

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ  
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ  
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

**ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ  
ЕЛЕКТРОТЕХНІКИ – 1  
ЕЛЕКТРИЧНІ КОЛА ПОСТІЙНОГО ТА  
ЗМІННОГО СТРУМУ. ЧОТИРИПОЛЮСНИКИ  
ПРАКТИКУМ**

*Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського  
як навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра за спеціальністю  
141 «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка»*

Київ  
КПІ ім. Ігоря Сікорського  
2021

Теоретичні основи електротехніки: Частина 1. Електричні кола постійного та змінного струму. Чотириполюсники [Електронний ресурс]: навч. посіб. для студ. спеціальності 141 «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка»/ КПІ ім. Ігоря Сікорського; уклад.: Ю. В. Перетятко, А. А. Щерба– Електронні текстові дані (1 файл: 21.7 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. – 115 с.

*Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського (протокол № 7 від 13.05.2021 р.) за поданням Вченої ради факультету електроенерготехніки та автоматики (протокол №7 від 22.02.2021 р.)*

Електронне мережне навчальне видання

## **ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ЕЛЕКТРОТЕХНІКИ – 1** **ЕЛЕКТРИЧНІ КОЛА ПОСТІЙНОГО ТА ЗМІННОГО СТРУМУ. ЧОТИРИПОЛЮСНИКИ**

### **ПРАКТИКУМ**

Укладачі: *Щерба Анатолій Андрійович, доктор технічних наук, професор*  
*Перетятко Юлія Вікторівна, канд. техн. наук, доцент*

Відповідальний редактор *Бойко В. С. д-р техн. наук, проф.*

Рецензенти: *Пушкар Микола Васильович, канд. техн. наук, доц. кафедри автоматизації електромеханічних систем та електроприводу факультету електроенерготехніки та автоматики КПІ ім. Ігоря Сікорського*

В навчальному посібнику дані короткі теоретичні відомості, розглянуто основні властивості та інженерні методи розрахунку кіл постійного струму, однофазних електричних кіл синусоїдного струму та чотириполюсників. До кожного розділу включені приклади розрахунку типових задач та представлені задачі для самостійного опрацювання до кожного практичного заняття. Задачі, представлені у посібнику, ілюструють загально-фізичні і розрахунково-теоретичні положення курсу.

Посібник призначений для студентів спеціальності 141 «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка» денної, прискореної та заочної форм навчання.

## ЗМІСТ

Вступ		5
-------	--	---

### Розділ 1.

#### ЛІНІЙНІ ЕЛЕКТРИЧНІ КОЛА ПОСТІЙНОГО СТРУМУ

Практичне заняття 1.	Способи з'єднання елементів у електричному колі. Аналіз простих кіл постійного струму	6
Практичне заняття 2.	Розрахунок кіл постійного струму за законами Ома та Кірхгофа	17
Практичне заняття 3.	Методи контурних струмів	22
Практичне заняття 4.	Метод вузлових потенціалів	28
Практичне заняття 5.	Еквівалентні перетворення у лінійних електричних колах	33
Практичне заняття 6.	Метод накладання дії джерел енергії	37
Практичне заняття 7.	Метод активного двополюсника	41
Практичне заняття 8.	Передача максимальної потужності від активного двополюсника пасивному	47

### Розділ 2.

#### ЛІНІЙНІ ЕЛЕКТРИЧНІ КОЛА ОДНОФАЗНОГО СИНУСОЇДНОГО СТРУМУ

Практичне заняття 9.	Розрахунок кола синусоїдного струму при послідовному та паралельному з'єднанні елементів	52
Практичне заняття 10.	Розрахунок кола синусоїдного струму змішаного з'єднання	59
Практичне заняття 11.	Розрахунок складного кола синусоїдного струму	65
Практичне заняття 12.	Використання методу еквівалентного генератора у колі синусоїдного струму.	71
Практичне заняття 13.	Розрахунок кола при послідовному та паралельному з'єднанні двох індуктивно-	

	зв'язаних котушок	76
Практичне заняття 14.	Розрахунок розгалуженого кола з індуктивними зв'язками	80
Практичне заняття 15.	Розрахунок резонансних станів нерозгалужених та розгалужених електричних кіл	85
Практичне заняття 16.	Якісний аналіз частотних характеристик двополюсників.	91
Практичне заняття 17.	Основи теорії пасивних чотириполюсників	96
Практичне заняття 18.	Способи з'єднання пасивних чотириполюсників	107
Список використаної літератури		115

## ВСТУП

Вивчення дисциплін, які можуть бути об'єднані поняттям «Теоретичні основи електротехніки», вимагає систематичної самостійної роботи над навчальною літературою, розв'язання задач контрольних робіт і індивідуальних завдань відповідно до робочої навчальної програми. Таким чином, задовільне засвоєння дисципліни неможливе без розв'язання задач.

Головна мета практикуму полягає у допомозі студентам, які вивчають курс ТОЕ в умовах постійного зменшення кількості годин аудиторного навчання та впровадженням дистанційної форми навчання.

Матеріал практикуму розбитий на розділи, кожен з яких містить набір типових розв'язаних задач, які є прикладом оформлення задач контрольних робіт і індивідуальних завдань, а також задачі для самостійного розв'язання. Окремі типові розрахунки являють собою набори з однотипних більш складних і трудомістких завдань, кожне з яких складається з ряду підзадач або декількох незалежних завдань. Виконання типових розрахунків покликане розвинути творчі навички студентів щодо порівняльного аналізу отриманих результатів, що характерно для інженерної практики.

При укладанні практикуму врахований інтенсивний розвиток сучасної обчислювальної техніки: розрахунки та побудова графіків адаптовані до використання комп'ютерної математичної системи MathCAD.

Посібник рекомендовано для студентів денної та заочної форм навчання всієї освітніх програм за спеціальністю 141 «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка».

# РОЗДІЛ 1. ЛІНІЙНІ ЕЛЕКТРИЧНІ КОЛА ПОСТІЙНОГО СТРУМУ

## Практичне заняття 1.

### Способи з'єднання елементів у електричному колі. Аналіз простих кіл постійного струму

**Задача 1.1.** Визначити покази вольтметра за заданих параметрів кола.

$$R_1 = 10 \text{ Ом};$$

$$R_2 = 20 \text{ Ом};$$

$$E_1 = 60 \text{ В};$$

$$E_2 = 20 \text{ В};$$

$$E_3 = 10 \text{ В};$$

$$U = 40 \text{ В}.$$

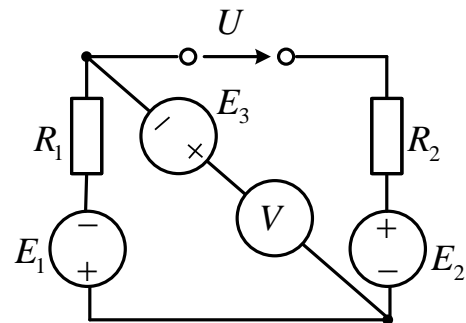


Рис. 1.1

### Розв'язання

Будь-який вимірювальний пристрій не повинен вносити змін у розподіл струмів, які протікають у колі. При аналізі кіл умовно приймають внутрішній опір вольтметра рівний нескінченності, а амперметра – нулю. Відповідно на схемах заміщення видалений вольтметр моделюють розривом, а амперметр – перемичкою.

Виходячи з вище сказаного у заданому колі протікає один струм у зовнішньому контурі. Довільно задамо напрям протікання струму, наприклад, проти годинникової стрілки та запишемо рівняння відносно затискачів джерела напруги  $U$ , застосувавши II закон Кірхгофа:

$$U = I \cdot (R_1 + R_2) - E_1 - E_2$$

Звідки струм у колі

$$I = \frac{U + E_1 + E_2}{R_1 + R_2} = \frac{40 + 60 + 20}{10 + 20} = 4 \text{ А}.$$

Показ вольтметр

$$U_V = E_3 + IR_1 - E_1 = 10 + 4 \cdot 10 - 60 = -10 \text{ В}$$

або

$$U_V = E_3 + U + E_2 - IR_2 = 10 + 40 + 20 - 4 \cdot 20 = -10 \text{ В.}$$

Незалежно від напрямку обходу контуру отримані однакові значення показу вольтметра.

**Задача 1.2.** У електричному колі рис. 1.2 відомі опори  $r_1 = 100 \text{ Ом}$ ,  $r_2 = 150 \text{ Ом}$ ,  $r_3 = 50 \text{ Ом}$  і вхідна напруга  $U = 150 \text{ В}$ . Розрахувати струми при розімкненому рубильнику  $S$ . Як зміняться струми, якщо рубильник буде замкнений?

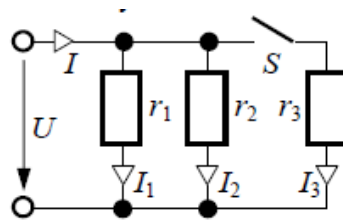


Рис. 1.2

### Розв'язання

При розімкненому рубильнику  $S$  струми опорів розрахуємо за законом Ома:

$$I_1 = \frac{U}{r_1} = \frac{150}{100} = 1.5 \text{ А};$$

$$I_2 = \frac{U}{r_2} = \frac{150}{150} = 1 \text{ А.}$$

$I_3 = 0$ , оскільки рубильник розімкнений

Струм на вході паралельного з'єднання знайдемо відповідно до першого закону Кірхгофа

$$I = I_1 + I_2 = 1.5 + 1 = 2.5 \text{ А.}$$

При замкненому рубильнику струми

$$I_1 = \frac{U}{r_1} = \frac{150}{100} = 1.5 \text{ А} - \text{ має попереднє значення,}$$

$$I_2 = \frac{U}{r_2} = \frac{150}{150} = 1 \text{ А} - \text{ також не зміниться,}$$

$$I_3 = \frac{U}{r_3} = \frac{150}{50} = 3 \text{ A.}$$

Струм на вході кола зміниться:

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = 1.5 + 1 + 3 = 5.5 \text{ A.}$$

### Задача 1.3

Встановити залежність між струмом на вході паралельно з'єднання двох гілок з резистивними елементами та струмами у цих паралельних гілках.

Згідно першого закону Кірхгофа струм на вході кола

$$I = I_1 + I_2 = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} = \frac{U}{R_E}, \text{ де}$$

$$R_E = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \text{ – еквівалентний опір кола.}$$

Відповідно до закону Ома напруга на вході кола може бути розраховано за одним з виразів:

$$U = IR_E = I \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = I_1 R_1 = I_2 R_2$$

Звідси

$$I_1 R_1 = I \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \Rightarrow I_1 = I \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

$$I_2 R_2 = I \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \Rightarrow I_2 = I \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

Отримані вирази для розрахунку струмів у паралельних гілках називають правилом *чужого опору*. Це правило може бути застосовано, якщо гілок не більше двох. Кількості елементів у кожній з паралельних гілок та способи їх з'єднання не обмежується.

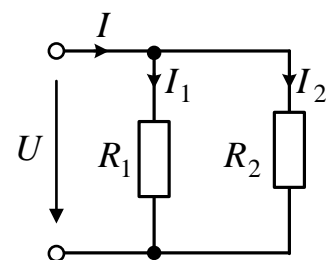


Рис. 1.3



### Задача 1.4

У колі рис. 1.4 визначити струми за умови, якщо рубильник буде замкнений.

Параметри кола

$$U = 36 \text{ В};$$

$$R_1 = 4 \text{ Ом};$$

$$R_2 = 1 \text{ Ом};$$

$$R_3 = 2 \text{ Ом};$$

$$R_4 = R_5 = 6 \text{ Ом}.$$

### Розв'язання

Виконаємо розрахунок кола при замкненому ключі  $S$ .

У зв'язку з неочевидністю типу з'єднань опорів пронумеруємо вузли (див. рис. 1.5) і перемальовуємо коло у більш наочно (див. рис. 1.6). У разі замкненого рубильника, провідник, що його містить, формує лінію єдиного потенціалу. А отже резистори  $R_3$  та  $R_5$  з'єднані паралельно, оскільки провідник між точками **3-3** може бути поданий єдиною точкою, тому

$$R_{35} = \frac{R_3 R_5}{R_3 + R_5} = \frac{2 \cdot 6}{2 + 6} = 1,5 \text{ Ом}$$

Отриманий опір з'єднаний послідовно з  $R_4$  (див. рис. 1.7)

Вказуємо додатні напрями струмів (рис. 1.6) за умови замкненого рубильника  $S$ .

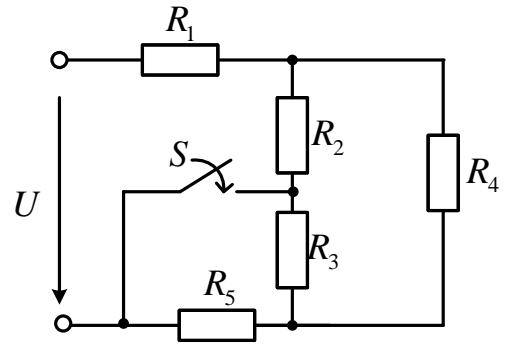


Рис. 1.4

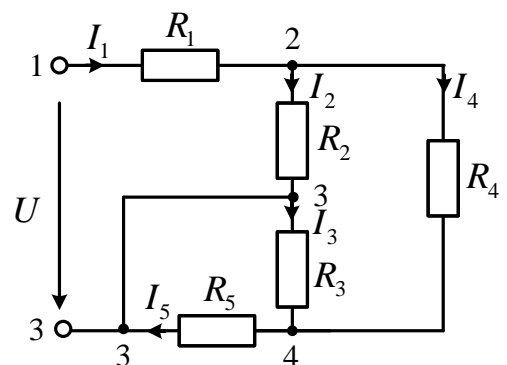


Рис. 1.5

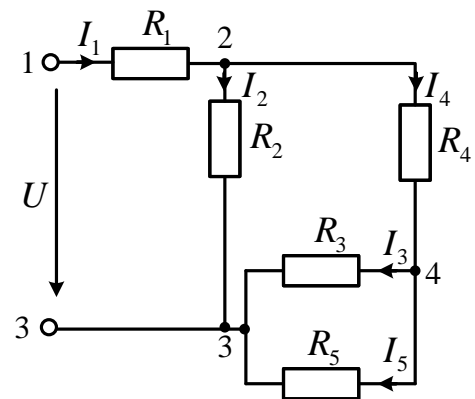


Рис. 1.6

Для визначення струму на вході кола

застосуємо закон Ома:

$$I = \frac{U}{R_E}, \text{ де } R_E = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} - \text{ще невідомий}$$

еквівалентний опір кола.

$$R_E = R_1 + \frac{R_2 (R_4 + R_{35})}{R_2 + (R_4 + R_{35})} = 4,882 \text{ Ом}$$

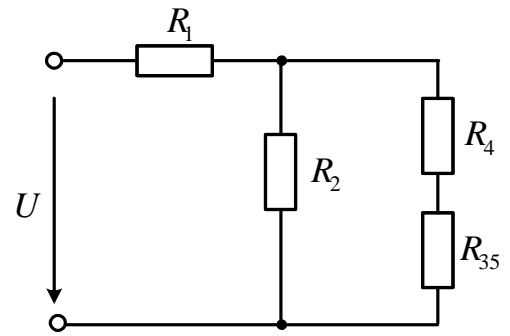


Рис. 1.7

$$\text{Струм на вході кола} - I_1 = \frac{U}{R_E} = \frac{36}{4,882} = 7,374 \text{ А.}$$

Струм у розгалуженій частині кола –

$$I_2 = I_1 \frac{R_4 + R_{35}}{R_2 + R_4 + R_{35}} = 6,506 \text{ А,}$$

$$I_4 = I_1 \frac{R_2}{R_2 + R_4 + R_{35}} = 0,868 \text{ А,}$$

$$I_5 = I_4 \frac{R_3}{R_3 + R_5} = 0,217 \text{ А,}$$

$$I_3 = I_4 \frac{R_5}{R_3 + R_5} = I_4 - I_5 = 0,651 \text{ А.}$$

**Задача 1.4.** Виконати розрахунок струмів у всіх гілках кола та показів вимірювальних приладів

$$R_1 = 20 \text{ Ом}$$

$$R_2 = 20 \text{ Ом}$$

$$R_3 = 80 \text{ Ом}$$

$$R_4 = 120 \text{ Ом}$$

$$R_5 = 80 \text{ Ом}$$

$$R_6 = 400 \text{ Ом}$$

$$R_7 = 36 \text{ Ом}$$

$$U = 100 \text{ В}$$

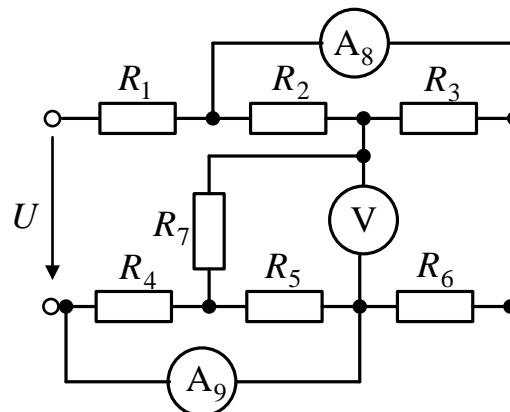


Рис. 1.8

## Розв'язання

У зв'язку з неочевидністю типу з'єднань опорів пронумеруємо вузли, замінюємо вимірювальні прилади їх внутрішніми опорами (див. рис. 1.9) і перемальовуємо коло більш наочно із зазначенням додатних напрямів струмів (див. рис. 1.10).

Для розрахунку вхідного струму застосуємо закон Ома:

$$I_1 = \frac{U_{15}}{R_E} = \frac{U}{R_E}, \text{ де } R_E - \text{ ще}$$

невідомий еквівалентний опір кола.

$$R_{23} = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = \frac{20 \cdot 80}{20 + 80} = 16 \text{ Ом},$$

$$R_{45} = \frac{R_4 R_5}{R_4 + R_5} = \frac{120 \cdot 80}{120 + 80} = 48 \text{ Ом},$$

$$R_E = R_1 + \frac{R_6 (R_{23} + R_7 + R_{45})}{R_6 + (R_{23} + R_7 + R_{45})} =$$

$$= 20 + \frac{400 \cdot (16 + 36 + 48)}{400 + (16 + 36 + 48)} = 100 \text{ Ом}$$

Розрахунок струму на вході кола:

$$I_1 = \frac{U}{R_E} = \frac{100}{100} = 1 \text{ А.}$$

Розрахунок струмів у розгалуженій частині кола:

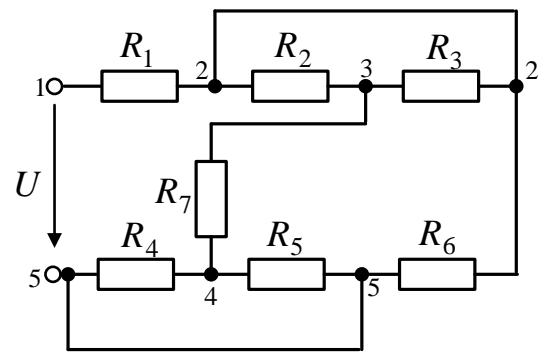


Рис. 1.9

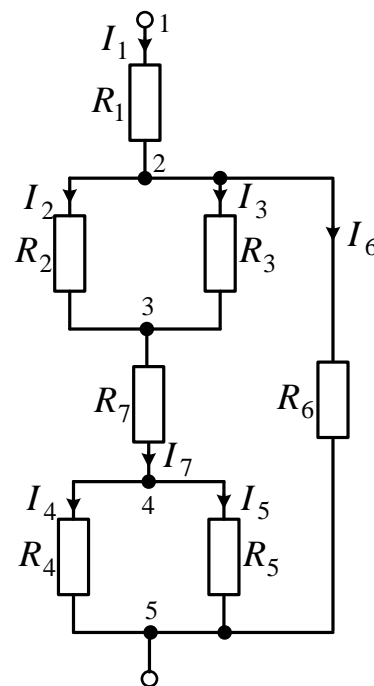


Рис. 1.10

$$I_6 = I_1 \frac{R_{23} + R_7 + R_{45}}{R_6 + (R_{23} + R_7 + R_{45})} =$$

$$= 1 \frac{16 + 36 + 48}{400 + (16 + 36 + 48)} = 0.2 \text{ A},$$

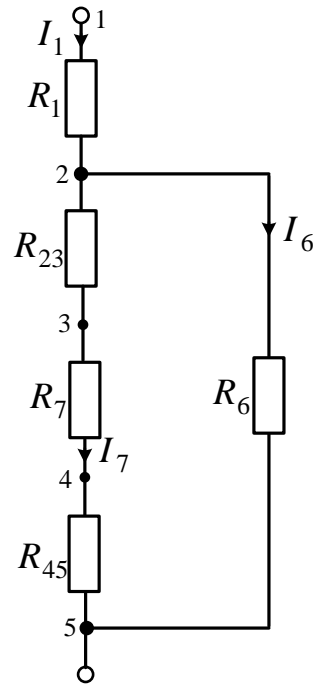


Рис. 1.11

$$I_7 = I_1 \frac{R_6}{R_6 + (R_{23} + R_7 + R_{45})} = 1 \frac{400}{400 + (16 + 36 + 48)} = 0.8 \text{ A},$$

$$I_2 = I_7 \frac{R_3}{R_3 + R_2} = 0.8 \cdot \frac{80}{80 + 20} = 0.64 \text{ A},$$

$$I_3 = I_7 \frac{R_3}{R_3 + R_2} = I_7 - I_2 = 0.8 \cdot \frac{20}{80 + 20} = 0.16 \text{ A},$$

$$I_4 = I_7 \frac{R_5}{R_4 + R_5} = 0.8 \cdot \frac{80}{80 + 120} = 0.32 \text{ A},$$

$$I_5 = I_7 \frac{R_4}{R_4 + R_5} = I_7 - I_4 = 0.8 \cdot \frac{120}{80 + 120} = 0.48 \text{ A}.$$

Встановимо покази вимірювальних приладів, для цього нанесемо обрані напрями струмів (рис. 1.10) на задану схему кола користуючись маркуванням вузлів.

Згідно першому закону Кірхгофа

$$I_8 = I_1 - I_2 = 1 - 0.64 = 0.36 \text{ A},$$

$$I_9 = I_5 + I_6 = I_1 - I_2 = 0.48 + 0.2 = 0.68 \text{ A}$$

або

$$I_9 = I_1 - I_4 = 1 - 0.32 = 0.68 \text{ A}$$

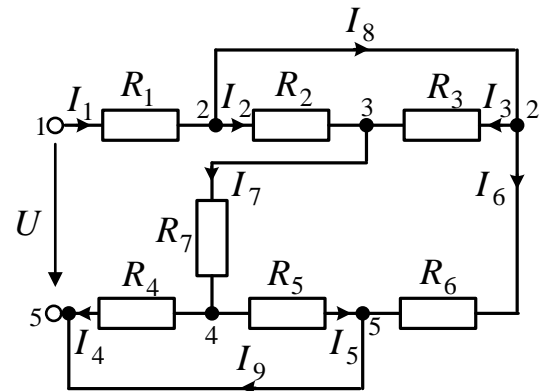


Рис. 1.12

### Задачі для самостійного розв'язання

**Задача 1.5.** У скільки разів збільшиться потужність розсіювання на резисторі, якщо сила струму в ньому збільшиться в 1,5 рази?

**Задача 1.6.** Чому дорівнює напруга на затискачах розімкненого акумулятора з ЕРС  $E = 12,4 \text{ В}$ ; замкнутого на навантаження  $R_n = 6 \text{ Ом}$ , якщо внутрішній опір акумулятора  $R_0 = 0,2 \text{ Ом}$ ?

**Задача 1.7.** Який найбільший постійний струм допустимо в резисторі з опором  $1 \text{ кОм}$ , якщо його номінальна потужність  $50 \text{ Вт}$ ?

**Задача 1.8.** Скласти схему джерела, якщо джерело має лінійну зовнішню ВАХ з параметрами  $U_{\text{нх}} = 100 \text{ В}$ ,  $I_{\text{кз}} = 10 \text{ А}$ , а опір  $R_n$  може змінюватися від нуля до нескінченності.

**Задача 1.9.** Виконати розрахунок еквівалентного опору відносно затискачів вхідних затискачів, якщо опори всіх резисторів рівні.

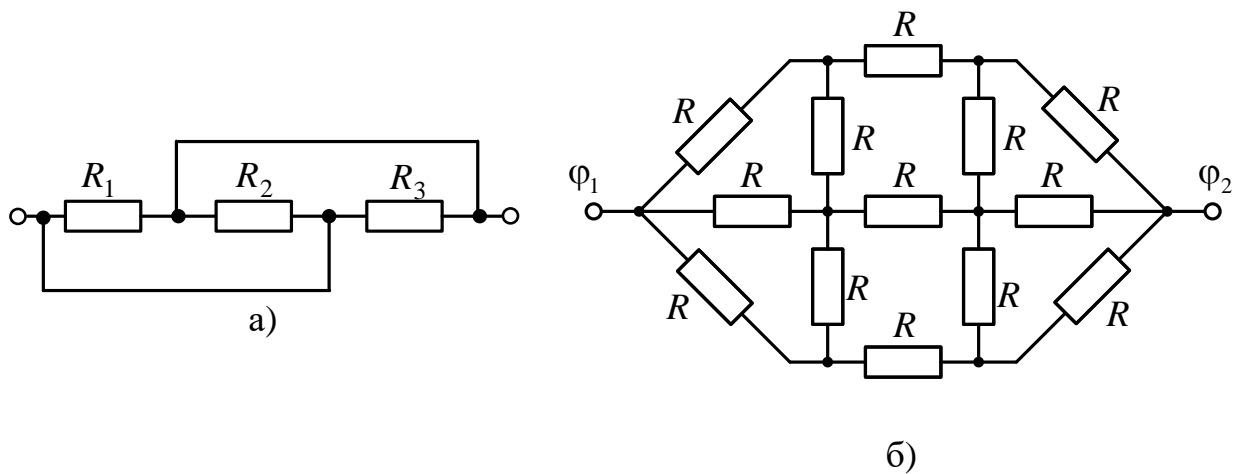


Рис. 1.13

**Задача 1.10.** Визначити опір кожного з кіл (рис. 1.14) з боку вхідних затискачів 1-1`:

- I. За умови неробочого ходу з вихідних затискачів 2-2` (затискачі 2-2` розімкнені);
- II. За умови короткого замикання вихідних затискачів 2-2` (затискачі 2-2` замкнені).

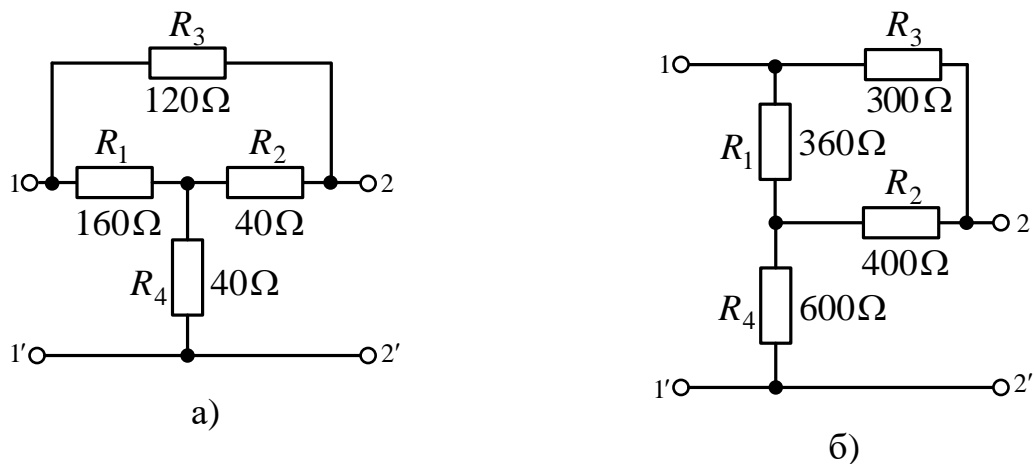


Рис. 1.14

**Задача 1.11.** Визначити покази вимірювальних приладів для кола на рис. 1.15 за заданих параметрів  $E = 100$  В,  $R_1 = 50$  Ом,  $R_2 = 30$  Ом,  $R_3 = 20$  Ом.

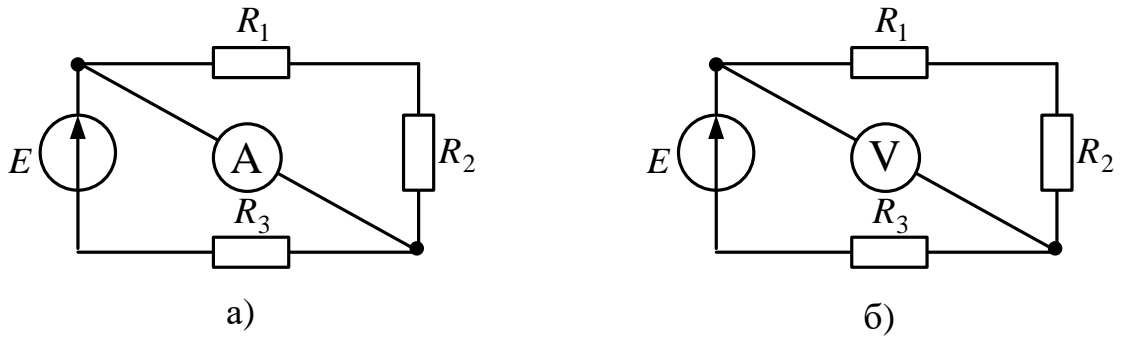


Рис. 1.15

**Задача 1.12.**

Визначити покази амперметрів для кола на рис. 1.16 за заданих параметрів

- $J = 12 \text{ A,}$
- $R_1 = 30 \text{ Ом,}$
- $R_2 = 60 \text{ Ом,}$
- $R_3 = 40 \text{ Ом,}$
- $R_4 = 20 \text{ Ом.}$

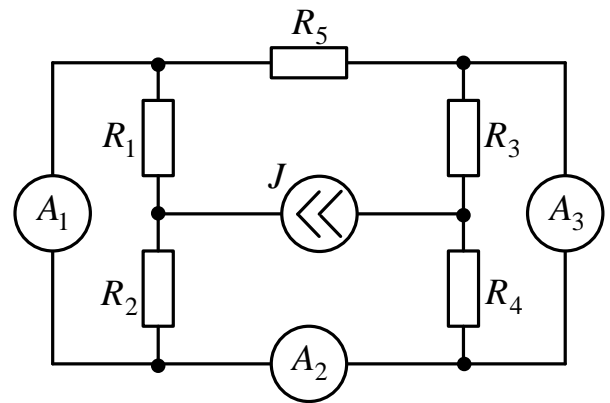


Рис. 1.16

**Задача 1.13.** Обчислити невідомі значення струмів та параметрів кола за заданих параметрів

- $J = 1 \text{ A,}$
- $E_2 = 15 \text{ В,}$
- $E_4 = 9 \text{ В,}$
- $R_1 = 1 \text{ Ом,}$
- $R_2 = 5 \text{ Ом,}$
- $R_3 = 3 \text{ Ом,}$
- $R_4 = 2 \text{ Ом.}$

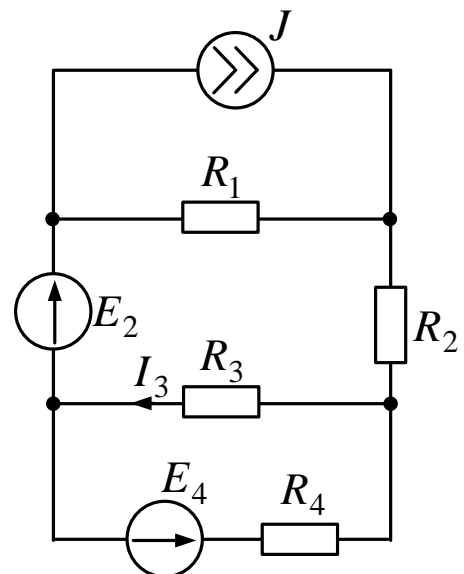


Рис. 1.17

**Задача 1.14.** Обчислити покази вимірювальних приладів за заданих параметрів кола

$$E_4 = 100 \text{ В,}$$

$$R_1 = 10 \text{ Ом,}$$

$$R_2 = 20 \text{ Ом,}$$

$$R_3 = 40 \text{ Ом.}$$

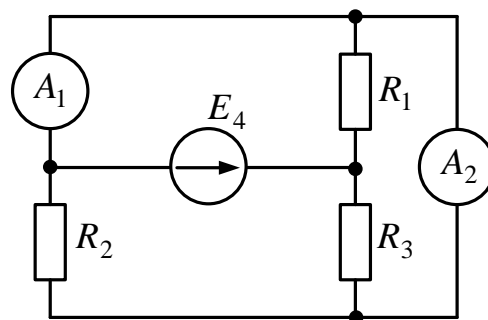
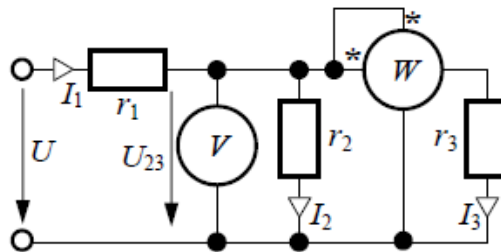


Рис. 1.18



**Розрахунок кіл постійного струму за законами Ома та Кірхгофа**

**Задача 2.1.** Для схеми, що наведена на рис. 2.1, відомі покази приладів: вольтметр  $V$  показує 120 В, ватметр  $W$  має показання 240 Вт. Відомі опори  $R_1=16$  Ом,  $R_2=40$  Ом. Визначити струми, опір  $R_3$ , напругу  $U$ . Перевірити баланс потужностей.



**Розв'язання**

Вольтметр  $V$  вимірює напругу  $U_{23} = 120$  В на ділянці із паралельним з'єднанням опорів  $R_2$  і  $R_3$ . За законом Ома струм через  $R_2$

$$I_2 = \frac{U_{23}}{R_2} = \frac{120}{40} = 3 \text{ А.}$$

Ватметр вимірює потужність, що споживається опором  $R_3$

$$P_W = I_3^2 R_3 = U_{23} I_3,$$

тому  $I_3 = \frac{P_W}{U_{23}} = \frac{240}{120} = 2 \text{ А}$ , а за законом Ома  $R_3 = \frac{U_{23}}{I_3} = \frac{120}{2} = 60 \text{ Ом}$ .

Струм опору  $R_1$  і джерела живлення відповідно до першого закону Кірхгофа  $I_1 = I_2 + I_3 = 3 + 2 = 5 \text{ А}$ .

Згідно з другим законом Кірхгофа для контуру  $R_1$ -  $R_2$ - $U$  знайдемо напругу на вході схеми рис. 2.1

$$U = I_1 R_1 + U_{23} = 5 \cdot 16 + 120 = 200 \text{ В.}$$

Потужність генератора –

$$P_G = UI_1 = 200 \cdot 5 = 1000 \text{ Вт.}$$

Сумарна потужність приймачів –

$$P_{II} = I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 + I_3^2 R_3 = 5^2 \cdot 16 + 3^2 \cdot 40 + 2^2 \cdot 60 = 1000 \text{ Вт.}$$

Оскільки баланс потужностей  $P_G = P_{II}$  виконується, задача розв'язана вірно.

### Задача 2.2.

В схемі рис. 2.2 струм  $I_4 = 8 \text{ А}$ .

Відомі деякі параметри схеми:

$$E_1 = 120 \text{ В, } E_4 = 80 \text{ В, } E_5 = 6 \text{ В,}$$

$$r_2 = r_4 = 6 \text{ Ом,}$$

$$r_3 = r_5 = 2 \text{ Ом,}$$

$$r_6 = 3 \text{ Ом.}$$

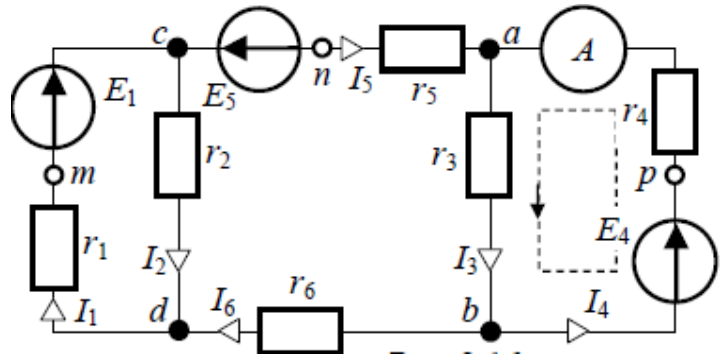


Рис. 2.2.

Визначити решту струмів, знайти опір  $r_1$ . Для зовнішнього контуру побудувати потенціальну діаграму.

### Розв'язання

Відповідно до другого закону Кірхгофа для контуру  $a-b-p-a$  маємо

$$I_4 r_4 + I_3 r_3 = E_4, \text{ звідки}$$

$$I_3 = \frac{E_4 - I_4 r_4}{r_3} = \frac{80 - 8 \cdot 6}{2} = 16 \text{ А.}$$

За першим законом Кірхгофа одержимо

$$\text{- для вузла } a: I_3 - I_5 - I_4 = 0;$$

$$\text{- для вузла } b: I_6 + I_4 - I_3 = 0,$$

$$\text{звідки } I_5 = I_6 = I_3 - I_4 = 16 - 8 = 8 \text{ А.}$$

Відповідно до другого закону Кірхгофа для контуру  $c-n-a-b-d$  маємо

$$I_6 r_6 - I_2 r_2 + I_5 r_5 + I_3 r_3 = -E_5, \text{ звідки}$$

$$I_2 = \frac{E_5 + I_5 r_5 + I_3 r_3 + I_6 r_6}{r_2} = \frac{6 + 8 \cdot 3 + 8 \cdot 2 + 16 \cdot 2}{6} = 13 \text{ А.}$$

За першим законом Кірхгофа одержимо для вузла  $d$ :

$$I_1 = I_2 + I_6 = 13 + 8 = 21 \text{ А.}$$

Відповідно до другого закону Кірхгофа для контуру  $d-m-c$  маємо

$$I_2 r_2 + I_1 r_1 = E_1, \text{ звідки}$$

$$r_1 = \frac{E_1 - I_2 r_2}{I} = \frac{12 - 13 \cdot 6}{21} = 2 \text{ Ом.}$$

Потенціальна діаграма контуру схеми – це графік зміни потенціалу залежно від опорів, що входять у цей контур. У зовнішньому контурі кола промарковані не лише вузли, а й полюси послідовно з'єднаних елементів кожної з гілок. Таким чином полюси кожного з елементів зовнішнього контуру промарковані.

