

Міністерство освіти і науки України
Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

Елементи теорії біфуркацій

Методичні вказівки
та навчальні завдання для студентів інженерних спеціальностей та студентів
другого курсу фізико математичного факультету

Київ
«КПІ імені Ігоря Сікорського»
2021

Елементи теорії біфуркацій: Методичні вказівки та навчальні завдання для студентів інженерних спеціальностей та студентів другого курсу фізико-математичного факультету / Уклад.: А.Л. Гречко, М.Є. Дудкін.–К.:НТУУ «КПІ імені Ігоря Сікорського», 2021. – 33 с.

*Гриф надано Методичною радою «КПІ імені Ігоря Сікорського»
(Протокол № 7 від 13 травня 2021р.)
За поданням Вченої ради фізико-математичного факультету
«КПІ імені Ігоря Сікорського» (Протокол № 3 від 29 ,березня 2021р.)*

Навчальне видання

Елементи теорії біфуркацій

Методичні вказівки та навчальні завдання для студентів інженерних спеціальностей та студентів другого курсу фізико-математичного факультету

Укладачі: Гречко Андрій Леонідович, кандидат фіз.-мат. наук, доцент;
Дудкін Микола Євгенович, доктор фіз.-мат. наук, професор.

Відповідальний редактор: Волков Андрій Вікторович,
кандидат фіз.-мат. наук, доцент.

Рецензент: Дюженкова Ольга Юріївна,
кандидат фіз.-мат. наук, доцент.

Зміст

Загальні положення.....	4
1. Головні означення.....	5
2. Біфуркація сідло-вузол.....	11
3. Біфуркація Андронова-Хопфа.....	19
4. Біфуркація граничних циклів.....	24
5. Додаток 1. Розрахункова робота з теорії біфуркацій.....	28
6. Додаток 2. Спрощене доведення теореми Андронова-Хопфа.....	30
Список літератури.....	

Загальні положення.

Теорія біфуркацій вивчає перебудову в фазовому просторі при зміні параметрів системи звичайних диференціальних рівнянь, які завжди описують важливі процеси в фізиці, хімії, біології, медицині, економіці тощо. Саме завдяки цьому зв'язку з іншими науками теорія біфуркацій займає особливий статус в диференціальних рівняннях та динамічних системах і фактично в останні роки стала міждисциплінарним окремим розділом.

Теорія біфуркацій займається вивченням локальних сімейств диференціальних рівнянь, наприклад диференціальних рівнянь, які залежать від параметрів. Однією з важливих задач теорії біфуркацій – зрозуміти, як при зміні параметрів якісно перебудовується топологічна структура системи. Диференціальні рівняння, які описують реальні природні задачі завжди містять параметри, точні значення яких невідомі. Якщо система не є структурно стійкою, то важливо знати які саме біфуркації фазового портрету відбуваються при зміні параметрів. Перифразовуючи слова Пуанкаре про періодичні розв'язки, можна сказати, що біфуркації наче смолоскипи освітлюють шлях від досліджених систем до недосліджених. Першим кроком в дослідженні багатьох задач якісної теорії диференціальних рівнянь є спрощення рівняння, тому ключовими методами дослідження є теорія центральних многовидів та теорія нормальних форм. Теорія центральних многовидів дозволяє зводити досліджувану задачу до задачі меншої розмірності, а теорія нормальних форм дозволяє спрощувати рівняння до вигляду, який містить нелінійні члени максимально простого вигляду.

Тривалий час теорія біфуркацій була частиною спеціального курсу з якісної теорії диференціальних рівнянь або динамічних систем і не була представлена в стандартних курсах диференціальних рівнянь але ситуація радикально змінилася в останні десятиріччя: сучасні підручники з диференціальних рівнянь [Bar, Cai, Ric] містять необхідний мінімум з теорії біфуркації і написані не тільки для фізико-математичних факультетів але і для інженерних спеціальностей. Саме тому дані методичні вказівки призначені як складова частина курсу диференціальних рівнянь для студентів 2 курсу фізико-математичних факультетів, так і для студентів інженерних спеціальностей в дещо скороченому вигляді.

Методичні вказівки містять вступні означення, найважливіші типи локальної однопараметричної біфуркації: біфуркація сідло-вузол, Андронова-Хопфа, граничних циклів. Ключові теореми містять доведення, присутня достатня кількість прикладів з різних наук та вправ для домашніх завдань з відповідями. В кінці методичних вказівок наведена розрахунково-графічна робота на виконання якої відводиться декілька тижнів.

1. Головні означення.

Основним об'єктом якісної теорії диференціальних рівнянь є автономні системи звичайних диференціальних рівнянь, які записуються у вигляді

$$\dot{x} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{dx}{dt} = f(x), \quad x(t_0) = x_0, \quad (1)$$

де $x = (x_1, \dots, x_n)$, $f(x) = (f_1, \dots, f_n)$. Будемо вважати, що f_1, \dots, f_n – C^r -гладкі ($r \geq 1$) функції, які визначені в деякій відкритій області $D \subseteq R^n$. Термінологічно прийнято вважати, що змінна t є часом, а область D – фазовий простір системи.

Означення. Будемо говорити, що векторне поле f породжує **потік (динамічну систему)** $\varphi^t: D \rightarrow R^n$, де $\varphi^t(x) = \varphi(x, t)$ – гладка функція по $x \in D$ та $t \in I = (a, b) \subset R$, причому φ^t задовольняє рівняння (1) в сенсі:

$$\left. \frac{d}{dt}(\varphi(x, t)) \right|_{t=\tau} = f(\varphi(x, \tau))$$

для всіх $x \in D$ та $t \in I$.

Неважко переконатися, що оператор φ^t задовольняє наступним груповим умовам.

$$(i) \quad \varphi^0(x) = x$$

$$(ii) \quad \varphi^s(\varphi^t(x)) = \varphi^{s+t}(x), \quad \forall s, t \in R$$

$$(iii) \quad \varphi^{-t}(\varphi^t(x)) = \varphi^t(\varphi^{-t}(x)) = x, \quad \forall t \in R$$

Означення. Особливою точкою потоку φ^t називається точка $x_0 \in D$, яка задовольняє умову $\varphi^t(x_0) = x_0$. Якщо $f(x_0) = 0$, ($x_0 \in D$), тоді x_0 називається особливою точкою векторного поля f або рівняння (1). Траєкторія, яка проходить через x_0 називається **періодичною** (цикл), якщо $\exists T > 0$ таке, що виконується $\varphi^{t+T}(x_0) = \varphi^t(x_0)$.

Означення. Множина $I \subset D$ називається **інваріантною** відносно потоку φ^t або системи (1), якщо $\varphi^t(I) \subset I \quad \forall t \in R$. Множина I називається додатно інваріантною, якщо $\varphi^t(I) \subset I$ при $t \geq 0$.

Означення. Потоки φ^t та ψ^t або відповідні векторні поля називаються **топологічно спряженими** в околі особливих точок, якщо існує гомеоморфізм h , який переводить особливу точку φ^t в особливу точку ψ^t та:

$$h(\varphi^t(x)) = \psi^t(h(x)). \quad (2)$$

Потоки φ^t та ψ^t або відповідні векторні поля називаються **топологічно еквівалентними**, якщо існує гомеоморфізм h , який переводить деякий окіл особливої точки системи (1.11) в деякий окіл особливої точки (1.12) та

$$h(\varphi^{\tau(x,t)}(x)) = \psi^t(h(x)), \quad (3)$$

де τ – деяка монотонно зростаюча по t функція.

Зауваження.

1. Топологічно спряжені системи є топологічно еквівалентними (покласти $\tau(t, x) = t$).
2. Обидва означення переносяться на гладкий випадок C^n (або C^1) еквівалентності або спряженості.

Означення. Нехай $\lambda_i(A)$ – спектр матриці A . Особлива точка $x = 0$ системи $x' = Ax$ називається **гіперболічною**, якщо $\operatorname{Re} \lambda_i(A) \neq 0, \forall i$.

Розглянемо систему диференціальних рівнянь

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2), \quad i = 1, 2. \quad (4)$$

де $f_i \in C^1(D^2)$, $D^2 = \{x_1^2 + x_2^2 = R^2\}$. Припустимо, що векторне поле $f = (f_1, f_2)$ не дотикається до границі ∂D^2 диска D^2 . Позначимо множину таких векторних полів через $\Upsilon(D^2)$. Якщо $f, g \in \Upsilon(D^2)$, то C^1 -нормою є

$$\|f - g\|_1 = \max_{(x_1, x_2) \in D^2} \{\|f - g\| + \|Df - Dg\|\}.$$

Означення. Нехай $f \in \Upsilon(D^2)$, векторне поле f називається **структурно стійким (або грубим)**, якщо $\exists \delta > 0$, що для довільного збурення $\forall g \in \Upsilon(D^2)$ такого, що $\|f - g\| < \delta$ впливає топологічна еквівалентність векторних полів f та g .

Зауваження.

1. Оригінальне означення Андронова-Понтрягіна (1937 р.) додатково вимагало, щоб $\forall \varepsilon > 0 \rho(p, h(p)) < \varepsilon \quad \forall p \in D^2$, де h – спрягаючий гомеоморфізм, ρ – довільна метрика на D^2 , яка сумісна з введеною топологією. Досі невідомо, чи будуть еквівалентними ці два означення, але відомо, що у випадку замкнених многовидів означення еквівалентні.

- В 1962р. Піксото довів, що структурно стійкі векторні поля на двовимірних компактних многовидах M «типові», тобто утворюють щільну відкриту підмножину в $C^1(M)$. Пізніше С. Смейл встановив, що у випадку некомпактних многовидів розмірності вище 2 такої властивості не має.

Означення. Нехай x_0 – особлива точка рівняння (1). **Лінеаризацією** рівняння (1) в точці x_0 назвемо лінійне диференціальне рівняння

$$\dot{y} = Df(x_0)y, \quad (5)$$

де Df – матриця Якобі функції $f(x)$, $y \in R^n$.

Теорема (Хартман, Гробман, 1960 р.) Нехай x_0 – гіперболічна особлива точка векторного поля $f(x)$ в (1). Тоді існує окіл U точки x_0 такий, що потік φ^t топологічно спряжений лінеаризації (5) в околі U .

Зауваження.

- Слід відмітити, що теорема вимагає C^1 -гладкості векторних полів, але еквівалентність вимагається тільки C^0 -класу. Стернберг (див. [ГП]) показав, що за додаткових умов «нерезонансності», спряження буде C^1 -гладким.
- Теорема не має місця для негіперболічних особливих точок, де загалом локальна картина систем (5) та (1) може сильно відрізнятись.

Метод нормальних форм, розроблений А. Пуанкаре, це шлях знаходження координатної системи, в якій динамічна система має максимально простий вигляд. Причому важливими є три обставини:

- Метод є локальним, тобто координатне перетворення будується в околі відомого розв'язку. На початковому етапі розглядаємо тільки особливі точки.
- Координатні перетворення є нелінійними функціями від незалежної змінної, але ці перетворення знаходяться, як розв'язки деяких лінійних задач.
- Структура нормальної форми цілком визначається лінійною частиною векторного поля.

