2;t_1-\Delta,t_2-\Delta) = |\Delta = t_2| = F(x_1,x_2;t_1-t_2,0) = F(x_1,x_2;\tau),$$

де $\tau = t_2 - t_1$ або $\tau = t_1 - t_2$.

Випадковий процес $\xi(t)$ називається стаціонарним в широкому сенсі при одночасному виконанні двох умов:

1. $m(t) = m = \text{const}$; 2. $R(t_1,t_2) = R(t_2-t_1) = R(\tau)$, $\tau = t_2 - t_1$.

З другої умови випливає, що $\sigma^2(t) = R(t,t) = R(0) = \text{const}$.

Відмітимо, що зі стаціонарності в вузькому сенсі випливає стаціонарність і в широкому сенсі, *але не навпаки.*

Початкові моментні функції мають вигляд

$$\alpha_k(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x^k dF(x) = \alpha_k.$$

Таким чином, усі одновимірні моментні функції стаціонарного випадкового процесу не залежать від часу.

$$\alpha_{k_1,k_2}(t_1,t_2)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}x_1^{k_1}x_2^{k_2}dF(x_1,x_2;t_1,t_2)=\left|k=k_1+k_2\right|=\alpha_{k_1,k_2}(\tau),$$

де $\tau=t_2-t_1$

Для стаціонарних процесів вводиться поняття інтервалу кореляції. *Інтервалом кореляції* τ_0 називається такий проміжок часу в межах якого миттєві значення стаціонарного випадкового процесу вважаються корельованими.

Однозначного правила визначення інтервалу корреляції не існує, зокрема його можна визначати наступними способами.

На практиці інтервал кореляції позначають τ_ε та знаходять з виразу

$$r(\tau_\varepsilon)=\varepsilon,$$

де $r(\tau)$ – нормована кореляційна функція стаціонарного випадкового процесу $r(\tau)=R(\tau)/\sigma^2$.

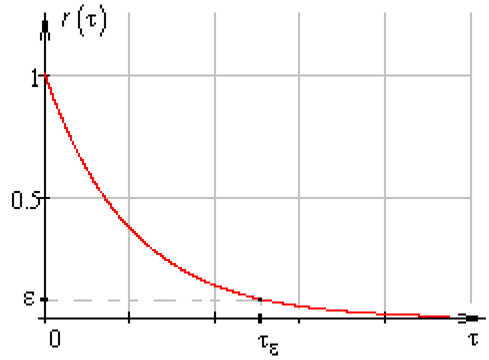


Рис.5

2. Знайти інтервал кореляції можна за формулою

$$\tau_0=\int_0^{\infty}r(\tau)d\tau.$$

Контрольні питання

1. Який випадковий процес називається стаціонарним?
2. Що таке стаціонарний у вузькому сенсі випадковий процес?
3. Як визначається стаціонарний в широкому сенсі випадковий процес?
4. Перерахувати основні властивості кореляційної функції стаціонарного в широкому сенсі випадкового процесу.
5. Що таке інтервал кореляції?
6. Як обчислити інтервал кореляції?
7. Як визначаються стаціонарно пов'язані випадкові процеси?

Задачі для самостійної роботи

Задача № 3.1

Чи являється стаціонарним в широкому розумінні випадковий процес $\xi(t)=\eta_1 e^{-t}+\eta_2 t$, де η_1, η_2 – некорельовані випадкові величини з числовими характеристиками $m_{\eta_1}=m_{\eta_2}=0,\ D_{\eta_1}=1,\ D_{\eta_2}=0.5$.

Відповідь: ні не являються, оскільки $R_\xi\left(t_1,t_2\right)\neq R_\xi\left(t_2-t_1\right)$.

Задача № 3.2

Знайти інтервал кореляції τ_ε для стаціонарного випадкового процесу $\xi(t)$ з кореляційною функцією $R_\xi(\tau)=\exp(-\alpha|\tau|)$ при $\varepsilon=0.1$.

Відповідь: $\tau_\varepsilon=-\dfrac{\ln(0.1)}{\alpha}=\dfrac{2.3}{\alpha}$.

Задача № 3.3

Випадковий процес $\eta(t)=\xi(t)+\xi(t+t_0)$, де $t_0>0, const$, $\xi(t)$ – стаціонарний випадковий процес з кореляційною функцією $R_\xi(\tau)=\exp(-\tau^2)$.

Знайти кореляційну функцію випадкового процесу $\eta(t)$.

Відповідь:

$$R_\eta(\tau)=2R_\xi(\tau)+R_\xi(\tau-t_0)+R_\xi(\tau+t_0)=2e^{-(\tau)^2}+e^{-(\tau-t_0)^2}+e^{-(\tau+t_0)^2}.$$

Задача № 3.4

Чи може функція $10\exp\left[-\left(\tau+2\right)\right]$ бути кореляційною функцією деякого стаціонарного випадкового процесу? Відповідь обґрунтувати.

Відповідь: ні, не може, тому що не виконується умова $\left|R\left(\tau\right)\right|\leq\sigma^2$.