Для побудови потенціальної діаграми обираємо базовий вузол, потенціал якого рівний нулю, наприклад,  $\varphi_d = 0$ . Задаємо напрям обходу контуру, наприклад, за годинниковою стрілкою і розраховуємо потенціали наступних точок після базової:

$$\varphi_d = 0;$$

$$\varphi_m = \varphi_d - I_1 r_1 = 0 - 21 \cdot 2 = -42 \text{ В};$$

$$\varphi_c = \varphi_m + E_1 = -42 + 120 = 78 \text{ В};$$

$$\varphi_n = \varphi_c - E_5 = 78 - 6 = 72 \text{ В};$$

$$\varphi_a = \varphi_n - I_5 r_5 = 72 - 8 \cdot 2 = 56 \text{ В};$$

$$\varphi_p = \varphi_a + I_4 r_4 = 56 + 8 \cdot 6 = 104 \text{ В};$$

$$\varphi_b = \varphi_p - E_4 = 104 - 80 = 24 \text{ В};$$

$$\varphi_d = \varphi_b - I_6 r_6 = 24 - 8 \cdot 3 = 0.$$

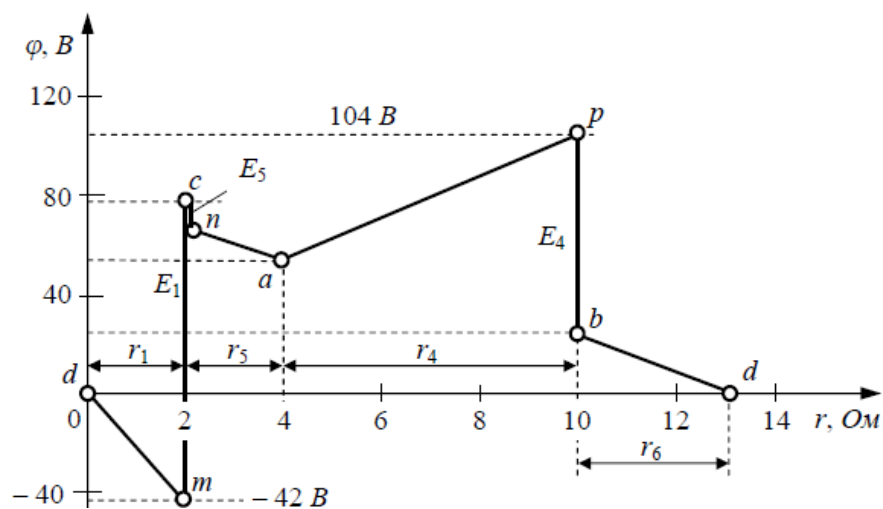


Рис. 2.3

## Задачі для самостійного розв'язання

### Задача 2.3.

Виконати аналіз кола на рис. 2.4 за заданих параметрів

$$R_1 = 4 \text{ Ом}, R_2 = R_3 = 3 \text{ Ом},$$

$$E_1 = 2 \text{ В}, E_2 = 6 \text{ В},$$

$$J_4 = 3 \text{ А}, J_5 = 2 \text{ А}.$$

Перевірити правильність розрахунку за балансом потужностей

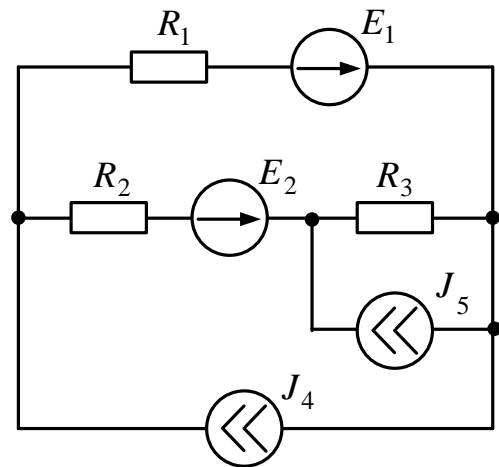


Рис. 2.4

### Задача 2.4.

В електричному колі на рис. 2.5 задані

$$I_3 = 2 \text{ А}, I_4 = 1 \text{ А}, R_2 = 4 \text{ Ом}, R_3 = 20 \text{ Ом}, R_4 = 10 \text{ Ом},$$

$R_5 = 5 \text{ Ом}$ . Потужність, яка виділяється на опорі  $R_6$  дорівнює 20 Вт.

Виконати розрахунок невідомих параметрів

кола:  $R_6, E_1, E_2$ .

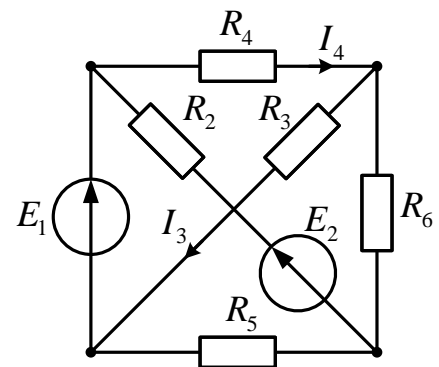


Рис. 2.5

### Задача 2.5.

В електричному колі на рис. 2.6 задані

$$R_1 = R_2 = 1 \text{ Ом},$$

$$R_3 = 4 \text{ Ом}, R_4 = 2 \text{ Ом}, R_5 = 1 \text{ Ом},$$

$$E_2 = 3 \text{ В}, I_{A1} = 4 \text{ А}, I_{A4} = 3 \text{ А}.$$

Виконати розрахунок невідомих параметрів кола:  $R_6, E_1$

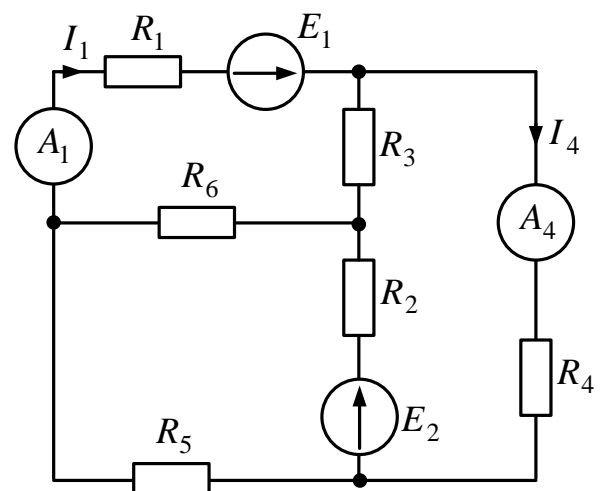


Рис. 2.6

### Задача 2.6.

За заданих параметрів кола (рис. 2.7)

$$R_1 = 2 \text{ Ом};$$

$$R_2 = 6 \text{ Ом};$$

$$R_3 = R_4 = 4 \text{ Ом};$$

$$R_5 = 5 \text{ Ом};$$

$$J = 1 \text{ А},$$

$$I_5 = 2 \text{ А}.$$

Виконати розрахунок  $E_1$

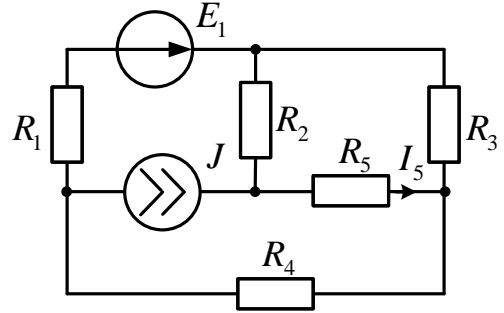


Рис. 2.7

### Задача 2.7.

В електричному колі на рис. 2.8

задані

$$P = 148 \text{ Вт} - \text{потужність кола};$$

$$P_{R_6} = 20 \text{ Вт} - \text{потужність } R_6;$$

$$R_2 = 4 \text{ Ом}; \quad R_3 = 10 \text{ Ом};$$

$$R_4 = 5 \text{ Ом}; \quad R_5 = 20 \text{ Ом};$$

$$I_3 = 2 \text{ А}; \quad I_5 = 1 \text{ А}.$$

Визначити  $E_0, E_2, R_1, R_6$ .

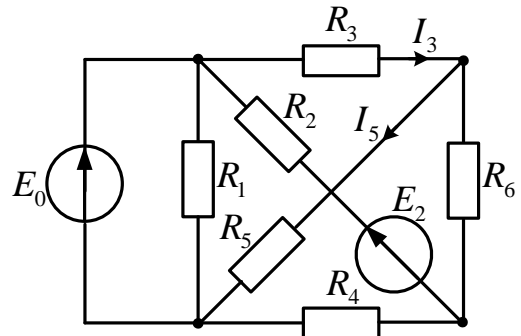


Рис. 2.8

Методи контурних струмів

Задача 3.1.

Повторити розрахунок кола рис. 3.1. (задача № 2.3) методом контурних струмів та порівняти методики розрахунків.

$$R_1 = 4 \text{ Ом}, R_2 = R_3 = 3 \text{ Ом},$$

$$E_1 = 2 \text{ В}, E_2 = 6 \text{ В},$$

$$J_4 = 3 \text{ А}, J_5 = 2 \text{ А}.$$

Перевірити правильність розрахунку за балансом потужностей.

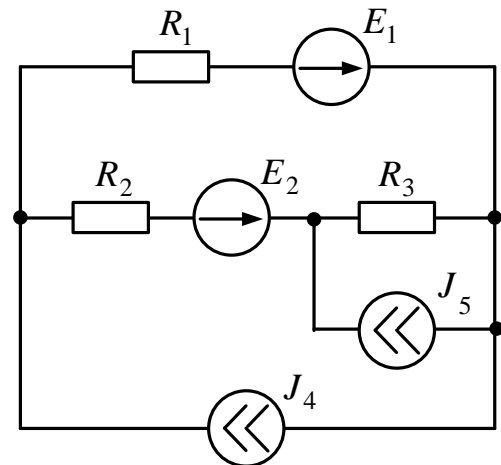


Рис. 3.1

Розв'язання

Задане коло містить три незалежних контури. Для кожного з них задаємо довільні напрямками контурних струмів.

Оскільки два незалежних контура містять джерела струму, то вважаємо, що контурні струми другого та третього контурів відомі:

$$I_{II} = J_5 = 2 \text{ А},$$

$$I_{III} = J_4 = 3 \text{ А}.$$

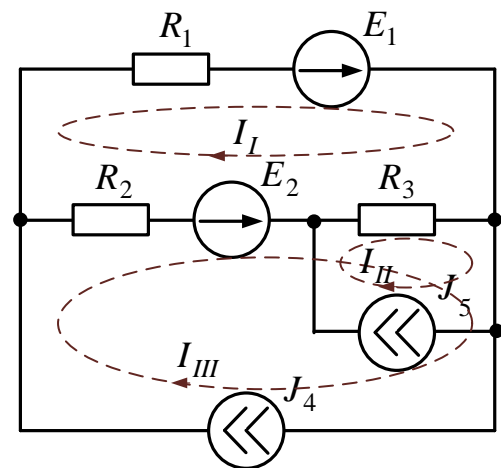


Рис. 3.2

Таким чином, за МКС складаємо лише одне рівняння відносно невідомого першого контурного струму  $I_I$ :

$$I_I(R_1 + R_2 + R_3) - I_{II}R_3 - I_{III}(R_2 + R_3) = E_1 - E_2 \Rightarrow$$

$$I_I(4 + 3 + 3) - 2 \cdot 3 - 3 \cdot (3 + 3) = 2 - 6 \Rightarrow$$

$$I_I = 2 \text{ A.}$$

Визначимо струми у гілках кола.

Оскільки, через гілку з  $R_1$  протікає лише перший контурний струм, то

$$I_1 = I_I = 2 \text{ A.}$$

$$I_2 = I_{III} - I_I = 3 - 2 = 1 \text{ A.}$$

$$I_3 = I_{III} + I_{II} - I_I = 3 + 2 - 2 = 3 \text{ A.}$$

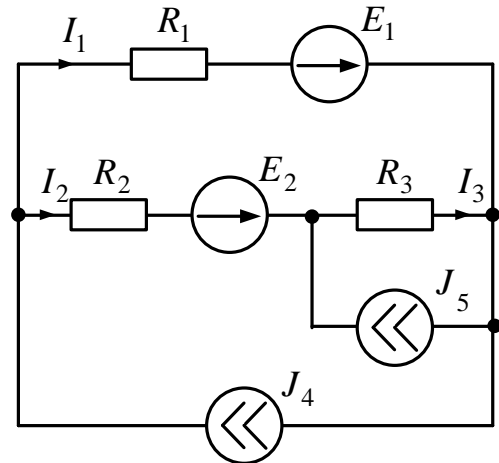


Рис. 3.3

Розраховані величини струмів у гілках кола МКС співпадають із величинами струмів, розрахованих для цього кола МРК. Слід зауважити, що система по МРК містить три рівняння, а по МКС лише одне. Отже, при проведенні аналізу кола необхідно коректно вибрати розрахунковий метод.

### Задача 3.2

Виконати розрахунок струмів МКС

та скласти баланс потужностей за

заданих параметрів кола

$$R_1 = 10 \text{ Ом}$$

$$R_2 = 26 \text{ Ом}$$

$$R_3 = 20 \text{ Ом}$$

$$R_4 = 30 \text{ Ом}$$

$$R_5 = 50 \text{ Ом}$$

$$E_1 = 260 \text{ В}$$

$$J_6 = 5 \text{ А}$$

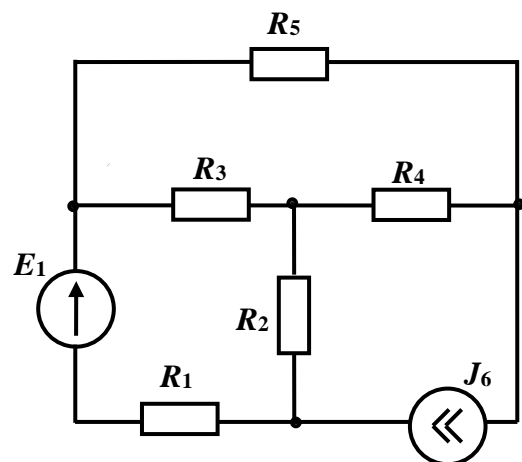


Рис. 3.4

## Розв'язання

Визначимо кількість рівнянь, яка дорівнює кількості незалежних контурів:

$$n = Bm - (B-1) - Bm_J = 6 - (4-1) - 1 = 2$$

Отже, в загальному випадку маємо три незалежні контури. Але оскільки один із контурів містить джерело струму, то контурний струм цього контуру відомий, він дорівнює величині джерела струму. Задаємося додатними напрямками контурних струмів та складаємо систему рівнянь за II законом Кирхгофа.

$$\begin{cases} I_I (R_1 + R_2 + R_3) - I_{II} R_3 - I_{III} R_2 = E_1 \\ -I_I R_3 + I_{II} (R_3 + R_4 + R_5) - I_{III} R_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 56I_I - 20I_{II} - 26 \cdot 5 = 260 \\ -20I_I + 100I_{II} - 30 \cdot 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 56I_I - 20I_{II} = 390 \\ -20I_I + 100I_{II} = 150 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 5.6I_I - 2I_{II} = 39 \\ -2I_I + 10I_{II} = 15 \end{cases}$$

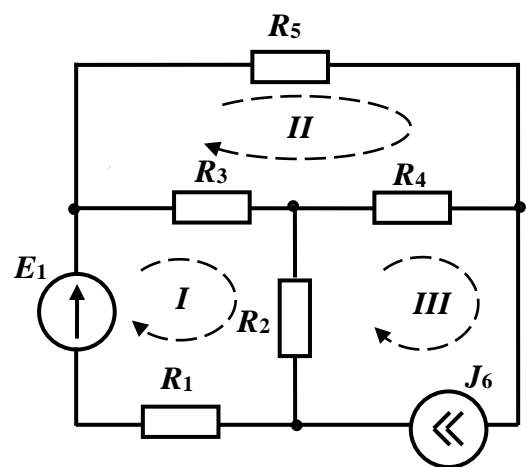


Рис. 3.5

Для розв'язання отриманої системи рівнянь, скористаємося методом визначників:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5.6 & -2 \\ -2 & 10 \end{vmatrix} = 5.6 \cdot 10 - (-2) \cdot (-2) = 52$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 39 & -2 \\ 15 & 10 \end{vmatrix} = 390 + 30 = 420$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 5.6 & 39 \\ -2 & 15 \end{vmatrix} = 84 + 78 = 162$$

Розрахуємо значення контурних струмів:

$$I_I = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{420}{52} = 8.08$$

$$I_{II} = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{162}{52} = 3.12$$



Визначимо величини та напрямки струмів у гілках кола.

Через резистор  $R_1$  протікає лише перший контурний струм, тому величини і напрямки  $I_1$  співпадають з  $I_I$ . Аналогічно,  $I_5 = I_{II}$ .

Через резистор  $R_2$ ,  $R_3$  та  $R_4$  протікають по два контурних струми у різних напрямках. Оскільки від'ємних струмів не існує, від більшого контурного струму віднімаємо менший, напрямки струму у гілці співпадає з напрямком більшого контурного струму:

$$I_2 = I_I - I_{III} = 8.08 - 5 = 3.08 \text{ А}$$

$$I_3 = I_I - I_{II} = 8.08 - 3.12 = 4.96 \text{ А}$$

$$I_4 = I_{III} - I_{II} = 5 - 3.12 = 1.88 \text{ А}$$

Отже, в результаті проведення розрахунків отримали наступні величини струмів. Напрямки струмів вказані на рис. 2.3.

$$I_1 = 8.08 \text{ А}$$

$$I_2 = 3.08 \text{ А}$$

$$I_3 = 4.96 \text{ А}$$

$$I_4 = 1.88 \text{ А}$$

$$I_5 = 3.12 \text{ А}$$

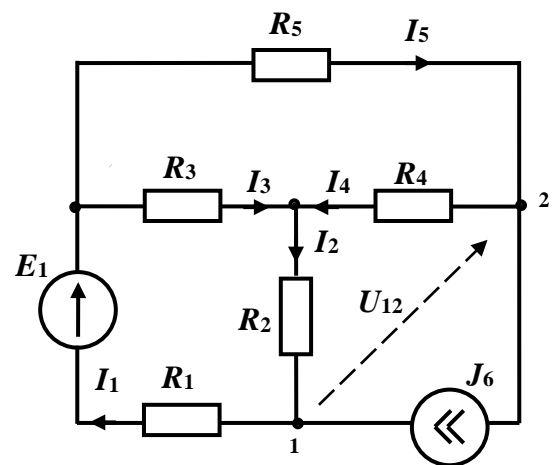


Рис. 3.6

Перевірку розрахунків здійснюємо за балансом потужностей:

- споживана потужність

$$P_{\text{спож}} = R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2 + R_3 I_3^2 + R_4 I_4^2 + R_5 I_5^2 = 1984.33 \text{ Вт}$$

- потужність, що генерується у коло джерелами енергії

Для розрахунку потужності джерела струму необхідно знайти напругу на її затискачах:

$$U_{12} = -R_2 I_2 + R_4 I_4 = -23.68 \text{ В}$$

Оскільки отримана напруга має від'ємне значення, отже джерело струму працює в режимі споживання. А джерело ЕРС працює в режимі генерації енергії, оскільки напрямки ЕРС  $E_1$  та струму  $I_1$  збігаються.

$$P_{\text{джер}} = E_1 I_1 + U_{12} J_5 = 260 \cdot 8.08 + (-23.68) \cdot 5 = 1982.4 \text{ Вт}$$

Математичний аналіз кола виконано вірно, так як

$$P_{\text{джер}} \approx P_{\text{спож}}$$

### Задача 3.3

Розрахувати величину джерела

струму  $J_6$ , якщо відомі

$$R_1 = R_2 = R_5 = 20 \text{ Ом,}$$

$$R_4 = 40 \text{ Ом,}$$

$$E_3 = 50 \text{ В,}$$

$$E_4 = 100 \text{ В,}$$

$$I_3 = 4 \text{ А.}$$

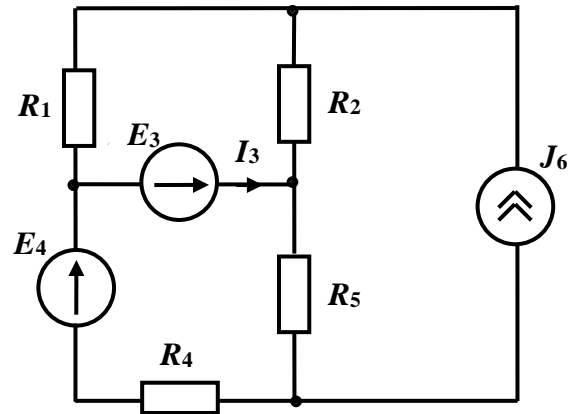


Рис. 3.7

### Розв'язання

Для визначення величини струму ДС скористаємось МКС.

Кількість рівнянь дорівнює

$$n = Bm - (B-1) - Bm_J = 6 - (4-1) - 1 = 2.$$

Задаємось довільними напрямками контурних струмів, враховуючи, що напрямок та величина струму  $I_3$  відомі (див. рис. 3.2).

$$\begin{cases} I_I (R_1 + R_2) - I_{II} (R_1 + R_2) + I_{III} R_2 = E_3 \\ -I_I (R_1 + R_2) + I_{II} (R_1 + R_2 + R_4 + R_5) - I_{III} R_2 = E_4 \end{cases}$$

Робимо підстановку та розраховуємо невідомі значення. Пам'ятаємо, що

$$I_{III} = J_6$$

$$I_I = I_3$$

$$\begin{cases} 4 \cdot 40 - 40I_{II} + 20J_6 = 50 \\ 100I_{II} - 4 \cdot 40 - 40J_6 = 100 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4I_{II} - 2J_6 = 11 \\ 5I_{II} - 2J_6 = 13 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 8 - 10 = -2$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 11 & 2 \\ 13 & 2 \end{vmatrix} = 22 - 26 = -4$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & 11 \\ 5 & 13 \end{vmatrix} = 52 - 55 = -3$$

Отже, отримуємо

$$I_{II} = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-4}{-2} = 2$$

$$J_6 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-3}{-2} = 1.5$$

Відповідь:  $J_6 = 1.5 \text{ A}$ .

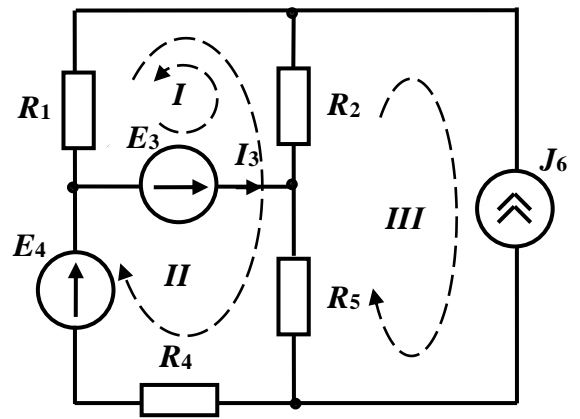


Рис. 3.8

### Задачі для самостійного розв'язання

#### Задача 3.4.

Виконати розрахунок струмів МКС та скласти баланс потужностей за заданих параметрів кола

$$E_1 = 100 \text{ В};$$

$$J_5 = J_6 = 2 \text{ А};$$

$$R_1 = R_3 = 10 \text{ Ом};$$

$$R_2 = R_4 = 40 \text{ Ом}.$$

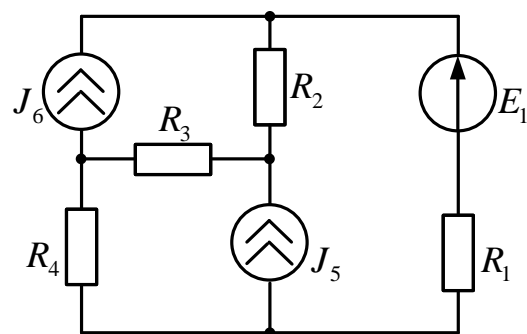


Рис. 3.9

Відповідь:

$$I_1 = 1 \text{ А}; I_2 = 3 \text{ А}; I_3 = 1 \text{ А}; I_4 = 1 \text{ А}.$$

Метод вузлових потенціалів

Задача 4.1

Виконати розрахунок струмів МВП та скласти баланс потужностей за заданих параметрів кола

$$E_2 = 90 \text{ В}; E_3 = 5 \text{ В}; E_7 = 12 \text{ В};$$

$$J = 10 \text{ А};$$

$$R_1 = 8 \text{ Ом}; R_6 = 4 \text{ Ом}$$

$$R_2 = R_3 = R_4 = R_5 = 10 \text{ Ом}.$$

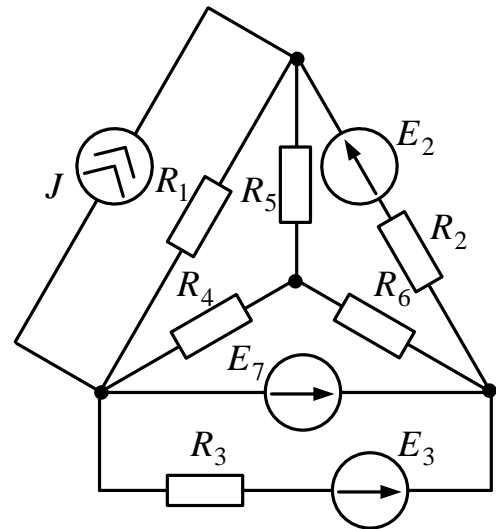


Рис. 4.1

Розв'язання

Визначаємо кількість вузлів у схемі кола:  $n=4$ .

Одна з гілок між вузлами 3 та 4 містить лише джерело напруги  $E_7$  та має нульовий опір. Оскільки  $G_7 = \frac{1}{R_7} = \infty$ , доцільно прийняти за нульовий потенціал або у вузлі 3 або у вузлі 4.

Припустимо, потенціал вузла 4 нуль:  $\varphi_4 = 0$ , тоді  $\varphi_3 = E_7$ . Залишились невідомими потенціали 1-го та 2-го вузлів:  $\varphi_1$  та  $\varphi_2$ .

Для обчислення значень невідомих потенціалів необхідно скласти два рівняння.

$$\begin{cases} \varphi_1 \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_5} \right) - \varphi_2 \left( \frac{1}{R_5} \right) - \varphi_3 \left( \frac{1}{R_2} \right) = \frac{E_2}{R_2} + J \\ -\varphi_1 \left( \frac{1}{R_5} \right) + \varphi_2 \left( \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_6} \right) - \varphi_3 \left( \frac{1}{R_6} \right) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0.325 \cdot \varphi_1 - 0.1 \cdot \varphi_2 = 20.2 \\ -0.1 \cdot \varphi_1 + 0.45 \cdot \varphi_2 = 3 \end{cases}$$

Розв'язок системи дав наступні значення потенціалів:

$$\varphi_1 \approx 69 \text{ В}, \quad \varphi_2 \approx 22 \text{ В}.$$

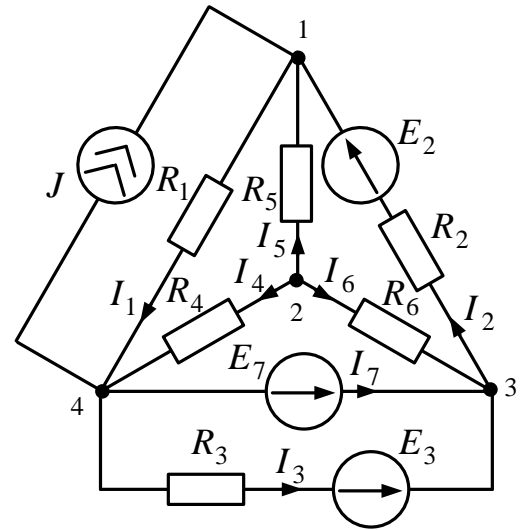


Рис. 4.2

Для розрахунку струмів застосовуємо закон Ома для ділянки кола:

$$I_1 = \frac{\varphi_1 - \varphi_4}{R_1} = \frac{69}{8} = 8,61 \text{ А};$$

$$I_2 = \frac{\varphi_3 - \varphi_1 + E_2}{R_2} = \frac{12 - 69 + 90}{10} = 3,3 \text{ А};$$

$$I_3 = \frac{\varphi_4 - \varphi_3 + E_3}{R_3} = \frac{-12 + 5}{10} = -0,7 \text{ А};$$

$$I_4 = \frac{\varphi_2 - \varphi_4}{R_4} = \frac{22}{10} = 2,2 \text{ А};$$

$$I_5 = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R_5} = \frac{69 - 22}{10} = 4,7 \text{ А};$$

$$I_6 = \frac{\varphi_2 - \varphi_3}{R_6} = \frac{22 - 12}{4} = 2,5 \text{ А}.$$

Оскільки гілка з  $E_7$  не містить резистивного елемента, виконати розрахунок струму за законом Ома неможливо. Для розрахунку струму  $I_7$  застосуємо перший закон Кірхгофа:

$$I_7 = I_2 - I_6 - I_3 - J = 3.3 - 2.5 - (-0.7) = 1.5 \text{ А}.$$

Складаємо рівняння балансу потужностей і перевіряємо правильність розрахунків:

$$P_{\text{джер}} \approx P_{\text{спож}}$$

$$P_{\text{джер}} = E_2 I_2 + E_3 I_3 + E_7 I_7 + (\varphi_1 - \varphi_4) J =$$

$$= 90 \cdot 3,3 + 5 \cdot (-0,7) + 12 \cdot 1,5 + (69 - 0) \cdot 10 = 1001,59 \text{ Вт}$$

$$P_{\text{спож}} = R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2 + R_3 I_3^2 + R_4 I_4^2 + R_5 I_5^2 + R_6 I_6^2 =$$

$$= 8 \cdot 8,61^2 + 10 \cdot 3,3^2 + 10 \cdot (-0,7)^2 + 10 \cdot 2,2^2 + 10 \cdot 4,7^2 + 4 \cdot 2,5^2 = 1001,66 \text{ Вт}$$

Математичний аналіз кола виконано вірно.

## Задача 4.2

Виконати розрахунок струмів МДП та скласти баланс потужностей за заданих параметрів кола

$$E_1 = 120 \text{ В}; E_2 = 80 \text{ В}; J_5 = 8 \text{ А};$$

$$R_1 = 20 \text{ Ом}; R_2 = 40 \text{ Ом};$$

$$R_3 = 25 \text{ Ом}, R_4 = 15 \text{ Ом}.$$

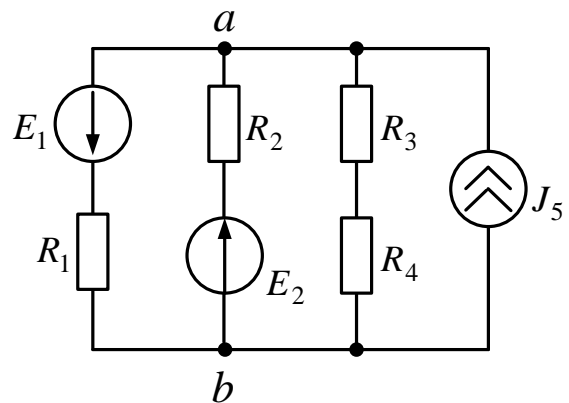


Рис. 4.3

В електричних колах, які містять лише два вузли раціонально використовувати МДВ, який базується на МВП. Напругу між двома вузлами можна розрахувати за формулою:

$$U_{ab} = \varphi_a - \varphi_b = \frac{\sum E_n g_n + \sum J_n}{\sum g_n}.$$

Після визначення напруги  $U_{ab}$  розраховують струм у будь-якій ( $n$ -й) гілці кола за формулою:

$$I_n = (E_n - U_{ab}) g_n.$$

## Розв'язання

Згідно з МВП загальне рівняння для даного кола, за умови, що  $\varphi_b = 0$ , має вигляд:

$$G_{11} \varphi_a = I_{11},$$

$$\text{де міжвузлова провідність} - G_{11} = G_1 + G_2 + G_3 + G_4 = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4 + R_3};$$

$$\text{вузловий струм} - I_{11} = -\frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2} + J_5$$

Зважаючи на те, що задана схема містить лише два вузли аналіз кола можна спростити, використавши МДВ. Напряга між двома вузлами заданого кола називається вузловою напругою:

$$U_{ab} = \varphi_a - \varphi_b = \varphi_a = \frac{-\frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2} + J_5}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4 + R_3}} = \frac{-\frac{120}{20} + \frac{80}{40} + 8}{\frac{1}{20} + \frac{1}{40} + \frac{1}{25+15}} = 40 \text{ В.}$$

Значення струмів у гілках кола, напрями яких були довільно задані, розраховуються за законом Ома:

$$I_1 = \frac{U_{ab} + E_1}{R_1} = \frac{40 + 120}{20} = 8 \text{ А};$$

$$I_2 = \frac{-U_{ab} + E_2}{R_2} = \frac{-40 + 80}{40} = 1 \text{ А};$$

$$I_3 = \frac{U_{ab}}{R_3 + R_4} = \frac{40}{25 + 15} = 1 \text{ А.}$$

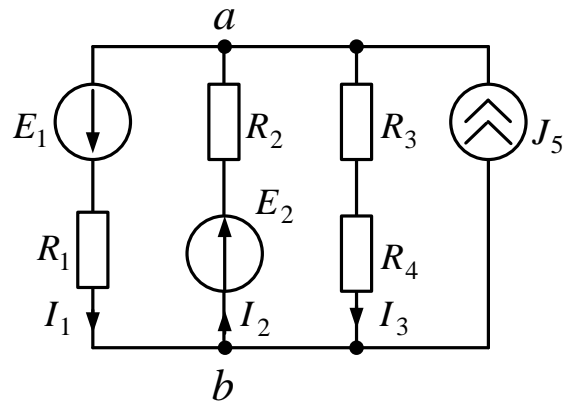


Рис. 4.4

Перевірку правильності розрахунку здійснюємо за балансом потужностей:

$$P_{\text{джер}} = E_1 I_1 + E_2 I_2 + U_{ab} J_5 = 120 \cdot 8 + 80 \cdot 1 + 40 \cdot 8 = 1360 \text{ Вт}$$

$$P_{\text{спож}} = R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2 + (R_3 + R_4) I_3^2 = 20 \cdot 8^2 + 40 \cdot 1^2 + (25 + 15) \cdot 1^2 = 1360 \text{ Вт}$$

Математичний аналіз кола виконано вірно.

## Задачі для самостійного розв'язання

### Задача 4.3

Розрахувати показ вольтметра у колі, зображеному на рис. 4.5, за заданих параметрів

$E_1=20\text{ В}, E_2= E_3=10\text{ В}, R_1= R_5= 5\text{ Ом}, R_2= R_6=10\text{ Ом}, R_3= R_4=15\text{ Ом}.$

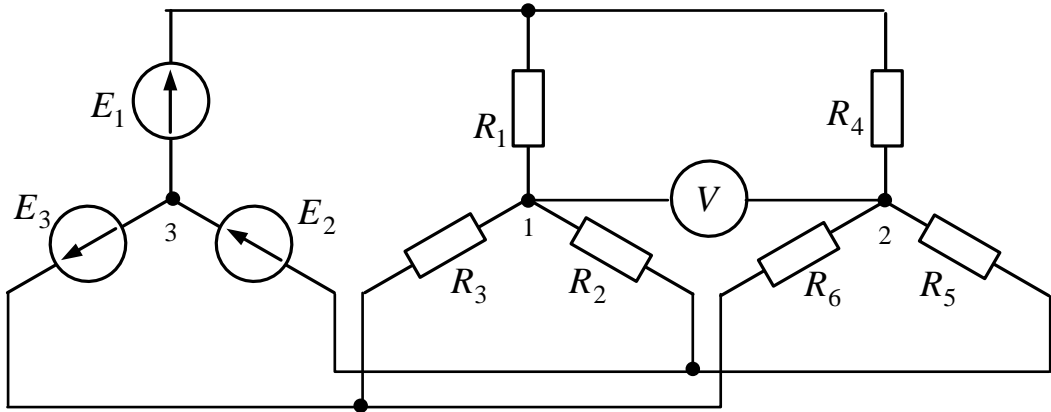


Рис. 4.5

#### Задача 4.4

Виконати розрахунок струмів та скласти баланс потужностей за заданих параметрів кола

$$E_1 = 100\text{ В}; E_2 = 50\text{ В}; J = 10\text{ А};$$

$$R_1 = R_2 = 20\text{ Ом}; R_3 = 10\text{ Ом}.$$

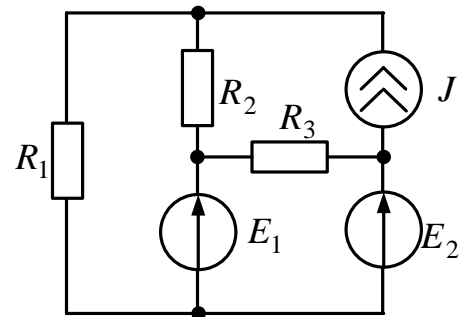


Рис. 4.6

#### Задача 4.5

Виконати розрахунок струмів МДП та скласти баланс потужностей за заданих параметрів кола

$$E_1 = 120\text{ В}; E_2 = 80\text{ В}; J_5 = 8\text{ А};$$

$$R_1 = 20\text{ Ом}; R_2 = 40\text{ Ом};$$

$$R_3 = 25\text{ Ом}, R_4 = 15\text{ Ом},$$

$$R_5 = 2\text{ Ом}.$$

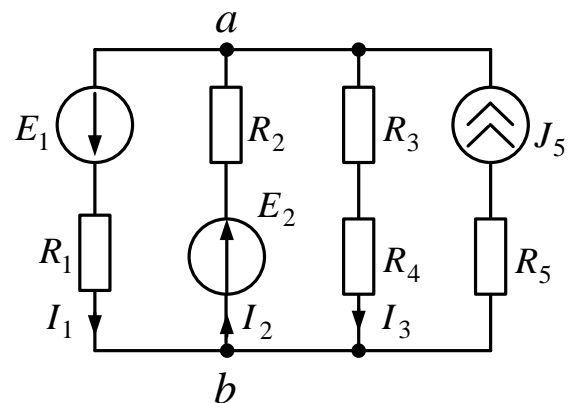


Рис. 4.7



Еквівалентні перетворення у лінійних електричних колах

Задача 5.1

Виконати розрахунок струмів заданого кола на рис. 5.1, визначити показ ватметра, скласти баланс потужностей, якщо

$$U = 30 \text{ В};$$

$$R_1 = 180 \text{ Ом}; R_2 = 60 \text{ Ом};$$

$$R_3 = R_4 = 120 \text{ Ом}; R_5 = 80 \text{ Ом}.$$

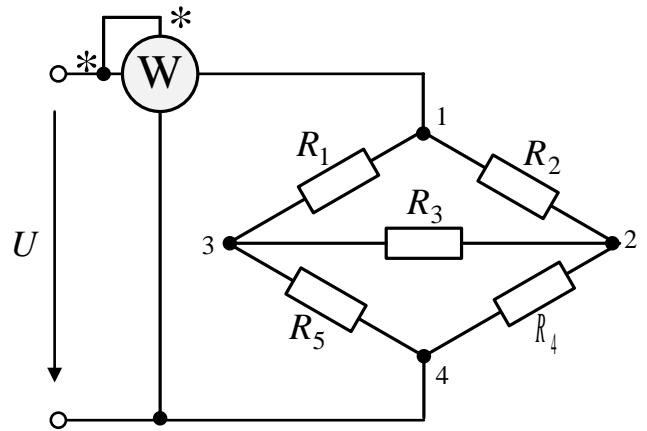


Рис. 5.1

Розв'язання

Задане коло містить два «трикутника» ( $R_1, R_2, R_3$  та  $R_3, R_4, R_5$ ) та дві «зірки» ( $R_1, R_3, R_5$  та  $R_2, R_3, R_4$ ). Для використання методу згортки необхідно здійснити еквівалентне перетворення, яке може бути реалізовано шляхом перетворення одного з двох «трикутників» у еквівалентну «зірку» або однієї з двох «зірок» у еквівалентний «трикутник».