Означення. Набір власних чисел $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ називається **резонансним**, якщо існує цілочисельне співвідношення

$$\lambda_s = (m, \lambda),$$

де $m = (m_1, \dots, m_n)$, $m_k \geq 0$, $\sum m_k \geq 2$, $m_k \in Z^+$. Число $|m| = \sum m_k$ називається **порядком резонансу**.

Приклад 1.

- а) $\lambda_1 = 2\lambda_2$ – резонанс другого порядку;
- б) $2\lambda_1 = 3\lambda_2$ – не резонанс;
- в) $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$ ($\lambda_1 = 2\lambda_1 + \lambda_2$) – резонанс третього порядку;
- г) $\lambda_1 = \lambda_2$ – не резонанс;
- д) $\lambda_k = \pm i\omega$ – резонанс.

Нехай набір власних чисел $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ матриці A резонансний та $\{e_i\}$ – одиничний базис в R^n , $x^m = x_1^m \cdot \dots \cdot x_n^m$ – вектор-моном (одночлен) від координат x_i , m – мультиіндекс.

Означення. Вектор-моном $x^m \cdot \vec{e}_s$ називається **резонансним**, якщо $\lambda_s = (m, \lambda)$, $|m| \geq 2$.

Приклад 2.

Нехай в двовимірному резонансі $\lambda_1 = 2\lambda_2$. Тоді $\lambda_1 = 0 \cdot \lambda_1 + 2\lambda_2$, $m = (0, 2)$. Тому єдиним резонансним мономом є $x_2^2 \cdot \vec{e}_1 = (x_2^2, 0)^T$.

Розглянемо диференціальне рівняння

$$\dot{x} = A \cdot x + f(x), \quad (6)$$

де $f(x) = f_2(x) + f_3(x) + \dots$ – поліноміальні доданки, $f(0) = 0$, $x \in R^n$.

Теорема (Пуанкаре). Припустимо, що матриця A – діагональна: $A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

1. Якщо матриця A – нерезонансна, тоді в околі нуля існує поліноміальна заміна

$$x = y + h(y) = y + \sum_{k=2}^N h_k(y) + o(|y|^N), \quad (7)$$

яка приводить (6) до вигляду

$$\dot{y} = Ay. \quad (8)$$

2. Якщо A – резонансна, тоді існує заміна (7), яка приводить (6) до вигляду

$$\dot{y} = Ay + g_2^{res}(y) + \dots + g_{N-1}^{res}(y) + o(|y|^N), \quad (9)$$

де $g_i^{res}(y)$ – резонансні члени рівняння (6).

Зауваження.

1. Відповідне рівняння (8) або (9) називається **нормальною формою** рівняння (6).
2. Припущення діагонального вигляду матриці A не є обтяжливим. Якщо A має кратні власні числа, то нормальна форма рівняння (6) не змінюється [Чоу].
3. Для діагоналізації матриці A використовуємо стандартний метод представлення:

$$\text{diag}(A) = S^{-1} \cdot A \cdot S$$

де S – матриця з власних векторів.

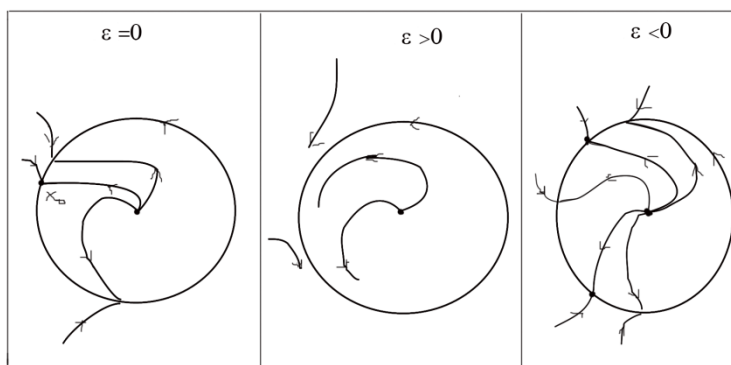
Будемо розглядати питання якісної поведінки множини розв'язків рівняння з параметрами

$$\dot{x} = f(x, \varepsilon), \quad (10)$$

де $f \in C^r(R^n \times R^k)$, $\varepsilon \in R^k$, $x \in R^n$. Припустимо, що (10) має особливу точку (x_0, ε_0) : $f(x_0, \varepsilon_0) = 0$. Якщо особлива точка гіперболічна, то за теоремою Хартмана-Гробмана та теоремою про структурну стійкість, можна стверджувати, що малими змінами параметру ε , в околі (x_0, ε_0) стійкість та якісна поведінка не змінюється. Таким чином першими біфуркаційними задачами будуть дослідження якісної перебудови системи (10) у випадку негіперболічної особливої точки.

Приклад. Розглянемо одну параметричну систему

$$\dot{x} = x(1 - x^2 - y^2) - y(1 + \varepsilon + x), \quad \dot{y} = x(1 + \varepsilon + x) + y(1 - x^2 - y^2), \quad (11)$$



Мал. 1

яка в полярних координатах має вигляд

$$\dot{\varphi} = 1 + \varepsilon + \rho \cos \varphi,$$

$$\dot{\rho} = \rho(1 - \rho^2).$$

◀ Неважко перевірити, що при $\varepsilon = 0$ маємо негіперболічну точку $x_0 = (\rho_0, \varphi_0) = (1, \pi)$ зі спек-

тром матриці лінеаризації: $\lambda_{1,2} = 0; -2$.

При $\varepsilon > 0$ особлива точка зникає, а при $\varepsilon < 0$ з'являються дві особливі точки: сідло та вузол (див. Мал. 1). Зауважимо, що за критерієм Пуанкаре-Бендіксона при $\varepsilon > 0$ є стійкий граничний цикл, але при $\varepsilon = 0$ він зникає з утворенням гомоклінічної орбіти. Така радикальна перебудова якісної картини має назву гомоклінічної біфуркації типу сідло-вузол. ▶

Точка $\varepsilon = 0$ із прикладу є класичним прикладом точки біфуркації, тобто такого

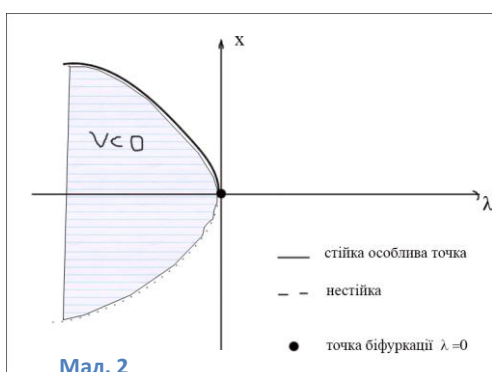
значення параметру ε при проходженні через яке система (10) має нееквівалентні фазові портрети.

Означення. Значення параметру ε_0 , якому відповідає негіперболічна особлива точка x_0 системи (10) називається **точкою біфуркаційного значення**, а сама точка (x_0, ε_0) – **точкою біфуркації** системи (10). Точка біфуркації не вироджена, якщо $D_{xx}(f(x_0, \varepsilon_0)) \neq 0$.

Приклад. Розглянемо консервативну систему

$$\ddot{x} = -V(x, \lambda),$$

де $V = x^2 + \lambda$. ◀ Неважко перевірити, що при $\lambda < 0$ маємо 2 центри $x = \pm\sqrt{-\lambda}$ (стійкі особливі точки), при $\lambda = 0$ – єдина особлива точка $(0,0)$, при $\lambda > 0$ – жодної. Тобто $\lambda = 0$ точка біфуркації та зобразивши криву $V = 0$ на площині (x, λ) , отримаємо (див. Мал. 2) так звану біфуркаційну діаграму та біфуркаційну криву (множину) $\lambda = -x^2$. ▶



Означення 4.13. Біфуркаційною діаграмою системи (10) назвемо стратифікацію (розкладання на випадки) простору параметрів за то-

пологічною еквівалентністю фазового портрету системи (10) та візуальним представленням фазового портрету для кожного випадку.

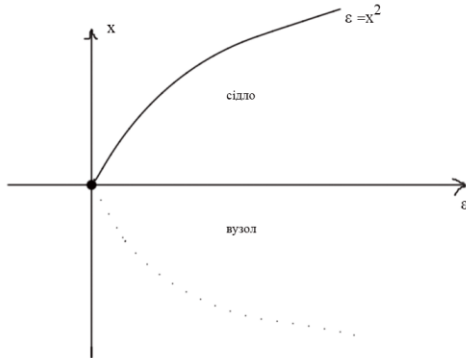
Означення. Корозмірністю біфуркації в точці x_0 системи (10) називається мінімальна кількість незалежних умов на параметри, які описують біфуркаційну множину на біфуркаційній діаграмі. Іншими словами, корозмірність біфуркації – це мінімальна кількість параметрів системи (10), необхідної для побудови версальної деформації векторного поля при $\varepsilon = 0$ в негіперболічній особливій точці x_0 .

Виділяють наступні біфуркації корозмірності 1:

1. $\dot{x} = \varepsilon \pm x^2$ (сідло-вузол, fold). (12)
2. $\dot{x} = \varepsilon x \pm x^2$ (транскритична).
3. $\dot{x} = \varepsilon \pm x^3$ (вилка).
4. $\begin{cases} \dot{x} = \varepsilon x - y + (ax - by)(x^2 + y^2), \\ \dot{y} = x + \varepsilon y + (ax + by)(x^2 + y^2). \end{cases}$ (Андропова-Хопфа).

2. Біфуркація сідло-вузол.

Відомо [Чоу, Куз], що рівняння (12) є версальною деформацією векторного поля $\dot{x} = -x^2 + \dots$.



Мал. 3

Далі, якщо $\varepsilon < 0$, тоді відсутні особливі точки, при $\varepsilon = 0$ — одна, при $\varepsilon > 0$ — дві точки $x = \pm\sqrt{\varepsilon}$ (одна стійка $\sqrt{\varepsilon}$, інша ні). Таким чином маємо біфуркаційну діаграму (Мал. 3) з точкою біфуркації $\varepsilon = 0$ (сідло-вузол) та біфуркаційною множиною $\varepsilon = x^2$. Сідловузловою біфуркацією геометрично характеризується тим, що через точку біфуркації проходить тільки одна

біфуркаційна крива з особливих точок (неважливо перевірити, що для цього слід вимагати $\frac{\partial f}{\partial \varepsilon}(0,0) \neq 0$).

Твердження 1. Нехай в системі (10): $f(x, \varepsilon) \in C^2(R^n \times R^1)$ та (x_0, ε_0) — не гіперболічна особлива точка, тобто $f(x_0, \varepsilon_0) = 0, D_x f(x_0, \varepsilon_0) = 0$ і виконуються умови:

1. $\Delta = D_{xx} f(x_0, \varepsilon_0) \neq 0.$ (13)
2. $D_\varepsilon f(x_0, \varepsilon_0) \neq 0,$

тоді точка (x_0, ε_0) є точкою біфуркації сідло-вузол.

