МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

ДИСКРЕТНА МАТЕМАТИКА

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

Частина 1

Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для студентів,
які навчаються за спеціальністю 113 «Прикладна математика»,
освітньою програмою «Наука про дані та математичне моделювання»

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2021

Рецензенти: *Романкевич В.О.*, д-р техн. наук., проф., професор кафедри системного програмування і спеціалізованих комп'ютерних систем ФПМ

Дичка І.А., д-р техн. наук., проф., професор кафедри програмного забезпечення комп'ютерних систем ФПМ

Відповідальний редактор *Сулема Є.С.*, д-р. техн. наук, доц.

Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
(протокол № 6 від 25.02.2021 р.)
за поданням Вченої ради факультету прикладної математики
(протокол № 8 від 27.01.2021 р.)

Електронне мережне навчальне видання

Темнікова Олена Леонідівна

ДИСКРЕТНА МАТЕМАТИКА
КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ
ЧАСТИНА 1

Дискретна математика: Конспект лекцій (Частина 1) [Електронний ресурс]: навч. посіб. для студ. спеціальності 113 «Прикладна математика», освітньої програми «Наука про дані та математичне моделювання» / О.Л.Темнікова ; КПІ ім. Ігоря Сікорського. – Електронні текстові дані (1 файл: 2,97 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. – 154 с.

Навчальний посібник розроблено для ознайомлення студентів з лекційним курсом першого кредитного модулю з дисципліни «Дискретна математика» та призначено для студентів, які навчаються за спеціальністю 113 «Прикладна математика», освітньою програмою «Наука про дані та математичне моделювання» факультету прикладної математики КПІ ім. Ігоря Сікорського. «Дискретна математика: Конспект лекцій (Частина 1)» містить викладання основ теорії множин, відношень та відображень; розглядаються дослідження впорядкованих множин, теорія решіток. Також надаються основи теорії графів.

ЗМІСТ

ВСТУП

Навчальне видання призначене для студентів, які починають вивчати дисципліну «Дискретна математика», а саме її перший кредитний модуль. «Дискретна математика» є дисципліною з циклу загальної підготовки навчального плану спеціальності 113 «Прикладна математика» при навчанні за освітньою програмою «Наука про дані та математичне моделювання», що спрямована на розроблення і використання нових інформаційних технологій, моделювання складних систем, систем штучного інтелекту, і для вирішення інших задач професійної діяльності.

Лекційний курс з кредитного модулю «Дискретна математика (Частина 1)» розраховано на 36 академічних годин аудиторних занять, вивчається на факультеті прикладної математики у 1 семестрі.

Дискретна математика - математика, що вивчає дискретні об'єкти, такі, що відрізняються, не безперервні. У самій початковій назві комп'ютера, такої що нині рідко використовується, - «електронна цифрова обчислювальна машина» - слово «цифрова» вказує на принципово дискретний характер даного пристрою. Поняття ліміта, нескінченності або безперервності не є предметом вивчення, хоча можуть використовуватися як допоміжний засіб, як об'єкти дослідження.

Дискретна математика має широкий спектр додатків, перш за все в областях, пов'язаних з інформаційними технологіями та комп'ютерами. Таким чином, дискретна математика є базовим курсом при підготовці фахівців з інформаційних технологій та алгоритмізації і штучного інтелекту.

Традиційними розділами є: теорії множин, відношень, відображень, графів. Включені основи теорії решіток - спеціальних алгебраїчних структур, які використовуються в штучному інтелекті.

Вивчення курсу не вимагає будь-якої спеціальної підготовки. Однак при вивченні студент стикається з якісно новими поняттями, незвичними методами доказів і специфічною термінологією, що ускладнює засвоєння матеріалу.

Метою викладання кредитного модулю є оволодіння основними поняттями і методами, що дає змогу формування у студентів здатностей моделювати процеси за допомогою дискретних математичних структур; визначати властивості дискретних математичних об'єктів; будувати нові дискретні математичні об'єкти.

Після засвоєння кредитного модуля «Дискретна математика 1» студенти мають продемонструвати такі результати навчання: здатність використовувати й адаптувати математичні теорії, методи та прийоми для доведення математичних тверджень і теорем; виконувати математичний опис, аналіз та синтез дискретних об'єктів та систем, використовуючи поняття й методи дискретної математики та теорії алгоритмів; демонструвати знання й розуміння основних концепцій, принципів, теорій прикладної математики і використовувати їх на практиці; демонструвати знання з теорії множин, відношень, відображень; основних понять теорії графів; мати навички моделювання об'єктів за допомогою дискретних структур; визначення властивостей дискретних структур та їх аналізу; алгебраїчних перетворень виразів алгебри множин; побудови діаграм Хассе; визначення основних характеристик графів.

Навчальне видання має стати в нагоді під час опрацювання матеріалів лекцій, підготовки до екзамену, до практичних занять.

Розділ 1. Теорія множин, відношень і відображень.

Тема 1.1. Теорія множин.

1.1.1. Основні поняття теорії множин. Операції над множинами.

Канторовське визначення множин. Принцип об'ємності, принцип абстракції. Поняття включення множин. Поняття приналежності.

Операції об'єднання, перетину, добутку, доповнення та зображення їх за допомогою діаграм Венна.

Людське мислення влаштовано так, що світ представляється таким, що складається з окремих «об'єктів», хоча ясно, що світ - єдине нерозривне ціле і виділення в ньому об'єктів - це не більше ніж довільний акт нашої свідомості, що дозволяє формувати доступну для раціонального аналізу картинку світу.

Виділення об'єктів і їх сукупностей - природний спосіб організації нашого мислення, тому не дивно, що він лежить в основі головного інструменту опису точного знання - математики.

Творцем теорії множин був Георг Кантор. Основою цієї теорії є поняття множини.

Визначення 1.1.1. (за Кантором) *Множина S* є будь-яке зібрання визначених і таких, що розрізняються між собою, об'єктів нашої інтуїції або інтелекту, мислиме як єдине ціле. Ці об'єкти називаються *елементами* множини.

Визначення Кантора не є точним математичним визначенням, це інтуїтивне визначення *поняття* множини. Надалі ми побачимо, що точне математичне визначення множини викликає серйозні складнощі.

Істотним пунктом канторовського розуміння множини є те, що зібрання об'єктів «мисляться як єдине ціле», тобто розглядається як *один предмет*. Самі ж «об'єкти нашої інтуїції або інтелекту» можуть бути абсолютно довільними: множина може складатися, наприклад, із студентів даного курсу, зірок на небі або простих чисел, — визначення не накладає ніяких обмежень на природу предметів, що входять в множину. У математиці елементами множин зазвичай виступають такі об'єкти, як точки, криві, числа, множини чисел і т.п. Канторовське формулювання дозволяє також розглядати множини, елементи яких за тією або іншою причиною не можна точно вказати.

У цій концепції множин указується, що елементи множини повинні «розрізнятися» об'єктами, тобто множина не може містити двох однакових елементів. Теорія множин, в якої елементи можуть повторюватися відноситься до некласичного розділу теорії множин, носить назву теорія мультимножин або теорія комплектів. Визначальним в тій теорії є, окрім поняття приналежності, поняття функції кількісті входжень елемента до множини (комплекту). Зміст дій та операцій корегується з урахуванням наявності цієї функції. Але, якщо обмежити значення функції до 1, то теорія мультимножин не протиречить класичній канторовській теорії.

Епітет «визначений» розуміється в тому сенсі, що, якщо дана яка-небудь множина і деякий предмет, то можна визначити, є цей предмет елементом даної множини чи ні. Звідси витікає, що множина *повністю визначається своїми елементами.*

Про елементи говорять, що вони належать множині, і записують це так: $x \in A$ (читається: «х належить множині А», або «х є елементом множини А»). Допускається запис: $x_1, x_2..., x_n \in A$, якщо всі ці елементи належать множині А. Запис $x \notin A$ означає, що х не належить множині А.

Множини позначаються великими латинськими літерами. Надалі будемо використовувати стандартні позначення числових множин: N - множина натуральних чисел; Z - множина цілих чисел; Q - множина раціональних чисел; R - множина дійсних чисел; C - множина комплексних чисел. Елементи множини записуються у фігурних дужках: $A=\{a, b, c\}$.

Якщо множина X кінцева, то кількість елементів у множині позначається $|X|$. Наприклад, якщо $X = \{a, b, c\}$, то $|X| = 3$.

Порядок слідування елементів в множині не має значення. Наприклад, $\{a, b, c\}$ і $\{c, a, b\}$ – це одна і та ж множина.

Елементи якої-небудь множини самі можуть бути множинами. Наприклад, множина $A = \{\{1, 3\}, \{2, 4\}, \{5, 6\}\}$ є множина з трьох елементів ($|A| = 3$), а саме: $\{1, 3\}$, $\{2, 4\}$ і $\{5, 6\}$. Множини $B = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}\}$ і $C = \{1, 2, 3\}$ – різні множини, оскільки елементами першого є $\{1, 2\}$, $\{2, 3\}$, і $|B| = 2$, а елементами другої є 1, 2 і 3 – $|C| = 3$. Множини $D = \{\{1, 2\}\}$ і $G = \{1, 2\}$ також різні, оскільки перша — одноелементна множина, що має єдиним своїм елементом $\{1, 2\}$, а друга двоелементна має своїми елементами 1 і 2.

Множини можуть бути кінцевими або нескінченними; треба вміти їх задавати: перерахуванням або завданням характерної властивості, яким володіють всі елементи множини.

На підставі канторовського розуміння множини можна дати визначення множини через його властивості, які постулюються як інтуїтивні принципи.

<u>Інтуїтивний принцип об'ємності формулюється таким чином.</u>

Дві множини рівні тоді і тільки тоді, коли вони складаються з одних і тих же елементів.

Рівність множин позначається: $A = B$, нерівність – $A \neq B$.

Приклад. Доведемо, що множина A всіх парних додатних цілих чисел дорівнює множині B додатних цілих чисел, які представлені у вигляді суми двох непарних додатних цілих чисел.

Припустимо спочатку, що $x \in A$, і доведемо, що $x \in B$. Дійсно, якщо $x \in A$, то $x = 2m$, так що $x = (2m - 1) + 1$. Це і означає, що $x \in B$.

Припустимо тепер, що $x \in B$, і виведемо звідси, що $x \in A$. Якщо $x \in B$, то $x =(2p - 1) + (2q - 1)$, звідси $x = 2 (p + q - 1)$, з чого слід, що $x \in A$.

Таким чином, ми довели, що множини A і B складаються з одних і тих же елементів, отже, $A = B$.

Позначення множини за допомогою переліку його елементів дуже громіздко, щоб його використовувати для завдання множин, що мають, хоч і кінцеве, але велике число елементів, і зовсім не придатно для нескінченних множин.

Визначення 1.1.2. Розумітимемо під *висловлювання просте розповідне речення*, яке можна охарактеризувати як істинне або хибне. Тоді під одномісним *предикатом* (*формулою, формою*) від x – $P(x)$ розумітимемо кінцеву послідовність, що складається зі слів і символу x, таку, що якщо кожне входження x в цю послідовність замінити одним і тим же ім'ям деякого предмету відповідного роду, то в результаті вийде висловлювання.

<u>Тепер можна сформулювати інтуїтивний принцип абстракції.</u>

Будь-який одномісний предикат *P(x)* визначає деяку множина *A* таким чином, що елементами множини *A* є ті і лише ті предмети *a*, для яких *P(a)* є дійсне висловлювання.

Оскільки множини, що складаються з одних і тих же елементів, рівні, то будь-який предикат $P(x)$ визначає в точності одну, цілком визначену, множину, що звичайно позначається в математиці наступним чином: $\{x \mid P(x)\}$, що читається так: «множина всіх таких x, що $P(x)$». Таким чином, $a \in \{x \mid P(x)\}$ в тому і лише тому випадку, якщо $P(a)$ — дійсне висловлювання.

Наприклад, кожне з наступних виразів є предикат від x:

5 ділить x; $x^2 + x + 1 > 0$; x любить Джона; $x^2 = 2$; $0 < x$.

Можна сказати, що вирішення питання, чи є даний предмет a елементом множини $\{x \mid P(x)\}$, є вирішення питання, чи володіє a деякою певною властивістю (якістю). Тому, коли для визначення деякої множини A використовують який-небудь предикат $P(x)$, його зазвичай називають визначальним властивість множини A. В такому випадку принцип абстракції можна сформулювати у вигляді твердження: «Кожна властивість визначає деяку множину».

Введення в обіг нескінченних множин за допомогою їх визначальних властивостей – процедура, добре відома з аналітичної геометрії. Наприклад, коло радіуса 2 на площині з центром на початку координат є множина всіх таких x, що x знаходиться на відстані в дві одиниці від початку координат.

Наступні вислови є множини, визначені за допомогою деяких властивостей:

$A = \{x \mid x \in \boldsymbol{N}, x < 10\} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$;

$B = \{x \mid x$ є функція, безперервна на замкнутому відрізку дійсних чисел від 0 до $1\}$.

Для позначення множин використовуються і різні видозміни основного дужкового запису. Наприклад, $B = \{x \in \boldsymbol{R} \mid 0 \leq x \leq 1\}$ позначає множину всіх дійсних чисел, що лежать в інтервалі [0, 1], а $D = \{x \in \boldsymbol{Q}^+ \mid x^2 < 2\}$ – множину всіх додатних раціональних чисел, квадрати яких менше числа 2. Замість того щоб писати $\{y \mid y = 2x$ *де* x *є ціле число*$\}$, ми можемо написати $\{2x \mid x \in \boldsymbol{Z}\}$. Аналогічно через $\{x^2 \mid x \in \boldsymbol{Z}\}$ позначається множина квадратів цілих чисел.

Принцип об'ємності, принцип абстракції і принцип вибору (поки, за непотрібністю, що не сформульований) - це та основа, на якій будується канторовська теорія множин. Основне поняття, що використовується при формулюванні цих принципів, - це приналежність елемента множині. Цей розділ теорії множин так і називають – «Теорія приналежності» або «Змістовна теорія множин».

Введемо ще два відношення між множинами.

Визначення 1.1.3. Якщо A і B є множини, то говорять, що *A включене в B*, якщо кожен елемент множини A є також елементом множини B (символічний запис: $A \subseteq B$ або $B \supseteq A$). В цьому випадку говорять, що множина *A є підмножиною множини B.*

Множина *A строго включена в B*, або *B строго включає A*, або *A* є ***власна підмножина** B*, якщо $A \subseteq B$ і $A \neq B$ (символічно: $A \subset B$).

Наприклад, множина парних чисел строго включена в множину Z цілих чисел, а множина Q раціональних чисел строго включає Z**.**

З принципу об'ємності витікає, що може бути тільки одна множина, що не має елементів. Цю множину називають *порожньою* і позначають її символом $\varnothing$. Порожня множина є підмножина будь-якої множини.

Кожна множина $A \neq \varnothing$ має, принаймні, дві різних підмножини: саме A і $\varnothing$, тобто $A \subseteq A$ і $\varnothing \subseteq A$. Крім того, кожен елемент множини A визначає деяку підмножину множини A: якщо $a \in A$, то $\{a\} \subseteq A$. Підмножинами множини A будуть також множини, складені з двох елементів множини A, трьох елементів, і так далі. В результаті ми отримаємо множину всіх підмножин множини A.

Визначення 1.1.4. Множина всіх підмножин множини *A* називається *множиною-степенем або булеаном* множини *A* і позначається $\wp$ (A).

Наприклад, якщо $A = \{1, 2, 3\}$,

то $\wp$ (A) = $\{\{1, 2, 3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \varnothing\}$.

Підкреслимо відмінність між відношеннями приналежності і включення: якщо $B \subseteq A$, то $B \in \wp(A)$, а якщо $a \in A$, то $\{a\} \subseteq A$ і $\{a\} \in \wp$ (A).

Для кінцевої множини *A*, що складається з *n* елементів, $\wp$ (A) має 2^n елементів (звідси і назва – *множина-степінь)*. Доведемо це твердження.

Будемо позначати C^k_n кількість всіляких перестановок з *n* по *k*, яка визначається формулою: $\frac{n!}{k!(n-k)!}$. В кінцевій множині *A*, що складається з *n* елементів, містяться: пуста підмножина $\varnothing$, C^1_n одноелементних підмножин, C^2_n двоелементних підмножин, ..., C^k_n *k*-елементних підмножин, ..., $1 = C^n_n$ – сама множина *A*. Разом: $C^0_n + C^1_n + C^2_n + ... + C^k_n ... + C^n_n = (1 + 1)^n = 2^n$ підмножин (біном Ньютона, булеан – термін). [1]

[1] Можна довести | $\wp$ (A) | = 2^n методом математичної індукції аба через поняття кардинальної степені множин як кількості функціональних відображень.

Розглянемо операції над множинами (дії, які призводять до появи нових множин с тих, що дані).

Визначення 1.1.5. ***Об'єднання*** множин A і B (позначається через $A \cup B$ і читається як «об'єднання A і B») є множина всіх предметів, які є елементами множин A або B, тобто $A \cup B = \{x \mid x \in A$ або $x \in B\}$.

Тут мається на увазі невиключний зміст слова «або». Таким чином, за визначенням, $x \in A \cup B$ тоді і тільки тоді, коли x є елемент хоча б однієї з множин A і B.

Наприклад: $\{1, 2, 3\} \cup \{1, 3, 4\} = \{1, 2, 3, 4\}$.

Визначення 1.1.6. ***Перетин*** множин A і B (позначається через $A \cap B$ і читається як «перетин A і B») є множина всіх предметів, які є елементами обох множин A і B, тобто $A \cap B = \{x \mid x \in A$ і $x \in B\}$.

Таким чином, за визначенням, $x \in A \cap B$ тоді і тільки тоді, коли x є одночасно елементом множини A і елементом множини B.

Наприклад: $\{1, 2, 3\} \cap \{1, 3, 4\} = \{1, 3\}$.

Для будь-якої пари множин A і B мають місце такі включення:

$\varnothing \subseteq A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$.

Визначення 1.1.7. Дві множини A і B називаються ***непересічними*** (або діз'юнктними), якщо $A \cap B = \varnothing$, і пересічними, якщо $A \cap B \neq \varnothing$. Система множин називається розчленованою, якщо будь-яка пара її різних елементів є непересічною.

Визначення 1.1.8. ***Розбиттям*** множини X будемо називати таку розчленовану систему U непустих і різних підмножин множини X, де кожен елемент множини X є в той же час елементом деякого (отже, в точності одного) елемента системи U.

Наприклад, $\{\{1, 2\}, \{3\}, \{4, 5\}\}$ є одне з можливих варіантів розбиття множини $\{1, 2, 3, 4, 5\}$; інша з можливостей – $\{\{1\}, \{2, 3, 4, 5\}\}$ і т.д.. Кількість вариантів розбиття визначається числами Белла.

Визначення 1.1.9. *Абсолютне доповнення* множин A (позначається через $\bar{A}$ або A' або $\neg A$) — це множина всіх елементів, що не є елементами множини A: $\{x \mid x \notin A\}$.

Визначення 1.1.10. *Відносне доповнення* множини A до множини B — це множина $A \cap B'$; воно зазвичай позначається через $A \backslash B$ (іноді A-B), що читається як «A мінус B».

Таким чином $A \backslash B = A \cap B'$ є скорочення для $\{x \in A \mid x \notin B\}$, тобто це множина тих елементів множини А, які не є елементами множини B.

Наприклад: $\{1, 2, 3\} \backslash \{1, 3, 4\} = \{2\}$, а $\{1, 3, 4\} \backslash \{1, 2, 3\} = \{4\}$

Визначення 1.1.11. ***Симетрична різниця*** множин A і B, що позначається через $A \div B$ (іноді використовуються позначення $A \Delta B$ або $\boldsymbol{A+B}$), визначається наступним чином: $x \in A \div B$ тоді і тільки тоді, коли x належить рівно однією з множин *A або B*:

$A \div B = \{x \mid (x \in A \text{ і } x \notin B) \text{ або } (x \notin A \text{ і } x \in B)\}$.

З визначення випливає, що $A \div B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

Неважко показати, що ця операція комутативна: $A \div B = B \div A$, асоціативна: $(A \div B) \div C = A \div (B \div C)$ і дистрибутивна щодо перетину: $((A \div B) \cap C = (A \cap C) \div (B \cap C)$. Крім того, $A \div A = \varnothing$ и $A \div \varnothing = A$.

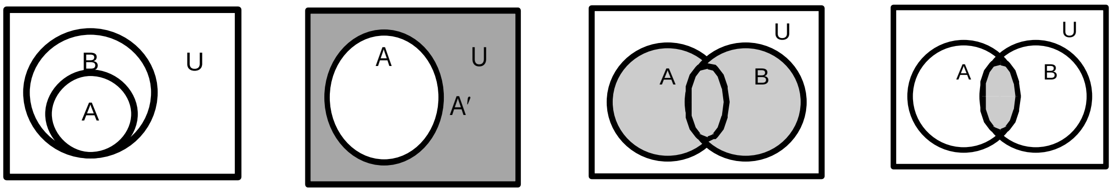
Наприклад: $\{1, 2, 3\} + \{1, 3, 4\} = \{2, 4\}$

Якщо все множини, що розглядаються в ході будь-якого міркування, є підмножинами деякої множини $\boldsymbol{U}$, то цю множину $\boldsymbol{U}$ називають *універсальною* або *універсумом* (для цього міркування). Наприклад, для елементарної арифметики універсальним служить $\boldsymbol{Z}$, а для аналітичної геометрії площини — множина всіх впорядкованих пар дійсних чисел.

Тоді абсолютне доповнення множини A можна розглядати як $A' = U \backslash A$.

<u>Діаграми Венна(круги Ейлера)</u>

Для графічної ілюстрації відношень, які можуть мати місце між підмножинами будь-якої універсальної множини $\boldsymbol{U}$, часто використовують так звані діаграми Венна — по імені англійського священика Джона Венна (1834—1923), що застосовував їх в своїх дослідженнях з логіки. Діаграма Венна є схематичним зображенням множин у вигляді точкових множин: універсальна множина $\boldsymbol{U}$ зображується множиною точок деякого прямокутника, а його підмножина A — у вигляді круга або який-небудь інший простій області всередині цього прямокутника. Правильніше, проте, було б назвати їх діаграмами Ейлера, оскільки задовго до Венна їх вживав знаменитий швейцарський математик Леонард Ейлер (1707—1783), Нижче на рис. 1.1. показані деякі операції над множинами.



Відношення включення: $A \subseteq B$, $A \cap B = A$.

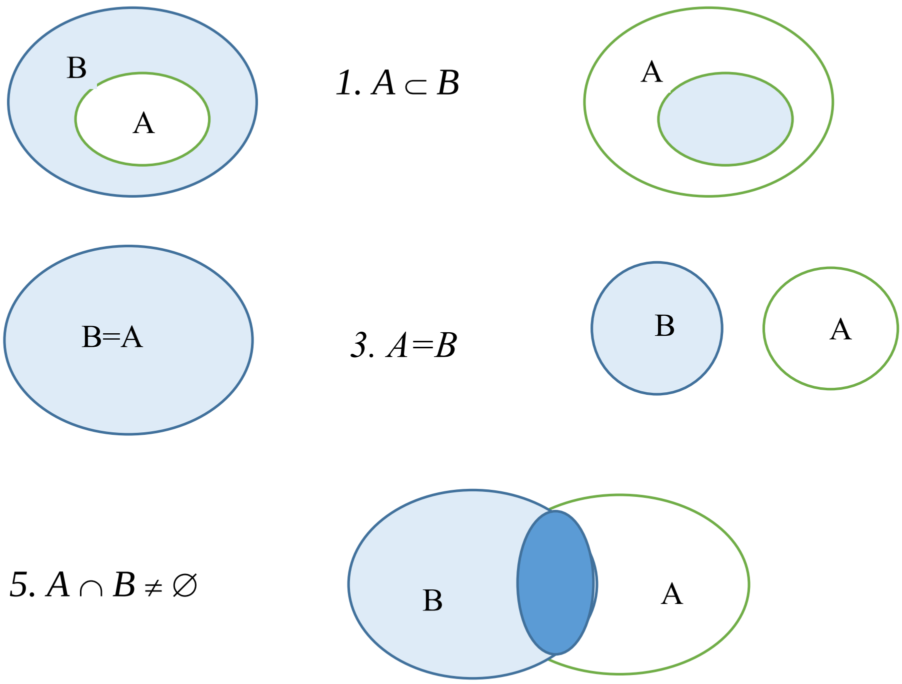
Абсолютне доповнення: A'.

Об'єднання множин $A \cup B$

Перетин множин $A \cap B$

Рис.1.1. Діаграми Венна і круги Ейлера.

Доведення тверджень або теорем за допомогою діаграм Венна не є легітимним доведеням з огляду на те, що малюнки не вичерпують всі можливі взаємозв'язки між множинами. Якщо ми розглянемо тільки дві множини A і B, то можна представити зв'язок між ними у п'яти варіантах (рис.1.2):



Ні одна з множин не входить до другої; перетин не порожній; так звана – *загальна композиція*

Рис.1.2. Взаємозв'язки між двома множинами

Тому діаграми Венна слугують тільки для ілюстрації та пояснень.

1.1.2. Аксіоматичні теорії. Алгебра множин. Аксіоми та теореми алгебри множин.

Поняття алгебри. Доведення теорем алгебри множин.

Визначення 1.1.12. *Алгебра* — це множина об'єктів з визначеними на ній операціями, що відповідають деяким властивостям. Зазвичай, *абстрактна алгебра* задається як двійка $A = <M, \Sigma>$, де M — множина об'єктів алгебри (*носій* алгебри), Σ — множина операцій (*сигнатура* алгебри). Множина операцій описується своїми властивостями, які задаються *системою аксіом* даної алгебри.

Розглянемо алгебру підмножин деякої універсальної множини $\boldsymbol{U}$. Скорочено надалі називатимемо її просто *алгеброю множин*.

Визначення 1.1.13. Визначимо *алгебру множин* як четвірку: $<M, \cup, \cap, '>$, де M — множина-степінь універсальної множини $\boldsymbol{U}$, а множина операцій складається з операцій об'єднання ($\cup$), перетину ($\cap$) і доповнення ($'$) множини до множини $\boldsymbol{U}$.

У **змістовній теорії множин** за допомогою відношення **приналежності** елементів множини можна довести наступну **теорему**.

Теорема 1.1.1. Для будь-яких підмножин A, B і C деякого універсуму $\boldsymbol{U}$ наступні рівності є тотожностями:

1)	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$	Асоціативність;
2)	$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$	Комутативність;
3)	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	Дистрибутивність;
4)	$A \cup \varnothing = A$	$A \cap \boldsymbol{U} = A$	Обмеження
5)	$A \cup A' = \boldsymbol{U}$ – виключення третього	$A \cap A' = \varnothing$ – непротиріччя (протиріччя)	Логічні закони

З цих тотожностей може бути виведена будь-яка теорема алгебри множин вже без використання поняття приналежності. Тобто для алгебри множин теорема змістовної теорії множин 1.1 виступає як аксіома алгебри множин.

З наведених вище десяти тотожностей видно, що кожна права тотожність одержана з лівого заміною символу $\cup$ на $\cap$ і навпаки, а також заміною $\varnothing$ на $\boldsymbol{U}$ і навпаки.

Визначення 1.1.14. Рівність, одержана заміною всіх символів $\boldsymbol{U}$ на $\varnothing$, $\varnothing$ на $\boldsymbol{U}$, $\cup$ на $\cap$, $\cap$ на $\cup$, називається *двоїстою початковій рівності*.

У приведеному вище списку тотожності 1—5 кожна тотожність має двоїсту їй тотожність. Таким чином, ми приходимо до **принципу двоїстості**: для будь-якої теореми алгебри множин двоїсте їй твердження також є теоремою.

Слід зауважити, з того, що теорема 1.1 в змістовній теорії доводиться через відношення включення зліва направо та справа наліво (тобто логічне слідування доводиться в обидві боки), то надалі, спираючись на теорему 1.1.1. як на аксіому алгебри множин, при доведенні теорем алгебри множин у вигляді $\Delta=\Omega$, доведення достатньо провести в один бік, наприклад, від виразу Δ до Ω, або навпаки.

Теорема 1.1.2. Для довільних підмножин A і B деякої універсальної множини $\boldsymbol{U}$ справедливі наступні твердження:

6) якщо для будь-якого $\boldsymbol{A}$ $A \cup B = A$, то $B = \varnothing$,

якщо для будь-якого $\boldsymbol{A}$ $A \cap B = A$, то $B = \boldsymbol{U}$;

7) якщо $A \cup B = \boldsymbol{U}$ і $A \cap B = \varnothing$, то $B = A'$;

8) $A'' = A$: інволюція;

9) $\varnothing' = \boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{U}' = \varnothing$;

10) $A \cup A = A$, $A \cap A = A$: закони ідемпотентності;

11) $A \cup \boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}$, $A \cap \varnothing = \varnothing$: властивості $\boldsymbol{U}$ *та* $\varnothing$;

12) $A \cup (A \cap B) = A$, $A \cap (A \cup B) = A$: закони поглинання (абсорбції);

13) $(A \cup B)' = A' \cap B'$, $(A \cap B)' = A' \cup B'$: закони де Моргана.

<u>Наслідки з теореми:</u>

14) $(A \cap B) \cup (A \cap B') = A$, $(A \cup B) \cap (A \cup B') = A$: склеювання;

15) $A \cup (A' \cap B) = A \cup B$, $A \cap (A' \cup B) = A \cap B$: поглинання доповнення[2]
(закон Порецького)

Доведення теорем (один з варіантів, двоїста доводиться аналогічно; у дужках вказані номери вживаних аксіом і тверджень) та слідувань:

[2] $A' \cup (A \cap B) = A' \cup B$ – варіант закону поглинання доповнення і т.п.

Твердження 6.

Оскільки за умовою $A \cup B = A$ для будь-якого A, то це правильно і для $A = \varnothing$, тобто $\varnothing \cup B = \varnothing$. Тоді з 2) слідує: $\varnothing \cup B = B \cup \varnothing$, тобто $B \cup \varnothing = \varnothing$. З іншого боку, згідно 4), $B \cup \varnothing = B$. Звідси витікає, що $B = \varnothing$ (**і**).

Твердження 7.

B=(4)=$B \cup \varnothing$=(5)=$B \cup (A \cap A')$=(3)=$(B \cup A) \cap (B \cup A')$=(2)=$(A \cup B) \cap (B \cup A')$=
=(*за умов.*)= $\boldsymbol{U} \cap (B \cup A')$ = (5)= $(A \cup A') \cap (B \cup A')$ =(2)=$(A' \cup A) \cap (A' \cup B)$ =(3)=
=$A' \cup (A \cap B)$ =(*за умов.*)= $A' \cup \varnothing$ =(4)= A'.

Доведення **твердження 8** виходить з твердження 7: аксіоми 5 можна переписати у вигляді: $A' \cup A = \boldsymbol{U}$, $A \cap A' = \varnothing$ *через комутативність операцій* $\cup$ *і* $\cap$ *(аксіоми 2). Тоді, за твердженням 7,* $A = A''$.

Твердження 9.

$\varnothing'$ = (4: $A \cup \varnothing = A$, *де замість* A *беремо* $\varnothing'$) = $\varnothing' \cup \varnothing$= (5)= $\boldsymbol{U}$.

Твердження 10.

$A \cup A$ =(4)= $(A \cup A) \cap \boldsymbol{U}$ = (5)= $(A \cup A) \cap (A \cup A')$ = (3 *дистр.*)=
= $A \cup (A \cap A')$ = (5)= $A \cup \varnothing$ = (4) = A.

Твердження 11.

$A \cap \varnothing$ = (4) = $(A \cap \varnothing) \cup \varnothing$ = (5) = $(A \cap \varnothing) \cup (A \cap A')$ = (3 *дистр.*)=
= $A \cap (\varnothing \cup A')$=(4) = $A \cap A'$ =(5)= $\varnothing$.

Твердження 12.

$A \cup (A \cap B)$ = (4) = $(A \cap \boldsymbol{U}) \cup (A \cap B)$= (3 *дистр.*)= $A \cap (\boldsymbol{U} \cup B)$ =
(**11**) = $A \cap \boldsymbol{U}$ = (4) = A.

Твердження 14.

$(A \cap B) \cup (A \cap B')$ = (3) = $A \cap (B \cup B')$=(5) = $A \cap \boldsymbol{U}$= (4) = A.

Твердження 15.

$A \cap (A' \cup B)$ = (3) = $(A \cap A') \cup (A \cap B)$ = (5) =$\varnothing \cup (A \cap B)$ = (4) = $A \cap B$.

Твердження 13.

Позначимо $C = A \cup B$ та $D = A' \cap B'$, та скористуємося <u>твердженням 7.</u> Тоді, якщо ми доведемо, що $C \cup D = \boldsymbol{U}$, а $C \cap D = \varnothing$, то за твердженням 7 отримаємо результат: $D = C'$, тобто $A' \cap B' = (A \cup B)'$ - *закон де Моргана.*

$C \cap D$= $(A \cup B) \cap (A' \cap B')$=(1)= $\underline{((A \cup B) \cap A')} \cap B'$=(**15**,2)= $\underline{(B \cap A)} \cap B'$ =
=(2)= $(A \cap B) \cap B'$ =(1)= $A \cap (B \cap B')$=(5)= $A \cap \varnothing$ =(11)= $\varnothing$;

та наступне розпишемо менш детально

$C \cup D = A \cup B \cup (A' \cap B') = (15,1) = A \cup B \cup B' = (5) = A \cup \boldsymbol{U} = (11) = \boldsymbol{U}.$

Майже всі твердження було доведено спираючись на 1-5 твердження (при доведенні закону де Моргана використовувалися 7 та 11 твердження). Закони де Моргана та інволюції не залежать від твердження 9 ні прямо, ні опосередковано, тому можна показати ще один спосіб доведення твердження 9 через закон де Моргана (13) та інволюцію (8):

$\varnothing' = (5) = (A \cap A')' = (13) = A' \cup A'' = (8) = A' \cup A = (5) = \boldsymbol{U}.$

Приклади, які традиційно розв'язуються в алгебрі множин, належать до двох типів: спростити або довести. Але, по суті «довести» зводиться до «спростити» та порівняти ліву і праву частину виразу, або порівняти отриманий результат з відповіддю тощо.

Пріоритет виконання операцій встановлюється наступний: *заперечення* – найвищий, *перетин та об'єднання* – наступний, однаковий один до одного. Операції різниці та симетричної різниці – не є алгебраїчними, пріоритет не встановлюється, використовуються для скорочення записів.

Рекомендована *послідовність дій* в алгебраїчних виразах при спрощуванні:

1) виразити всі неалгебраїчні операції (\, +) через операції алгебри множин – $'$, $\cup$, $\cap$, використовуючи основі еквівалентності:

$A \backslash B = A \cap B'$; $A + B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A) = (A \cup B) \backslash (A \cap B).$

2) послідовно застосовуючи закони де Моргана замінити доповнення складних множин на доповнення простих множин;

Отримані вирази мають структуру поліному[3]. Можна провести аналогію між операціями об'єднання і перетину та операціями додавання і добутку; це витікає з комутативності та асоціативності всіх вищенаведених операцій та дистрибутивності кожної з операцій $\cup$ та $\cap$ (**увага!** – кожної з них, на відміну від додавання та добутку; $\cup$ та $\cap$ – рівноправні) відносно одна до одної. Тому вирази алгебри множин можна перетворювати, як алгебраїчний многочлен, розкривати дужки та виносити множини за дужки або вносити, розташовувати дужки в будь-якому порядку або знімати їх зовсім при однотипних операціях та таке інше (закони комутативності, асоціативності, дистрибутивності тощо);

3) необхідно використовувати теореми, що визначають операції над $\varnothing$ та $\boldsymbol{U}$, закони інволюції, ідемпотентності.

[3] $(A \cap B) \cup (C \cap D) = (A \cup C) \cap (A \cup D) \cap (B \cup C) \cap (B \cup D)$ – аналогія $(a+b)(c+d) = ac+ad+bc+bd$

4) застосування законів поглинання, поглинання доповнення та склеювання не є обов'язковими, але ефективно призводять до скорочення обсягу розрахунків.