Обираємо перетворення «трикутника» з опорами  $R_1, R_2, R_3$  у еквівалентну «зірку» з опорами  $R_{12}, R_{23}, R_{13}$ .

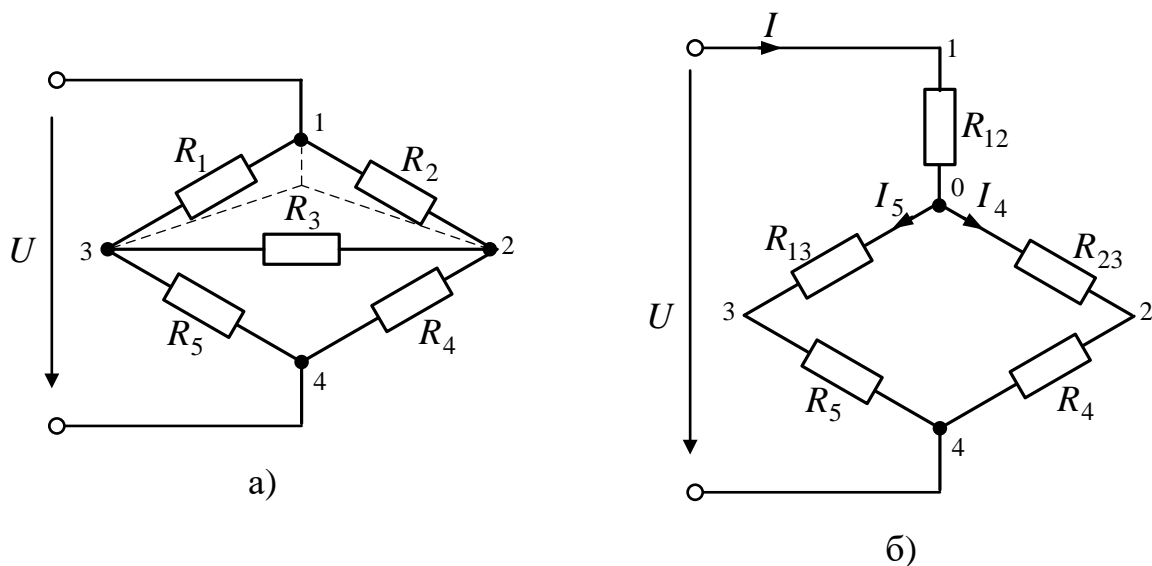


Рис. 5.2

$$R_{12} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2 + R_3} = 30 \text{ Ом},$$

$$R_{23} = \frac{R_2 \cdot R_3}{R_1 + R_2 + R_3} = 20 \text{ Ом},$$

$$R_{13} = \frac{R_3 \cdot R_1}{R_1 + R_2 + R_3} = 60 \text{ Ом}.$$

Виконуємо розрахунок еквівалентного опору відносно вхідних затискачів:

$$R_{екв} = R_{12} + \frac{(R_{13} + R_5) \cdot (R_{23} + R_4)}{R_{13} + R_5 + R_{23} + R_4} = 100 \text{ Ом}.$$

Виконуємо розрахунок струмів у перетвореному колі:

- струм на вході кола визначаємо за законом Ома

$$I = \frac{U}{R_{екв}} = \frac{30}{100} = 0,3 \text{ А}.$$

- струм у паралельних гілках розраховуємо за правилом чужого опору

$$I_4 = I \frac{R_{13} + R_5}{R_{13} + R_5 + R_{23} + R_4} = 0,15 \text{ А},$$

$$I_5 = I \frac{R_{23} + R_4}{R_{13} + R_5 + R_{23} + R_4} = I - I_4 = 0,15 \text{ А}.$$

Для розрахунку струмів у заданому колі через резистори трикутника  $R_1, R_2, R_3$  застосовуємо закон Ома. Для цього користуючись перетвореною схемою (рис. 5.2, б) визначаємо напруги на затискачах еквівалентної зірки:

$$U_{12} = R_{12} I + R_{23} I_4 = 12 \text{ В};$$

$$U_{23} = -R_{23} I_4 + R_{13} I_5 = 6 \text{ В};$$

$$U_{13} = R_{12} I + R_{13} I_5 = 18 \text{ В}.$$

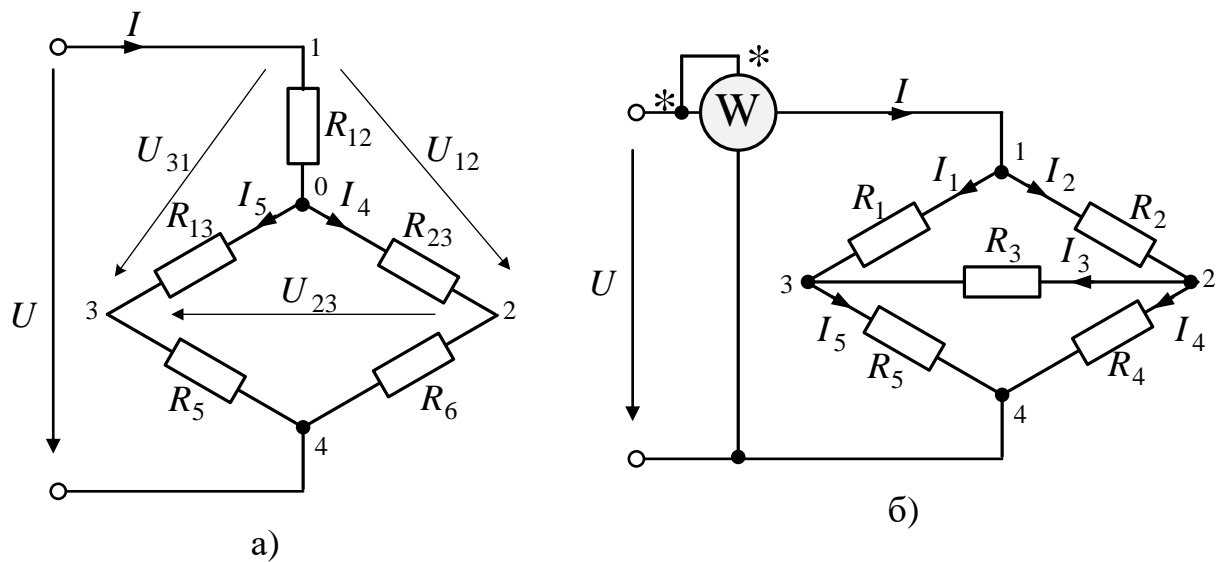


Рис. 5.3

$$I_1 = \frac{U_{13}}{R_1} = \frac{18}{180} = 0,1 \text{ A};$$

$$I_2 = \frac{U_{12}}{R_2} = \frac{12}{60} = 0,2 \text{ A};$$

$$I_3 = \frac{U_{23}}{R_3} = \frac{6}{120} = 0,05 \text{ A}.$$

Показ ватметра

$$P = UI = 30 \cdot 0,3 = 9 \text{ Вт}.$$

### Задача 5.2

Спростити схему заданого кола (рис.5.4) до одноконтурного та виконати розрахунки струмів.

$$E_1 = 20 \text{ В}; J_2 = 2 \text{ А}; J_3 = 3 \text{ А};$$

$$R_{01} = 10 \text{ Ом}; R_{02} = 40 \text{ Ом};$$

$$R_{03} = 20 \text{ Ом}; R_4 = 30 \text{ Ом}.$$

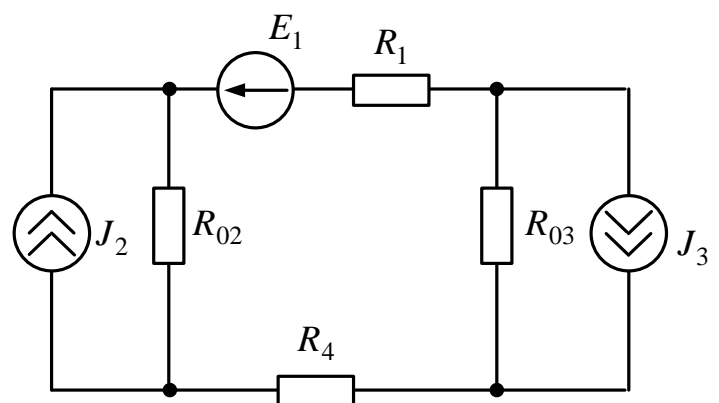


Рис. 5.4

### Розв'язання

Здійснюємо заміну двох джерел струму на еквівалентні джерела

напруги:

- параметри другого еквівалентного ДН

$$E_2 = J_2 \cdot R_{02} = 2 \cdot 40 = 80 \text{ В};$$

$$R_{02} = 40 \text{ Ом.}$$

- параметри третього еквівалентного ДН

$$E_3 = J_3 \cdot R_{03} = 3 \cdot 20 = 60 \text{ В};$$

$$R_{03} = 20 \text{ Ом.}$$

Струм у одноконтурній схемі

$$I = \frac{-E_1 + E_2 + E_3}{R_1 + R_{02} + R_{03} + R_4} = 1.2 \text{ А.}$$

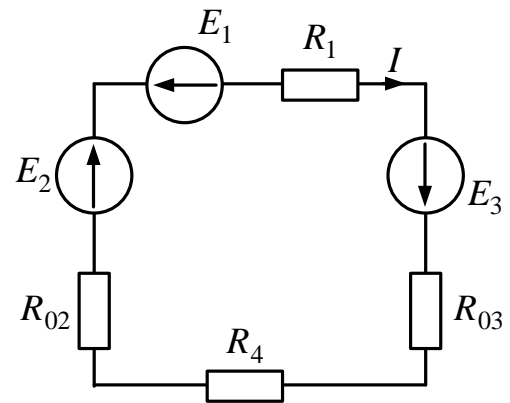


Рис. 5.5

### Задачі для самостійного розв'язання

#### Задача 5.3

Виконати розрахунок струмів у заданому колі (рис. 5.6) та здійснити перевірку за балансом потужностей.

$$E_A = 50 \text{ В}; E_B = 30 \text{ В}; E_C = 100 \text{ В};$$

$$R_A = 3.5 \text{ Ом}; R_B = 2 \text{ Ом}; R_C = 7 \text{ Ом};$$

$$R_{ab} = 6 \text{ Ом}; R_{bc} = 12 \text{ Ом}; R_{ca} = 6 \text{ Ом.}$$

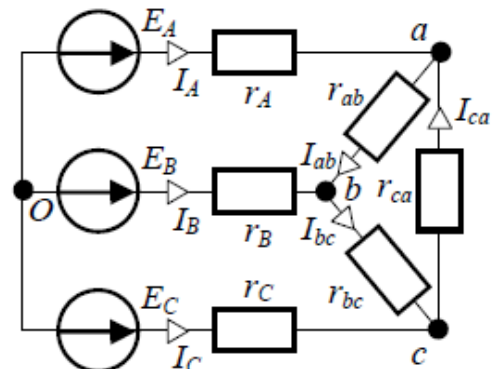


Рис. 5.6

Відповіді:

$$I_A = -0.4 \text{ А}, I_B = -4.4 \text{ А}, I_C = 4.8 \text{ А}, I_{ab} = 2.1 \text{ А}, I_{bc} = -2.3 \text{ А}, I_{ca} = 2.5 \text{ А.}$$

Метод накладання дії джерел енергії

Задача 6.1

Виконати розрахунок струмів заданого кола (рис. 6.1) МН.,

$$E_1 = 150 \text{ В}; J_6 = 7.5 \text{ А};$$

$$R_2 = 30 \text{ Ом}; R_3 = 60 \text{ Ом};$$

$$R_4 = 10 \text{ Ом}; R_5 = 20 \text{ Ом}.$$

Джерела вважати ідеалізованими.

Правильність розрахунків перевірити за балансом потужностей.

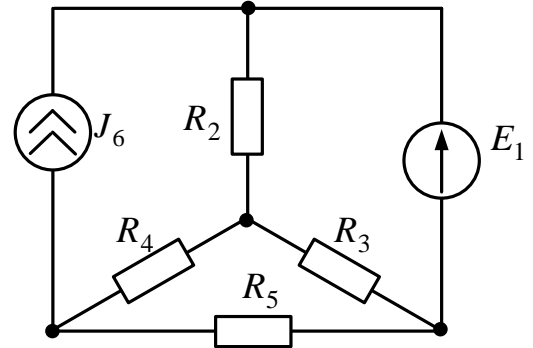


Рис. 6.1

Розв'язання

У заданому колі розподіл струмів викликаний одночасною дією двох джерел: ДН та ДС. Згідно методу накладання струм кожної з гілок кола дорівнює алгебраїчній сумі струмів в цій вітці від дії кожного джерела окремо.

Отже для розрахунку струмів заданого кола необхідно здійснити аналіз кола при дії кожного джерела окремо, замінивши інші джерела їх внутрішніми опорами.

I. Аналіз кола при дії  $E_1$ . Джерело струму замінюємо його внутрішнім опором  $R_j = \infty$ . Утворена часткова схема зображена на рис. 6.2.

Виконуємо розрахунок еквівалентного опору відносно вхідних затискачів джерела:

$$R_{екв} = R_2 + \frac{R_3 \cdot (R_5 + R_4)}{R_3 + R_4 + R_5} = 50 \text{ Ом}.$$

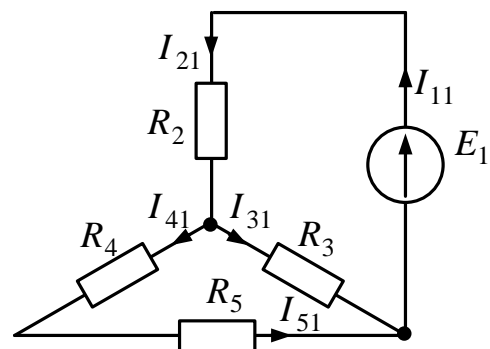


Рис. 6.2

Виконуємо розрахунок часткових струмів при дії  $E_1$  за законом Ома

$$I_{21} = \frac{E_1}{R_{екв}} = \frac{150}{50} = 3 \text{ А.}$$

$$I_{41} = I_{51} = I_{21} \frac{R_3}{R_3 + R_4 + R_5} = 2 \text{ А,}$$

$$I_{31} = I_{21} \frac{R_4 + R_5}{R_3 + R_4 + R_5} = I_{21} - I_{41} = 1 \text{ А.}$$

II. Аналіз кола при дії  $J_6$ . Джерело струму заміняємо його внутрішнім опором  $R_E = 0$ . Утворена часткова схема зображена на рис. 6.3.

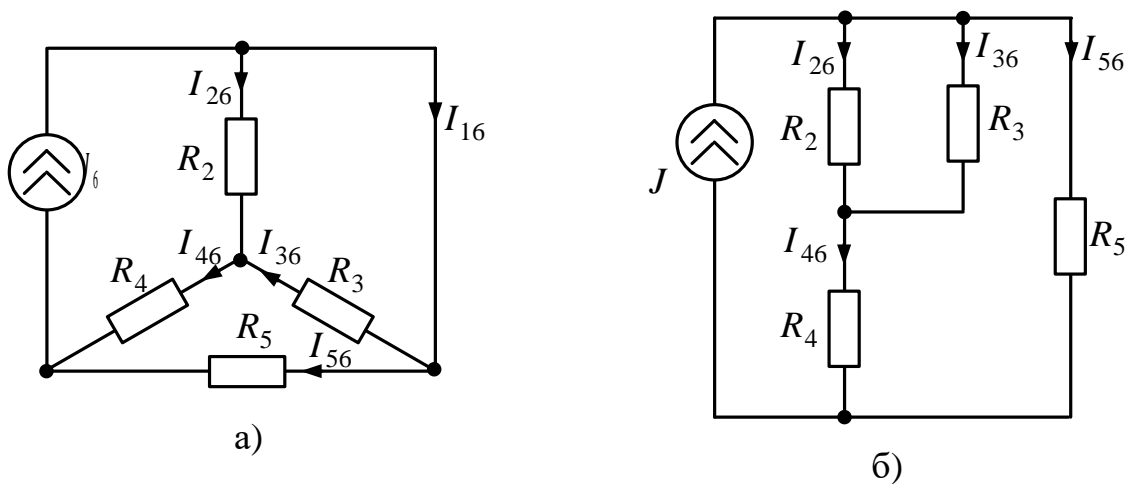


Рис. 6.3

Приводимо коло до двоконтурного, яке містить ДС та дві паралельні гілки

$$R_{2-3-4} = R_4 + \frac{R_3 \cdot R_2}{R_3 + R_2} = 30 \text{ Ом.}$$

Та виконуємо розрахунок часткових струмів при дії  $J_6$  за правилом чужого опору та першим законом Кірхгофа

$$I_{46} = J_6 \frac{R_5}{R_{2-3-4} + R_5} = 3 \text{ А,}$$

$$I_{56} = J_6 \frac{R_{2-3-4}}{R_{2-3-4} + R_5} = 4.5 \text{ А,}$$

$$I_{26} = I_{46} \frac{R_3}{R_2 + R_3} = 2 \text{ A},$$

$$I_{36} = I_{46} \frac{R_2}{R_2 + R_3} = 2 \text{ A},$$

$$I_{16} = J_6 - I_{26} = 5.5 \text{ A}.$$

Для визначення реальних струмів від дії двох джерел довільно обираємо напрями струмів у заданому колі і обчислюємо кожен струм як алгебричну суму часткових струмів:

$$I_1 = -I_{11} + I_{16} = 2,5 \text{ A},$$

$$I_2 = I_{21} + I_{26} = 5 \text{ A},$$

$$I_3 = I_{31} - I_{36} = 0 \text{ A},$$

$$I_4 = I_{41} + I_{46} = 5 \text{ A},$$

$$I_5 = -I_{51} + I_{56} = 2,5 \text{ A},$$

$$I_6 = J_6 = 7.5 \text{ A}.$$

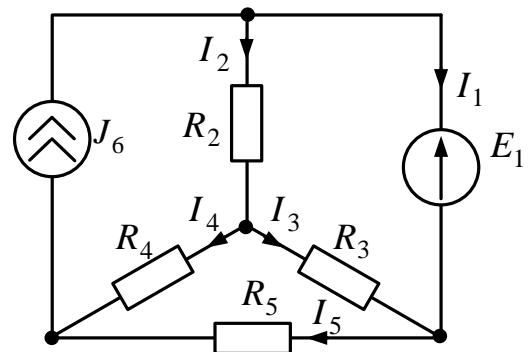


Рис. 6.4

Перевірку розрахунків здійснюємо за балансом потужностей:

- споживана потужність

$$P_{\text{спож}} = R_2 I_2^2 + R_4 I_4^2 + R_5 I_5^2 = 1125 \text{ Вт}$$

- потужність, що генерується у коло джерелами енергії

Для розрахунку потужності джерела струму необхідно знайти напругу на її затискачах:

$$U_{\text{ДС}} = R_2 I_2 + R_4 I_4 = 200 \text{ В}$$

$$P_{\text{джер}} = -E_1 I_1 + U_{\text{ДС}} J_6 = 1125 \text{ Вт}$$

Математичний аналіз кола виконано вірно, так як

$$P_{\text{джер}} \approx P_{\text{спож}}.$$

## Задачі для самостійного розв'язання

### Задача 6.2

Повторити розрахунок струмів задачі 4.4

за заданих параметрів кола

$$E_1 = 100 \text{ В}; E_2 = 50 \text{ В}; J = 10 \text{ А};$$

$$R_1 = R_2 = 20 \text{ Ом}; R_3 = 10 \text{ Ом}.$$

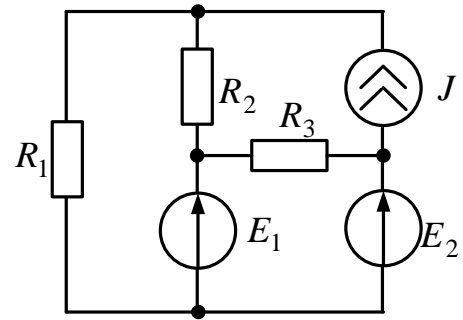


Рис. 6.5

### Задача 6.3

Виконати розрахунок струмів

заданого кола (рис. 6.6) МН.,

$$E_1 = 16 \text{ В}; J = 1 \text{ А};$$

$$R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R_5 = 6 \text{ Ом}.$$

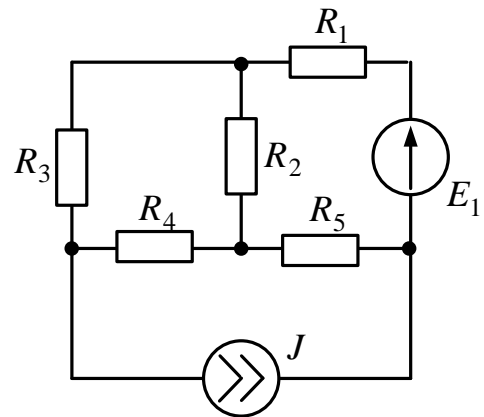


Рис. 6.6



Метод активного двополюсника

Задача 7.1

Визначити струм через амперметр  $I_A$ , якщо параметри кола задані

$$J=2 \text{ A}$$

$$E_1=20 \text{ В}, E_3=75 \text{ В}, E_4=120 \text{ В},$$

$$R_1= 40 \text{ Ом}, R_2=10 \text{ Ом},$$

$$R_3=30 \text{ Ом}, R_4= 60 \text{ Ом}.$$

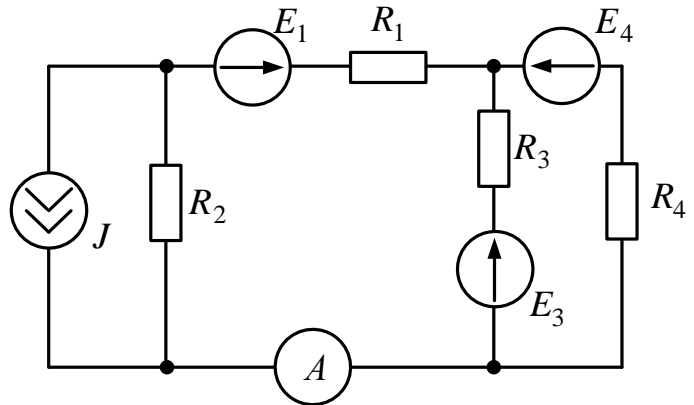


Рис. 7.1

Розв'язання

Відповідно до теореми про еквівалентний генератор лінійна частина кола відносно затискачів гілки з шуканим струмом (див. рис. 7.2, а) може бути замінена еквівалентною схемою джерела напруги (див. рис. 7.2, б). Шуканий струм при цьому визначається за законом Ома для замкненого контура:

$$I_A = \frac{E_{EГ}}{R_{EГ}} = \frac{U_{Hx_{ab}}}{R_{вх}}$$

Напрямок шуканого струму задається при цьому довільно для вихідного кола (див. рис. 7.2, а) і зберігається при переході до схеми заміщення (див. рис. 7.2, б).

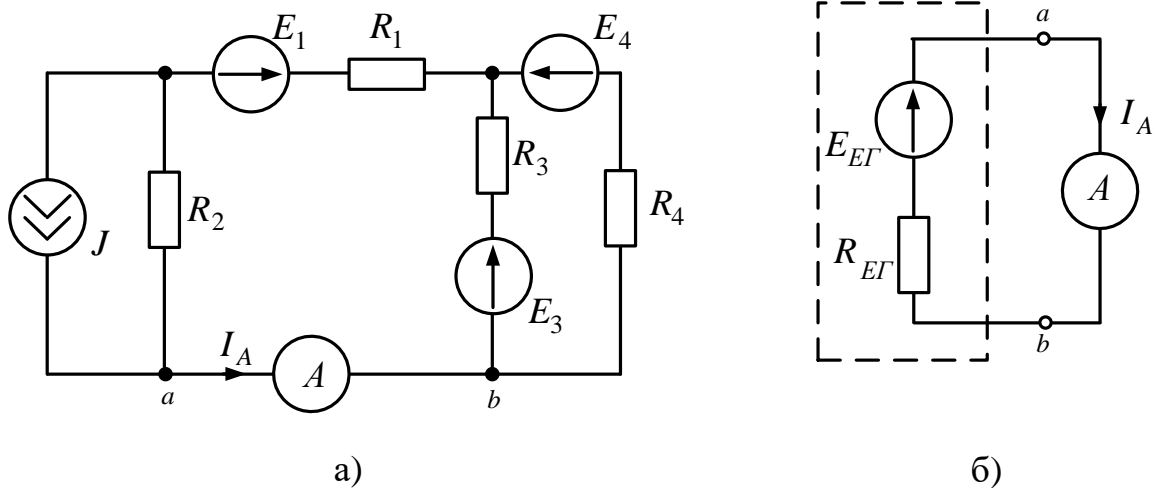


Рис. 7.2

У утвореній схемі заміщення еквівалентного генератора (рис. 7.2, б) два невідомих параметра.

1. *Визначення ЕРС еквівалентного генератора.*

Оскільки величина ЕРС джерела напруги відповідає значенню напруги неробочого ходу (див. Лекція 2), то для розрахунку ЕРС еквівалентного генератора користуємось режимом неробочого ходу. Для цього штучно утворюємо розрив у гілці з амперметром у заданому колі та розраховуємо напругу відносно розірваних затискачів у напрямку заданого струму через амперметр ( $U_{ab}$ ).

Розрахунок напруги неробочого ходу  $U_{ab}$  зводиться до аналізу кола на рис. 7.3 та визначення струмів  $I_1$ ,  $I_2$  та  $I_3$ . Слід врахувати, що в колі існують лише два замкнених контури для протікання струму.

$$I_1 = J = 2 \text{ А};$$

$$I_2 = 0;$$

$$I_3 = \frac{E_4 - E_3}{R_3 + R_4} = \frac{120 - 75}{30 + 60} = 0.5 \text{ Ом.}$$

$$U_{ab} = I_1 R_1 - E_2 + I_2 R_2 + I_3 R_3 + E_3 =$$

$$= 20 - 20 + 0 + 15 + 75 = 90 \text{ В.}$$

Отже

$$E_{EГ} = U_{ab} = 90 \text{ В.}$$

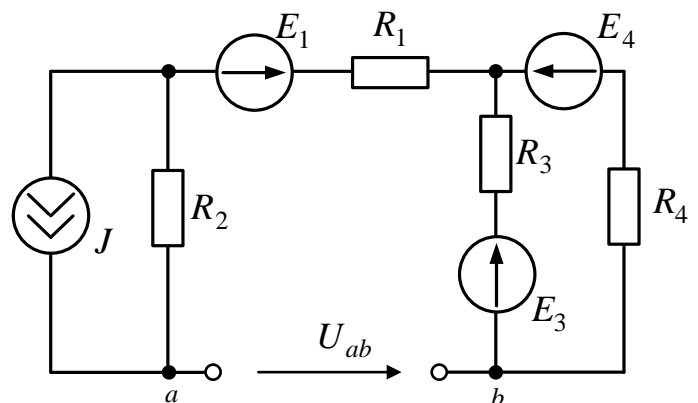


Рис. 7.3

## 2. Визначаємо внутрішнього опору еквівалентного генератора.

Згідно теореми по еквівалентний генератор внутрішній опір еквівалентного генератора відповідає вхідному опору кола відносно розірваних затискачів  $a$ - $b$ . Для розрахунку вхідного опору замінимо всі джерела енергії їх внутрішніми опорами (слід пам'ятати, що розрахунок проводиться для кола з ідеальними елементами).

$$R_{\text{вх}} = R_1 + R_2 + \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4} =$$
$$= 10 + 40 + \frac{30 \cdot 40}{30 + 40} = 70 \text{ Ом.}$$

Отже

$$R_{\text{ЕГ}} = R_{\text{вх}} = 70 \text{ Ом.}$$

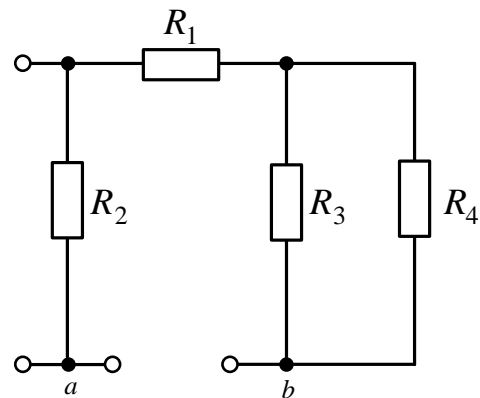


Рис. 7.4

## 3. Розрахунок шуканого струму.

Застосувавши закон Ома до одноконтурної схеми заміщення еквівалентного генератора розраховуємо шуканий струм:

$$I_A = \frac{E_{\text{ЕГ}}}{R_{\text{ЕГ}}} = \frac{90}{70} = 1.3 \text{ А}$$

## Задача 7.2

Визначити залежність показів амперметра в схемі на рис. 7.5 при зміні опору  $R$  змінного резистора в діагоналі моста в межах  $0 \leq R \leq 50 \text{ Ом}$ .

$$E = 100 \text{ В;}$$

$$R_1 = R_4 = 40 \text{ Ом;}$$

$$R_2 = R_3 = 60 \text{ Ом.}$$

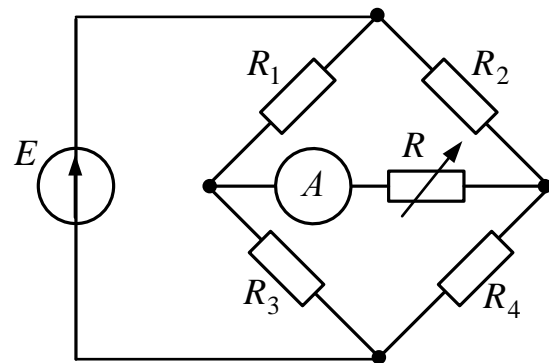


Рис. 7.5

## Розв'язання

Відповідно до методики визначення параметрів активного двополюсника для знаходження значення  $E_{EF}$  перейдемо до схеми на рис. 7.6, де напруга  $U_{HXab}$  на розімкнутих затисках  $a$  й  $b$  визначає шукану ЕРС  $E_{EF}$ . У даному колі

$$U_{HXab} = R_3 I_1 - R_4 I_2$$

$$= R_3 \frac{E}{R_1 + R_3} - R_4 \frac{E}{R_2 + R_4} = 20 \text{ В}$$

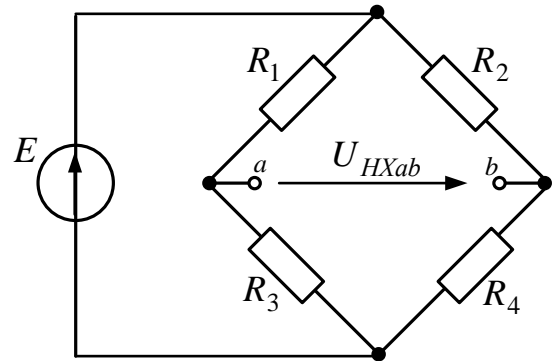


Рис. 7.6

Для визначення вхідного опору активного двополюсника схему рис. 7.6 трансформуємо його в схему на рис. 7.7.

Відносно затисків  $a - b$  даного пасивного двополюсника його опір дорівнює:

$$R_{\text{вх}} = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} + \frac{R_2 R_4}{R_2 + R_4} = 48 \text{ Ом.}$$

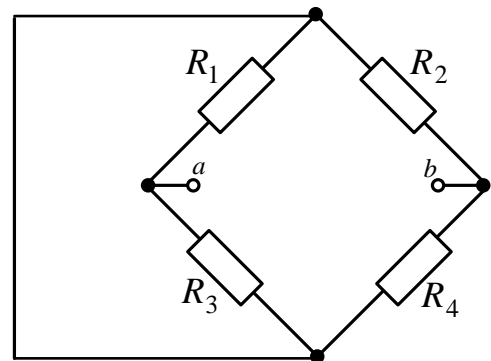


Рис. 7.7

Таким чином, для показу амперметра в заданому колі застосовуємо закон Ома для зхеми заміщення еквівалентного генератора:

$$I_A = \frac{U_{\text{нх12}}}{R_{\text{вх}} + R} = \frac{20}{48 + R} \text{ А}$$

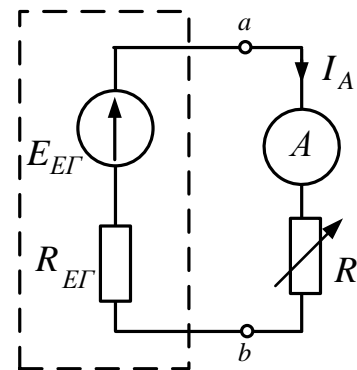


Рис. 7.8

Задаючись значеннями  $R$  у межах його зміни, на підставі (2) одержуємо криву на рис.7.9

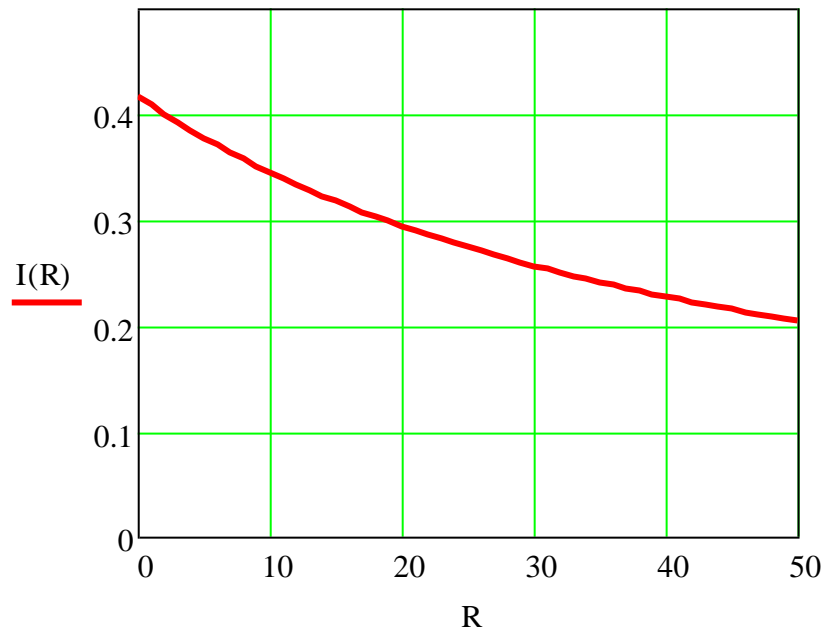


Рис. 7.9

### Задачі для самостійного розв'язання

#### Задача 7.3

Визначити струм через резистор  $R_3$

( $I_3$ ), якщо параметри кола задані

$E_2 = 100$  В;  $E_6 = 300$  В;  $J = 10$  А;

$R_1 = R_2 = 20$  Ом;  $R_3 = R_4 = R_5 = 10$  Ом.

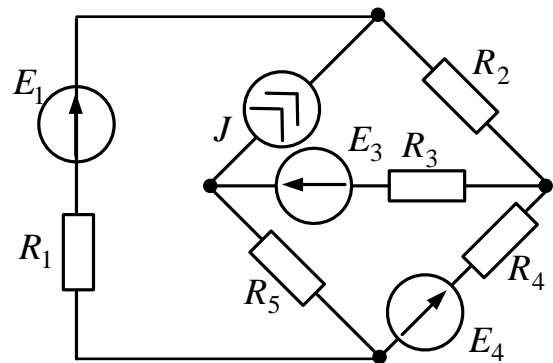


Рис. 7.10

### Задача 7.4

Визначити у кожній з гілок кола МЕГ, якщо параметри кола задані

$$E_1 = 30 \text{ В}; E_2 = 70 \text{ В}; E_3 = 10 \text{ В};$$

$$E_4 = 20 \text{ В}; J = 5 \text{ А};$$

$$R_1 = R_2 = 10 \text{ Ом}; R_4 = R_6 = 5 \text{ Ом};$$

$$R_5 = 15 \text{ Ом}; R_7 = 20 \text{ Ом}.$$

Додаткове завдання: яку ЕРС необхідно увімкнути послідовно з  $R_2$ , щоб струм  $I_2 = 0$ .

Відповіді:

$$I_1 = 1 \text{ А}, I_2 = 4 \text{ А}, I_3 = 3 \text{ А},$$

$$I_4 = 4 \text{ А}, I_5 = 2 \text{ А}, I_6 = 2 \text{ А}.$$

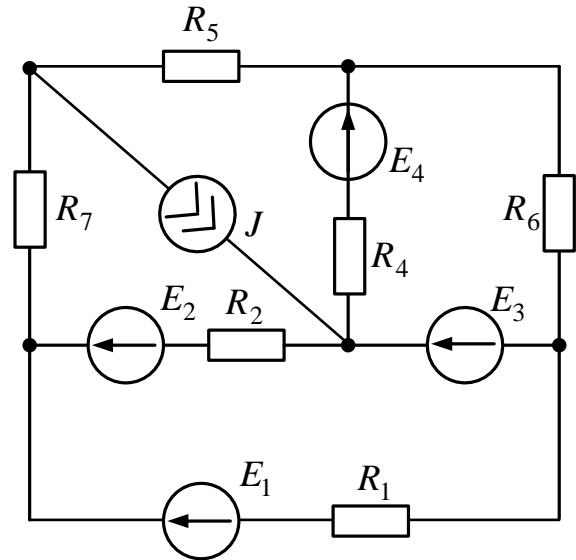


Рис. 7.11

**Передача максимальної потужності  
від активного двополюсника пасивному**

**Задача 8.1**

Нехай енергія від джерела постійної ЕРС  $E$  через двопровідну лінію, опір двох проводів якої дорівнює  $R_{\text{л}}$ , передається до споживача з опором  $R_{\text{н}}$  (рис. 8.1). За умови, що  $R_{\text{н}}$  змінюється в широких межах ( $R_{\text{н}} = 0 \div \infty$ ), дослідимо як змінюються  $I$ ,  $U_{\text{н}}$ ,  $U_{\text{л}}$ ,  $P_{\text{г}}$ ,  $P_{\text{л}}$ ,  $P_{\text{н}}$ ,  $\eta$  (ККД) при зміні  $R_{\text{н}}$ . А також визначимо, при якому значенні опору навантаження на ньому виділяється максимальна потужність.