Задача № 3.5

Знайти інтервал кореляції τ_0 для стаціонарного випадкового процесу $\xi(t)$ з кореляційною функцією $R_\xi(\tau) = 1 - \alpha|\tau|, \quad |\tau| \le \dfrac{1}{\alpha}, \ \alpha > 0.$.

Відповідь: $\tau_0 = \dfrac{1}{2\alpha}$.

Задача № 3.6

Некорельовані випадкові процеси $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ мають моментні функції $m_1(t) = t^2, m_2(t) = 1, \ R_1(t_1,t_2) = \exp\left(-\alpha_1\left(t_1 + t_2\right)\right), \ R_2(t_1,t_2) = \exp\left(-\alpha_2\left(t_1 - t_2\right)^2\right),$ де $\alpha_i > 0, const$.

Знайти математичне сподівання, кореляційну функцію та дисперсію випадкового процесу $\xi(t) = \xi_1(t) + t\xi_2(t) + t^2$.

Відповідь: $m_\xi(t) = 2t^2 + t$,

$R_\xi(t_1,t_2) = t_1 t_2 e^{-\alpha_2\left(t_1 - t_2\right)^2} + e^{-\alpha_1\left(t_1 + t_2\right)}$,

$\sigma_\xi^2(t) = t^2 + e^{-2\alpha_1 t}$.

Задача № 3.7

Випадкові процеси $\xi_1(t)$ та $\xi_2(t)$ задано формулами $\xi_1(t) = 2\cos(2\pi f_0 t + \eta_1)$, $\xi_2(t) = \sin(2\pi f_0 t + \eta_2)$, де випадкові величини η_1, η_2 являються незалежними та рівномірно розподіленими на $[0; 2\pi]$ и $[-\pi; 0]$ відповідно. Чи являються процеси $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ стаціонарно зв'язаними?

Відповідь: ні, не являються, оскільки процес $\xi_2(t)$ – нестаціонарний.

Задача № 3.8

З'ясувати, чи являється стаціонарним в широкому розумінні процес $\xi(t) = \eta_1 + \eta_2 \cos(2\pi f t)$, де постійна $f > 0$, η_1, η_2- некорельовані випадкові величини.

Відповідь: ні, не являється тому, що $R(t_1, t_2) \neq R(t_2 - t_1)$.

Задача № 3.9

Стаціонарний випадковий процес $\xi(t)$ має кореляційну функцію $R_\xi(\tau) = \exp(-\tau^2)$. Знайти для цього процесу інтервал кореляції на рівні $\varepsilon = 0{,}01$.

Відповідь: $\tau_\varepsilon = \sqrt{-\ln(0.01)} = 2.146$.

Задача № 3.10

Задано стаціонарний випадковий процес $\xi(t)$. З'ясувати, чи являються стаціонарно зв'язаними випадкові процеси $\eta_1(t) = \xi(t+2)$ та $\eta_2(t) = \gamma + \xi(t)$, де випадкова величина γ некорельована з миттєвими значеннями випадкового процесу $\xi(t)$? Обґрунтувати відповідь.

Відповідь: являються, оскільки виконуються наступні умови

$$\begin{aligned} &m_{\eta_1} = const, \\ &m_{\eta_2} = const, \\ &R_1(t_1, t_2) = R_1(\tau), \\ &R_2(t_1, t_2) = R_2(\tau), \\ &R_{12}(t_1, t_2) = R_{12}(\tau), \end{aligned}$$

де $\tau = t_2 - t_1$.

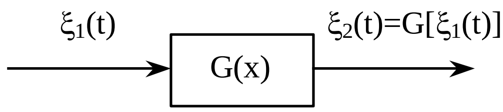
ТЕМА №4. НЕЛІНІЙНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ

Короткі теоретичні відомості

При заданні нелінійного перетворення випадкових процесів задача знаходження закону розподілу таких процессів, у загальному випадку, окрім нелінійної безінерційної системи, не має розв’язку.

Розглянемо нелінійну безінерційну систему на яку діє випадковий процес $\xi_1(t)$ із наперед заданими імовірнісними характеристиками. Необхідно знайти імовірнісні характеристики відгуку $\xi_2(t)$.

Якщо оператор нелінійної системи, яка перетворює вхідний сигнал $\xi_1(t)$ у вихідний сигнал $\xi_2(t)$, позначити $G(x)$, тоді схематично сформульовану задачу можна зобразити наступним чином:



Оператор $G(x)$ носить назву амплітудної характеристики.

Якщо процес на вході нелінійної безінерційної системи є стаціонарним випадковим процесом, то вихідний процес теж буде стаціонарним випадковим процесом.

У зв'язку з труднощами розрахунків при вирішенні сформульованої задачі обмежуються обчисленням основних імовірнісних характеристик вихідного сигналу - його одновимірною функцією розподілу (або щільністю імовірностей), математичним сподіванням і кореляційною функцію.