Приклади (спростити вираз алгебри множин)**:**

I

$((\underline{B' \cap C) \cup (A' \cap B'}) \cup (A \cap C')) \cap ((A' \cap B) \cup (B \cap C)) =$ (дистриб.)=

$= ((B' \cap (C \cup A')) \cup (A \cap C')) \cap (B \cap (C \cup A')) =$ **введемо позначення**

$=$ (*де Морган*)= $((B' \cap D) \cup D') \cap (B \cap D) =$ * *$D = C \cup A'$*

= (поглинання доповнення) $= (B' \cup D') \cap (B \cap D) =$ *(де Морган)*=

$= (B' \cup D') \cap (B' \cup D')' = (5) = \varnothing$;

або *= *(асоціативн.)* $= (B' \cup D') \cap B \cap D =$ *(поглинання доповнення)* $= D' \cap B \cap D = \varnothing$ *(комутативність, непротиріччя, властивість* $\varnothing$ *- останні кроки).*

II

$((A \cup C)' \cap (A \cup D))' \cap (((C \cup (C \cap B)) \cap C') \cup A') =$ де Морган та поглинання $= ((A \cup C) \cup (A' \cap D')) \cap ((C \cap C') \cup A') =$ асоціативність та непротиріччя $= (A \cup C \cup (A' \cap D')) \cap (\varnothing \cup A') =$ комутативність та поглинання доповнення , обмеження $= (A \cup C \cup D') \cap A' =$ поглинання доповнення $= (C \cup D') \cap A' = A' \cap (C \cup D')$ – лексикографічний порядок запису множин у виразі.

III

$(A + (A \setminus B)) \cap (\mathbf{U} \setminus B) =$ ***(використовуємо еквівалентну формулу A\B=A ∩ B′)*** $= = (A + (A \cap B')) \cap B' =$

= (будемо використовувати еквівалентну формулу A+B= (A∪B) \ (A∩B)) =

$= ((A \cup (A \cap B')) \setminus (A \cap (A \cap B'))) \cap B' = (\underline{12}, \underline{1}, \underline{10}) = (A \cap (A \cap B')') \setminus B =$

$=$ ***(A\B=A ∩ B′)*** $= (A \cap (A \cap B')') \cap B' = (13) = (\underline{A \cap (A' \cup B)}) \cap B' = (\underline{15}) =$

$= (\underline{A \cap B}) \cap B' = (1) = A \cap B \cap B' = (5) = A \cap \varnothing = (4) = \varnothing.$

Тема 1.2. Теорія відношень.

1.2.1. Декартовий добуток множин. Поняття про відношення.

Властивості декартового добутку множин. Способи завдання відношень. Операції над відношеннями. Властивості відношень.

Для позначення якого-небудь зв'язку між об'єктами або поняттями в математиці часто користуються поняттям *відношення*. Наприклад, властивість елементу належати або не належати множині є відношенням «$x \in X$», причому, якщо елемент належить множині, то відношення є істинним, а якщо не належить, то хибним. Включення множини в іншу множину «$X \subseteq Y$» також є відношенням. На множині людей задано відношення родинних зв'язків, наприклад, «x – батько y». Якщо узяти конкретних людей і підставити їх імена замість x і y, то ми одержимо дійсне або хибне висловлювання. У цьому сенсі відношення також є предикатом, який перетворюється в дійсне або хибне висловлювання при підстановці в нього конкретних елементів з області визначення.

Розглянемо ще одну операцію над множинами.

Визначення 1.2.1. *Декартовим добутком множин* X і Y називається множина всіх впорядкованих пар $<x, y>$, таких, що $x \in X$ і $y \in Y$.

Це позначається як $X \times Y = \{<x, y> | x \in X, y \in Y\}$.

Впорядкована пара елементів $<x, y>$ однозначно визначається через x і y. Крім того, якщо $<x, y> = <u, v>$, то $x = u$ і $y = v$. Прийнято називати x *першою*, а y — *другою координатою* впорядкованої пари $<x, y>$.

Приклад. Нехай дані множини $X = \{1, 2\}$ і $Y = \{2, 3, 4\}$. Декартовий добуток цих двох множин: $X \times Y = \{<1, 2>, <1, 3>, <1, 4>, <2, 2>, <2, 3>, <2, 4>\}$.

Чим відрізняється операція декартового добутку від операцій, які розглядалися в розділі теорії множин? Суттєва відмінність полягає в тому, що елементи множини-результату звичайної операції, наприклад, перетину, можуть належати початковій множині, а в результаті декартового добутку ми отримуємо принципово інші за конструкцією елементи.

Стосовно властивостей декартового добутку, можна відмітити, що декартовий добуток за визначенням не є комутативним ($X = \{1, 2\}$ і $Y = \{2, 3\}$; $X \times Y = \{<1, 2>, <1, 3>, <2, 2>, <2, 3>\}$ та $Y \times X = \{<2,1>, <3,1>, <2, 2>, <3, 2>\}$, тобто $X \times Y \neq Y \times X$).

Декартовий добуток є асоціативним : $(X \times Y) \times Z = X \times (Y \times Z)$ *за контекстом*. Якщо одна з множин дорівнює порожній, то результатом декартового добутку буде теж порожня множина: $X=\varnothing$, $Y=\{1, 2\}$, то $X \times Y = Y \times X = \varnothing$.

Розглянемо підмножину $A=\{<1, 2>, <1, 3>, <1, 4>, <2, 3>, <2, 4>, <3, 4>\}$ декартового добутку $X \times Y$, де $X=Y=\{1, 2, 3, 4\}$. Це не що інше, як відношення ρ_1: $x < y$ — «x менше y». На тій же множині впорядкованих пар можна виділити ще одне відношення $\rho_2: y = x + 1$ — це підмножина $\{<1, 2>, <2, 3>, <3, 4>\}$. Інше відношення ρ_3: $x = y$ — це підмножина $\{<1, 1>, <2, 2>, <3, 3>, <4, 4>\}$. Множина впорядкованих пар утворює *бінарне відношення*

Визначення 1.2.2. *Бінарне відношення* є підмножина декартового добутку двох множин.

Елементи бінарного відношення позначається так: $<x, y> \in \rho$ або $x\rho y$. *Ці вирази еквівалентні і читаються, як «x* знаходиться у відношенні ρ до y».

Природним узагальненням поняття *бінарного* відношення є поняття *n-арного* (*n-місного)* відношення, визначеного як підмножина декартова добутку n множин:

$$X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n = \{<x_1, x_2, \ldots, x_n> \mid x_1 \in X_1, x_2 \in X_2, \ldots, x_n \in X_n\}.$$

n-арне відношення є множиною впорядкованих *n-ок (*читається: «*енка»*). Впорядковану *n-ку* називають інакше *кортежем***.** Підмножина кортежів з n елементів утворює *n-арне відношення*. При $n = 2$ має місце бінарне відношення, при $n = 3$ використовується термін *тернарне* відношення.

Якщо $X_1=X_2=\ldots=X_n$, то відношення називають однорідним, в противному випадку – різнорідним.

Визначення 1.2.3. *Областю визначення* бінарного відношення ρ (позначення: *$D\rho$) називають множину перших координат елементів з ρ, областю значень відношення ρ (позначення: $R\rho$) — множину других координат елементів з ρ.*

Наприклад, як областю визначення, так і областю значень відношення включення для підмножин множини $\boldsymbol{U}$ є множина $\wp$ (U); областю визначення для відношення «х – студент групи у» служить множина студентів, в той час, як область значень цього відношення — множина всіх груп на курсі або факультеті (залежить від контексту).

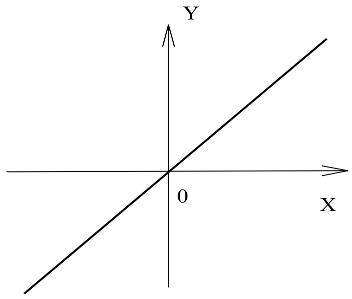
<u>Способи завдання відношень</u>

Відношення – це підмножина декартового добутку. Ключовими є слова підмножина та множина. Як множина, відношення може задаватися в той же спосіб, як і звичайні множини: переліченням елементів та предикатом *(в даному випадку він буде двомісним P(x,y))*. Але розглянемо інші способи завдання відношень.

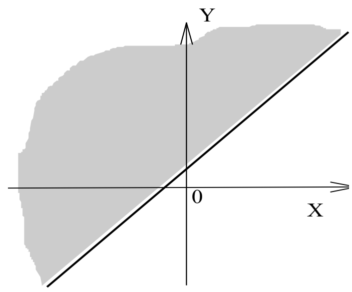
Аналітична геометрія площини ґрунтується на допущенні про те, що між точками евклідової площини і декартовим добутком $\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R}$ існує взаємно однозначна відповідність. Кожній точці на площині відповідають її координати — впорядкована пара $<x, y>$. Тому відношення на множині $\boldsymbol{R}$ можна зображати на площині деякою конфігурацією або множиною точок. Наприклад, відношення рівності можна зобразити у вигляді прямої $y = x$ в декартовій системі координат.

Визначення 1.2.4. Якщо предметом вивчення служать відношення на множині дійсних чисел $\boldsymbol{R}$, то множину точок, відповідних елементам відношення, називають *графіком* цього відношення.

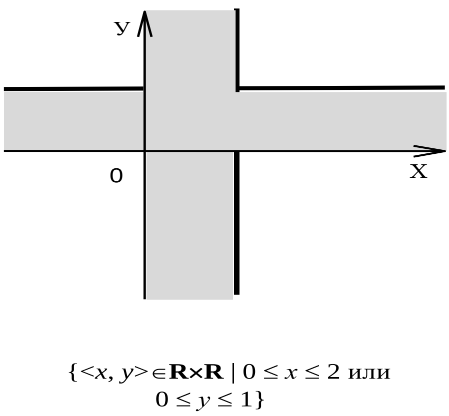
Нижче на рисунках нижче наводяться чотири приклади відношень, для кожного з яких схематично наведений графік. У тих випадках, коли графік є частиною площині, ця частина площині на кресленні заштриховується.



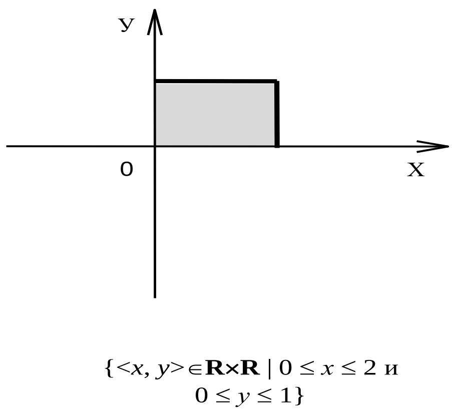
$\{<x, y> \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \mid y = x\}$



$\{<x, y> \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \mid y \geq x\}$

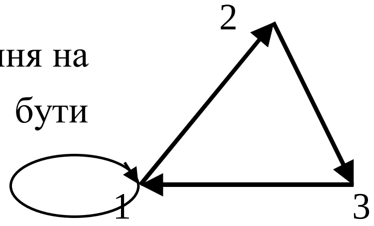


$\{<x, y> \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \mid 0 \leq x \leq 2$ или $0 \leq y \leq 1\}$



$\{<x, y> \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \mid 0 \leq x \leq 2$ и $0 \leq y \leq 1\}$

Якщо задано відношення $x\rho y$, x, $y \in X$, то елементи множин X можна зображати точками на площині, а впорядковану пару — лінією (дугою) із стрілкою, направленою від x до y (*що відповідає елементу відношення* $<x, y>$*):* $x \longrightarrow y$ Тоді відношення на кінцевій множині елементів $X=\{1,2,3\}$ може бути представлено у вигляді графа. Наприклад,



Відношення ρ= {<1, 1>, <1, 2>, <2, 3>, <3, 1>}
може бути представлено у вигляді наступного орієнтованого графу , де пара <1, 1> реалізована у вигляді петлі на елементі *1*.

Задамо відношення ρ: «x поважає y» на множині M (тобто на множині декартового квадрату M; в даному випадку відношення може бути задано і на декартовому добутку різних, навіть різнорідних множин), де M = {a1, a2, a3, a4}— множина персонажів. Це відношення можна представити у вигляді таблиці (матриці), елементи якої дорівнюють ***1***, якщо між елементами є відношення поваги у напрямку від елементу з рядка до елемента в стовпці: *«x поважає y», це означає, що виконується* $x\rho y$*, тобто* $<x, y> \in \rho$*, то на перетині рядка x та стовпчика y ставимо 1),* та **0** в протилежному випадку.

	a1	**a2**	**a3**	**a4**
a1	*1*	*0*	*1*	*0*
a2	*0*	*1*	*0*	*0*
a3	*1*	*1*	*1*	*1*
a4	*0*	*0*	*1*	*1*

З матриці ми бачимо, що a1 поважає a3, a2 не поважає нікого, крім самого себе, a3 поважає всіх. Такий спосіб завдання відношень називається матричним.

Якщо відношення представлене у вигляді матриці A і вся A заповнена 0, то відношення є порожнім, а, якщо всі елементи дорівнюють 1, то відношення є повним.

Підведемо підсумок – перелічемо способи завдання відношень:

- перелік елементів;
- через властивість (двомісний предикат для бінарного відношення);
- графік (декартова площина або X та У – впорядковані множини);
- граф (на квадраті множини, тобто X=У);
- матричний спосіб.

Операції над відношеннями

Ще раз згадаємо, що відношення – підмножина декартового добутку, тобто множина. Тоді, як до для будь-яких множин, до відношень можна застосовувати операції теорії множин, і вони будуть мати той самий сенс, що і в теорії множин.

Визначення 1.2.5. *Перетином* відношень α і β називається відношення, визначуване перетином відповідних множин.

Приклад. Нехай α: «$x \geq y$», β: «$x > y$». Тоді перетин $\alpha \cap \beta$ – *відношення* «$x > y$».

Визначення 1.2.6. *Об'єднання* відношень утворюється об'єднанням відповідних множин.

Приклад. Нехай α: «$x > y$», β: «$x = y$», тоді об'єднання їх є $\alpha \cup \beta$: «$x \geq y$».

Визначення 1.2.7. *Включення відношень*: α включено в β, якщо множина пар $<x, y> \in \alpha$ міститься і у відношенні β, тобто $\alpha \subseteq \beta$, якщо для кожного $<x, y> \in \alpha$ виконується $<x, y> \in \beta$.

Визначення 1.2.8. *Доповненням бінарного відношення ρ між елементами $x \in A$ і $y \in B$, вважається множина $\rho' = (A \times B) \setminus \rho$, яка теж є відношенням.*

Над відношеннями можна здійснювати особливі, притаманні тільки відношенням, операції.

Визначення 1.2.9. Якщо α — відношення на M, то *зворотне* відношення α^{-1} визначається наступним чином: $x \alpha y$ *, то* $y \alpha^{-1} x$. *Тобто* $\alpha^{-1} \subseteq Y \times X$ при $\alpha \subseteq X \times Y$ *(елементи в парах треба поміняти місцями).*

Наприклад, якщо α: «$x > y$», де $x, y \in \boldsymbol{R}$, то зворотне йому відношення α^{-1}: «$y > x$», або «$x < y$». Якщо α: «x сестра y», де x – *жінки*, y – *чоловіки*, то зворотне відношення α^{-1} : «y брат x».

Визначення 1.2.10. Відношення α і β можуть утворювати добуток або композицію відношень $\alpha\beta$, яке саме є відношенням: $x\ \alpha\beta\, y$, $x, y \in$ M, якщо існує такий елемент $z \in M$, що $x\alpha z$ і $z\beta y$. Композиція відношень не комутативна в загальному випадку (за визначенням).

Наприклад, хай α: «x – мати y» β: «x батько y». Тоді існує таке b, що *ab і bc, тобто* «*a* – мати *b*» і «*b* – батько *c*». Тоді композиція цих відношень: «*a* – бабуся *c*».

Властивості відношень

Розглядатимемо відношення, задані на множині X, тобто $x\rho y \subseteq X\times X$, *де* $x,y \in X$.

Визначення 1.2.12. Відношення ρ на множині X називається **рефлексивним**, якщо для будь-яких $x \in X$ виконується $x\rho x$. *Якщо для всіх* $x \in X$ не виконується $x\rho x$, *то відношення називається* ***антирефлексивним***.

Приклади. Відношення рівності є рефлексивним. Відношення $x \geq y$, *де* x, $y \in R$ є рефлексивним, оскільки $x \geq x$. Відношення $x > y$, *де* x, $y \in R$ – антирефлексивне, оскільки для жодного числа не здійснимо $x > x$.

Визначення 1.2.13. Відношення ρ на множині X називається **симетричним**, якщо для будь-яких $x \in X$, $y \in X$, з $x\rho y$ *слідує* $y\rho x$.

Іншими словами, відношення симетрично, якщо всякий раз, як виконується $x\rho y$, *виконується і* $y\rho x$.

Приклади. З того, що «*x* родич *y*», витікає, що «*y* родич *x*», — відношення симетрично. Відношення «*x* – сестра *y*», визначене на множині всіх людей, несиметрично: можливо, що *y* є братом *x*. Проте те ж відношення, визначене на множині жінок, є симетричним.

Визначення 1.2.14. Відношення ρ на множині X називається **антисиметричним**, якщо для будь-яких $x, y \in X$, з того, що $x\rho y$ *і* $y\rho x$, *слідує* $x = y$.

Приклади. Відношення $x \leq y$ антисиметрично: з того, що $x \leq y$ і $y \leq x$, витікає, що $x = y$, тобто це один і той же елемент.

Визначення 1.2.15. Якщо для будь-яких $x, y \in X$ з того, що $x\rho y$, *витікає, що не виконується* $y\rho x$, *то відношення називається* ***асиметричним***.

Приклади. Відношення «*x* предок *y*» і «*y* нащадок *x*» асиметричні, причому вони є зворотними один до одного.

Відношення строгого порядку $x < y$ є асиметричним: якщо виконується $x < y$, то не виконується $y < x$.

Визначення 1.2.16. Відношення ρ називається **транзитивним**, якщо з того, що $x\rho y$ *і* $y\rho z$, *слідує* $x\rho z$. Для транзитивного відношення виконується $\rho^2 \subseteq \rho$.

Приклади. Відношення строгого порядку $x < y$ є транзитивним, тому що, якщо виконується $x < y$ та $y < z$, то виконується $x < z$. Транзитивним також є відношення $x \geq y$, або $x = y$. Відношення *«x – родич y»* не є транзитивним, тому що може бути *«x – родич y»* та *«y – родич z»*, *x* та *z* – родичі *y* з різних боків, і самі *x* та *z* не є родичами один до одного.

Тепер ми можемо привести визначення ще однієї операції над відношеннями – транзитивного замикання.

Визначення 1.2.17. Транзитивним замикання відношення ρ на X називають найменше за включенням транзитивне відношення $\rho_{тр}$, що містить відношення ρ як підмножину *(*$\rho_{тр}$ - найменше транзитивне розширення ρ*):* $\rho \subseteq \rho_{тр}$. Якщо існує транзитивне відношення γ та $\rho \subseteq \gamma$, то $\rho_{тр} \subseteq \gamma$.
Транзитивне відношення співпадає зі своїм транзитивним замиканням: $\rho = \rho_{тр}$.

Розглянемо ще декілька **прикладів.** Візьмемо множину X={1, 2, 3}. Тоді декартовий квадрат $X \times X$ = {<1,1>, <1,2>, <1, 3>, <2, 1>, <2,2>, <2,3>, <3, 1>, <3, 2>, <3, 3>}. Це – повне відношення. Виберемо різні підмножини декартового добутку і розглянемо властивості отриманих відношень (спосіб завдання – перелік):

I

ρ_1={<**1,1**>, <2, 1>, <**2,2**>, <3, 1>, <3, 2>, <**3, 3**>} – відношення **рефлексивне** (зосереджуємося на однієї властивості, для чіткого уявлення визначення; наприклад, це відношення ще є антисиметричним, але про антисиметричні відношення скажемо окремо);

ρ_2={<2, 1>, <2,3>, <3, 1>, <3, 2>} – відношення **антирефлексивне,** немає жодної пари ***<x, x>;***

ρ_3={<**1,1**>, <2,3>, <3, 1>, <3, 2>, <**3, 3**>} – відношення ні є рефлексивним, але воно і ні є антирефлексивним;

II

ρ_4={<1,2>, <2, 1>, <2,3>, <3, 2>} – відношення **симетричне**;

ρ_5={**<1,1>,** <1, 2>, <2,3>, <3, 1>, **<3, 3>**} – відношення **антисиметричне**;

ρ_6={<1,1>, **<1, 2>, <2, 1>,** <2,3>, <3, 2>, <3, 3>} – відношення теж **симетричне,** але **не антисиметричне**;

ρ_7={<1,2>, <1, 3>} – відношення **асиметричне**;

ρ_8={<1,1>, <1,2>, <2, 1>, <2,2>, <3, 1>, <3, 2>} – відношення з точки зору симетрії - **ніяке**;

ρ_9={<1,1>, <2,2>, <3, 3>} – відношення **симетричне та антисиметричне одночасно**; це відношення – ***x=y*** ***(****транзитивне і рефлексивне теж**)***;

III ρ_{10}={<1,1>,<1,2>,<2,3>,<1,3>,<3,3>} – відношення транзитивне;

ρ_{11}={<1,1>, <**1,2**>, <2, 1>, <2,3>, <**3, 1**>} – відношення не транзитивне (відсутня пара <3, 2>, наприклад;

Що можна сказати про властивості відношення: ρ={<1,2>}? Зрозуміло, що воно антирефлексивне, асиметричне. А як перевірити транзитивність? Якщо в нас є логічний ланцюг $x\rho y$ *і* $y\rho z$, то, перевіряємо слідує або не слідує $x\rho z$ і визначаємося з транзитивністю. А якщо немає підстав у вигляді $x\rho y$ *і* $y\rho z$, то ми нічого не можемо сказати. Але і спростувати теж не можемо.

А, якщо ми знаємо, що це відношення задано на множині X={1, 2} аналітично ρ : «$x<y$», то відповідь буде – транзитивне за змістом предикату.

Якщо ми візьмемо відношення ρ : «$x\leq y$» *на цій самій множині* X={1, 2}, то отримаємо ρ={<1,1>, <1,2>, <2,2>} і вже можемо однозначно визначити властивості: рефлексивне, антисиметричне, транзитивне.

Зауважимо, що повне відношення (повний декартовий добуток, що виступає універсумом для розгляду відношень з будь-якої предметної області) є рефлексивним, симетричним та транзитивним.

Про порожнє відношення без протиріччя ми можемо сказати, що воно є антирефлексивним. Але воно є також симетричним та антисиметричним, як і відношення тотожності, і є транзитивним за неможливістю довести зворотне.

1.2.2. Відношення еквівалентності. Класи еквівалентностіності. Фактор–множина.

Визначення відношення еквівалентності, зображення графа відношення еквівалентності, дослідження та побудова класів еквівалентності та фактор-множини.

Відношення еквівалентності являє собою переклад в ранг строгих математичних понять таких звичайних слів, як "однаковість", "нерозрізненість".

Визначення 1.2.16. Відношення, яке володіє властивостями рефлексивності, симетричності і транзитивності, називається відношенням **еквівалентності**.

Приклади відношень еквівалентності.

Відношення рівності на будь-якій множині є відношенням еквівалентності, причому відношення рівності є в деякому розумінні мінімальним (граничним) випадком відношення еквівалентності.

Геометричне відношення подібності трикутників на площині є відношенням еквівалентності.

Відношення «студенти x і y навчаються в одній групі», де $x, y \in$ { «студенти факультету»}.

Відношення «жити в одному районі», визначене на множині людей, що живуть в м. Києві, є відношенням еквівалентності.

Множина всіх жителів Києва розбивається останнім відношенням еквівалентності на ряд непересічних підмножин, в даному випадку множин людей, що живуть в одному і тому ж районі. Два жителі вважаються еквівалентними по даному відношенню, якщо вони живуть в одному і тому ж районі, і в цьому сенсі вони нерозрізнині, тобто вони володіють однією і тією ж властивістю: «жити в районі «XXX». Ця властивість є визначальною властивістю (предикатом) множини всіх жителів району «XXX». З іншого боку, не можна жити в двох (і більш) районах відразу (в усякому разі, згідно прописці), тому множина жителів різних районів не перетинається. Таким чином, відношення «жити в одному районі» розбиває всю множину жителів міста на ряд підмножин таких, що не перетинаються, і, що всередині кожної підмножини всі жителі еквівалентні по даному відношенню, і ніякі два жителі різних підмножин не знаходяться відносно еквівалентності один з одним. Такі підмножини називаються *класами еквівалентності*.

Дамо строгіше визначення.

Визначення 1.2.17. Нехай на множині X задано відношення еквівалентності ρ. Тоді підмножина $A \subseteq X$ називається **класом еквівалентності по відношенню ρ,** якщо для будь-яких елементів $x, y \in A$ виконується відношення $x\rho y$.

Можна побудувати класи еквівалентності таким чином. Виберемо елемент a_1, що належить X, і утворимо підмножину $A_1 \subseteq X$ з a_1 і всіх елементів, еквівалентних a_1 (таких a_i, для котрих буде виконуватися $a_1\rho\, a_i$). Це буде клас еквівалентності A_1. Далі виберемо елемент $a_2 \in X$ і утворюємо клас A_2, що складається зі всіх елементів, еквівалентних a_2, і т.д. Одержимо систему класів $A_1, A_2, ...$, таку, що будь-який елемент $a_i \in X$ входить тільки в один клас, об'єднання всіх класів $A_1 \cup A_2 \cup ...$ утворює множину X, і для будь-яких i, j $A_i \cap A_j = \varnothing$, тобто множина класів еквівалентності утворює розбиття множини X.

Одержана система класів еквівалентності володіє наступними властивостями.

Теорема 1.2.1.

1. Нехай ρ є відношення еквівалентності на X. Тоді множина класів еквівалентності по відношенню ρ є розбиття множини X. Навпаки, якщо є деяке розбиття $\Re$ множини X, а відношення ρ таке, що $a\rho b$ *тоді і* тільки тоді, коли $a \in A$, $b \in A$, $A \subseteq \Re$, то відношення ρ є відношенням еквівалентності на X.

2. Якщо відношення еквівалентності ρ визначає розбиття $\Re$ множини X, то відношення еквівалентності, визначуване цим розбиттям, співпадає з ρ. Навпаки, якщо деяке розбиття $\Re$ множини X визначає деяке відношення еквівалентності, то розбиття $\Re$ множини X, визначуване цим відношенням ρ, співпадає з $\Re$.

Доведення. Доведення першої частини теореми виходить з властивостей відношення еквівалентності. Кожен елемент X увійде хоч би до одного класу еквівалентності. Припустимо, що деякий елемент b входить одночасно в два класи еквівалентності A_i і A_j. Тоді існує $a_i \in A_i$ таке, що $a_i \rho b$, *і існує* $a_j \in A_j$ таке, що $b \rho a_j$. Але тоді, через властивість транзитивності, $a_i \rho a_j$ *і,* отже, класи A_i *і* A_j є один і той же клас.

Нехай тепер $\Re$ є розбиття множини X. Відношення ρ симетрично за визначенням. Якщо $a \in X$, то в $\Re$ знайдеться така множина A, що $a \in A$, так що ρ – рефлексивне. Покажемо, що воно – транзитивне. Нехай $a \rho b$ *і* $b \rho c$. *Тоді в* $\Re$ *знайдеться таке* A, *що* a, $b \in A$, *і таке* B, *що* b, $c \in B$. *Оскільки* $b \in B$ *і* $b \in A$, *то* $A = B$. Отже, $a \rho c$ виконується.

На підставі цієї теореми можна дати конструктивне визначення відношення еквівалентності: відношення ρ на множині X називається еквівалентністю, якщо існує розбиття X на підмножини $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ таке, що відношення $x \rho y$ *виконується тоді і тільки тоді, якщо* x *і* y належать одній і тій самій підмножині.

Позначатимемо клас еквівалентності, породжений елементом $a \in X$ через [a], якщо $a \in [a]$. Тоді, якщо $a \rho b$, *то* $[a] = [b]$.

Визначення 1.2.18. Множина класів еквівалентності множини X по відношенню ρ називається фактор-множиною множини X по відношенню ρ і позначається $[X / \rho]$.

Приклади:

1. Кожен клас еквівалентності по відношенню рівності складаються з одного елемента. Фактор-множина по відношенню рівності складається з елементів самої множини.

2. Властивість паралельності прямих на площині визначає відношення еквівалентності. Фактор-множина цього відношення – множина всіх напрямків на площині. Її може бути описано, як множину всіх кутів нахилу прямої до осі абсцис, тобто інтервал від 0° до 360°.

3. Нехай відношення ρ визначено на множині $\mathbf{Z}$: $x\rho y \Leftrightarrow (x\text{-}y)/3$ (тобто $x \equiv y$ (mod 3)). Це відношення порівнянності за модулем 3 (класи відрахувань, лишків), яке означає, що різниця цілих чисел $x - y$ ділиться на 3 без остачі. Будемо позначати це так: $x\rho y \Leftrightarrow (x-y)/3=k \in \mathbf{Z}$ (*мається на увазі, що результат ділення – ціле число, а не те, що вони дорівнюють одному і тому самому значенню k).*

Розв'язок. З'ясуємо, які властивості має відношення. Нехай $x, y \in \mathbf{Z}$.

1. Рефлексивність: $x\rho x \Leftrightarrow (x - x)/3 = 0/3 = 0$. $0\in \mathbf{Z}$, Тому відношення рефлексивне.

2. Симетричність: $x\rho y \Rightarrow y\rho x$, тобто, якщо $x\rho y$, то $y\rho x$.

Нехай $(x - y)/3 = k \in\mathbf{Z}$. Тоді $y\rho x \Leftrightarrow (y - x)/3 = -(x - y)/3 = - k \in \mathbf{Z}$. Отже, умова симетричності виконується.

3. Транзитивність: $x\rho y$ і $y\rho z \Rightarrow x\rho z$.

Нехай $(x - y)/3 = k_1 \in\mathbf{Z}$, тобто $x - y = 3k_1$, і $(y - z)/3 = k_2 \in\mathbf{Z}$, тобто $y - z = 3k_2$. Розв'яжемо цю систему рівнянь, додавши їх: $x - y + y - z = 3(k_1 + k_2)$, тобто $x - z = 3(k_1 + k_2) = k_3 \in \mathbf{Z}$. Властивість транзитивності виконується.

Відношення $x \equiv y$ (mod 3) є відношенням еквівалентності.

Знайдемо його фактор-множину $[\mathbf{Z}/\rho]$.

Довільне число x можна записати у вигляді $3q + r$, $0 \le r < 3$, де q – ціле, а r – остача від ділення числа x на 3. У одному і тому ж класі еквівалентності опиняться усі числа, що дають при діленні на 3 однакове число r у остачі. Ми отримаємо три класи еквівалентності:

$[0] = \{0, 3, 6, 9, 12, \ldots\}$; $[1] = \{1, 4, 7, 10, 13, \ldots\}$; $[2] = \{2, 5, 8, 11, 14, \ldots\}$.

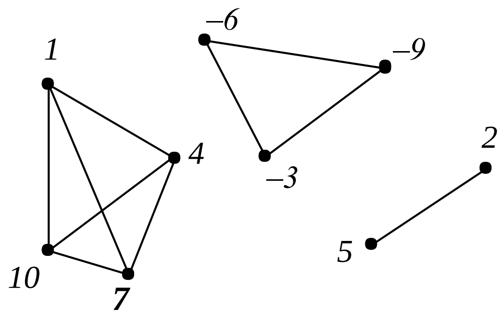
Кожен клас можна охарактеризувати одним представником цього класу, і, у даному випадку, найбільш зручно вибрати таким представником остачу r. Отже, фактор-множина відношення $x \equiv y$ (mod 3) буде $[\mathbf{Z}/\rho] = \{[0], [1], [2]\}$.

Нехай для даного відношення задана деяка підмножина X множини цілих чисел: $X = \{-3, -6, -9, 1, 2, 4, 5, 7, 10\}$: $x\rho y \Leftrightarrow (x - y)/3 = k, k\in \mathbf{Z}$. Побудуємо матрицю відношення ρ на цій множини.

За матрицею відношення можна ще раз перевірити його властивості. Діагональні елементи матриці дорівнюють 1; що свідчить про те, що відношення рефлексивне. Матриця симетрична відносно головної діагоналі, отже, відношення симетричне. Транзитивність також можна перевірити за матрицею відношення. Якщо для усіх пар $<x, y>$, $<y, z>$ виконується також $<x, z>$, то відношення транзитивне. Наприклад, на перетині рядка і стовпця <1, 4> стоїть 1, і на перетині <4, 7> стоїть 1; перевіримо перетин рядка і стовпця <1, 7>: тут також стоїть 1. Отже, для цих пар виконується властивість транзитивності. Для перевірки транзитивності відношення необхідно дослідити усі пари $<x, y>$, $<y, z>$ і $<x, z>$.

Y *X*	–3	–6	–9	1	2	4	5	7	10
–3	1	1	1	0	0	0	0	0	0
–6	1	1	1	0	0	0	0	0	0
–9	1	1	1	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	0	1	0	1	1
2	0	0	0	0	1	0	1	0	0
4	0	0	0	1	0	1	0	1	1
5	0	0	0	0	1	0	1	0	0
7	0	0	0	1	0	1	0	1	1
10	0	0	0	1	0	1	0	1	1

Побудуємо граф відношення. Елементи заданої множини є вершинами графу. Матриця відношення визначає, які вершини графу зв’язані одна з одною (це матриця суміжності графу). За першим рядком матриці знаходимо, що вершина –3 зв’язана сама з собою та з вершинами –6, –9. З’єднуємо ці вершини дугами (на малюнку петлі, що поєднують вершини самі з собою, можна не зображати). Елемент –6 також зв’язаний з елементами –3 і –9, тому проведемо дугу з вершини –6 у вершину –9 (є дуга <–6, –9> та <–9, –6> – залишаємо неорієноване ребро між елементами –6 та –9, щоб не завантажувати зайвими стрілками малюнок). Третій рядок матриці вказує, що елемент – 9 зв’язаний з –3 і –6. Елементи –3, –6, –9 не поєднані більше ні з якими іншими вершинами, тобто вони утворюють один клас еквівалентності. Аналогічно побудуємо усі інші зв’язки між вершинами. У результаті отримаємо незв’язаний неорієнтований граф (див. малюнок), який складається з трьох зв’язних компонентів; кожен з яких відповідає одному класу еквівалентності.



Граф відношення $x \equiv y$ (mod 3).

Таким чином, класи еквівалентності на заданій множині: {–3, –6, –9} {2, 5}, {1, 4, 7, 10}. Всередині кожного класу будь-які два елементи знаходяться у відношенні $x \equiv y$ (mod 3) один до одного: різниця між ними ділиться на 3 без остачі. Між елементами різних класів це відношення не виконується. Кожний клас еквівалентності характеризується остачею від ділення різниці $x - y$ на 3: у класі еквівалентності {–3, –6, –9} остача дорівнює 0, у класі {2, 5} остача дорівнює 1, у класі {1, 4, 7, 10} остача дорівнює 2. Фактор-множина $[X/\rho] = \{[0], [1], [2]\}$.

4. Відношення визначено на множині $\boldsymbol{R}$: $x\rho y \Leftrightarrow x - y \in \boldsymbol{Z}$.

Розв'язок. Нехай $x, y \in \boldsymbol{R}$. Визначимо властивості відношення $x\rho y \Leftrightarrow x–y \in \boldsymbol{Z}$.

1) Рефлексивність: $x - x = 0 \in \boldsymbol{Z}$. Відношення рефлексивне.

2) Симетричність: якщо $x - y = k \in Z$, то $y - \mathrm{x} = -(\mathrm{x} - y) = -k \in \boldsymbol{Z}$. Відношення симетричне.

3) Транзитивність: якщо $x - y = k_1 \in Z$ і $y - z = k_2 \in Z$, то $(x - y) + (y - z) = x - y + y - z = x - z = k_1 + k_2 = k_3 \in \boldsymbol{Z}$. Відношення транзитивне.

Дане відношення є відношенням еквівалентності. Знайдемо його фактор–множину. Різниця двох дійсних чисел буде дорівнювати цілому числу тільки тоді, коли їх дрібні частини будуть однаковими. Отже, кожен клас еквівалентності буде відповідати одному дійсному числу з інтервалу [0; 1). Наприклад, множина натуральних чисел із дрібною частиною 0 – це один клас еквівалентності: [0] = {0; 1; 2; 3; …}; усі дійсні числа з дрібною частиною .01 – інший клас еквівалентності: [0.01] = {0.01; 1.01; 2.01; 3.01; …}; клас [0,12] = {0,12; 1,12; 2,12; …}, і так далі. Фактор-множина $[\boldsymbol{R}/\rho] = [0; 1)$.