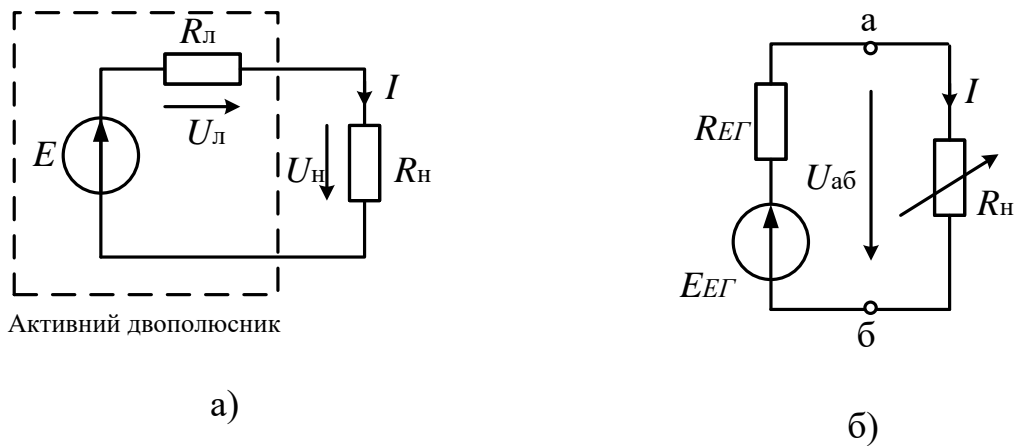


Рис. 8.1

При розв'язанні джерело ЕРС і лінію з опором  $R_{\text{л}}$  можемо розглядати, як активний двополюсник, а споживач  $R_{\text{н}}$ , як пасивний двополюсник (рис. 8.1, б). Для вказаних величин маємо наступний розв'язок:

$$I = \frac{E}{R_{\text{л}} + R_{\text{н}}} \text{ – струм, що протікає у колі;}$$

$$U_{\text{л}} = R_{\text{л}} \cdot I \text{ – напруга лінії;}$$

$$U_{\text{н}} = E - R_{\text{л}} \cdot I \text{ – напруга на навантаженні;}$$

$$P_{\text{г}} = E \cdot I \text{ – потужність генерована у коло;}$$

$$P_{\text{л}} = R_{\text{л}} \cdot I^2 \text{ – втрати на лінії;}$$

$$P_{\text{н}} = P_{\text{г}} - P_{\text{л}} = E \cdot I - R_{\text{л}} \cdot I^2 \text{ – потужність споживання;}$$

$\eta = P_H / P_\Gamma = (E \cdot I - R_L \cdot I^2) / E \cdot I = 1 - R_L \cdot I / E = 1 - R_L / (R_L + R_H) = R_H / (R_L + R_H)$  – ККД.

Відповідно до методу еквівалентного генератора струм через навантаження знаходимо за формулою:

$$I = \frac{U_{a\bar{b}}}{R_{a\bar{b}} + R_H} = \frac{E_{E\Gamma}}{R_{E\Gamma} + R_H}.$$

Перепишемо вирази потужностей у відповідності до цього виразу струму:

$$P_H = I^2 R_H = \left( \frac{U_{a\bar{b}}}{R_{a\bar{b}} + R_H} \right)^2 R_H = \frac{U_{a\bar{b}}^2 R_H}{(R_{a\bar{b}} + R_H)^2};$$

$$P_L = I^2 R_L; \quad P_\Gamma = E_{E\Gamma} I.$$

Для визначення при якому значенні опору навантаження на ньому виділяється максимальної потужності  $P_{\max}$  необхідно знайти точки екстремуму. Отже, необхідно знайти похідну від виразу потужності відносно опору навантаження і, прирівняти її до нуля, визначити величину опору при якому виділяється максимальна потужність  $\left( \frac{dP_H}{dR_H} = 0 \right)$ .

$$\frac{dP_H}{dR_H} = \frac{U_{a\bar{b}}^2 (R_{a\bar{b}} + R_H)^2 - 2U_{a\bar{b}}^2 R_H (R_{a\bar{b}} + R_H)}{(R_{a\bar{b}} + R_H)^4}$$

$$U_{a\bar{b}}^2 (R_{a\bar{b}} + R_H)^2 - 2U_{a\bar{b}}^2 R_H (R_{a\bar{b}} + R_H) = 0$$

$$R_{a\bar{b}}^2 + 2R_{a\bar{b}} R_H + R_H^2 - 2R_{a\bar{b}} R_H - 2R_H^2 = 0$$

$$R_{a\bar{b}} = R_H$$

Проведені розрахунки показали, що максимальна потужність виділяється при опорі еквівалентного генератора. За умови  $R_{a\bar{b}} = R_H$

- у колі протікає струм короткого замикання  $I = \frac{U_{a\bar{b}}}{2R_{a\bar{b}}} = \frac{E_{E\Gamma}}{2R_{E\Gamma}};$

- у навантаженні виділяється максимальна потужність

$$P_{H_{\max}} = \frac{U_{a\bar{b}}^2 R_{a\bar{b}}}{(R_{a\bar{b}} + R_{a\bar{b}})^2} = \frac{U_{a\bar{b}}^2}{4R_{a\bar{b}}};$$



- потужність генерована у коло  $P_r = E_{EG} I = \frac{U_{ab}^2}{2R_{ab}}$ ;
- ККД рівний 50%

$$\eta = \frac{P}{P_r} = \frac{U_{ab}^2}{4R_{ab}} \cdot \frac{2R_{ab}}{U_{ab}^2} = 0.5.$$

### Задача 8.2

У колі постійного струму визначити максимальну потужність, що виділяється у змінному опорі  $R$  (див. рис. 8.2).

Параметри кола:

$$J_1 = 3.5 \text{ А}$$

$$E_2 = 3 \text{ В}$$

$$R_1 = 2 \text{ Ом}$$

$$R_2 = 1 \text{ Ом}$$

$$R'_2 = 2 \text{ Ом}$$

$$R_3 = 5 \text{ Ом}$$

$$R_4 = 0.5 \text{ Ом}$$

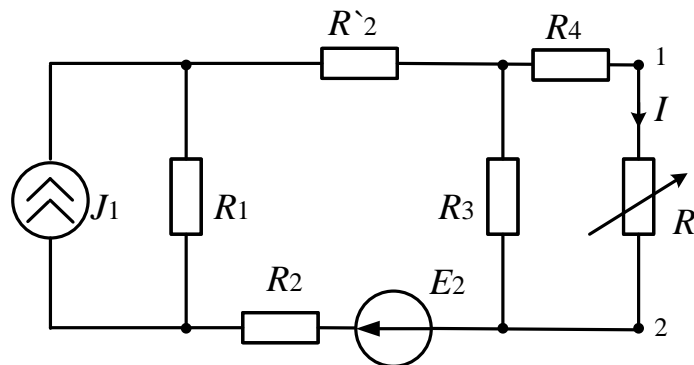


Рис. 8.3

### Розв'язання

Згідно закону Джоуля-Ленца  $P_R = I^2 R$ . Визначимо умови, за яких  $P_R = P_{\max}$ , використовуючи для цього схему заміщення, складену у відповідності до теореми про активний двополіусник (рис. 8.3).

Рівняння електричної рівноваги для такої схеми має вигляд:

$$P_{EG} = P_{REG} + P_R \Rightarrow E_{EG} I = I^2 R_{EG} + I^2 R_R$$

Звідки випливає, що

$$P_R = I^2 R = E_{EG} I - I^2 R_{EG}$$

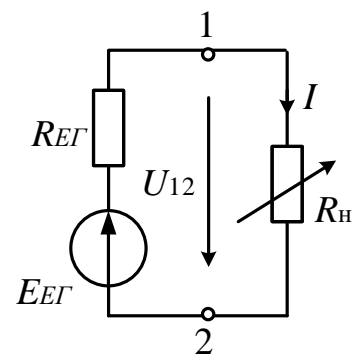


Рис. 8.3

З курсу математики відомо, що максимальна потужність  $P_{\max}$  виділяється за умови  $\frac{dP_R}{dI} = 0$ .

$$\frac{dP}{dI} = \frac{d}{dI} (E_{\text{ЕГ}} I - I^2 R_{\text{ЕГ}}) = E_{\text{ЕГ}} - 2IR_{\text{ЕГ}} = 0, \text{ звідки } I = \frac{E_{\text{ЕГ}}}{2R_{\text{ЕГ}}}.$$

З іншого боку, відповідно до методу еквівалентного генератора

$$I = \frac{E_{\text{ЕГ}}}{R_{\text{ЕГ}} + R}.$$

Прирівнявши два вирази одного струму визначимо, що умовою виділення максимальної потужності є  $R = R_{\text{ЕГ}}$ , такий режим кола називається погодженим.

$$\frac{E_{\text{ЕГ}}}{R_{\text{ЕГ}} + R} = \frac{E_{\text{ЕГ}}}{2R_{\text{ЕГ}}} \Rightarrow R = R_{\text{ЕГ}}$$

Беручи до уваги умову виділення максимальної потужності маємо:

$$I = \frac{E_{\text{ЕГ}}}{R_{\text{ЕГ}} + R} = \frac{E_{\text{ЕГ}}}{2R_{\text{ЕГ}}};$$

$$P_{\max} |_{R=R_{\text{ЕГ}}} = I^2 R_{\text{ЕГ}} = \left( \frac{E_{\text{ЕГ}}}{2R_{\text{ЕГ}}} \right)^2 R_{\text{ЕГ}} = \frac{E_{\text{ЕГ}}^2}{4R_{\text{ЕГ}}}.$$

Для проведення обчислень, використовуємо методику розкрити у задачах 7.1 та 7.2.

Розмикаємо гілку з опором  $R$ :

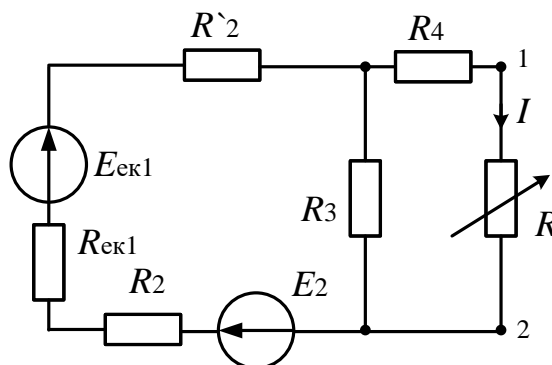


Рис. 8.4

Визначаємо напругу неробочого ходу на розімкнених затискачах. Для цього доцільно звести схему до одноконтурної (рис. 8.4), керуючись перетворенням джерела струму на джерело напруги:

$$E_{\text{ек1}} = J_1 R_1 = 7 \text{ В}, R_{\text{ек1}} = R_1$$

Струм у контурі обчислюємо за законом Ома:

$$I_3 = \frac{E_{\text{ек1}} + E_2}{R_1 + R_2 + R_2' + R_3} = 1 \text{ А},$$

а напругу  $E_{\text{ЕГ}} = U_{12} = I_3 R_3 = 5 \text{ В}$ .

Розраховуємо еквівалентний опір відносно розірваних затискачів 1-2 (рис. 8.5):

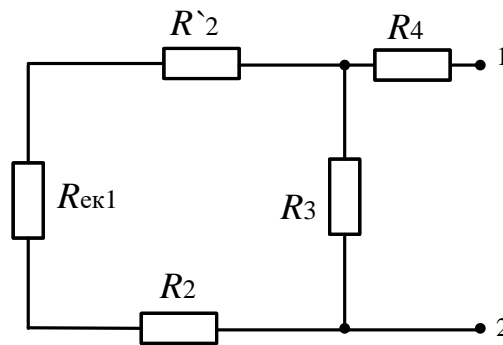


Рис. 8.5

$$R_{\text{ЕГ}} = \frac{(R_1 + R_2 + R_2')R_3}{R_1 + R_2 + R_2' + R_3} + R_4 = 3 \text{ Ом}.$$

Обчислюємо максимальну потужність:

$$P_{\text{max}} = \frac{E_{\text{ЕГ}}^2}{4R_{\text{ЕГ}}} = 2.08 \text{ Вт}.$$

## Розділ 2

# ЛІНІЙНІ ЕЛЕКТРИЧНІ КОЛА ОДНОФАЗНОГО СИНУСОЇДНОГО СТРУМУ

### Практичне заняття 9.

#### Розрахунок кола синусоїдного струму при послідовному та паралельному з'єднанні елементів

##### Задача 9.1

Через котушку індуктивності  $L=1$  Гн протікає струм, що змінюється за законом синуса  $i_L(t) = 1,41 \sin(314t - \pi/4)$  А. Визначити комплекс діючого значення напруги на котушці.

##### Розв'язання

Зв'язок напруги та струму для котушки індуктивності описуються співвідношенням

$$u_L = L \frac{di_L}{dt}$$

Користуючись цією диференційною залежністю виведемо закон зміни напруги на котушці як синусоїдної функції:

$$\begin{aligned} u_L &= \omega L I_m \sin\left(\omega t + \psi_i + \frac{\pi}{2}\right) = U_m \sin(\omega t + \psi_u) = 314 \cdot 1 \cdot 1,41 \sin(314t - 45 + 90) = \\ &= 442,74 \cdot \sin(314t + 45) = 314\sqrt{2} \cdot \sin(314t + 45) \end{aligned}$$

Користуючись правилами переходу від синусоїдної функції до її комплексу діючого значення, отримуємо

$$\dot{U} = \frac{U_m}{\sqrt{2}} e^{j\psi_u} = 314 e^{j45^\circ} \text{ В.}$$

Досягнути цього ж результату можна скориставшись іншим підходом:

- Здійснивши перехід від синусоїдної функції струму до її комплексу діючого значення  $\dot{I} = 1 e^{-j45^\circ}$  А;
- Розрахувавши реактивний опір котушки  $x_L = \omega L = 314$  Ом;

- Скориставшись законом Ома у комплексній формі для ділянки кола

$$\dot{U} = \dot{I} \cdot x_L e^{j90^\circ} = 1e^{-j45^\circ} \cdot 314e^{j90^\circ} = 314e^{j45^\circ} \text{ В.}$$

### Задача 9.2

Визначити струм та характер навантаження у колі з параметрами

$$u_{ab}(t) = 100\sqrt{2} \sin(\omega t + 30^\circ) \text{ В,}$$

$$e(t) = 40\sqrt{2} \sin(\omega t - 90^\circ) \text{ В,}$$

$$i(t) = 4.163\sqrt{2} \sin(\omega t + 166.102^\circ) \text{ А.}$$

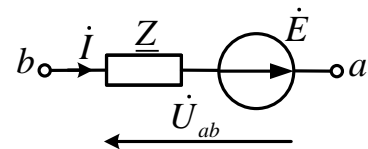


Рис. 9.1

### Розв'язання

Перейдемо від миттєвих величин до їх комплексів діючих значень:

$$u_{ab}(t) = 100\sqrt{2} \sin(\omega t + 30^\circ) \text{ В} \Rightarrow \dot{U}_{ab} = 100e^{j30^\circ} \text{ В,}$$

$$e(t) = 40\sqrt{2} \sin(\omega t - 90^\circ) \text{ В} \Rightarrow \dot{E} = 40e^{-j90^\circ} \text{ В,}$$

$$i(t) = 4.163\sqrt{2} \sin(\omega t + 166.102^\circ) \text{ А} \Rightarrow \dot{I} = 4.163e^{j166.102^\circ}.$$

Застосуємо II закон Кірхгофа для розрахунку комплексу повного опору навантаження:

$$\dot{U}_{ab} = \dot{E} - \dot{I}Z \Rightarrow Z = \frac{\dot{E} - \dot{U}_{ab}}{\dot{I}} = 30e^{j60^\circ} = 15 + j25.981 \text{ Ом.}$$

### Задача 9.3

У колі відомі покази трьох амперметрів:  $I_1 = 2\sqrt{3}$  А,  $I_2 = I_3 = 2$  А та  $r = 50$  Ом. Розрахувати значення  $x_C$  и  $R$  за умови їх рівності. Визначити  $\cos\phi$  кола.

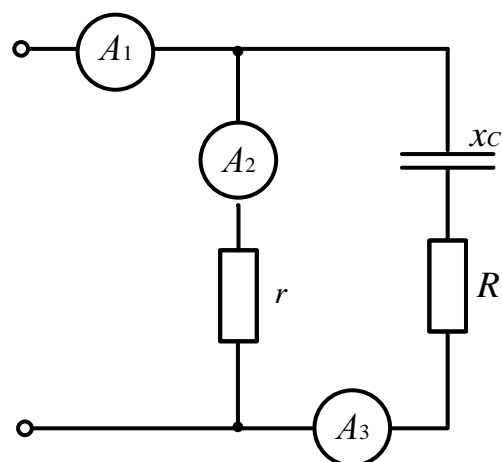


Рис. 9.2

## Розв'язання

Згідно закону Ома розраховуємо напругу на паралельній ділянці кола:

$$U_2 = I_2 r = 2 \cdot 50 = 100 \text{ В.}$$

Оскільки напруга  $U_2$  однакова для обох паралельно з'єднаних гілок, то

$$Z_3 = \frac{U_2}{I_3} = \frac{100}{2} = 50 \text{ Ом.}$$

З трикутника опорів для третьої гілки розраховуємо значення їх модулів, зважаючи на їх рівність між собою

$$Z_3 = \sqrt{R^2 + x_C^2} = 50 \text{ Ом} \Rightarrow \\ R = x_C = 35 \text{ Ом.}$$

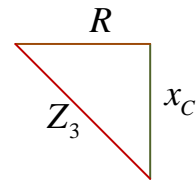


Рис. 9.3

Оскільки аргумент комплексного опору третьої гілки водночас є кутом зсуву фаз між, то

$$\underline{Z}_3 = R - jx_C = \sqrt{R^2 + x_C^2} e^{j\varphi} \Rightarrow \varphi = \arctg\left(\frac{-x_C}{R}\right) = -45^\circ.$$

Звідси  $\cos \varphi = \cos(-45^\circ) = 0.707$ .

## Задача 9.4

У колі синусоїдного струму увімкнені три амперметри. Визначити покази амперметра  $A_2$ , якщо амперметри  $A_0$  та  $A_1$  реєструють відповідно 10 А і 6 А.

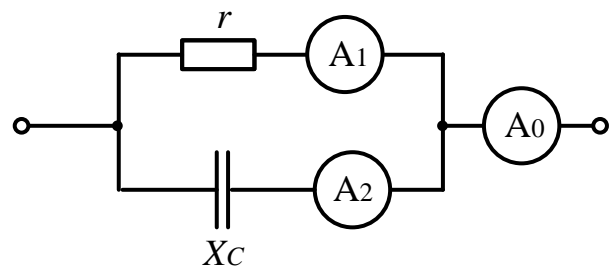


Рис. 9.4

**Розв'язання** базується на використанні векторної діаграми струмів.

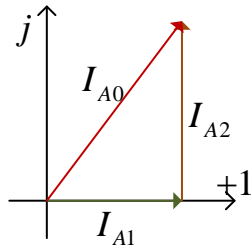


Рис. 9.5

$$I_{A2} = \sqrt{I_{A0}^2 - I_{A1}^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8A$$

### Задача 9.5

За відомих показів першого та другого вольтметрів  $U_1=100$  В,  $U_2=150$  В, та опору резистора  $r=10$  Ом, виконати розрахунок третього вольтметра та індуктивності, якщо частота  $f=50$  Гц.

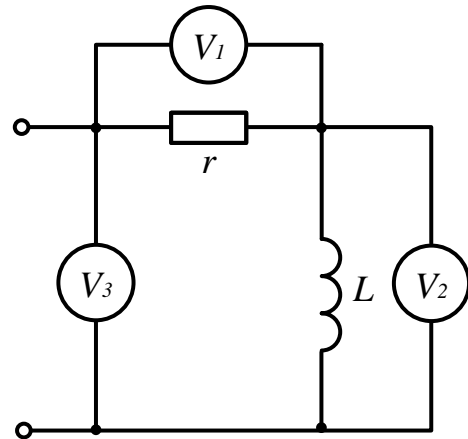


Рис. 9.6

Розв'язання базується на використанні векторної діаграми напруг.

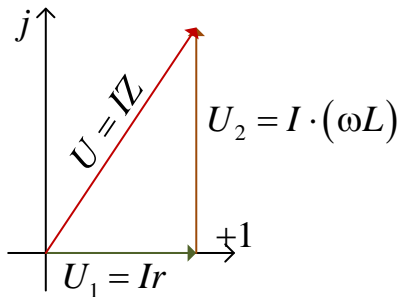


Рис. 9.7

$$U_1 = Ir \Rightarrow I = \frac{U_1}{r} = \frac{100}{10} = 10A$$

$$U_2 = I \cdot x_L \Rightarrow x_L = \frac{U_2}{I} = \frac{150}{10} = 15\Omega$$

$$x_L = 2\pi fL \Rightarrow L = \frac{x_L}{2\pi f} = \frac{15}{2\pi \cdot 50} = 47.8\mu H$$

$$U = \sqrt{U_1^2 + U_2^2} = \sqrt{100^2 + 150^2} = 180.28V$$

### Задача 9.6

У колі на рис. 9.8

$$u_R(t) = 112.8 \sin(\omega t + 32^\circ)$$

$$u_C(t) = 84.6 \sin(\omega t - 58^\circ)$$

Виконати розрахунок діючого значення та записати рівняння миттєвого значення вхідної напруги.

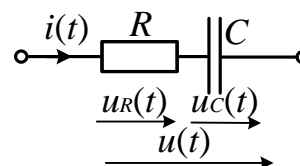


Рис. 9.8

### Розв'язання

Визначаємо амплітудне значення вхідної напруги  $U_m$  та кут зсуву фаз  $\varphi$  між напругою та струмом на вході кола. Для цього зручно скористатися трикутником напруг, який можна будувати як для діючих так і для амплітудних значень.

$$U_m = \sqrt{U_{Rm}^2 + U_{Cm}^2} = \sqrt{112.8^2 + 84.6^2} = 141 \text{ В}$$

$$\varphi = \arctg \frac{U_{Cm}}{U_{Rm}} = \arctg \frac{-84.6}{112.8} = -37^\circ$$

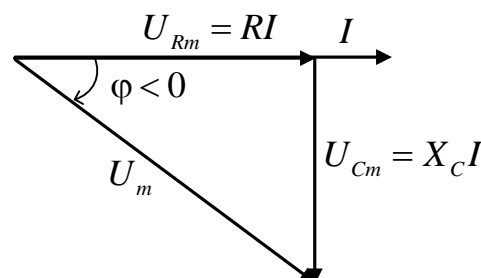


Рис. 9.9

Відомо, що напруга та струм на резистивному елементі збігаються за фазою, отже для заданої схеми на резисторі  $\psi_{u_R} = \psi_{i_R} = \psi_i = 32^\circ$

Виконаємо розрахунок початкової фази вхідної напруги з рівняння

$$\varphi = \psi_u - \psi_i \Rightarrow \psi_u = \varphi + \psi_i \Rightarrow -37^\circ + 32^\circ = -5^\circ$$

Вираз миттєвої напруги на вході кола має вигляд:

$$u(t) = U_m \sin(\omega t + \psi_u) = 141 \sin(\omega t - 5^\circ)$$

Діюче значення вхідної напруги

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}} = \frac{141}{\sqrt{2}} = 100 \text{ В.}$$

### Задача 9.7

Три однофазних двигуни увімкнені паралельно і до них підведена напруга  $U = 400 \text{ В}$ . Паспортні дані двигунів:



$$P_1 = 1.2 \text{ кВт}, \quad \cos(\varphi_1) = 1$$

$$P_2 = 1.6 \text{ кВт}, \quad \cos(\varphi_2) = 0.8 \quad (\varphi_2 < 0)$$

$$P_3 = 2.4 \text{ кВт}, \quad \cos(\varphi_3) = 0.6 \quad (\varphi_3 > 0)$$

Визначити струм, що споживається всіма двигунами разом.

### Розв'язання

Розраховуємо струми, що протікають у паралельних гілках через кожний двигун окремо:

$$P_1 = UI_1 \cos(\varphi_1) \Rightarrow I_1 = 3 \text{ А},$$

$$P_2 = UI_2 \cos(\varphi_2) \Rightarrow I_2 = 5 \text{ А},$$

$$P_3 = UI_3 \cos(\varphi_3) \Rightarrow I_3 = 10 \text{ А}.$$

Прийнявши початкову фазу напруги живлення за нуль, визначаємо початкові фази кожного із струмів:

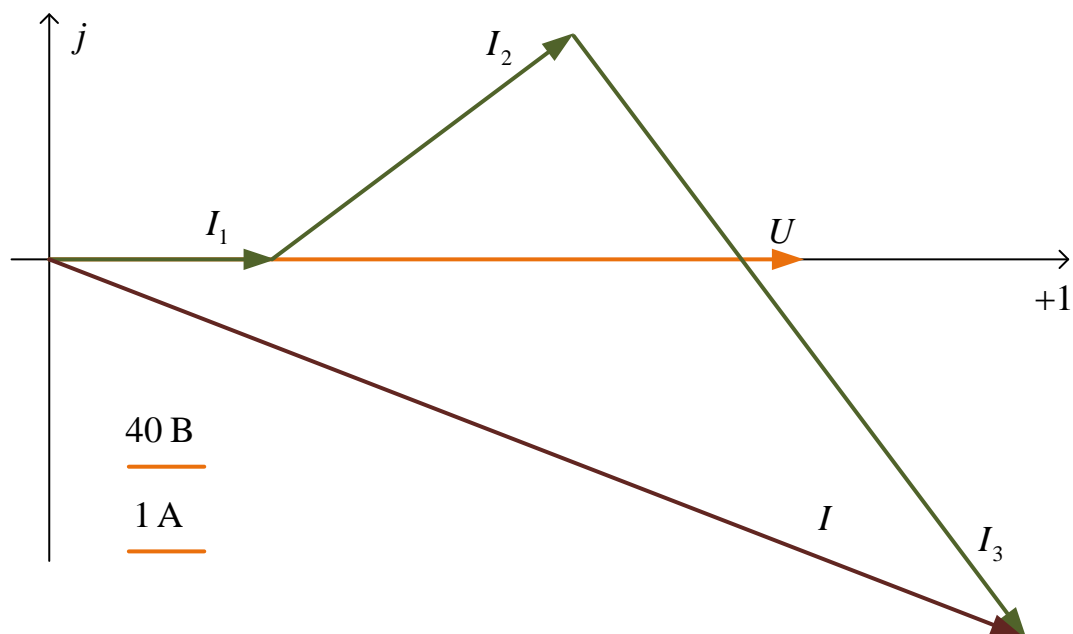
$$\varphi_1 = \psi_u - \psi_{i1} \Rightarrow \psi_{i1} = 0^\circ,$$

$$\varphi_2 = \psi_u - \psi_{i2} \Rightarrow \psi_{i2} = 36.87^\circ,$$

$$\varphi_3 = \psi_u - \psi_{i3} \Rightarrow \psi_{i3} = -53.13^\circ.$$

Якісно будуюмо векторну діаграму та визначаємо вхідний струм:

$$\bar{I} = \bar{I}_1 + \bar{I}_2 + \bar{I}_3 = 13.92 \text{ А}.$$



## Завдання для самостійного розв'язання

### Задача 9.8

1. Чи існує залежність між діючим значенням напруги (струму) та початковою фазою напруги (струму)?
2. Для кожної пари миттєвих напруги та струму *a-v*:

<i>a)</i>		<i>б)</i>		<i>в)</i>
$i_1(t) = 10\sqrt{2} \sin(\omega t + 20^\circ)$		$i_2(t) = 5\sqrt{2} \sin(\omega t + 45^\circ)$		$i_3(t) = 15 \sin(\omega t - 30^\circ)$
$u_1(t) = 220\sqrt{2} \sin(\omega t - 20^\circ)$		$u_2(t) = 100\sqrt{2} \sin(\omega t + 15^\circ)$		$u_3(t) = 380 \sin(\omega t + 60^\circ)$

- 2.1. визначити кут зсуву фаз;
  - 2.2. визначити діючі значення напруги та струму;
  - 2.3. записати комплекси діючі значення напруги та струму використовуючи показникову, алгебричну та тригонометричну форми записів комплексів;
  - 2.4. побудувати векторні діаграми заданих синусоїдних напруги та струму.
3. Розрахувати суми напруг та струмів, заданих у п. 2, користуючись теорією комплексних обчислень.
  4. Подати комплекси напруг та струмів, отриманих у п. 3, синусоїдними функціями.

Розрахунок кола синусоїдного струму змішаного з'єднання

Задача 10.1

Для схеми рис. 10.1 розрахувати значення струмів в усіх гілках кола та напруг на її ділянках, визначити покази приладів, скласти баланс активних і реактивних потужностей, побудувати повну векторну діаграму кола, записати миттєві значення струмів, якщо

- напруга на вході кола  $u(t) = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$ ,  $U_m = 127\sqrt{2}$  В,  $\psi_u = 0^\circ$ ,
- опори елементів навантаження  $R_1 = R_2 = 30$  Ом,  $X_{L1} = 130$  Ом,  $X_{C1} = 50$  Ом,  $X_{L2} = X_{C3} = 40$  Ом.

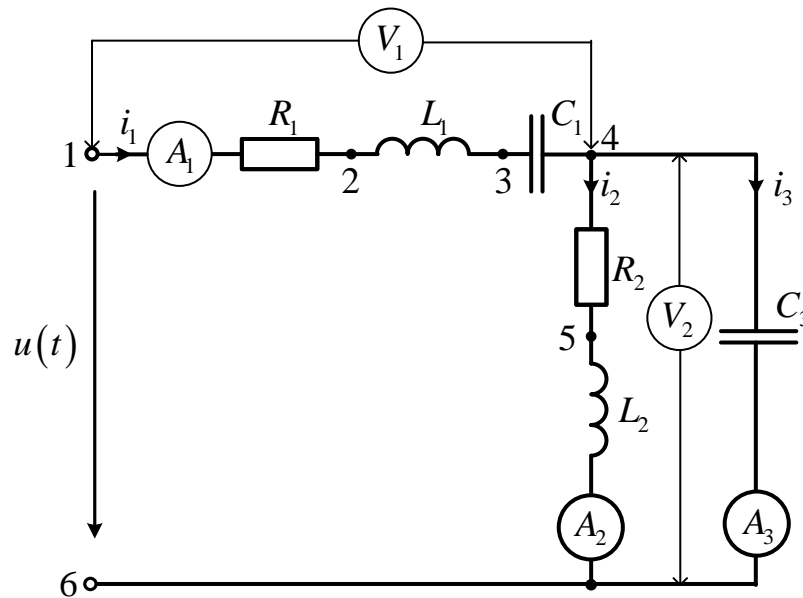


Рис. 10.1

Розв'язання

Здійснюємо перехід від схеми заданого кола до комплексної схеми заміщення.

Комплекс діючого значення вхідної напруги  $\dot{U} = \frac{U_m}{\sqrt{2}} e^{j\psi_u} = 127 e^{j0^\circ} = 127$  В.

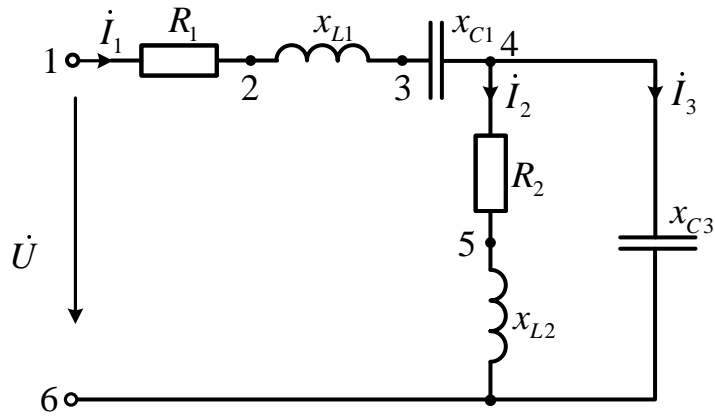


Рис. 10.2

Розраховуємо повні комплексні опори гілок кола

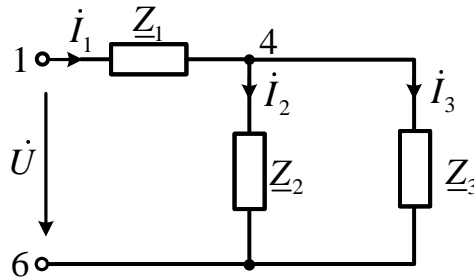


Рис. 10.3

$$\begin{aligned} \underline{Z}_1 &= R_1 + jX_{L1} + (-jX_{C1}) = R_1 + j(X_{L1} - X_{C1}) = \varphi_1 = \psi_{u_{14}} - \psi_{i_1} = 69.5^\circ \\ &= 30 + j(130 - 50) = 30 + j80 = 85.44e^{j69.5^\circ} \\ \underline{Z}_2 &= R_2 + jX_{L2} = 30 + j40 = 50e^{j53^\circ} \\ \underline{Z}_3 &= -jX_{C3} = -j40 = 40e^{-j90^\circ} \end{aligned} \quad \left| \begin{aligned} \varphi_2 &= \psi_{u_{46}} - \psi_{i_2} = 53^\circ \\ \varphi_3 &= \psi_{u_{46}} - \psi_{i_3} = -90^\circ \end{aligned} \right.$$

Проводимо розрахунок еквівалентного комплексного опору кола:

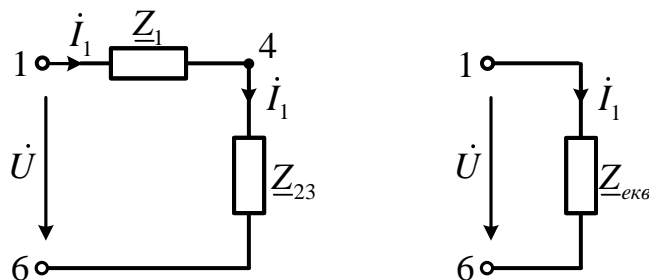


Рис. 10.4

$$\underline{Z}_{23} = \frac{\underline{Z}_2 \cdot \underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} = \frac{(R_2 + jX_{L2}) \cdot (-jX_{C3})}{R_2 + jX_{L2} - jX_{C3}} =$$

$$= \frac{50e^{j53^\circ} \cdot 40e^{-j90^\circ}}{(30 + j40) + (-j40)} = 53,3 - j40 = 66,7e^{-j37^\circ}$$

$$\underline{Z}_{екв} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_{23} = R_1 + j(X_{L1} - X_{C1}) + \underline{Z}_{23} =$$

$$= 30 + j80 + 53,3 - j40 = 83,3 + j40 = 92,42e^{j25,7^\circ}$$

$$\varphi_{23} = \psi_{u_{46}} - \psi_{i_1} = -37^\circ$$

$$\varphi = \psi_u - \psi_{i_1} = 25,7^\circ$$

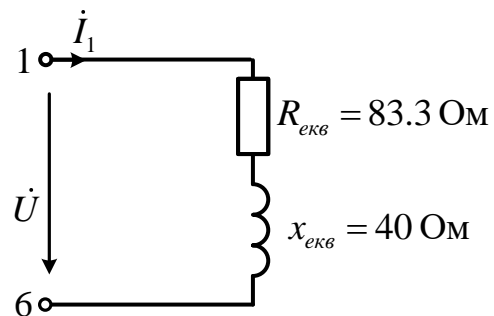
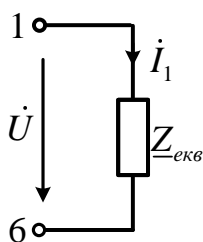


Рис. 10.5

Розраховуємо струм на вході кола:

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}}{\underline{Z}_{екв}} = \frac{127}{92,42e^{j25,7^\circ}} = 1,37e^{-j25,7^\circ} \text{ А.}$$

Для розрахунку струмів у розгалуженій частині застосуємо закон Ома.

Для цього, спершу, розрахуємо напругу між точками 4-6:

$$\dot{U}_{46} = \dot{I}_1 \cdot \underline{Z}_{23} = 1,37e^{-j25,7^\circ} \cdot 66,7e^{-j37^\circ} = 91,6e^{-j62,7^\circ} \text{ В}$$

Далі

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_{46}}{\underline{Z}_2} = \frac{91,6e^{-j62,7^\circ}}{50e^{j53^\circ}} = 1,83e^{-j115,7^\circ} \text{ А,}$$

$$\dot{I}_3 = \frac{\dot{U}_{46}}{\underline{Z}_3} = \frac{91,6e^{-j62,7^\circ}}{40e^{-j90^\circ}} = 2,29e^{j27,3^\circ} \text{ А.}$$

Для розрахунку струмів у розгалуженій частині кола можуть бути застосовані правило чужого опору та перший закон Кірхгофа:

$$\dot{i}_2 = \dot{i}_1 \frac{Z_3}{Z_2 + Z_3}$$

$$\dot{i}_3 = \dot{i}_1 \frac{Z_2}{Z_2 + Z_3} = \dot{i}_1 - \dot{i}_2$$

Для перевірки правильності проведення розрахунків складаємо баланс потужностей:

$$\tilde{S} = \dot{U} \dot{I}_1^* = 127 \cdot 1,37 e^{j25.7^\circ} = 174 e^{j25.7^\circ} = 156.91 + j75.18 \text{ ВА}$$

$P_{Gen} = 156.91 \text{ Вт}$  – активна потужність на вході кола;

$Q_{Gen} = 75.18 \text{ ВАр}$  – реактивна потужність на вході кола.