Доведення. ◀ З умов твердження випливає, що f можна представити у вигляді $f(x, \varepsilon) = \frac{1}{2}\Delta x^2 + o(x^2)$, а загалом розвинення в степеневий ряд має вигляд

$$f(x, \varepsilon) = a(\varepsilon) + b(\varepsilon)(x - x_0) + \frac{1}{2}\Delta(\varepsilon)(x - x_0)^2 + r(x, \varepsilon),$$

де $a(\varepsilon_0) = f(x_0, \varepsilon_0) = 0, b(\varepsilon_0) = D_x f(x_0, \varepsilon_0) = 0, \Delta(\varepsilon_0) = \Delta \neq 0, r(x, \varepsilon) = o(x^2)$. Теорема про неявну функцію не може бути застосована (умова $D_x f(x_0, \varepsilon_0) = 0$!), але якщо розглянемо критичні точки f , тобто нулі функції $F(x, \varepsilon) = D_x f(x, \varepsilon) = b(\varepsilon) + \Delta(\varepsilon)(x - x_0) + D_x r(x, \varepsilon)$.

То за виконання умов $F(x_0, \varepsilon_0) = b(\varepsilon_0) = 0$ та $D_x F(x_0, \varepsilon_0) = \Delta \neq 0$ впливає можливість застосування теореми про неявну функцію, а саме існують околиці V та W точки (x_0, ε_0) такі, що коли $\varepsilon \in W$ існує єдина $x = \xi(\varepsilon) \in V$ така, що $F(\xi(\varepsilon), \varepsilon) = 0$ та $\varepsilon(\varepsilon_0) = 0$ та інтервал $I(\varepsilon)$ який містить $\xi(\varepsilon)$, для яких функція $F(x, \varepsilon)$ — монотонна по x та $\text{sign}(D_{xx} f(x, \varepsilon)) = \text{sign}(\Delta(\varepsilon)) = \text{sign}(\Delta)$. Тому існує єдине екстремальне значення f при $x \in I$

$$m(\varepsilon) = \text{екстремум}(f(x, \varepsilon)), \tag{14}$$

причому $x \in I$, $m(\varepsilon) = f(\xi(\varepsilon), \varepsilon)$, $m(\varepsilon_0) = f(x_0, \varepsilon_0) = 0$. Знак Δ визначає мінімум та максимум критичних точок ξ . Також зазначимо, що $\text{sign}(f(x, \varepsilon)) = \text{sign}(\Delta)$ для $x \in \partial I(\varepsilon)$. Якщо $\Delta > 0$, то f має мінімум в ξ та додатна на межі та, якщо $m(\varepsilon) > 0$, то f має 2 особливі точки. А якщо $m(\varepsilon) < 0$, то особливі точки відсутні. Якщо $m(\varepsilon) = 0$ та $f(\xi(\varepsilon), \varepsilon) = 0$, $x \in I(\varepsilon)$, то існує єдина особлива точка $x^* = \xi(\varepsilon)$.

Тепер, якщо додатково $D_\varepsilon f(x_0, \varepsilon_0) \neq 0$, тобто $\frac{\partial m}{\partial \varepsilon} \neq 0$, то враховуючи (14) ма-

ємо

$$\left. \frac{\partial m}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=\varepsilon_0} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon} f(\xi, \varepsilon_0) + D_x f(\xi, \varepsilon) \left. \frac{\partial \xi}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=\varepsilon_0} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon} f(\xi, \varepsilon_0),$$

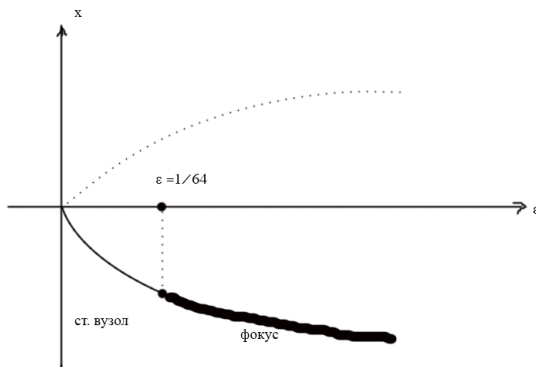
тобто остаточно отримуємо біфуркацію при проходженні $f(x, \varepsilon)$ через значення $\varepsilon = \varepsilon_0$. ►

Приклад. Розглянемо систему

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = x^2 - y - \varepsilon.$$

◀ Біфуркаційну множину формує крива $x^2 = \varepsilon$. Точка біфуркації $\varepsilon = 0$.

При $\varepsilon < 0$ – особливих точок немає. При $\varepsilon > 0$: $x = \sqrt{\varepsilon}$ – сідло, $x = -\sqrt{\varepsilon}$ – стійкий вузол, при $\varepsilon > \frac{1}{64}$ – фокус. За Твердженням 1 встановлюємо, що маємо біфуркацію сідло-вузол (Мал. 4). ►

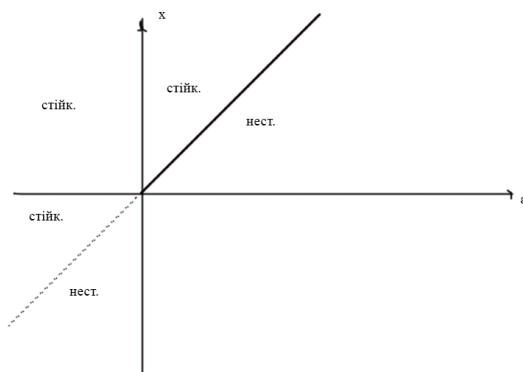


Мал. 4

2. Транскритична біфуркація

$$\dot{x} = \varepsilon x - x^2. \quad (15)$$

При $\varepsilon = 0$ має єдину особливу точку $x = 0$ (при $\varepsilon < 0$ стійку, при $\varepsilon > 0$ нестійку). Інша особлива точка ($\varepsilon \neq 0$) $x = \varepsilon$: при $\varepsilon > 0$ вона стійка, $\varepsilon < 0$ – нестійка. Маємо біфуркаційну діаграму (Мал. 5). Зауважимо, що на відміну від сідло-вузла, через точку біфуркації проходить 2 криві особливих точок ($x = 0$, $x = \varepsilon$).



Мал. 5

Твердження 2. Нехай (x_0, ε_0) – негіперболічна особлива точка рівняння (10) ($x \in R'$, $\varepsilon \in R'$). При виконанні умов

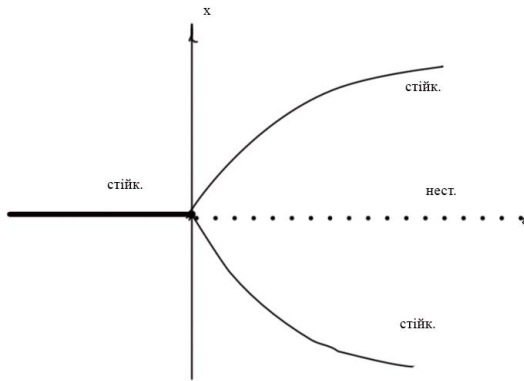
1. $\frac{\partial f}{\partial \varepsilon}(x_0, \varepsilon_0) = 0$.
2. $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \varepsilon}(x_0, \varepsilon_0) \neq 0$.

$$3. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, \varepsilon_0) \neq 0,$$

точка біфуркації (x_0, ε_0) має транскритичний тип.

4. Біфуркація типу вилка.

$$\dot{x} = \varepsilon x - x^3. \quad (15)$$



Маємо: $x = 0$ – особлива точка при довільних ε , стійка при $\varepsilon \leq 0$, нестійка при $\varepsilon > 0$. Тобто при $\varepsilon > 0$ маємо три особливі точки $x = 0, x = \pm\sqrt{\varepsilon}$; при $\varepsilon \leq 0, x = 0$ – єдина особлива точка. Біфуркаційна крива має вигляд $\varepsilon x - x^3 = 0$, тому через точку біфуркації $(0;0)$ проходять три криві (Мал. 6).



Мал. 6

Твердження 3. Нехай (x_0, ε_0) – негіперболічна особлива точка (10). Якщо виконуються умови:

1. $\frac{\partial f}{\partial \varepsilon}(x_0, \varepsilon_0) = 0$.
2. $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, \varepsilon_0) = 0$.
3. $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \varepsilon}(x_0, \varepsilon_0) \neq 0$.
4. $\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x_0, \varepsilon_0) \neq 0$,

то (x_0, ε_0) – точка біфуркації типу вилка.

Доведення: [Kuz, Per].

Зауваження.

1. Ці три типи біфуркації одновимірних динамічних систем найбільш важливі із точки зору теорії біфуркації, але звичайно не вичерпують всі типи можливих біфуркацій (див. задачі).
2. Зауважимо, що (12) – біфуркація загального положення (типова), а (13), (14) – ні. Але в просторі векторних полів з особливими точками, всі три типи є біфуркаціями загального положення.

Задача 1. Знайти точки біфуркації та побудувати біфуркаційні діаграми. Якщо біфуркація корозмірності 1, то встановити її тип.

$$\text{а) } x' = -x^4 + 5\varepsilon x^2 - 4\varepsilon^2; \quad \text{б) } x = x^2 - x\varepsilon^2.$$

Біфуркація сідло-вузол в R^n .

Типова біфуркація типу сідло-вузол зустрічається у випадку, коли матриця лінеаризації має нульове власне значення при деякому значенні параметру. Важливість саме біфуркації сідло-вузол пов'язане з тим, що всі біфуркації однопараметричних сімейств, для особливих точок з нульовим власним значенням можна привести до цього типу шляхом малого збурення. Критерії біфуркації, які наведені в попередньому пункті, можуть бути поширені на багатовимірний випадок.

Теорема 1. (Сотомайор, 1974 р.) Припустимо, що в системі (10)

($x \in R^n, \varepsilon \in R^1$): (x_0, ε_0) – особлива точка, причому $A = Df(x_0, \varepsilon_0)$ має некрратне власне значення $\lambda = 0$ з власним вектором \vec{v} та A^T має власний вектор \vec{w} . Припустимо, що A має n власних значень: $\text{Re } \lambda_i(A) < 0, i = \overline{1, k}$ та $\text{Re } \lambda_j(A) > 0, j = \overline{n-k-1, n}$, та виконуються умови:

$$w^T f_\varepsilon(x_0, \varepsilon_0) \neq 0, \quad w^T (D_{xx}f(x_0, \varepsilon_0)(u, v)) \neq 0, \quad (16)$$

де $f_\varepsilon = \left(\frac{\partial f_1}{\partial \varepsilon}, \dots, \frac{\partial f_n}{\partial \varepsilon} \right)^T$. Тоді існує гладка крива особливих точок системи (10) в

$R^n \times R$, яка проходить через (x_0, ε_0) . В залежності від знаку (16) маємо: відсутні особливі точки (10) в околі x_0 при $\varepsilon < \varepsilon_0$ (або $\varepsilon > \varepsilon_0$); дві особливі точки при $\varepsilon < \varepsilon_0$ (або $\varepsilon > \varepsilon_0$). Дві особливі точки мають стійкі інваріантні многовиди розмірності k та $k+1$ відповідно. Тобто система (10) має біфуркацію сідло-вузол.