5. Відношення $x\rho y \Leftrightarrow$ *«x та y числа однакової парності»* визначене на множині X={1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}.

Зауважимо, що у нас на множині X задана деяка функція $\eta(x)$ – «парність x» (а в задачі з прикладу 3, наприклад, «остача від ділення на 3»). Якщо відношення визначається як порівняння функції від x з функцією від y, $\eta(x)=\eta(y)$, то таке відношення завжди буде відношенням еквівалентності, тому що для нього буде виконуватися рефлексивність, симетричність і транзитивність. В цьому сенсі і є те, що відношення рівності $x=y$ є мінімальним випадком відношення еквівалентності.

Відношення $x\rho y \Leftrightarrow$ *«x та y числа однакової парності»* розіб'є $X=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ на два класи еквівалентності – числа парні і числа непарні: $[0]=\{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$ та $[1]=\{1, 3, 5, 7, 8, 11\}$. Фактор-множина $[X/\rho] =\{[0],[1]\}$. Граф відношення еквівалентності буде складатися з двох незв'язних повних підграфів *(з того, шо для будь-якого відношення еквівалентності виконується рефлексивність та симетричність, не прийнято перевантажувати малюнок зайвими стрілками та петлями).*

6. Розглянемо відношення ρ, що визначено на множині $\mathbf{Z}$ $x\rho y \Leftrightarrow (x^2-y^2)/3=k \in \mathbf{Z}$. Чим воно відрізняється від відношення з прикладу 3? Через зауваження до прикладу 5, ми відразу бачимо, що це є відношенням еквівалентності, як і відношення з прикладу 3. Чи будуть співпадати класи еквівалентності відношень $x\rho y \Leftrightarrow (x^2-y^2)/3$ та $x\rho y \Leftrightarrow (x-y)/3$?

Запишемо x у вигляді $3q + r$ та y як $3s + t$, де q, s – частки, r, t – остачі від ділення чисел x *та* y на 3 і $r, t \in \{0, 1, 2\}$.

Візьмемо $x^2-y^2= (3q + r)^2- (3s + t)^2= (9q^2+6qr+r^2) - (9s^2+6st+t^2)=$

$=(9q^2+6qr-9s^2-6st)+(r^2- t^2)=3(3q^2+2qr-3s^2-2st)+(r+ t)(r- t).$

Ми бачимо, що x^2-y^2 буде ділитися на 3 без остачі, якщо без остачі буде ділитися $(r+t)(r-t)$. Результат $r-t$ по-перше, забезпечує виконання рефлексивності, по-друге, збирає в один клас еквівалентності числа з однаковим значенням ($x \bmod 3$). Але на відміну від задачі $x\rho y \Leftrightarrow (x-y)/3$ в один клас еквівалентності потрапляють числа, остачі від ділення на 3 яких в сумі діляться на 3 ($(r+ t)/3=k \in \mathbf{Z}$).

Отже, $[X/\rho] =\{[0],[1$ *та* $2]\}$. Якщо взяти $X=\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, то отримаємо два наступні класи еквівалентності:

$[0]= \{0, 3, 6, 9\}$ *та* $[1]= \{1, 2, 4, 5, 7, 8, 10\}$ і відповідно два підграфи.

Таким чином, для відношення $x\rho y \Leftrightarrow (x-y)/m$ ($m \in \boldsymbol{Z}$) завжди буде m класів еквівалентності від $[0]$ до $[m-1]$, а для відношення $x\rho y \Leftrightarrow (x^2-y^2)/m$ треба вираховувати.

Наприклад, для $x\rho y \Leftrightarrow (x^2-y^2)/5$ маємо 3 класи, а для $x\rho y \Leftrightarrow (x^2-y^2)/6$ – 4 класи.

Нагадаємо, що клас еквівалентності – це підмножина множини, на якій задано відношення еквівалентності. А саме відношення еквівалентності – це підмножина декартового добутку. Тобто множина впорядкованих пар.

7. За заданим розбиттям відновити відношення еквівалентності:

$[q]=\{q, w, e, r\}$,

$[a]=\{a, s, d\}$,

$[z]=\{z, x\}$.

Множина X={q, w, e, r, a , s, d, z, x}. Відношення $\rho=\{<q,q>, <w,w>, <e,e>, <r,r>, <a,a>, <s,s>, <d,d>,<z,z>, <x,x>, <z,x>, <x,z>, <a,s>, <a,d>, <s,d>, <s,d>,<d,a>, <s,a>, <q,w>, <q,e>, <q,r>, <w,q>, <e,q>, <r,q>, <w,e>, <e,w>, <w,r>, <r,w>, <e,r>, <r,e>\}$.

З класу еквівалентності [q] ми отримали 16 елементів відношення (впорядкованих пар) – повний декартовий добуток квадрата множини з 4 елементів. З класу [a] – 9, з [z] – 4. Пари для відновлення відношення ρ визначалися за умови виконання рефлексивності і симетричності для елементів, які належать одному класу еквівалентності (при рефлексії та повної симетрії транзитивність автоматично виконується), і при неможливості $x\rho y$, якщо x та y належать різним класам.

Відношення еквівалентності – не єдиний тип відношення, який виділяється в теорії вивчення бінарних відношень:

- Відношення еквівалентності – рефлексивне, симетричне, транзитивне;
- Відношення толерантності – рефлексивне, симетричне (породжує класи толерантності, які на відміну від класів еквівалентності можуть перетинатися; у випадку, коли вони не перетинаються, маємо відношення еквівалентності; відношення еквівалентності є окремим випадком відношення толерантності; приклади відношення толерантності: «слова Х та У відрізняються однією літерою», «Х – родич У»);
- Відношення покриваємості (домінування) – антирефлексивне, асиметричне;

- Відношення строгого порядку – антирефлексивне, асиметричне, транзитивне;
- Відношення нестрогого порядку – рефлексивне, антисиметричне, транзитивне;
- Відношення квазіпорядку (передпорядку) – рефлексивне, транзитивне.

Тема 1.3. Відображення і функції.

1.3.1. Відповідності, відображення, функції. Ін'єкція, сюр'єкція, бієкція.

Властивості відповідностей, відображень. Поняття про ін'єкцію, сюр'єкцію, бієкцію. Визначення функціональних відображень та їх різновиди.

Ми розглянули бінарні відношення, які є підмножинами декартова добутку двох множин. Бінарні відношення, визначені на декартовому квадраті множини, представляють найбільший інтерес, оскільки вони мають ряд властивостей, які дозволяють виділяти такі корисні відношення, як відношення еквівалентності, порядку тощо. Для відношень, утворених різними множинами, коли $\rho \subseteq E \times F$, говорити про рефлексивність, симетричність і транзитивність вже не має сенсу, оскільки перша і друга координата ρ можуть мати різну природу. Наприклад, відношення «х народився в році у» є підмножиною декартового добутку множини людей і множини років (підмножини цілих додатних чисел) і ставить у відповідність кожній людині рік його народження. Для дослідження подібних відношень запроваджуються поняття відповідності, відображення, функції.

Визначення 1.3.1. Говорять, що між множинами $\boldsymbol{E}$ і $\boldsymbol{F}$ визначена **відповідність Г**, якщо задана деяка довільна підмножина декартового добутку $\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{F}$. Множина $\boldsymbol{E}$ називається *областю визначення,* $\boldsymbol{F}$ — *областю значень* відповідності **Р.**

Відповідність, зворотну **Г**, позначимо $\mathbf{Г}^{-1}$, де $\boldsymbol{F}$ — область визначення, $\boldsymbol{E}$ — область значень $\mathbf{Г}^{-1}$.

Визначення 1.3.2. *Відображенням* множини $\boldsymbol{E}$ на множину $\boldsymbol{F}$ називається така відповідність, яка кожному елементу $x \in \boldsymbol{E}$ співставляє принаймні один елемент $y \in \boldsymbol{F}$. Тоді елемент y називається *образом* елементу x, а x — *прообразом* елементу y, або *змінною*, або *аргументом*. Відображення $\boldsymbol{E}$ в $\boldsymbol{F}$ позначатимемо f: $\boldsymbol{E} \rightarrow \boldsymbol{F}$, де f – ім'я відображення.

Приклад. На рис. 1.3 показане відповідність між множинами ***E*** і ***F***, на рис.1.4. — відображення множини ***E*** в множину F**.**

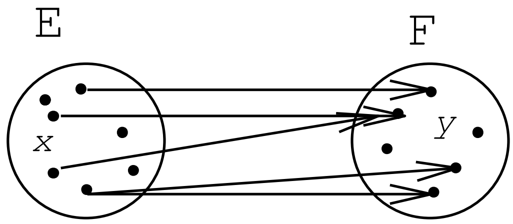


Рис.1.3. Відповідність.

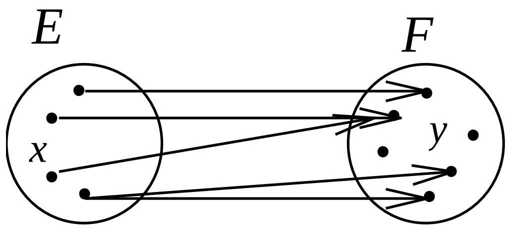


Рис.1.4. Відображеня.

Визначення 1.3.3. Відображення ***E*** на ***F*** називається *сюр'єктивним*, або *сюр'єкцією*, або *накладенням,* якщо будь-який елемент $y \in \boldsymbol{F}$ є образ принаймні одного елементу $x \in \boldsymbol{E}$, тобто $y \in \boldsymbol{F}\ \exists x \in \boldsymbol{E}$ ($y = \ \mathbf{\Gamma(x)}$)**).**

Умова $y\ |\mathbf{\Gamma}^{-1\{y\}}| \geq 1$ характеризує сюр'єкцію. Це означає, що кожен елемент з *E* має не менше одного прообразу в *F*. На графі відповідності в кожен елемент *y* входить принаймні одна дуга (рис. 1.5.) і зворотне відображення **Γ–1{y}** не порожньо.

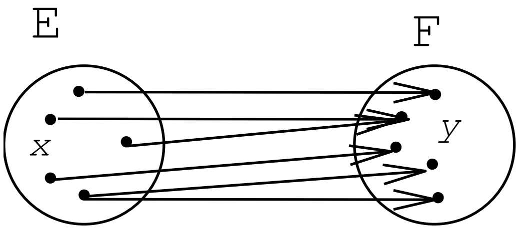


Рис. 1.5. Сюр'єкция.

Визначення 1.3.4. Відображення ***E*** в ***F*** називається **ін'єкцією**, або *вкладенням,* якщо кожен елемент $y \in \boldsymbol{F}$ є образ тільки одного елементу $x \in \boldsymbol{E}$**,** або взагалі не має прообразу.

В цьому випадку ***E*** ін'єктивно відображається в ***F***. На графі відповідності в кожен елемент *y* входить найбільше одна дуга, тобто умова $y \in \boldsymbol{F}\ |\mathbf{\Gamma}^{-1\{y\}}| \leq 1$ характеризує ін'єкцію. На рис. 1.6. показана ін'єкція: у кожен елемент *y* входить найбільше одна дуга; деякі елементи *y* не мають прообразів в ***E*.**

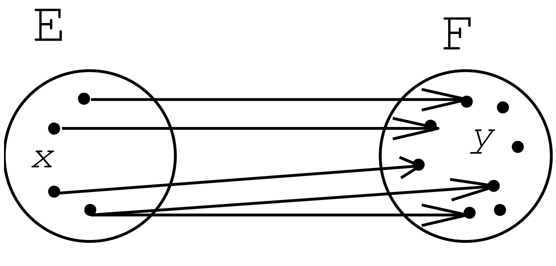


Рис.2.6. Ін'єкція.

Визначення 1.3.5. Якщо відображення є одночасно і сюр'єкцією, і ін'єкцією, то воно називається *бієктивним відображенням*, або *бієкцією*.

В цьому випадку кожен елемент $\boldsymbol{F}$ є образом деякого, і притому єдиного, елементу з $\boldsymbol{E}$**.** На графі відповідності на рис. 1.7. показана бієкція: у кожен елемент y входить одна і лише одна дуга, тобто при бієкції кожен образ має тільки один прообраз: $\forall y \in \boldsymbol{F}\ |\mathbf{\Gamma}^{-1\{y\}}| = 1$.

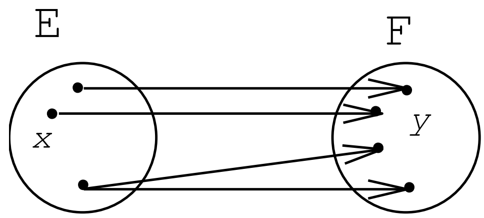


Рис.1.7. Бієкція.

Визначення 1.3.6. Відповідність, при якій кожному $x \in \boldsymbol{E}$ зіставляється один і лише один елемент $y \in \boldsymbol{F}$, називається *функціональною відповідністю*, або *функцією*.

Для функціонального відображення виконується умова: $\forall x \in \boldsymbol{E}\ |\mathbf{\Gamma}\{\mathbf{x}\}| = 1$. Іншими словами, функція — це відповідність або відображення, при якому два різні елементи не мають однакових перших координат, тобто якщо $<x, y>, <x, z> \in f$, то $y = z$. Якщо функціональна відповідність не є відображенням, тобто в $\boldsymbol{E}$ існують елементи, що не мають образу в $\boldsymbol{F}$, то воно називається *частково визначеною функцією*. Функціональне відображення є повністю визначеною функцією, або просто *функцією*.

Функціональна бієкція $\boldsymbol{E} \rightarrow \boldsymbol{F}$ встановлює таке відображення, при якому кожен елемент з $\boldsymbol{E}$ має єдиний образ в $\boldsymbol{F}$**,** а кожен елемент з $\boldsymbol{F}$ має єдиний прообраз в $\boldsymbol{E}$, тому функціональна бієкція називається *взаємно однозначною відповідністю.*

Функціональне відображення $\boldsymbol{E} \rightarrow \boldsymbol{F}$, яке є сюр'єкція, можливо тільки в тому випадку, якщо кількість елементів в $\boldsymbol{E}$ не менш кількості елементів в $\boldsymbol{F}$, тобто $|E| \geq |F$ Для функціональної ін'єкції, навпаки, повинно виконуватися співвідношення $|E| \leq |F|$.

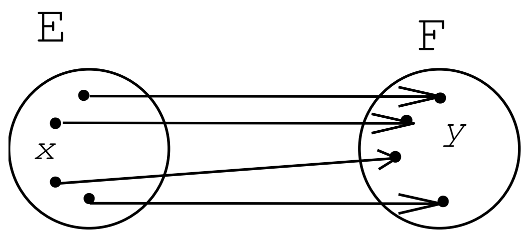


Рис.1.8. Функціональна бієкція.

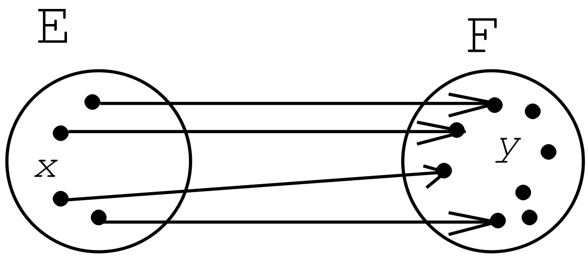


Рис.1.9. Функціональна ін’єкція.

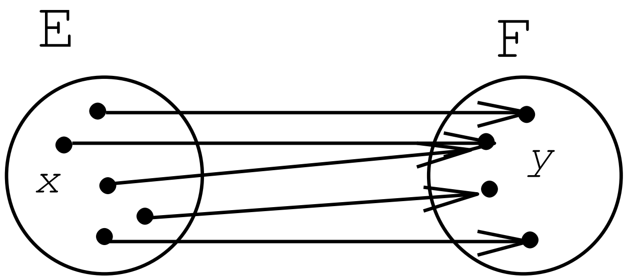
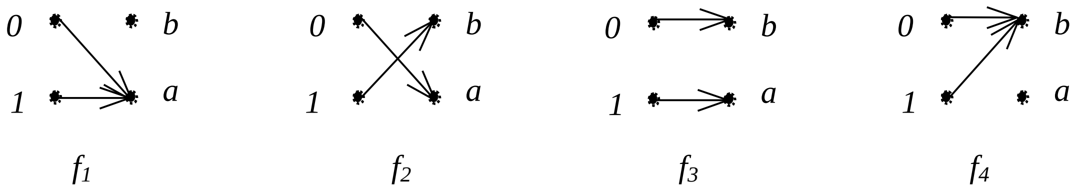


Рис.1.10. Функціональна сюр’єкція.

1.3.2. Кардинальна степінь множин

Якщо ***E*** та ***F*** — дві множини, то можна говорити про деяку нову множину – множину функціональних відображень ***E*** в ***F***.

Приклад. На рис. 1.11 показана множина всіх функціональних відображень з ***E*** = {*0, 1*} в ***F*** = {*a, b*}. Та ж сама множина задана в таблиці – це множина всіх одномісних функцій[4], що визначені на ***E*** зі значенями в ***F*.**



x	f_1	f_2	f_3	f_4
0	*a*	*a*	*b*	*b*
1	*a*	*b*	*a*	*b*

Рис. 1.11. Множина відображень ***E*** *= {0, 1} в* ***F*** *= {a, b}.*

[4] Наприклад, $f_1(0)$=a; $f_4(1)$-b.

З таблиці видно, що множину всіх функцій з $E = \{0, 1\}$ в $F = \{a, b\}$ можна бієктивно відобразити на декартовий добуток $F \times F$, так як кожнії функції можна поставити у відповідність впорядковану пару з $F \times F$. В даному прикладі такою біекцією буде:

$f_1 \Leftrightarrow \langle a, a\rangle$, $f_2 \Leftrightarrow \langle a, b\rangle$, $f_3 \Leftrightarrow \langle b, a\rangle$, $f_4 \Leftrightarrow \langle b, b\rangle$.

Якщо E складається з n елементів $x_1, x_2, ..., x_n$, то множину (одномісних) функцій з E в F можна бієктивно відобразити на F^n, так як кожне таке відображення еквівалентно завданню системи $\langle y_1, y_2, ... , y_n\rangle \in F^n$ образів елементів $x_1, x_2, ..., x_n$ при цьому відображенні. Тому кількість функціональних відображень визначається кількістю елементів в декартовом добутку F^n, де n - кількість елементів множини E. У нашому прикладі для f: $\{\{0, 1\} \to \{a, b\}$ кількість функцій $|f| = 2^2 = 4$. Якщо $|E| = 3$, $|F| = 2$, то $|f| = 2^3$. У загальному випадку $|f| = |F|^{|E|}$.

Це дає підставу позначати множину всіх функціональних відображень $\{f: E \to F\}$ у вигляді степені F^E. Таким чином, ми визначили ще одну операцію над множинами - це зведення множини в степінь іншої множини: F^E. Результатом її є множина всіх функціональних відображень $E \to F$, тобто множина всіх одномісних функцій, визначених на E зі значеннями в F. На відміну від декартової степіні множин, степінь множин F^E як множину всіх функціональних відображень $E \to F$ називають *кардинальною степінню*.

Визначення 1.3.9. Множина всіх функціональних відображень $\{f: \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{F}\}$ називається *(кардинальною) степінню множин* і позначається $\boldsymbol{F^E}$.

Якщо при зведенні в степінь $\boldsymbol{E} = \varnothing$, то $f(\varnothing) = \varnothing$, таким чином, $\boldsymbol{F}^{\varnothing} = \varnothing$.

Приклад. Розглянемо множину $A = \{a, b, c\}$ та її множину-степінь $\wp$ (A) = {{a, b, c}, {a, b}, {a, c}, {b, c}, {a}, {b}, {c}, ∅}. Поставимо у відповідність кожній підмножині множини $\wp$ (A) характеристичний вектор $\langle x_a, x_b, x_c\rangle$, де кожна координата може приймати значення 0 або 1 в залежності від того, входить відповідний елемент до підмножини або ні (рис.1.12).

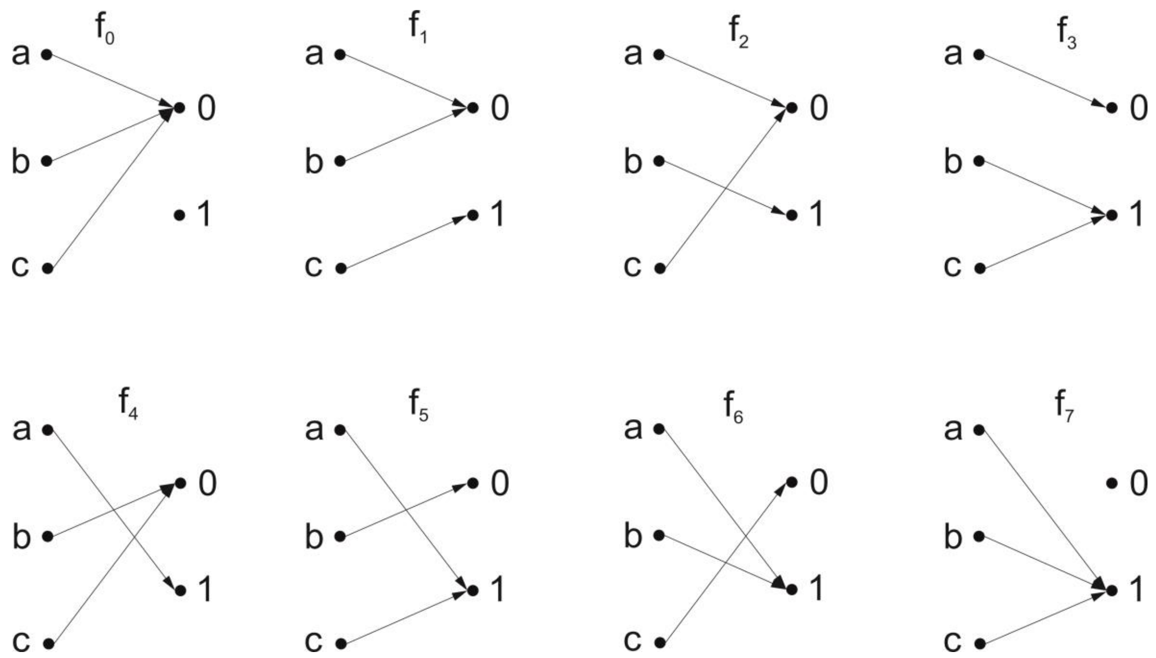


Рис. 1.12. Множина відображень $\boldsymbol{E} = \{a, b, c\}$ *в* $\boldsymbol{F} = \{0, 1\}$.

Наприклад, підмножині {a, c} відповідає вектор <1, 0, 1> (f_5); підмножині {b} – <0, 1, 0> (f_2); а $\varnothing$ –<0, 0, 0> (f_0). Ці дані можна звести до таблиці (характеристичний вектор розміщений стовпчиком):

x	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7
a	0	0	0	0	1	1	1	1
b	0	0	1	1	0	0	1	1
c	0	1	0	1	0	1	0	1

І ця таблиця демонструє не що інше, як множину всіх одномісних функцій, що визначені на ***{a, b, c}*** зі значеннями в ***{0, 1},*** і їх кількість визначається як кардинальна степінь множин $\{a, b, c\} \to \{0, 1\}:\ 2^{|\{a,b,c\}|}$, що доводить, ще в один спосіб, що $|\wp\ (A)\} = 2^n$.

1.3.3. Композиція відображень.

Теорема о композиції відображень. Властивості композиції. Теорема про існування зворотної функції.

Визначення 1.3.10. Хай дані три множини $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{F}$ і $\boldsymbol{G}$, і задані відображення f: $\boldsymbol{E} \to \boldsymbol{F}$, g: $\boldsymbol{F} \to \boldsymbol{G}$. Тоді **композицією** відображень $g \circ f$: $\boldsymbol{E} \to \boldsymbol{G}$ називається відображення $\boldsymbol{E}$ в $\boldsymbol{G}$, яке визначається формулою $g \circ f = g(\mathrm{f(x)})$.

Іншими словами, якщо існує множина пар $<x, y> \in f$ і $<y, z> \in g$, то множина пар $<x, z> \in g \circ f$ утворює композицію відображень $g \circ f$. Запис $g \circ f$ проводиться в порядку, зворотному тому, в якому проводяться операції f: $\boldsymbol{E} \to \boldsymbol{F}$, g: $\boldsymbol{F} \to \boldsymbol{G}$. Таким чином, в математиці прийнято правило, згідно якому композицію відображень $g \circ f$ треба починати з виконання операції, яка розташована справа *[не складно запам'ятати за формою запису, тому що $g \circ f = g(f)$, тому починаємо з f]*.

Приклад.

1. Нехай f: $\boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R} \Leftrightarrow y = x - 1$; g: $\boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R} \Leftrightarrow y = e^x$.

Композиція функцій $g \circ f$: $\boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R} \Leftrightarrow y = e^{x-1}$.

2. Нехай f: $\boldsymbol{R} \to \boldsymbol{Z} \Leftrightarrow y = [\mathrm{x}]$ (ціла частина числа x);

g: $\boldsymbol{Z} \to \{0, 1\} \Leftrightarrow (y)\ mod\ 2$. Тоді $g \circ f$: $\boldsymbol{R} \to \{0, 1\} \Leftrightarrow ([x])\ mod\ 2$ – остача від ділення цілої частини числа x на 2.

Теорема 1.3.1. Композиція відображень асоціативна, тобто, якщо, g, h — відображення $\boldsymbol{E}$ в $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{F}$ в $\boldsymbol{G}$ і $\boldsymbol{G}$ в $\boldsymbol{H}$ відповідно, то $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$, що записується у вигляді: $h \circ g \circ f$.

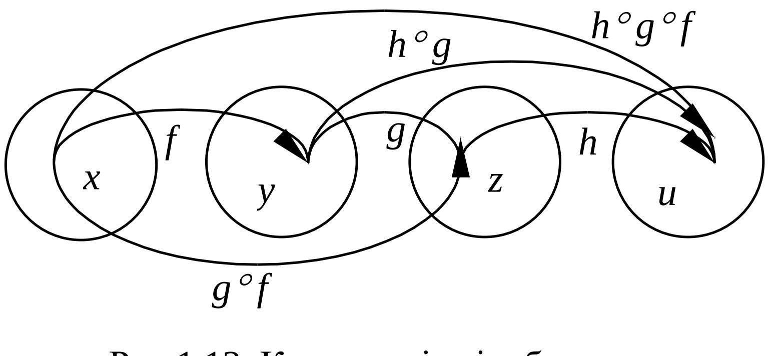


Рис.1.13. Композиція відображень.

Доведення. Нехай $<x, u> \in h \circ (g \circ f)$, $<x, z> \in g \circ f$, $<z, u> \in h$. Оскільки $<x, z> \in g$, то існує таке, що $<x, y> \in f$, і $<y, z> \in g$, а оскільки існує $<z, u> \in h$, то існує і $<y, u> \in h \circ g$. Отже, якщо $<x, y> \in f$ і $<y, u> \in h \circ g$, то існує і $<x, u> \in (h \circ g) \circ f$ (див. рис. 1.13).

Теорема 1.3.2. Композиція відображень не комутативна.

Доведення цієї теореми очевидне, засновано на самому визначенні композиції.

Для прикладу розглянемо два відображення f: $y = sin(x)$ і g: $y = x^2$., де x, $y \in \boldsymbol{R}$. Композиція $g \circ f$: $y = sin^2 x$, а композиція $f \circ g$: $y = sin\ x^2$. Очевидно, це різні функції.

Теорема 1.3.3. Відображення f: $\boldsymbol{E} \to \boldsymbol{F}$ має зворотне тоді і тільки тоді, коли f — бієкція *(нагадую, що ми розглядаємо функціональні відображення)*.

Доведення.

Достатність. Якщо f — ін'єкція і сюр'єкція, то необхідно довести, що існує f^{-1}: $\boldsymbol{F} \to \boldsymbol{E}$.

Оскільки $f(x)$ — сюр'єкція, то кожен елемент з $\boldsymbol{F}$ має хоч би один прообраз з $\boldsymbol{E}$: $\exists x \in \boldsymbol{E}$ $(f(x) = y)$, тобто відповідність f^{-1}: $\boldsymbol{F} \to \boldsymbol{E}$ усюди визначено на $\boldsymbol{F}$ і, отже, є відображенням. А оскільки $f(x)$ — ін'єкція, тобто для $x_1 \neq x_2$ $f(x_1) \neq f(x_2)$, то кожен елемент y має тільки один прообраз, отже, відображення f^{-1}: $\boldsymbol{F} \to \boldsymbol{E}$ функціонально.

Необхідність. Нехай f^{-1}: $\boldsymbol{F} \to \boldsymbol{E}$ — функціональне відображення. Доведемо, що f — бієкція.

Оскільки f^{-1} — відображення, то кожен елемент y з $\boldsymbol{F}$ має прообраз в $\boldsymbol{E}$, тобто відображення f сюр'єктивно. Оскільки відображення f^{-1} функціонально, то кожному образу $f(x)$ відповідає єдиний прообраз x, тобто f — ін'єкція. Отже, f — бієкція.

Теорема 1.3.4. Якщо f і g — функціональні відображення, відповідно, або просто відображення, або сюр'єкції, або ін'єкції, або бієкції, то можна довести ряд теорем про властивості композиції цих відображень. Ці властивості відображені в таблиці 3.1, де символами позначені: В — відображення, С — сюр'єкція, І — ін'єкція, Б — бієкція.

Таблиця 1.3.1.

$g \circ f$	g: *В*	*С*	*І*	*Б*
f: *В*	В	В	В	В
С	В	С	В	С
І	В	В	І	І
Б	В	С	І	Б

Приклад. Доведемо твердження: *композиція сюр'єкції і ін'єкції є відображення.*

Доказ. Нехай відображення g – сюр'єкція, f – ін'єкція, $g \circ f$ – їх композиція, і нехай $<x, y> \in f$, $<y, z> \in g$, $<x, z>$ $g \circ f$.

Оскільки g – сюр'єкція, то для всякого $z \in G$ існує щонайменше один прообраз $y \in F$, і, можливо, існує пара $<y_1, z> \in g$, $<y_2, z> \in g$, в яких різні елементи $y_1, y_2 \in F$ мають один і той же образ $z \in G$. Оскільки f – ін'єкція, то для всякого $x \in E$ існує не більше одного образу $y \in F$. Якщо y_1 є образ елементу $x \in E$, то z є образ елементу x в G, тобто існує пара $<x, z> \in g \circ f$. Тоді y_2 не має прообразу в F, і, отже, кожен елемент z має тільки один прообраз в E, звідки витікає, що $g \circ f$ не сюр'єкція.

Оскільки f – ін'єкція, то існує пара $<x_1, y_1> \in f$, $<x_2, y_2> \in f$, і $y_1 \neq y_2$, а оскільки g – сюр'єкція, то можливо, що існує пара $<y_1, z> \in g$ $<y_2, z>$ g, і, отже, існує пара $<y_1, z> \in g$, $<y_2, z> \in g$,, звідки витікає, що $g \circ f$ не ін'єкція. Отже, $g \circ f$ – просто відображення.

<u>Зауваження:</u> *Сама композиція не є комутативною. Але властивості композицій, що зведені у таблицю 1.3.1, дають результат симетричний відносно* $g \circ f$ *та* $f \circ g$.

Клітинки, які відмічені у таблиці, відповідають С Ч або В Ч в загальному випадку дають результатом відображення, але все залежить від того, які образи мають у, що не мають прообразів в Е. Зворотна композиція не породжує різночитання.

Приклад. Нехай f: $\boldsymbol{R} \rightarrow \boldsymbol{R} \Leftrightarrow y = x - 1$ – бієкція; g: $\boldsymbol{R} \rightarrow \boldsymbol{R} \Leftrightarrow y = e^{2x}$ – ін'єкція (оскільки немає жодного елементу $x \in \boldsymbol{R}$, для якого $y = 0$ є образом). Композиція функцій $g \circ f$: $\boldsymbol{R} \rightarrow \boldsymbol{R} \Leftrightarrow y = e^{2(x-1)}$ – ін'єкція, за теоремою 1.3.4.

Визначення 1.3.11. Нехай f — функція, визначена на $\boldsymbol{E}$ із значеннями в F**.** Якщо u є відображенням деякої множини E_1 в множину E, то можна побудувати нову функцію $f_1 = f \circ u$ визначену на E_1 із значеннями в F (рис**.** 1.14). Говорять, що в цьому випадку проведена заміна *змінної, або* заміна початкової множини E на E_1, і що f_1 є прообразом f *при цій заміні змінних. Виконав* у виразі $f(x)$ *підстановку* $x = u(x_1)$, одержують вираз $f_1(x_1)$. Іноді це позначають як $f^*(x_1) = f(u(x_1))$.

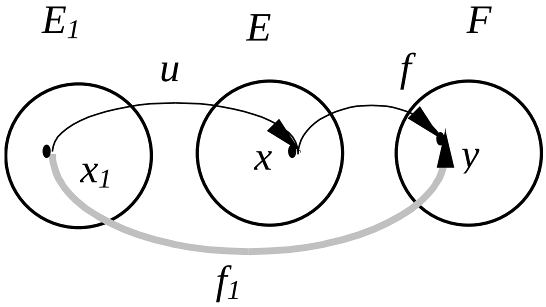


Рис. 1.14. Заміна змінної.

Визначення 1.3.12. Нехай v є деяким відображенням ***F*** в множину F_1. Тоді можна визначити нову функцію $f^* = v \circ f$, визначену на E із значеннями в F_1 (рис. 1.15). В цьому випадку говорять, що проведена заміна *функції або* заміна множини значень F ***на*** множину F_1 і що f^* є образом при цій заміні. Заміну функції називають ще аплікацією *функцій.* Іноді це позначають як $f^*(x) = v(f(x))$.

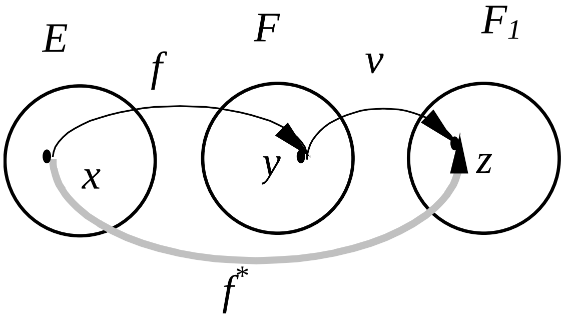


Рис.1.15. Заміна функції.

Приклад. Візьмемо функцію $E \rightarrow F$: $f(x) = x^2$. Також є функції: $E_1 \rightarrow E$: $u(x_1) = x_1+1$; $F \rightarrow F_1$: $v(x) = 2x$. Виконаємо заміну змінної в функції $f(x)$: $f(u(x_1)) = (x_1+1)^2$. Виконаємо заміну функції в функції $f(x)$: $v(f(x)) = 2x^2$. Таким чином, при заміні змінної ми отримуємо нову функцію, що залежить від нової змінної, а при заміні функції – нову функцію, що залежить від тієї ж самої змінної.

Можна провести одночасно і заміну змінної і заміну функції: $f_3 = v \circ f \circ u$. Тут f_3 є образом f при заміні змінної u и заміні функції v. Наприклад, для визначених вище функцій: $f_3 = v \circ f \circ u = v(f(u(x_1))) = 2(x_1+1)^2$.

1.3.4. Алгебра відображень

Нехай f— функціональне відображення $\boldsymbol{E}$ в $\boldsymbol{F}$ і A — підмножина $\boldsymbol{E}$. Позначимо через $f(A)$ підмножину $\boldsymbol{F}$, яку утворено з $f(x)$, що $x \in A$. Підмножина $f(A)$ називається *образом підмножини A при відображенні f:* $A \to f(A)$ або ***звуженням функції*** $E \to f(E)$. Зрозуміло, що $f(\varnothing) = \varnothing$. Виходячи з відображення f, визначимо деяке відображення $A \to f(A)$. Це відображення зберігає операції $\subseteq$, $\cap$, $\cup$, $\backslash$ в в наступному сенсі.

Твердження 1.1. Якщо $A \subseteq B$, то $f(A) \subseteq f(B)$.

Довести самостійно.

Твердження 1.2. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

Доведення.