Активна потужність, яка споживається активними елементами кола:

$$P_{cn} = I_1^2 \cdot R_1 + I_2^2 \cdot R_2 = 1.37^2 \cdot 30 + 1.83^2 \cdot 30 = 156.77 \text{ Вт}$$

Реактивна потужність

$$\begin{aligned} Q_{cn} &= I_1^2 \cdot (X_{L1} - X_{C1}) + I_2^2 \cdot X_{L2} + I_3^2 \cdot (-X_{C3}) = \\ &= 1.37^2 \cdot (130 - 50) + 1.83^2 \cdot 40 + 2.29^2 \cdot (-40) = 74.844 \text{ ВАр} \end{aligned}$$

Для побудови векторної діаграми виконаємо розрахунок напруг на кожному з елементів:

$$\dot{U}_{12} = \dot{i}_1 \cdot R_1 = 1,37 e^{-j25.7^\circ} \cdot 30 = 41.1 e^{-j25.7^\circ} \text{ В},$$

$$\dot{U}_{23} = \dot{i}_1 \cdot X_{L1} e^{j90^\circ} = 1,37 e^{-j25.7^\circ} \cdot 130 e^{j90^\circ} = 178.1 e^{j64.3^\circ} \text{ В},$$

$$\dot{U}_{34} = \dot{i}_1 \cdot X_{C1} e^{-j90^\circ} = 1,37 e^{-j25.7^\circ} \cdot 50 e^{-j90^\circ} = 68.5 e^{-j115.7^\circ} \text{ В},$$

$$\dot{U}_{45} = \dot{i}_2 \cdot R_2 = 1.83 e^{-j115.7^\circ} \cdot 30 = 54.9 e^{-j115.7^\circ} \text{ В},$$

$$\dot{U}_{56} = \dot{i}_2 \cdot X_{L2} e^{j90^\circ} = 1.83 e^{-j115.7^\circ} \cdot 40 e^{j90^\circ} = 73.2 e^{-j25.7^\circ} \text{ В},$$

$$\dot{U}_{46} = \dot{i}_3 \cdot X_{C3} e^{-j90^\circ} = 2.29 e^{j27.3^\circ} \cdot 40 e^{-j90^\circ} = 91,6 e^{-j62,7^\circ} \text{ В}.$$

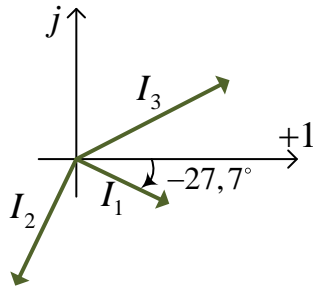


Рис. 10.6

$$\dot{I}_1 = 1,37e^{-j25,7^\circ} \text{ A,}$$

$$\dot{I}_2 = 1,83e^{-j115,7^\circ} \text{ A,}$$

$$\dot{I}_3 = 2,29e^{j27,3^\circ} \text{ A.}$$

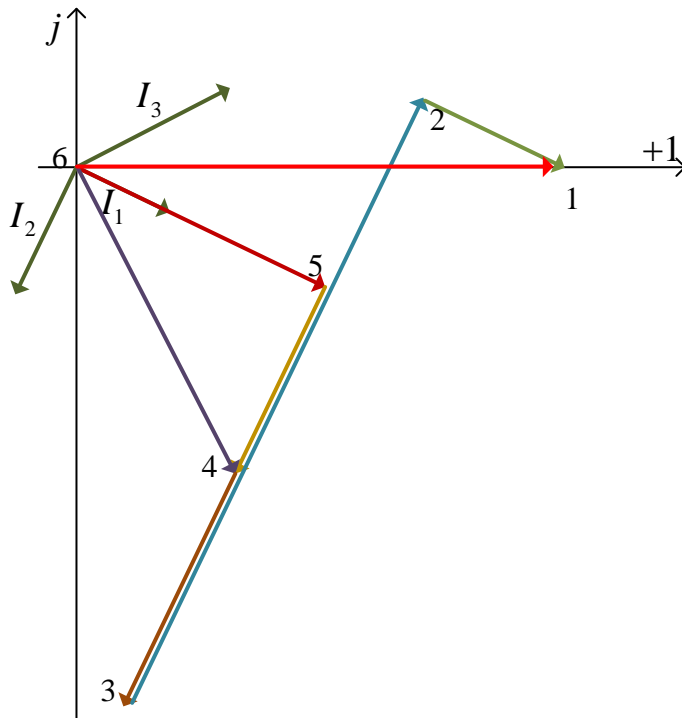


Рис. 10.7

$$\dot{U}_{12} = 41,1e^{-j24,7^\circ} \text{ B,}$$

$$\dot{U}_{23} = 178,1e^{j64,3^\circ} \text{ B,}$$

$$\dot{U}_{34} = 68,5e^{-j115,7^\circ} \text{ B,}$$

$$\dot{U}_{45} = 54,9e^{-j115,7^\circ} \text{ B,}$$

$$\dot{U}_{56} = 73,2e^{-j25,7^\circ} \text{ B,}$$

$$\dot{U}_{46} = 91,6e^{-j62,7^\circ} \text{ B.}$$

### Задача 10.2

У колі на рис. 10.8, а протікає синусоїдний струм  $i(t) = 10\sin(\omega t + 15^\circ)$  А частоти  $f = 400$  Гц, резистивні опори  $r_1 = 10$  Ом,  $r_2 = 20$  Ом, ємність  $C = 10$  мкФ.

Користуючись методом провідностей розрахувати миттєве значення напруги на вході кола  $u(t)$  і напруги на конденсаторі  $u_C(t)$ , визначити покази приладів, побудувати векторну діаграму кола.

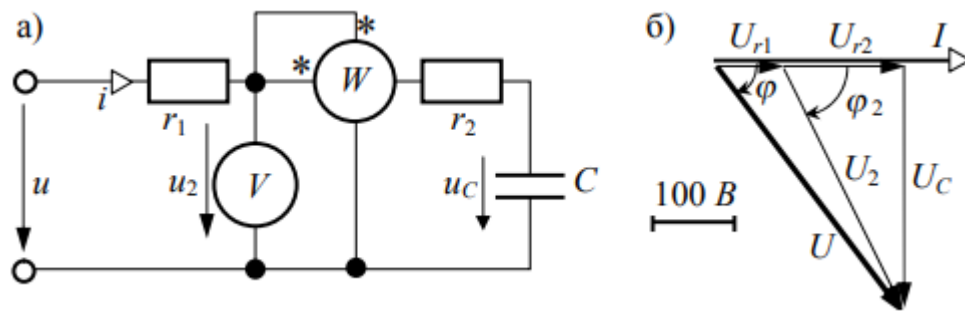
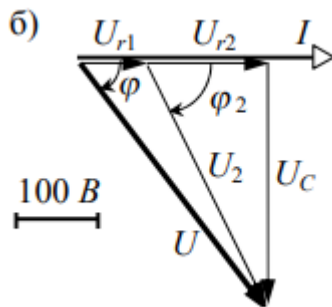


Рис. 10.8



### Розв'язання

Ємнісний опір кола

$$x_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi C} = 39.81 \text{ Ом.}$$

Амплітудне значення напруги на ємності

$$U_{mC} = I_m x_C = 10 \cdot 39.81 = 398.1 \text{ В.}$$

Діючі значення

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = \frac{10}{\sqrt{2}} = 7.07 \text{ А,} \quad U = \frac{U_m}{\sqrt{2}} = \frac{398.1}{\sqrt{2}} = 281.5 \text{ В.}$$

Діючі значення напруг на резистивних опорах

$$U_{r_1} = I \cdot r_1 = 7.07 \cdot 10 = 70.7 \text{ В,}$$

$$U_{r_2} = I \cdot r_2 = 7.07 \cdot 20 = 141.4 \text{ В.}$$

Другий закон Кірхгофа у векторній формі має вигляд  $\bar{U}_{r_1} + \bar{U}_{r_2} + \bar{U}_C = \bar{U}$ ,

відповідно до якого будемо діаграму напруг кола (рис. 10.8, б).

З прямокутного трикутника напруг

$$U = \sqrt{(U_{r_1} + U_{r_2})^2 + U_C^2} = 352 \text{ В,}$$



$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{-U_C}{U_{r_1} + U_{r_2}} = -53^\circ.$$

Миттєве значення напруги на вході кола

$$\begin{aligned} u(t) &= U_m \sin(\omega t + \psi_U) = U \sqrt{2} \sin(\omega t + \psi_i + \varphi) = \\ &= 352\sqrt{2} \sin(\omega t + 15^\circ + (-53^\circ)) = 352\sqrt{2} \sin(\omega t - 38^\circ) \text{ В.} \end{aligned}$$

Напруга на конденсаторі за фазою від струму на  $90^\circ$ , його миттєве значення

$$u_C(t) = U_{mC} \sin(\omega t + \psi_{U_C}) = U_{mC} \sin(\omega t + \psi_i - 90^\circ) = 398,1 \sin(\omega t - 75^\circ) \text{ В.}$$

Напругу на ділянці  $r_2 - C$ , прикладено до ватметра та вольтметра і кут зсуву фаз, розраховуємо за трикутником напруг векторної діаграми згідно  $\bar{U}_2 + \bar{U}_{r_2} + \bar{U}_C = 0$ :

$$U_2 = U_W = \sqrt{U_{r_2}^2 + U_C^2} = 315 \text{ В,}$$

$$\varphi_2 = \operatorname{arctg} \frac{-U_C}{U_{r_2}} = -63,33^\circ.$$

Вольтметр схеми вимірює діюче значення напруги  $U_2 = 315 \text{ В}$ .

Показ ватметра:

$$P_W = U_W I_W \cos(\varphi_W, I_W) = U_2 I \cos(\varphi_2) = 1000 \text{ Вт.}$$

Оскільки показ ватметра показує величину потужності, яка споживається резистором  $r_2$ , то розрахунок можна провести наступним чином

$$P_W = I^2 r_2 = 1000 \text{ Вт.}$$

Розрахунок складного кола синусоїдного струму

Задача 11.1

Розрахувати значення струмів в усіх гілках кола (рис. 11.1) та скласти баланс активних і реактивних потужностей.

$$\dot{E} = 10 \text{ В,}$$

$$R = 2x_L = x_C = 10 \text{ Ом,}$$

$$\dot{J} = 2e^{j90^\circ} \text{ А.}$$

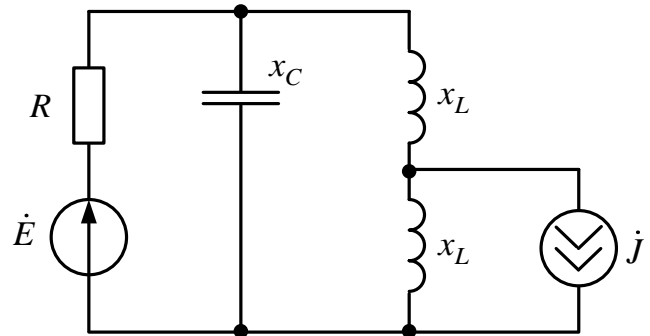


Рис. 11.1

Розв'язання

Для обчислення значень струмів у гілках кола доцільно використати метод контурних струмів.

Довільно задаємо напрями контурних струмів та складаємо систему

$$\begin{cases} \dot{J} = \dot{I}_{33} \\ \dot{I}_{11}Z_{11} - \dot{I}_{22}Z_{12} = \dot{E}_1 \\ -\dot{I}_{11}Z_{21} + \dot{I}_{22}Z_{22} - \dot{I}_{33}Z_{23} = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

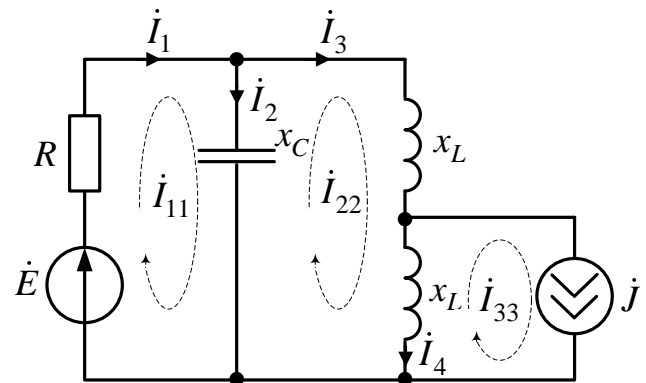


Рис. 11.2

$$\begin{cases} \dot{J} = \dot{I}_{33} \\ \dot{I}_{11}(R - jx_C) - \dot{I}_{22}(-jx_C) = \dot{E}_1 \\ -\dot{I}_{11}(-jx_C) + \dot{I}_{22}(2jx_L - jx_C) - \dot{I}_{33}(jx_L) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \dot{I}_{11}(10 - j10) + \dot{I}_{22}(j10) = 10 \\ \dot{I}_{11}(j10) + \dot{I}_{22}(j10 - j10) - \dot{I}_{33}(j5) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

За результатами розрахунку отримаємо значення контурних струмів:

$$\dot{I}_{11} = j1 = 1e^{j90^\circ} \text{ А},$$

$$I_{22} = -1 = 1e^{j180^\circ} \text{ А},$$

$$\dot{I}_{33} = 2e^{j90^\circ} \text{ А}.$$

Знаходимо дійсні струми у гілках кола:

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_{11} = 1e^{j90^\circ} \text{ А},$$

$$\dot{I}_2 = \dot{I}_{11} - \dot{I}_{22} = j1 - (-1) = 1 + j1 = \sqrt{2}e^{j45^\circ} \text{ А},$$

$$\dot{I}_3 = \dot{I}_{22} = 1e^{j180^\circ} \text{ А},$$

$$\dot{I}_4 = \dot{I}_{22} - \dot{I}_{33} = -1 - j2 = \sqrt{5}e^{-j116^\circ} \text{ А}.$$

Для перевірки правильності проведення розрахунків складаємо баланс потужностей:

$$\begin{aligned} \tilde{S} &= \dot{E}_1 \dot{I}_1^* + J \left( -\dot{I}_4 \cdot jx_L \right) = 10 \cdot 1e^{-j90^\circ} + 2e^{-j90^\circ} \cdot \left( -\sqrt{5}e^{-j116^\circ} \cdot 5e^{j90^\circ} \right) = \\ &= 9,802 + j10,098 \text{ ВА} \end{aligned}$$

$P_{Gen} = 9,802$  Вт – активна потужність на вході кола;

$Q_{Gen} = 10,098$  ВАр – реактивна потужність на вході кола.

Активна потужність, яка споживається активними елементами кола:

$$P_{cn} = I_1^2 \cdot R_1 = 1^2 \cdot 10 = 10 \text{ Вт}.$$

Реактивна потужність

$$Q_{cn} = I_2^2 \cdot (-x_C) + I_3^2 \cdot x_L + I_4^2 \cdot (x_L) = \sqrt{2}^2 \cdot (-10) + 1^2 \cdot 5 + \sqrt{5}^2 \cdot 5 = 10 \text{ ВАр}.$$

## Задача 11.2

У схемі на рис. 11.2 відомо:

$E_1 = E_2 = 100$  В, причому  $E_2$  випереджає  $E_1$  на  $90^\circ$  за фазою;

$J = 5$  А, причому струм цього джерела знаходиться у протифазі з  $E_2$ ;

$R = x_C = 10$  Ом,  $x_L = 20$  Ом.

Визначити струми у всіх гілках кола, розрахувати показ ватметра, скласти баланс потужностей.

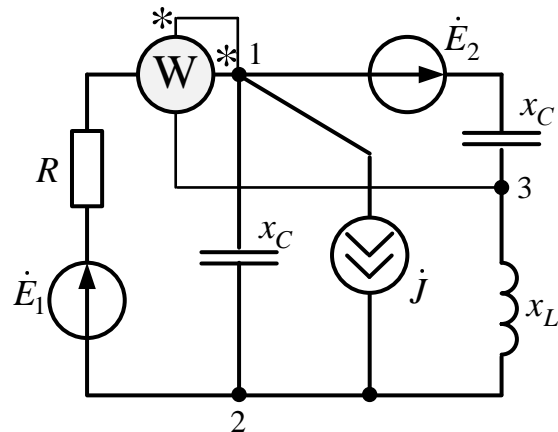


Рис. 11.2

### Розв'язання

Якщо прийняти початкову фазу  $E_1$  за нуль, тоді комплексні значення джерел будуть наступними

$$\dot{E}_1 = 100 \text{ В}, \quad \dot{E}_2 = 100e^{j90^\circ} = j100 \text{ В}$$

$$\dot{j} = 5e^{-j90^\circ} = -j5 \text{ А.}$$

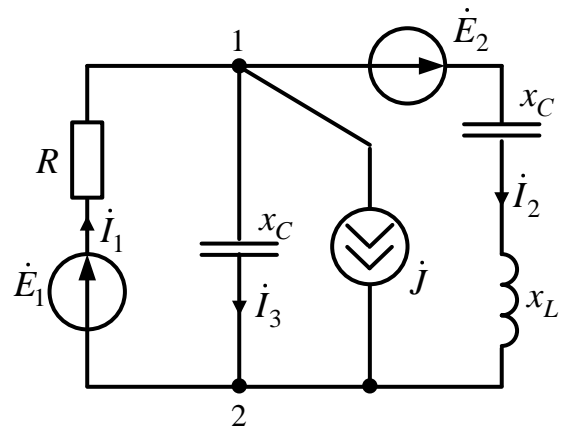


Рис. 11.3

Оскільки схема містить лише два вузли, раціонально провести розрахунок струмів із використанням методу двох вузлів

$$\dot{U}_{12} = \frac{\dot{E}_1 \underline{Y}_1 + \dot{E}_2 \underline{Y}_2 - \dot{J}}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3}$$

де комплексні провідності гілок

$$\underline{Y}_1 = \frac{1}{R} = \frac{1}{10} = 0.1 \text{ См,}$$

$$\underline{Y}_2 = \frac{1}{jx_L - jx_C} = \frac{1}{j20 - j10} = -j0.1 \text{ См, ,}$$

$$\underline{Y}_3 = \frac{1}{-jx_C} = \frac{1}{-j10} = j0.1 \text{ См.}$$

Тоді

$$\dot{U}_{12} = \frac{\dot{E}_1 \underline{Y}_1 - \dot{E}_2 \underline{Y}_2 - \dot{J}}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3} = \frac{100 \cdot 0,1 - 100e^{j90^\circ} \cdot 0,1e^{-j90^\circ} - 5e^{-j90^\circ}}{0,1 - j0,1 + j0,1} = j50 = 50e^{j90^\circ} \text{ В.}$$

Струми у кожній з гілок визначаємо за законом Ома:

$$\dot{I}_1 = (\dot{E}_1 - \dot{U}_{12}) \underline{Y}_1 = 10 - j5 = 11,18e^{-j26,56^\circ} \text{ А,}$$

$$\dot{I}_2 = (\dot{E}_2 + \dot{U}_{12}) \underline{Y}_2 = 15 \text{ А,}$$

$$\dot{I}_3 = \dot{U}_{12} \underline{Y}_3 = -5 = 5e^{j180^\circ} \text{ А.}$$

$$\text{Розрахунок показу ватметра: } P_w = \text{Re} \left[ \dot{U}_{13} \cdot \left( -I_1^* \right) \right]$$

За другим законом Кірхгофа обчислюємо

$$\dot{U}_{13} = -\dot{E}_2 + \dot{I}_2 (-jx_C) = -j250 = 250e^{j90^\circ} \text{ В.}$$

$$\text{Тоді } P_w = \text{Re} \left[ \dot{U}_{13} \cdot \left( -I_1^* \right) \right] = \text{Re} \left[ 250e^{j90^\circ} \cdot \left( -11,18e^{j26,56^\circ} \right) \right] = -1250 \text{ Вт.}$$

Для перевірки правильності проведення розрахунків складаємо баланс потужностей:

$$\tilde{S} = \dot{E}_1^* I_1 + \dot{E}_2^* I_2 + J \left( -\dot{I}_3 \cdot (-jx_C) \right) = 1249,92 + j2000 \text{ ВА}$$

$$P_{\text{Ген}} = 1249,92 \text{ Вт} - \text{активна потужність на вході кола;}$$

$$Q_{\text{Ген}} = 2000 \text{ ВАр} - \text{реактивна потужність на вході кола.}$$

Активна потужність, яка споживається активними елементами кола:

$$P_{\text{сн}} = P_w = I_1^2 \cdot R_1 = 1249,92 \text{ Вт.}$$

Реактивна потужність

$$Q_{\text{сн}} = I_2^2 \cdot (x_L - x_C) + I_3^2 \cdot (-x_C) = 2000 \text{ ВАр.}$$

## Задачі для самостійного розв'язання

### Задача 11.3

У схемі на рис. 11.4 відомо

$$\dot{J} = 10e^{j45^\circ} \text{ А};$$

$$\dot{E}_1 = 380 \text{ В},$$

$$\dot{E}_2 = 100e^{j90^\circ} \text{ В},$$

$$R_1 = 10 \text{ Ом}, R_3 = 6 \text{ Ом},$$

$$x_1 = 14,29 \text{ Ом},$$

$$x_2 = 3,3 \text{ Ом}.$$

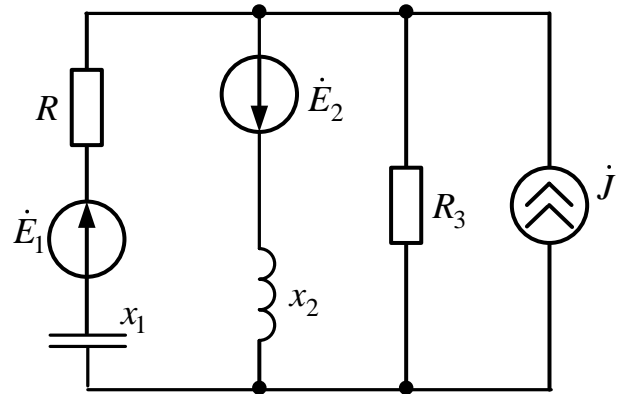


Рис. 11.4

Виконати розрахунок струмів методом контурних струмів та двох вузлів, здійснити перевірку розрахунку за рівняннями Кірхгофа та балансом потужностей. Побудувати суміщену діаграму струмів та напруг.

**Використання методу еквівалентного генератора у колі синусоїдного струму**

**Задача 12.1**

Для кола на рис. 12.1 виконати розрахунок струму через активно-ємнісне навантаження п'ятої гілки  $i_5(t)$ , якщо параметри кола

$$J(t) = 2\sin(\omega t + 60) \text{ A}$$

$$e_1(t) = 100\sin(\omega t - 45) \text{ B}$$

$$R_1 = x_1 = 5 \text{ Ом}$$

$$R_2 = x_2 = 10 \text{ Ом}$$

$$R_3 = 10 \text{ Ом}$$

$$R_4 = 5 \text{ Ом}$$

$$R_5 = 10 \text{ Ом}$$

$$x_4 = 10 \text{ Ом}$$

$$x_5 = 5 \text{ Ом}$$

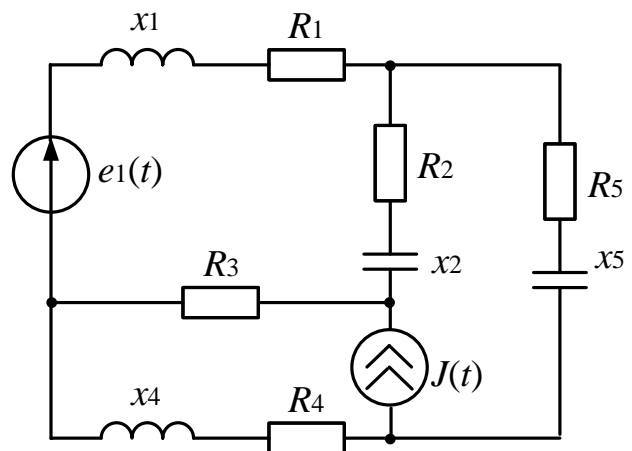


Рис. 12.1

**Розв'язання**

Відповідно до теореми про еквівалентний генератор лінійна частина кола відносно затискачів гілки з шуканим струмом (див. рис. 12.2, а) може бути замінена еквівалентною схемою джерела напруги (див. рис. 12.2, б). Шуканий струм при цьому визначається за законом Ома у комплексній формі:

$$\dot{I}_5 = \frac{\dot{U}_{аб}}{\underline{Z}_{аб} + \underline{Z}_н} = \frac{\dot{E}_{EG}}{\underline{Z}_{EG} + \underline{Z}_н}$$

Напряг шуканого струму задається при цьому довільно для вихідного кола (див. рис. 12.2, а) і зберігається при переході до схеми заміщення (див. рис. 12.2, б).

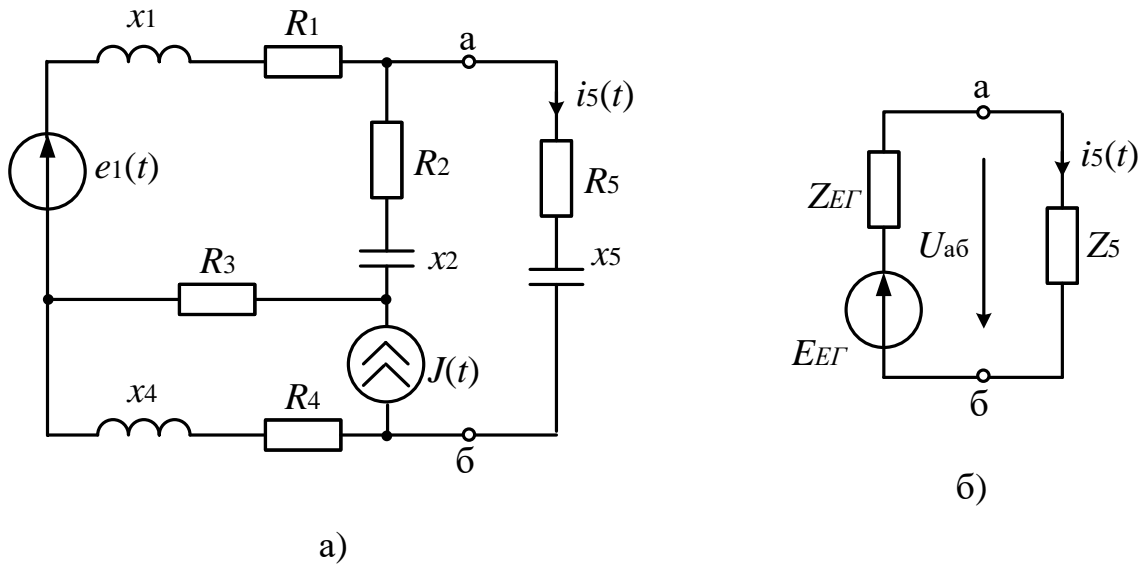


Рис. 12.2

1. *Визначення ЕРС еквівалентного генератора.* Оскільки величина ЕРС джерела напруги відповідає значенню напруги неробочого ходу (див. Лекція 2), то для розрахунку комплексу ЕРС еквівалентного генератора користуємось режимом неробочого ходу. Для цього штучно утворюємо розрив у гілці з  $R_5$  та  $x_5$  (рис. 12.3) та розраховуємо напругу відносно розірваних затискачів у напрямку заданого струму ( $\dot{U}_{ab}$ ).

Параметри кола у комплексній формі:

$$\dot{E}_m = 100e^{-j45^\circ} \text{ В},$$

$$\dot{J}_m = 2e^{j60^\circ} \text{ В},$$

$$\underline{Z}_1 = R_1 + jx_1 = 5 + j5 = 5\sqrt{2}e^{j45^\circ} \text{ Ом},$$

$$\begin{aligned} \underline{Z}_2 &= R_2 - jx_2 = 10 - j10 = \\ &= 10\sqrt{2}e^{-j45^\circ} \text{ Ом}, \end{aligned}$$

$$\underline{Z}_3 = R_3 = 10 \text{ Ом},$$

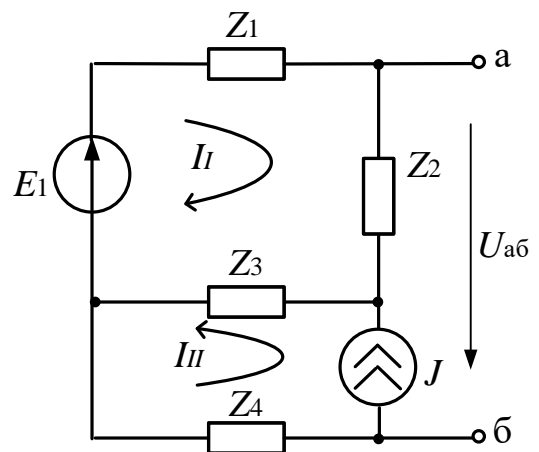


Рис. 12.3



$$\underline{Z}_4 = R_4 + jx_4 = 5 + j10 \text{ Ом.}$$

Розрахунок напруги неробочого ходу  $\dot{U}_{ab}$  зводиться до аналізу кола із використанням комплексних обчислень на рис. 12.3. Для розрахунку струмів у гілках отриманого кола скористаємось методом контурних струмів.

$$\begin{cases} \dot{I}_{II} = \dot{J} \\ \dot{I}_I(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3) + \dot{I}_{II}\underline{Z}_3 = \dot{E}_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{I}_{II} = \dot{J} \\ \dot{I}_I(R_1 + R_2 + R_3 + j(x_1 - x_2)) + \dot{I}_{II}R_3 = \dot{E}_1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \dot{I}_{II} = 2e^{j60^\circ} \\ \dot{I}_I(5 + 10 + 10 + j(5 - 10)) + 2e^{j60^\circ} \cdot 10 = 100e^{-j45^\circ} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{I}_{II} = 2e^{j60^\circ} \\ \dot{I}_I = 3.012 - j2.918 = 4.194e^{-j44.098^\circ} \end{cases}$$

Отже, струми у гілках кола:

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_I = 4.194e^{-j44.098^\circ}, \quad \dot{I}_4 = \dot{I}_{II} = 2e^{j60^\circ}$$

Обійшовши контур від точки а до точки б визначимо напругу неробочого ходу:

$$\begin{aligned} \dot{U}_{ab} &= -\dot{I}_1\underline{Z}_1 + \dot{I}_4\underline{Z}_4 + E_1 = -\dot{I}_1(R_1 + jx_1) + \dot{I}_4(R_4 + jx_4) + E_1 = \\ &= 28.75 - j52.52 = 59.865e^{-j61.314^\circ} \text{ В.} \end{aligned}$$

## 2. Визначення внутрішнього опору еквівалентного генератора.

Для розрахунку опору еквівалентного генератора заміняємо всі джерела енергії кола їх власними внутрішніми опорами (рис. 12.4). Далі розрахуємо комплексний опір кола відносно точок розриву.

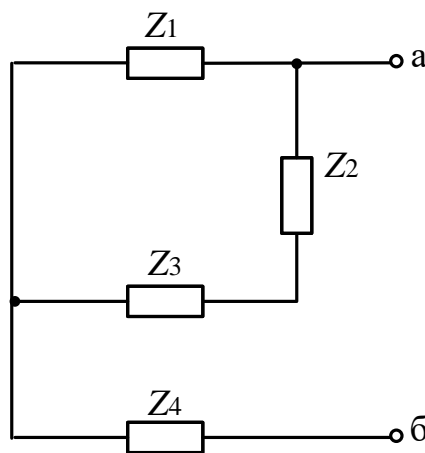


Рис. 12.4

$$\underline{Z}_{a6} = \frac{\underline{Z}_1(\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3)}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} + \underline{Z}_4 = \frac{(R_1 + jx_1)(R_2 + R_3 - jx_2)}{R_1 + R_2 + R_3 + j(x_1 - x_2)} + R_4 + jx_4 =$$

$$= 10.385 + j13.07 = 16.699e^{j51.546^\circ} \text{ Ом.}$$

3. Розрахунок шуканого струму.

Згідно теореми про активний двополюсник задане коло (рис. 12.1) було подане одноконтурною схемою заміщення (рис. 12.2, б) із розрахованими вище параметрами:

$$\dot{E}_{EG} = \dot{U}_{a6} = 59.865e^{-j61.314^\circ} \text{ В;}$$

$$\underline{Z}_{EG} = \underline{Z}_{a6} = 16.699e^{j51.546^\circ} \text{ Ом.}$$

Обчислюємо струм через  $\underline{Z}_5$ .

За законом Ома для замкненого контура шуканий струм знаходимо як

$$\dot{I}_5 = \frac{\dot{E}_{EG}}{\underline{Z}_{EG} + \underline{Z}_5} = 0.336 - j2.709 = 2.73e^{-j82.93^\circ} \text{ А.}$$

Запишемо миттєве значення струму:

$$i_5(t) = 2.73\sin(\omega t - 82.93^\circ) \text{ А.}$$

### Задача 12.2

Як приклад використання методу еквівалентного генератора для аналізу електричного кола при синусоїдальному живленні визначимо, при якому значенні навантажувального опору  $\underline{Z}_H$  у колі на рис. 12.5 на ньому буде виділятися максимальна потужність, і чому вона буде дорівнювати.

Параметри електричного кола:

$$e(t) = 100\sin(\omega t) \text{ В;}$$

$$R = x_L = 10 \text{ Ом.}$$

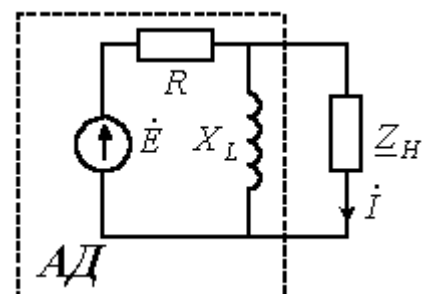


Рис. 12.5

## Розв'язання

Відповідно до теореми про активний двополюсник, частина кола обведена пунктиром на рис. 12.5 замінюється еквівалентним генератором з параметрами:

$$\dot{E}_{\text{ек}} = \frac{\dot{E}}{R + jx_L} jx_L = \frac{100}{10\sqrt{2}e^{j45^\circ}} 10e^{j90^\circ} = \frac{100}{\sqrt{2}} e^{j45^\circ} \text{ В;}$$
$$\underline{Z}_{\text{ек}} = \frac{R \cdot jx_L}{R + jx_L} = \frac{10}{\sqrt{2}} e^{j45^\circ} = 5 + j5 \text{ Ом.}$$

Відповідно до методу еквівалентного генератора для струму через  $\underline{Z}_H$  можна записати

$$\dot{i} = \frac{\dot{E}_{\text{ек}}}{\underline{Z}_{\text{ек}} + \underline{Z}_H} = \frac{\dot{E}_{\text{ек}}}{(R_{\text{ек}} + jx_{\text{ек}}) + (R_H + jx_H)} = \frac{\frac{100}{\sqrt{2}} e^{j45^\circ}}{(5 + R_H) + j(5 + x_H)} \text{ А,}$$

звідки для модуля цього струму маємо

$$I = \frac{E_{\text{ек}}}{\sqrt{(R_{\text{ек}} + R_H)^2 + (x_{\text{ек}} + jx_H)^2}} = \frac{100}{\sqrt{2} \sqrt{(5 + R_H)^2 + (5 + x_H)^2}} \text{ А.}$$

Аналіз отриманого виразу показує, що струм  $I$ , а отже, і потужність будуть максимальні, якщо  $x_{\text{ек}} + x_H = 0$ ; звідки  $x_{\text{ек}} = -5$  Ом, причому знак “-” показує, що навантаження  $\underline{Z}_H$  має ємнісний характер.

Таким чином, якщо для кіл постійного струму максимальний струм та потужність розраховується за формулами

$$I_{\text{max}} = \frac{E_{\text{ек}}}{R_{\text{ек}} + R_H} \text{ та } P_{H\text{max}} = I_{\text{max}}^2 R_H = \frac{E_{\text{ек}}^2 R_H}{(R_{\text{ек}} + R_H)^2}.$$

Дані співвідношення аналогічні відповідним виразам у колі постійного струму, для якої, як відомо, максимальна потужність на навантаженні виділяється в режимі узгодженого навантаження, умова якого  $R_{\text{ек}} = R_H$ .

Таким чином, шукані значення  $\underline{Z}_H$  і максимальної потужності:

$$\underline{Z}_H = 5 - j5 \text{ Ом; } P_{\text{max}} = 250 \text{ Вт.}$$

**Розрахунок кола при послідовному та паралельному з'єднанні двох індуктивно-зв'язаних котушок**

**Задача 13.1**

При розімкненому рубильнику  $P$  показ вольтметра в схемі становить 150 В.

Параметри схеми

$$r_1 = 12 \text{ Ом}$$

$$x_{1L} = 10 \text{ Ом}$$

$$x_{1C} = 26 \text{ Ом}$$

$$r_2 = 4 \text{ Ом}$$

$$x_2 = 20 \text{ Ом}$$

$$r_H = 12 \text{ Ом}$$

$$U = 300 \text{ В}$$

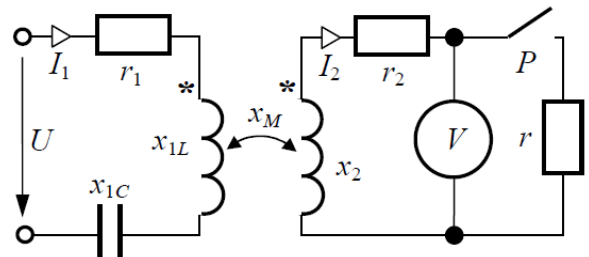


Рис. 13.1

Виконати розрахунок струмів при замкненому рубильнику, побудувати суміщену векторну діаграму.

**Розв'язання**

1. Визначимо опір взаємоіндукції  $x_M$  із умови, що за розімкненого рубильника струм через навантаження ( $r_H$ ) не протікає  $I_{2HX} = 0$  – неробочий хід однофазного трансформатора.

$$\dot{I}_{1HX} = \frac{\dot{U}}{r_1 + j(x_{1L} - x_{1C})} = \frac{300}{12 + j(10 - 26)} = 15e^{j53.13^\circ} \text{ А}$$

$$U_{2HX} = I_{1HX} \cdot x_M = 150 \text{ В} \text{ – показ вольтметра, звідки}$$

$$x_M = \frac{U_{2HX}}{I_{1HX}} = \frac{150}{15} = 10 \text{ Ом} \text{ – модуль опору взаємоіндукції.}$$

Перевіримо співвідношення, що дає фізика явища взаємоіндуктивності

$$x_M \leq \sqrt{x_{1L} \cdot x_2} \Rightarrow 10 \leq \sqrt{10 \cdot 20} \Rightarrow 10 \leq 14,14$$

2. При замкненому рубильнику через навантаження протікає струм, який створює напругу взаємоіндукції на первинній котушці і впливає на струм на вході кола.