Доведення теореми 1. ◀ Згідно умов теореми 1 система (10) має вигляд:

$$x' = g_1(x, y, \varepsilon), \quad y' = By + g_2(x, y, \varepsilon), \quad (17)$$

де $x \in R, y \in R^{n-1}, g(x_0, y_0, \varepsilon_0) = 0, D_z(x_0, y_0, \varepsilon_0) = 0, z = (x, y)$ та $D_{xx}g_1(x_0, y_0, \varepsilon_0) = \Delta \neq 0$. Позначимо

$$F_1(x, y, \varepsilon) = g_1(x, y, \varepsilon) = 0, \quad F_2(x, y, \varepsilon) = By + g_2(x, y, \varepsilon) = 0.$$

За умов теореми $D_y F_2(x_0, y_0, \varepsilon_0) = B \neq 0$, тому за теоремою про неявну функцію існує окіл точки (x_0, ε_0) в якому існує єдина функція $y = \eta(x, \varepsilon)$ така, що виконується

$$F_2(x, \eta(x, \varepsilon), \varepsilon) = 0 \quad (18)$$

та $\eta(x_0, \epsilon_0) = 0$. Підставляючи в $F_1 = 0$ отримаємо

$$F(x, \epsilon) = g_1(x, \eta(x, \epsilon), \epsilon) = 0.$$

Таким чином проблема зведена до одновимірного випадку. Залишилось перевірити умови твердження 1. Неважко переконатись що $F(x_0, \epsilon_0) = 0$. Диференціюючи (18) по x маємо:

$$B \frac{d\eta}{dx} + D_x g_2 + D_y g_2 \frac{d\eta}{dx} = 0$$

і враховуючи $D_x g_2(x_0, y_0, \epsilon_0) = D_y g_2(x_0, y_0, \epsilon_0) = 0$, отримаємо $\frac{d\eta}{dx}(\varphi_0, \epsilon_0) = 0$. Обчислимо похідні F

$$D_x F(x_0, \epsilon_0) = D_x g_1 + D_y g_1 \frac{d\eta}{dx} = 0,$$

$$\begin{aligned} D_{xx} F(x_0, \epsilon_0) &= D_{xx} g_1 + 2D_{xy} g_1 \frac{d\eta}{dx} + D_{yy} g_1 \left(\frac{d\eta}{dx}\right)^2 + D_y g_1 \frac{d^2\eta}{dx^2} \\ &= D_{xx} g_1(x_0, \varphi_0, \epsilon_0) = \Delta \neq 0 \end{aligned}$$

Всі умови твердження 1 виконані, тому маємо остаточну біфуркацію сідло-вузол. ►

Зауваження .

1. Якщо умови теореми дещо змінити:

$$w^T f_\epsilon(x_0, \mu_0) = 0, \quad w^T (Df_\mu(x_0, \epsilon_0)v) \neq 0, \quad w^T (D_{xx} f(x_0, \epsilon_0)(v, v)) \neq 0,$$

то система (10) в точці (x_0, ϵ_0) має транскритичну біфуркацію, причому біфуркаційна діаграма має вигляд Мал. 6 (вісь Ox направлена за напрямком вектору \vec{v}).

2. Якщо умови теореми мають вигляд

$$\begin{aligned} w^T f_\epsilon(x_0, \epsilon_0) = 0, \quad w^T (Df_\epsilon(x_0, \epsilon_0)v) \neq 0, \quad w^T (D_{xx} f(x_0, \epsilon_0)(v, v)) = 0, \\ w^T (D_{xxx} f(x_0, \epsilon_0)(v, v, v)) \neq 0, \end{aligned}$$

то (x_0, ϵ_0) – точка біфуркації типу вилка з біфуркаційною діаграмою на Мал. 6.

Приклад. Розглянемо систему

$$\dot{x} = \epsilon_1 - x^2 + xy - xy^2, \quad \dot{y} = \epsilon_2 - y - x^2 + yx^2. \quad (19)$$

◀ Маємо гіперболічну особливу точку $(0,0)$ при $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$. Обчислюємо

$$D_{xx}(\varepsilon_1 - x^2 + xy - xy^2)\Big|_{\varepsilon_1=0} = -2,$$

$$D_{\varepsilon_1}(\varepsilon_1 - x^2 + xy - xy^2) = 1.$$

Тому за теоремою Сотомайора маємо біфуркацію сідло-вузол і другого параметру ε_2 теоретично можна позбавитись. Для цього з другого рівняння маємо

$$y = \frac{\varepsilon_2 - x^2}{1 - x^2} = \varepsilon_2 + (\varepsilon_2 - 1)x^2 + O(x^4).$$

Підстановка в перше рівняння (19) дає

$$\varepsilon_1 - x^2 + xy - xy^2 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2(1 - \varepsilon_2)x + O(x^3).$$

Знаходимо особливі точки

$$x_1 \approx \frac{\varepsilon_2(1 - \varepsilon_2)}{2}, \quad x_2 \approx \varepsilon_1 + \frac{\varepsilon_2^2(1 - \varepsilon_2)^2}{4}.$$

Тому існує єдина особлива точка біля $(0,0)$, яка належить кривій $x_2(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = 0$ або $\varepsilon_1 = \frac{-\varepsilon_2^2(1 - \varepsilon_2)^2}{4}$. При $\varepsilon_1 < \frac{-\varepsilon_2^2(1 - \varepsilon_2)^2}{4}$ – відсутні особливі точки, при $\varepsilon_1 > \frac{-\varepsilon_2^2(1 - \varepsilon_2)^2}{4}$ – дві особливі точки (див. Мал. 7 при $\varepsilon_1 = -0,1, \varepsilon_2 = 0$; $\varepsilon_1 = 0,1, \varepsilon_2 = 0,6$). ▶

Задача 2. Дослідити тип біфуркації, побудувати біфуркаційну діаграму та фазові портрети.

а) $\dot{x} = y, \quad \dot{y} = \mu x - x^2 - y;$

б) $\dot{x} = y, \quad \dot{y} = \mu x - x^3 - y;$

в) $\dot{x} = -x^4 + 5\mu x^2 - 4\mu^2, \quad \dot{y} = -y;$

г) $\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x - 2x^2 - \mu x^3.$

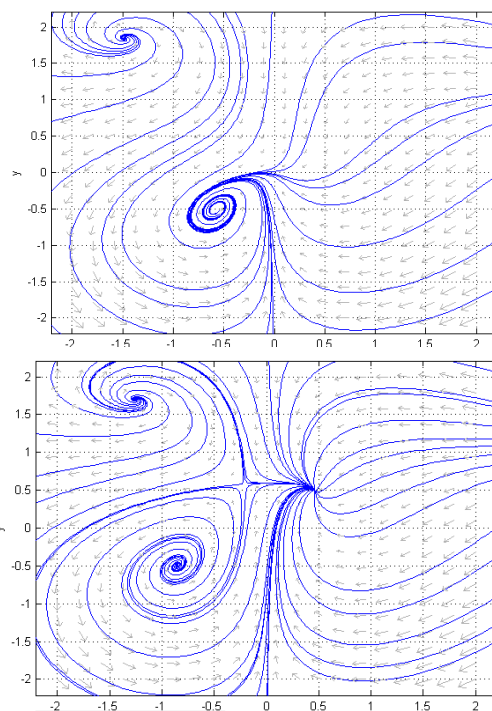
Відповідь: а) Біф. крива $x(x - \mu) = 0$, транскритична біфуркація, при $\mu \in \left(-\frac{1}{4}, 0\right)$ – сідло,

стійкий вузол, $\mu = 0$ – відсутні ос. точки, $\mu \in \left(0, \frac{1}{4}\right)$ – сідло, вузол, $\mu > \frac{1}{4}$ – фокус, сідло;

б) $\mu = 0$ – точки біфуркації вилка, при $\mu < 0$ – вузол, $\mu \in \left(-\frac{1}{4}, 0\right)$ – фокус, $\mu > 0$ –

сідло + 2 особливі точки;

в) біфуркація не належить до трьох відомих типів;



Мал. 7

г) біфурк. крива: $x = \frac{1}{\mu}(-1 \pm \sqrt{1-\mu})$, $\mu < 1$. При $\mu = 0$ – 2 особливі точки, $\mu > 1$ – 1 особлива точка, $\mu < 1$ – 2 особливі точки.

Метод центральних многовидів.

Серед методів дослідження біфуркаційних проблем виділяють метод нормальних форм та метод центрального многовиду. Нехай системи (10) має вигляд:

$$\dot{x} = \beta x + f_1(x, y, \varepsilon), \quad \dot{y} = Cy + f_2(x, y, \varepsilon), \quad (20)$$

де $x \in R^{n_c}$, $y \in R^{n_c+n_s}$, $\varepsilon \in R^k$, n_c – кількість власних значень з нульовою дійсною частиною. В § 3.4 були наведені два результати цієї теорії: теорема про центральний многовид та принцип зведення. Варіанти цих теорем для системи (20) наведені нижче.

I. (Існування центрального многовиду) Система (20) має інваріантний многовид, який локально для малих $|\varepsilon|$ має вигляд

$$W^c(\varepsilon) = \{(x, H(x, \varepsilon)) / x \in R^{n_c}, \|x\| \leq \delta\},$$

де $\delta > 0$ – достатньо мале та відображення $H : R^{n_c} \times R^k \rightarrow R^{n_c+n_s}$ гладке, причому $H(x, 0) = h^c(x)$ – центральний многовид.

II. (Принцип зведення Пліса-Шошитайшвілі) Система (4.39) топологічно еквівалентна в околі $(x, y, \varepsilon) = (0, 0, 0)$ системі на центральному многовиді:

$$\dot{x} = Bx + f_1(x, H(x, \varepsilon), \varepsilon), \quad \dot{y} = Cy. \quad (21)$$

Ці дві теореми вказують на те, що «найбільш цікаве життя» траєкторій системи в околі біфуркаційних значень, проходить на центральному многовиді.

Твердження 4. Особлива точка системи (20) при $x \in R^{n-1}$, $y \in R^1$, стійка (асимптотично стійка або нестійка) тоді і тільки тоді, коли відповідна особлива точка першого рівняння системи (21) відповідно стійка (асимптотично стійка або нестійка).

Доведення: [Ши2].

Задача 3. Довести, що початок координат в системі зворотного контролю Муна-Ренда

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x - xv, \quad \dot{v} = -v + \alpha x^2,$$

асимптотично стійкий при $\alpha < 0$.

Важлива сідло-вузлова біфуркація виникає у випадку, коли одне з власних значень матриці лінеаризації (10) в особливій точці дорівнює 0. Тоді система (10) має вигляд:

$$\dot{x} = f_1(x, y, \varepsilon), \dot{\varepsilon} = 0, \dot{y} = By + f_2(x, y, \varepsilon), \quad (22)$$

де $x \in R^1, y \in R^{n-1}$. Якщо $\varepsilon \in R^k$, тоді розмірність центрального простору $\dim(E^c) = k + 1$ в особливій точці $(x, y, \varepsilon) = (0, 0, 0)$. Центральний многовид W^c має вигляд $y = h(x, \varepsilon)$ та задовольняє умовам інваріантності

$$\dot{y} = D_x h \frac{dx}{dt} + D_\varepsilon h \frac{d\varepsilon}{dt} \quad \text{або} \quad Bh + f_2(x, y, \varepsilon) = D_x h f_1(x, y, \varepsilon). \quad (23)$$

Згідно принципу зведення, динаміка (22) визначається рівняннями системи $\dot{x} = f_1(x, h(x, \varepsilon), \varepsilon), \dot{\varepsilon} = 0$.