$f(x) \in f(A \cup B) \Rightarrow x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A$ або $x \in B \Rightarrow f(x) \in f(A)$ або $f(x) \in f(B)$ $\Leftrightarrow f(x) \in f(A) \cup f(B) \Rightarrow f(A \cup B) \subseteq f(A) \cup f(B)$. (1)

$f(x) \in f(A) \cup f(B) \Leftrightarrow f(x) \in f(A)$ або $f(x) \in f(B) \Rightarrow x \in A$ або $x \in B \Leftrightarrow$ $x \in A \cup B \Rightarrow f(x) \in f(A \cup B) \Rightarrow f(A) \cup f(B) \subseteq f(A \cup B)$. (2)

З (1) і (2) $\Rightarrow f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

Твердження 1.3. $f(A \backslash B) \supset f(A) \backslash f(B)$.

Знак $\supset$ розуміється в широкому сенсі.

У якості доведення можна розглянути випадок, коли A – множина парних чисел, B – множина непарних. Відображення f – співставлення чисел з натуральним рядом. Тоді $A \backslash B = A$, *а* $f(A) \backslash f(B) = \varnothing$.

Твердження 1.4. $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$.

Доведення.

Скористуємось таким відомим фактом, що будь-яка множина $A = (A \backslash B) \cup (A \cap B)$. *Тоді розглянемо праву частину твердження 3.4.* $f(A) \cap f(B)$: $f(A) \cap f(B) = f((A \backslash B) \cup (A \cap B)) \cap f((B \backslash A) \cup (A \cap B))$ = *(за твердженням 3.2, що доведено вище для* $\cup$*)* = $(f(A \backslash B)) \cup f(A \cap B)) \cap (f(B \backslash A)) \cup f(A \cap B))$ =*(за законом дистрибутивності для множин)* = $f(A \cap B) \cup (f(A \backslash B) \cap f(B \backslash A))$.

Виходить, що ліва частина твердження 3.4 – $f(A \cap B)$, *а права – теж саме в об'єднанні ще зі однією множиною. З цього виходить, що в загальному випадку має місце* $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$.

Нехай тепер B є деякою підмножиною $\boldsymbol{F}$. Будемо позначати через $f^{-1}(B)$ підмножину $\boldsymbol{E}$, що утворено з усіх таких елементів x, що $f(x) \in B$. Підмножина $f^{-1}(B)$ називається *прообразом множини* B при відображенні f. Це визначення зовсім не означає бієктивністі f. Якщо $y \in \boldsymbol{F}$, то можна говорити про $f^{-1}(\{y\})$, але це — деяка підмножина $\boldsymbol{E}$, а не елемент $\boldsymbol{E}$. Вона може містити більше за одного элемента, якщо f не є ін'єкцією, і може бути порожнім, якщо f не є сюр'єкцією. Якщо f бієктивно, то $f^{-1}(\{y\}) = \{f^{-1}(y)\}$. Вочевидь, що $f^{-1}(\varnothing) = \varnothing$.

Ми зв'язали з відображенням f відображення $B \to f^{-1}(B)$ множини $\wp(\boldsymbol{F})$ в множину $\wp(\boldsymbol{E})$. Це відображення зберігає операції $\subseteq$, $\cup$, $\cap$, $\setminus$, $'$ в наступному сенсі.

Твердження 1.5. Якщо $A \subseteq B$, то $f^{-1}(A) \subseteq f^{-1}(B)$,

Довести самостійно.

Твердження 1.6. $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.

Доведення.

$x \in f^{-1}(A \cup B) \Rightarrow f(x) \in A \cup B \Leftrightarrow f(x) \in A$ або $f(x) \in B \Rightarrow x \in f^{-1}(A)$ або $x \in f^{-1}(B) \Leftrightarrow x \in f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) \Rightarrow f^{-1}(A \cup B) \subseteq f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$. (1)

$x \in f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) \Leftrightarrow x \in f^{-1}(A)$ або $x \in f^{-1}(B) \Rightarrow f(x) \in A$ або $f(x) \in B \Leftrightarrow f(x) \in A \cup B \Rightarrow x \in f^{-1}(A \cup B) \Rightarrow f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) \subseteq f^{-1}(A \cup B)$. (2)

З (1) і (2) $\Rightarrow f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.

Твердження 1.7. $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.

Доведення.

$x \in f^{-1}(A \cap B) \Rightarrow f(x) \in A \cap B \Leftrightarrow f(x) \in A$ і $f(x) \in B \Rightarrow x \in f^{-1}(A)$ і $x \in f^{-1}(B) \Leftrightarrow x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) \Rightarrow f^{-1}(A \cap B) \subseteq f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$. (1)

$x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) \Leftrightarrow x \in f^{-1}(A)$ і $x \in f^{-1}(B) \Rightarrow f(x) \in A$ і $f(x) \in B \Leftrightarrow f(x) \in A \cap B \Rightarrow x \in f^{-1}(A \cap B) \Rightarrow f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) \subseteq f^{-1}(A \cap B)$. (2)

Из (1) и (2) $\Rightarrow f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.

Твердження 1.8.

$f^{-1}(A') = (f^{-1})'(A)$.

Твердження 1.9.

$f^{-1}(A \setminus B) = f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B)$.

Тема 1.4. Потужність множин.

1.4.1. Потужність множин. Кардинальна арифметика. Теорема Бернштейна.

Визначення потужності. Кардинальні числа. Теорема Бернштейна.

Поняття потужності множин пов'язане з оцінкою числа елементів в ньому. У кінцевій множині кількість елементів можна перерахувати. Число елементів у множині X позначається звичайно як $|X|$. Наприклад, якщо $X = \{a,\ b, c\}$, то $|X| = 3$. Якщо дві множини мають однакове число елементів, то між ними можна встановити взаємно однозначну відповідність. Тоді всі кінцеві множини, що мають однакову кількість елементів, будуть еквівалентні по числу елементів в них і утворять один клас еквівалентності. Цей клас еквівалентності може бути позначений цілим натуральним числом, що визначає кількість елементів в множинах. Всі одноелементні множини утворять один клас еквівалентності, двохелементні другий, і так далі. Кожному натуральному числу відповідає клас еквівалентності, що об'єднує всі кінцеві множини з числом елементів, рівним даному числу.

Потужність об'єднання кількох множин можна знайти за формулами:

$|X \cup Y| = |X| + |Y| - |X \cap Y|$;

$|X \cup Y \cup Z| = |X| + |Y| + |Z| - |X \cap Y| - |X \cap Z| - |Y \cap Z| + |X \cap Y \cap Z|$.

(Читачеві пропонується довести ці рівності самостійно і знайти загальний вираз.)

Розглянемо тепер нескінченні множини. Для деяких нескінченних множин також можна встановити взаємно однозначну відповідність елементів. Наприклад, для множині парних натуральних чисел, яку можна представити у вигляді списку: $\{2, 4, 6, 8, \ldots\}$, послідовність $(1, 2, 3, 4, \ldots)$ буде нумерацією цього списку, тобто існує відображення $f(n) = 2n, \forall n \in \boldsymbol{N}$ *множини* натуральних чисел N в множині всіх парних додатних чисел, яка є біекцією. Отже, множина всіх парних натуральних чисел еквівалентна множині всіх натуральних чисел, тобто парних *чисел рівне стільки ж, скільки всіх натуральних чисел. Але, з* іншого боку, множину натуральних чисел можна розбити на дві підмножини парних і непарних чисел, тобто парних чисел рівне половина з всіх натуральних чисел. Отримуємо, що в деякому розумінні частина *рівна цілому*[5]. Можна показати, що

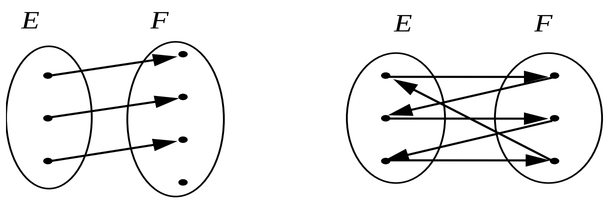
[5] Цей факт, що полягає в тому, що між нескінченною сукупністю і її власною частиною можна встановити взаємно однозначну відповідність, відзначався ще Плутархом та іншими стародавніми вченими. У 1638 році Галілей відзначив, що між цілими додатними числами і їх квадратами існує взаємно однозначна відповідність, і

існує бієкція з множини натуральних чисел на будь-яку його нескінченну підмножину. Дійсно, нехай $P \subset \boldsymbol{N}$. *Виберемо* в Р найменший елемент і визначимо його x_1; вилучимо цей елемент з Р і найменший елемент з тих, що залишилися, визначимо x_2. Продовжуючи цей процес, ми привласнимо номер кожному елементу з Р. Така *нумерація* є бієкція $\boldsymbol{N \to P}$: $n \to x_n$, *де* x_n є n-й *в порядку* зростання елемент Р. Таким образом, множина непарних чисел, множина квадратів натуральних чисел і множина будь-яких лінійних комбінацій, наприклад, ax + b, де a, b $\in$ N, будуть ***еквівалентні*** між собою і увійдуть в один клас еквівалентності.

Визначення 1.4.1. Відношення еквівалентності, яке визначається взаємно однозначною відповідністю елементів двох множин, називається ***равнопотужністю,*** а клас еквівалентності равнопотужніх множин називається ***потужністю*** цих множин.

Потужність множині X *п*означається *card* X. Число елементів кінцевої множині також називається потужністю, тоді $cardX = |X|$. Для рівнопотужних множин часто використовується позначення $\boldsymbol{E} \sim \boldsymbol{F}$.

Порівняння нескінченних множин можливо завдяки властивостям функціональних відображень. З визначення ін'єкції слідує, що ін'єкція з множини E в множину F можлива тільки в тому випадку, якщо кількість елементів в E не більша, ніж кількість елементів в F: $|E| \le |F|$ (для кінцевих множин), причому, якщо не існує ін'єкції з F в E, то ця нерівність перетворюється в строгу нерівність $|E|<|F|$ (див. рис.4.1). Якщо ж існує ін'єкція з F в E, причому не обов'язково збігається зі зворотним відображенням для ін'єкції $E \to F$, то це можливо лише тоді, коли кількість елементів у них збігається, тобто $| E | = | F |$, а в цьому випадку можна знайти і взаємно однозначну відповідність між E і F, тобто це – біекція.



Аналогічно, якщо існує сюр'єкція з E на F, така, що один образ в F має кілька прообразів в E, то кількість елементів в E строго більше кількості елементів в F, тобто $| E | > | F |$.

Рис. 4. 1 . Ін'єкція $E \to F$.

Ці властивості узагальнюються для випадку нескінченних множин наступною теоремою.

назвав «парадоксом» своє спостереження, оскільки цей факт суперечить евклідовій аксіомі, згідно з якою ціле більше будь-якої зі своїх власних частин, тобто - частин, що не збігаються з усім цілим.

Теорема 1.4.1 (Кантора - Бернштейна[6] – Цермело)

Нехай $\boldsymbol{E}$ і $\boldsymbol{F}$ дві довільних нескінченних множини. Тоді:

а) або існує ін'єкція з $\boldsymbol{E}$ в $\boldsymbol{F}$, або існує ін'єкція з $\boldsymbol{F}$ в $\boldsymbol{E}$ (одне не виключає іншого);

б) якщо існують ін'єкції $\boldsymbol{E} \to \boldsymbol{F}$ і $\boldsymbol{F} \to \boldsymbol{E}$, то існує бієкція з $\boldsymbol{E}$ в $\boldsymbol{F}$.

Іншими словами, якщо множина $\boldsymbol{E}$ рівнопотужна деякій підмножині множини $\boldsymbol{F}$, а множина $\boldsymbol{F}$ рівнопотужня деякій підмножині множини $\boldsymbol{E}$, то $\boldsymbol{E}$ і $\boldsymbol{F}$ рівнопотужні.

Доведення. Нехай $\boldsymbol{E}$ рівнопотужна деякій підмножині $\boldsymbol{F}_1$ множини $\boldsymbol{F}$, а $\boldsymbol{F}$ рівнопотужня деякій підмножині $\boldsymbol{E}_1$ множини $\boldsymbol{E}$ (див. рис. 4.2, а). При взаємно однозначній відповідності між $\boldsymbol{E}_1$ і $\boldsymbol{F}$ підмножина $\boldsymbol{F}_1 \subset \boldsymbol{F}$ переходить в деяку підмножину $\boldsymbol{E}_2 \subset \boldsymbol{E}_1$. При цьому всі три множини $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{E}_1$ і $\boldsymbol{E}_2$ рівнопотужні, і потрібно довести, що вони рівнопотужні множині $\boldsymbol{F}$, або, що те ж саме, множині $\boldsymbol{E}_1$. Тепер ми можемо забути промножину $\boldsymbol{F}$ і його підмножини і доводити такий факт:
якщо $\boldsymbol{E}_2 \subset \boldsymbol{E}_1 \subset \boldsymbol{E}_0$, (де $\boldsymbol{E}_0$ - позначення для $\boldsymbol{E}$) і $\boldsymbol{E}_2$ рівнопотужня $\boldsymbol{E}_0$, то всі три множини рівнопотужні.

Нехай f - функція, яка здійснює взаємно однозначну відповідність $\boldsymbol{E}_0 \to \boldsymbol{E}_2$, так, що елемент $x \in \boldsymbol{E}_0$ відповідає елементу $f(x) \in \boldsymbol{E}_2$. Коли $\boldsymbol{E}_0$ переходить в $\boldsymbol{E}_2$, менша підмножина $\boldsymbol{E}_1$ переходить в якусь підмножину $\boldsymbol{E}_3 \subset \boldsymbol{E}_2$ (див. рис. 1.16, b). Аналогічно, саме $\boldsymbol{E}_2$ переходить в якусь підмножину $\boldsymbol{E}_4 \subset \boldsymbol{E}_2$ При цьому $\boldsymbol{E}_4 \subset \boldsymbol{E}_2$, так як $\boldsymbol{E}_1 \subset \boldsymbol{E}_2$.

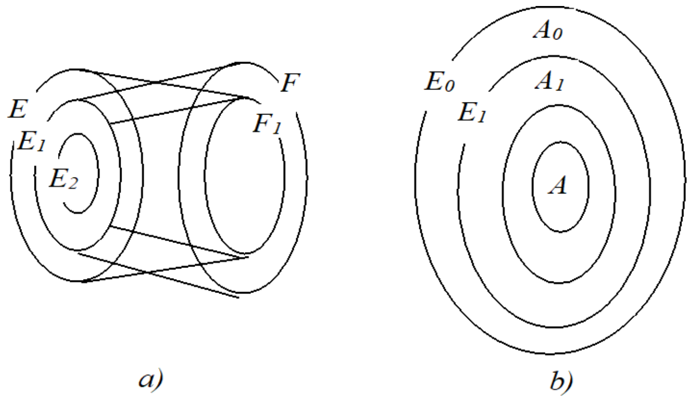


Рис. 1.16. До доведення теореми Кантора-Бернштейна.

Продовжуючи цю побудову, отримуємо спадаючу послідовність множин
$\boldsymbol{E}_0 \supset \boldsymbol{E}_1 \supset \boldsymbol{E}_2 \supset \boldsymbol{E}_3 \supset \boldsymbol{E}_4 \supset \ldots$
і взаємно однозначну відповідність f: $\boldsymbol{E}_0 \to \boldsymbol{E}_2$, при якій $\boldsymbol{E}_i$ відповідає $\boldsymbol{E}_{i+2}$. Формально можна описати $\boldsymbol{E}_{2n}$ як множину тих елементів,

---

[6] Кантор сформулював цю теорему без доведення в 1883 році, пообіцявши повернутися до неї пізніше, однак, не виконав цієї обіцянки. Перші доведення теореми було дано Шредером (1896) і Бернштейном (1897).

які виходять з якогось елементу множини $\boldsymbol{E}_0$ після n-кратного застосування функції f.

Таким чином, множину $\boldsymbol{E}_0$ ми розбили на непересічні шари $A_i = \boldsymbol{E}_i \setminus \boldsymbol{E}_{i+1}$ і на серцевину $A = \cap_i A_i$. Шари A_0, $\boldsymbol{A}_2$, $\boldsymbol{A}_4$, ... рівнопотужні, так як функція f здійснює взаємно однозначну відповідність між A_0 і $\boldsymbol{A}_2$, між A_2 і $\boldsymbol{A}_4$ і т.д. Аналогічно, рівнопотужні і шари з непарними номерами.

Тепер можна легко побудувати взаємно однозначну відповідність g між $\boldsymbol{E}_0$ і $\boldsymbol{E}_1$.

Нехай $x \in \boldsymbol{E}_0$. Тоді відповідний йому елемент $g(x)$ будується так: $g(x)=f(x)$ при $x \in \boldsymbol{A}_{2k}$ і $g(x)=x$ при $x \in \boldsymbol{A}_{2k+1}$ або $x \in \boldsymbol{A}_0$ (як показано нижче).

$$E_0 = A_0 + A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + \ldots + A$$

$$E_1 = \quad A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + \ldots + A$$

Це доводить теорему.

Наслідки з теореми Кантора-Бернштейна:

а) якщо існує ін'єкція $\boldsymbol{E} \to \boldsymbol{F}$ і не існує ін'єкції $\boldsymbol{F} \to \boldsymbol{E}$, то множина $\boldsymbol{F}$ має потужність, строго більшу, ніж потужність $\boldsymbol{E}$: $card\, \boldsymbol{F} > card\, \boldsymbol{E}$.

б) якщо існує ін'єкція $\boldsymbol{F} \to \boldsymbol{E}$ і не існує ін'єкції $\boldsymbol{E} \to \boldsymbol{F}$, то множина $\boldsymbol{F}$ має потужність, строго меншу, ніж потужність $\boldsymbol{E}$: $card\, \boldsymbol{F} < card\, \boldsymbol{E}$.

в) якщо існує біекція з $\boldsymbol{F}$ в $\boldsymbol{E}$, то множини $\boldsymbol{F}$ і $\boldsymbol{E}$ *рівнопотужні*: $card\, \boldsymbol{F} = card\, \boldsymbol{E}$.

Клас еквівалентності рівнопотужних множин називається *потужністю,* або **кардинальним числом. Класи** еквівалентності равнопотужніх кінцевих множин є кінцевими кардинальними числами. Ці числа за визначенням є натуральними числами, відповідними кількості елементів в кінцевій множині. Потужність пустої множини рівна нулю: card $(\varnothing) = 0$. Потужність нескінченної множини називається **трансфінітним кардинальним числом, або** просто **трансфінітним числом.** Таким чином, множина *кардинальних чисел – це фактор-множина* рівнопотужних *множин, яка являє собою об'єднання множини натуральних і трансфінітних чисел.*

1.4.2. Злічені множини

Теореми про злічені множини. Кардинальна арифметика.

Визначення 1.4.2. *Потужністю зліченої множини називається потужність множини натуральних чисел* $\boldsymbol{N}$. **Зліченою** називається всяка множина *X*, що рівнопотужня множині ***N*** натуральних чисел. Потужність зліченої множини позначається кардинальним трансфінітним числом $\aleph_0$(читається: **алеф-нуль**)[7].

Зліченність множини *X* означає, що існує принаймні одна біекція з *X* на ***N*** (проте це не означає, що така біекція задана). Інакше злічену множину можна визначити як множину, елементи якої можна представити у вигляді *списку* (навіть, якщо цей список буде нескінченним). Тоді кожному елементу множини можна поставити у відповідність його порядковий номер у цьому списку, тобто може бути побудовано відображення з ***N*** в *X* $f(n)$: $\boldsymbol{N} \to X$, де $n \in \boldsymbol{N}$. Таке відображення називається *нумерацією.* Очевидно, що занумерувати можна будь-яку кінцеву множину. Тоді множина *X* звичайна або злічена тоді і тільки тоді, коли існує ін'єкція *X* в ***N***, або, якщо $X \neq \varnothing$, тоді і тільки тоді, коли існує сюр'єкція ***N*** на *X*.

Приклад. Множини всіх парних натуральних чисел *X* і множини ***N*** рівнопотужні, так як існує ін'єкція $X \to \boldsymbol{N}$ і сюр'єкція $\boldsymbol{N} \to X$.

Доведемо ряд теорем про злічені множини.

Теореми про злічені множини

Теорема 1.4.2. Множина додатних раціональних чисел $\boldsymbol{Q}^+$ – злічена.

Доведення. Будь-яке раціональне число можна подати у вигляді дробу m/n, де m , n - натуральні числа, $n \neq 0$. Запишемо раціональні числа у вигляді таблиці:

1/1	2/1	3/1	4/1	…
1/2	2/2	3/2	4/2	…
1/3	2/3	3/3	4/3	…
…	…	…	…	…

1	2 ↓	5 ↓	10	…
4	← 3	6	11	…
9	← 8	← 7	12	…
…	…	…	…	…

Права таблиця задає нумерацію елементів лівої таблиці (стрілки вказують напрямок нумерації). Тоді ми можемо виписати елементи лівої таблиці (множини раціональних додатних чисел) у вигляді списку, в якому кожному елементу відповідає натуральне число:

1/1	2/1	2/2	1/2	3/1	3/2	3/3	2/3	1/3	4/1	4/2	4/3…
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓ …
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12…

[7] Можна зустріти інше позначення потужності зліченої множини: card N = ν.

Отриманий перерахунок доводить зліченність множини додатних раціональних чисел.

Можна помітити, що раціональні числа входять в цей перерахунок з повтореннями: наприклад, 1/1 = 2/2 = 3/3 = ... = 1. Однак, неважко скласти ефективну процедуру викреслювання повторюваних чисел з цього перерахунку. Ми покажемо далі, що і без викреслювання повторень доведення зліченності $\boldsymbol{Q}^+$ вже завершено.

Теорема 1.4.3. Множина цілих чисел $\boldsymbol{Z}$ злічена.

Доведення. Побудуємо список:

0	1	-1	2	-2	3	-3	...
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	...
0	1	2	3	4	5	6	...

Тоді кожному парному числу відповідає від'ємне число, а кожному непарному - додатне. Побудована біекція доводить теорему.

Теорема 1.4.4. Множина всіх раціональних чисел $\boldsymbol{Q}$ злічена.

Доведення аналогічно попередньому.

Теорема 1.4.5. Потужність зліченої множини $\aleph_0$ є найменшим трансфінітним кардинальним числом. Це означає, що будь-яка нескінченна множина $\boldsymbol{E}$ має принаймні одну злічену частину (тобто злічену підмножину).

Доведення. Припустимо, що для деякої нескінченної підмножини $\boldsymbol{E}$ співвідношення $card\boldsymbol{E}>\aleph_0$ не виконується, тобто $card\boldsymbol{E}\leq\aleph_0$. Це означає, по теоремі Бернштейна, що існує ін'єкція $E \to \boldsymbol{N}$, тобто в $\boldsymbol{N}$ існує нескінченна частина P, така, що між $\boldsymbol{E}$ і P існує біекція. Однак між множиною $\boldsymbol{N}$ і його нескінченної частиною P теж існує біекція. Відображення $n \to x_n$, де x_n є n-й в порядку зростання елемент P, визначає біекцію $\boldsymbol{N}$ на P. Тоді отримаємо, що $card\,\boldsymbol{E} = \aleph_0$.

Кардинальна арифметика

Якщо існує сюр'єкція $\boldsymbol{E} \to \boldsymbol{F}$, то $card\,\boldsymbol{F} < card\,\boldsymbol{E}$. Дійсно, якщо прообраз кожної точки $\boldsymbol{F}$ не пустий, і якщо в кожному з прообразів вибрати по одному елементу[8], то отримаємо деяку частину $\boldsymbol{E}$, рівнопотужню $\boldsymbol{F}$. Наприклад, фактор-множина множини $\boldsymbol{E}$ по деякому відношенню еквівалентності завжди має не більшу потужність, ніж саме множина $\boldsymbol{E}$. Звідси, а також з теореми 4.5 випливає, що в класі кардинальних чисел існує відношення порядку: *якщо α є кардинальним числом деякої підмножини множини з потужністю β, то $\alpha\leq\beta$.*

[8] Вибрати по одному елементу в кожній з кінцевого числа множин неважко, але подібний вибір в разі нескінченного числа множин скрутний. Після численних суперечок на початку століття можливість такого вибору була введена як аксіома теорії множин - аксіома вибору, або аксіома Цермело.

Неважко показати (для кінцевих множин це просто, а для нескінченних це випливає з теореми Кантора-Бернштейна), що це відношення рефлексивно, антисиметрично і транзитивно, отже, воно дійсно є відношенням порядку. З теореми Кантора-Бернштейна слідує також, що це відношення є відношенням лінійного порядку, тобто будь-які два кардинальні числа можна порівняти.

На множині кардинальних чисел можна визначити операції додавання, добутку і зведення в степінь.

1. **Додавання.** Нехай α і β кардинальні числа, а множини $\boldsymbol{E}$ і $\boldsymbol{F}$ мають відповідно потужності $card\boldsymbol{E}=\alpha$ і $card\boldsymbol{F}=\beta$. Тоді $\alpha+\beta$ – сума потужностей $\boldsymbol{E}$ і $\boldsymbol{F}$, – це потужність такої множини, що допускає *розбиття* на класи еквівалентності, утворені з двох множин, рівнопотужних $\boldsymbol{E}$ і $\boldsymbol{F}$ відповідно. Іншими словами, якщо множини $\boldsymbol{E}$ і $\boldsymbol{F}$ не перетинаються, то потужність їх об'єднання дорівнює $\alpha+\beta$.

2. **Добуток**. Через $\alpha\cdot\beta$ позначається потужність декартового добутку $\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{F}$. Іншими словами, добуток $\alpha\cdot\beta$ – це кардинальне число об'єднання α непересічних частин, кожна з яких має потужність β.

3. **Піднесення до степені.** Через α^β позначається потужність множини $\boldsymbol{E}^{\boldsymbol{F}}$, тобто потужність множини всіх функціональних відображень з $\boldsymbol{F}$ в $\boldsymbol{E}$: $card\ (\boldsymbol{F}\to\boldsymbol{E}) = card\ (\boldsymbol{E}^{\boldsymbol{F}}) = card\ \boldsymbol{E}^{card\,\boldsymbol{F}}$.

Теорема 1.4.6. Операції, визначені на множині кардинальних чисел, володіють наступними властивостями:

1. Асоціативність і комутативність додавання.

2. Асоціативність і комутативність добутку.

3. Дистрибутивність множення по відношенню до додавання:

$\alpha\cdot(\beta+\gamma) = \alpha\cdot\beta + \alpha\cdot\gamma$.

4. Для піднесення до степені виконуються співвідношення:

a) $(\alpha^\beta)\cdot(\alpha^\gamma) = \alpha^{\beta+\gamma}$,

b) $\alpha^\gamma\beta^\gamma = (\alpha\cdot\beta)^\gamma$,

c) $((\alpha)^\beta)^\gamma = \alpha^{\beta\gamma}$.

Доказ цих властивостей заснований на визначеннях і властивостях операцій об'єднання, декартового добутку і функціональних відображень множин.

Як приклади доведемо такі властивості.

Властивість 3 . $\alpha\cdot(\beta+\gamma) = \alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\gamma$

Доведення.

Нехай $card\ A = \alpha$, $card\ B = \beta$, $card\ C = \gamma$, де множини A, B, C попарно не перетинаються, і нехай $a\in A$, $b\in B$, $c\in C$. Співвідношення 3 виконується, якщо $A\times(B\cup C) \sim (A\times B)\cup(A\times C)$. Розглянемо ці множини.

Множина $A \times (B \cup C)$ складається з пар $\{<a, b>, <a, c>\}$, причому $b \neq c$, так як $B \cap C = \varnothing$.

Множина $(A \times B) \cup (A \times C)$ складається з об'єднання множин пар $\{<a, b>\} \cup \{<a, c>\}$, що еквівалентно множині $\{<a, b>, <a, c>\}$, де $b \neq c$. Як бачимо, ці дві множини збігаються.

Покажемо, що дистрибутивность складання відносно множення не виконується, тобто

$\alpha + (\beta \cdot \gamma) \neq (\alpha+\beta)\cdot(\alpha+\gamma)$.

Для цього покажемо, що в загальному випадку відношення рівнопотужності $A \cup (B \times C) \sim (A \cup B) \times (A \cup C)$ неможливо. Дійсно, $A \cup (B \times C)$ - це множина, отримана об'єднанням $\{a\} \cup \{<b, c>\} = \{a , <b, c>\}$, тобто це множина, складена з усіх елементів множини A і пар $<b, c>$, в той час як $(A \cup B) \times (A \cup C) = \{<a, a>, <b, a>, <a, c>, <b, c>\}$. Очевидно, що це різні множини.

Інакше це можна показати так:

$(A \cup B) \times (A \cup C) = ((A \cup B) \times A) \cup (A \cup B) \times C) = (A \times A) \cup (B \times A) \cup$
$\cup (A \times C) \cup (B \times C)$, що не еквівалентно $A \cup (B \times C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.

Основні співвідношення кардинальної арифметики

Теорема 1.4.7. Для будь-якого кінцевого числа $m \geq 1$ виконується рівність:

$$m \cdot \aleph_0 = \aleph_0 \text{ и } \aleph_0^m = \aleph_0.$$

Доведення. Скористаємося методом математичної індукції. Покажемо спочатку, що $\boldsymbol{N} \times \boldsymbol{N}$ рівнопотужно $\boldsymbol{N}$, тобто $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$ (базис індукції).

Елементи декартового добутку $\boldsymbol{N} \times \boldsymbol{N}$ можна виписати у вигляді таблиці. Введемо діагональну нумерацію. Отримаємо послідовність (0, 0), (1, 0), (0, 1), (2, 0), (1, 1), (0, 2), ...

(0,0)	(0,1)	(0,2)	(0,3)	…
(1,0)	(1,1)	(1,2)	(1,3)	…
(2,0)	(2,1)	(2,2)	(2,3)	…
(3,0)	(3,1)	(3,2)	(3,3)	…
…	…	…	…	…

Ця послідовність визначає біекція $\boldsymbol{N}$ на $\boldsymbol{N} \times \boldsymbol{N}$. Отже, $\boldsymbol{N}$ еквівалентно $\boldsymbol{N} \times \boldsymbol{N}$, тобто $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0^2 = \aleph_0$.

Припустимо тепер, що $\aleph_0^{m-1} = \aleph_0$, і покажемо, що тоді $\aleph_0^m = \aleph_0$.

За припущенням індукції декартовий добуток $\boldsymbol{N}^{m-1}$ злічений. Тоді, за базисом індукції, декартовий добуток двох злічених множин $\boldsymbol{N}^{m-1}\times\boldsymbol{N}=\boldsymbol{N}^m$ також злічений, тобто $\aleph_0{}^m = \aleph_0$.

Слідування. Об'єднання кінцевої або зліченої множини кінцевих або злічених підмножин множини $\boldsymbol{E}$ кінцево або злічене.

Доведення. Нехай $\boldsymbol{I}$ - деяка частина $\boldsymbol{N}$ ($I \subset \boldsymbol{N}$) і A_i ($i \in I$) - деякі підмножини $\boldsymbol{E}$, і для будь-якого $\boldsymbol{i}$ $A_i \neq \varnothing$ (але, якщо $A_i = \varnothing$, то це нічого не змінює, тому що, якщо $A_i = \varnothing$, то об'єднання не зміниться). Нехай f_i - сюр'єкція $\boldsymbol{N}$ на A_i. Тоді відображення $(i, n) \to f_i(n)$ буде сюр'єкція $I \times \boldsymbol{N}$ на $\bigcup_{i\in I} A_i$. Оскільки $I \times \boldsymbol{N}$ зліченно, то $\bigcup_{i\in I} A_i$ кінцево або зліченно.

Тепер можна інакше довести, що множина раціональних чисел $\boldsymbol{Q}$ злічена. Кожній парі (p, q) $(q\neq 0)$ множині $\boldsymbol{Z} \times \boldsymbol{Z}$ можна поставити у відповідність раціональне число p/q. Це відображення є сюр'єкція підмножини $\boldsymbol{Z} \times \boldsymbol{Z}$ на $\boldsymbol{Q}$. Значить, $\boldsymbol{Q}$ не більше ніж злічена, але так як вона містить $\boldsymbol{N}$ в якості своєї підмножини, то $\boldsymbol{Q}$ злічена.

Теорема 1.4.8. Якщо A нескінченна множина, а B кінцева або злічена, то $A \cup B \sim A$, тобто $card(A \cup B) = card(A)$.

Доведення. Нехай A_1 – злічена підмножина множини A. Об'єднання зліченої і кінцевої множин злічено, об'єднання злічених множин також злічено, тому $A_1 \cup B \sim A_1$. Множина $A \cup B$ не зміниться, якщо від неї відняти, а потім додати підмножину A_1.

Тоді $A \cup B = (A\backslash A_1) \cup (A_1 \cup B)$. Оскільки $A_1 \cup B \sim A_1$, то $(A\backslash A_1) \cup (A_1 \cup B) \sim (A\backslash A_1) \cup A_1$. Але $(A\backslash A_1) \cup A_1 = A$, отже, $A \cup B \sim A$, що й треба було довести.

Теорема 1.4.9. Якщо α і β - кардинальні числа, такі що $\alpha \neq 0$ і $\beta \neq 0$, і якщо принаймні одне з них трансфінітне, то сума $\alpha + \beta$ і добуток $\alpha \cdot \beta$ рівні найбільшому з них, тобто $\alpha + \beta = max\{\alpha, \beta\}$, $\alpha\cdot\beta = max\{\alpha, \beta\}$.

Доведення цієї теореми безпосередньо випливає з попередньої теореми. Дійсно, оскільки множина кардинальних чисел лінійно впорядкована, то або $\alpha\leq\beta$, або $\beta\leq\alpha$. З теореми 4.8 випливає, що потужність об'єднання двох нескінченних множин буде визначатися більшою потужністю. З визначення добутку кардинальних чисел і першої рівності: $\alpha+\beta=max\{\alpha,\beta\}$, слідує здійсненність і другої: $\alpha\cdot\beta = max\{\alpha, \beta\}$.

Тепер ми можемо довести теорему 4.7 повністю.

Доведення.

$m \cdot \aleph_0 = \underbrace{\aleph_0 + \aleph_0 + \ldots + \aleph_0}_{m \text{ разів}} = \aleph_0$ (за теоремою о зліченості об'єднання злічених множин);

$\aleph_0^m = \underbrace{\aleph_0 \cdot \aleph_0 \cdot \ldots \cdot \aleph_0}_{m \text{ разів}} = \aleph_0$ (за теоремою о зліченості декартового добутку злічених множин).

Цей же результат ми отримуємо відповідно до теореми 4.9: так як $m \le \aleph_0$, то $m \cdot \aleph_0 = \aleph_0$.

Використання кардинальної арифметики дозволяє нам легко доводити деякі теореми про потужність множин.

Приклади.

1. Визначимо потужність множини всіх кінцевих послідовностей натуральних чисел.

Розглянемо, з чого складається ця множина. Множина всіх одноелементних послідовностей - це множина $\boldsymbol{N}$, все двоелементні послідовності утворюються декартовим добутком $\boldsymbol{N} \times \boldsymbol{N}$, трьохелементні – $\boldsymbol{N}^3$, k - елементні послідовності утворені декартових твором $\boldsymbol{N}^k$ і так далі. Яке б велике число k ми не взяли, для нього існує число $k+1$ і, відповідно, існує послідовність довжиною $k+1$. Тому процес побудови послідовностей йде в нескінченність. В результаті ми отримуємо, що множина всіх кінцевих послідовностей є

$E = \boldsymbol{N} \cup \boldsymbol{N}^2 \cup \boldsymbol{N}^3 \cup \ldots \cup \boldsymbol{N}^k \cup \ldots,$

тобто це об'єднання зліченої множини злічених множин підмножин множини E. Оскільки $card\ \boldsymbol{N} = \aleph_0$, $card\ \boldsymbol{N}^2 = \aleph_0^2$, …, $card\ \boldsymbol{N}^k = \aleph_0^k$ …, то потужність цієї множини визначається виразом

$$card\ E = \aleph_0 + \aleph_0^2 + \aleph_0^3 + \ldots + \aleph_0^k + \ldots = \aleph_0.$$

2. Для доказу зліченості деяких множин можна використовувати спосіб *кодування (метод цифр)*. Найбільш поширеним кодом натуральних чисел є двійковий код: кожному натуральному числу можна єдиним чином поставити у відповідність двійкове число. Існують ефективні процедури переведення числа в двійковий код і назад, тому така відповідність є взаємно однозначною. Встановивши таку відповідність, ми отримуємо, наприклад, що множина всіх кінцевих двійкових послідовностей злічена (на підставі прикладу

1). Для кодування можна використовувати не тільки двійкову, але будь-яку систему числення з основою *k*.