За другим законом Кірхгофа маємо

$$\begin{cases} \dot{I}_1(r_1 + j(x_{1L} - x_{1C})) - \dot{I}_2 \cdot jx_M = \dot{U} \\ \dot{I}_2(r_2 + r_H + jx_2) - \dot{I}_1 \cdot jx_M = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{I}_1 Z_1 - \dot{I}_2 Z_M = \dot{U} \\ \dot{I}_2 Z_2 - \dot{I}_1 Z_M = 0 \end{cases}$$

де комплексний опір первинного контуру  $Z_1 = r_1 + j(x_{1L} - x_{1C}) = 12 - j16$  Ом

комплексний опір вторинного контуру  $Z_2 = r_2 + r_H + jx_2 = 16 + j20$  Ом

комплексний опір взаємоіндукції  $Z_M = jx_M = j10$  Ом

Розв'язавши систему відносно невідомих струмів отримаємо

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U} Z_2}{Z_1 Z_2 - Z_M^2} = \frac{300 \cdot (16 + j20)}{(12 - j16)(16 + j20) - (j10)^2} = 7.582 + j10 = 12.55 e^{j52.83^\circ} \text{ А};$$

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{U} Z_M}{Z_1 Z_2 - Z_M^2} = \frac{300 \cdot (j10)}{(12 - j16)(16 + j20) - (j10)^2} = -0.128 + j4.9 = 4.9 e^{j91.5^\circ} \text{ А}.$$

Складемо баланс потужностей за результатами розрахунків

$$\tilde{S}_T = P_T + jQ_T = \dot{U} I_1^* = 300 \cdot (12.55 e^{-j52.83^\circ}) = 2275 - j3000 \text{ ВА}$$

Сумарна активна потужність

$$P_C = I_1^2 r_1 + I_2^2 r_2 + I_2^2 r_H = 12.55^2 \cdot 10 + 4.9^2 \cdot (4 + 12) = 2274 \text{ Вт} \approx P_T = 2275 \text{ Вт}$$

Сумарна реактивна потужність

$$\begin{aligned} Q_C &= I_1^2 (x_{1L} - x_{1C}) + I_2^2 x_2 - 2 \operatorname{Im} \left( \begin{matrix} \dot{I}_2 jx_M \\ U_M \end{matrix} \dot{I}_1^* \right) = \\ &= 12.55^2 \cdot (10 - 26) + 4.9^2 \cdot 20 - 2 \operatorname{Im} \left( 4.9 e^{j91.5^\circ} \cdot 10 e^{j90^\circ} \cdot 12.55 e^{-j52.83^\circ} \right) = \\ &= -3000 \text{ ВАр} = Q_T = -3000 \text{ ВАр} \end{aligned}$$

Відзначимо, що у повітряному трансформаторі відсутній електричний канал передачі енергії із первинної обмотки у вторинну, тому передача активної потужності здійснюється у магнітному полі:

$$P_{1 \rightarrow 2} = -\operatorname{Re} \left( \underset{U_M}{I_2 jx_M I_1^*} \right) = I_2 \cdot (r_2 + r_H)$$

Перевіримо

$$P_1 = \operatorname{Re} \left( \underset{U_M}{\dot{I}_2 jx_M \dot{I}_1^*} \right) = \operatorname{Re} \left( 4.9e^{j91.5^\circ} \cdot 10e^{j90^\circ} \cdot 12.55e^{-j52.83^\circ} \right) = -384.242 \text{ Вт}$$

$$P_2 = \operatorname{Re} \left( \underset{U_M}{\dot{I}_1 jx_M \dot{I}_2^*} \right) = \operatorname{Re} \left( 12.55e^{j52.83^\circ} \cdot 10e^{j90^\circ} \cdot 4.9e^{-j91.5^\circ} \right) = 384.242 \text{ Вт}$$

Показ вольтметра при замкненому рубильнику

$$I_2 r_H = 4.9 \cdot 12 = 58.8 \text{ В.}$$

Для побудови векторної діаграми попередньо проводиться розрахунок падінь напруг на елементах кола:

$$I_1 r_1 = 12.55 \cdot 12 = 150.6 \text{ В,}$$

$$I_1 x_{1C} = 12.55 \cdot 26 = 326.3 \text{ В,}$$

$$I_2 r_2 = 4.9 \cdot 4 = 19.6 \text{ В,}$$

$$I_2 r_H = 4.9 \cdot 12 = 58.8 \text{ В,}$$

$$I_1 x_{1L} = 12.55 \cdot 10 = 125.6 \text{ В,}$$

$$I_2 x_M = 4.9 \cdot 10 = 49 \text{ В,}$$

$$I_2 x_2 = 4.9 \cdot 20 = 98 \text{ В,}$$

$$I_1 x_M = 12.55 \cdot 10 = 125.6 \text{ В.}$$

Побудову векторної діаграми починаємо з побудови векторів  $\dot{I}_1$  та  $\dot{I}_2$  на комплексній площині. Вектори падінь напруг відкладаємо відповідно до другого закону Кірхгофа

$$\dot{I}_1 r_1 + \dot{I}_1 jx_{1L} - \dot{I}_2 \cdot jx_M + \dot{I}_1 (-jx_{1C}) = \dot{U}$$

$$\dot{I}_2 r_H + \dot{I}_2 r_2 + \dot{I}_2 jx_2 - \dot{I}_1 \cdot jx_M = 0$$

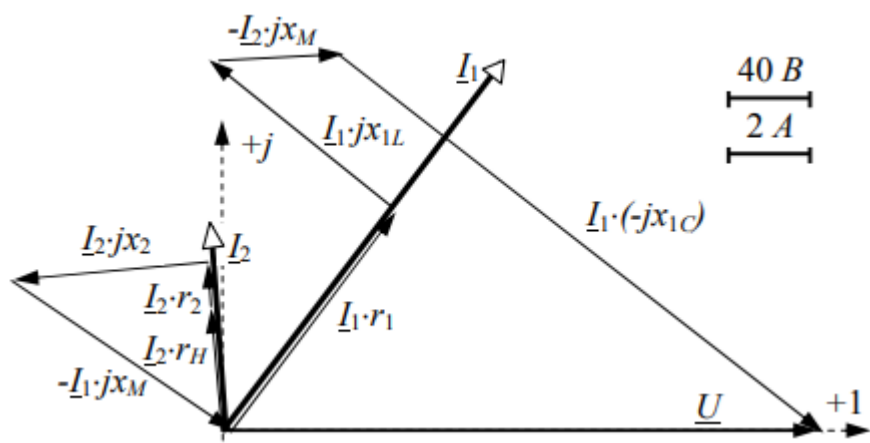


Рис. 13.2

Розрахунок розгалуженого кола з індуктивними зв'язками

Задача 14.1

Розрахувати стан кола з автотрансформатором (рис. 14.1, а), знайти активну потужність, що передається магнітним полем, побудувати суміщену векторну діаграму кола, якщо параметри кола задані

$$x_1 = 40 \text{ Ом}, \quad x_2 = 80 \text{ Ом}, \quad x_M = 50 \text{ Ом}, \quad r_3 = 40 \text{ Ом}, \quad x_3 = 20 \text{ Ом}, \quad E = 220 \text{ В.}$$

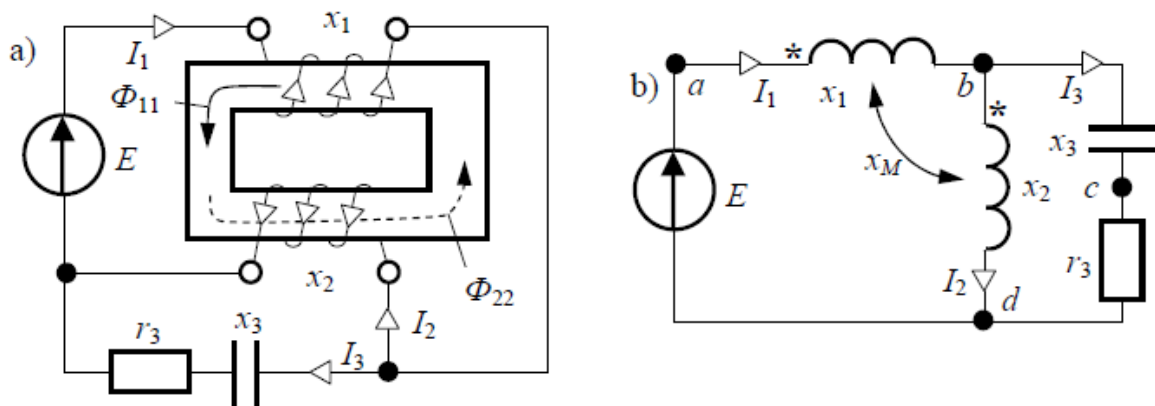


Рис. 14.1

Розв'язання

Після розмітки однополярних затискачів за допомогою потоків  $\Phi_{11}$  та  $\Phi_{22}$  розрахункова схема електричного кола набуває вигляду рис. 14.1, б.

За другим законом Кірхгофа маємо

$$\begin{cases} \dot{I}_1 = \dot{I}_2 + \dot{I}_3 \\ \dot{I}_1 jx_1 + \dot{I}_2 \cdot jx_M + \dot{I}_3 (r_3 - jx_3) = \dot{E} \\ \dot{I}_2 jx_2 + \dot{I}_1 \cdot jx_M - \dot{I}_3 (r_3 - jx_3) = 0 \end{cases}$$

Розв'язок системи дасть нам значення невідомих струмів. Відповідно до цієї системи буде побудовано векторну діаграму кола.

Щоб уникнути розв'язання системи представлених рівнянь, усунемо взаємоіндуктивний зв'язок, отримавши еквівалентну схему заміщення (рис. 14.2).



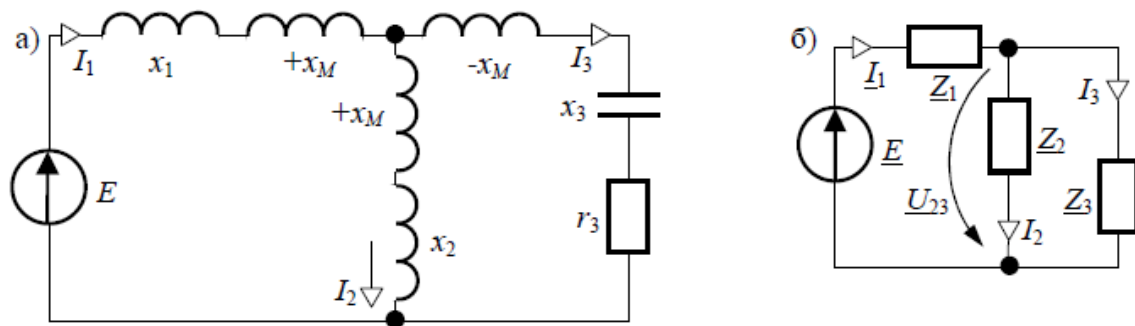


Рис. 14.2

Прийmemo комплексну ЕРС схеми  $\dot{E} = Ee^{j\psi_E} = 220 \text{ В}$ .

Комплексні опори мішано з'єднаних гілок

$$\underline{Z}_1 = jx_1 + jx_M = j40 + j50 = j90 \text{ Ом},$$

$$\underline{Z}_2 = jx_2 + jx_M = j80 + j50 = j130 \text{ Ом},$$

$$\underline{Z}_3 = r_3 - jx_3 - jx_M = 40 - j20 - j50 = 40 - j70 = 80.62e^{-j60.25^\circ} \text{ Ом}.$$

Опір розгалуження

$$\underline{Z}_{23} = \frac{\underline{Z}_2 \underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} = \frac{j130 \cdot (40 - j70)}{j130 + (40 - j70)} = 145.3e^{-j26.56^\circ} \text{ Ом}.$$

Вхідний опір кола

$$\underline{Z}_{\text{вх}} = \underline{Z}_1 + \frac{\underline{Z}_2 \underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} = j90 + \frac{j130 \cdot (40 - j70)}{j130 + (40 - j70)} = 132.4e^{j10.89^\circ} \text{ Ом}.$$

Вхідний струм

$$\dot{i}_1 = \frac{\dot{E}}{\underline{Z}_{\text{вх}}} = \frac{220}{132.4e^{j10.89^\circ}} = 1.662e^{-j10.89^\circ} \text{ А}$$

Напруга на розгалуженні

$$\dot{U}_{23} = \dot{i}_1 \underline{Z}_{23} = 1.662e^{-j10.89^\circ} \cdot 145.3e^{-j26.56^\circ} = 241.5e^{-j37.45^\circ} \text{ В}.$$

Струми паралельних гілок

$$\dot{i}_2 = \frac{\dot{U}_{23}}{\underline{Z}_2} = \frac{241.5e^{-j37.45^\circ}}{j130} = 1.858e^{-j127.45^\circ} \text{ А}$$

$$\dot{i}_3 = \frac{\dot{U}_{23}}{\underline{Z}_3} = \frac{241.5e^{-j37.45^\circ}}{80.62e^{-j60.25^\circ}} = 3.0e^{j22.8^\circ} \text{ А}$$

Щоб переконатись у правильності проведених розрахунків вихідної схеми, складемо баланс потужностей:

- повна потужність генератора

$$\tilde{S}_G = P_G + jQ_G = \dot{E} I_1^* = 220 \cdot (1.662e^{j10.89^\circ})^* = 359 + j69 \text{ ВА}$$

- активна потужність споживачів

$$P_C = I_3^2 r_3 = 3^2 \cdot 40 = 360 \text{ Вт} \approx P_G = 359 \text{ Вт}$$

- реактивна потужність споживачів

$$\begin{aligned} Q_C &= I_1^2 x_1 + I_2^2 x_2 + 2 \operatorname{Im} \left( \dot{I}_1 jx_M I_2^* \right) - I_3^2 x_3 = \\ &= 1.662^2 \cdot 40 + 1.858^2 \cdot 80 + 2 \operatorname{Im} \left( 1.662e^{-j10.89^\circ} \cdot 50e^{j90^\circ} \cdot 1.858e^{j127.45^\circ} \right) - 3^2 \cdot 20 = \\ &= 69 \text{ ВАр} = Q_G = 69 \text{ ВАр} \end{aligned}$$

Оскільки теплові втрати у першій гілці відсутні, то вся активна потужність від джерела надходить у другу гілку:

$$P_{1 \rightarrow 2} = -\operatorname{Re} \left( \dot{I}_2 jx_M I_1^* \right) = I_2 \cdot (r_2 + r_H)$$

Перевіримо

$$P_1 = \operatorname{Re} \left( \dot{I}_2 jx_M I_1^* \right) = \operatorname{Re} \left( 1.858e^{-j127.45^\circ} \cdot 50e^{j90^\circ} \cdot 1.662e^{j10.89^\circ} \right) = 138.1 \text{ Вт}$$

$$P_2 = \operatorname{Re} \left( \dot{I}_1 jx_M I_2^* \right) = \operatorname{Re} \left( 1.662e^{-j10.89^\circ} \cdot 50e^{j90^\circ} \cdot 1.858e^{j127.45^\circ} \right) = -138.1 \text{ Вт}$$

Для побудови векторної діаграми знайдемо падіння напруг на елементах кола:

$$\begin{aligned}
I_1 x_1 &= 1.662 \cdot 40 = 66.5 \text{ В}, \\
I_1 x_M &= 1.662 \cdot 50 = 83.1 \text{ В}, \\
I_2 x_2 &= 1.858 \cdot 80 = 150.6 \text{ В}, \\
I_2 x_M &= 1.858 \cdot 50 = 92.9 \text{ В}, \\
I_3 x_3 &= 3 \cdot 20 = 60 \text{ В}, \\
I_3 r_3 &= 3 \cdot 40 = 120 \text{ В}.
\end{aligned}$$

На комплексній площині будемо вектори струмів відповідно до першого закону Кірхгофа, а потім відкладаємо вектори падінь напруг на елементах кола відповідно до вихідних рівнянь, записаних за другим законом Кірхгофа.

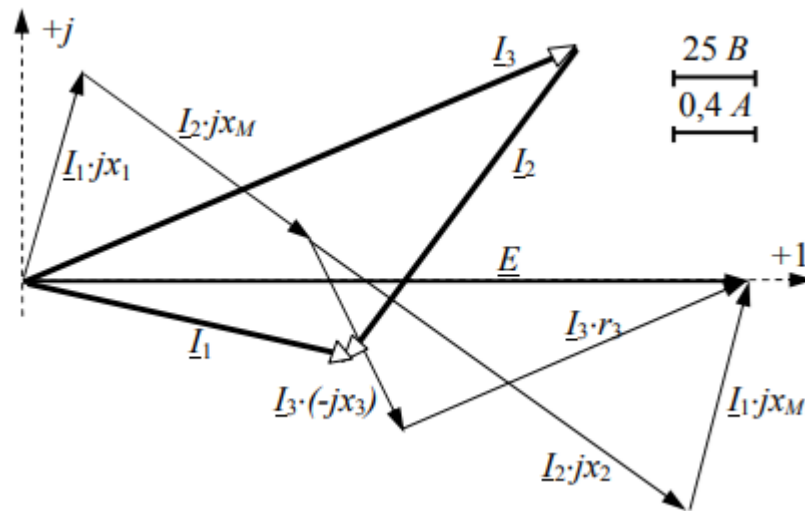


Рис. 14.3

### Задачі для самостійного розв'язання

#### Задача 14.2

У схемі на рис. 14.4 розрахувати струми, визначити активну потужність, що передається магнітним полем, побудувати суміщену векторну діаграму кола. Виконати розрахунок вхідного опору кола за законом Ома і шляхом усунення індуктивних зв'язків, якщо параметри кола задані

$$\begin{aligned}
x_1 = x_C &= 20 \text{ Ом}, \quad x_2 = 10 \text{ Ом}, \quad r = 10 \text{ Ом}, \\
x_{M12} = x_{M23} &= 10 \text{ Ом}, \quad x_{M13} = 5 \text{ Ом}, \quad U = 100 \text{ В}.
\end{aligned}$$

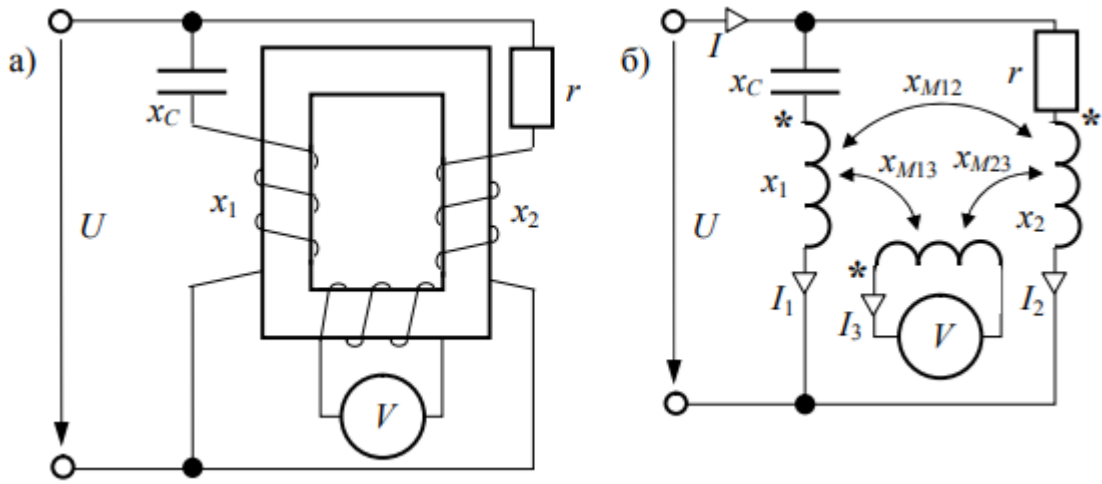


Рис. 14.4

**Розрахунок резонансних станів нерозгалужених та розгалужених електричних кіл**

**Задача 15.1**

У колі на рис. 15.1 має місце резонанс. Визначити показ вольтметра, якщо  $i(t) = 5,63\sin(1000t)$  А;  $L=10$  мГн.

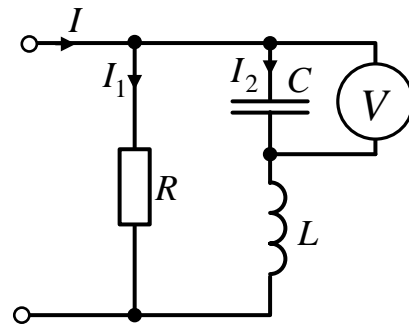


Рис. 15.1

**Розв'язання**

Оскільки у заданому колі конденсатор та котушка індуктивності з'єднані послідовно, то можливий резонанс напруг, який виникає за умови рівності опорів реактивних елементів  $x_L = x_C$ .

Виконаємо розрахунок опору індуктивності:  $x_L = \omega L = 10$  Ом.

Оскільки коло перебуває у стані резонансу, то  $x_C = x_L = 10$  Ом, а отже повний реактивний опір другої гілки  $x_L - x_C = 0$ , яку можна змодельовати на схемі заміщення перемичкою (рис. 15.2)

Аналізуючи схему заміщення заданого кола у режимі резонансу, маємо:

$$i_1(t);$$

$$i_2(t) = i(t) = 5,63\sin(1000t) \text{ А};$$

$$I_2 = \frac{I_{m2}}{\sqrt{2}} = 4 \text{ А};$$

$$U_C = I_2 x_C = 40 \text{ В}.$$

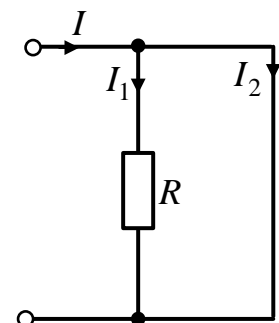


Рис. 15.2

### Задача 15.2

При зміні індуктивного опору кола на рис. 15.3 максимальне значення показу амперметра становить 2 А. При цьому покази решти приладів наступні:

$$U_V = 60 \text{ В}, \quad U_{V_2} = 100 \text{ В}, \quad P_W = 40 \text{ Вт.}$$

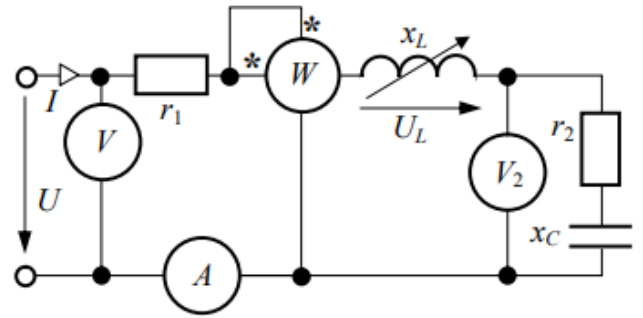


Рис. 15.3

Визначити параметри схеми  $r_1, x_L, r_2, x_C$ . Побудувати векторну діаграму та резонансні криві  $U_L(x_L), U_C(x_L), I(x_L)$  при зміні індуктивного опору в межах від 0 до  $\infty$ .

### Розв'язання

Оскільки задане коло являє собою послідовний коливальний контур, то момент досягнення максимуму струму характеризує резонанс напруг для якого справедливі рівності реактивних опорів послідовного контура та рівності напруг на цих елементах.

Ватметр реєструє активну потужність резистора  $r_2$  при протіканні максимального струму, тому

$$P_W = I_A^2 r_2 \Rightarrow r_2 = \frac{P_W}{I_A^2} = \frac{40}{2^2} = 10 \text{ Ом.}$$

$$\text{Тоді напруга на } r_2 \text{ буде } U_{r_2} = I_A r_2 = 20 \text{ В.}$$

Будуємо векторну діаграму ділянки кола  $r_2 - x_C$  за другим законом Кірхгофа  $\bar{U}_{V_2} = \bar{U}_{r_2} + \bar{U}_C$  та розраховуємо напругу на конденсаторі

$$U_C = \sqrt{U_{V_2}^2 - U_{r_2}^2} = 97,98 \text{ В.}$$

Оскільки коло перебуває у стані резонансу напруг, тоді  $U_C = U_L = 97,98 \text{ В}$ , а опір котушки індуктивності та конденсатора рівні

$$x_L = x_C = \frac{U_L}{I_A} = \frac{U_C}{I_A} \approx 50 \text{ Ом.}$$

Будуємо векторну діаграму кола згідно другого закону Кірхгофа  $\bar{U}_V = \bar{U}_{r1} + \underbrace{\bar{U}_L + \bar{U}_C}_{\bar{U}_L + \bar{U}_C = 0} + \bar{U}_{r2} = \bar{U}_{r1} + \bar{U}_{r2}$  та розраховуємо напругу на  $r_1$ :

$$U_{r1} = U_V - U_{r2} = 60 - 20 = 40 \text{ В.}$$

Знаходимо опір  $r_1$ :

$$r1 = \frac{U_{r1}}{I_A} = 20 \text{ Ом.}$$

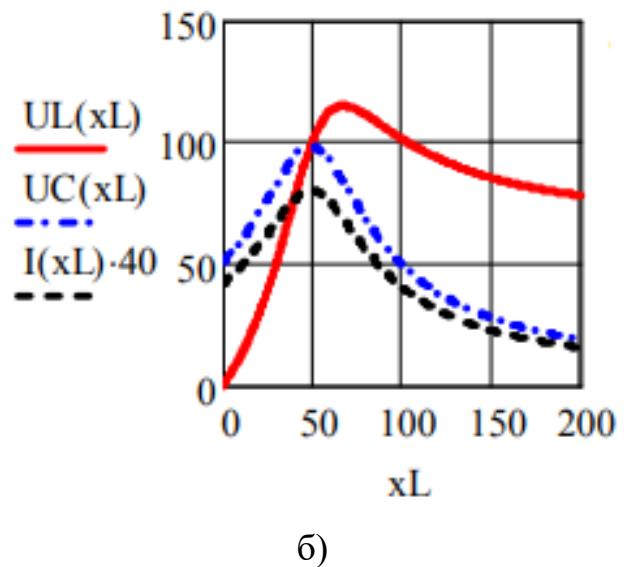
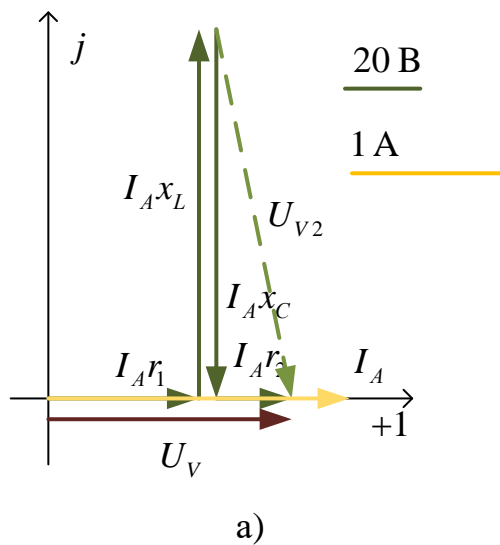


Рис. 15.4

### Задача 15.3

Коло на рис. 15.5 перебуває у стані резонансу. Визначити параметри схеми  $R$ ,  $x_L$ ,  $x_C$ , якщо на частоті  $\omega=0$  вхідний опір кола  $Z_{ex}(0) = 5 \text{ Ом}$ , а на резонансній частоті  $\omega_0$  вхідний опір кола  $Z_{ex}(\omega_0) = 2,5 \text{ Ом}$ .

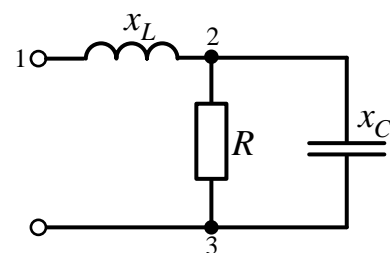


Рис. 15.5

### Розв'язання

Оскільки на частоті  $\omega=0$  опори реактивних елементів  $x_L = \omega L = 0$  та

$x_C = \frac{1}{\omega C} = \infty$ , то задане коло можна подати схемою заміщення на рис. 15.6.

Вхідний опір утвореної схеми

заміщення чисто активний

$$Z_{\text{вх}}(0) = R = 5 \text{ Ом}$$

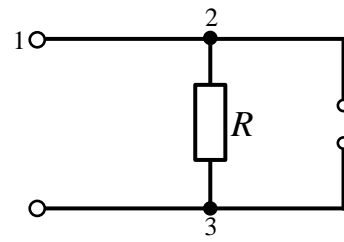


Рис. 15.6

У заданому колі можливий резонанс напруг за умови рівності індуктивного опіру котушки та еквівалентного ємнісного опору паралельної ділянки кола  $x_L = x_{\text{екв}}$ .

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{23} &= \frac{R \cdot (-jx_C)}{R - jx_C} = \frac{R \cdot (-jx_C)}{R - jx_C} \cdot \left( \frac{R + jx_C}{R + jx_C} \right) = \\ &= \frac{R \cdot x_C^2}{R^2 + x_C^2} - j \frac{R^2 \cdot x_C}{R^2 + x_C^2} = R_{\text{екв}} - jx_{\text{екв}} \end{aligned}$$

$$R_{\text{екв}} = \frac{R \cdot x_C^2}{R^2 + x_C^2}$$

$$x_{\text{екв}} = \frac{R^2 \cdot x_C}{R^2 + x_C^2}$$

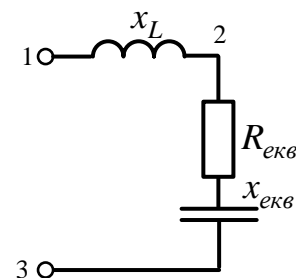


Рис. 15.7

Тоді за умови резонансу повний опір кола можна розрахувати за виразом:

$$Z_{\text{вх}}(\omega_0) = R_{\text{екв}} - jx_{\text{екв}} + jx_L = 2,5 \text{ Ом.}$$

Згідно умови задачі та умови резонансу напруг одержуємо два рівняння:

$$\begin{cases} Z_{\text{вх}}(\omega_0) = R_{\text{екв}} = 2,5 \\ x_{\text{екв}} = x_L \\ R = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{R \cdot x_C^2}{R^2 + x_C^2} = R_{\text{екв}} \\ \frac{R^2 \cdot x_C}{R^2 + x_C^2} = x_L \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{5 \cdot x_C^2}{5^2 + x_C^2} = 2,5 \\ \frac{5^2 \cdot x_C}{5^2 + x_C^2} = x_L \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_C = 5 \text{ Ом,} \\ x_L = 2,5 \text{ Ом.} \end{cases}$$



### Задача 15.4

Коло на рис. 15.8 перебуває у стані резонансу. Визначити параметри елементів схеми  $R, L, C$ , якщо відомі діючі значення струмів  $I_1 = 3$  А,  $I_3 = 4$  А, споживана потужність  $P = 100$  Вт і частота джерела  $f = 50$  Гц.

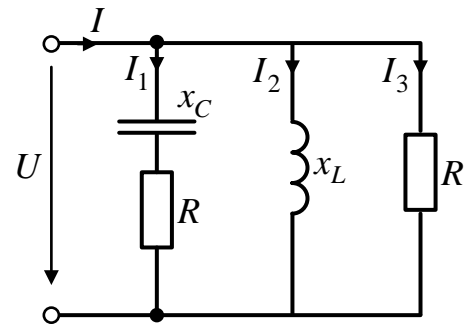


Рис. 15.8

### Розв'язання

Оскільки котушка індуктивності та конденсатор увімкнені паралельно, то у колі можливий резонанс струмів, який виникає за умови рівності реактивних провідностей першої та другої гілок.

Для наочності проведення розрахунків побудуємо діаграму з урахуванням рівності уявних складових струмів у першій та другій гілках, яка має місце за умови резонансу струмів  $I_{1p} = I_{2p}$ .

Оскільки напруга на затискачах кожної з гілок однакова, приймемо початкову фазу вхідної напруги за нуль. Зважаючи на те, що третя гілка містить лише резистор, а напруга та струм на резисторі збігаються за фазою, то вектор струму  $I_3$  буде лежати на горизонтальній осі. Аналогічно друга гілка містить лише котушку індуктивності, а на котушці індуктивності напруга випереджає струм на  $90^\circ$ , тоді вектор струму  $I_2 = I_{2p}$  буде лежати на вертикальній осі, причому  $I_2 = I_{2p} = I_{1p}$  згідно умови резонансу струмів.

З діаграми випливають наступні співвідношення:

$$\begin{aligned} \bar{I}_2 + \bar{I}_{1p} &= 0 \\ \bar{I} &= \bar{I}_1 + \bar{I}_2 + \bar{I}_3 = (\bar{I}_{1a} + \bar{I}_{1p}) + \bar{I}_2 + \bar{I}_3 = \\ &= \bar{I}_{1a} + \bar{I}_3 \end{aligned}$$

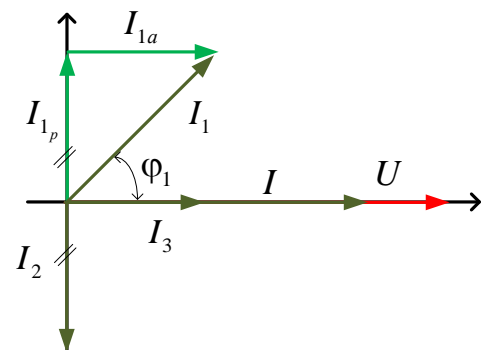


Рис. 15.9

Струм на вході кола визначаємо з виразу для активної потужності:

$$\begin{cases} P = I_1^2 R + I_3^2 R = R(I_1^2 + I_3^2) = \frac{U}{I_3}(I_1^2 + I_3^2) \Rightarrow \frac{U}{I_3}(I_1^2 + I_3^2) = UI \\ P = UI \end{cases}$$

$$\text{Тоді } I = \frac{(I_1^2 + I_3^2)}{I_3} = \frac{(3^2 + 4^2)}{4} = 6,25 \text{ А.}$$

Тоді напруга на вході кола

$$U = \frac{P}{I} = \frac{100}{6,25} = 16 \text{ В.}$$

Оскільки  $\bar{I} = \bar{I}_{1a} + \bar{I}_3$ , активна складова першого струму з векторної діаграми

$$I_{1a} = I - I_3 = 6,25 - 4 = 2,25 \text{ А.}$$

З трикутника векторів першого струму  $\bar{I}_1 = \bar{I}_{1a} + \bar{I}_{1p}$  обчислюємо його реактивну складову

$$I_{1p} = \sqrt{I_1^2 - I_{1a}^2} = 2 \text{ А.}$$

Обчислюємо опори елементів кола за законом Ома:

- опір резистивного елемента

$$R = \frac{U}{I_3} = \frac{16}{4} = 4 \text{ Ом;}$$

- опір індуктивного елемента

$$x_L = \frac{U}{I_2} = \frac{16}{2} = 8 \text{ Ом, звідки індуктивність котушки } L = \frac{x_L}{\omega} = \frac{8}{2\pi \cdot 50} = 25 \text{ мГн;}$$

- повний опір першої гілки

$$Z_1 = \frac{U}{I_1} = \frac{16}{3} = 5,3 \text{ Ом, звідки опір ємнісного елемента}$$

$$x_C = \sqrt{Z_1^2 - R^2} = \sqrt{5,3^2 - 4^2} = 3,5 \text{ Ом та ємність конденсатора}$$

$$C = \frac{1}{\omega x_C} = \frac{1}{2\pi \cdot 50 \cdot 3,5} = 9,4 \cdot 10^{-4} \text{ Ф.}$$

Якісний аналіз частотних характеристик двополюсників

Задача 16.1

Коло на рис. 16.1 перебуває у стані резонансу. Добротність котушки на резонансній частоті  $Q = 4$ . Як зміниться ємніст конденсатора, якщо при збільшенні частоти джерела живлення вдвічі коло знову опиняється у режимі резонансу.

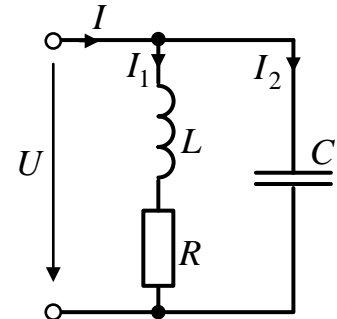


Рис. 16.1

Розв'язання

Оскільки котушка індуктивності та конденсатор увімкнені паралельно, то у колі можливий резонанс струмів, який виникає за умови рівності реактивних провідностей першої та другої гілок  $B_1 = B_2$ .