Приклад. Поставимо задачу дослідити так біфуркації в системі

$$\dot{x} = \varepsilon - x^2 + xy, \quad \dot{y} = -y + \varepsilon x + x^2. \quad (24)$$

◀ Враховуючи, що центральний многовид дотичний до $x = \varepsilon = 0$, шукаємо $h = ax^2 + bx\varepsilon + c\varepsilon^2 + O(3)$. Підставляємо в (23), тобто $-(ax^2 + bx\varepsilon + c\varepsilon^2) + \varepsilon x + x^2 = (2ax + b\varepsilon)(\varepsilon - x^2) + O(3)$. Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях, отримаємо $a = 1, b = 1, c = 1$. Тобто центральний многовид має вигляд $h: y = x^2 - x\varepsilon + \varepsilon^2$, але це перше наближення не зовсім підходить: W^c мусить проходити через початок координат. Тому обчислюючи доданки третього порядку маємо $h(x, \varepsilon) = x^2 - \varepsilon x + \varepsilon^2 + 2x^3 - 7\varepsilon x^2 + 14\varepsilon^2 x - 14\varepsilon^3 + O(4)$. За припущенням зведення, отримаємо відповідне диференціальне рівняння на W^c :

$$\dot{x}|_{W^c} = \varepsilon + \varepsilon^2 x - (1 - \varepsilon)x^2 + x^3 + O(4).$$

Звідси остаточно встановлюємо, що при $\varepsilon = 0$ є біфуркація сідло-вузол та відтворює дві особливі точки при переході на W^c точки $x = 0$. ▶

Задача 4.18. Знайти нормальну форму та дослідити біфуркацію сідло-вузол точки $(x, y) = (0, 0)$ системи $\dot{x} = \varepsilon x - x^2 + 2xy, \dot{y} = (\varepsilon - 1)y + x^2$.

Задача 4.19. Знайти $W^c(0, 0, 0)$ та дослідити тип біфуркації при $\varepsilon = 0$, стійкість особливих точок та знайти W^s, W^u системи $\dot{x} = x^2 + \varepsilon, \dot{y} = -y, \dot{z} = z$.

Відповідь: Розв'язки $x = \sqrt{-\varepsilon t} \operatorname{th}(\sqrt{-\varepsilon t} + c), y = Be^{-t}, z = ce^t$. Для $(\sqrt{-\varepsilon}, 0, 0)$ - W^s - пряма: $x = \sqrt{-\varepsilon}, z = 0$; W^u - пряма: $y = 0, x > -\sqrt{-\varepsilon}$. Для $(-\sqrt{-\varepsilon}, 0, 0)$ - W^u : $x = \sqrt{-\varepsilon}, y = 0$;

$$W^u : y = 0, x < \sqrt{-\varepsilon}.$$

3. Біфуркація Андронова-Хопфа.

В попередніх пунктах розглядалися різні типи біфуркацій, які мають місце у випадку негіперболічної особливої точки в випадку коли матриця лінеаризації має просте нульове власне число. Логічно розглянути іншу ситуацію не гіперболічності: присутність в спектрі матриці лінеаризації некратної пари чисто уявних коренів. Вперше ці проблеми досліджував в 1930 р.

А. Андронов для двовимірного випадку та Хопф в 1942 р. для n -вимірного.

Розглянемо двовимірний варіант системи (10) при $x \in R^2, \varepsilon \in R^1$ та припустимо, що вона в початку координат має особливу точку, причому матриця лінеаризації в неї має спектри $\alpha(\varepsilon) \pm \beta(\varepsilon)i$ (ε належить деякому околу точки $\varepsilon = 0$). За виконанням умов $\alpha(0) = 0, \beta(0) = \beta_0 \neq 0, \alpha'(0) \neq 0$, проведемо заміну $z = x + iy, \bar{z} = x - iy$, після якої система набуває вигляду

$$\dot{z} = i\beta_0 z + f_1(z, \bar{z}), \quad \dot{\bar{z}} = i\beta_0 \bar{z} + \overline{f_1(z, \bar{z})}, \quad (25)$$

Враховуючи, що власні числа при $\varepsilon = 0$ матриці лінеаризації (10) мають вигляд $\lambda_i = \pm i\beta_0$, маємо резонансне співвідношення $\lambda_j = (m, n)\lambda$ та резонансні мономи $z^m \bar{z}^n \bar{e}_j$. Тобто заміною $z = w + \sum_{2 \leq k+i \leq m} b_{ki} w^k \bar{w}^i$ система (25) набуває вигляду

$$\dot{w} = i\beta_0 w + c_1 w^2 \bar{w} + c_2 w^3 \bar{w}^2 + \dots \quad (26)$$

Твердження 5.

1. За вищенаведеними припущеннями система (10) $x \in R^2, \varepsilon \in R^1$, має нормальну форму в околі нуля вигляду (26).
2. Версальною деформацією рівняння (26) є $\dot{w} = \lambda(\varepsilon)w + c(\varepsilon)|w|^2 + d(\varepsilon)|w|^4 + \dots$
3. (Нормальна форма біфуркації Андронова-Хопфа в R^n). Припустимо система (10) має вигляд

$$\dot{u} = Au + F(u), \quad u \in R^n, \quad (27)$$

де A має тільки одну пару уявних власних чисел $\lambda_{1,2} = \pm iw_0$. Введемо вектори $p, q \in C^n$ такі, що $Aq = iw_0 q, A^T p = -iw_0 p, (p, q) = 1$. Тоді обмеження (4.46) на двовимірний центральний многовид $W^c(0)$ має

нормальну форму: $\dot{\xi} = iw_0\xi + c_1\xi|\xi|^2 + O(|\xi|^4)$, $\xi \in C$.

Означення. Першим ляпуновським коефіцієнтом системи (10) назвемо число $l_1(0) = \text{Re}(c_1(0))$, де $c_1(\cdot)$ визначається з нормальної форми (26).

Зауваження. Корисним буде наступна формула [Per] для ляпуновського коефіцієнта системи

$$\dot{x} = -wy + p(x, y), \quad \dot{y} = wx + q(x, y),$$

$$l_1(0) = \frac{1}{16}(p_{xxx} + q_{xxy} + p_{xyy} + q_{yyy}) - \frac{1}{16\omega}(q_{xy}(q_{xx} + q_{yy}) - p_{xy}(p_{xx} + p_{yy}) + p_{xx}q_{xx} - p_{yy}q_{yy}).$$

Теорема 2 (Андронов, 1930 р.). Припустимо, що в системі (10) ($x \in R^2, \varepsilon \in R^1$) точка $x=0$ – особлива точка з власними значеннями: $\lambda_{1,2} = \alpha(\varepsilon) \pm \beta(\varepsilon)i$, причому $\alpha(0) = 0$, $\beta(0) = \beta_0 \neq 0$, $\alpha'(0) \neq 0$. Тоді:

1. Якщо $\alpha'(0) > 0, l_1 < 0, \varepsilon < 0$ або $\alpha'(0) < 0, l_1 < 0, \varepsilon < 0$, то в околі нуля існує стійкий граничний цикл (**суперкритична** біфуркація Андронова-Хопфа). При $\alpha'(0) > 0, l_1 < 0, \varepsilon \leq 0$ або $\alpha'(0) < 0, l_1 < 0, \varepsilon \geq 0$, маємо в нулі стійкий фокус та відсутність граничних циклів.
2. Якщо $\alpha'(0) > 0, l_1 > 0, \varepsilon < 0$ або $\alpha'(0) < 0, l_1 > 0, \varepsilon > 0$, то в околі нуля існує нестійкий граничний цикл (**субкритична** біфуркація Андронова-Хопфа). При $\alpha'(0) > 0, l_1 > 0, \varepsilon \geq 0$ або $\alpha'(0) < 0, l_1 > 0, \varepsilon \leq 0$, маємо в нулі нестійкий фокус та відсутність граничних циклів.

Доведення теореми 2. ◀ За умов теореми двовимірна система (10) має вигляд

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha(\varepsilon) & -\beta(\varepsilon) \\ \beta(\varepsilon) & \alpha(\varepsilon) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \dots \quad (28)$$

При виконанні умов даної теореми нормальною формою системи (4.5.1) при $\varepsilon = 0$ є система (26). Перейдемо до полярних координат в (28), отримаємо

$$\varphi' = \beta_0 + O(\rho^2), \quad \rho' = l_1 \rho^3 + O(\rho^5) \quad (29)$$

Враховуючи що $\rho_0 \neq 0$ при малих ρ з (29), отримаємо

$$\frac{d\rho}{d\mu} = \frac{l}{\beta_0} \rho^3 + o(\rho^5) \quad (30)$$

Зауважимо, що за допомогою полярних координат система (28) набуває вигляду

$$\varphi' = \beta(\varepsilon) + o(\rho^2), \quad \rho' = \lambda(\varepsilon)\rho + \alpha(\varepsilon, \varphi)\rho^2 + b(\varepsilon, \varphi)\rho^3 + o(\rho^4), \quad (31)$$

де $\alpha(\varepsilon, \varphi), b(\varepsilon, \varphi) \in C^\infty$ та задовольняють умовам $\alpha(0, \varphi) = 0$, $b(0, \mu) = \operatorname{Re}(c_1) = l$.

В малому околі початку координат та при малих $|\varepsilon|$ з (31) маємо

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = \frac{\alpha(\varepsilon)}{\beta(\varepsilon)}\rho + \tilde{\alpha}(\varepsilon, \varphi)\rho^2 + \tilde{\beta}(\varepsilon, \mu)\rho^3 + o(\rho^4), \quad (32)$$

де $\tilde{\alpha}(0, \varphi) = 0$, $\tilde{\beta}(0, \mu) = \frac{l}{\beta_0}$. Припустимо, що функції

$$R(\rho_0, \varphi, \varepsilon) = u_1(\varphi, \varepsilon)\rho_0 + u_2(\varphi, \varepsilon)\rho_0^2 + \dots$$

$$h(\rho_0, \varphi) = R(\rho_0, \varphi, 0) = h_1(\varphi)\rho_0 + h_2(\varphi)\rho_0^2 + \dots$$

є розв'язками рівнянь (32), (30) відповідно з початковими даними

$$R(\rho_0, \varphi, \varepsilon) = \rho_0, \quad h(\rho_0, 0) = \rho_0.$$

Підставляючи R, h , в рівняння (32), (30) отримаємо

$$R(\rho_0, \varphi, \varepsilon) = \exp\left(\frac{\alpha(\varepsilon)}{\beta(\varepsilon)}\varphi\right)\rho_0 + u_2(\varphi, \varepsilon)\rho_0^2 + \dots \quad (33)$$

$$h(\rho_0, \varphi) = R(\rho_0, \varphi, 0) = \rho_0 + \frac{l}{\rho_0}\varphi\rho_0^3 + \dots \quad (34)$$

З (32) випливає, що

$$\left. \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial^k h(\rho_0, \varphi)}{\partial \rho_0^k} \right) \right|_{\rho_0=0} = \lim_{\rho_0 \rightarrow 0} \frac{\partial^k}{\partial \rho_0^k} \frac{d\rho}{d\varphi} = \begin{cases} 0, & \text{при } k=1,2 \\ \frac{6l}{\beta_0}, & \text{при } k=3 \end{cases}$$

За допомогою $h(\rho_0, 0) = \rho_0$, отримаємо рівність (34). Визначимо відображення Пуанкаре $P(x, \varepsilon)$ на осі ox для системи (32) та покладемо

$$V(x, \varepsilon) = P(x, \varepsilon) - x \quad (35)$$

Кількість замкнених траєкторій рівняння (34) поблизу початку координат при малих значеннях $|\varepsilon|$ визначається кількістю нулів функції $V(x, \varepsilon)$ при $x > 0$. При $x > 0$ отримаємо:

$$V(x, \varepsilon) = R(x, 2\pi, \varepsilon) - x, \quad V(x, 0) = h(x, 2\pi) - x.$$