Як приклад доведемо, що *множина всіх дійсних алгебраїчних чисел злічена*. Алгебраїчні числа - це дійсні корені алгебраїчних (поліноміальних) рівнянь з одним невідомим з цілими коефіцієнтами:

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0, (n . \geq 1, a_0 \neq 0).$$

Доведення. Для кожного алгебраїчного рівняння кількість його дійсних коренів кінцево і не перевищує степені рівняння. Тоді, якщо ми зможемо перерахувати всі алгебраїчні рівняння, то множина всіх алгебраїчних чисел буде являти собою об'єднання множин дійсних коренів кожного рівняння, тобто це буде об'єднання зліченої множини кінцевих множин, яке злічено. Отже, задача зводиться до доведення зліченості множини алгебраїчних рівнянь.

Алгебраїчні рівняння з цілими коефіцієнтами без втрати однозначності можна представляти у вигляді рядка, записуючи показники степенів після змінної *x*, наприклад: *3x3 + 6x2 + x-2 = 0.* Тоді рівняння виявляються кінцевими послідовностями, складеними з 14 символів: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, *x* , +, -, =. Перший символ послідовності не є 0. Тоді ми можемо розглядати ці 14 символів як числа в четирнадцатірічній системі числення. В результаті кожне рівняння, представлене як послідовність цих символів, є записом деякого цілого додатного числа в цій системі числення, тобто кодом цього числа в системі числення з основою 14. Таким чином, кожному рівнянню алгебри буде поставлено у відповідність деяке натуральне число. Тим самим буде побудована взаємно однозначна відповідність між множиною алгебраїчних рівнянь і підмножиною натуральних чисел. Іншими словами, алгебраїчні рівняння можуть бути перераховані в порядку зростання натуральних чисел, кодами яких вони є при інтерпретації символів, що входять в рівняння, як цифр четирнадцатірічной системи числення. Побудований перерахунок доводить зліченість множини алгебраїчних рівнянь з цілими коефіцієнтами. Зліченість множини алгебраїчних чисел, як зазначено вище, слідує як зліченість об'єднання зліченої множини кінцевих множин.

<u>1.4.3. Потужність континуума.</u>

Теорема Кантора. Потужність континуума. Основні теореми про незлічені множини. Контінуум-гіпотеза.

Незліченні множини

Теорема 1.4.10 (Кантора). Якою б не була множина $\boldsymbol{E}$, множина її підмножин має потужність, строго більшу потужності $\boldsymbol{E}$.

Ця теорема показує, що послідовність трансфінітних кардинальних чисел не обмежена.

Доведення. Припустимо, що існує сюр'єкція f: $\boldsymbol{E} \to \wp(\boldsymbol{E})$, тобто сюр'єкція f множини $\boldsymbol{E}$ на множину її підмножин $\wp(\boldsymbol{E})$. Тоді $x \in \boldsymbol{E}$ $f(x)$ є елементом $\wp(\boldsymbol{E})$, тобто деяким підмножиною Е. Позначимо через $\boldsymbol{A}$ підмножину $\boldsymbol{E}$, утворену з таких $x \in \boldsymbol{E}$, що $x \notin f(x)$.

Наприклад, якщо Е={a, b, c}, то може А={a} тому, що ми побудували f(x) таке, що f(a) $\notin$ {a} або {a, b}, а , наприклад, f(a) $\in$ { b,c} або {c}.

Так як $\boldsymbol{A} \subset \wp(\boldsymbol{E})$, то в $\boldsymbol{E}$ існує принаймні один елемент y, такий, що $f(y) = \boldsymbol{A}$. Якщо $y \in f(y) = \boldsymbol{A}$, то, за визначенням множини $\boldsymbol{A}$, $y \notin \boldsymbol{A}$, що неможливо. Якщо $y \notin f(y) = \boldsymbol{A}$, то $y \in \boldsymbol{A}$. В обох випадках ми приходимо до протиріччя.

Оскільки, однак, існує ін'єкція $\boldsymbol{E}$ в $\wp(\boldsymbol{E})$, а саме, $x \to \{x\}$, то $\boldsymbol{E}$ має потужність, меншу потужності $\wp(\boldsymbol{E})$, а значить, і строго меншу потужності $\wp(\boldsymbol{E})$.

Характеристичної функцією деякої підмножини $\boldsymbol{A}$ множини $\boldsymbol{E}$ називається функція φ_A, що визначена на $\boldsymbol{E}$ і така, що приймає значення з множини $\{0, 1\}$, така, що $\varphi_A(x) = 1$, якщо $x \in A$, і $\varphi_A(x) = 0$, якщо $x \notin A$.

Завдання цієї функції однозначно визначає підмножину (частину) $\boldsymbol{A}$ множини $\boldsymbol{E}$. Тоді кожній підмножині буде відповідати характеристичний вектор, що складається з 0 і 1. Наприклад, якщо $E = \{a, b, c\}$, то підмножині $A = \{a, c\}$ буде відповідати вектор $\varphi_A = <1, 0, 1>$, підмножині $B = \{b\}$ – вектор $\varphi_B = <0, 1, 0>$ и т.і.

Характеристична функція $\varphi(x)$ задає множину відображень φ: $E \to \{0, 1\}$, тобто $\{0, 1\}^E$. Тоді, на підставі теореми 4.1, існує біекція множини-степеня $\wp(\boldsymbol{E})$ множини $\boldsymbol{E}$ на множину відображень φ: $E \to \{0, 1\}$. Звідси слідує, що кардинальним числом множини $\wp(\boldsymbol{E})$ є $card\ \{0, 1\}^E = 2^{card\, E}$.

Тепер теорему Кантора (1.4.10) можна сформулювати наступним чином:

Яке б не було кардинальне число α, $2^{\alpha} > \alpha$.

Зокрема, $2^{\aleph_0} > \aleph_0$. Звідси випливає, що існують незліченні множини.

Ми довели в попередньому параграфі, що множини всіх кінцевих послідовностей натуральних чисел зліченні (приклад 1). Розглянемо тепер множину всіх нескінченних послідовностей натуральних чисел.

Теорема 1.4.11. Множина всіх нескінченних послідовностей натуральних чисел незліченна.

Доведення. Припустимо, що множина нескінченних послідовностей натуральних чисел зліченна. Тоді її можна занумерувати, і кожна послідовність отримає свій номер. Будемо позначати ці послідовності S_n, де $k = 1, 2, 3, \ldots$. Будемо використовувати характеристичну функцію $\varphi_n(p)$, яка показує, чи належить деяке натуральне число p послідовності S_n або ні: $\varphi_n(p) = 1$, якщо $p \in S_n$, і $\varphi_n(p) = 0$, якщо $p \notin S_n$. Тоді кожній нескінченної послідовності натуральних чисел S_n буде відповідати нескінченний двійковий вектор φ_n і множину цих векторів, за припущенням, також можна занумерувати.

Складемо цю нумерацію і запишемо її у вигляді таблиці:

	1	2	3	4	…	k	…
φ_1	$\varphi_1(1)$	$\varphi_1(2)$	$\varphi_1(3)$	$\varphi_1(4)$	…	$\varphi_1(k)$	…
φ_2	$\varphi_2(1)$	$\varphi_2(2)$	$\varphi_2(3)$	$\varphi_2(4)$	…	$\varphi_2(k)$	…
φ_3	$\varphi_3(1)$	$\varphi_3(2)$	$\varphi_3(3)$	$\varphi_3(4)$	…	$\varphi_3(k)$	…
…	…	…	…	…	…	…	…
φ_k	$\varphi_k(1)$	$\varphi_k(2)$	$\varphi_k(3)$	$\varphi_k(4)$	…	$\varphi_k(k)$	…

Наприклад, є послідовність S_1 парних натуральних чисел (без 0, але це не важливо), S_2 непарних, ще якихось $S_3 = \{2, 3, 5, 7, 8, \ldots\}$, то, відповідно їх характеристчні вектори будуть виглядати наступним чином

$\varphi_1 = <0,1,0,1,0,1\ldots>$,

$\varphi_2 = <1,0,1,0,1\ldots>$,

$\varphi_3 = <0,1,1,0,1,0,1,1,\ldots>$,

і, тоді в таблиці рядки такі:

	1	2	3	4	…		…
φ_1	0	1	0	1	0	1	…
φ_2	1	0	1	0	1	0	…
φ_3	0	1	1	0	1	0	…
…	…	…	…	…	…	…	…

Елементами таблиці є послідовності, складені з 0 і 1. На діагоналі таблиці також знаходиться послідовність нулів і одиниць:

$\varphi_d = \varphi_1(1), \varphi_2(2), \varphi_3(3), \ldots, \varphi_k(k), \ldots$

Складемо антидіагональну послідовність φ_d' за правилом:

$\varphi_d'(1) = 1 - \varphi_1(1)$,

$\varphi_d'(2) = 1 - \varphi_2(2)$,

…

$\varphi_d'(k) = 1 - \varphi_k(k)$.

Ця послідовність буде відрізнятися від будь-якої послідовності в таблиці хоча б одним - діагональним елементом. Припустимо, що послідовність φ_d' все-таки входить в побудований перерахунок, припустимо, з номером k. Тоді $\varphi_d' = \varphi_k$,, і, за правилом,, $\varphi_d' = \varphi_k$, її елемент:

$\varphi_d'(1) = \varphi_k(1) = 1 - \varphi_1(1)$,

$\varphi_d'(2) = \varphi_k(2) = 1 - \varphi_2(2)$,

…

$\varphi_d'(k) = \varphi_k(k) = 1 - \varphi_k(k)$.

Останнє неможливо. Отримане протиріччя доводить теорему.

Ми довели, що множина всіх нескінченних двійкових послідовностей незліченна. Згідно *зауваженню*, це множина є не що інше, як множина всіх відображень φ: $\boldsymbol{N} \to \{0, 1\}$, тобто $\{0, 1\}^N$, і потужність цієї множини дорівнює $2^{\aleph_0}$. Оскільки кожна нескінченна двійкова послідовність є характеристичним вектором нескінченної підмножини натуральних чисел, тобто, між ними існує біекція, то тим самим доведена незліченність множин всіх нескінченних послідовностей натуральних чисел. Але множина всіх нескінченних послідовностей натуральних чисел є не що інше, як множина всіх функцій, визначених на $\boldsymbol{N}$ і, що приймають значення в $\boldsymbol{N}$, тобто множиною всіх функціональних відображень $f(n)$: $\boldsymbol{N} \to \boldsymbol{N}$, тобто $\boldsymbol{N}^{\boldsymbol{N}}$, отже, потужність цієї множини є $\aleph_0^{\aleph_0}$. Оскільки ці дві множини рівнопотужні, ми отримуємо, що $\aleph_0^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$.

З іншого боку, множина всіх послідовностей натуральних чисел (як кінцевих, так і нескінченних) є множина всіх підмножин $\wp(\boldsymbol{N})$ множини натуральних чисел, потужність якої, згідно з зауваженням до теоремі 1.4.10, дорівнює $2^{\aleph_0}$. Звідси ми отримуємо той же результат: $\aleph_0^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$.

Метод доведення незліченних множин, використаний у даній теоремі, називається *діагональним методом Кантора.*

Потужність континууму

Теорема 1.4.12 (Кантора). *Множина дійсних чисел з інтервалу (0, 1) незліченна.*

Доведення. Для доказу скористаємося діагональним методом Кантора. Будемо представляти будь-яке число з інтервалу (0, 1) у вигляді нескінченного десяткового дробу. Кінцеві дроби також представимо в такому вигляді, наприклад, число 0.5 може бути представлено як 0.4999999 ...

Припустимо, що множина цих чисел злічення. Тоді їх можна записати у вигляді списку. Складемо цей список і запишемо його у вигляді таблиці, де представлені десяткові частини чисел:

	1	2	3	…	k	…
a_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	…	a_{1k}	…
a_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	…	a_{2k}	…
a_3	a_{31}	a_{32}	a_{33}	…	a_{3k}	…
…	…	…	…	…	…	…
a_k	a_{k1}	a_{k2}	a_{k3}	…	a_{kk}	…
…	…	…	…	…	…	…

Складемо тепер нескінченне антидіагональне число $b = b_1b_2...b_k...$ за правилом: i-й розряд числа b_i покладемо рівним $1 + a_{ii}$, якщо $a_{ii} \neq 9$ і $a_{ii} = 8$ (або будь-якому іншому числу, відмінному від 9), якщо $a_{ii} = 9$. Якщо множина чисел з (0, 1) злічення, то побудоване число b має увійти в цей список з будь-яким номером, наприклад, з номером k: $b = a_k$. Але тоді $b_1 = a_{k1} = a_{11} + 1$, $b_2 = a_{k2} = a_{22} + 1$, ..., $b_k = a_{kk} = a_{kk} + 1$, що неможливо. Отже, множина дійсних чисел з інтервалу (0, 1) незліченна.

Визначення 1.4.3. Потужність множини (0,1) називають потужністю континууму. Потужність континууму позначається символом $\boldsymbol{C}$.

Потужність континууму - це потужність множини дійсних чисел R, тобто $card\ \boldsymbol{R} = C$, бо існує бієкція $(0, 1) \to \boldsymbol{R}$, наприклад, $x \to log\ x/(1 - x)$.

У попередньому розділі ми довели, що множина алгебраїчних дійсних чисел злічення. Дійсні числа, які не є алгебраїчними, називаються **трансцендентними** (трансцендентним є числа e і π). Оскільки множина алгебраїчних чисел злічення, а множина дійсних чисел незлічення, то існують трансцендентні числа і навіть «більшість» дійсних чисел трансцендентна.

Теорема 4.13. Мають місце рівності: $m{\cdot}C = \aleph_0{\cdot}C = C{\cdot}C = C^m = C^{\aleph_0} = C$, где $m \geq 1$ — ціле.

Доведення. Всі ці кардинальні числа не більше $C^{\aleph_0}$ і не менше C, тому достатньо показати, що $C^{\aleph_0} = C$.

Дійсно, $C^{\aleph_0} = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0^2} = 2^{\aleph_0} = C$.

Останній факт: $2^{\aleph_0} = C$ – потребує доказу.

Якщо взяти числа з $E = (0, 1)$, такі, що в їх зображенні присутні числа 0, 1, 2, …, 7, то ця множина є рівнопотужньою множині $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}^{\boldsymbol{N}}$, отже, її потужність дорівнює $8^{\aleph_0}$. Сама множина E має потужність $\leq 10^{\aleph_0}$ (ми пишемо $\leq$ через двояке десяткове зображення чисел).

Тому $8^{\aleph_0} \leq card\ \boldsymbol{E} \leq 10^{\aleph_0}$, звідси $2^{\aleph_0} \leq card\ \boldsymbol{E} \leq 16^{\aleph_0} = (2^4)^{\aleph_0} = 2^{4\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$, отже $card\ \boldsymbol{E} = 2^{\aleph_0}$. З іншого боку, $card\ \boldsymbol{E} = C$. Отже, $2^{\aleph_0} = C$.

Слідування. Множина комплексних чисел має потужність континууму (оскільки вона рівнопотужна $\boldsymbol{R}^2$: $C^2 = C$).

Континуум-гіпотеза. Узагальнена континуум-гіпотеза.

При дослідженні потужностей нескінченних множин був встановлений той факт, що множина кардинальних чисел лінійно впорядкована. Лінійна впорядкованість означає, що для кожного кардинального числа існує безпосередньо наступне за ним число. $\aleph_0$ є найменшим трансфінітним числом. Однак нічого не відомо про те, яке трансфінітне число є наступним за $\aleph_0$. Існує лише припущення, яке називається *континуум-гіпотезою.*

Континуум-гіпотеза. Кардинальне число $2^{\aleph_0}$ безпосередньо слідує за $\aleph_0$.

Це означає, що $\aleph_0 < 2^{\aleph_0}$ і між ними немає ніякого іншого кардинального числа. Цей факт потребує доведення. Ми нічого не знаємо про множини, які незліченні, але менш, ніж континуальні, не знаємо навіть, чи існують такі множини. Відсутність прикладів подібних множин не є доказом неможливості їх існування, тому твердження про *безпосереднє слідування* $2^{\aleph_0}$ за $\aleph_0$ є гіпотезою, а не теоремою.

Можна піти далі і сформулювати більш загальне твердження.

Узагальнена континуум-гіпотеза полягає в припущенні про те, що для будь-якого кардинального числа α кардинальне число 2^a безпосередньо слідує за α. Звідси слідує, що послідовність кардинальних чисел не є обмеженою:

$$\aleph_0 < 2^{\aleph_0} < 2^{2^{\aleph_0}} < \ldots$$

Дійсно, $2^{\aleph_0}$ є потужність множини-степені $\wp(\boldsymbol{N})$ (замість $\boldsymbol{N}$ може бути будь-яка інша нескінченна зліченна множина). Але з цієї множини можна утворити знову множину всіх її підмножин $\wp(\wp(\boldsymbol{N}))$, потужність якої є $2^{2^{\aleph_0}}$, і цей процес можна продовжувати до нескінченності. Звідси випливає, що не існує найбільшого трансфінітного числа.

Спроби довести континуум-гіпотезу як теорему були безуспішні, а в 1963 М. П. Коен довів, що континуум-гіпотеза нерозв'язна - її неможливо ні довести, ні спростувати, можна лише прийняти її або протилежне їй твердження як аксіому.

1.4.4. Парадокси теорії множин

Парадокси теорії множин. Система аксіом Цермело-Френкеля. Аксіоми вибору та детермінованості.

Канторовську теорію множин в тому вигляді, як ми з нею познайомилися, називають «наївною» теорією множин. Канторовське поняття множини відсилає нас до нашої інтуїції при вирішенні питання про те, які об'єкти вважати множинами. Спроби побудувати теорію множин на основі інтуїції, при якій відсутнє чітке математичне визначення множини, привели до виникнення парадоксів.

Один з перших парадоксів теорії множин був відкритий самим Кантором в 1899 році.

З теореми Кантора (4.10) випливає, що яким би не було трансфінітне число, існує більше трансфінітне число, і що найбільшого трансфінітного числа не існує. Однак визначення поняття множини не накладає ніяких обмежень на розглянуті множини. Можна розглянути універсальну множину, елементами якого є всі можливі множини. Очевидно, що така множина всіх множин містить більше елементів, ніж будь-яка інша множина. Але якщо це так, то як тоді може існувати трансфінітне число, більше трансфінітного числа, яке відповідає цій множині?

Парадокс Бертрана Рассела був відкритий в 1902 році і пов'язаний з одним лише визначенням поняття множини (Ці парадокси, а також інші, наприклад, парадокс Буран-Форті (1897г.), пов'язаний з теорією порядкових чисел, називають логічними парадоксами). Іншу групу парадоксів умовно називають семантичними.

Необмежене застосування принципу абстракції (*будь-який одномісний предикат P (x) визначає деяку множину A таким чином, що елементами множини A є ті і тільки ті предмети a, для яких P (a) є істине висловлювання*) викликає виникнення парадоксів в канторовскoй теорії множин. У 1902 р Бертран Рассел[9] відкрив парадокс, заснований на одному лише визначенні множини.

Множини або є елементами самих себе, або не є. Так, множина абстрактних понять сама є абстрактним поняттям, а множина всіх зірок на небі не є зіркою. Множина звуків також є звуком. Аналогічно, множина всіх множин саме є множиною.

Розглянемо M - множину всіх множин, які є елементами самих себе, і N - множину всіх множин, які не є елементами самих себе. До якої ж з цих двох множин віднести множину N? Іншими словами, чи є N елементом самої себе? Якщо N є елементом себе, тобто $N \in N$, значить N є елементом M, тобто $N \in M$, але тоді, за визначенням множини M, $N \notin N$, тобто N не є елементом самої себе. Отримали протиріччя. З іншого боку, якщо N не є елементом самої себе, то N є елемент N, а не M, і N є елементом самої себе, що знову є протиріччям.

[9] Бертран Рассел (Russel) (1872-1970) - видатний англійський математик і філософ, логік, громадський діяч. Основоположник англійського неореалізму і неопозитивізму. Один із класиків математичної логіки, лауреат Нобелівської премії з літератури (1950). Опубліковані в 1910-1913 рр. двотомні «Підстави математики» Бертрана Рассела і Альфреда Норта Уайтхеда (1861-1947) містять одну з найбільш відомих і продуманих систем логічного обгрунтування математики, що вплинула великий чином на Д. Гільберта (1862-1947).

Парадокс Бертрана Рассела відомий в популярній формі як парадокс цирульника (перукаря). В одному селі цирульник зобов'язується голити всіх тих і лише тих жителів, що не голяться самі. Як бути самому цирульник: чи повинен він голити самого себе? Очевидно, що будь-яка відповідь призводить до протиріччя.

Розглянемо ще декілька формулювань відомих парадоксів. Наприклад, такий феномен запропонував Беррі. Розглянемо вираз: «Найменше натуральне число, яке можна назвати за допомогою менше, ніж тридцяти трьох складів». Цей вислів називає деяке натуральне число. Тоді, згідно з цим визначенням, це число можна назвати за допомогою менше, ніж 33 складів. Але цей вислів визначає це число, причому за допомогою рівно 32 складів!

Ці парадокси споріднені відомим ще в давнину семантичним парадоксам. Давньогрецькому філософу з острова Крит Епіменіду (VI до н.е.) приписується вислів: «Все крітяни - брехуни». З огляду на, що сам Епіменід є критянином, неможливо сказати, істинно це твердження або хибне. Інший філософ, Евбулід (VI до н.е.), той же парадокс сформулював таким чином: «Те, що я зараз говорю, - брехня» («Я брешу»). Цей парадокс відомий як парадокс «брехуна», для якого існує безліч модифікацій.

У стародавній «дилемі крокодила» крокодил вкрав дитину, але обіцяв повернути його батькові, якщо той вгадає, чи поверне йому крокодил дитину. Нерозв'язна дилема постає перед крокодилом, якщо батько скаже йому, що він не поверне дитини.

Місіонер, який потрапив до людожерів, може вимовити якусь фразу, і, якщо вона виявиться істинною, то його зварять, а якщо хибною, то зажарять. Що повинен сказати місіонер, щоб залишитися живим?

Відкриття парадоксів в канторовской теорії множин ставило під сумнів останні досягнення в галузі математики та призвело до кризи основ математики. До цього часу більшість розділів математики вже використовували теоретико-множинні поняття. Теорія множин лягла в основу нової науки - формальної (математичної) логіки, яка в кінці XIX-го - початку XX-го століття бурхливо розвивалася

Оскільки теорія множин була покладена в основу математики, виявлені парадокси поставили під сумнів достовірність всієї математичної науки в цілому. Вихід з цієї кризи був тривалим і важким.

При уважному розгляді логічних парадоксів теорії множин можна помітити, що вони мають ряд загальних властивостей, пов'язаних з самим визначенням множини. По-перше, вони допускають існування «занадто великих» множин, таких як «множина всіх множин» в парадоксі Кантора; по-друге, вони допускають імпредікативне визначення множин, тобто такі визначення, в яких фігурує якась множина S і елемент x з S, визначення якого залежить від S. Такі визначення є в даному разі круговими: визначається поняття, яке залежить саме від себе. Можна було б заборонити використання таких визначень, проте виключити їх повністю з математики не можна. Прикладом такого визначення є визначення точної верхньої грані впорядкованої множини - це найменший елемент множини всіх верхніх граней даної множини.

Для виходу з положення, що сталося, було запропоновано побудувати строге аксіоматичне визначення поняття числа й обмежитися розглядом множин, які відповідають цим аксіомам. Ці аксіоми сформульовані так, що з них не виводяться відомі парадокси і, в той же час, вони достатні для виведення основних пропозицій класичної математики, в тому числі і абстрактної теорії множин. Така система аксіом була запропонована 1908 р. Цермело, а потім удосконалена Френкелем, Сколемом, фон Нейманом, Бернайсом. Як приклад нижче наводиться одна з найбільш відомих аксіоматичних систем - система аксіом Цермело.

Система аксіом Цермело–Френкеля

1. Аксіома об'ємності.

Дві множини A і B дорівнюють, тоді і тільки тоді, коли вони складаються з одних і тих же елементів:

$A = B \equiv (A \subseteq B \ \& \ B \subseteq A)$.

2. Аксіома виділення.

Для будь-якої множини A і предиката $P(x)$, такого, що для будь-якого $x \in A$ $P(x)$ або істинно, або хибно, існує множина $X = \{x \mid x \in A \ \& \ P(x)\}$, що складається в точності з тих елементів A, для яких $P(x)$ істинно.

3. Аксіома пари.

Якщо a і b - різні об'єкти, то існує множина $\{a, b\}$, що складається в точності з a і b.

4. Аксіома об'єднання.

Для будь-якої множини множин *A* існує об'єднання всіх множин, що складається в точності з усіх елементів, які належать елементам множини *A*.

5. Аксіома нескінченності.

Існує принаймні одна множина - множина натуральних чисел$\{0, 1, 2, ...\}$.

6. Аксіома множини-степеня.

Для будь-якої множини *A* існує множина 2^A всіх підмножин *A*.

7. Аксіома вибору.

Для будь-якої непустої множини *S* попарно неперетинаючих множин існує деяка множина *C*, що містить в якості своїх елементів рівно по одному елементу з кожного елемента множини *S*.

8. Аксіома підстановки.

Для кожної множини *A* і однозначної функції f, визначеної на *A*, існує множина, що містить в точності об'єкти $f(x)$ для $x \in A$.

Аксіоми вибору і детермінованості

Система аксіом теорії множин обмежує множину об'єктів, які можна вважати множинами. Так, інтуїтивний принцип абстракції, згідно з яким для будь-якої властивості *P(x)* існує відповідна множина всіх елементів *x*, що володіють цією властивістю, замінений більш строгою аксіомою виділення, що вимагає визначеності предиката *P(x)* - він повинен бути або істиним, або хибним. Тоді парадокс Рассела доводить, що не існує множини всіх множин, які не належать самим собі в якості елемента. Парадокс Кантора показує, що не існує універсальної множини - множини всіх множин.

У деяких інших системах аксіом теорії множин, наприклад, в системі Геделя, все сукупності об'єктів діляться на два види: множини і класи. Всі множини можуть входити як елементи в інші сукупності, як у множини, так і в класи. Класи можуть бути чи не бути множинами. Класи, які не є множинами, називаються власними класами. Сукупність усіх множин утворює клас. Парадокс Кантора усувається тією обставиною, що цей клас вже не є великим, - він є власним класом. Аналогічно усувається і парадокс Рассела.

Не всі, однак, йшла гладко з аксіоматичної теорією множин. Аксіома вибору, введена Цермело, з'явилася предметом численних досліджень і суперечок, суть яких зводилася до питання, приймати чи не приймати її як допущення, яке можна без протиріч приєднати до інших аксіом теорії множин, за умови, що ці аксіоми несуперечливі. У 1963 році Коен показав, що можна без протиріччя приєднати до аксіоматиці теорії множин і заперечення аксіоми вибору.

Однак з аксіоми вибору Цермело слідують деякі сумнівні висновки. Зокрема, з неї випливає, що будь-яка множина можна цілком впорядкуватися. Пояснимо, що цілком упорядкована множина - це лінійно впорядкована множина, тобто ланцюг, в якому кожна непорожня підмножина має найменший елемент. Будь-який кінцевий ланцюг цілком впорядкований, наприклад, кінцева підмножина натуральних чисел. Множина натуральних чисел N цілком впорядкована відношенням «менше»: воно має найменший елемент, є ланцюгом і будь-яка її підмножина також цілком упорядкована. Ставлення «менше» на множині невід'ємних раціональних чисел є лінійним порядком, але не є цілком упорядкуванням, - ця множина не має найменшого елемента. Аналогічно, множина цілих чисел лінійно впорядкована відношенням «менше», але не цілком впорядкована, так як не має найменшого елемента.

Аксіома вибору еквівалентна принципу повного упорядкування, згідно з яким будь-яка множина може бути цілком упорядкована. Наприклад, перерахунок, побудований нами при доказі зліченності множини невід'ємних раціональних чисел, цілком впорядковує цю множину (не по величині чисел, а в порядку їх перерахування). Однак з питання про законність цього принципу виникла серйозна полеміка. Наприклад, Біркгоф пише: «Це веде до вельми специфічного висновку про те, що R можна цілком впорядкувати, а це, мабуть, неможливо зробити в якомусь конструктивному сенсі ... Нікому досі не вдалося «побудувати» якусь явно задану функцію, яка б цілком впорядковувала незліченну множину; ми абсолютно не уявляємо собі, як «виглядає» незліченна цілком упорядкована множина. Проблема «конструктивного» цілого упорядкування незліченної множини є основною проблемою теорії множин».

Коли двом математикам Банаху і Мазуру стало нудно, вони стали грати в таку гру. Вони визначили для себе деяку множину А на відрізку [0, 1]. Після цього Банах взяв якийсь відрізок, Мазур всередині цього відрізка ще відрізок, потім Банах взяв ще відрізок і т.д. При цьому вони відразу домовилися, що довжина відрізків буде прагнути до нуля і в перетині тому виходитиме точка. Так ось, якщо ця точка міститься в А, то виграв перший гравець, а якщо не міститься, то виграв другий (можете на дозвіллі пограти. Тільки грати потрібно з шаховими годинниками та ходи робити швидко).

Легко зрозуміти, що якщо А злічено, то у другого є виграшна стратегія. Він може за перший свій хід позбутися першої точки, взявши відрізок, який не містить її, за другий хід - від другої, і т.д. Якщо А ніде не щільно, то другий може виграти взагалі за один хід. Першим же ходом потрібно просто взяти відрізок, що не перетинається з А (таких існує величезна кількість, просто за визначенням). Якщо А - злічене об'єднання ніде не щільних (такі множини Бер називав множинами першої категорії), то другий також може виграти: на першому кроці він позбавляється від першої ніде не щільної множини, на другому - від другої, і т.д.

Банах з Мазуром задумалися, чи для будь-якої А у одного з гравців є виграшна стратегія. Це цілком природне твердження: або для будь-якого ходу першого є такий хід другого, що для будь-якого ходу першого є такий хід другого, що ... і т.д., Або існує хід першого, такий що для будь-якого ходу другого існує хід першого, такий що для будь-якого ходу другого існує хід першого ... і т. д.

Множина *A* називається детермінованою, якщо для неї у одного з гравців є виграшна стратегія. Твердження про те, що всі А [0, 1] детерміновані, називається аксіомою детермінованості.

З нею проблема навіть не в тому, що її не вміють доводити. На відміну від аксіоми вибору ще навіть невідомо, чи дійсно вона несуперечлива з аксіоматикою Цермело- Френкеля. Зате відомо, що з **аксіоми вибору миттєво слідує заперечення аксіоми детермінованості**, **але з аксіоми детермінованості слідує аксіома вибору для зліченного числа множин** (завдяки чому у нас зберігається весь математичний аналіз).

Якщо прийняти аксіому детермінованості, можна отримати багато цікавих і дивовижних фактів:

1) все множини з [0, 1] вимірні по Лебегу;

2) будь-яка обмежена функція інтегровна за Лебегом;

3) немає вільних максимальних ідеалів;

4) базис є тільки в зліченномірних лінійних просторах.

Загальна ідея аксіоми детермінованості в тому, що об'єкт існує, тільки якщо його можна побудувати «руками», взяти і пояснити, як його будувати. А якщо не виходить пояснити, то об'єкт не існує зовсім.

Аксіома вибору формулюється досить просто і логічно, здається досить природною. Однак це враження оманливе, за допомогою аксіоми вибору будуються такі екстравагантні приклади, як множина Віталі або парадокс Банаха-Тарського. Дамо формулювання останнього: "Використовуючи аксіому вибору, можна розбити кулю на кінцеве число частин, які можна переставити так, що вийдуть дві кулі такого ж розміру, як і вихідній кулі". Тобто ми маємо в якості наслідків з аксіоми вибору такі положення, які абсолютно суперечать нашій інтуїції простору.

Завдяки роботам Геделя (1939) і Коена (1963) було встановлено, що аксіома вибору не може бути ні доведена, ні спростована виходячи з системи аксіом Цермело-Френкеля теорії множин.

Питання до розділу 1.

1. *Канторовське визначення множини. Способи завдання множин.*
2. *Операції над множинами. Діаграми Венна.*
3. *Алгебра множин. Аксіоми і теореми теорії множин.*
4. *Поняття бінарного відношення. Способи завдання відношення.*
5. *Операції над відношеннями.*
6. *Властивості відношень на множині X.*
7. *Розбиття множин. Класи еквівалентності. Фактор-множина.*
8. *Відповідності і відображення. Види відображень. Композиція відображень.*
9. *Потужність множин. Кардинальні числа.Теорема Кантора-Бернштейна (Цермело).*
10. *Потужність континууму. Континуум-гіпотеза.*
11. *Система аксіом Цермело-Френкеля. Аксіоми вибору і детермінованості.*

Розділ 2. Теорія решіток.

Тема 2.1. Відношення порядку.

2.1.1. Властивості відношення порядку.

Основні поняття та теореми впорядкованих множин: найменший та найбільший елементи, мінімальний та максимальний елементи.

Визначення 2.1.1. Відношення на множині P, що задовольняє властивостям

рефлексивності: $x \leq x$ для всіх x **P1.**

антисиметричності: якщо $x \leq y$ і $y \leq x$, то $x = y$ для всіх x, y **P2.**

транзитивності: якщо $x \leq y$ і $y \leq z$, то $x \leq z$ для всіх x, y, z **P3.**

називається **відношенням порядку**.

Властивості, які задовольняють цьому відношенню, приводять до поняття впорядкованої множини.

Визначення 2.1.2. Непорожня множина P, на якій задано бінарне відношення порядку, що задовольняє властивостям **P1, P2, P3**, називається *частково впорядкованою*.

Відношення порядку ρ умовимося позначати символом $\leq$, хоча далеко не завжди цей символ позначатиме відношення «менше або рівно», визначене на множині чисел. Запис $x \geq y$ означатиме, що $y \leq x$. Оскільки властивості **P1, P2, P3** задають найбільш загальний тип порядку, частково впорядковану множину називають просто *впорядкованою*, або в-множиною, на відміну від лінійно і строго впорядкованих множин, які будуть визначені нижче. Впорядковану множину P часто позначають у вигляді двійки $< P, \leq >$. Одноелементна множина вважається в-множиною.

Якщо $< P, \leq >$ - в-множина, і $a, b \in P$, *то* a і b називаються *порівнянними* елементами, якщо $a \leq b$ або $b \leq a$. Інакше вони називаються *незрівняними*. Незрівняні елементи позначатимемо $a \parallel b$. У частково впорядкованій множині є як порівнянні, так і незрівняні елементи.

Визначення 2.1.3. Якщо $x \leq y$ і $x \neq y$, то відношення називається відношенням *строгого порядку* і позначається $x < y$.

Відношення строгого порядку не є рефлексивним: у будь-якій строго впорядкованій множині ні для якого x не має місця співвідношенню $x < x$. Для відношення $<$ здійснюється властивість *асиметричності*: якщо $x < y$, то не виконується $y < x$. У всіх випадках, коли відмінність між строгим і нестрогим порядком не має принципового значення, ми користуватимемося позначенням $\leq$.

Вочевидь, що між відношенням строго та нестрогого порядку виконується співвідношення: $(\leq)=(<)\cup E$ і $(<)=(\leq)\backslash E$, де E – тотожне відношення.

Визначення 2.1.4. В-МНОЖИНА $<P, \leq>$, що задовольняє властивості *лінійності***:**

$x \leq y$ або $y \leq x$ для всіх $x, y \in P$ **P4**

називається **лінійно впорядкованой**, або *ланцюгом*.

У ланцюзі кожні два довільно узяті елементи порівнянні і немає незрівняних елементів. В-МНОЖИНУ, що є ланцюгом, можна записати у вигляді: $x_1 \leq x_2 \leq ... \leq x_n$.

В-МНОЖИНА, в якому всі елементи незрівняні, іноді називають *антиланцюгом*.

Прикладом антиланцюга є відношення $x=y$, де $x_1 \| x_2 \| ... \| x_n$.

Властивість *ациклічності* порядку: якщо $x_1 \leq x_2 \leq ... \leq x_n \leq ... \leq x_1$, то $x_1 = x_2 = ... = x_n$, – безпосередньо виходить з властивостей транзитивності і антисиметричності.

Визначення 2.1.5. *Порядком $n(P)$* в-множини P називається (кардинальне) число його елементів. Якщо це число кінцеве, то Р називається *кінцевою в-множиною*.