Одновимірні моментні функції відгуку нелінійної системи визначаються через відомі характеристики впливу

$$\alpha_k\left[\xi_2(t)\right]=\mathbf{M}\left\{\xi_2^k(t)\right\}=\int\limits_{-\infty}^{\infty} G_{t_0}^k(x)\,dF_1(x).$$

Зокрема математичне сподівання відгуку нелінійної системи визначається за формулою

$$m_2 = \mathbf{M}\left\{G_{t_0}\left[\xi_1(t)\right]\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} G_{t_0}(x)\,dF_1(x).$$

Двовимірні характеристики вихідного сигналу

$$\alpha_{k_1,k_2}\left[\xi_2(t)\right] = \mathbf{M}\left\{\xi_2^{k_1}(t_1)\xi_2^{k_2}(t_2)\right\} = \mathbf{M}\left\{G_{t_0}^{k_1}\left[\xi_1(t_1)\right]G_{t_0}^{k_2}\left[\xi_1(t_2)\right]\right\} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} G_{t_0}^{k_1}(x_1)G_{t_0}^{k_2}(x_2)\,p_1(x_1,x_2,t_1,t_2)\,dx_1dx_2.$$

Усі центральні моментні функції обчислюються через початкові моментні функції.

У разі стаціонарного гауссівського впливу характеристики вихідного сигналу можна знайти за наступними формулами:

- Математичне сподівання:

$$m_2 = \frac{1}{\sigma_1}\int_{-\infty}^{\infty} G(x)\varphi\left(\frac{x-m_1}{\sigma_1}\right)dx\,,$$

де m_1, σ_1- математичне сподівання і середнє квадратичне відхилення впливу $\xi_1(t)$, а функція $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ – табульована.

- Кореляційна функція

$$R_2(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_n^2}{n!}r_1^n(\tau).$$

де $r_1(\tau)$- нормована кореляційна функція впливу, а коефіцієнти C_n визначаються за формулою

$$C_n = \frac{1}{\sigma_1}\int_{-\infty}^{\infty} G(x)\varphi^{(n)}\left(\frac{x-m_1}{\sigma_1}\right)dx\,.$$

Знаходження функції розподілу або щільності ймовірностей істотно залежить від виду амплітудної характеристики системи.

Контрольні питання

1. Які системи називаються безінерційними?
2. Які системи називаються непараметричними?
3. Що таке амплітудна характеристика нелінійної системи?
4. Записати загальну формулу для знаходження функції розподілу відгуку нелінійної системи, амплітудна характеристика якої є неперервною кусково-монотонною зростаючою функцією.
5. Записати загальну формулу для знаходження функції розподілу відгуку нелінійної системи, амплітудна характеристика якої є кусково-монотонною функцією, що має розрив першого роду.
6. Яка особливість у функції розподілу відгуку нелінійної системи, амплітудна характеристика якої має розрив першого роду?
7. Записати формули для розрахунку математичного сподівання відгуку нелінійної системи.
8. Записати формули для розрахунку дисперсії відгуку нелінійної системи.

Задачі для самостійної роботи

Задача № 4.1

На нелінійну систему з амплітудною характеристикою

$$y = G(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ 1 - x, & x > 0 \end{cases}$$

подається стаціонарний гауссівський процес $\xi_1(t)$ з параметрами $m_1 = 1;\ \sigma_1 = 1$. Знайти математичне сподівання відгуку $\xi_2(t)$.

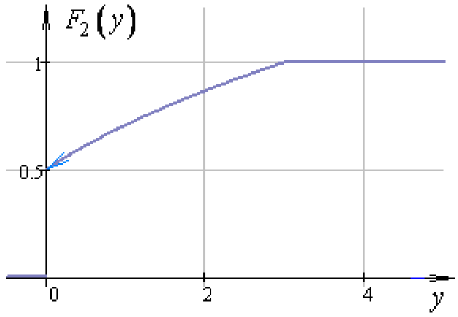
Відповідь: $m_2 = -\varphi(-1) = -0.242$.

Задача № 4.2

На нелінійну систему з амплітудною характеристикою

$$y = G(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1, \\ x^2 - 1, & x > 1, \end{cases}$$

подається стаціонарний процес $\xi_1(t)$, рівномірно розподілений на інтервалі $[0;2]$. Знайти формулу для функції розподілу відгуку $\xi_2(t)$ та побудувати її графік.



Відповідь:

$$F_2(y)=\begin{cases}0, & y\le 0,\\ \dfrac{\sqrt{y+1}}{2}, & y\in(0;3],\\ 1, & y>3.\end{cases}$$

Задача № 4.3

На нелінійну систему з амплітудною характеристикою

$$y=G(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ 2x, & x>0,\end{cases}$$

подається стаціонарний гауссівський процес $\xi_1(t)$ з параметрами $m_1=1$; $\sigma_1=1$. Знайти математичне сподівання відгуку $\xi_2(t)$.