З (33) та (34) випливає, що:

$$V(x, \varepsilon) = x\tilde{V}(x, \varepsilon), \quad (36)$$

де

$$\tilde{V}(x, \varepsilon) = \exp\left(2\pi \frac{\alpha(\varepsilon)}{\beta(\varepsilon)}\right) - 1 + u_2(2\pi, \varepsilon)x + o(x^2) \quad (37)$$

та

$$\tilde{V}(x, 0) = 2\pi \frac{l}{\beta_0} x^2 + o(x^3). \quad (38)$$

З (37) та умови $\lambda'(0) \neq 0$ отримаємо

$$\frac{\partial \tilde{V}(0,0)}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(\exp\left(2\pi \frac{\alpha(\varepsilon)}{\beta(\varepsilon)}\right) \right) \Big|_{\varepsilon=0} = \frac{2\pi}{\beta_0} \cdot \frac{d(\alpha(\varepsilon))}{d(\varepsilon)} \Big|_{\varepsilon=0} \neq 0. \quad (39)$$

Тому за теоремою про неявну функцію існує єдина функція $\varepsilon = \varepsilon(x)$, яка визначена при $|x| < \varepsilon$ така, що $\mu(0) = 0$ та

$$\tilde{V}(x, \varepsilon(x)) = 0. \quad (40)$$

Подвійним диференціюванням (40) по x отримаємо

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{V}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{V}}{\partial \varepsilon} \varepsilon'(x) = 0, \\ \frac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial \varepsilon \partial x} (\varepsilon'(x)) + \frac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial \varepsilon^2} (\varepsilon'(x))^2 + \frac{\partial \tilde{V}}{\partial \varepsilon} \varepsilon''(x) = 0. \end{cases} \quad (41)$$

З (41) та з урахуванням $l \neq 0$, отримаємо

$$\frac{\partial \tilde{V}(0,0)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial^2 \tilde{V}(0,0)}{\partial x^2} = 4\pi \frac{l}{\beta_0} \neq 0. \quad (42)$$

Підставляючи (42) та (39) в (38), маємо:

$$\varepsilon'(0) = 0 \quad \text{та} \quad \varepsilon''(0) = -2l \cdot (\alpha'(0))^{-1} \neq 0.$$

Таким чином функція $\varepsilon = \varepsilon(x)$ має вигляд параболи з вершиною в $(0,0)$ та гілками вгору при $l \cdot \alpha'(0) < 0$ та вниз при $l \cdot \alpha'(0) > 0$.

Знайдемо кількість нулів $V(x, \varepsilon)$ поблизу $(0,0)$ при $x > 0$. Визначимо обернену до $\varepsilon(x)$ функцію $x = x(\varepsilon)$, при $\varepsilon > 0$. Тобто можна обрати $\delta > 0$ та $\eta > 0$, так, що якщо $\varepsilon \cdot l \cdot \lambda'(0) < 0$, то для довільного $|\varepsilon| \in (0, \delta)$ знайдеться значення

$$x = x(\varepsilon) \in (0, \eta).$$

Це значення має властивість: серед всіх траєкторій рівняння (32), які перетинають множину

$$I = \{(x, y) / 0 < x < \eta, y = 0\},$$

траєкторія, яка проходить через точку $(x(\varepsilon), 0)$ і тільки вона є періодичною. З іншого боку якщо $|\varepsilon| \in (0, \sigma)$ та $\varepsilon \cdot l \cdot \lambda'(0) > 0$, тоді система (32) не має періодичних траєкторій, які проходять через I . Теорема 2 доведена. ►

Наступний результат узагальнює теорему 2 на багатовимірний випадок.

Теорема 3 (Е.Хопф, 1942 р.). Припустимо, що для системи (10) $f \in C^3(R^n)$, $x \in R^n$, $f(0,0) = 0$ і виконуються умови:

1. Власні числа матриці $Df(0,0) = \{(i\omega, -i\omega, \lambda_3, \dots, \lambda_n) : \operatorname{Re} \lambda_k \neq 0, k \geq 3\}$.
2. $l_1(0) \neq 0$.
3. $\frac{d}{d\varepsilon} \operatorname{Re}(\lambda(0)) \neq 0$.

Тоді існує єдиний двовимірний центральний многовид, який проходить через $(0,0)$ та нормальною формою на цьому многовиді є рівняння (26). Окрім того при $l_1(0) \cdot \operatorname{Re}(\lambda(0)) < 0 (> 0)$ існує в околі нуля єдиний стійкий (нестійкий) граничний цикл.

Доведення: [Kuz, Чоу].

Приклад. (Популяційна модель Холлінга, 1965 р.) Розглянемо систему

$$\dot{x}_1 = rx_1(1-x_1) - \frac{cx_1x_2}{a+x_1}, \quad \dot{x}_2 = -dx_2 + \frac{cx_1x_2}{a+x_1}, \quad (43)$$



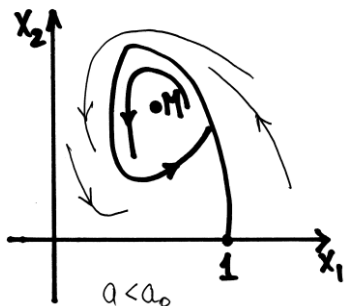
де параметри $r, a, c, d \in R^+$. Дослідити біфуркацію Андронова-Хопфа.

◀ Помножимо (43) на $a+x_1$, отримаємо еквівалентну систему

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= rx_1(a+x_1)(1-x_1) - cx_1x_2, \\ \dot{x}_2 &= -adx_2 + (c-d)x_1x_2. \end{aligned} \quad (44)$$

Маємо особливу точку $M \left(\frac{ad}{c-d}, \frac{ra}{c-d} \left(1 - \frac{ad}{c-d} \right) \right)$ та відповідні дійсні значення власних чисел матриці лінеаризації системи (44) в точці M мають вигляд

$$\alpha(a) = \operatorname{Re}(\lambda_1(M)) = \frac{ard(c+d)}{2(c-d)^2} \cdot \left(\frac{c-d}{c+d} - a \right). \quad \text{Тобто}$$



$$\alpha(a_0) = 0 \quad \text{при} \quad a_0 = \frac{c-d}{c+d} \quad \text{та} \quad \text{зауважимо}$$

$$\beta^2(a_0) = \frac{rc^2(c-d)}{(c+d)^3} > 0. \quad \text{Тобто} \quad \text{власні} \quad \text{значення}$$

Мал. 8

$\lambda_{1,2}(a_0) = \pm i\beta(a_0)$ дають можливість здійснення біфуркації Андронова-Хопфа. Простою перевіркою встановлюємо, що M – стійка особлива точка при $a > a_0$, нестійка при $a < a_0$. Перевіряємо умову $\alpha'(0) \neq 0$: $\alpha'(0) = -\frac{a_0 r d (c + d)}{2(c - d)^2} < 0$. За формулою обчислення першого ляпуновського коефіцієнта, отримаємо

$$l_1(a_0) = -\frac{rc^2 d^2}{\beta} < 0.$$

За теоремою 2 маємо єдиний (стійкий) граничний цикл при $a < a_0$ (див. Мал. 8). ►

Задача 4.20. Довести, що в системі бруселатора І. Пригожина

$$\dot{x}_1 = A - (B + 1)x_1 + x_1^2 x_2, \quad \dot{x}_2 = Bx_1 - x_1 x_2^2,$$

при $B = 1 + A^2$, існує суперкритична біфуркація Андронова-Хопфа.

Задача 4.21. Знайти при якому a рівняння має біфуркацію Андронова-Хопфа. Знайти l_1 .

- а) (Рівняння Релея) $\ddot{x} + \dot{x}^3 - 2a\dot{x} + x = 0$.
- б) (Рівняння ван дер Поля) $\ddot{x} - (a - x^2)\dot{x} + x = 0$.
- в) (Системи Баутіна) $\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x + ay + x^2 + xy + y^2$.
- г) (Дифузійна модель Фейнтінгера) $\dot{x} = a(1 - xy^2 + A(y - 1)), \quad \dot{y} = xy^2 - y$.
- д) $\dot{x} = -ax - y + \frac{x}{1 + x^2 + y^2}, \quad \dot{y} = x - ay + \frac{y}{1 + x^2 + y^2}$.
- е) $\dot{x} = ax - y - x^3, \quad \dot{y} = x + ay - y^3$.
- і) $\dot{x} = ax - y + (x^2 + y^2)^2(\alpha x - \beta y), \quad \dot{y} = x + ay + (x^2 + y^2)^2(\alpha x + \beta y), \quad \alpha \neq 0$.

4. Біфуркація граничних циклів.

Розглянемо двовимірну динамічну систему (1) на R^2 з T -періодичною орбітою $\Gamma: \gamma(t) = (x(t), y(t))$ та відображенням Пуанкаре Π . З результатів § 3.3 [ГП] випливає:

- i. $\Pi'(0) = \exp\left(\int_0^T \operatorname{div} f(\gamma(t)) dt\right)$;
- ii. Якщо $\int_0^T \operatorname{div} f(\gamma(t)) dt < 0$, то Γ – стійкий граничний цикл.

Означення. Нехай $\Pi(t)$ – відображення Пуанкаре орбіти Γ та позначимо $d(t) = \Pi(t) - t$. Якщо виконується умова

$$d(0) = d'(0) = \dots = d^{(k-1)}(0) = 0, \quad d^{(k)}(0) \neq 0,$$

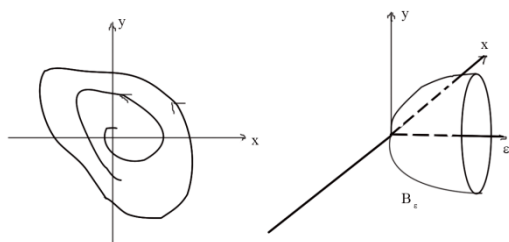
То Γ назвемо **граничним циклом кратності k** .

Означення. Нехай $\Pi(t)$ – відображення Пуанкаре для фокуса в початку координат системи (3.1). Якщо виконується співвідношення попереднього означення, то $(0,0)$ назовемо **кратним фокусом**, причому $\frac{k-1}{2}$ є кратністю фокуса.

1. Біфуркація граничних циклів з кратних фокусів.

Приклад. Розглянемо систему

$$\dot{x} = \varepsilon x - y + x^2, \quad \dot{y} = x + \varepsilon y + x^2.$$



Мал. 9

◀ Обчислюючи ляпуновський коефіцієнт, отримаємо $l_1(0) = -3\pi \neq 0$, тому початок координат є фокусом кратності 1 при $\varepsilon = 0$. Враховуючи, що $l_1 < 0$, тоді за теоремою Андронова-Хопфа існує біфуркуючий, стійкий граничний цикл при збільшенні параметру $\varepsilon \gg 0$. Граничний цикл та біфуркаційна діаграма зображені на Мал. 9. ▶

Задача 4.22. Показати, що система

$$\dot{x} = \varepsilon x - y - x\sqrt{x^2 + y^2}, \quad \dot{y} = x + \varepsilon y - y\sqrt{x^2 + y^2},$$

має стійкий граничний цикл при $\varepsilon > 0$. Побудувати тривимірну біфуркаційну діаграму.