Приклади:

1. Відношення включення $x \subseteq y$, тобто «Х - підмножина У», задане на множині всіх підмножин деякої множини U, є відношення часткового порядку. Дійсно, це відношення рефлексивно: $x \subseteq x$, антисиметрично: якщо $x \subseteq y$ і $y \subseteq x$, то $x = y$, і транзитивно: якщо $x \subseteq y$ і $y \subseteq z$, то $x \subseteq z$. Нехай дана множина $A = \{a, b, c\}$. Множина-ступінь $<\wp(A), \subseteq>$ - частково впорядкована множина. Підмножина $\varnothing \subseteq \{a\} \subseteq \{a, b\} \subseteq \{a, b, c\}$ є максимальним ланцюгом в $<\wp(A), \subseteq>$. Підмножина $\varnothing \subseteq \{a, b\} \subseteq \{a, b, c\}$ також є ланцюгом, але не максимальним.

2. На числових множинах N, Z, Q, R встановлені відношення порядку $\leq$ (менше або дорівнює), $<$ (менше), $\geq$ (більше або дорівнює), $>$ (більше). Ці відношення є відношеннями лінійного порядку, тому ці множини, а також будь-які їх підмножини є ланцюгами. Наприклад, множина $\{1, 2, 3, 4\}$ - ланцюг.

3. Відношення «x - предок y», визначене на множині всіх людей, є відношення порядку. Це відношення строгого порядку, так як воно не рефлексивне (ніяка людина не є предком самого себе); це відношення часткового

порядку, так в ньому є незрівнянні елементи: не кожні дві людини перебувають у відношенні спорідненості.

4. Множина символів українського алфавіту A = {а, б, в, ..., я} - ланцюг. У цій множині відношення $\leq$ можна читати як «передує»: ***а*** передує ***б***, ***б*** передує ***в***, і так далі. Тоді ***а***, як перша буква алфавіту, передує всім іншим, тобто $\forall x \in A$ (***а*** $\leq x$), а буква ***я***, остання буква в алфавіті, «більше» всіх інших, тобто $\forall x \in A$ ($x \leq$ ***я***)).

5. На множині цілих позитивних чисел Z^+ можна задати відношення порядку, таке, що $x \leq y$ означає: «x ділиться на y». Його можна визначити як $x / y = k$, де $k \in N$. Це відношення рефлексивне: $x / x = 1$, і $1 \in N$; антисиметричне: якщо $x / y = k$ *і* $y / x = k$, то $x / y = y / x$, - звідси $x = y$; транзитивне: якщо $x / y = k_1$ і $y / z = k_2$, то $x / z = k_3$, де $k_1, k_2, k_3 \in N$. Дійсно, якщо $x = k_1 y$ *і* $y = k_2 z$, то $x = k_1 k_2 z$, тобто $x = k_3 z$, *де* $k_3 = k_1 k_2$. Цілком очевидно, що не всякі два цілі числа $x, y \in Z^+$ перебувають у відношенні порядку «x ділиться на y», отже, це відношення часткового порядку. Таким чином, множина Z^+ є лінійно впорядкованою множиною по відношенню $\leq$ (менше або дорівнює), і є частково впорядкованою по відношенню «x ділиться на y».

6. Приклади антиланцюгів: x=y; x/y на множині X={2, 3, 5}.

Визначення 2.1.6. Якщо в P існує єдиний елемент $a \in P$, такий що $\forall x \in P$ ($a \leq$ x), то a називається **найменшим елементом** в-множини.

Можна показати, що P може містити тільки один найменший елемент a. Це витікає з визначення: елемент a такий, що решта всіх елементів множини P «більше» a. Тому, якщо припустити, що a і b — два найменші елементи, то $a \leq b$, і, одночасно, $b \leq a$, звідки витікає, що $a = b$, тобто це один і той же елемент. Отже, найменший елемент , якщо він існує, завжди *єдиний.* Його називають **нулем** в-множини і позначають символом **0.**

Визначення 2.1.7. Якщо в P існує єдиний елемент $b \in P$, такий що $\forall x \in P$ ($x \leq b$), то b називається **найбільшим елементом**[10].

Найбільший елемент P, якщо він існує, також завжди *єдиний*. Його позначають символом ***I*** і називають **одиницею** в-множини.

---

[10] Слід зауважити, що якщо дуже прискіпливо і формально віднестися до визначення строго впорядкованої множини, то в ній не може існувати найменшого та найбільшего елементів. Дійсно, якщо існує, наприклад, такий елемент $b \in P$, то $x < b$ повинно виконуватися для $\forall x \in P$, в тому числі і для $x = b$, що неможливо, так як відношення строгого порядку – антирефлексивне.

Визначення 2.1.8. В-МНОЖИНА P, в якому існують найбільший і найменший елементи, називають *впорядкованою з нулем і одиницею*. Тоді $\forall x \in P$ $(\mathbf{0} \leq x \leq \boldsymbol{I})$, тобто будь-який інший елемент в-множини лежить між *нулем* і *одиницею,* тому елементи **0** і ***I***, якщо вони існують, називаються *універсальними гранями множини P.*

Може здатися, що найменший і найбільший елементи існують в будь-якій в-множині. Проте це не так (ми не беремо до уваги коментар до відношення строгого порядку).

Розглянемо множину $A = \{2, 3, 6, 12, 24\}$ з визначеним на ньому відношенням порядку $x \leq y$: «*x ділить y»*, наприклад, 2 *ділить* 6, 12, 24; 3 *ділить* 6, 12, 24; 6 *ділить* 12, 24, і т.д. У цій множині найменший елемент, якщо він існує, повинен ділити **все** наступні за ним числа. Проте цією властивістю не володіють ні 2, ні 3, які **не порівнянні** між собою по відношенню «*x ділить y»*, і жодне з них не є найменшим, оскільки **не всі** числа «більше» 2 (або 3) по даному відношенню (2 *не ділить* 3 і 3 *не ділить* 2). Тому в цій множині немає найменшого елементу. Проте числа 2 і 3 володіють тією властивістю, що **ніяке** інше число не менше них по даному відношенню, тобто жодне інше число не ділить 2 і 3. Такі елементи, які *менше* за решту всіх елементів , є *мінімальними*.

Визначення 2.1.9. Мінімальним елементом P називається такий елемент $a \in P$, що ні для якого $x \in P$ не виконується умова $x \leq a$.

Визначення 2.1.10. Максимальним елементом P називається такий елемент $b \in P$, що ні для якого $x \in P$ не виконується умова $b \leq x$.

Неважко показати, що найменший елемент завжди є мінімальним в в-множині, а найбільший - максимальним, але зворотне здійснимо далеко не завжди. У розглянутому вище прикладі число 24 є найбільшим елементом, так як воно ділиться на всі попередні числа, і, в той же самий час, максимальним, а числа 2 і 3 є мінімальними, в той час, як найменшого елемента в цієї в-множині не існує. Дана множина не є також і ланцюгом, так як вона містить незрівнянні елементи 2 і 3.

Розглянемо довільну в-множину P. Нехай S є підмножина P. Тоді, якщо $x \leq y$ для $x, y \in S$, то $x \leq y$ в P. Оскільки властивості **P1 - P3** можливо застосувати в P, то вони виконуються і в S. Якщо в P виконується і **P4**, то воно виконується і в S. Звідси приходимо до наступного висновку.

Теорема 2.1.1. Будь-яка підмножина S в-множини P є в-множиною того ж самого порядку (обмеженого на S). Зокрема, будь-яка підмножина ланцюга є ланцюгом.

Теорема 2.1.2. Будь-яка кінцева непорожня підмножина X довільної в-множини має мінімальні і максимальні елементи.

Доведення. Нехай $X = \{x_1, ..., x_n\}$. Покладемо $m_1 = x_1$, а $m_k = x_k$, якщо $x_k < m_{k-1}$, і $m_k = m_{k-1}$ в іншому випадку. Тоді елемент m_n буде мінімальним. Аналогічно можна довести існування в X максимального елемента.

У будь-якого кінцевого ланцюга поняття найменшого і мінімального (найбільшого і максимального) елемента збігаються. Таким чином, будь-який кінцевий ланцюг містить найменший (перший) і найбільший (останній) елементи.

Множина натуральних чисел $\{1, 2, ..., n\}$ утворює ланцюг в своїй природній впорядкованості.

Визначення 2.1.11. Підмножину X множини P називають *обмеженою*, або *інтервалом* $[a, b]$, якщо $\forall a, b \in P\ \forall x \in X\ (a \le x \le b)$.

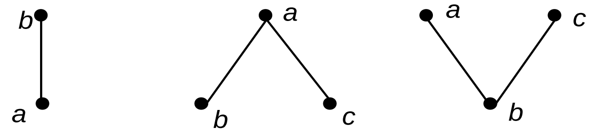
2.1.2. Діаграми впорядкованих множин.

Діаграми Хассе, відношення покриваємості.

Граф відношення порядку, побудований по його матриці, міститиме велике число транзитивно замикаючих дуг. Тому він виглядатиме дуже складним (див., наприклад, рис. 2.2,б). Для відношення порядку зазвичай будується діаграма Хассе (в нової транскрипції зустрічається як Гассе), яка базується на понятті *відношення покриваємості*.

Визначення 2.1.12. У впорядкованій множині з відношенням порядку $\le$ елемент b *покриває* a, якщо $a < b$ і не існує такого елементу x, щоб $a < x < b$.

Приклад.

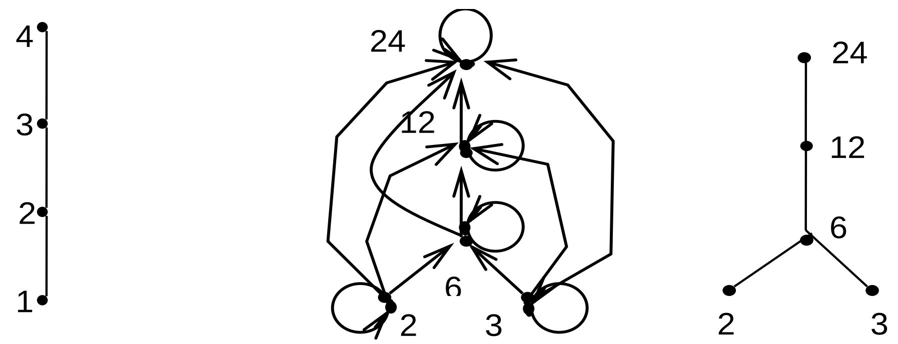


а) б) в)

Рис.2.1. а) b покриває а; б) a покриває b і с; в) a, c покривають b.

Вочевідь, що відношення покриваємості володіє наступними властивостями: антирефлексивність, асиметричність, і для жодної трийки елементів в ньому не виконується транзитивність. Відношення покриваємості є пімножиною відношення порядку (включенне в відношення), зображає транзитивне скорочення орієнтовного графу.

Тоді В-МНОЖИНУ можна зобразити у вигляді спеціального графу – діаграми Хассе наступним чином: будувати від низу до верху: якщо елемент b покриває елемент a, то він розташовується вище за елемент a і з'єднується з ним прямою. Незрівняні елементи розташовуються на одному рівні (умовно, бо таке не завжди можливо). Одержаний граф називається *діаграмою в-множини*, або *діаграмою Хассе* (див. рис. 2.2)[11]. Граф відношення покриваємості не містить транзитивно замикаючих дуг і петель, що відображають рефлексивність відношення, тому діаграма P може бути одержана з орієнтованого графа відношення порядку $x \leq y$, де $x, y \in P$, видаленням петель і транзитивно замикаючих дуг. Приклади діаграм Хассе приведені на рис. 2.2.



а) б) с)

Рис. 2.2. Приклади діаграм Хассе
а) лінійно впорядкована множина (ланцюг); б) граф відношення «х ділить у»;
с) — діаграма Хассе множини, впорядкованої відношенням «х ділить у».

Якщо два елементи $a, b \in P$ перебувають у відношенні порядку $a \leq b$, то на діаграмі існує шлях з a в b. Таким чином, будь-яка кінцева в-множина з точністю до ізоморфізму визначається своєю діаграмою.

Приклад.

Продовжуючи попередній приклад, розглянемо діаграму Хассе для множини А = {2, 3, 6, 12, 24} з відношенням «х ділить у» (рис. 2.2, с). Ця діаграма

---

[11] Вперше систематично такого роду візуалізація описана Біркгофом [G. Birkhoff. Lattice Theory. — 2nd. — American Mathematical Society, 1948], їм же дано назву в честь Хельмута Хассе, що використав подібні діаграми, однак такого роду малюнки зустрічаються і в більш ранніх працях, наприклад, в підручнику французького математика Анрі Фохта (нім. Henri Vogt) 1895 року видання.

отримана видаленням кільцевих і транзитивно замикаючих дуг на орієнтованому графі (рис. 2.2, b). Ми бачимо, що кожен вищерозміщений елемент на діаграмі «більше» всіх, що лежать нижче його. Таким чином, немає необхідності стрілками вказувати відношення порядку між елементами: це легко визначити за рівнем, який займає кожен елемент на діаграмі Хассе. Тому діаграма Хассе зазвичай зображується без стрілок.

Визначення 2.1.13. Елемент u називається *нижньою гранню (мінорантою)* елементів a і b, якщо $u \le a$ і $u \le b$.

Визначення 2.1.14. Елемент v називають *верхньою гранню (мажорантою)* елементів a і b, якщо $a \le v$ і $b \le v$.

У двох елементів може бути декілька нижніх і верхніх граней, що добре видно на діаграмах Хассе: це всі елементи, розташовані нижче (для верхніх граней – вище) за обидва елементи.

Визначення 2.1.15. Елемент x називається **найбільшою нижньою гранню** (*точною нижньою гранню)* елементів a і b, якщо він є їх нижньою гранню і для будь-якої нижньої грані u $u \le x$. Позначається $x = inf\,(a, b)$ ($infimum(a, b)$).

Визначення 2.1.16. Елемент y називається **найменшою верхньою гранню** (*точною верхньою гранню)* елементів a і b, якщо він є верхньою гранню a і b і для будь-якої верхньої грані v $y \le v$. Позначається $y = sup(a, b)$ ($supremum(a, b)$).

Визначення 2.1.17. Впорядковані множини, в яких для кожних двох елементів існує точна верхня і точна нижня грані, називаються *решітками***.**

Приклади.

1. Розглянемо множину, що представлена діаграмою Хассе на рис. 2.3. Для елементів d, e нижніми гранями будуть елементи b, так як $b \le d$, $b \le e$, і a, так як $a \le d$ і $a \le e$, однак, $a \le b$, отже, b є найбільшою нижньою гранню. Для елементів e і c $c \le e$, $a \le e$, $a \le c$, тому a і c - нижні грані елементів e і c, але $a \le c$, отже, $c = inf\ (e, c)$ - найбільша нижня грань. Аналогічно визначаються і точні верхні межі: $sup\ (b, c) = e$, $sup\ (d, e) = f$, $sup\ (e, c) = e$.

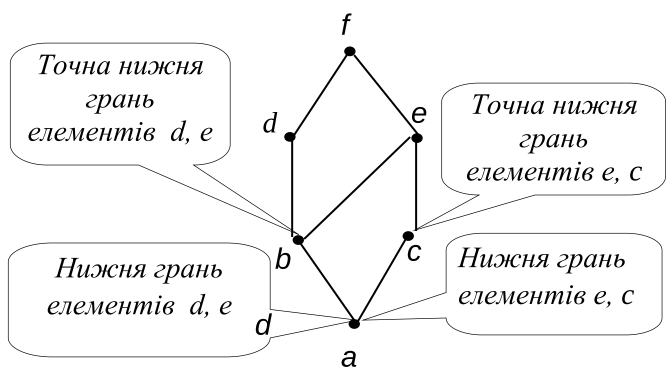


Рис. 2. 3. Точні нижні грані

2. Розглянемо множину на рис. 2.4. Для елементів *d*, *e* нижніми гранями будуть елементи: *b* $(b \le d,\ b \le e)$, *c* $(c \le d,\ c \le e)$, і *a* ($a \le d$ і $a \le e$), при цьому $a \le b$ і $a \le c$, проте, $c \parallel b$ (непорівнянні), отже, ні *b*, ні *c* не є найбільшою нижньою гранню. Точної нижньою гранню елементів *b, c* буде елемент *a*. Аналогічно, для елементів *b, c* не існує точної верхньої грані. Таким чином, в даній в-множині не для всяких двох елементів існує точна нижня і точна верхня грань.

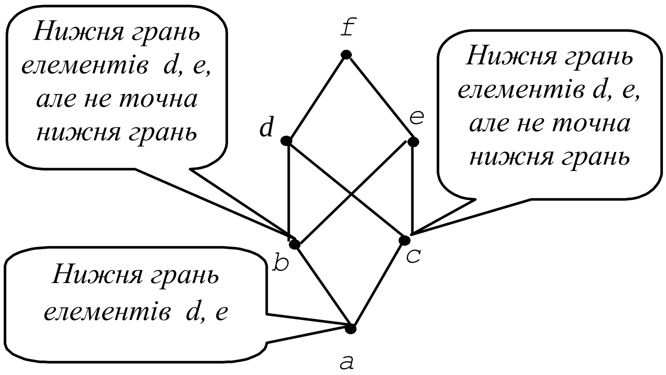
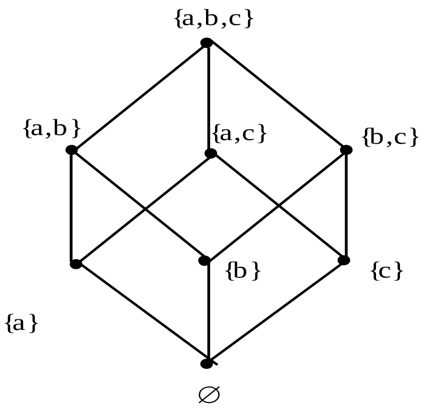


Рис. 2.4. В-множина, що не є решіткою.

Таким чином, множина на рис. 2.3 є решіткою, а множина на рис. 2.4 – в-множиною, але не решіткою.

3. Розглянемо множину всіх підмножин множини $A = \{a, b, c\}$: $\wp(A) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$. Ця множина впорядкована відношенням включення і її можна представити у вигляді діаграми Хассе (рис.2.5).



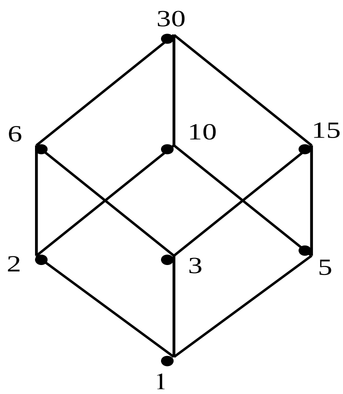


Рис.2.5.
Діаграма $\wp$(A)

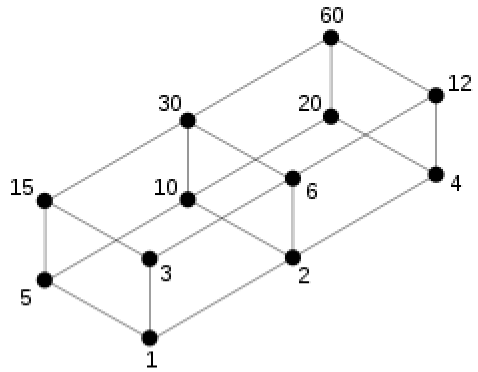
Рис.2.6.
Діаграма в-множини
з відношенням «х – дільник у».

Тут точною нижньою гранню підмножин є їх теоретико-множинне перетинання, наприклад для {a} і {b} це ∅: {a} ∩ {b} = ∅; для {a, b} і {b, c} це {b} і т. д. Точної верхньою гранню двох підмножин є їх теоретико-множинне об'єднання, наприклад для {a} і {b} - це {a, b}, для {a, b} і {b, c} - це {a, b, c} і т.д.

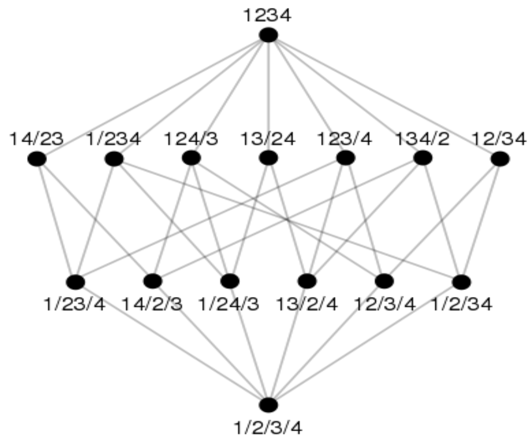
Дивлячись на діаграму ℘ (A), можна зробити висновок, що в інтерпретації теорії множин операції *sup (x, y)* відповідає операція об'єднання, а операції *inf (x, y)* – перетин. Ця аналогія стала підставою для вибору найменування операції знаходження точної верхньої грані – «об'єднання» (позначається ∨) і точної нижньої грані – «перетин» (позначається ∧) в теорії решіток. Таким чином позначення *inf (x, y)* і $x \wedge y$, *sup (x, y)* і $x \vee y$ – рівнозначні.

4. Множина $X = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$ с заданим на ній відношенням *«x – дільник y»* (рис. 2.6) утворює решітку, в якій операції знаходження точної нижньої грані x і y відповідає знаходження *НСД (x, y)* (найбільший спільний дільник), а операції знаходження точної верхньої грані x і y відповідає знаходження *НСК (x, y)* (найменше спільне кратне).

5. Множина A = { 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60 } всіх дільників числа *60*, частково впорядкована за подільністю (це – решітка):

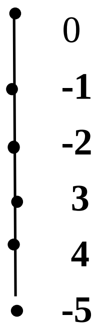


6. Множина всіх 15 розбиттів множини *{ 1, 2, 3, 4 },* де більше грубе розбиття вище за більш мілке (впорядкована множина не є решіткою):



2.1.3. Квазіпорядки

Приклад. Розглянемо відношення |x|>|y| на множині X={-5, -2, -1, 0, 3, 4}. Відношення відповідає на даній множині властивостям: антирефлексивності, асиметричності і транзитивності. Це відношення строго порядку, множина впорядкована лінійно, тобто утворюється ланцюг, решітка Побудуємо діаграму Хассе.

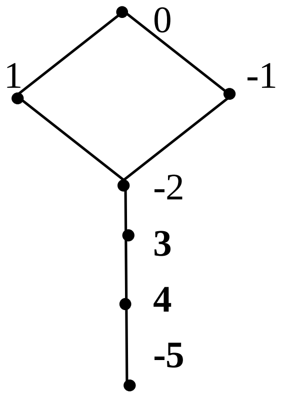


Мінімальний (найменший) елемент – «-5»

Максимальний (найбільший) елемент – «0»

Графічне зображення впорядкованої множини у вигляді діаграми Хассе допомогає візуально встановлювати найбільші і найменьші елементи, максимальні та мінімальні, нижні та верхні грані підмножин.

Розглянемо теж саме відношення на множині X={-5, -2, -1, 0, 1, 3, 4}. Властивості зберігаються, відношення строгого порядку, решітка, але вже не буде ланцюга – «1» і «-1» - непорівняні, множина впорядкована частково. В даній множині мінімальні-максимальні та найменші-найбільші елементи такі ж самі.



На множині X={ -2, -1, 0, 1, 2, 3} ми маємо відношення строгого порядку, частково впорядковану множину, максимальний (найбільший) елемент – 0, мінімальний (найменьший) елемент – 3. Але в нас вже не буде решітки. Діаграма даної впорядкованої множини співпадає з рисунком 2.4, де *a, b, c, d, e, f* відповідно *3, -2, 2, -1, 1, 0.*

Знову таки повернемося до множини X=*{-5, -2, -1, 0, 1, 3, 4},* але розглянемо відношення $|x|\geq|y|$. Відношення є рефлексивним, транзитивним. Але чи виконується властивість антисиметричності? Чи завжди з $|x|\geq|y|$ та $|y|\geq|x|$ слідує $x=y$? У нас $|1|\geq|-1|$ та $|-1|\geq|1|$, але при цьому $-1\neq 1$, тобто умова антисиметричності не виконується. Відношення не є відношенням порядку.

Визначення 2.1.18. Відношенням квазіпорядку (передпорядка, псевдопорядка; позначимо його $\lhd$) на множині S визначається відношення, яке задовольняє умовам:

рефлексивності – $x \lhd x$, **P1**

транзитивності – якщо $x \lhd y$ і $y \lhd z$, то $x \lhd z$, **P3** але не обов'язково умові антисиметричністі **P2**.

Пара <S, $\lhd$> називається квазівпорядкованою (псевдовпорядкованою) множиною.

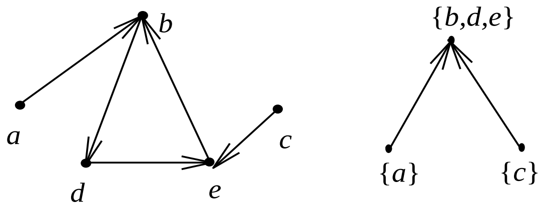


Рис. 2.7.

а) Квазіпорядок S. б) Фактор-множина S/~.

Квазівпорядкована множина зображується у вигляді орієнтованого графа (рис. 2.7, а).

На графі існування відношення $x \lhd y$ означає, що або $x = y$, або існує шлях з x в y в напрямку стрілок. На рис. 2.7, а показано, що є шлях з b в e: $b \to d$, $d \to e$, тобто $b \lhd e$. З іншого боку, є шлях з e в b: $e \to b$, тобто $e \lhd b$. Таким чином, $b \lhd e$ і $e \lhd b$, однак, $e \lhd b$, тобто антисиметричність в даному випадку не виконується. Аналогічно для d, e і d, b.

Розглянемо основну лему про квазівпорядковані множини, згідно з якою будь-яку квазівпорядковану множину можна перетворити в впорядковану. За лемою, якщо для якихось двох елементів виконується $x \lhd y$ і $y \lhd x$, і при цьому $x \neq y$, то ці елементи покладаються еквівалентними. Множина класів еквівалентності утворює в-множину. Наприклад, на рис. 2.7 елементи b, d, e будуть еквівалентні і утворюють один клас еквівалентності. Два інших класи еквівалентності будуть утворені одноелементними підмножинами $\{a\}$ і $\{c\}$. Тепер будь-які два елементи будуть знаходитися у відношенні порядку $x \lhd y$ тільки в тому випадку, якщо вони належать різним класам еквівалентності. В даному прикладі: $a \lhd b$, $a \lhd d$, $a \lhd e$, $c \lhd b$, $c \lhd d$, $c \lhd e$, і $a \parallel c$. Тоді фактор-множина S / ~ є в-множиною, де кожен елемент є одним з класів еквівалентності. На рис.2.7, б) показано в-множина класів еквівалентності $\{a\}, \{c\}, \{b, d, e\}$.

Доведемо цю лему.

Лемма 2.1.1. У квазівпорядкованій множині $Q = \langle S, \lhd \rangle$ покладемо $x \sim y$, якщо $x \lhd y$ і $y \lhd x$. Тоді:

I. Відношення ~ є відношенням еквівалентності на S;

II. Якщо E і F - два класи еквівалентності відношення ~, то або $x \lhd y$ для всіх $x \in E, y \in F$, або подібне співвідношення неможливо ні для яких $x \in E, y \in F;$

III. Фактор-множина $S/\sim$ стає в-множиною, якщо покласти $E \le F$ в разі, якщо $x \lhd y$ для деяких (а значить і для всіх) $x \in E, y \in F$.

Доведення.

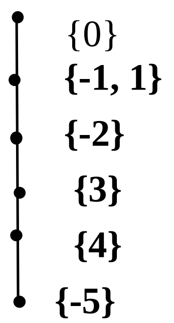
I. Відношення $x \lhd x$ виконується для будь-якого $x \in S$ за **P1**, отже, відношення $\sim$ рефлексивно. Згідно з визначенням, з $x \sim y$ та $y \sim z$ слідує $x \lhd y$ і $y \lhd z$, звідки $x \lhd z$ за **P3**. Аналогічно, з $x \sim y$ та $y \sim z$ слідує $z \lhd y$ і $y \lhd x$, тому $z \lhd x$. Отже, якщо $x \sim y$ і $y \sim z$, то $x \sim z$, тобто відношення ~ транзитивно. Відношення ~ симетрично за визначенням. Отже, це відношення еквівалентності.

II. У двох класах еквівалентності E і F, якщо $x \lhd y$ для деяких $x \in E, y \in F$, то $x_1 \lhd x \lhd y \lhd y_1$ для всіх $x_1 \in E, y_1 \in F$, і, отже, $x_1 \lhd y_1$ в силу транзитивності . Це означає, що тільки елементи, що належать різним класам еквівалентності, можуть знаходитися у відношенні порядку, або ці елементи непорівнянні.

III. В фактор-множині $S/\sim$ клас $E \sim E$ (так як $x \sim x$) для всіх E. Якщо $E \le F$, *і* $F \le G$, то $x \lhd y \lhd z$ для всіх $x \in E, y \in F, z \in G$, отже, $x \lhd z$ згідно **P3** для $\lhd$. Значить відношення $\le$ транзитивно. І, якщо $E \le F$, *і* $F \le E$, то для всіх $x \in E, y \in F$ $x \lhd y$ і $y \lhd x$, звідки $x \sim y$, і значить $E = F$.

Таким чином, введення класів еквівалентності на квазівпорядкованих множинах зводить їх до в-множин, тому квазіпорядок часто називають передпорядком.

Приклад. Повернемося до прикладу, з якого починали розгляд обставин виникнення квазіпорядків (зрозуміло, що такі псевдопорядки з'являються на деяких множинах при відношеннях, які допускають сюр'єкцію: модулі, синуси-косинуси, остачі від ділення тощо). На множині X=$\{-5, -2, -1, 0, 1, 3, 4\}$ задане відношення $|x| \ge |y|$. Впорядкування класів еквівалентності представлено на рисунку.



2.1.4. Відображення впорядкованих множин.

Визначення ізотонних, антітонних відображень, ізоморфізму та дуального ізоморфізму.

Визначення 2.1.19. Функція φ: $P \to Q$, що задана на в-множині P і що приймає значення в в-множині Q, називається *такою, що зберігає порядок,* або *ізотонною,* якщо з $x \le y$ витікає, що $\varphi(x) \le \varphi(y)$. (1)

Наприклад**,** якщо $P = \{1, 2, 3\}$, таке що $1 \le 2 \le 3$, і $Q = \{a, b, c\}$, таке що $a \le b \le c$, то відображення $\varphi(1)=a$, $\varphi(2)=b$, $\varphi(3)=c$ є ізотонною функцією.

Визначення 2.1.20. Ізотонна функція, що допускає ізотонну зворотну функцію, називається φ *-ізоморфізмом*. Іншими словами, ізоморфізмом є взаємне однозначна відповідність між двома в-множинами, що задовольняє умові (1) і умові (1'):

з $\varphi(x) \le \varphi(y)$ *витікає, що* $x \le y$. (1')

Визначення 2.1.21. Дві в-множини P і Q називаються *ізоморфними* (позначення: $P \cong Q$), якщо між ними існує ізоморфізм.

***Приклад*.** Неважко помітити, що діаграми множин $\wp$ (A) (рис.2.5) і X (рис. 2.6) мають абсолютно однакову структуру, хоча складаються з різних елементів. Значить, між ними можна встановити взаємно однозначну відповідність. Очевидно, що відповідність буде зберігати порядок кожної впорядкованої множини, тобто ці в-множини ізоморфні.

Визначення 2.1.22. Ізоморфізм в-множини P з самим собою називається автоморфізмом.

З властивостей **Р1 - Р3** слідує **принцип двоїстості**.

Теорема 2.1.3. Відношення, зворотне для відношення порядку, саме є впорядкованістю.

Дійсно, якщо $x \le y$ («*x* менше *y*»), то $y \ge x$ («*y* більше *x*»). Наприклад, якщо $x \le y$ є відношення «*x* ділить *y»,* то зворотне йому відношення $y \ge x$ є «*y* ділиться на *x*».

Визначення 2.1.23. Двоїстою для в-множини *X* називається множина X*′*, яка визначається на тих же елементах відношенням, зворотним до впорядкованості в X. При цьому: $X \cong X'$.

З теореми 2.3 випливає, що кожна властивість і кожна теорема про в-множини має двоїстий аналог, і, якщо деяке твердження справедливо для всіх в-множин, то подвійне йому твердження також справедливо для всіх в-множин. Це властивість в-множин зазвичай і називається принципом двоїстості.

Згідно з цим принципом, твердження ψ справедливо в в-множині $< X, \leq >$, тоді і тільки тоді, коли двоїсте йому твердження справедливо в в-множині $< X', \geq >$. Для кожного твердження щодо решітки можна отримати подвійне йому твердження, замінивши в ньому операцію $\vee$ на $\wedge$ і навпаки. Якщо в твердженні присутні ***0*** і ***I*** решітки, то в двоїстому твердження їх також слід поміняти місцями. Наприклад, для твердження «множина $<X, \leq >$ має нуль» двоїстим буде твердження «множина $< X', \geq >$ має одиницю».

Відповідно до принципу подвійності, все властивості решіток, які будуть розглянуті в наступному розділі, формулюються у вигляді двох тверджень, двоїстих одна до одною.

Визначення 2.1.24. Функція φ: $P \rightarrow Q$ називається *антиізотонною* (*антитонною*), якщо: з $x \leq y$ витікає, що $\varphi(x) \geq \varphi(y)$ (2)

а взаємно однозначна відповідність, що задовольняє умові (2) і (2'):

з $\varphi(x) \leq \varphi(y)$ слідує $x \geq y$ (2')

називається *дуальним ізоморфізмом.*

Приклад.

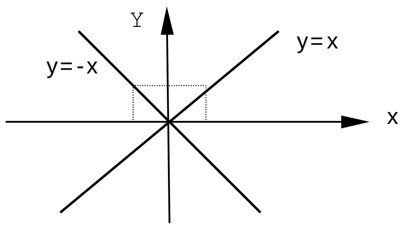


Рис.2.8.
Автоморфізм и дуальний автоморфізм.

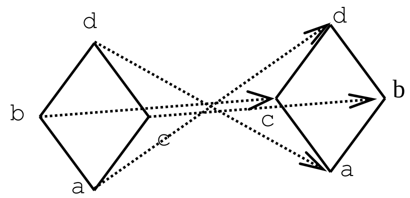
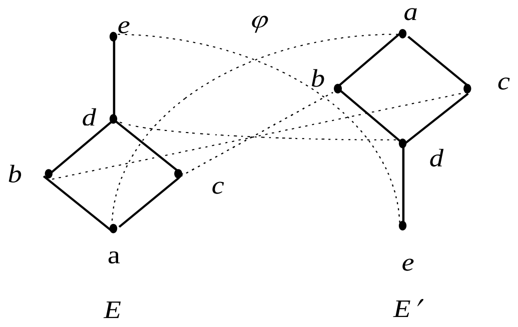


Рис.2.9.
Самодвоїста множина

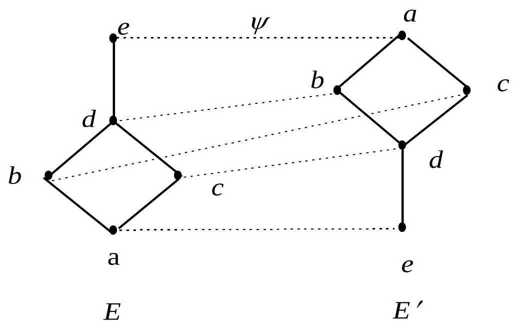
На рис. 2.8 пряма $y = x$ є автоморфізм $R \rightarrow R$, який є тотожним відображенням. Пряма $y = -x$ є дуальний автоморфізм; це відображення бієктивно і антитонно: якщо $x_1 \leq x_2$, то $y_1 \geq y_2$.

Системи $<X', \geq >$, дуально ізоморфні $<X, \leq>$, є двоїстими по відношенню до X.

Приклад. Множини E і E' на рис. 2.10, а) двоїсті одна одній. Відображення φ є дуальним ізоморфізмом: пряме і зворотне відображення бієктивне і антитонне. Відображення ψ на рис. 2.10, б) не є ізоморфізмом, воно не зберігає порядок, наприклад, $b \leq d$, але $\psi(b) \,||\, \psi(d)$.



а)



б)

Рис. 2.10.а). Антитонне відображення, дуальний ізоморфізм. б) Неізотоне відображення.