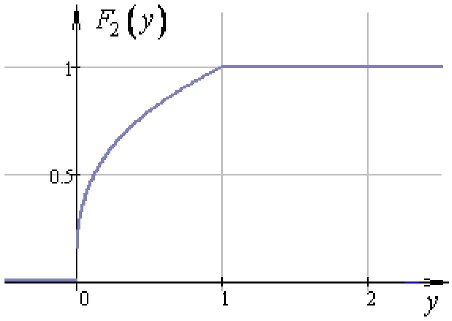
Відповідь: $m_2=2\varphi(-1)+2\big(0.5-\Phi_0(-1)\big)=2.165$

Задача № 4.4

На нелінійну систему з амплітудною характеристикою

$$y=G(x)=x^3\operatorname{sign}x$$

подається стаціонарний випадковий процес $\xi_1(t)$, рівномірно розподілений на інтервалі $[-1;1]$. Знайти аналітичний вираз для функції розподілу відгуку $\xi_2(t)$ та побудувати її графік.



Відповідь:

$$F_2(y)=\begin{cases}0, & y\le 0,\\ \sqrt[3]{y}, & y\in(0;1],\\ 1, & y>1.\end{cases}$$

Задача № 4.5

На нелінійну систему з амплітудною характеристикою

$$y=G(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ e^{x}-1, & x>0,\end{cases}$$

подається стаціонарній гауссівський процес $\xi_1(t)$ з параметрами $m_1=0;\quad \sigma_1=1$. Знайти аналітичний вираз для функції розподілу відгуку $\xi_2(t)$.

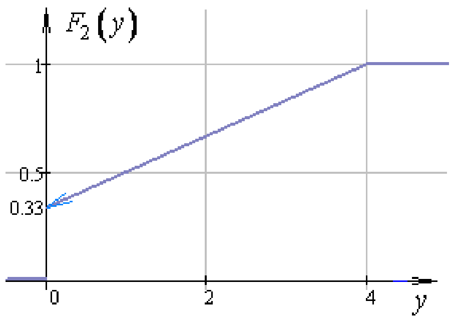
Відповідь: $F_2(y)=\begin{cases}0, & y\le 0,\\ 0.5+\Phi_0(\ln(y+1)), & y>0.\end{cases}$

Задача № 4.6

На нелінійну систему з амплітудною характеристикою

$$y=G(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ 2x, & x>0,\end{cases}$$

подається стаціонарний процес $\xi_1(t)$, рівномірно розподілений на інтервалі $[-1;2]$. Знайти аналітичний вираз для функції розподілу відгуку $\xi_2(t)$ та побудувати її графік.



Відповідь:

$$F_2(y)=\begin{cases}0, & y\le 0,\\ \dfrac{y+2}{6}, & y\in(0;4],\\ 1, & y>4.\end{cases}$$

Задача № 4.7

На нелінійну систему з амплітудною характеристикою

$$y=G(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ 4x^2, & x>0,\end{cases}$$

подається стаціонарний гауссівський процес $\xi_1(t)$ з параметрами $m_1=0;\ \sigma_1=1$. Знайти математичне сподівання відгуку $\xi_2(t)$.

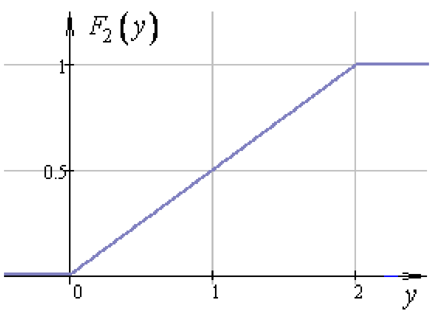
Відповідь: $m_2=4\Phi_0(\infty)=2$**.**

Задача № 4.8

На нелінійну систему з амплітудною характеристикою

$$y=G(x)=2\,|x|$$

подається стаціонарний процес $\xi_1(t)$, рівномірно розподілений на інтервалі $[-1;1]$. Знайти аналітичний вираз для функції розподілу відгуку $\xi_2(t)$ та побудувати її графік.



Відповідь:

$$F_2(y)=\begin{cases}0, & y\le 0,\\ \dfrac{y}{2}, & y\in(0;2],\\ 1, & y>2.\end{cases}$$

Задача № 4.9

На нелінійну систему з амплітудною характеристикою

$$y = G(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ 0,5x, & x \in (0,2], \\ 1, & x > 2, \end{cases}$$

подається стаціонарний процес $\xi_1(t)$, рівномірно розподілений на інтервалі $[0;2]$. Знайти математичне сподівання відгуку $\xi_2(t)$.

Відповідь: $m_2 = 0.5$.

Задача № 4.10

На нелінійну систему з амплітудною характеристикою

$$y = |x - 1|$$

подається стаціонарний гауссівський процес з параметрами $m_1 = 1;\ \sigma = 0.2$. Знайти аналітичний вираз для функції розподілу відгуку $\xi_2(t)$.