Умова резонансу струмів на початковій частоті  $\omega_0$  для заданого кола має вигляд

$$B_1' = B_2' \Rightarrow \frac{\omega_0 L}{R^2 + \omega_0^2 L^2} = \omega_0 C'.$$

Згідно умови задачі добротність котушки індуктивності на початковій резонансній частоті  $Q = \frac{\omega_0 L}{R} = 4$ . Виразимо з цієї формули опір резистора

$$R = \frac{\omega_0 L}{4}$$

Підставивши вираз для активного опору в умову резонансу на первинній частоті, виразимо ємність конденсатора  $C'$ :

$$\frac{\omega_0 L}{\left(\frac{\omega_0 L}{4}\right)^2 + \omega_0^2 L^2} = \omega_0 C' \Rightarrow C' = 0,94 \frac{1}{\omega_0^2 L}.$$

Умова резонансу струмів на подвоєній частоті  $2\omega_0$  для заданого кола має вигляд

$$B_1'' = B_2'' \Rightarrow \frac{2\omega_0 L}{R^2 + 4\omega_0^2 L^2} = 2\omega_0 C'.$$

При цьому добротність котушки  $Q'' = \frac{2\omega_0 L}{R} = 8$ , звідки опір резистора

$$R = \frac{2\omega_0 L}{8} = \frac{\omega_0 L}{4}.$$

Виразимо ємність конденсатора  $C''$  за умови резонансу струмів на подвоєній частоті:

$$\frac{2\omega_0 L}{\left(\frac{\omega_0 L}{4}\right)^2 + 4\omega_0^2 L^2} = 2\omega_0 C'' \Rightarrow C'' = 0,246 \frac{1}{\omega_0^2 L}.$$

Встановимо співвідношення між ємностями конденсаторів на двох резонансних частотах:

$$C'' = \frac{0,246}{0,94} C' = 0,262 C'.$$

### Задача 16.2

Побудувати частотну характеристику для реактивного двополюсника, показаного на рис. 16.2, якщо задані опори елементів кола та частота джерела живлення.

$$X_{L1} = 5 \text{ Ом},$$

$$X_{L3} = 6 \text{ Ом},$$

$$X_{C2} = 3 \text{ Ом},$$

$$f = 50 \text{ Гц}.$$

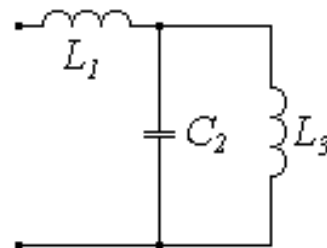


Рис. 16.2

### Розв'язання

Параметри реактивних елементів знаходяться з умови, що відомих індуктивні і ємнісні опори для частоти 50 (Гц).

$$L_1 = \frac{X_{L1}}{\omega} = \frac{X_{L1}}{2\pi f} = \frac{5}{2\pi 50} = 1.59 \cdot 10^{-2} (\Gamma H),$$

$$L_3 = \frac{X_{L3}}{\omega} = \frac{X_{L3}}{2\pi f} = \frac{6}{2\pi 50} = 1.91 \cdot 10^{-2} (\Gamma H),$$

$$C_2 = \frac{1}{X_{C2}\omega} = \frac{1}{X_{C2}2\pi f} = \frac{1}{3 \cdot 2\pi 50} = 1.06 \cdot 10^{-3} (\Phi).$$

По схемі можна визначити, що частотна характеристика почнеться з нуля (є прямий шлях через індуктивності для постійного струму ( $\omega=0$ )), потім буде перша резонансна частота струмів  $\omega_1$  (поліос), за ним друга резонансна частота напруг  $\omega_2$  (нуль). Вхідний опір двополіосника:

$$X(\omega) = \omega L_1 + \frac{\omega L_3 \left(-\frac{1}{\omega C_2}\right)}{\omega L_3 - \frac{1}{\omega C_2}} = \omega L_1 - \frac{\omega L_3}{\omega^2 L_3 C_2 - 1} =$$

$$\frac{\omega^3 L_1 L_3 C_2 - \omega L_1 - \omega L_3}{\omega^2 L_3 C_2 - 1} = \frac{\omega(\omega^2 L_1 L_3 C_2 - (L_1 + L_3))}{\omega^2 L_3 C_2 - 1} = \frac{H(\omega)}{F(\omega)}.$$

Визначення нулів та поліосів функції  $X(\omega)$ :

$$H(\omega) = 0; \quad \omega(\omega^2 L_1 L_3 C_2 - (L_1 + L_3)) = 0; \quad \text{звідки: } \omega_0 = 0,$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{L_1 + L_3}{L_1 L_3 C_2}} = \sqrt{\frac{(1.59 + 1.91) \cdot 10^{-2}}{1.59 \cdot 1.91 \cdot 1.06 \cdot 10^{-7}}} = \sqrt{108.725 \cdot 10^3} = 329.73 (c^{-1})$$

$$F(\omega) = 0; \quad \omega^2 L_3 C_2 - 1 = 0; \quad \text{звідки:}$$

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{L_3 C_2}} = \frac{1}{\sqrt{1.91 \cdot 1.06 \cdot 10^{-5}}} = \frac{1}{4.5 \cdot 10^{-3}} = 222.24 (c^{-1}).$$

Підставляючи значення частоти  $\omega$  від 0 до 400 ( $c^{-1}$ ) у рівняння вхідного опору будемо частотну характеристику реактивного двополіосника показану на рис 16.3.

$$X(\omega) = \frac{\omega(\omega^2 L_1 L_3 C_2 - (L_1 + L_3))}{\omega^2 L_3 C_2 - 1} = \frac{(\omega^3 L_1 L_3 C_2 - \omega(L_1 + L_3))}{\omega^2 L_3 C_2 - 1} =$$

$$= \frac{(\omega^3 1.59 \cdot 1.91 \cdot 1.06 \cdot 10^{-7} + \omega(1.59 + 1.91) \cdot 10^{-2}}{\omega^2 1.91 \cdot 1.06 \cdot 10^{-5} - 1}.$$

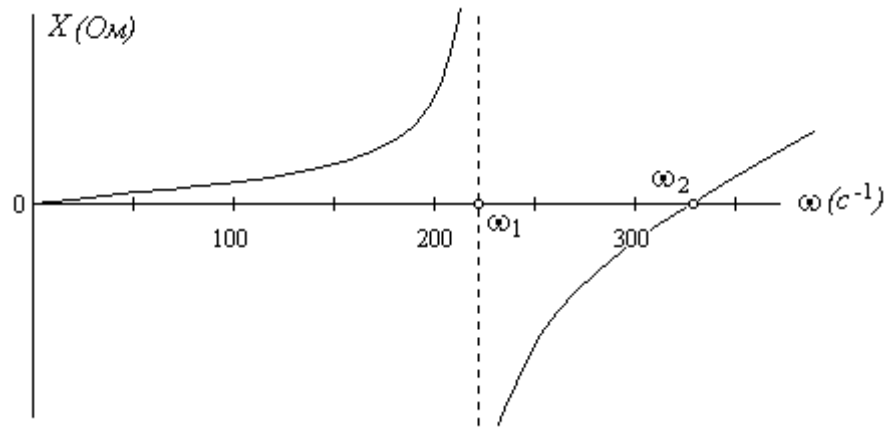


Рис. 16.3

Аналогічно розраховується частотна характеристика для більш складних схем, при цьому степінь рівнянь у чисельнику та знаменнику відповідно збільшується з кількістю елементів у вітках схеми.

### Задача 16.3

У колі на рис.16.4 задані параметри кола

$$R = 2 \text{ Ом}, L = 4 \text{ мГн}, L_1 = 2 \text{ мГн}, C = 250 \text{ мкФ}.$$

Визначити резонансні частоти, побудувати частотні характеристики ділянок 1-2, 2-3 та вхідного реактивного опору  $x_{ex}$ .

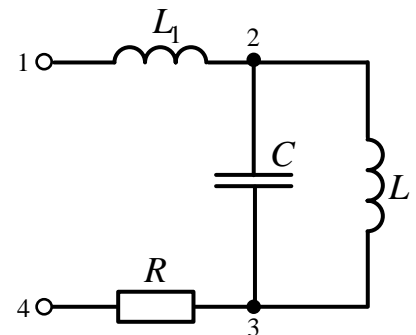


Рис. 16.4

### Розв'язання

Аналіз заданого кола показує, що на ділянці 2-3 можливий резонанс напруг за умови

$$b_L = b_C \Rightarrow b_{23} = b_L - b_C = 0.$$

Отже, у разі резонансу струмів вхідний опір кола

$$x_{23} = \frac{1}{b_{23}} = \infty \Rightarrow x_{ex} = x_{L1} + x_{23} = \infty$$

За умови рівності реактивних опорів ділянок 1-2 та 2-3 ( $x_{L1} = x_{23}$ ) можливий резонанс напруг, тоді вхідний опір кола

$$x_{\text{ex}} = x_{L1} - x_{23} = 0.$$

Таким чином, у заданому колі можливо два резонансних стани: резонанс напруг на частоті  $\omega_1$  та резонанс напруг на частоті  $\omega_2$ . По схемі можна визначити, що частотна характеристика почнеться з нуля (є прямий шлях через індуктивності для постійного струму ( $\omega=0$ )), потім буде перша резонансна частота струмів  $\omega_1$  (полнос), за ним друга резонансна частота напруг  $\omega_2$  (нуль).

Вхідний опір двополюсника:

$$x_{\text{ex}}(\omega) = \omega L_1 + \frac{\omega L \left(-\frac{1}{\omega C}\right)}{\omega L - \frac{1}{\omega C}} = \omega L_1 - \frac{\omega L}{\omega^2 LC - 1} =$$

$$\frac{\omega^3 L_1 LC - \omega L_1 - \omega L}{\omega^2 LC - 1} = \frac{\omega(\omega^2 L_1 LC - (L_1 + L))}{\omega^2 LC - 1} = \frac{H(\omega)}{F(\omega)}.$$

Визначення нулів та полюсів функції  $x_{\text{ex}}(\omega)$ .

Вхідний опір буде рівним нескінченності  $x_{\text{ex}}(\omega) = \infty$ , якщо знаменник виразу вхідного опору рівний нулю.

$$F(\omega) = 0; \quad \omega^2 L_3 C_2 - 1 = 0; \quad \text{звідки:}$$

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{L_3 C_2}} = \frac{1}{\sqrt{4 \cdot 10^{-3} \cdot 250 \cdot 10^{-6}}} = \frac{1}{10^{-3}} = 1000 \text{ (с}^{-1}\text{)}.$$

Вхідний опір буде рівним нулю  $x_{\text{ex}}(\omega) = 0$ , якщо чисельник виразу вхідного опору рівний нулю.

$$H(\omega) = 0; \quad \omega(\omega^2 L_1 L_3 C_2 - (L_1 + L_3)) = 0; \quad \text{звідки: } \omega_0 = 0,$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{L_1 + L_3}{L_1 L_3 C_2}} = \sqrt{\frac{(2 + 4) \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 4 \cdot 25 \cdot 10^{-1}}} = 1730 \text{ (с}^{-1}\text{)}.$$

Підставляючи значення частоти  $\omega$  від 0 до 2000 ( $\text{с}^{-1}$ ) у рівняння вхідного опору будемо частотну характеристику реактивного двополюсника показану на рис 16.5.

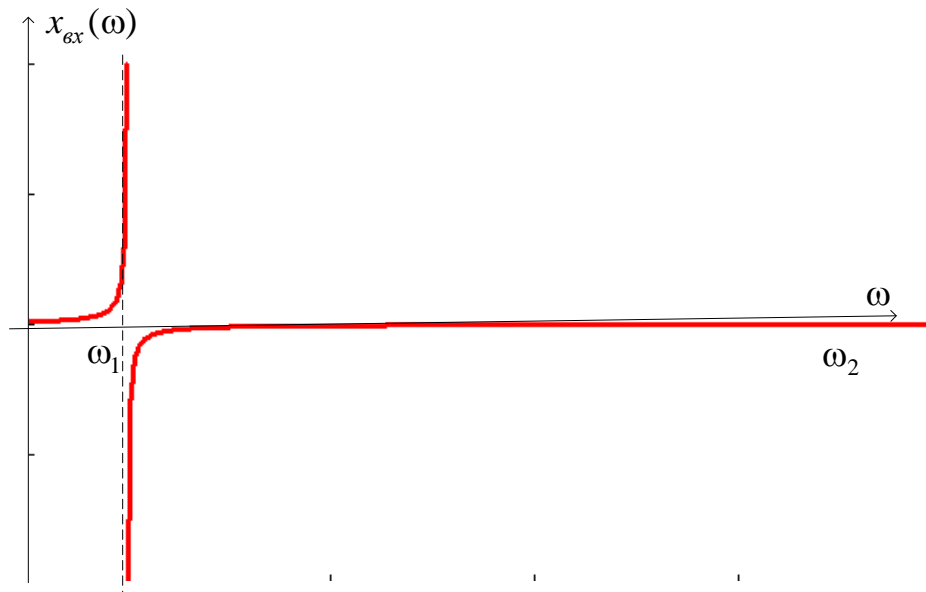


Рис 16.5

### Задачі для самостійного розв'язання

#### Задача 16.4

Як зміниться резонансна частота контуру, якщо відомі добротність контура  $Q=2$ , індуктивність котушки  $L=0.1\text{мГн}$  та ємність конденсатора  $C=0.01\text{мкФ}$ .

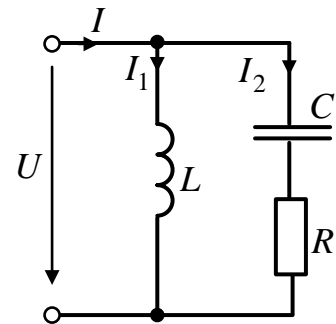


Рис. 16.1



Основи теорії пасивних чотириполіусників

Задача 17.1

Для заданого чотириполіусника (рис. 17.1) з

відомими параметрами  $X_L = 10 \text{ Ом}$ ;

$X_C = 20 \text{ Ом}$  виконати розрахунок первинних та

вторинних параметрів чотириполіусника

$\underline{A}_{11}$ ,  $\underline{A}_{12}$ ,  $\underline{A}_{21}$ ,  $\underline{A}_{22}$ ,  $\underline{Z}_C$ ,  $\underline{\Gamma}$  та параметрів для П- та

Т-подібної схем заміщень чотириполіусника

за умови  $\underline{A}_{11} = \underline{A}_{22}$ .

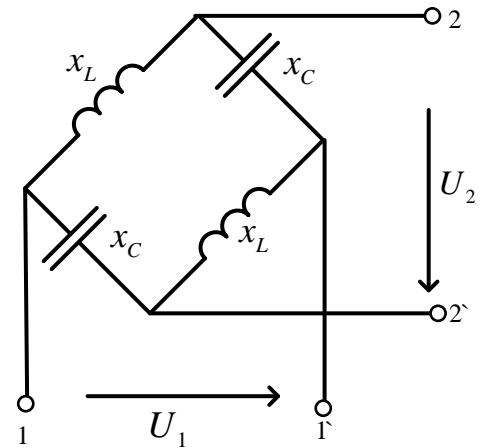


Рис. 17.1

Розв'язання

Виконаємо розрахунок коефіцієнтів чотириполіусника за його опорами неробочого ходу та короткого замикання.

$$\underline{Z}_{HX} = \frac{1}{2}(jX_L - jX_C) = \frac{1}{2}(j10 - j20) = -j5 \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_{K3} = 2 \frac{jX_L(-jX_C)}{jX_L - jX_C} = 2 \frac{j10(-j20)}{j10 - j20} = j40 \text{ Ом};$$

$$\underline{A}_{11} = \underline{A}_{22} = \sqrt{\underline{Z}_X / (\underline{Z}_X - \underline{Z}_K)} = \sqrt{-j5 / (-j5 - j40)} = 0,333;$$

$$\underline{A}_{12} = \underline{A}_{11}\underline{Z}_K = 0,333 \times j40 = j13,33 \text{ Ом}; \quad \underline{A}_{21} = \frac{\underline{A}_{11}}{\underline{Z}_X} = \frac{0,333}{-j5} = j6,67 \times 10^{-2} \text{ Ом};$$

Виконаємо перевірку:

$$\underline{A}_{11}^2 - \underline{A}_{12}\underline{A}_{21} = 1; \quad 0,333^2 - j13,33 \times j6,67 \times 10^{-2} = 1; \quad 1 \approx 1.$$

Розраховуємо вторинні параметри чотириполіусника:

$$\underline{Z}_C = \sqrt{\frac{\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21}}} = \sqrt{\frac{j13,33}{j6,67 \times 10^{-2}}} = 10\sqrt{2} = 14,14 \text{ Ом};$$

$$\underline{\Gamma} = \ln\left(\underline{A}_{11} + \sqrt{\underline{A}_{12}\underline{A}_{21}}\right) = \ln\left(0,333 + \sqrt{j13,33 j6,67 \times 10^{-2}}\right) = \ln(0,333 + j0,943) =$$

$$= \ln(1 \angle 70,5^\circ) = \ln(1 \angle 1,231) = j1,231$$

$$A = 0; \quad B = 1,231 \text{ рад}$$

$$\underline{Z}_C = \sqrt{\underline{Z}_X \underline{Z}_K} = \sqrt{(-j5) j40} = 10\sqrt{2} = 14,14 \text{ Ом};$$

$$th\underline{\Gamma} = \sqrt{\underline{Z}_K / \underline{Z}_X} = \sqrt{j40 / (-j5)} = j2,83$$

$$\underline{\Gamma} = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1 + th\underline{\Gamma}}{1 - th\underline{\Gamma}}\right) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1 + j2,83}{1 - j2,83}\right) = \frac{1}{2} \ln(3 \angle 70,5^\circ / \angle -70,5^\circ) = \frac{1}{2} \ln(1 \angle 141,1^\circ) =$$

$$= \frac{1}{2} \ln(1 \angle 2,46) = j1,231$$

Виконаємо розрахунок параметрів для П- та Т-подібної схем заміщень чотириполюсника

$$\boxed{T} \quad \underline{Y}_0 = \underline{A}_{21} = j6,67 \times 10^{-2} \quad \text{См};$$

$$\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = (\underline{A}_{11} - 1) / \underline{A}_{21} = (0,333 - 1) / j6,67 \times 10^{-2} = j10 \quad \text{Ом};$$

$$\boxed{II} \quad \underline{Z}_0 = \underline{A}_{12} = j13,33 \text{ Ом};$$

$$\underline{Y}_1 = \underline{Y}_2 = (\underline{A}_{11} - 1) / \underline{A}_{12} = (0,333 - 1) / j13,33 = j0,05 \text{ См};$$

## Задача 17.2

Виконати розрахунок первинних та вторинних параметрів чотириполюсника за відомими даними досліджень неробочого ходу та короткого замикання:

$$U_1 = 220 \text{ В},$$

$$I_{1x} = 2,56 \text{ А}, I_{1кз} = 4,15 \text{ А}, I_{2x} = 1,720 \text{ А}, I_{2кз} = 2,78 \text{ А},$$

$$\varphi_{1нх} = -42^\circ, \varphi_{1кз} = 10^\circ, \varphi_{2нх} = -34^\circ, \varphi_{2кз} = 18^\circ$$

$$\underline{A}_{11} - ? \quad \underline{A}_{12} - ? \quad \underline{A}_{21} - ? \quad \underline{A}_{22} - ?$$

$$\underline{\Gamma} - ? \quad \underline{Z}_{C1} - ? \quad \underline{Z}_{C2} - ?$$

Розрахувати параметрів для П- та Т-подібної схем заміщень чотириполюсника.

## Розв'язання

Запишемо вирази для вхідних опорів у режимах неробочого ходу та короткого замикання:

$$\underline{Z}_{1\text{HX}} = \frac{\dot{U}_{1\text{HX}}}{\dot{I}_{1\text{HX}}} = \left( \frac{U_{1\text{HX}}}{I_{1\text{HX}}} \right) \angle \varphi_{1\text{HX}} = \left( \frac{220}{2,56} \right) \angle -42^\circ = 85,9 \angle -42^\circ \text{ Ом} = \frac{\underline{A}_{11}}{\underline{A}_{21}}$$

$$\underline{Z}_{1\text{КЗ}} = \frac{\dot{U}_{1\text{КЗ}}}{\dot{I}_{1\text{КЗ}}} = \left( \frac{U_{1\text{КЗ}}}{I_{1\text{КЗ}}} \right) \angle \varphi_{1\text{К}} = \left( \frac{220}{4,15} \right) \angle 10^\circ = 53,0 \angle 10^\circ \text{ Ом} = \frac{\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{22}}$$

$$\underline{Z}_{2\text{HX}} = \frac{\dot{U}_{2\text{HX}}}{\dot{I}_{2\text{HX}}} = \left( \frac{U_{2\text{HX}}}{I_{2\text{HX}}} \right) \angle \varphi_{2\text{HX}} = \left( \frac{220}{1,72} \right) \angle -34^\circ = 127,9 \angle -34^\circ \text{ Ом} = \frac{\underline{A}_{22}}{\underline{A}_{21}}$$

$$\underline{Z}_{2\text{КЗ}} = \frac{U_{2\text{КЗ}}}{I_{2\text{КЗ}}} = \left( \frac{U_{2\text{КЗ}}}{I_{2\text{КЗ}}} \right) \angle \varphi_{2\text{КЗ}} = \left( \frac{220}{2,78} \right) \angle 18^\circ = 79,1 \angle 18^\circ \text{ Ом} = \frac{\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{11}}$$

Зробимо перевірку правильності проведення розрахунків:

$$\frac{\underline{Z}_{1\text{HX}}}{\underline{Z}_{1\text{КЗ}}} = \frac{\underline{Z}_{2\text{HX}}}{\underline{Z}_{2\text{КЗ}}}, \quad 85,9 \angle -42^\circ / 53,0 \angle 10^\circ = 127,9 \angle -34^\circ / 79,1 \angle 18^\circ$$

$$1,621 \angle -52^\circ \approx 1,617 \angle -52^\circ$$

Виконаємо розрахунок первинних параметрів чотириполюсника:

$$\underline{A}_{11} = \sqrt{\underline{Z}_{1\text{HX}} / (\underline{Z}_{2\text{HX}} - \underline{Z}_{2\text{КЗ}})} = \sqrt{85,9 \angle -42^\circ / (106 - j71,5 - 75,2 - j24,4)} =$$

$$= \sqrt{85,9 \angle -42^\circ / 100,8 \angle -72,2^\circ} = 0,923 \angle 15,1^\circ = 0,891 + j0,241$$

$$\underline{A}_{12} = \underline{A}_{11} \underline{Z}_{2\text{КЗ}} = 0,923 \angle 15,1^\circ \times 79,1 \angle 18^\circ = 73,0 \angle 33,1^\circ = 61,2 + j39,9 \text{ Ом}$$

$$\underline{A}_{21} = \underline{A}_{11} / \underline{Z}_{1\text{HX}} = 0,923 \angle 15,1^\circ / 85,9 \angle -42^\circ = 1,075 \times 10^{-2} \angle 57,1^\circ =$$

$$= (5,84 + j9,02) 10^{-3} \angle 57,1^\circ \text{ Ом}$$

$$\underline{A}_{22} = \underline{A}_{11} \underline{Z}_{2\text{HX}} / \underline{Z}_{1\text{HX}} = 0,923 \angle 15,1^\circ \times 127,9 \angle -34^\circ / 85,9 \angle -42^\circ =$$

$$= 1,375 \angle 23,1^\circ = 1,265 + 0,539 \text{ Ом}$$

Перевірка:

$$\underline{A}_{11} \underline{A}_{22} - \underline{A}_{12} \underline{A}_{21} = 1$$

$$0,923 \angle 15,1^\circ \times 1,375 \angle 23,1^\circ - 73,0 \angle 33,1^\circ \times 1,075 \times 10^{-2} \angle 57,1^\circ = 1$$

$$1,296 \angle 38,2^\circ - 0,785 \angle 90,2^\circ = 1; \quad 0,997 + j0,785 + 0,00274 - j0,785 = 1; \quad \underline{1} \approx 1$$

Виконаємо розрахунок вторинних параметрів чотириполюсника:

$$\underline{Z}_{1C} = \sqrt{\underline{Z}_{1HX} \underline{Z}_{1K3}} = \sqrt{85,9 \angle -42^\circ \times 53 \angle 10^\circ} = 67,5 \angle -16^\circ \text{ Ом}$$

$$\underline{Z}_{1C} = \sqrt{\frac{\underline{A}_{11} \underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21} \underline{A}_{22}}} = \sqrt{\frac{73,0 \angle 33,1^\circ \times 73,0 \angle 33,1^\circ}{1,075 \times 10^{-2} \angle 57,1^\circ \times 1,375 \angle 23,1^\circ}} = 67,5 \angle -16^\circ \text{ Ом}$$

та

$$\underline{Z}_{2C} = \sqrt{\underline{Z}_{2HX} \underline{Z}_{2K3}} = \sqrt{127,9 \angle -34^\circ \times 79,1 \angle 18^\circ} = 100,6 \angle -8^\circ$$

$$\underline{Z}_{2C} = \sqrt{\frac{\underline{A}_{22} \underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21} \underline{A}_{11}}} = \sqrt{\frac{1,375 \angle 23,1^\circ \times 73,0 \angle 33,1^\circ}{1,075 \times 10^{-2} \angle 57,1^\circ \times 73,0 \angle 33,1^\circ}} = 100,6 \angle -8^\circ \text{ Ом}$$

$$\underline{\Gamma} = \ln \left( \sqrt{\underline{A}_{11} \underline{A}_{22}} + \sqrt{\underline{A}_{12} \underline{A}_{21}} \right) = \ln \left( \frac{\sqrt{73,0 \angle 33,1^\circ \times 1,375 \angle 23,1^\circ} + \sqrt{73,0 \angle 33,1^\circ \times 1,075 \times 10^{-2} \angle 57,1^\circ}}{1} \right) =$$

$$= \ln(1,064 + j0,369 + 0,625 + j0,628) = \ln(1,961 \angle 30,6^\circ) = 0,673 + j0,533$$

Або

$$th \underline{\Gamma} = \sqrt{\underline{Z}_{1K3} / \underline{Z}_{1HX}} = \sqrt{53,0 \angle 10^\circ / 85,9 \angle -42^\circ} = 0,785 \angle 26^\circ = 0,709 + j0,344$$

$$\underline{\Gamma} = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + th \underline{\Gamma}}{1 - th \underline{\Gamma}} = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + 0,709 + j0,344}{1 - 0,709 + j0,344} = \frac{1}{2} \ln(3,85 \angle 60,9^\circ) = 0,674 + j0,531$$

Виконаємо розрахунок параметрів для П- та Т-подібної схем заміщень чотириполюсника

$$\boxed{T} \underline{Y}_0 = \underline{A}_{21} = 1,075 \times 10^{-2} \angle 57,1^\circ = (5,84 + j9,02) 10^{-3} \angle 57,1^\circ \text{ Ом (GC)}$$

$$\underline{Z}_1 = (\underline{A}_{11} - 1) / \underline{A}_{21} = (0,891 + j0,241 - 1) / 1,075 \times 10^{-2} \angle 57,1^\circ =$$

$$= 0,265 \angle 114,3^\circ / 1,075 \times 10^{-2} \angle 57,1^\circ = 24,6 \angle 57,2^\circ = 13,33 + j20,7 \text{ Ом (RL)}$$

$$\underline{Z}_2 = (\underline{A}_{22} - 1) / \underline{A}_{21} = (1,375 \angle 23,1^\circ - 1) / 1,075 \times 10^{-2} \angle 57,1^\circ =$$

$$= 0,265 \angle 114,3^\circ / 1,075 \times 10^{-2} \angle 57,1^\circ =$$

$$= 24,6 \angle 57,2^\circ = 13,33 + j20,7 \text{ Ом (RL)}$$

$$\boxed{\Pi} \underline{Z}_0 = \underline{A}_{12} = 73,0 \angle 33,1^\circ = 61,2 + j39,9 \text{ Ом (RL)}$$

$$\underline{Y}_1 = (\underline{A}_{22} - 1) / \underline{A}_{12} = 0,601 \angle 63,9^\circ / 73,0 \angle 33,1^\circ = 8,23 \times 10^{-3} \angle 30,8^\circ \text{ Ом (GC)}$$

$$\underline{Y}_2 = (\underline{A}_{11} - 1) / \underline{A}_{12} = 0,265 \angle 114,3^\circ / 73,0 \angle 33,1^\circ = 3,63 \times 10^{-3} \angle 81,2^\circ \text{ Ом (GC)}$$

### Задача 17.3

$$R_1 = R_2 = 2 \text{ Ом} \quad X_1 = X_2 = 4 \text{ Ом}$$

$$X_3 = X_5 = 10 \text{ Ом} \quad X_4 = X_6 = 5 \text{ Ом}$$

---


$$\underline{A}_{11} - ? \quad \underline{A}_{12} - ? \quad \underline{A}_{21} - ? \quad \underline{A}_{22} - ?$$

$$\underline{Z}_C - ? \quad \underline{\Gamma} - ?$$

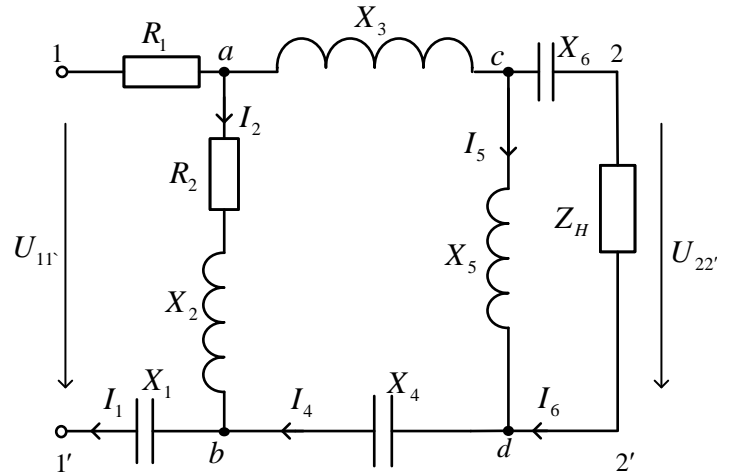


Рис. 17.2

### Розв'язання

1. Режим неробочого ходу з боку вторинних затискачі  $\underline{Z}_H \rightarrow \infty$ ,  $I_6 = 0$

Прийmemo  $\dot{U}_{22'x} = \dot{U}_{cdx} = 1 \text{ В}$

$$\dot{I}_{5x} = \dot{I}_{4x} = \dot{U}_{cdx} / jX_5 = 1 / 10j = -j0,1 \text{ А}$$

$$\dot{U}_{abx} = \dot{I}_{3x} (jX_3 - jX_4) + \dot{U}_{cdx} = -j0,1(j10 - j5) + 1 = 1,5 \text{ В}$$

$$\dot{I}_{2x} = \dot{U}_{abx} / (R_2 + jX_2) = 1,5 / (2 + j4) = 0,15 - j0,3 = 0,335 \angle -63,4^\circ \text{ А}$$

$$\dot{I}_{1x} = \dot{I}_{2x} + \dot{I}_{3x} = 0,15 - j0,3 - j0,1 = 0,15 - j0,4 = 0,427 \angle -69,4^\circ \text{ А}$$

$$\dot{U}_{11'x} = \dot{I}_{1x} (R_1 - jX_1) + \dot{U}_{abx} = (0,15 - j0,4)(2 - j4) + 1,5 = 0,2 - j1,4 = 1,414 \angle -81,9^\circ \text{ В}$$

$$\underline{A}_{11} = \dot{U}_{11'x} / \dot{U}_{22'x} = 0,2 - j1,4 \text{ Ом}$$

$$\underline{A}_{21} = \dot{I}_{1x} / \dot{U}_{22'x} = 0,427 \angle -69,4^\circ = 0,2 - j1,4 \text{ Ом}$$

2. Режим короткого замикання з боку вторинних затискачів

$$\underline{Z}_H = 0, \quad \dot{U}_{22'x} = 0$$

Прийmemo  $\dot{I}_{6k} = I_{6k} = 1 \text{ А}$

$$\dot{U}_{cdk} = \dot{I}_{6k} (-jX_6) = 1(-j5) = -j5 \text{ В}, \quad \dot{I}_{5k} = \dot{U}_{cdk} / jX_5 = -j5 / j10 = -0,5 \text{ В}$$

$$\dot{I}_{3k} = \dot{I}_{5k} + \dot{I}_{6k} = -0,5 + 1 = 0,5 \text{ A}, \quad \dot{U}_{abk} = \dot{I}_{3k} (jX_3 - jX_4) + \dot{U}_{cdk} = 0,5(j10 - j5) - j5 = -j2,5 \text{ B}$$

$$\dot{I}_{2k} = \dot{U}_{abk} / (R_2 + jX_2) = -j2,5 / (2 + j4) = -0,5 - j0,25 = 0,559 \angle -153,4^\circ \text{ A}$$

$$\dot{I}_{1k} = \dot{I}_{2k} + \dot{I}_{3k} = -0,5 - j0,25 + 0,5 = -j0,25 \text{ A}$$

$$\dot{U}_{11'x} = \dot{I}_{1k} (R_1 - jX_1) + \dot{U}_{abk} = -j0,25(2 - j4) - j2,5 = -1 - j3 = 3,16 \angle -108,4^\circ \text{ B}$$

$$\underline{A}_{12} = \dot{U}_{11'x} / \dot{I}_{6k} = 3,16 \angle -108,4^\circ = -1 - 3j \text{ Ом}$$

$$\underline{A}_{22} = \frac{\dot{I}_{1k3}}{\dot{I}_{6k3}} = -0,25$$

3. Перевірка правильності виконаних розрахунків:

$$\underline{A}_{11}\underline{A}_{22} - \underline{A}_{12}\underline{A}_{21} = 1, \quad (0,2 - j1,4)(-j0,25) - (-1 - j3)(0,15 - j0,4) = 1, \quad \underline{1} = \underline{1}$$

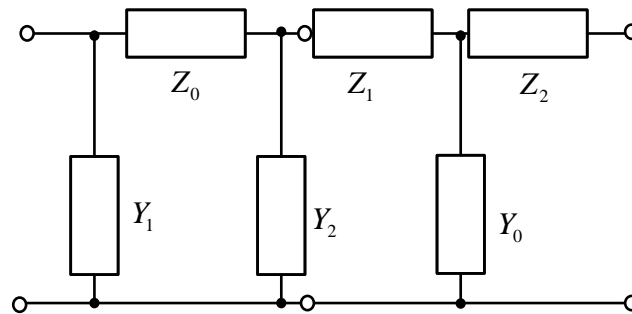


Рис. 17.3

4. Розрахунок параметрів П- та Т-подібних схем заміщень

$$\boxed{\text{II}} \quad \underline{Y}_1 = 0 \quad \underline{Y}_2 = 1 / (R_2 + jX_2) = 1 / (2 + j4) = 0,1 - j0,2 = 0,224 \angle -63,4^\circ \text{ См}$$

$$\underline{Z}_0 = R_1 - jX_1 = 2 - j4 = 4,47 \angle -63,4^\circ \text{ Ом}$$

$$\underline{A}_{11}' = 1 + \underline{Y}_2 \underline{Z}_0 = 1 + (0,1 - j0,2)(2 - j4) = 0,4 - j0,8;$$

$$\underline{A}_{22}' = 1 + \underline{Y}_1 \underline{Z}_0 = 1$$

$$\underline{A}_{12}' = \underline{Z}_0 = 2 - j4 \text{ Ом}; \quad \underline{A}_{21}' = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_1 \underline{Y}_2 \underline{Z}_0 = 0,1 - j0,2$$

$$\textcircled{\Pi} \quad \underline{A}_{11}' \underline{A}_{22}' - \underline{A}_{12}' \underline{A}_{21}' = 1; \quad (0,4 - j0,8) \times 1 - (2 - j4)(0,1 - j0,2); \quad 1 = 1$$

$\boxed{T}$

$$\underline{Z}_1 = jX_3 - jX_4 = j10 - j5 = j5 \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_2 = -jX_6 = -j5 \text{ Ом};$$

$$\underline{Y}_0 = \frac{1}{jX_5} = \frac{1}{j10} = -j0,1 \text{ См}$$

$$\underline{A}_{11}'' = 1 + \underline{Z}_1 \underline{Y}_0 = 1 + j5(-j0,1) = 1,5;$$

$$\underline{A}_{22}'' = 1 + \underline{Z}_2 \underline{Y}_0 = 1 + (-j5)(-j1) = 0,5;$$

$$\underline{A}_{21}'' = \underline{Y}_0 = -j0,1 \text{ См};$$

$$\underline{A}_{12}'' = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_1 \underline{Z}_2 \underline{Y}_0 = j5 - j5 + j5(-j5)(-j0,1) = -j2,5 \text{ Ом};$$

$$\textcircled{\square} \underline{A}_{11}'' \underline{A}_{22}'' - \underline{A}_{12}'' \underline{A}_{21}'' = 1; \quad 1,5 \times 0,5 - (-j2,5)(-j0,1) = 1; \quad 1 = 1$$

$$\begin{pmatrix} \underline{A}_{11} & \underline{A}_{12} \\ \underline{A}_{21} & \underline{A}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{A}_{11}' & \underline{A}_{12}' \\ \underline{A}_{21}' & \underline{A}_{22}' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{A}_{11}'' & \underline{A}_{12}'' \\ \underline{A}_{21}'' & \underline{A}_{22}'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{A}_{11}' \underline{A}_{11}'' + \underline{A}_{12}' \underline{A}_{21}'' & \underline{A}_{11}' \underline{A}_{12}'' + \underline{A}_{12}' \underline{A}_{22}'' \\ \underline{A}_{21}' \underline{A}_{11}'' + \underline{A}_{22}' \underline{A}_{21}'' & \underline{A}_{21}' \underline{A}_{12}'' + \underline{A}_{22}' \underline{A}_{22}'' \end{pmatrix}$$

$$\underline{A}_{11} = (0,4 - j0,8)1,5 + (2 - j4)(-j0,1) = 0,2 - j1,4 \text{ Ом};$$

$$\underline{A}_{12} = (0,4 - j0,8)(-j2,5) + (2 - j4)0,5 = -1 - j3 \text{ Ом}$$

$$\underline{A}_{21} = (0,1 - j0,2)1,5 + 1 \times (-j0,1) = 0,15 - j0,4 \text{ Ом};$$

$$\underline{A}_{22} = (0,1 - j0,2)(-j2,5) + 1,05 = -j0,25 \text{ Ом};$$

$$\textcircled{\square} \underline{A}_{11} \underline{A}_{22} - \underline{A}_{12} \underline{A}_{21} = 1; \quad (0,2 - j1,4)(-j0,25) - (-1 - j3)(0,15 - j0,4) = 1; \quad 1 = 1$$

**T**

$$\underline{Z}_1 = (\underline{A}_{11} - 1) / \underline{A}_{21} = (0,2 - j1,4 - 1) / (0,15 - j0,4) = 3,77 \angle -50,3^\circ = 2,41 - j2,9 \text{ Ом (RC)}$$

$$\underline{Z}_2 = (\underline{A}_{22} - 1) / \underline{A}_{21} = (-j0,25 - 1) / (0,15 - j0,4) = 2,41 \angle -96,6^\circ = 0,275 - j2,39 \text{ Ом (ф.Н)}$$

$$\underline{Y}_0 = \underline{A}_{21} = 0,15 - j0,4 = 0,427 \angle -69,4^\circ \text{ Ом (GL)}$$

**II**

$$\underline{Y}_1 = (\underline{A}_{22} - 1) / \underline{A}_{12} = (-j0,25 - 1) / (-1 - j3) = 0,326 \angle -57,6^\circ = 0,175 - j0,275 \text{ Ом (GL)}$$

$$\underline{Y}_2 = (\underline{A}_{11} - 1) / \underline{A}_{12} = (0,2 - j1,4 - 1) / (-1 - j3) = 0,51 \angle -11,31^\circ = 0,5 - j0,1 \text{ Ом (GL)}$$

$$\underline{Z}_0 = \underline{A}_{12} = 3,16 \angle -108,4^\circ = -1 - j3 \text{ Ом (ф.Н)}$$

$$\underline{Z}_{C1} = 6,47 \angle -15,43^\circ \text{ Ом}; \quad \underline{Z}_{C2} = 1,144 \angle -23,6^\circ \text{ Ом}$$

$$a = 0,563 \text{ Hn}; \quad b = -1,534 \text{ рад}; \quad \underline{\Gamma} = 0,563 - j1,534$$