Задача 4.23. Показати, що система

$$\dot{x} = -y + x(\varepsilon - r^2)(\varepsilon - 2r^2), \quad \dot{y} = x + y(\varepsilon - r^2)(\varepsilon - 2r^2),$$

має два граничних циклу $\gamma_1(t) = \sqrt{\varepsilon}(\cos t, \sin t)^T$, $\gamma_2(t) = \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}(\cos t, \sin t)^T$ при $\varepsilon > 0$. Знайти $l_1(0)$ та переконатися, що $(0,0)$ – кратний фокус. ($r = \sqrt{x^2 + y^2}$).

Відповідь: а) $kch \frac{\omega\pi}{2} \leq \omega\gamma\pi$;

б) $y^2 = x^2 + \frac{2}{3}x^3$ (гомоклінічна траєкторія при $\varepsilon = 0$), гомоклінічна біфуркація відбувається при $\alpha = \frac{6}{7}$.

2. Біфуркації негіперболічних граничних циклів корозмірності один.

Продовжуємо вивчати періодичну орбіту L системи (10) ($x \in R^n, \varepsilon \in R^1$) в ситуації, коли L – негіперболічна, тобто матриця лінеаризації в L має n_ε мультиплікаторів на одиничному колі. Тоді за теоремою про центральний многовид існує n_ε -вимірний многовид $W^c(L)$, причому на цьому многовиді відбуваються найпростіші типи біфуркацій: сідло-вузол (типова), транскритична, вилка.

Твердження 6. Нехай в системі (10): $f \in C^2(U \times R)$, де U – відкрита підмножина в R^n . Припустимо, що при $\varepsilon = \varepsilon_0$ є цикл $\Gamma \subset U$ та $\Pi(t, \varepsilon)$ – відображення Пуанкаре циклу Γ . Нехай Γ – негіперболічна орбіта, тобто $\Pi(0, \varepsilon_0) = 0, \Pi'_\varepsilon(0, \varepsilon_0) = 1$.

1. Якщо виконуються умови

$$D^2\Pi(0, \varepsilon_0) \neq 0, \Pi'_\varepsilon(0, \varepsilon_0) \neq 0, \quad (45)$$

то в L маємо біфуркацію сідло-вузол при $\varepsilon = \varepsilon_0$.

2. За умов

$$D\Pi_\varepsilon(0, \varepsilon_0) \neq 0, \Pi'_\varepsilon(0, \varepsilon_0) = 0, \quad D^2\Pi(0, \varepsilon_0) \neq 0, \quad (46)$$

в циклі L маємо транскритичну біфуркацію.

3. За умов

$$D\Pi_\varepsilon(0, \varepsilon_0) \neq 0, \Pi'_\varepsilon(0, \varepsilon_0) = 0, \quad D^2\Pi(0, \varepsilon_0) = 0, \quad D^3\Pi(0, \varepsilon_0) \neq 0, \quad (47)$$

маємо в циклі L біфуркацію типу вилка.

Доведення: [Kuz].

Зауваження.

1. Біфуркаційні діаграми у випадках (4.48-4.50) цілком аналогічні біфуркаційним діаграмам особливих точок, тільки координатні осі будуть (ρ, ε) , де (φ, ρ) – полярні координати.
2. Враховуючи формулу похідної відображення Пуанкаре (і), неважко отримати корисну формулу для знаходження похідної Π_ε

$$\Pi_\varepsilon(0, \varepsilon_0) = \frac{\pm 1}{|f(\gamma(0))|} \cdot \int_0^T e^{\int_0^t \operatorname{div} f(\gamma(s), \varepsilon_0) ds} \cdot f \wedge f_\varepsilon(\gamma(t), \varepsilon_0) dt, \quad (48)$$

де ± 1 – залежить від орієнтації циклу $\Gamma: \gamma = \gamma(t)$ та $u \wedge v$ – зовнішній добуток векторів.

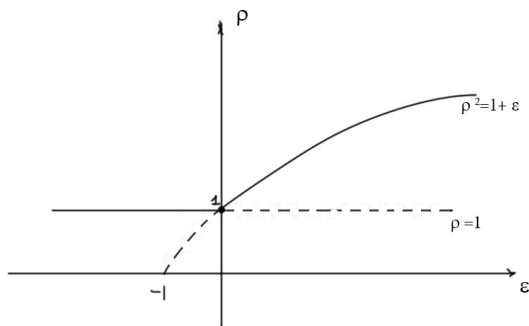
Приклад 4.19. Розглянемо систему на R^2 :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y - x(1-r^2)(1+\varepsilon-r^2), \\ \dot{y} &= x - y(1-r^2)(1+\varepsilon-r^2). \end{aligned}$$

◀ Переходимо до полярних координат

$$\dot{\varphi} = 1, \quad \dot{\rho} = -\rho(1-\rho^2)(1+\varepsilon-\rho^2).$$

Звідси негайно отримаємо дві періодичні траєкторії: $\rho = 1, \rho = \sqrt{1+\varepsilon}$ або



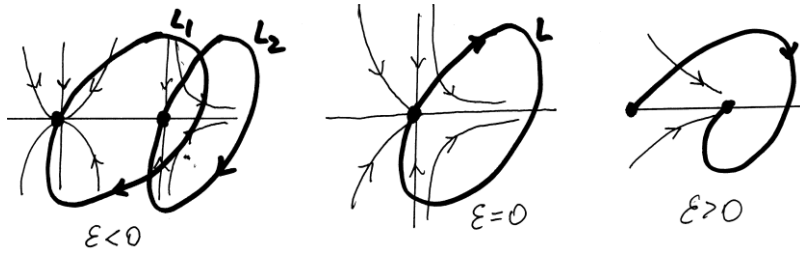
Мал. 10

$$\gamma_1(t) = (\cos t, \sin t)^T,$$

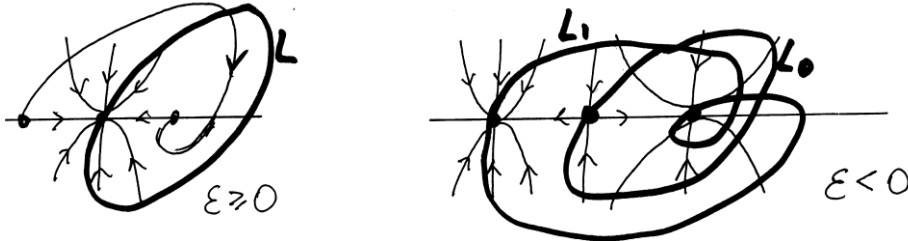
$$\gamma_2(t) = \sqrt{1 + \varepsilon} (\cos t, \sin t)^T$$

За допомогою (48) перевіряємо умови (46), що приводить до наявності транс-критичної біфуркації при $\varepsilon = -1$: $D\Pi(\sqrt{1 + \varepsilon}, \varepsilon) = e^{-4\varepsilon(1+\varepsilon)\pi}$, $D\Pi(1, \varepsilon) = e^{4\varepsilon\pi}$. Враховуючи $D\Pi(1, 0) = 1$, тоді маємо негіперболічну орбіту Γ та обидва мультиплікатори дорівнюють 0 в точці біфуркації $\varepsilon = 0$ (див. Мал. 10). ►

В багатовимірному випадку виділяють наступні біфуркації граничних циклів корозмірності один.



Мал. 11



Мал. 12

а) Біфуркації сідло-вузол граничних циклів. Вище з'ясовано, що виникає цей тип біфуркації у випадку, коли цикл має простий мультиплікатор $\rho_1 = 1$ та інші $\rho_i \in (0, 1)$ при ($\varepsilon = 0$). Маємо стійку та сідлову особливу точку відображення Π_ε (якщо 2 мультиплікатори), які відповідають стійкому та нестійкому граничному циклу (Мал. 11).

б) Біфуркація подвоєння періоду (flip). Припустимо система (10) при $\varepsilon = 0$ має цикл з некрратним мультиплікатором -1 та іншим $\mu_k \in (-1, 0)$. Цикл подвоєного періоду виникає від відображення Пуанкаре, коли його нерухома точка змінює стійкість (Мал. 12).

с) Біфуркація Неймарка-Сакера. Цей тип біфуркації впливає за умов існування некрратних комплексних мультиплікаторів, які лежать на одиничному колі $\rho_i = e^{\pm i\varphi_0}$. Відображення Пуанкаре має параметрозалежний, двовимірний, інваріантний многовид на якому цикли типово біфуркують. Ці замкнені цикли відповідають двовимірним інваріантним торам (Мал. 13).



Задача 4.22. а) Дослідити сідло-вузлову біфуркацію граничних циклів системи Мал. 13

$$\dot{x} = -y - x(\varepsilon - (r^2 - 1)^2), \quad \dot{y} = x - y(\varepsilon - (r^2 - 1)^2).$$

Навести біфуркаційну діаграму.

б) Дослідити біфуркацію типу вилка граничних циклів системи

$$\dot{x} = -y + x(1 - r^2)(\varepsilon - (r^2 - 1)^2), \quad \dot{y} = x + y(1 - r^2)(\varepsilon - (r^2 - 1)^2).$$

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Навести біфуркаційну діаграму.

Додаток 1. Розрахунково-графічна робота з теорії біфуркацій.

Задача 1. (Тема: Біфуркації особливих точок).

Знайти точки біфуркації, встановити їх тип та побудувати біфуркаційну діаграму:

1. $x' = \varepsilon x - x^5$

2. $x' = \varepsilon x - x^3 - x^5$.

3. $x' = \varepsilon x - x^3 - x^7$.

4. $x' = x(x-1)(x-2\varepsilon)$.

5. $x' = -x(4x^2 + \varepsilon^2 - 1)$.

6. $x' = x^2 + 4\varepsilon^2 - 1$.

7. $x' = x + 2\varepsilon x^2 - x^3$.

8. $x' = \varepsilon x - 3x^2$.

9. $x' = x(\varepsilon - 2x + x^2)$.

10. $x' = x(\varepsilon + x - x^2)(1 - \varepsilon + x^2)$.

11. $x' = x^2 - \varepsilon^2 x$.

12. $x' = \varepsilon^2 - x^4$.

13. $x' = \varepsilon^2 x - x^3$.

14. $x' = x(x - \varepsilon^2)(\varepsilon - x)$.

15. $x' = \varepsilon - x - e^{-x}$.

16. $x' = x(\varepsilon + e^x)$.

17. $x' = x - \frac{\varepsilon x}{1 + x^2}$.

Дослідити стійкість та тип біфуркації особливих точок. Навести біфуркаційну діаграму системи:

18. $x' = x, \quad y' = \varepsilon - y^4$.

19. $x' = x^2 - x\varepsilon^2, \quad y' = -y$.

20. $x' = -x^4 + 5\varepsilon x^2 - 4\varepsilon^2, \quad y' = -y$.

21. $x' = x(\varepsilon - 2x) - xy, \quad y' = y(x-1)$.

22. $x' = x(\varepsilon - 2x) - xy, \quad y' = y(x-1) + y^2$.

23. $x' = x(\varepsilon - 2x) - xy, \quad y' = y(x-1) - y^2$.