Відповідь: $F_2(y) = \begin{cases} 0, & y \le 0, \\ 2\Phi_0(5y), & y > 0. \end{cases}$

ТЕМА №5. ЛІНІЙНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ

Короткі теоретичні відомості

Неперервний випадковий процес $\xi(t)$ називається диференційованим, тоді коли виконується умова

$$\lim_{\Delta t\to 0}\mathbf{M}\left\{\left[\frac{\xi(t_0+\Delta t)-\xi(t_0)}{\Delta t}-\xi'(t_0)\right]^2\right\}=0$$

Для того, щоб випадковий процес $\xi(t)$ был диференіцойваним в точці $t=t_0$ необхідно та достатньо щоб в цій точці була диференційована його коваріаційна функцфія

$$\left.\frac{\partial^2 K(t_1,t_2)}{\partial t_1 \partial t_2}\right|_{t=t_1=t_2}<\infty .$$

Умови диференціювання випадкового процесу в рамках кореляційної функції та математичного сподівання

$$\left.\frac{\partial^2 R(t_1,t_2)}{\partial t_1 \partial t_2}\right|_{t=t_1=t_2}<\infty \qquad \frac{dm(t)}{dt}<\infty$$

Умови існування похідної від стаціонарного випадкового процесу

Коваріаційна функція

$$\left.\frac{d^2 K(\tau)}{d\tau^2}\right|_{\tau=0}<\infty$$

Кореляційна функція та математичне сподівання

$$\left.\frac{d^2 R(\tau)}{d\tau^2}\right|_{\tau=0}<\infty \qquad \frac{dm(t)}{dt}=0$$

Нехай $\xi(t)$ - комплексний випадковий процес, що заданий наступним чином

$$\xi=\int_a^b g(t)\xi(t)dt$$

$g(t)$ - невипадкова комплекснозначна функція

Інтеграл від випадкового процесу $\xi(t)$ існує, якщо

$$\lim_{\Delta t_k \to 0} \mathbf{M}\left\{\left[\sum_{k=1}^{n} g(t_k)\cdot\xi(t_k)\cdot\Delta t_k - \int_a^b g(t)\cdot\xi(t)\,dt\right]^2\right\}=0$$

Умови існування інтегралу від випадкового процесу

Коваріаційна функція

$$\iint_a^b g(t_1)\,g^*(t_2)K(t_1,t_2)\,dt_1dt_2 = C<\infty$$

Кореляційна функція та математичне сподівання

$$\iint_a^b g(t_1)\,g^*(t_2)R(t_1,t_2)\,dt_1dt_2 = C<\infty \qquad \int_a^b g(t)m(t)\,dt = C<\infty$$

Для стаціонарних випадкових процесів умова існування інтегралу від випадкового процесу має вигляд

Коваріаційна функція

$$\iint_a^b g(t_1)\,g^*(t_2)K(t_2-t_1)\,dt_1dt_2 = C<\infty$$

Кореляційна функція та математичне сподівання

$$\iint_a^b g(t_1)\,g^*(t_2)R(t_2-t_1)\,dt_1dt_2 = C<\infty \qquad m\int_a^b g(t)\,dt = C<\infty$$

Контрольні питання

1. Дати визначення неперервності випадкового процесу в середньоквадратичному.
2. Сформулювати умову неперервності випадкового процесу в термінах коваріаційної функції.
3. Сформулювати умови неперервності випадкового процесу в термінах математичного сподівання і кореляційної функції.

4. Сформулювати умову неперервності стаціонарного випадкового процесу.
5. Чи означає неперервність випадкового процесу неперервність його реалізацій? Пояснити.
6. Дати визначення похідної від випадкового процесу.
7. Сформулювати умови існування похідної випадкового процесу в термінах коваріаційної функції.
8. Сформулювати умови існування похідної випадкового процесу в термінах математичного сподівання і кореляційної функції.
9. Сформулювати умови існування похідної стаціонарного випадкового процесу.
10. Чому дорівнює математичне сподівання та кореляційна функція похідної випадкового процесу?
11. Чому дорівнює математичне сподівання та кореляційна функція похідної стаціонарного випадкового процесу?

Задачі для самостійної роботи

Задача № 5.1

Стаціонарний випадковий процес $\xi(t)$ має математичне сподівання m_ξ та кореляційну функцію $R_\xi(\tau)$.

Знайти математичне сподівання та кореляційну функцію випадкового процесу $\eta(t) = a_0(t) + a_1(t) \cdot \dfrac{d\xi(t)}{dt}$, де $a_i(t)$ – деякі детерміновані функції.

Відповідь: $m_\eta = a_0(t)$,

$$R_\eta(t_1, t_2) = a_1(t_1) a_1(t_2) \cdot \frac{\partial^2 R_\xi(t_2 - t_1)}{\partial t_1 \partial t_2}$$

Задача № 5.3

Імпульсна характеристика системи дорівнює $h(t)=E(t)E(1-t)$. На систему подається випадковий процес $\xi(t)$, який має математичне сподівання $m_\xi(t)=t+4$.

Знайти математичне сподівання відгуку системи $\eta(t)$.

Відповідь: $m_\eta(t)=t+3.5$.