Визначення 2.1.25. В-МНОЖИНА, дуально ізоморфна сама собі, називається *самодвоїстою*. У самодвоїстій множині для будь-якого x образ φ(φ (x)) образу φ(x) співпадає з x: φ(φ (x)) = x. Такі самодвоїсті (дуальні) автоморфізми називаються *інволюціями*.

Приклади.

1. Множина на рис. 2.9 є самодвоїстою. Дійсно, відображення $\varphi(a) = d$, $\varphi(b) = c$, $\varphi(c) = b$, $\varphi(d) =$ а є дуальним автоморфізмом. Повторне застосування цього відображення дає ті ж самі елементи, тобто E. Виконується властивість самодвоїстості: $\varphi(\varphi(x)) = x$.

2. Властивістю самодвоїстості володіє множина-степінь $\wp$ (Р) всіх підмножин деякої множини Р, впорядковане відношенням включення. Відображення, яке ставить у відповідність кожній підмножині його доповнення до множини Р, взаємно однозначно і обертає включення. Таким чином, множина-степінь $\wp$(Р) є самодвоїста (див. рис.2.5).

3. На рис. 2.10, а) показані множини Е і Е′, двоїсті одна одній. На рис. 2.10, б) показана множина Е з відображенням, що не є навіть ізотонним. Дійсно, відображення ψ не є ізотонним: b ≤ d, проте ψ (b) = c і ψ (d) = b непорівнянні.

2.1.5. Градуйовані множини.

Теорема 2.1.4. Будь-який кінцевий ланцюг з n елементів ізоморфний числу ***n*** (ланцюгу цілих чисел 1, ..., n). Іншими словами, існує взаємно однозначна відповідність φ між n- елементним ланцюгом X і множиною {1, 2, ..., n}, таке, що $x_1 \le x_2$ тоді і тільки тоді, коли $\varphi(x_1) \le \varphi(x_2)$.

Доведення. Нехай φ відображає найменший елемент $x \in X$ в 1, найменший елемент з тих, що залишилися — в 2 і т.д. Тоді кожному елементу ланцюга відповідатиме натуральне число.

Визначення 2.1.26. *Довжиною* $l[P]$ Р називається точна верхня грань довжин ланцюгів в Р. Довжина кінцевого ланцюга n за визначенням вважається рівній $n - 1$ (це очевидно, якщо подивитися на діаграму ланцюга). Якщо $l[P]$ кінцеве, то говорять, що P має кінцеву довжину.

Визначення 2.1.27. *Висотою,* або *розмірністю,* $h[x]$ елементу x називається точна верхня грань довжин ланцюгів $\mathbf{0} < x_0 < x_1 < \ldots < x_l = x$ між $\mathbf{0}$ і x. Якщо Р має найбільший елемент $\boldsymbol{I}$, то, очевидно, що $h(I) = l(P)$. Зрозуміло також, що $h[x] = 1$ тоді і тільки тоді, коли x покриває $\mathbf{0}$. Такі елементи x називаються *атомами.,*

Приклади. На рис. 2.11 висота множини M_3 дорівнює 2, а висоти множин N_5, L_7, 2^3 і P_6 дорівнює 3.

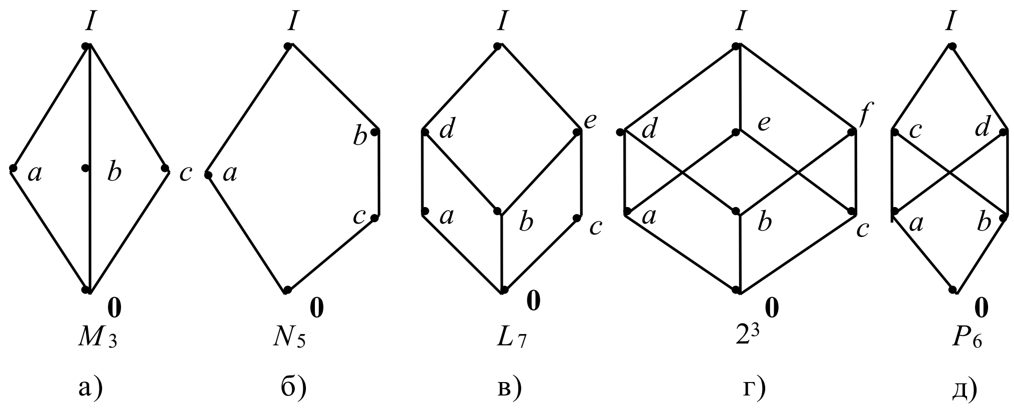


Рис.2.11. Діаграми в-множин.

Поняття висоти тісно пов'язано з поняттям градуйованої множини.

Визначення 2.1.28. *Градуйованою* В-МНОЖИНОЮ називається В-МНОЖИНА Р із заданою на ній функцією g: $P \to \mathbf{Z}$, що приймає значення в ланцюзі цілих чисел, і такою, що

якщо $x > y$, то $g[x] > g[y]$ **G1.**

якщо x покриває y, то $g[x] = g[y] + 1$. **G2.**

Твердження. *У всякій градуйованій множині має місце ланцюгова умова Жордана-Дедекінда: всі* ***максимальні ланцюги між двома фіксованими точками мають однакову довжину.***

Теорема 2.1.5. У P з **0** і кінцевими ланцюгами тоді і тільки тоді виконується ланцюгова умова Жордана–Дедекінда, коли P градуюється функцією висоти $h[x]$.

Такі множини, в яких виконується умова Жордана-Дедекінда, називають ще дедекіндовимі множинами.

Доведення. Якщо P градуюється функцією $h\ [x]$, то умова Жордана-Дедекінда виконується очевидним чином: довжина максимальної ланцюга, що з'єднує точки a і b, такі, що $b>a$, дорівнює $h[b] – h[a]$. Навпаки, якщо має місце умова Жордана-Дедекінда, то $h\ [x]$ буде довжиною максимального ланцюга від 0 до x, звідки слідує здійсненність для $h\ [x]$ умов **G1** і **G2**.

Приклад. Розглянемо діаграми на рис. 2.11. Серед множин, зображених на рис. 2.11, множина N_5 виділяється своєю «несиметричністю»: довжина лівого ланцюга між **0** і **I** рівна двом, а правого ланцюга — трьом. Оскільки на діаграмах Хассе зображаються тільки максимальні ланцюги, умова Жордана–Дедекінда не виконується в даній множині, воно не є градуйованою (не дедекіндовою) множиною. Решта всіх множин – градуйовані.

Тема 2.2. Решітки та їх властивості.
2.2.1. Визначення решітки. Решітки як алгебри.

Основні визначення решітки. Алгебраїчне представлення решіток.

Визначення 2.2.1. *Решітками*[12] *(гратками)* називається в-множина L, в якій будь-які два елементи x і y мають точну нижню грань, що називають *перетином* (позначається $x \wedge y$), і точну верхню грань, що називають *об'єднанням* (позначається $x \vee y$). Решітку L називають *повною*, якщо будь-яка її підмножина X має в L точні верхню і нижню грані.

Вважаючи $X = L$, ми бачимо, що будь-які непорожні повні решітки містять найменший елемент **0** і найбільший елемент ***I***. Дійсно, якщо кожні два елементи мають точну верхню грань, то в решітці є тільки один максимальний елемент, який буде і універсальною верхньою гранню, тобто одиницею. Аналогічно, існування точної нижньої грані для будь-яких двох елементів забезпечує існування універсальної нижньої грані – нуля .

[12] Англійською – *lattice*, німецькою – *Verband*; у нас іноді перекладають *структурами*.

Твердження 2.2.1. Будь-який ланцюг є решіткою, в якій перетин $x \wedge y$ співпадає з меншим, а об'єднання $x \vee y$ – з більшим з елементів x, y.

Це твердження очевидно, оскільки в будь-якому ланцюзі або $x \leq y$, або $y \leq x$, тому або $x \wedge y = x$, або $x \wedge y = y$. Двоїсто для об'єднання: або $x \vee y = x$, або $x \vee y = y$.

Приклади.

На рис. 2.11 зображені діаграми Хассе в-множин, серед яких множини M_3, N_5, L_7, 2^3 є решітками. Не всяка в-множина з 0 і I є решітками. В-множина P_6 є в-множиною з 0 і I, проте, вона не утворює решітку, так як в ньому не для всяких двох елементів існує об'єднання і перетин: для елементів c і d не існує перетину, а для елементів a , b - об'єднання.

Визначення 2.2.2. *Підрешіткою* решітки L называеться підмножина $X \subset L$ така, що якщо $a \in X$, $b \in X$, то $a \wedge b \in X$ і $a \vee b \in X$.

Пуста підмножина і будь-яка одноелементна підмножина є підрешітками. Підрешітка решітки сама є решіткою з тими ж операціями об'єднання і перетину. Взагалі, якщо $a \leq b$ в решітці L, то (замкнутий) інтервал $[a, b]$, що складається з усіх елементів $x \in L$, які задовольняють умові $a \leq x \leq b$, завжди буде підрешіткою. Для ланцюга і її елементів a, b, таких що $a \leq b$, можна визначити поняття напіввідкритих інтервалів: $(a, b] = \{x \mid a < x \leq b\}$ і $[a, b) = \{x \mid a \leq x < b\}$, а також відкритий інтервал $(a, b) = \{x \mid a < x < b\}$. Якщо ці множини непорожні, то вони також є підрешітками.

Приклад. В решітці на рис. 2.12 підмножина $Y = \{\varnothing, \{b\}, \{c\}, \{b, c\}\}$ є підрешіткою. Дійсно, $\{b\} \in Y$, $\{c\} \in Y$, $\{b\} \wedge \{c\} = \varnothing \in Y$, $\{b\} \vee \{c\} = \{b, c\} \in Y$, $\{b\} \vee \{b, c\} = \{b, c\} \in Y$, перетин $\{b\} \wedge \{a, c\} = \{b\} \in Y$ і т. д. Ця підмножина утворює підрешітку $[\varnothing, \{b, c\}]$. Підмножина $Z = \{\varnothing, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{c\}\}$ не є підрешіткою тому, що $\{a, b\} \vee \{a, c\} = \{a, b, c\} \notin Z$. Дана підмножина не є також і інтервалом. Підрешітками будуть також всі ланцюги, наприклад: $\{\varnothing, \{b\}\}$, $\{\{a\}, \{a, b\}\}$, $\{\varnothing, \{b\}, \{b, c\}\}$, і т.д., а також всі елементи решітки.

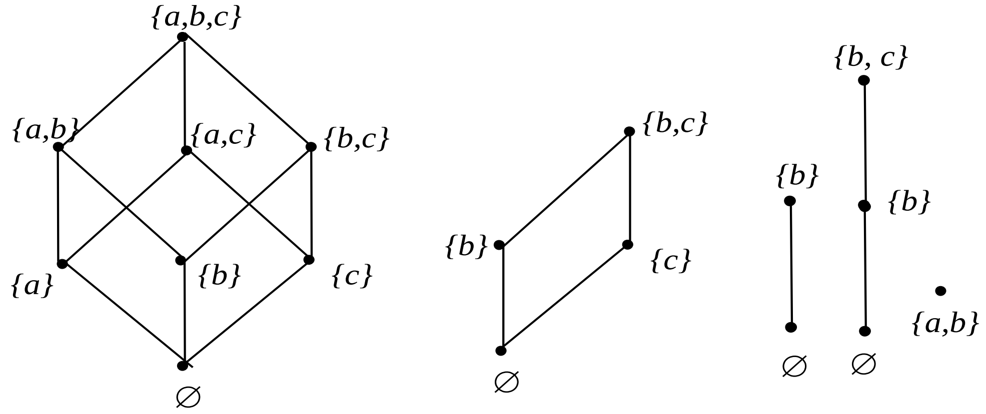


Рис. 2.12. Решітка і її підрешітки.

Визначення 2.3. *Опуклою* підмножиною у в-множині P називається підмножина, яке разом з будь-якими своїми елементами a і b, де $a \leq b$, містить весь інтервал $[a, b]$.

На рис. 2.12 підмножина $\{\varnothing, \{b\}, \{c\}, \{b, c\}\}$, – опукла, а підмножина $\{\varnothing, \{b\}, \{b, c\}\}$ – ні. Підмножина S решітки L є опуклою підрешіткою, якщо для будь-яких $a, b \in S$ $[a \wedge b, a \vee b] \subset S$.

Визначення 2.4. Властивість підмножин S деякої множини називається властивістю замикання, якщо:

1) S володіє цією властивістю;

2) будь-який перетин підмножин, що володіють цією властивістю, теж володіє їм.

Тепер підрешітки можна визначити як будь-яку підмножину решітки, що замкнена щодо операцій об'єднання і перетину.

Решітку можна визначити як алгебраїчну систему: $L = \langle P, \vee, \wedge, \leq \rangle$, з двома бінарними операціями $\vee$ і $\wedge$, і відношенням порядку $\leq$, заданими на множині P. Решітчасті операції $\vee$ і $\wedge$ володіють важливими властивостями алгебри. У цьому розділі буде досліджено властивості операцій $\vee$ і $\wedge$ і показано, що операції, що володіють цими властивостями, визначають відношення порядку на множині P, що дозволяє розглядати решітки як алгебри з двома операціями.

Лема 2.2.1. У в-множині для операцій перетину і об'єднання виконуються (при визначених в них виразах) наступні закони:

$x \wedge x = x, \quad x \vee x = x$ **L1**

$x \vee y = y \vee x, \quad x \wedge y = y \wedge x$ **L2**

$x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$ **L3**

$x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$

$x \wedge (x \vee y) = x, \quad x \vee (x \wedge y) = x$ **L4**

Крім того, нерівність $x \leq y$ рівносильно кожній з умов:

$x \wedge y = x$ і $x \vee y = y$ (*умови сумісності*). **L5**

Доведення. **L1** і **L2** виконуються вочевидь. Асоціативний закон **L3** також зрозумілий: $x \wedge (y \wedge z) = inf\,\{x, inf\,\{y, z\}\} = inf\,\{inf\,\{x, y\}, z\} = (x \wedge y) \wedge z$. Закон поглинання **L4** виконується тому, що $x \wedge (x \vee y) = inf\{x, sup\{x, y\}\}$. Якщо $x \leq y$, то $sup\{x, y\} = y$, і тоді $inf\{x, y\} = x$, а якщо $y \leq x$, то $sup\{x, y\} = x$, і тоді $inf\{x, x\} = x$. Умова сумісності: $x \wedge y = x$, якщо $x \leq y$, і $x \vee y = y$, якщо $x \leq y$, — теж виконується.

З умови сумісності випливають важливі властивості універсальних граней **0** і ***I***.

Лема 2.2.2. Якщо P має **0**, то $\mathbf{0} \wedge x = \mathbf{0}$ і $\mathbf{0} \vee x = x$ для всякого $x \in P$ і якщо P має $\boldsymbol{I}$, то $x \wedge \boldsymbol{I} = x$ і $x \vee \boldsymbol{I} = \boldsymbol{I}$ для всякого $x \in P$.

Лема 2.2.3. У всякій решітці операції об'єднання і перетину ізотоні: якщо $y \leq z$, то $x \wedge y \leq x \wedge z$ і $x \vee y \leq x \vee z$.

Доведення. За **L1 – L4,** якщо $y \leq z$, то $x \wedge y = (x \wedge x) \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge (x \wedge z)$. Враховуючи, що $x \wedge x = x$ і $y \wedge z = y$, за умовою сумісності отримаємо $x \wedge y \leq x \wedge z$. Друга нерівність доводиться двоїсто.

Лема 2.2.4. У всяких решітках мають місце наступні нерівності *дистрибутивності:*

$$x \wedge (y \vee z) \geq (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \tag{1}$$

$$x \vee (y \wedge z) \leq (x \vee y) \wedge (x \vee z). \tag{1'}$$

*Доведення***.** Зрозуміло, що $x \wedge y \leq x$ і $x \wedge y \leq y \leq y \vee z$, звідки $x \wedge y \leq x \wedge (y \vee z)$. Аналогічно: $x \wedge z \leq x$ и $x \wedge z \leq z \leq y \vee z$, звідки $x \wedge z \leq x \wedge (y \vee z)$. Таким чином, $x \wedge (y \vee z)$ є верхньою гранню для $x \wedge y$ і $x \wedge z$ і, отже, виконується (1). (1 ') доводиться двоїсто.

Лема 2.2.5. Елементи будь-яких решіток задовольняють *нерівності модулярності*: якщо $x \leq z$, то $x \vee (y \wedge z) \leq (x \vee y) \wedge z$, (2)

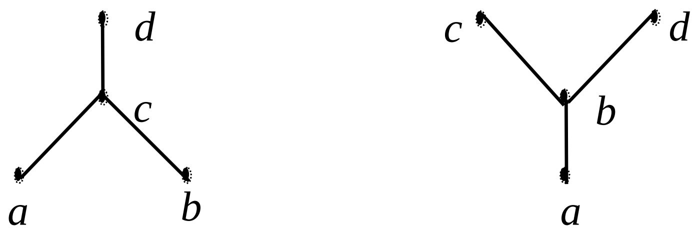
$z \leq x \quad x \wedge (y \vee z) \geq (x \wedge y) \vee z$. (2')

*Доведення***.** $x \leq x \vee y$ і $x \leq z$, значить $x \leq (x \vee y) \wedge z$. Аналогічно, $y \wedge z \leq y \leq x \vee y$ і $y \wedge z \leq z$, отже, $y \wedge z \leq (x \vee y) \wedge z$, звідки $x \vee (y \wedge z) \leq (x \vee y) \wedge z$.

Дамо такі визначення.

Визначення 2.2.6. Система з одною бінарною ідемпотентною, комутативною і асоціативною операцією називається *напіврешіткою*. В-множина P, в якій будь-які два елементи мають перетин, є напіврешіткою щодо бінарної операції $\wedge$. Такі напіврешітки називаються $\wedge$-напіврешітками, або *нижніми напіврешітками*. В-множина P, в якій будь-які два елементи мають об'єднання, є напіврешіткою щодо бінарної операції $\vee$. Такі напіврешітки називаються $\vee$-напіврешітками, або *верхніми напіврешітками*.

Приклад. На рис. 2.13 наведені діаграми верхньої і нижньої полурешеток. У в-множині P_1 будь-які два елементи мають об'єднання, однак елементи a і b не мають перетину, тому P_1 є верхньою напіврешіткою; у в-множині P_2 будь-які два елементи мають перетин, проте елементи c і d не мають об'єднання, тому це нижня напіврешітка.



Верхня напіврешітка P_1. *Нижня напіврешітка P_2.*

Рис. 2.13. Напіврешітки.

Тепер доведемо важливу лему, яка пов'язує напіврешітку як алгебру з поняттям в-множини. Ця лема стверджує, що якщо на множині P задана алгебра з однією бінарною операцією, що задовольняє властивостям ідемпотентності, комутативності і асоціативності, то ця операція задає відношення порядку на P, тобто множина, на якому задана ця операція, є в-множиною. Таким чином, ми можемо нічого не знати про існування будь-яких відношень на множині P, але завдання операції з властивостями **L1, L2, L3** визначає відношення порядку на ній.

Лема 2.2.6. Якщо в напіврешітках з бінарною операцією $\circ$ покласти $x \leq y$ тоді і тільки тоді, коли $x \circ y = x$, то вона стає в-множиною, в якій $inf\{x, y\} = x \circ y$.

Пояснимо сенс леми. У лемі задана деяка множина з деякою бінарною операцією, і, оскільки вказано, що множина утворює напіврешітку, то це означає, що операція $\circ$ є ідемпотентною, комутативною і асоціативною. Далі вводимо деяке (поки абстрактне) відношення $\leq$ на множині таким чином, що якщо $x \circ y = x$, то $x \leq y$, і навпаки, якщо $x \leq y$, то $x \circ y = x$, тобто ці дві умови рівнозначні. Потрібно довести, що відношення $\leq$ є відношенням порядку, і операція $\circ$ має сенс знаходження точної нижньої грані x і y.

Доведення.

1. Спочатку доведемо, що відношення $\leq$ є відношенням порядку, тобто задовольняє властивостям рефлексивності, антисиметричність і транзитивності: **P1, P2, P3.**

За припущенням леми, $x \leq y$ тоді і тільки тоді, коли $x \circ y = x$. Із закону ідемпотентності $x \circ x = x$ слідує рефлексивність відношення: $x \leq x$. В силу комутативності $x \circ y = y \circ x$ отримуємо антисиметричність: якщо $x \leq y$, то за умовою $x \circ y = x$, і якщо $y \leq x$, то $y \circ x = y$. Тоді, якщо виконуються одночасно $x \leq y$ і $x \leq y$, то $x = x \circ y = y \circ x = y$, тобто відношення $\leq$ антисиметрично. Застосовуючи асоціативний закон, з $x \leq y$ і $y \leq z$ отримаємо $x \leq z$. Дійсно, якщо $x \leq y$ і $y \leq z$, то $x = x \circ y$ і $y = y \circ z$, тобто $x = x \circ y = x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z = x \circ z$, звідки $x \leq z$, тобто доведена транзитивність $\leq$. Звідси випливає, що $\leq$ є відношенням порядку.

2. Тепер доведемо, що $x \circ y = \inf \{x, y\}$ для будь-яких x, y. Доведемо спочатку, що $x \circ y \leq x$ і $x \circ y \leq y$. Якщо $x \leq y$, то $x \circ y = x$ за визначенням, і, отже, $x \circ y \leq y$, а в силу рефлексивності $x \leq x$ справедливо і $x \circ y \leq x$. Нарешті, якщо x і y непорівнянні, то, в силу того, що операція $\circ$ всюди визначена, знайдеться $z \leq x$ і $z \leq y$. Тоді $z \circ (x \circ y) = (z \circ x) \circ y = z \circ y = z$, звідки $z \leq x \circ y$, і, отже, $x \circ y = \inf \{x, y\}$.

Справедлива і двоїста лема щодо об'єднання.

Тепер ми можемо довести теорему про те, що будь-яка решітка може розглядатися як алгебра.

Теорема 2.2.1. Будь-яка алгебра $L = \langle P, \vee, \wedge \rangle$ з двома бінарними операціями, що задовольняють умовам **L1 — L4**, є решіткою, і навпаки.

*Доведення***.**

Згідно лемі 2.2.6, будь-яка система L, операції якої задовольняють умовам **L1 – L4**, є в-множиною, в якій $x \wedge y = \inf \{x, y\}$, так що $x \leq y$ означає, що $x \wedge y = x$. Розглянемо тепер операцію $x \vee y$. Якщо $x \leq y$, то $x \wedge y = x$.

Підставимо $x \wedge y$ замість x в $x \vee y$; отримаємо $x \vee y = (x \wedge y) \vee y = y$ (остання рівність здійснима в силу закону поглинання **L4**). В силу двоїстості справедливо і зворотне твердження: якщо $x \vee y = y$, то $x \leq y$. Отже, нерівність $x \leq y$ рівносильна також і рівності $x \vee y = y$. За принципом двоїстості отримуємо, що $x \vee y = \sup \{x, y\}$ і, отже, L є решіткою.

2.2.2. Властивості решіток.

Властивості дистрибутивності, модулярності; поняття доповнення. Булеві решітки.

Можна виділити решітки, що володіють додатковими властивостями, і визначити типи решіток, згідно цим властивостям. Так, наприклад, для будь-яких решіток виконуються нерівності дистрибутивності (1) і (1′), проте існують і такі, для яких здійснима строга рівність.

Визначення 2.2.7. Решітка називається *дистрибутивною*, якщо в ній для всіх x, y, z виконується тотожність:

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z), \qquad \mathbf{L6}$$

$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z). \qquad \mathbf{L6'}$$

Теорема 2.2.2. Якщо в решітках для всіх елементів виконується тотожність **L6,** то виконується тотожність **L6′** і навпаки**.**

Слід зазначити, що здійсненність **L6** для окремих елементів решітки не тягне здійсненності для них **L6′** (властивість **L6′** для тих же елементів може не виконуватися, якщо решітка недистрибутивна). Однак здійсненність однієї з цих властивостей для всіх елементів решітки тягне здійсненність і іншої. Тоді для перевірки дистрибутивності решітки досить встановити тотожність **L6** (або **L6′**) для всіх елементів, - друга буде слідувати за теоремою 2.2.2.

Доведення теореми 2.2.2. Покажемо, що з **L6** слідує **L6′.** З **L6′** буде слідувати **L6** за принципом двоїстості. Для всіх x, y, z:

$(x \vee y) \wedge (x \vee z) = [(x \vee y) \wedge x] \vee [(x \vee y) \wedge z] =$ згідно **L6**

$= x \vee [z \wedge (x \vee y)] =$ за **L4, L2**

$= x \vee [(z \wedge x) \vee (z \wedge y)] =$ за **L6**

$= [x \vee (z \wedge x)\ ] \vee (z \wedge y)] =$ за **L3**

$= x \vee (z \wedge y).$ за **L4**

Лема 2.2.7. Будь-який ланцюг є дистрибутивною решіткою.

Доведення. В ланцюзі для будь-яких трьох елементів виконується $x \le y \le z$. Розпишемо за умови **L5** ліву частину $x \vee (y \wedge z) = x \vee y = y$ та праву $(x \vee y) \wedge (x \vee z) = y \wedge z = y$.

Визначення 2.2.8. Решітка називається *модулярною*, якщо в ній виконується модулярний закон**:**

якщо $x \le z$, то $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge z$. **L7**

Відмітимо, що за принципом двоїстості, якщо $z \le x$, то $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee z$, що співпадає з **L7,** тобто закон модулярності є самоподвійним.

Модулярний закон може бути одержаний з **L6′**, якщо $x \le z$. [13] Таким чином, модулярний закон має місце в будь-яких дистрибутивних решітках.

Звідси витікає, що *якщо решітка дистрибутивна, то вона і модулярна [якщо решітка – немодулярна, то вона – недистрибутивна].*

Приклади.

1. Розглянемо решітку N_5 («*пентагон*») на рис. 2.14. Доведемо, що вона немодулярна. Всі ланцюги в решітках – дистрибутивні, отже, для будь-яких двох елементів, лежачих на одному ланцюзі, умова модулярності виконується. Візьмемо елементи $a \le b$ і елемент c, не лежачий з ними на одному ланцюзі. Перевіримо здійснимість властивості **L7:** $a \vee (c \wedge b) = (a \vee c) \wedge b$. Одержимо: $a \vee (c \wedge b) = a \vee \mathbf{0} = a$, $(a \vee c) \wedge b = \boldsymbol{I} \wedge b = b$. Оскільки $a \ne b$, то закон модулярності не виконується. Розглянемо, чи задовольняється властивість дистрибутивності: $a \vee (c \wedge b) = (a \vee c) \wedge (a \vee b)$, але $a \vee \mathbf{0} \ne \boldsymbol{I} \wedge b$, отже, решітка N_5 недистрибутивна.

Звідси слідує висновок: *якщо решітка немодулярна, то вона недистрибутивна*.

---

[13] $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z) =$ (за умови $x \le z$) $= (x \vee y) \wedge z$;
$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z) =$ (за умови $z \le x$) $= (x \wedge y) \vee z$.

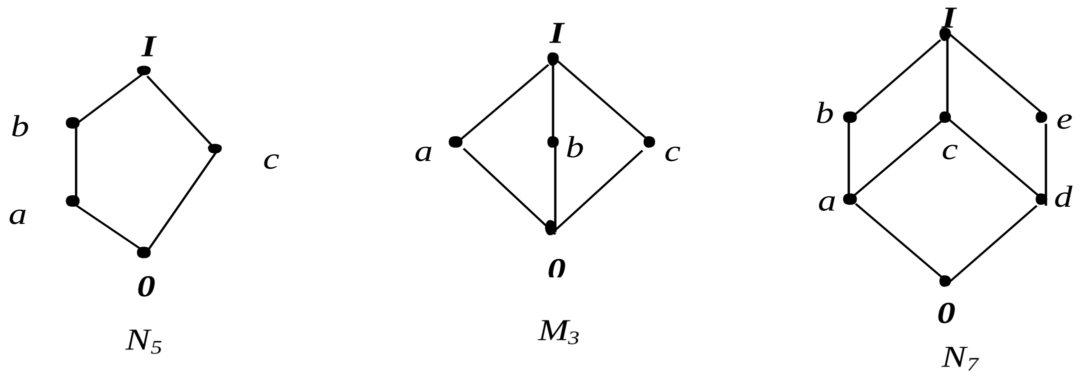


Рис. 2.14. Решітки N_5 (пентагон), M_3 (діамант), N_7.

2. Розглянемо решітку M_3 («*діамант*») на рис. 2.14. Всі ланцюги $\{\boldsymbol{0}, a, \boldsymbol{I}\}$, $\{\boldsymbol{0}, b, \boldsymbol{I}\}$, $\{\boldsymbol{0}, c, \boldsymbol{I}\}$ – дистрибутивні, отже, вони модулярні. Візьмемо три елементи, не лежачі на одному ланцюзі: $a \le \boldsymbol{I}$ і c[14]. Умова модулярності для них виконується: $a \vee (c \wedge \boldsymbol{I}) = (a \vee c) \wedge \boldsymbol{I}$, оскільки $a \vee c = \boldsymbol{I} \wedge \boldsymbol{I}$, тобто $\boldsymbol{I} = \boldsymbol{I}$. Неважко переконатися в тому, що умова модулярності в M_3 виконуватиметься для будь-яких трьох елементів, два з яких впорядковані, і, отже, решітка M_3 модулярна. Перевіримо виконання властивості дистрибутивності для елементів a, b, c (решта всіх інших трійок елементів в цій решітці – дистрибутивні): $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$. Рівність нездійсненно, оскільки $a \vee (b \wedge c) = a \vee \mathbf{0} = a$, але $(a \vee b) \wedge (a \vee c) = \boldsymbol{I} \wedge \boldsymbol{I} = \boldsymbol{I}$, і $a \ne \boldsymbol{I}$. Відзначимо, що здійснимо тільки нерівність дистрибутивності: $a \le \boldsymbol{I}$. Таким чином, решітка M_3 модулярна, але не дистрибутивна. Всі елементи a, b, c незрівняні, отже, для них не визначений закон модулярності, але дистрибутивний закон повинен виконуватися для всіх елементів, зокрема для a, b, c.

Звідси слідує висновок: *решітка може бути модулярною, але недистрибутивною*.

Узагальнюючи висновки, отримані нами при дослідженні дистрибутивних і модулярних решіток, можна сформулювати наступну теорему.

Теорема 2.2.3.

а) Решітка L модулярна тоді і тільки тоді, коли вона не містить пентагонів.

б) Модулярна решітка L дистрибутивна тоді і тільки тоді, коли вона не містить діамантів.

---

[14] Група з трьох елементів, де два непорівняні один з одним, але обидва порівняні з третім, називаються «дистрибутивними трійками», які завжди відповідають законам дистрибутивності і модулярності.

в) Решітка L дистрибутивна тоді і тільки тоді, коли вона не містить ні пентагонів, ні діамантів.

Доведення.

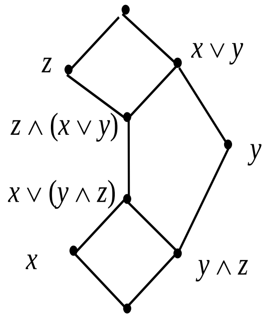


Рис. 2.15. До доведення теореми 2.2.3.

а). Якщо $\boldsymbol{L}$ модулярна, то будь-яка її підрешітка теж модулярна і, отже, $\boldsymbol{L}$ не містить подрешеток, ізоморфних N_5. Якщо $\boldsymbol{L}$ немодулярна, то вона містить три елементи x, y, z такі, що $x \leq z$, і $x \vee (y \wedge z) < (x \vee y) \wedge z$. Тоді елементи y, $x \vee y$, $y \wedge z$, $(x \vee y) \wedge z$, $x \vee (y \wedge z)$ утворюють пентагон (див. рис. 2.15.). Дійсно, $y \wedge z \leq x \vee (y \wedge z) <$ $< (x \vee y) \wedge z \leq x \vee y$. Далі, $(x \vee (y \wedge z)) \vee y =$ $=(x \vee y) \vee ((y \wedge z) \vee y) = x \vee y$. Двоїсто, $((x \vee y) \wedge z) \wedge y = z \wedge y$. Рівність $y \wedge z=$ $=x \vee (y \wedge z)$ неможлива, тому що тоді було би $x \leq y \wedge z$, звідси $(x \vee y) \wedge z =$ $=x \vee (y \wedge z)$, що протиречить умові.

С доведенням пункту б) можно ознайомитися в [Гретцер Г. Общая теория решеток – М.: Мир, 1982. – 452 с.]; пункт в) витікає з а) і б).

Основною властивістю модулярних решіток є принцип транспозиції.

Теорема 2.2.4. (принцип транспозиції). У будь-якій модулярній решітці відображення $\varphi_a: x \rightarrow x \wedge a$ і $\psi_b: y \rightarrow y \vee b$ є взаємно зворотними ізоморфізмами між інтервалами $[b, a \vee b]$ і $[a \wedge b, a]$.

Слідування. У будь-якій модулярній решітці:

М1 – якщо $a \neq b$ і обидва елементи покривають c, то $a \vee b$ покриває і a, і b;

М2 – якщо $a \neq b$ і c покриває обидва елементи, то a і b оба покривають $a \wedge b$.

Приклад.

Для решітки N_7 на рис. 2.14 не виконується умова **М2**: елементи b, e покриваються елементом $\boldsymbol{I}$, однак, ні b, ні e не покриває $b \wedge e = \mathbf{0}$. Звідси випливає, що решітка N_7 немодулярна. Неважко перевірити, що умова **М1** задовольняється в цій решітці. Такі решітки, в яких виконується одна з умов **М1** або **М2**, називаються *напівмодулярними*: якщо в решітці виконується умова **М1**, то решітка *напівмодулярна зверху*, а якщо умова **М2** - то *напівмодулярна знизу*. Решітка N_7 напівмодулярна зверху.

Визначення 2.2.9. *Доповненням* елементу x в решітках з $\mathbf{0}$ і $\boldsymbol{I}$ називається елемент y такий, що $x \wedge y = \mathbf{0}$ і $x \vee y = \boldsymbol{I}$. Доповнення x позначатимемо x'.

Визначення 2.2.10. Решітка називається *решіткою з доповненнями*, якщо всі її елементи мають доповнення.

Приклад.

Решітка на рис. 2.12 є решіткою з доповненнями. Доповненню кожного елемента відповідає його теоретико-множинне доповнення до множини $\{a, b, c\}$: доповнення елемента $\varnothing$ є $\{a, b, c\}$, доповнення $\{a\}$ є $\{b, c\}$ і т.д. У загальному випадку будь-яка множина-ступінь $\wp(U)$) є решіткою з доповненнями.

Визначення 2.2.11. Решітка L називається *решіткою з відносними доповненнями*, якщо кожен її замкнутий інтервал є решіткою з доповненнями.

Даючи визначення підрешітки, ми визначили замкнутий інтервал $[a, b]$ решітки як інтервал, що складається з усіх елементів $x \in L$, таких що $a \leq x \leq b$. Такий інтервал решітки завжди буде підрешіткою. Елемент x' є відносним доповненням елемента $x \in [a, b]$, якщо $x \wedge x' = a$ і $x \vee x' = b$.

Приклади. На рис. 2.14 решітка N_5 - немодулярная решітка з доповненнями: доповненням $\boldsymbol{0}$ є $\boldsymbol{I}$, доповнення $a - c$, доповнення $b - c$, c має два доповнення: a і b. Однак, це решітка без відносних доповнень: в інтервалі $[0, b]$ елемент a не має доповнення. Решітка M_3 є підрешіткою з доповненнями. Решітка N_7 – решітка без доповнень: елемент c не має доповнення.

Для дистрибутивних решіток має місце наступна теорема.

Теорема 2.2.5. Якщо в дистрибутивній решітці для фіксованого c

$$c \vee x = c \vee y \text{ і } c \wedge x = c \wedge y, \text{ то } x = y.$$

*Доведення***.**

$x = x \wedge (c \vee x) =$ (закон поглинання)

$= x \wedge (c \vee y) =$ (за умовою теореми)

$= (x \wedge c) \vee (x \wedge y) =$ (дистрибутивність)

$= (c \wedge y) \vee (x \wedge y) =$ (**L2** та за умовою $c \wedge x = c \wedge y$)

$= (c \vee x) \wedge y = (c \vee y) \wedge y = y.$

Відповідно до цієї теореми в будь-якому замкнутому інтервалі $[a, b]$ дистрибутивної решітки елемент c може мати щонайбільше одне відносне доповнення.