### Задача 17.4

$$X_1 = 50 \text{ Ом}, \quad X_2 = 20 \text{ Ом}$$

$$X_3 = 20 \text{ Ом}, \quad X_4 = 60 \text{ Ом}$$

$$X_M = 10 \text{ Ом}$$

$$\underline{A}_{11} = \underline{A}_{22}$$

$$\underline{A}_{11} - ? \quad \underline{A}_{12} - ? \quad \underline{A}_{21} - ? \quad \underline{A}_{22} - ?$$

$$\underline{Z}_C - ? \quad \underline{\Gamma} - ?$$

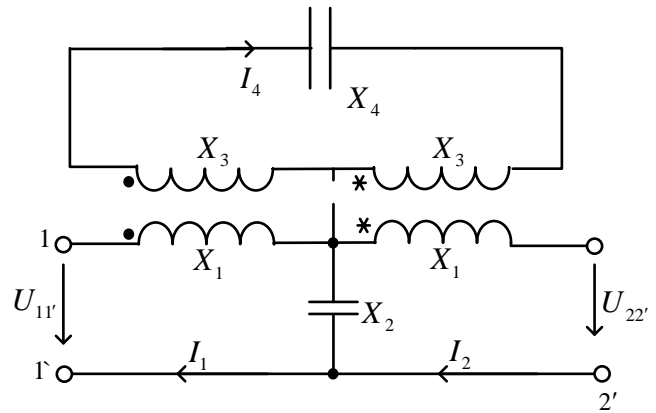


Рис. 17.4

### Розв'язання

Прийmemo  $\dot{U}_{11'} = 100 \text{ В}$

1. Режим неробочого ходу з боку вторинних затискачі

$$\underline{Z}_H \rightarrow \infty, \quad I_2 = 0$$

$$\begin{aligned} \dot{U}_{11'} &= \dot{I}_{1x} (jX_1 - jX_2) - \dot{I}_{3x} jX_M; & 100 &= \dot{I}_{1x} (j500 - j20) - \dot{I}_{3x} j10 \\ 0 &= -\dot{I}_{1x} jX_M + \dot{I}_{3x} (2jX_3 - jX_4); & 0 &= -\dot{I}_{1x} j10 + \dot{I}_{3x} (2j20 - j60) \end{aligned} \Bigg| \div j10$$

$$\begin{aligned} -j10 &= 3\dot{I}_{1x} - \dot{I}_{3x} & 1 & 2 \\ 0 &= -\dot{I}_{1x} - 2\dot{I}_{3x} & 3 & 1 \end{aligned}$$

$$\dot{I}_{1x} = -2,86 \text{ А};$$

$$\dot{U}_{22'} = \dot{I}_{1x} (-jX_2) + \dot{I}_{3x} jX_M = 2,86(-j20) + j1,429j10 = -71,4 \text{ В}$$

$$\dot{U}_{11'x} = \underline{A}_{11} \dot{U}_{22'x}, \quad \underline{A}_{11} = \frac{\dot{U}_{11'x}}{\dot{U}_{22'x}} = \frac{100}{-71,4} = -1,4$$

$$\dot{I}_{1x} = \underline{A} \dot{U}_{22'x}, \quad \underline{A} = \frac{\dot{I}_{1x}}{\dot{U}_{22'x}} = -\frac{j2,86}{-j71,4} = j0,04 \text{ Ом}$$

2. Режим короткого замикання з боку вторинних затискачі

$$(\underline{Z}_H = 0), \quad \dot{U}_{22'} = 0;$$



$$\dot{U}_{11'} = \dot{I}_{1k}(jX_1 - jX_2) - \dot{I}_{2k}(-jX_2) - \dot{I}_{3k}jX_M$$

$$0 = -\dot{I}_{1k}(-jX_2) + \dot{I}_{2k}(-j20) - \dot{I}_{3k}jX_M$$

$$0 = -\dot{I}_{1k}jX_M - \dot{I}_{2k}jX_M + \dot{I}_{3k}(2jX_3 - jX_4)$$

$$\left. \begin{aligned} 100 &= \dot{I}_{1k}(j50 - j20) - \dot{I}_{2k}(-j20) + \dot{I}_{3k}j10 \\ 0 &= -\dot{I}_{1k}(-j20) + \dot{I}_{2k}(j50 - j20) - \dot{I}_{3k}j10 \\ 0 &= -\dot{I}_{1k}j10 - \dot{I}_{2k}j10 + \dot{I}_{3k}j10 \end{aligned} \right| \div j10$$

$$-j10 = 3\dot{I}_{1k} + 2\dot{I}_{2k} - \dot{I}_{3k}$$

$$0 = 2\dot{I}_{1k} + 3\dot{I}_{2k} - \dot{I}_{3k}$$

$$0 = \dot{I}_{1k} + \dot{I}_{2k} + 2\dot{I}_{3k}$$

$$\underline{\Delta} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 12;$$

$$\dot{I}_{1k} = \frac{\Delta_1}{\underline{\Delta}} = -\frac{j70}{12} = -j5,83 \text{ A}; \quad \dot{I}_{2k} = \frac{\Delta_2}{\underline{\Delta}} = \frac{j50}{12} = j4,17 \text{ A};$$

$$\dot{U}_{11'} = \underline{A}_{12}\dot{I}_{1k}; \quad \underline{A}_{12} = \frac{\dot{U}_{11'}}{\dot{I}_{1k}} = \frac{100}{j4,17} = -j24 \text{ Ом};$$

$$\dot{I}_{1k} = \underline{A}_{22}\dot{I}_{2k}; \quad \underline{A}_{22} = \frac{\dot{I}_{1k}}{\dot{I}_{2k}} = -\frac{j5,83}{j4,17} = -1,4; \quad \underline{A}_{22} = \underline{A}_{11}$$

Перевірка:

$$\underline{A}_{11}\underline{A}_{22} - \underline{A}_{12}\underline{A}_{21} = 1; \quad (-1,4)^2 - (-j24)j0,04 = 1; \quad 1 = 1$$

Виконаємо розрахунок параметрів для П- та Т-подібної схем заміщень чотирьохполюсника

$$\boxed{T} \quad \underline{Y}_0 = \underline{A}_{21} = j0,04 \text{ Ом (C)}$$

$$\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = (\underline{A}_{11} - 1) / \underline{A}_{21} = (-1,4 - 1) / j0,04 = j60 \text{ Ом (L)}$$

$$\boxed{II} \quad \underline{Z}_1 = \underline{A}_{12} = -j24 \text{ Ом (C)}; \quad \underline{Y}_1 = \underline{Y}_2 = (\underline{A}_{11} - 1) / \underline{A}_{12} = -j0,1 \text{ Ом (L)}$$

$$\underline{Z}_C = \sqrt{\underline{A}_{12} / \underline{A}_{21}} = \sqrt{(-j24) / j0,04} = \sqrt{-600} = \pm j24,5 \text{ Ом}$$

$$\underline{\Gamma} = \ln\left(\underline{A}_{11} + \sqrt{\underline{A}_{12}\underline{A}_{21}}\right) = \ln\left(0,42 \angle \pm 180^\circ\right) = \ln\left(0,42 \angle \pm 3,14\right) = 0,868 \pm j3,14$$

$$A = 0,868 \text{ Нп}; \quad B = \pm 3,14 \text{ рад}$$

Виконаємо розв'язку магнітних зв'язків:

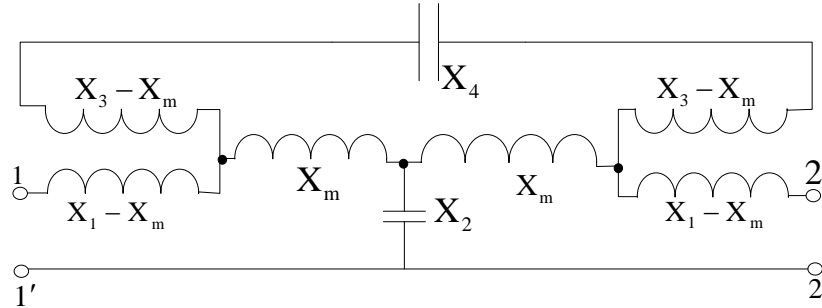


Рис. 17.5

$$\underline{Z}_X = j20 + j10(-j30) / (-j20) = j35 \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_K = j60 + j60(-j25) / j35 = j17,14 \text{ Ом};$$

$$\underline{A}_{11} = \underline{A}_{22} = \sqrt{\underline{Z}_X / (\underline{Z}_X - \underline{Z}_K)} = \sqrt{j35 / (j35 - j17,14)} = \pm 1,4;$$

$$\underline{A}_{12} = \underline{A}_{11}\underline{Z}_K = \pm 1,4 j17,14 = \pm j24 \text{ Ом};$$

$$\underline{A}_{21} = \underline{A}_{11} / \underline{Z}_X = \pm 1,4 / j35 = \mp j0,04 \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_C = \sqrt{\underline{Z}_X \underline{Z}_K} = \sqrt{j35 j17,14} = \sqrt{-600} = \pm j24,5 \text{ Ом}$$

$$\text{th}\underline{\Gamma} = \sqrt{\underline{Z}_K / \underline{Z}_X} = \sqrt{j17,14 / j35} = \pm 0,7$$

$$\underline{\Gamma} = 0,5 \ln\left(\frac{1 + \text{th}\underline{\Gamma}}{1 - \text{th}\underline{\Gamma}}\right) = 0,5 \ln\left(\frac{1 \pm 0,7}{1 \mp 0,7}\right)$$

$$\underline{\Gamma}' = 0,5 \ln\left(\frac{1,7}{0,3}\right) = 0,867; \quad \underline{\Gamma}'' = 0,5 \ln\left(\frac{0,3}{1,7}\right) = -0,867$$

$$A = 0,867 \text{ Нп}; \quad B = \pm 3,14 \text{ рад}$$

Способи з'єднання пасивних чотириполосників

Задача 18.1

Послідовне з'єднання чотириполосників

$$\underline{A}'_{11} = 0,4 - j0,8; \quad \underline{A}'_{12} = 2 - j4 \text{ Ом}; \quad \underline{A}'_{21} = 0,1 - j0,2 \text{ См}; \quad \underline{A}'_{22} = 1$$

$$\underline{A}''_{11} = 1,5; \quad \underline{A}''_{12} = -j2,5 \text{ Ом}; \quad \underline{A}''_{21} = -j0,1 \text{ См}; \quad \underline{A}''_{22} = 0,5$$

$$\underline{A}_{11}, \underline{A}_{12}, \underline{A}_{21}, \underline{A}_{22}, \underline{Z}_{C1}, \underline{Z}_{C2}, \Gamma - ?$$

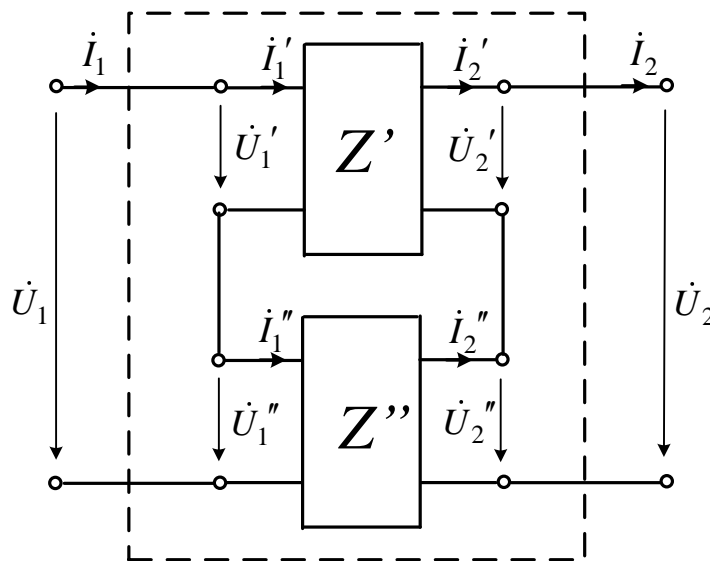


Рис. 18.1

Розв'язання

При такому з'єднанні мають місце рівності

$$\dot{U}_1 = \dot{U}'_1 + \dot{U}''_1, \quad \dot{U}_2 = \dot{U}'_2 + \dot{U}''_2 \quad \text{та} \quad \dot{I}_1 = \dot{I}'_1 = \dot{I}''_1, \quad \dot{I}_2 = \dot{I}'_2 = \dot{I}''_2$$

У цьому випадку доречно обрати систему рівнянь чотириполосника, записану через Z- параметрів:

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= \underline{Z}_{11} \dot{I}_1 + \underline{Z}_{12} \dot{I}_2 \\ \dot{U}_2 &= \underline{Z}_{21} \dot{I}_1 + \underline{Z}_{22} \dot{I}_2 \end{aligned}$$

де відповідно до таблиці 22.1

$$\underline{Z}_{11} = \frac{\underline{A}}{\underline{C}}; \quad \underline{Z}_{12} = -\frac{1}{\underline{C}}; \quad \underline{Z}_{21} = \frac{1}{\underline{C}}; \quad \underline{Z}_{22} = -\frac{\underline{D}}{\underline{C}}$$

або

$$\underline{A}_{11} = \underline{A}_{11} / \underline{A}_{21}; \quad \underline{Z}_{12} = -1 / \underline{A}_{21}; \quad \underline{Z}_{21} = 1 / \underline{A}_{21}; \quad \underline{Z}_{22} = -\underline{A}_{22} / \underline{A}_{21}$$

Відповідно, коефіцієнти чотирьохполосника виражені через  $Z$ -параметри мають вигляд

$$\underline{A}_{11} = \underline{Z}_{11} / \underline{Z}_{21}; \quad \underline{A}_{12} = (\underline{Z}_{11}\underline{Z}_{22} - \underline{Z}_{12}\underline{Z}_{21}) / \underline{Z}_{12}; \quad \underline{A}_{21} = 1 / \underline{Z}_{21}; \quad \underline{A}_{22} = \underline{Z}_{22} / \underline{Z}_{12};$$

Виконаємо їх розрахунок:

$$\underline{Z}'_{11} = (0,4 - j0,8) / (0,1 - j0,2) = 4;$$

$$\underline{Z}'_{12} = -1 / (0,1 - j0,2) = -2 - j4 \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}'_{21} = 1 / (0,1 - j0,2) = 2 + j4 \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}'_{22} = -1 / (0,1 - j0,2) = -2 - j4 \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}''_{11} = 1,5 / (-j0,1) = j15 \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}''_{12} = -1 / (-j0,1) = -j10 \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}''_{21} = 1 / (-j0,1) = j10 \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}''_{22} = 0, / (-j0,1) = -j5 \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_{11} = \underline{Z}'_{11} + \underline{Z}''_{11} = 4 + j15 \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_{12} = \underline{Z}'_{12} + \underline{Z}''_{12} = -2 - j4 - j10 = -2 - j14 \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_{21} = \underline{Z}'_{21} + \underline{Z}''_{21} = 2 + j4 + j10 = 2 + j14 \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_{22} = \underline{Z}'_{22} + \underline{Z}''_{22} = -2 - j4 - j5 = -2 - j9 \text{ Ом};$$

$$\underline{A}_{11} = (4 + j15) / (2 + j14) = 1,09 - j0,13;$$

$$\underline{A}_{22} = (-2 - j9) / (-2 - j14) = 0,65 - j0,05;$$

$$\underline{A}_{12} = ((4 + j15)(-2 - j9) - (-2 - j14)(2 + j14)) / (-2 - j14) = 1,35 - j4,45 \text{ Ом};$$

$$\underline{A}_{21} = 1 / (2 + j14) = 0,01 - j0,07 \text{ См};$$

Перевірка

$$\underline{A}_{11}\underline{A}_{22} - \underline{A}_{12}\underline{A}_{21} = 1; (1,09 - j0,13)(0,65 - j0,05) - (1,35 - j4,45)(0,01 - j0,07) = 1; \\ 1 = 1$$

Знайдемо параметри Т-подібної схеми заміщення

$$\boxed{T} \quad \underline{Z}_1 = (\underline{A}_{11} - 1) / \underline{A}_{21} = (1,09 - j0,13 - 1) / (0,01 - j0,07) = 2 + j1 \text{ Ом}(RL)$$

$$\underline{Z}_2 = (\underline{A}_{22} - 1) / \underline{A}_{21} = (0,65 - j0,05 - 1) / (0,01 - j0,07) = -j5 \text{ Ом}(C)$$

$$\underline{Y}_0 = \underline{A}_{21} = 0,01 - j0,07 \text{ См}(GL);$$

Знайдемо параметри П-подібної схеми заміщення

$\boxed{П}$

$$\underline{Y}_1 = (\underline{A}_{22} - 1) / \underline{A}_{12} = (0,65 - j0,05 - 1) / (1,35 - j4,45) = 10^{-3}(-6,94 - j77) \text{ См}(GL)$$

$$\underline{Y}_2 = (\underline{A}_{11} - 1) / \underline{A}_{12} = (1,09 - j0,13 - 1) / (1,35 - j4,45) = 10^{-3}(32,2 + j12,63) \text{ См}(GC)$$

$$\underline{Z}_0 = \underline{A}_{12} = 1,35 - j4,45 \text{ Ом}(RC)$$

Виконаємо розрахунок вторинних параметрів:

$$\underline{Z}_{C1} = \sqrt{\frac{\underline{A}_{11}\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21}\underline{A}_{22}}} = \sqrt{\frac{(1,09 - 0,13)(1,35 - j4,45)}{(0,01 - j0,07)(0,65 - j0,05)}} = 10,5 + j0,582 \text{ Ом}$$

$$\underline{Z}_{C2} = \sqrt{\frac{\underline{A}_{12}\underline{A}_{22}}{\underline{A}_{11}\underline{A}_{21}}} = \sqrt{\frac{(1,35 - j4,45)(0,65 - j0,05)}{(1,09 - j0,13)(0,001 - j0,07)}} = 6,25 + j0,607 \text{ Ом}$$

$$\begin{aligned} r = \ln(\sqrt{\underline{A}_{11}\underline{A}_{22}} + \sqrt{\underline{A}_{12}\underline{A}_{21}}) &= \ln(\sqrt{(1,09 - j0,13)(0,65 - j0,05)} + \\ &+ \sqrt{(1,35 - j4,45)(0,01 - j0,07)}) = \ln(1,16 \angle -33,6^\circ) = \ln(1,16 \angle -0,586) = \\ &= 0,1484 - j0,586; \end{aligned}$$

$$A = 0,1484 \text{ Нп}; \quad B = -0,586 \text{ рад}$$

### Задача 18.2

Паралельне з'єднання чотирьох полюсників

$$\underline{A}'_{11} = 0,4 - j0,8; \quad \underline{A}'_{12} = 2 - j4 \text{ Ом}; \quad \underline{A}'_{21} = 0,1 - j0,2 \text{ См}; \quad \underline{A}'_{22} = 1$$

$$\underline{A}''_{11} = 1,5; \quad \underline{A}''_{12} = -j2,5 \text{ Ом}; \quad \underline{A}''_{21} = -j0,1 \text{ См}; \quad \underline{A}''_{22} = 0,5$$

---


$$\underline{A}_{11}, \underline{A}_{12}, \underline{A}_{21}, \underline{A}_{22}, \underline{Z}_{C1}, \underline{Z}_{C2}, \underline{\Gamma} - ?$$

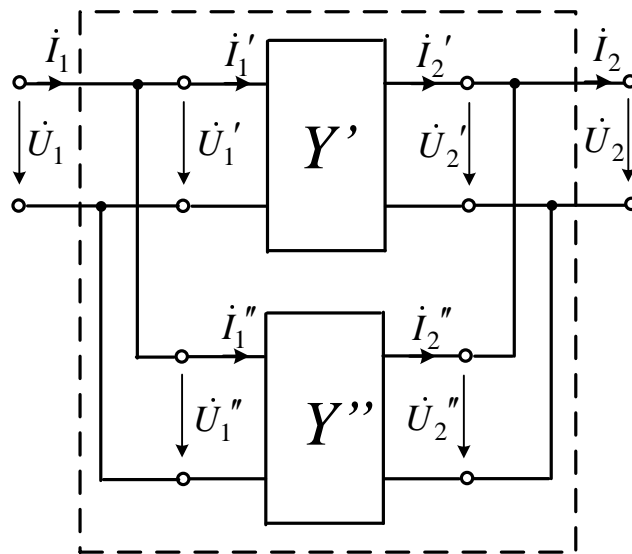


Рис. 18.2

## Розв'язання

При паралельному з'єднанні мають місце рівності

$$\dot{U}_1 = \dot{U}'_1 = \dot{U}''_1 \text{ та } \dot{U}_2 = \dot{U}'_2 = \dot{U}''_2;$$

$$\dot{I}_1 = \dot{I}'_1 + \dot{I}''_1 \text{ та } \dot{I}_2 = \dot{I}'_2 + \dot{I}''_2.$$

Скористаємось системою записаною через  $Y$ -параметри:

$$\dot{I}_1 = \underline{Y}_{11}\dot{U}_1 + \underline{Y}_{12}\dot{U}_2$$

$$\dot{I}_2 = \underline{Y}_{21}\dot{U}_1 + \underline{Y}_{22}\dot{U}_2$$

де

$$\underline{Y}_{11} = \underline{A}_{22} / \underline{A}_{12}; \quad \underline{Y}_{12} = -1 / \underline{A}_{12}; \quad \underline{Y}_{21} = 1 / \underline{A}_{12}; \quad \underline{Y}_{22} = -\underline{A}_{11} / \underline{A}_{12};$$

$$\underline{A}_{21} = (\underline{Y}_{11}\underline{Y}_{22} - \underline{Y}_{12}\underline{Y}_{21}) / \underline{Y}_{12};$$

$$\underline{A}_{22} = \underline{Y}_{11} / \underline{Y}_{21};$$

$$\underline{A}_{12} = 1 / \underline{Y}_{21};$$

$$\underline{A}_{11} = \underline{Y}_{22} / \underline{Y}_{12};$$

Виконаємо розрахунок  $Y$ -параметрів для кожної складової паралельного з'єднання:

$$\underline{Y}'_{11} = 1 / (2 - j4) = +0,1 + j0,2 \text{ См};$$

$$\underline{Y}'_{12} = -1 / (2 - j4) = -0,1 - j0,2 \text{ См};$$

$$\underline{Y}'_{21} = 1 / (2 - j4) = 0,1 + j0,2 \text{ См};$$

$$\underline{Y}'_{22} = -(0,4 - j0,8) / (2 - j4) = -0,2 \text{ См};$$

$$\underline{Y}''_{11} = 0,5 / (-j2,5) = j0,2 \text{ См};$$

$$\underline{Y}''_{12} = -1 / (-j2,5) = -j0,4 \text{ См};$$

$$\underline{Y}''_{21} = 1 / (-j2,5) = j0,4 \text{ См};$$

$$\underline{Y}''_{22} = -1,5 / (-j2,5) = -j0,6 \text{ См};$$

$$\underline{Y}_{11} = \underline{Y}'_{11} + \underline{Y}''_{11} = 0,1 + j0,2 + j0,2 = 0,1 + j0,4 \text{ См};$$

$$\underline{Y}_{12} = \underline{Y}'_{12} + \underline{Y}''_{12} = -0,1 - j0,6 \text{ См};$$

$$\underline{Y}_{21} = \underline{Y}'_{21} + \underline{Y}''_{21} = 0,1 + j0,6 \text{ См};$$

$$\underline{Y}_{22} = \underline{Y}'_{22} + \underline{Y}''_{22} = -0,2 - j0,6 \text{ См};$$

Виконаємо розрахунок первинних коефіцієнтів чотириполіусника:

$$\underline{A}_{11} = \frac{\underline{Y}_{22}}{\underline{Y}_{12}} = \frac{-0.2 - j0.6}{-0.1 - j0.6} = 1.027 - j0.1622;$$

$$\underline{A}_{12} = \frac{1}{\underline{Y}_{21}} = \frac{1}{0.1 + j0.6} = 0.27 - j1.622;$$

$$\underline{A}_{21} = \frac{(\underline{Y}_{11}\underline{Y}_{22} - \underline{Y}_{12}\underline{Y}_{21})}{\underline{Y}_{12}} = \frac{(0.1 + j0.4)(-0.2 - j0.6) - (-0.1 - j0.6)(0.1 + j0.6)}{-0.1 - j0.6} =$$

$$= 0.0676 - j0.205;$$

$$\underline{A}_{22} = \frac{\underline{Y}_{11}}{\underline{Y}_{21}} = \frac{0.1 + j0.4}{0.1 + j0.6} = 0.676 - j0.0541;$$

Перевірка:

$$\underline{A}_{11}\underline{A}_{22} - \underline{A}_{12}\underline{A}_{21} = 1$$

$$(1.027 - j0.1622)(0.676 - j0.0541) - (0.27 - j1.622)(0.0676 - j0.205) = 1$$

$$1 \approx 1$$

Знайдемо параметри Т-подібної схеми заміщення

$$\underline{Z}_1 = (\underline{A}_{11} - 1) / \underline{A}_{21} = (1.027 - j0.1622 - 1) / (0.0676 - j0.205) =$$

$$= 0.752 - j0.1165 \text{ Ом (RC)}$$

$$\underline{Z}_2 = (\underline{A}_{22} - 1) / \underline{A}_{21} = (0.676 - j0.0541 - 1) / (0.0676 - j0.205) =$$

$$= -0.232 - j1.504 \text{ Ом (фн)}$$

$$\underline{Y}_0 = \underline{A}_{21} = 0.0676 - j0.205 \text{ См (GL)};$$

Знайдемо параметри П-подібної схеми заміщення

$$\underline{Y}_1 = (\underline{A}_{22} - 1) / \underline{A}_{12} = (0.676 - j0.0541 - 1) / (0.27 - j1.622) = -j0.2 \text{ См}$$

$$\underline{Y}_2 = (\underline{A}_{11} - 1) / \underline{A}_{12} = (1.027 - j0.1622 - 1) / (0.27 - j1.622) = 0.1 \text{ См (G)}$$

$$\underline{Z}_0 = \underline{A}_{12} = 0.27 - j1.622 \text{ Ом (RC)}$$

$$\underline{Z}_{C1} = \sqrt{\frac{\underline{A}_{11}\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21}\underline{A}_{22}}} = \sqrt{\frac{(1.027 - j0.1622)(0.27 - j1.622)}{(0.0676 - j0.205)(0.676 - j0.0541)}} = 3.39 - j0.393 \text{ Ом}$$

$$\underline{Z}_{C2} = \sqrt{\frac{\underline{A}_{12}\underline{A}_{22}}{\underline{A}_{11}\underline{A}_{21}}} = \sqrt{\frac{(0.27 - j1.622)(0.676 - j0.0541)}{(1.027 - j0.1622)(0.0676 - j0.205)}} = 2.23 - j0.0856 \text{ Ом}$$

$$r = \ln(\sqrt{\underline{A}_{11}\underline{A}_{22}} + \sqrt{\underline{A}_{12}\underline{A}_{21}}) = \ln(\sqrt{(1.027 - j0.1622)(0.676 - j0.0541)} +$$

$$+\sqrt{(0.27 - j1.622)(0.0676 - j0.205)} = \ln(1.376 \angle -41.3^\circ) = \ln(1.376 \angle -0.721) = 0.319 - j0.721$$

$$A = 0,0319 \text{ Нп}; \quad B = -0,721 \text{ рад}$$

### Задача 18.3

Послідовно-паралельне з'єднання чотирьох полюсників

$$\underline{A}'_{11} = 0,4 - j0,8; \quad \underline{A}'_{12} = 2 - j4 \text{ Ом}; \quad \underline{A}'_{21} = 0,1 - j0,2 \text{ См}; \quad \underline{A}'_{22} = 1$$

$$\underline{A}''_{11} = 1,5; \quad \underline{A}''_{12} = -j2,5 \text{ Ом}; \quad \underline{A}''_{21} = -j0,1 \text{ См}; \quad \underline{A}''_{22} = 0,5$$

$\underline{A}_{11}, \underline{A}_{12}, \underline{A}_{21}, \underline{A}_{22}, \underline{Z}_{C1}, \underline{Z}_{C2}, \underline{\Gamma} - ?$

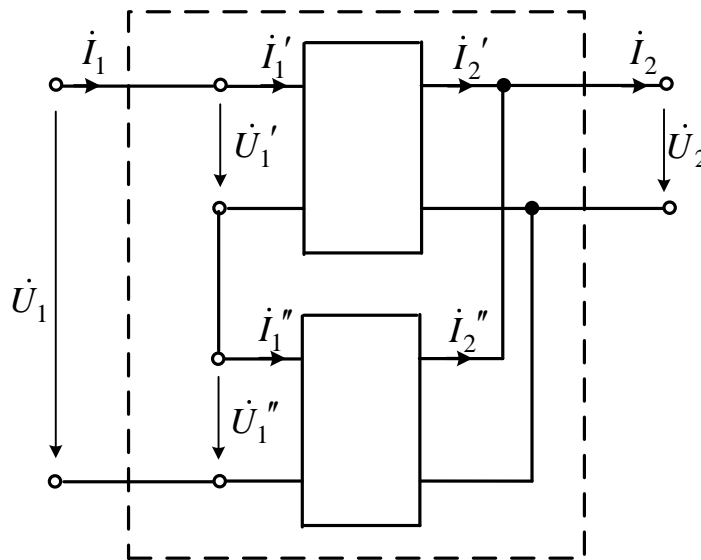


Рис. 18.3

### Розв'язання

При такому з'єднанні мають місце рівності

$$\dot{U}_1 = \dot{U}'_1 + \dot{U}''_1, \quad \dot{U}_2 = \dot{U}'_2 = \dot{U}''_2 \quad \text{та} \quad \dot{I}_1 = \dot{I}'_1 = \dot{I}''_1, \quad \dot{I}_2 = \dot{I}'_2 + \dot{I}''_2$$

У цьому випадку доречно обрати систему рівнянь чотирьох полюсника, записану через  $Z$ - параметрів:

$$\dot{U}'_1 = \underline{A}'_{11} \dot{U}'_2 + \underline{A}'_{12} \dot{I}'_2; \quad \dot{U}''_1 = \underline{A}''_{11} \dot{U}''_2 + \underline{A}''_{12} \dot{I}''_2;$$

$$\dot{I}'_1 = \underline{A}'_{21} \dot{U}'_2 + \underline{A}'_{22} \dot{I}'_2; \quad \dot{I}''_1 = \underline{A}''_{21} \dot{U}''_2 + \underline{A}''_{22} \dot{I}''_2;$$



$$\begin{aligned} \underline{A}_{11} &= \frac{\left(\underline{A}'_{22} + \underline{A}''_{22}\right)^2 + \left(\underline{A}'_{12}\underline{A}''_{22} + \underline{A}'_{22}\underline{A}''_{12}\right)\left(\underline{A}'_{21}\underline{A}''_{22} + \underline{A}'_{21}\underline{A}''_{22}\right)}{\underline{A}'_{22}\underline{A}''_{22}\left(\underline{A}'_{22} + \underline{A}''_{22}\right)} = \\ &= \frac{(1+0,5)^2 + ((2-j4)0,5+1(-j2,5))((0,1-j0,2)0,5+(-j0,1)\cdot 1)}{1\cdot 0,5(1+0,5)} = \\ &= 1,867 + j0,567 \text{ Ом} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{A}_{12} &= \frac{\underline{A}'_{12}\underline{A}''_{22} + \underline{A}'_{22}\underline{A}''_{12}}{\underline{A}'_{22} + \underline{A}''_{22}} = \\ &= \frac{(2-j4)0,5+1(-j2,5)}{1+0,5} = 0,0333 - j0,133 \text{ См} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{A}_{21} &= \frac{\underline{A}'_{21}\underline{A}''_{22} + \underline{A}'_{21}\underline{A}''_{22}}{\underline{A}'_{22} + \underline{A}''_{22}} = \\ &= \frac{(0,1-j0,2)0,5+(-j0,1)\cdot 1}{1+0,5} = 0,0333 - j0,1333 \text{ См} \end{aligned}$$

$$\underline{A}_{21} = \frac{\underline{A}'_{22}\underline{A}''_{22}}{\underline{A}'_{22} + \underline{A}''_{22}} = \frac{1\cdot 0,5}{1+0,5} = 0,333$$

Перевірка:

$$\underline{A}_{11}\underline{A}_{22} - \underline{A}_{12}\underline{A}_{21} = 1$$

$$(1,867 - j0,567)0,333 - (0,667 - j3)(0,0333 - j0,1333) = 1;$$

$$1 \approx 1$$

Знайдемо параметри Т-подібної схеми заміщення

$$\boxed{T} \quad \underline{Z}_1 = (\underline{A}_{11} - 1) / \underline{A}_{21} = (0,867 - j0,567) / (0,0333 - j0,1333) = 5,53 - j5,12 \text{ Ом}; (\text{RL})$$

$$\underline{Z}_2 = (\underline{A}_{22} - 1) / \underline{A}_{21} = (0,333 - 1) / (0,0333 - j0,1333) = -1,176 - j4,71 \text{ (ф.н.)}$$

$$\underline{Y}_0 = \underline{A}_{21} = 0,0333 - j0,1333 \text{ См (GL)}$$

Знайдемо параметри П-подібної схеми заміщення

$$\boxed{II} \quad \underline{Y}_1 = (\underline{A}_{22} - 1) / \underline{A}_{12} = (0,333 - 1) / (0,667 - j3) = -0,0471 - j0,212 \text{ См (ф.н.)}$$

$$\underline{Y}_2 = (\underline{A}_{11} - 1) / \underline{A}_{12} = (1,867 - j0,567 - 1) / (0,667 - j3) = 0,241 + j0,235 \text{ (GC)}$$

$$\underline{Z}_0 = \underline{A}_{12} = 0,667 - j3 \text{ Ом (RC)}$$

Розрахунок вторинних параметрів:

$$\underline{Z}_{C1} = \sqrt{\frac{\underline{A}_{11}\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21}\underline{A}_{22}}} = \sqrt{\frac{(1,867 - j0,567)(0,667 - j3)}{(0,0333 - j0,1333)0,333}} = 11,29 - j1,828 \text{ Ом}$$

$$\underline{Z}_{C2} = \sqrt{\frac{\underline{A}_{12}\underline{A}_{22}}{\underline{A}_{11}\underline{A}_{21}}} = \sqrt{\frac{(0,667 - j3)0,333}{(1,867 - j0,567)(0,0333 - j0,1333)}} = 1,937 + j0,262 \text{ Ом}$$

$$\begin{aligned} \underline{\Gamma} &= \ln(\sqrt{\underline{A}_{11}\underline{A}_{22}} + \sqrt{\underline{A}_{12}\underline{A}_{21}}) = \ln(\sqrt{(1,867 - j0,567)0,333} + \\ &+ \sqrt{(0,667 - j3)(0,0333 - j0,1333)}) = \\ &= \ln(1,209 \angle -38,4^\circ) = \\ &= \ln(1,209 \angle -0,67^\circ) = 0,1894 - j0,67; \end{aligned}$$

$$A = 0,1894 \text{ Нп; } B = -0,67 \text{ рад.}$$

Виконаємо розрахунки через  $H$ -параметри:

$$\dot{U}_1 = H_{11}\dot{I}_1 + H_{12}\dot{U}_2$$

$$\dot{I}_2 = H_{21}\dot{I}_1 + H_{22}\dot{U}_2$$

де коефіцієнти  $H$

$$\begin{aligned} \underline{H}_{11} &= \frac{\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{22}}; \quad \underline{H}_{12} = \frac{1}{\underline{A}_{22}}; & \underline{H}_{11} &= \frac{\underline{B}}{\underline{D}}; \quad \underline{H}_{12} = \frac{1}{\underline{D}} \\ \underline{H}_{21} &= \frac{1}{\underline{A}_{22}}; \quad \underline{H}_{22} = \frac{-\underline{A}_{21}}{\underline{A}_{22}}; & \underline{H}_{21} &= -\frac{1}{\underline{D}}; \quad \underline{H}_{22} = \frac{\underline{C}}{\underline{D}} \end{aligned}$$

або

Проводимо розрахунки коефіцієнтів

$$\underline{H}_{11}' = 2 - j4 \text{ Ом;}$$

$$\underline{H}_{12}' = \underline{H}_{21}' = 1$$

$$\underline{H}_{22}' = -0,1 + j0,2 \text{ См;}$$

$$\underline{H}_{11}'' = -j5 \text{ Ом;}$$

$$\underline{H}_{12}'' = \underline{H}_{21}'' = 2$$

$$\underline{H}_{22}'' = j0,2 \text{ См;}$$

$$\underline{H}_{11} = \underline{H}_{11}' + \underline{H}_{11}'' = 2 - j4 - j5 = 2 - j9 \text{ Ом;}$$

$$\underline{H}_{12} = \underline{H}_{12}' + \underline{H}_{12}'' = 1 + 2 = 3; \quad \underline{H}_{12} = \underline{H}_{21};$$

$$\underline{H}_{22} = \underline{H}_{22}' + \underline{H}_{22}'' = -0,1 + j0,2 + j0,2 = -0,1 + j0,4 \text{ См}$$

$$\underline{A}_{11} = \underline{H}_{12} - \frac{\underline{H}_{11}\underline{H}_{22}}{\underline{H}_{21}} = 3 - \frac{(-0.1 + j0.4)(2 - j9)}{3} = 1.867 + j0.567$$

$$\underline{A}_{12} = \underline{H}_{11}\underline{H}_{21} = \frac{(2 - j9)}{3} = 0.667 - j3 \text{ Ом}$$

$$\underline{A}_{21} = -\frac{\underline{H}_{22}}{\underline{H}_{21}} = -(-0.1 + j0.4) = 0.0333 - j0.1333 \text{ СМ}$$

$$\underline{A}_{22} = \frac{1}{\underline{H}_{21}} = \frac{1}{3} = 0.333$$

## СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Теоретичні основи електротехніки. Збірник задач: навчальний посібник/О. В. Корощенко, В. Ф. Денник, О. А. Журавель та ін.; за аг. Ред. О. В. Корощенко. – Донецьк: ДВНЗ «ДонНТУ», 2012. – 373 с.: іл.
2. Основы теории цепей: Сб. задач с примерами применения ПК / В.В. Фриск. – М. : СОЛОН-Пресс, 2003. – 192 с.
3. Теоретические основы электротехники: Методические указания и контрольные задания для студ. техн. спец. высших учебн. завед. / Л.А. Бессонов, И.Г. Демидова, М.Е. Заруди. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : Высшая школа, 2001. – 159 с.
4. Теоретические основы электротехники: Методические указания и контрольные задания для студентов технических специальностей вузов / Л.А. Бессонов, И.Г. Демидова, М.Е. Заруди и др. – 3-е изд., испр. – М.: Высш. шк., 2003. – 159 с.