Задача № 5.4

Знайти кореляційну функцію випадкового процесу $\xi(t)=2t\eta(t)+t^2$, якщо $\eta(t)$ – стаціонарний випадковий процес з кореляційною функцією $R_\eta(\tau)$.

Відповідь: $R_\xi(t_1,t_2)=4t_1t_2R_\eta(t_2-t_1)$.

Задача № 5.5

Задано стаціонарний випадковий процес $\xi(t)$ з кореляційною функцією $R_\xi(\tau)$. Знайти кореляційну функцію $R_\eta(\tau)$ випадкового процесу $\eta(t)=\xi(t)+\xi'(t)$.

Відповідь: $R_\eta(\tau)=R_\xi(\tau)-\dfrac{\partial^2 R_\xi(\tau)}{\partial\tau^2}$.

Задача №5.6

Визначити математичне сподівання $m_\eta(t)$ випадкового процесу $\eta(t)=\dfrac{d}{dt}\left[g(t)\xi(t)\right]$, якщо $g(t)=\alpha\sin(\omega t)$ – детермінована функція, а випадковий процес $\xi(t)$ має математичне сподівання $m_\xi(t)=c$.

Відповідь: $m_\eta(t) = \alpha\omega c \cdot \cos(\omega t)$.

Задача № 5.7

На вхід лінійної непараметричної системи з імпульсною характеристикою $h(t) = \alpha e^{-\alpha t} E(t),\ \alpha > 0$ подається випадковий процес $\xi(t)$, математичне сподівання якого $m_\xi(t) = m_0 \cdot e^{\beta \cdot t}$, $m_0, \beta - const$.

Знайти математичне сподівання $m_\eta(t)$ вихідного процесу.

Відповідь: $m_\eta(t) = \dfrac{\alpha m_0}{\alpha + \beta} e^{\beta t}$.

Задача № 5.8

Випадковий процес $\xi(t) = g(t) + \eta(t)$, де $g(t)$ - детермінована диференційована функція, $\eta(t)$ – стаціонарний випадковий процес з кореляційною функцією $R_\eta(\tau) = e^{-\tau^2}$.

Знайти взаємну кореляційну функцію процесів $\xi(t)$ и $\xi'(t)$.

Відповідь: $R_{\xi\xi'}(\tau) = -2\tau e^{-\tau^2}$.

Задача № 5.9

Випадковий процес задано формулою $\xi(t) = \eta \cos(t)$, де випадкова величина η розподілена нормально з параметрами $m_\eta = 2, D_\eta = 1$.

Знайти математичне сподівання та кореляційну функцію випадкового процесу $\varsigma(t) = \xi(t) - 2\xi'(t)$.

Відповідь: $m_\varsigma(t) = 2\cos(t) + 4\sin(t)$,

$R_\zeta(t_1, t_2) = \left[\cos(t_1) + 2\sin(t_1)\right]\left[\cos(t_2) + 2\sin(t_2)\right]$.

Задача № 5.10

Випадковий процес $\xi(t)$ має моментні функції $m_{\xi}(t) = 2\sin(t)$ та $R_{\xi}(t_1, t_2) = 0.5\sin(t_1)\sin(t_2)$.

Знайти кореляційну функцію випадкового процесу $\eta(t) = \int_0^t \xi(u)\,du$.

Відповідь: $R_{\eta}(t_1, t_2) = 0.5\big(1 - \cos(t_2) - \cos(t_1) + \cos(t_1)\cos(t_2)\big)$.

ТЕМА №6. СПЕКТРАЛЬНА ЩІЛЬНІСТЬ СТАЦІОНАРНИХ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ

Короткі теоретичні відомості

Нехай маємо випадковий процес $\xi(t)$ та його спектральну функцію $F(t)$, тоді введемо функцію $S(f)=F'(f)$ – спектральна щільність випадкового процесу. Теорема Вінера – Хінчина: Встановлює зв'язок між кореляційною функцією та спектральною щільністю випадкового процесу

$$R(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{i2\pi f\tau}S(f)df, \qquad S(f)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi f\tau}R(\tau)d\tau.$$

Основні властивості спектральної щільності $S(f)$:

1) $R(0)=\int_{-\infty}^{\infty} S(f)df=\sigma^2$

2) $S(f)\geq 0$, таким чином маємо умову для кореляційної функції

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi f\tau}R(\tau)d\tau\geq 0,$$

що зветься додатня визначеність кореляційної функції.

3) $S(f)$ – дійсна функція.

4) Функція парна, тобто $S(-f)=S(f)$.

5) Враховуючи парність загальні вирази для знаходження спектральної щільності та кореляційної функції можна представити у вигляді

$$S(f)=2\int_{0}^{\infty}\cos 2\pi f\tau R(\tau)d\tau, \qquad R(\tau)=2\int_{0}^{\infty}\cos 2\pi f\tau S(f)df.$$

6) Розмірність :$\left[S(f)\right]=\left[\xi^2(t)\right]\cdot c$, наприклад, якщо $\left[\xi^2(t)\right]=B^2$ отримаємо розмірність спектральної щільності: $B^2c=\dfrac{B^2}{Гц}$.