24. $x' = 2(1 - \varepsilon)x + x^2 - xy, \quad y' = x + \frac{1}{2}x^2 - y$.

25. $x' = \varepsilon x - 2x(x^2 + y^2), \quad y' = (\varepsilon - 1)y - y(x^2 + y^2)$.

26. $x' = y + \varepsilon x - xy + y^2, \quad y' = \varepsilon x + xy - x^2$.

27. $x' = \varepsilon x - xy - x^2 + y^2, \quad y' = \varepsilon y + xy$.

28. $x' = y, \quad y' = x(\varepsilon - x^2)$.

29. $x' = x, \quad y' = y^2 - \varepsilon$.

$$30. x' = y, \quad y' = -x - 2x^2 - \varepsilon x^3.$$

Задача 2. (Тема: Біфуркація Андронова-Хопфа).

Знайти при якому значенні параметра ε_0 відбувається біфуркація Андронова-Хопфа. Намалювати фазовий портрет системи при значеннях параметра $\varepsilon = \varepsilon_0; 0$.

1. $x' = x(x(1-x) - y), \quad y' = (x - \varepsilon)y.$
2. $x' = -x + 0,05y + x^2y, \quad y' = \varepsilon - 0,05y - x^2y.$
3. $x' = \varepsilon x + y - x^2y, \quad y' = -x + \varepsilon y.$
4. $x' = \varepsilon x + y - x^3, \quad y' = -x + \varepsilon y + 2y^3.$
5. $x' = \varepsilon x + y - x^2, \quad y' = -x + \varepsilon y + x^2.$
6. $x' = \varepsilon x + y - x^2 + xy^2, \quad y' = -x + \varepsilon y - y^2.$
7. $x' = y + \varepsilon x - \frac{1}{3}x^3, \quad y' = -x.$
8. $x' = y + \varepsilon x - y^2, \quad y' = -4x + \varepsilon y + y^2.$
9. $x' = r^2(\varepsilon - r^2)x + y, \quad y' = r^2(\varepsilon - r^2)y - x, \quad r^2 = x^2 + y^2.$
10. $x' = 2(1 - \varepsilon)x + x^2 - xy, \quad y' = x + \frac{1}{2}x^2 - y.$
11. $x' = y + \varepsilon x - xy^2, \quad y' = \varepsilon y - x - y^3.$
12. $\varphi' = 1, \quad r' = \varepsilon r(r + \varepsilon)^2.$
13. $\varphi' = -1, \quad r' = r(\varepsilon - r)(\varepsilon - 2r).$
14. $\varphi' = 1, \quad r' = r(\varepsilon^2 - r^2).$
15. $\varphi' = -1, \quad r' = r(\varepsilon - 0,2r^6 + r^4 - r^2).$
16. $\varphi' = 1, \quad r' = r((r - 1)^2 - \varepsilon r).$
17. $\ddot{x} + \dot{x}^3 - 2\varepsilon\dot{x} + x = 0.$
18. $\ddot{x} - (\varepsilon - x^2)\dot{x} + x = 0.$
19. $x' = y, \quad y' = -x + \varepsilon y + x^2 + xy + y^2.$
20. $x' = \varepsilon(1 - xy^2 + \varepsilon(y - 1)), \quad y' = xy^2 - y.$
21. $x' = -\varepsilon x - y + \frac{x}{1 + x^2 + y^2}, \quad y' = x - \varepsilon y + \frac{y}{1 + x^2 + y^2}.$
22. $x' = y - x(x^2 + y^2 - \varepsilon), \quad y' = -x - y(x^2 + y^2 - \varepsilon).$
23. $x' = \varepsilon x - y - x^3, \quad y' = x + \varepsilon y - y^3.$
24. $x' = \varepsilon x - y + (x^2 + y^2)^2(\alpha x - \beta y),$
 $y' = x + \varepsilon y + (x^2 + y^2)^2(\alpha x + \beta y).$
25. $x' = \varepsilon x - y - x\sqrt{x^2 + y^2}, \quad y' = x + \varepsilon y - y\sqrt{x^2 + y^2}.$

$$26. \ddot{x} + \varepsilon \dot{x} + (x - x^3) = 0.$$

$$27. x' = \varepsilon x - y + x^2 + xy, \quad y' = x + \varepsilon y + x^2 - y^2.$$

$$28. \begin{aligned} x' &= \varepsilon x - y + x(x^2 + y^2) - y(x^2 + y^2), \\ y' &= x + \varepsilon y + x(x^2 + y^2) + y(x^2 + y^2). \end{aligned}$$

$$29. x' = \varepsilon x + y + xy - xy^2, \quad y' = -x + \varepsilon y - x^2 + y^2.$$

$$30. x' = x + y, \quad y' = (\varepsilon - 2)x + (\varepsilon - 1)y - x^3 - x^2y.$$

Додаток 2. Спрощене доведення теореми Андронова-Хопфа.

Враховуючи складність доведення теореми Андронова-Хопфа, наведемо суттєво спрощене доведення двовимірного варіанту теореми яку можна також одночасно сприймати як критерій існування граничного циклу.

Теорема А. Нехай в системі

$$\begin{aligned} x' &= \mu x - y + p(x, y), \\ y' &= x + \mu y + q(x, y), \end{aligned} \quad (1)$$

де $p = \sum_{i+j \geq 2} a_{ij} x^i y^j = a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + a_{30}x^3 + a_{21}x^2y + \dots$, $q = \sum_{i+j \geq 2} b_{ij} x^i y^j$. Припустимо

невиродженість ляпуновського значення:

$$L = 3a_{30} + a_{12} + b_{21} + 3b_{03} - a_{20}a_{11} - b_{11}b_{02} - 2a_{02}b_{02} - a_{02}a_{11} + 2a_{20}b_{20} + b_{11}b_{20} \neq 0. \quad (2)$$

Якщо $L > 0$, то існує нестійкий граничний цикл при $\mu = 0$, якщо $L < 0$, то існує стійкий граничний цикл при $\mu = 0$.

Доведення. Розглянемо систему (1) за умови $\mu = 0$ у вигляді:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_2 \\ G_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_3 \\ G_3 \end{pmatrix} + \dots = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 \\ b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2 \end{pmatrix} + \\ &+ \begin{pmatrix} a_{30}x^3 + a_{21}x^2y + a_{12}xy^2 + a_{03}y^3 \\ b_{30}x^3 + b_{21}x^2y + b_{12}xy^2 + b_{03}y^3 \end{pmatrix} + \dots \end{aligned}$$

Розглянемо функцію Ляпунова в вигляді $V = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + V_3(x, y) + V_4(x, y)$, де V_i – однорідні многочлени i степені. Маємо відповідний вигляд похідної:

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \left(x + \frac{\partial V_3}{\partial x} + \frac{\partial V_4}{\partial x} \right) (y + F_3 + F_4) + \left(y + \frac{\partial V_3}{\partial y} + \frac{\partial V_4}{\partial y} \right) (-x + G_2 + G_3) + \dots = \\ &= xF_2 + yG_2 + \left(y \frac{\partial V_3}{\partial x} - x \frac{\partial V_3}{\partial y} \right) + \\ &+ xF_3 + yG_3 + F_2 \frac{\partial V_3}{\partial x} + G_2 \frac{\partial V_3}{\partial y} + \left(y \frac{\partial V_4}{\partial x} - x \frac{\partial V_4}{\partial y} \right) + \dots \end{aligned}$$

Наша мета – знищення доданків третього порядку (Q_3) та довести вигляд доданків четвертого порядку: $Q_4 = k(x^2 + y^2)^2$. Зважаючи на вигляд виразу в дужках в останній формулі, введемо оператор $T_k(p) := y \frac{\partial p}{\partial x} - x \frac{\partial p}{\partial y} : P_k \rightarrow P_k$, де P_k – множина однорідних поліномів k -ї степені ($k \geq 3$) двох змінних. При $k = 3$ базис має вигляд $\{e_i\} = \{x^3, x^2y, xy^2, y^3\}$. В цьому базисі матриця оператора має вигляд:

$$T_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Враховуючи, що $\det T_3 \neq 0$, то однорідна система $T_3 \bar{x} = 0$ має тільки тривіальні розв'язки. Аналогічно при довільному k непарному з співвідношення $y \frac{\partial p}{\partial x} = x \frac{\partial p}{\partial y}$ випливає $T_3(p) = 0$ та остаточно $p = 0$.

Розглянемо матрицю оператора для степені $k = 4$:

$$T_4 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Зрозуміло, що $\det T_4 = 0$, $rk(T_4) = 4$, тому $\dim \ker(T_4) = 1$. Знаходимо $\vec{v}_1 = (1 \ 0 \ 2 \ 0 \ 1)^T \in \ker T_4$ та $T_4 : \vec{a} = (a_0 \ a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4)^T \rightarrow a_0 x^4 + a_1 x^3 y + a_2 x^2 y^2 + a_3 x y^3 + a_4 y^4$. Знайдемо образ $\text{Im}(T_4) = \{w \in P_4 / \exists v \in P_4 : T_4(v) = w\}$. Враховуючи раніше введені позначення, маємо $k \cdot \vec{v}_1 + \vec{w} = \vec{v}$ та остаточно

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} k - a_0 \\ -a_1 \\ 2k - a_2 \\ -a_3 \\ k - a_4 \end{pmatrix}.$$

Відомо, що $\text{Ker}A^T \perp \text{Im}A$, тому знаходимо вектор $\vec{v}_2 \in \text{Ker}A^T : A^T\vec{v}_2 = 0, (A=T_4)$.

Звідки $\vec{v}_2 = (3 \ 0 \ 1 \ 0 \ 3)^T$, враховуючи $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$, остаточно маємо

$$k = \frac{3a_0 + a_2 + 3a_4}{8} = \frac{L}{8},$$

де L – ляпуновська величина (2).

Таким чином при $k = 4$ та $p \in T_4$ доведено: $T_4(p) = 0$, тобто $Q_3 = 0$ та $p = \frac{L}{8}(x^2 + y^2)^2$

, тобто $Q_4 = k(x^2 + y^2)^2$. Усі умови теореми Пуанкаре-Бендіксона [ГП] (ляпуновська функція задає інваріантну множину) виконані, тому існує граничний цикл в околі початку координат. Теорему А доведено.

Список літератури.

- [Bar] Barreira L., Valls C., Ordinary differential equations. – Providence: AMS, 2012. – 266 p.
- [Cai] Cain J.W., Reynolds A., Ordinary and partial differential equations. – Richmond, Math. textbook series, 2010. – 416 p.
- [Ric] Ricardo H., A modern introduction to differential equations. – London, Elsevier, 2021. – 550 p.
- [ГП] Гречко А.Л., Пелюх Г.П., Вступ до якісної теорії диференціальних рівнянь: К., «Політехніка», 2017. – 248 с.
- [Чоу] Чоу Ш.Н., Ван Д., Ли Ч. Нормальные формы и бифуркации векторных полей на плоскости. – М.: МЦНМО, 2005. – 415 с.
- [Ши2] Шильников Л.П. и др. Методы качественной теории в нелинейной динамике. Часть 2. – М.: ИКИ, 2009. – 583 с.
- [Kuz] Kuznetsov Y. Elements of applied bifurcation theory. – New York: Springer, 1998. – 614p.
- [Per] Perko L. Differential equations and dynamical systems. – New York: Springer, 1996. – 556 p.