Таким чином, спектральна щільність це дисперсія окремих гармонійних складових, частоти яких належать діапазону $\left[f_0; f_0+\Delta f\right]$, тобто

$$\int_{f_0}^{f_0+\Delta f} S(f)\,df = \sigma^2_{\Delta f}$$

Спектральна щільність характеризує ту частину дисперсії випадкового процесу, яка належить смузі частот $\Delta f = 1\,\text{Гц}$.

Розглянемо два випадкових процеси $\xi_1(t)$ та $\xi_2(t)$ які є стаціонарно зв'язаними з відомими кореляційними функціями $R_1(\tau),\ R_2(\tau),\ R_{12}(\tau)$.

Взаємна спектральна щільність та кореляційна функція цих процесів визначається наступним чином відповідно

$$S_{12}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{12}(\tau) e^{-i2\pi f\tau} d\tau, \qquad R_{12}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{12}(f) e^{i2\pi f\tau} df$$

Взаємна спектральна щільність характеризує дисперсії тих гармонічних складових, які є спільними для процесів $\xi_1(t)$ та $\xi_2(t)$.

Властивості взаємної спектральної щільності $S_{12}(f)$:

1) комплекснозначна функція

2) $S_{12}(-f) = S^*_{12}(f)$, значком «*» позначена комплексно спряжена функція.

3) Функція обмежена, тобто $\left|S_{12}(f)\right|^2 \le S_1(f) S_2(f)$.

4) Розмірність $\left[S_{12}(f)\right] = \left[\xi_1(t)\right]\cdot\left[\xi_2(t)\right]\cdot[t] = \dfrac{\left[\xi_1(t)\right]\cdot\left[\xi_2(t)\right]}{\left[f\right]}$

Контрольні питання

1. Сформулювати теорему Вінера -Хінчина.
2. Що називається спектральною щільністю стаціонарного випадкового процесу?
3. Як за допомогою відомої спектральної щільності знайти дисперсію випадкового процесу?

4. Як за допомогою відомої спектральної щільності перевірити властивість додатньої визначеності кореляційної функції стаціонарного випадкового процесу?
5. Навести властивості спектральної щільності дійсного випадкового процесу? Що вона характеризує?
6. Дати визначення взаємної спектральної щільності стаціонарних випадкових процесів. Що вона характеризує?
7. Навести основні властивості взаємної спектральної щільності.

Задачі для самостійної роботи

Задача № 6.1

Функція $R(\tau)$ визначена формулою

$$R(\tau)=\begin{cases}0, & |\tau|>\tau_0,\\ \sigma^2, & |\tau|\le\tau_0, \quad \tau_0>0.\end{cases}$$

Чи може $R(\tau)$ бути кореляційною функцією деякого стаціонарного випадкового процесу? Відповідь пояснити.

Відповідь: ні, не може. Не виконується умова $S\left(f\right)=\Im\left\{R\left(\tau\right)\right\}\ge 0$.

Задача № 6.2

Знайти ширину спектру стаціонарного випадкового процесу, який має кореляційну функцію $R(\tau)=\sigma^2\cdot\exp(-\alpha|\tau|), \quad \alpha>0$.

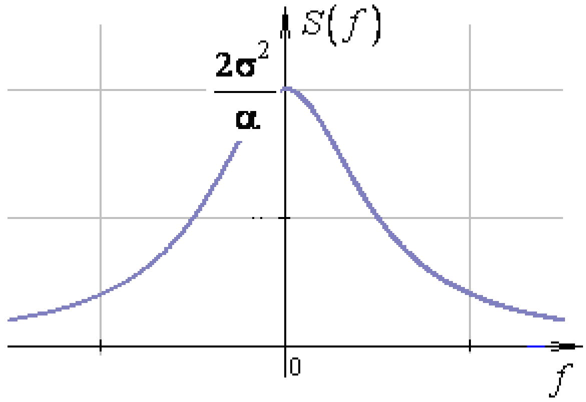
Відповідь: $\Delta f=\dfrac{\alpha}{4}$.

Задача № 6.3

Випадковий процес $\xi(t)$ має кореляційну функцію

$$R(\tau)=\sigma^2\cdot\exp(-\alpha|\tau|), \qquad \alpha>0.$$

Знайти спектральну щільність процесу $\xi(t)$ та побудувати її графік.



Відповідь: $S(f) = \dfrac{2\alpha\sigma^2}{\alpha^2 + 4\pi^2 f^2}$.

Задача № 6.4

Стаціонарний випадковий процес $\xi(t)$ має спектральну щільність

$$S(f) = \begin{cases} \dfrac{N}{2}, \ |f| \in [f_1, f_2], \\ 0, \ |f| \notin [f_1, f_2], \end{cases}$$

де $f_2 > f_1 > 0, N > 0, const.$

Знайти дисперсію процесу $\xi(t)$.

Відповідь: $\sigma^2 = N(f_2 - f_1)$.

Задача № 6.5

Взаємна кореляційна функція стаціонарно зв'язаних випадкових процесів $\xi(t)$ та $\eta(t)$ дорівнює

$$R_{\xi\eta}(\tau) = \begin{cases} 9\exp(-3\tau)), & \tau > 0, \\ 0, & \tau < 0. \end{cases}$$

Знайти взаємні спектральні щільності $S_{\xi\eta}(f), S_{\eta\xi}(f)$.

Відповідь: $S_{\xi\eta}(f) = \dfrac{9}{3 + i2\pi f}$, $S_{\eta\xi}(f) = \dfrac{9}{3 - i2\pi f}$.

Задача № 6.6

Знайти спектральну щільність випадкового процесу

$$\xi(t) = A \cdot \cos(2\pi f_0 t + \varphi),$$

де A, f_0 - постійні, а φ - випадкова величина, рівномірно розподілена на інтервалі $[0, 2\pi]$.

Відповідь: $S(f) = \dfrac{A^2}{2}\delta(f - f_0)$.

Задача № 6.7

Знайти кореляційну функцію стаціонарного випадкового процесу $\xi(t)$, у якого спектральна щільність дорівнює

$$S(f) = \begin{cases} \dfrac{N}{2}, & |f| \le f_1, \\ 0, & \text{при других} \quad f. \end{cases}$$

Відповідь: $R(\tau) = f_1 N \operatorname{sinc}(2\pi f_1 \tau)$, $\operatorname{sinc}(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$..

Задача № 6.8

Некорельовані стаціонарні випадкові процеси $\xi_1(t)$, $\xi_2(t)$ мають відповідно кореляційні функції $R_k(\tau) = \sigma_k^2 \exp(-\alpha_k |\tau|)$, $\alpha_k > 0$, $k = 1, 2$.

Знайти спектральну щільність випадкового процесу $\eta(t) = \xi_1(t) + \xi_2(t)$.

Відповідь: $S_\eta(f) = S_{\xi_1}(f) + S_{\xi_2}(f) = \dfrac{2\alpha_1\sigma_1^2}{\alpha_1^2 + 4\pi^2 f^2} + \dfrac{2\alpha_2\sigma_2^2}{\alpha_2^2 + 4\pi^2 f^2}$.

Задача № 6.9

Некорельовані стаціонарні випадкові процеси $\xi_1(t)$, $\xi_2(t)$ та $\xi_3(t)$ мають відповідно кореляційні функції

$$R_k(t) = \sigma_k^2 \cdot \exp(-\alpha_k |\tau|), \quad \alpha_k > 0, \ k = \overline{1,3}.$$

Знайти взаємну спектральну щільність випадкових процесів $\eta(t) = \xi_1(t) + \xi_2(t)$ та $\gamma(t) = \xi_1(t) - \xi_3(t)$.

Відповідь: $S_{\eta\gamma}(f) = S_{\xi_1}(f) = \dfrac{2\alpha_1\sigma_1^2}{\alpha_1^2 + 4\pi^2 f^2}$.

Задача № 6.10

Записати вираз для спектральної щільності випадкового процесу $\eta(t) = \xi(t) + \xi'(t)$, де $\xi(t)$ – стаціонарний випадковий процес зі спектральною щільністю $S_\xi(f)$.

Відповідь: $S_\eta(f) = S_\xi(f)\left[1 - (2\pi f)^2\right]$.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Денисенко А.Н.* Сигналы. Теоретическая радиотехника. Справочное пособие. – М.: Горячая линия – Телеком, 2005. – 704 с.
2. *Волощук* Ю.І. Сигнали та процеси у радіотехніці: Підручник для студентів вищих навчальних закладів, том 2. – Харків: «Компанія СМІТ», 2003. – 444 с.
3. *Тихонов В.И.* Статистическая радиотехника. – М.: Сов. радио, 1982. – 624 с.
4. *Левин Б.Р.* Теоретические основы статистической радиотехники. Кн. 1. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Сов. радио, 1974. – 552 с.
5. *Ливщиц Н.А.,* Пугачев В.Н. Вероятностный анализ систем автоматического управления. Т.2. Нелинейные системы, системы дискретного действия. – М.: Сов. радио, 1963. – 484 с.
6. *Горяинов В.Т.,* Журавлев А.Г., Тихонов В.И. Статистическая радиотехника: Примеры и задачи / Под ред. В.И. Тихонова. – М.: Сов. радио, 1980. – 544 с.
7. *Аналіз* нелінійного перетворення стаціонарного гауссівського випадкового процесу: Метод. рекомендації до виконання курсової роботи з дисципліни «Теорія процесів та систем. Випадкові процеси» для студентів напряму підготовки 050803 Акустотехніка / Уклад.: О.В. Гармаш, Т.А. Горовецька, О.І. Красильніков - К.: ВЦ «Принт-центр», 2008. – 44 с.