Теорема 2.2.6. Будь-яка модулярна решітка з доповненнями є решіткою з відносними доповненнями.

Доведення. Нехай M – довільна модулярная решітка з доповненнями. Розглянемо інтервал $[\mathbf{0}, b] \subset M$. Якщо $\mathbf{0} \le x \le b$ в M, то $x \wedge (x' \wedge b) = (x \wedge x') \wedge b = \mathbf{0} \wedge b = \mathbf{0}$, так як M — решітка з доповненнями, а тому, що M — модулярна, то $x \vee (x' \wedge b) = (x \vee x') \wedge b = \boldsymbol{I} \wedge b = b$. Отже, $B = [\mathbf{0}, b]$ є модулярною підрешіткою з доповненнями решетки M. Якщо взяти тепер $[a, b] \subset B$, то це буде модулярна решітка з доповненнями в B. Отже, за визначенням, M є модулярною решіткою з відносними доповненнями.

Нагадаємо, що у в-множині P кінцевої довжини з $\boldsymbol{0}$ *атомом* называється елемент x, що покриває $\boldsymbol{0}$ (його висота $h[x] = 1$).

Твердження. У модулярной решітці кінцевої довжини з доповненнями кожен елемент є об'єднанням атомів, що містяться в ньому.

Визначення 2.2.12. *Булевими* решітками називаються дистрибутивні решітки з доповненнями.

Теорема 2.2.6. У булевих решітках будь-який елемент x має одне і лише одне доповнення x'. При цьому:

$x \wedge x' = \mathbf{0}$; $x \vee x' = \boldsymbol{I}$; **L8**

$(x')' = x$; (*інволюція*) **L9**

$(x \wedge y)' = x' \vee y'$; $(x \vee y)' = x' \wedge y'$. (*закони де Моргана*) **L10**

Оскільки доповнення в булевих решітках єдині, її можна розглядати як *алгебру.*

Визначення 2.2.13. *Булевою алгеброю* $B = \langle L, \vee, \wedge, ', \mathbf{0}, \boldsymbol{I} \rangle$ називається алгебра з двома бінарними операціями і, однією унарною операцією $'$ і двома нульарними операціями $\mathbf{0}$ і $\boldsymbol{I}$, що задовольняють умовам **L1 — L10**. (*Нульарні* операції *виділяють* елементи **0, *I*** множину L, ці елементи називаються *виділеними елементами*).

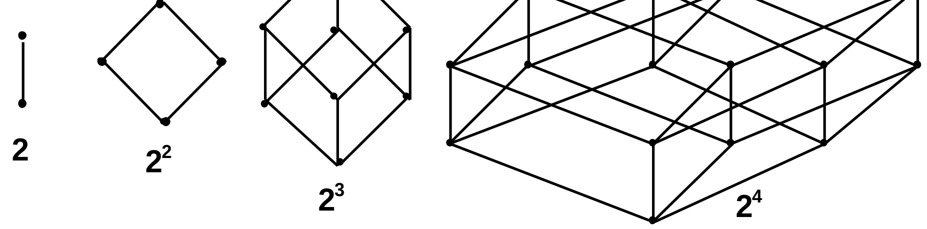


Рис. 2.16. Булеві решітки.

Будь-яке поле множин і, зокрема, множина всіх підмножин даної множини є булевою алгеброю. Підалгебра булевої алгебри *B* є непорожня підмножина в *B*, що містить разом з будь-якими *a, b* також $a \vee b$, $a \wedge b$, a', b'. *Будь-яка підалгебра булевої алгебри сама є булевою алгеброю. Прямий добуток булевої алгебри є булевою алгеброю.*

2.2.3. Гомоморфізми решіток. Поняття про ідеал.

Різновиди гомоморфізму відображення решіток. Ідеал та дуальний ідеал. Примарні ідеали.

Визначення 2.2.14. Ізотонне відображення $\varphi: L \to M$ решітки *L* в решітку *M* називається:

$\vee$**-гомоморфізмом**, якщо

$$\varphi(x \vee y) = \varphi(x) \vee \varphi(y) \quad \forall x, y \in L \qquad (1),$$

$\wedge$**-гомоморфізмом**, якщо

$$\varphi(x \wedge y) = \varphi(x) \wedge \varphi(y) \quad \forall x, y \in L \qquad (1')$$

і просто **гомоморфізмом (морфізмом)**, якщо виконується (1) і (1').

Таким чином, гомоморфізм решіток — це функціональне ізотонне відображення, що зберігає решітчасті операції, тобто, що переводить об'єднання — в об'єднання, перетин — в перетин.

Визначення 2.2.15. Гомоморфізм називають:

ізоморфізмом, якщо він є взаємно однозначною відповідністю (бієкція);

накладенням або *епіморфізмом*, якщо він відображає *L* на *M*, тобто якщо відображення $\varphi: L \to M$ є сюр'єкцією;

вкладенням, або *мономорфізмом*, якщо різні елементи *L* відображаються в різні елементи *M* (однозначна відповідність), тобто відображення $\varphi: L \to M$ є ін'єкцією;

ендоморфізмом, якщо $L = M$;

автоморфізмом, якщо $L = M$ і це — ізоморфізм.

Приклад.

Розглянемо відображення φ множини $L = \{a, b, з, d, e\}$ на множину $M = \{A, B, C\}$ (рис. 2.17). Перевіримо, чи є воно ізотонним. Розглянемо всі ланцюги максимальної довжини і їх образи.

$a \le b \le e$:

$\varphi(a) = A$, $\varphi(b) = C$, $A \le C$ — виконується,

$\varphi(b) = C$, $\varphi(e) = C$, $C \le C$ — виконується,

a ≤ c ≤ d ≤ e:

$a \le c$, $\varphi(a) = A$, $\varphi(c) = A$, $A \le A$ — виконується,

$c \le d$, $\varphi(c)=A$, $\varphi(d)=B$, $A \le B$ — виконується,

$d \le e$, $\varphi(d) = B$, $\varphi(e)=C$, $B \le C$ — виконується,

$b \le e$, $\varphi(b) = C$, $\varphi(b)=C$, $C \le C$ — виконується.

Відображення φ – ізотонно.

Перевіримо, чи є воно гомоморфизмом.

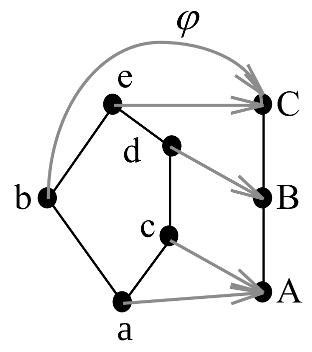


Рис. 2.17. ∨-гомоморфізм

При ізотонному відображенні гомоморфізм в ланцюгах зберігається. Тому для перевірки на виконуваність формул для ∨- та ∧- гомоморфізмів розглядаються тільки непорівняні пари елементів. Дійсно, якщо $a \le b$, то $a \wedge b = a$, $a \vee b = b$, і при ізотонному відображенні $\varphi(a) \le \varphi(b)$, також виконується $\varphi(a) \wedge \varphi(b) = \varphi(a)$, $\varphi(a) \vee \varphi(b) = \varphi(b)$.

Спочатку перевіримо, чи є воно ∨-гомоморфизмом.

$\varphi(b \vee c) = \varphi(e) = C$; $\varphi(b) \vee \varphi(c) = C \vee A = C$ — виконується,

$\varphi(b \vee d) = \varphi(e) = C$; $\varphi(b) \vee \varphi(d) = C \vee B = C$ — виконується,

Відображення φ є ∨-гомоморфізмом. Проте воно не є ∧-гомоморфізмом, оскільки $\varphi(b \wedge d) = \varphi(a) = A$, але $\varphi(b) \wedge \varphi(d) = C \wedge B = B$, тобто властивість збереження ∧ не виконується, Тому відображення φ не є гомоморфізм. Оскільки φ зберігає операцію ∨, то це ∨-гомоморфізм.

На рис. 2.18 зображено гомоморфізм.

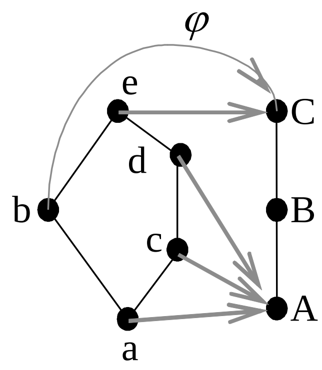


Рис. 2.18. Гомоморфізм.

При гомоморфізмі решітки L в решітку M множина елементів з L, що переходять в один і той же елемент M, не може бути довільною. Якщо φ –гомоморфізм решіток і $\varphi(a) = \varphi(b)$, то, оскільки φ зберігає операції, в силу ідемпотентності

$$\varphi(a \wedge b) = \varphi(a) \wedge \varphi(b) = \varphi(a)$$

і

$$\varphi(a \vee b) = \varphi(a) \vee \varphi(b) = \varphi(b),$$

тобто образи об'єднання a і b збігаються з образом a і, отже, з b. Іншими словами, множина елементів з L, що відображаються гомоморфізмом в один і той же елемент в M, завжди утворює підрешітку, (тобто a, b відображаються в один елемент разом з $a \wedge b$ і $a \vee b$). Але ця підрешітка не довільна. Наприклад, якщо решітка містить нульовий і одиничний елементи, то вони, очевидно, утворюють підрешітку. Якщо ці граничні елементи переходять при гомоморфізмі в один і той же елемент, то їх образ буде одночасно і нульовим і одиничним елементом, а це означає, що вони будуть образом всіх елементів. Отже, це вже не буде підрешітка, що містить хоча б два елементи.

Твердження. У загальному випадку, якщо $a \le b$ і $\varphi(a) = \varphi(b)$, то образ будь-якого $a \le x \le b$ буде збігатися з $\varphi(a)$ і $\varphi(b)$.

Дійсно, якщо $a \le x \le b$, то $x = x \vee a$ і $x = x \wedge b$. Так як $x = a \vee (x \wedge b)$ і $\varphi(x) = = \varphi(a) \vee (\varphi(x) \wedge \varphi(b))$, то при $\varphi(a) = \varphi(b)$ $\varphi(x) = \varphi(a) \vee (\varphi(x) \wedge \varphi(a)) = \varphi(a)$ за законом поглинання. Така підрешітка, яка при гомоморфізмі відображається в один і той же елемент, є опуклою підрешіткою.

Опуклі підрешітки, які при гомоморфізмі можуть відображатися в нульовий і одиничний елементи, грають особливо важливу роль. Наприклад, якщо до решітки доданий новий елемент, який менше всіх інших, то відобразивши новий елемент в нульовий, ми отримаємо той же гомоморфізм, що і раніше. Якщо цей гомоморфізм відображає a в нульовий елемент і $x \le a$, то (так як $0 \le x$) в силу опуклості, елемент x також переходить в нульовий елемент.

Підрешітка решітки, що містить разом з будь-яким елементом a всі елементи x, такі, що $x \le a$, називається *ідеалом* решітки, а підрешітка, що містить всі елементи x, такі що $a < x$ або $a||x$, називається *дуальним ідеалом* решітки.

Визначення 2.2.16. Підмножина $\boldsymbol{J}$ решітки називається **ідеалом**, якщо

1) $\boldsymbol{J}$ замкнуте щодо об'єднання, тобто якщо $a \in \boldsymbol{J}$ і $b \in \boldsymbol{J}$, то і $a \vee b \in \boldsymbol{J}$;

2) З $a \in \boldsymbol{J}$ і $x \le a$ витікає, що $x \in \boldsymbol{J}$ (***Js*** непорожній).

Підмножина $\boldsymbol{D}$ є **дуальним (двоїстим) ідеалом**, якщо

1) $\boldsymbol{D}$ замкнуте щодо перетину;

2) З $b \in \boldsymbol{D}$ і $b \le y$ витікає, що $y \in \boldsymbol{D}$ ($\boldsymbol{D}$ не вся решітка).

Будь-який елемент решітки визначає ідеал, що складається з елементів, які не більше його. Наприклад, якщо $a \le c$ і $b \le c$, то $a \vee b \le c$. Якщо $x \le a$, то по транзитивності $x \le c$, а $a \wedge b \le a$. Звідси слідує замкнутість щодо об'єднання і перетину. Одержаний ідеал позначимо $\boldsymbol{J_c}$. Елементи, які не менше c, утворюють дуальний ідеал $\boldsymbol{D_c}$.

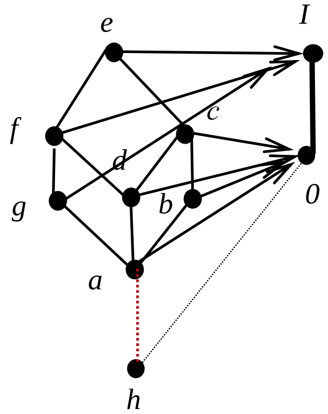


Рис. 2.19. Ідеали.

Приклад.

На рис. 2.19 задано відображення елемента $c \in L$ в $\boldsymbol{0}$ і елемента f в $\boldsymbol{I}$ з решітки в решітку. Для того, щоб продовжити це відображення до гомоморфізму, необхідно відобразити елементи d, b, a в $\boldsymbol{0}$, а елементи e і g - в $\boldsymbol{I}$ другої решітки. Тоді елементи $\{a, b, d, c\}$ утворюють ідеал $\boldsymbol{J_c}$, а елементи $\{f, e\}$ - двоїстий ідеал $\boldsymbol{D_c}$. Якщо до першої решітки додати елемент h, то для продовження гомоморфизму необхідно відобразити цей елемент в $\boldsymbol{0}$.

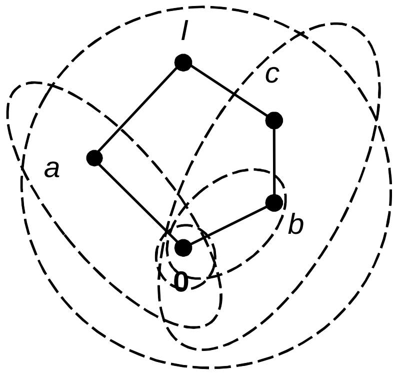


Рис. 2.20. Ідеали 5-елеметної решітки

Можна показати, що в кінцевій решітці є стільки ідеалів і подвійних ідеалів, скільки вона містить елементів. На рис. 2.20 для кожного елемента 5-елементної решітки показано 5 ідеалів, включаючи всю решітку в цілому.

Дамо конструктивне визначення ідеалу та дуального ідеалу.

<u>Ідеал:</u>

- в кінцевій решітці є стільки ідеалів, скільки вона містить елементів; для кожного елемента ідеал є єдиним, позначається, наприклад, $\boldsymbol{J_c}$;
- ідеал складається з елементів, що менше заданого; сам елемент входить до ідеалу; $\boldsymbol{0}$ теж завжди входить до ідеалу; ідеал буде завжди опуклою підрешіткою, тобто замкненим інтервалом $[0, c]$ (якщо мова йде про $\boldsymbol{J_c}$);
- ідеал не може бути порожнім, але може бути всією решіткою (для $\boldsymbol{I}$);
- для $\boldsymbol{0}$ ідеалом є $\{\boldsymbol{0}\}$; для $\boldsymbol{I}$ – ідеал $\boldsymbol{L}$.

<u>Дуальний ідеал:</u>

- дуальний ідеал позначається $\boldsymbol{D_c}$, не може бути всією решіткою, але може бути порожнім (для $\boldsymbol{I}$);
- ідеал і дуальний ідеал не перетинаються;
- дуальний ідеал визначається відносно ідеалу, що знайдений для деякого елементу – він двоїстий до ідеалу; певні умови на виконуваність решітчастих

операцій і зберігання їх, інакше, той факт, що $\boldsymbol{D_c}$ повинний бути теж підрешіткою, призводять до того, що дуальний ідеал до ідеалу знаходиться не в єдиний спосіб;

•елемент, для якого знаходився ідеал і, відносного ідеалу якого визначаємо дуальний, не входить до дуального ідеалу; дуальний ідеал складається з таких елементів решітки, що є більше або непорівняні з заданим;

•ця множина елементів завжди буде мати об'єднання, тому що $\boldsymbol{I}$ входить до дуального ідеалу (окрім випадку для самого $\boldsymbol{I}$), але перетин для деяких пар елементів може бути відсутнім; тому дуальний ідеал може бути визначеним не однозначно (на рис. 2.19 для ідеалу $\boldsymbol{J_b}=\{0, b\}$ елементи c та I більше, ніж b, а $a \mid\mid b$. Тому двоїстий ідеал може складатися з c, I та a, але $a \wedge c=0$, а 0 вже увійшов до $\boldsymbol{J_b}$, тому множина, що залишилась $\{a, c, I\}$ не є підрешіткою. Множини $\{a, I\}$ *та* $\{c, I\}$ відповідають визначенню $\boldsymbol{D_b}$).

Умови, що визначають ідеал і дуальний ідеал решітки, двоїсті один одному. Тому, якщо решітку L розбити на дві части A і B так, щоб для частини A виконувалося умова (2) визначення ідеалу: з $a \in A$ і $x \leq a$ витікає, що $x \in A$ (A непорожній) — то для частини B виконуватиметься умова (2) дуального ідеалу. Таким чином, A буде ідеалом L, а B — дуальним ідеалом, і при цьому A і B доповнюватимуть один одного до повної множини, утворюючої решітку L.

Умова (2) визначення ідеалу виконується в тому і лише тому випадку, якщо для B виконується умова (2) визначення подвійного ідеалу. Дійсно, якщо (2) виконується для A і деякого елементу $b \in B$, то при $y \geq b$ елемент y не може належати A, оскільки тоді воно містило б і b, отже, $y \in B$. З іншого боку, якщо (2) виконується для B і $a \in A$, то всякий елемент $x \leq a$ належить A, оскільки інакше елемент *а також* належав би і B.

Таке розбиття решітки на підмножини, що є доповненнями один одного і утворюючими при цьому ідеал і дуальний ідеал, називають *перерізом* решітки. Підмножину A називають *нижнім сегментом*, B — *верхнім сегментом*.

У загальному випадку нижній сегмент не є ідеалом, а верхній — дуальним ідеалом, оскільки вони можуть бути порожніми і всією решіткою, або не задовольняти умовам (2). Але якщо нижній сегмент задовольняє визначенню ідеалу, то він називається ***примарним ідеалом***, або ***простим ідеалом***, а верхній сегмент ***дуальним примарним ідеалом.***

Примарний і двоїстий йому ідеали можна отримати, визначивши *f*– гомоморфізм решітки *L* в решітку з двох елементів (в решітку ***2***), де під дією *f* в нуль переходять елементи нижнього сегмента, а в одиницю – елементи верхнього сегмента, що утворюють двоїстий примарний ідеал. Це обумовлено властивістю гомоморфізму зберігати впорядкованість. Якщо елементи *a* і *b* відносяться до верхнього сегменту, то перетин їх $a \wedge b$ також належить верхньому сегменту і відображається в ***I***: $f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b) = \boldsymbol{I} \wedge \boldsymbol{I} = \boldsymbol{I}$. Якщо ж *a* і *b* належать нижньому сегменту, то $f(a \vee b) = f(a) \vee f(b) = \boldsymbol{0} \vee \boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$, тобто їх об'єднання відображається в ***0***. Отже нижній сегмент є ідеалом, а верхній - двоїстим ідеалом.

Це властивість сегментів повністю визначає примарний ідеал. Інакше кажучи, примарний ідеал можна отримати, лише відображаючи решітку в решітку з двох елементів: примарний ідеал утворюють елементи, які при гомоморфізмі переходять в нульовий елемент. Нижній сегмент інакше називають нижньої, або $\wedge$-напіврешіткою, а двоїстий йому верхній сегмент - верхній, або $\vee$-напіврешіткою.

Розглянемо деякі властивості примарних ідеалів.

1. Ідеал J решітки є примарний ідеалом тоді і тільки тоді, якщо при $a \wedge b \in \boldsymbol{J}$ або $a \in \boldsymbol{J}$, або $b \in \boldsymbol{J}$. Іншими словами, якщо перетин будь-яких двох елементів належить примарному ідеалу, то в ньому повинен міститися будь-який з цих елементів.

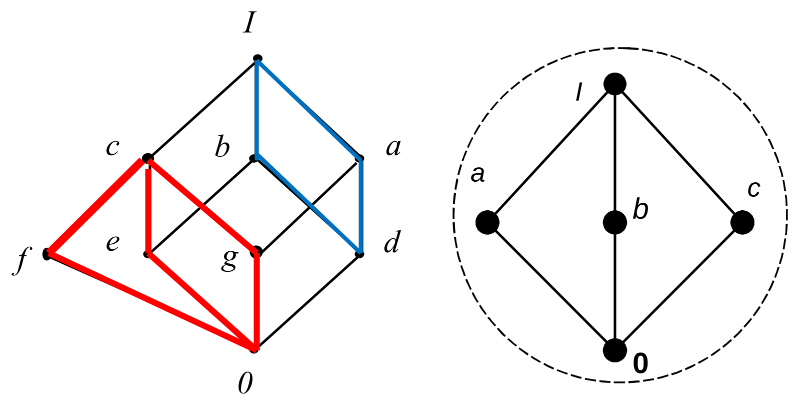
Примарний ідеал можна розглядати як нижню $\wedge$-напіврешетку, отже, в ньому міститься перетин будь-яких елементів *a* і *b*. При цьому верхня напіврешітка буде дуальним примарним ідеалом, який замкнутий щодо перетину. Таким чином, якщо *a* і *b* належать двоїстому ідеалу ***D***, то $a \wedge b \in \boldsymbol{D}$ також. Отже, якщо $a \wedge b$ ні належать ***D***, то він не містить або *a*, або *b*, або *a* і *b* разом.

2. Якщо для елемента решітки існує доповнення, то будь-який примарний ідеал містить або елемент, або його доповнення.

Якщо ***L*** – решітка з доповненнями, значить це решітка з ***0*** і ***I***. ***0*** буде елементом ідеалу ***J***, а ***I*** - двоїстого ідеалу ***D***. Якщо певний елемент *a* разом зі своїм доповненням a' належить одному з ідеалів, то так як $a \vee a' = \boldsymbol{I}$, а $a \wedge a' = \boldsymbol{0}$, то такий ідеал повинен бути всією решіткою. Але двоїстий ідеал не може бути всією решіткою (всією множиною), а примарний ідеал - порожньою множиною, отже, примарний ідеал може містити або елемент, або його доповнення.

Приклади.

Розглянемо решітку на рис. 2.21.a. Це немодулярна недистрибутивна решітка з доповненнями, але без відносних доповнень (наприклад, замкнений інтервал *[f, c, I]* є опуклою підрешіткою без доповнень). Для зручності зведемо інформацію про ідеали до таблиці.



***a*)** ***b*)**

Рис. 2.21. Ідеали та дуальні ідеали, примарні пари.

елемент x	J_x	D_x *(не єдиний варіант)*	
0	*{0}*	*{d, b, a, I} або…*	
a	*[0,a] = {0, d, g, a }*	*{e, c, b, I} або…*	
b	*[0, b] = {0, e, d, b}*	*{g, c, a, I} або…*	
c	***[0, c] = {0, f, e, g, c}***	***{d, b, a, I}***	*примарна пара ідеалів*
d	*[0, d] = {0,d}*	*{f, c, I} або…*	
e	*[0, e] = {0, e}*	*{d, b, a, I} або…*	
f	*[0, f] = {0, f}*	*{d, b, a, I} або…*	
g	*[0, g] = {0, g}*	*{d, b, a, I} або…*	
I	***[0, I] = L – вся решітка***	***ø***	*примарна пара ідеалів (тривіальна)*

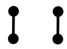
Розглянемо рис. 2.21.b. З елементів *a*, *b*, *c* принаймні два належать або ***J***, або ***D***. Припустимо, $a, b \in \boldsymbol{J}$. Якщо $a \in \boldsymbol{J}$, то будь-який елемент $x \le a$ також належить ***J***, тобто $\mathbf{0} \in \boldsymbol{J}$. Разом з *a*, *b* їх об'єднання належить ***J***, тобто $a \vee b = \boldsymbol{I} \in \boldsymbol{J}$. З іншого боку, елемент $c \in \boldsymbol{J}$, так як $c \le \boldsymbol{I}$. Отже, існує тільки один примарний ідеал, що співпадає з усією решіткою.

<u>2.2.4. Функціональні відображення множин в решітці (степінь множини).</u>

Операції над впорядкованими множинами. Кардинальна степень множин.

Розглянемо проблему побудови решіток з менших компонент. Для цього будемо застосовувати операції над в-множинами, узагальнюючі арифметичні операції додавання, множення і піднесення в степінь. Ці операції над множинами називаються кардинальними *операціями.*

Визначення 2.2.17. Нехай X, Y в-множині. Кардинальна сума $X + Y$ ця множина, елементами якого є всі елементи з X *і* Y, що розглядаються як непересічні множини. Порядок ≤ зберігає своє значення окремо в X *і* в Y, і ні для яких $x \in X$, $y \in Y$,, не може бути ні x ≤y, ні y ≤ x.

Діаграма суми двох кінцевих множин X + Y *складається* з діаграми для X *і* Y, вміщених поряд. 

Визначення 2.2.18. *Кардинальний добуток X* × Y *(або* XY) це декартовий (прямий) добуток в-множин X і Y.

Теорема 2.2.7. Прямий добуток $L \times M$ будь-яких двох решіток є решіткою.

Теорема 2.2.8. Прямий добуток $X \times Y$ двох дистрибутивних решіток є дистрибутивною решіткою.

Слідування. Оскільки ланцюг є дистрибутивною решіткою, то, очевидно, що прямий добуток ланцюгів є дистрибутивною решіткою.

Нехай X = {0,1}, Y = {0, 1, 2} - ланцюги. На рис. 2.22 представлені діаграми в-множин X, Y, X×Y, X×X×Y. Декартовий добуток ланцюгів X×Y = {<0, 0>, <0, 1>, <0, 2>, <1, 0>, <1, 1>, <1, 2>} має плоску діаграму і утворює дистрибутивну решітку. Декартовий добуток ланцюга X і решітки X×Y з плоскою діаграмою має просторову діаграму.

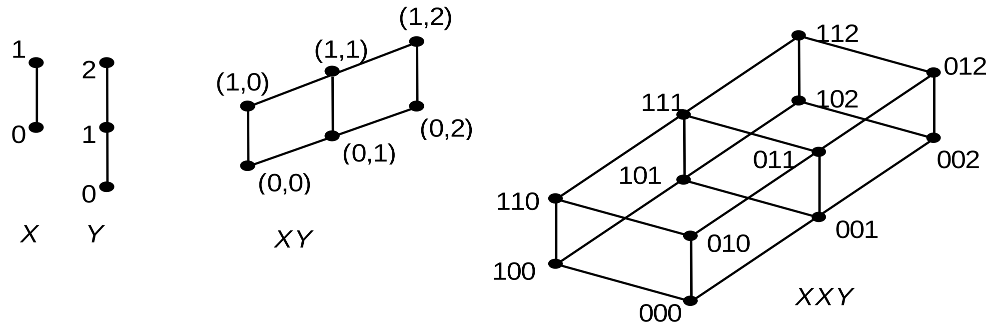


Рис. 2.22. Декартовий добуток ланцюгів.

Визначення 2.19. *Кардинальним степенем* Y^X: $X \to Y$ *з* основою Y *і* показником X *називається* множина всіх ізотонних функцій y = f(*x*), заданих на X і *що приймають* значення в Y, *впорядкованих* відношенням $f \le g$, що означає , що $f(x) \le g(x)$ для всіх $x \in X$.

Степінь множин L^E задає множину функціональних відображень E в L.

Приклад. Нехай $E = \{A, B\}$, $L = \{\alpha, \beta, \gamma\}$. Множина функціональних відображень $E \to L$ буде наступною :

$F_1 = \{(A/\alpha), (B/\alpha)\}$, $F_2 = \{(A/\alpha), (B/\beta)\}$, $F_3 = \{(A/\alpha), (B/\gamma)\}$,

$F_4 = \{(A/\beta), (B/\alpha)\}$, $F_5 = \{(A/\beta), (B/\beta)\}$, $F_6 = \{(A/\beta), (B/\gamma)\}$,

$F_7 = \{(A/\gamma), (B/\alpha)\}$, $F_8 = \{(A/\gamma), (B/\beta)\}$, $F_9 = \{(A/\gamma), (B/\gamma)\}$.

Потужність степені L^E дорівнює $card(L^E) = card(L)^{card(E)} = 3^2 = 9$.

Припустимо, $L = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ ланцюг, тоді на L визначені операції об'єднання $\vee$ і перетину $\wedge$.

На множині функціональних відображень $L^E = \{F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, F_6, F_7, F_8, F_9\}$ індукується операція $\otimes$ таким чином:

$F_1 \otimes F_2 = \{(A/\alpha), (B/\alpha)\} \wedge \{(A/\alpha), (B/\beta)\} = \{(A/\alpha \wedge \alpha),(B/\alpha \wedge \beta)\} = \{(A/\alpha), (B/\alpha)\} = F_1$.

Виконуючи дану операцію для всіх $F_i \in L^E$, отримуємо індуковану операцію $\otimes$ в L^E.

Аналогічно можна отримати операцію $\oplus$, операцією об'єднання $\vee$ на L. Всі властивості операцій $\wedge$, що індукується в L^E, і $\vee$: ідемпотентність, комутативність, асоціативність, дистрибутивність, зберігаються для індукованих операцій $\otimes$ і $\oplus$.

С більш детальним описом приклада можна ознайомитися в [Таран Т.А. Основы дискретной математики. Учебное пособие. К.: Просвіта. – 2003. – 288с. – стор. 92-94].

Теорема 2.2.9. Кардинальна степень L^E індуцирує на множині функціональних відображень $E \to L$ множину операцій з тими самими властивостями, якими володіли операції, визначені на L:

1) якщо L *– в-множина, то* L^E *– в-множина;*

2) якщо L *–* $\wedge$*-напіврешітка/* $\vee$*-напіврешітка, то* L^E *–* $\wedge$*-напіврешітка/* $\vee$*-напіврешітка;*

3) якщо L *– решітка/дистрибутивна/булева, то* L^E *– решітка/дистрибутивна/булева;*

4) якщо L *– квазіпорядок, то* L^E *– квазіпорядок.*

Питання до розділу 2.

1. *Відношення порядку. Властивості. Типи порядків. Строгий порядок. Частковий порядок. Лінійний порядок.*
2. *Найменший (найбільший) елемент, мінімальні (максимальні) елемент.*
3. *Відношення покриття. Його властивості. Діаграми Хассе.*
4. *Ізотоні і антітоні відображення в-множин*
5. *Відношення квазіпорядку (предпорядку).*
6. *Поняття про алгебри і алгебраїчні системи. Решітки як алгебри. Система аксіом, що визначає решітки.*
7. *Властивості решіток: дистрибутивність, модулярних.*
8. *Доповнення елементів в решітках. Решітки з доповненнями, з відносними доповненнями. Булеві решітки.*
9. *Відображення решіток. Гомоморфізм решіток.*
10. *Поняття ідеалу і двоїстого ідеалу. Примарний ідеал.*
11. *Кардинальна степінь множин.*

Розділ 3. Теорія графів.

Тема 3.1. Неорієнтовані графи.

3.1.1. Основні поняття теорії графів і їх властивостей.

Подання графів. Основні визначення.

З поняттям графа зазвичай зв'язується його графічне представлення, при якому він зображується як множина точок, деякі з яких з'єднані лініями. Однак граф відрізняється від геометричних конфігурацій (скажімо, фігур, які також складаються з точок-вершин і ліній-сторін) тим, що в графі несуттєві відстані між точками, форма з'єднання ліній і кути між ними. Важливо лише, з'єднана дана пара точок лінією, чи ні. Тому граф іноді називають топологічним об'єктом, тобто об'єктом, властивості якого не змінюються при розтягуванні, стисненні, викривленні (але без розривів і склеювання). З цієї ж причини (важливо лише наявність або відсутність з'єднання) граф - об'єкт дискретний і може бути заданий двома дискретними множинами: множиною точок, які будемо називати *вершинами*, і множиною ліній, що з'єднують деякі вершини. Лінії будемо називати *ребрами* або *дугами*.

Існують два основних види графів - *орієнтовані*, в яких лінії мають направлення від однієї вершини до іншої, і *неорієнтовані*, в яких лінії не мають напрямки.

Визначення 3.1.1. *Неорієнтованим графом* $G = (V, E)$ називається об'єкт, заданий парою множин (V, E), де V – множина *вершин*, $E \subseteq V \times V$ – множина *ребер*.

Визначення 3.1.2. *Орієнтованим графом* (*орграфом*) називається граф $D = (V, E)$, де V – множина *вершин*, $E \subseteq V \times V$ – множина *орієнтованих ребер*, або *дуг*.

Визначення 3.1.3. Граф називається *простим*, якщо кожна пара вершин з’єднується не більше ніж одним ребром. Граф називається *мультиграфом*, якщо хоч би одну пару вершин з’єднує більш ніж одне ребро. Ребра мультиграфа, що з’єднують одну і ту ж пару вершин, називаються *кратними*.

У простому графі ребро однозначно визначається парою вершин, які воно з’єднує. У неорієнтованому графі порядок вершин в парі не важливий, тому ребра простого неорієнтованого графа визначаються як множина невпорядкованих пар вершин $(v_i, v_j) \in V \times V$. У орієнтованому графі впорядкована пара $(v_i, v_j) \in V \times V$ указує напрям дуги: від вершини v_i до вершини v_j. Вона має початок (вершину vi, з якої дуга виходить) і кінець (вершину v_j, в яку вона заходить). У мультиграфі кожне ребро повинне мати своє власне ім'я. Вершини, що з'єднуються ребром, не обов'язково різні. Ребро, що з'єднує вершину vi з самої собою, тобто пара (v_i, v_i), називається *петлею*.

Приклади.

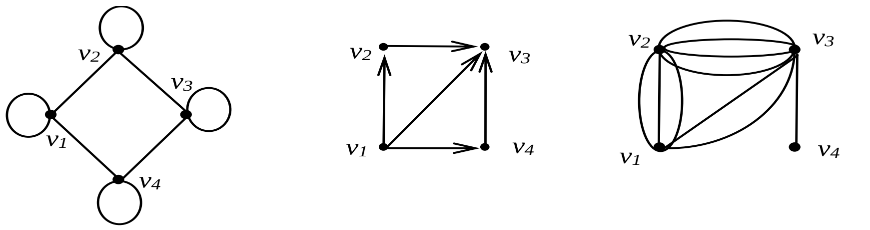


Рис. 3.1. Приклади графів.

Граф може зовсім не мати ребер: $E = \varnothing$. Такий граф називається порожнім (пустим), або 0-графом.

Для простого графа існує інший крайній випадок, коли всі вершини з'єднані між собою ребрами. Такий граф називається повним, причому розрізняють два види повних графів - з петлями і без петель. Повний граф з n вершинами має $(n^2 - n) / 2$ ребер (число поєднань з n по 2), якщо петлі не враховуються, і $(n^2 - n) / 2 + n = (n^2 + n) / 2$ ребер, якщо додати n петель. Повний граф з n вершинами без петель позначається K_n. Зрозуміло, що в мультиграфі обмежень на число ребер немає.

3.1.2. Неорієнтовані графи – основні визначення.

Матриці, шляхи і зв'язність, радіус і діаметр.

Матриця суміжності

Неорієнтовані граф задає два відношення між своїми елементами: відношення суміжності і відношення інцидентності. Суміжність - відношення між вершинами: дві вершини називаються суміжними, якщо вони з'єднані ребром. Це відношення - звичайне бінарне відношення на множині V, яке для простого графа може бути задано квадратної бінарною (тобто складається з нулів і одиниць) матрицею суміжності $A(G) = (a_{ij})$, яка визначається наступним чином:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & (\mathrm{v}_i, \mathrm{v}_j) \in E, \\ 0, & (\mathrm{v}_i, \mathrm{v}_j) \notin E. \end{cases}$$

Відношення суміжності в неорієнтованому графі завжди симетрично, оскільки порядок вершин в парі (v_i, v_j) не важливий. Наявність рефлексивності і транзитивності залежить від конкретних властивостей графа. Матриця суміжності порожнього графа заповнена тільки нулями, а матриця суміжності повного графа з петлями - тільки одиницями. Для мультиграфів матриця суміжності вже не є бінарною: в ній $a_{ij} = k$, де k - число кратних ребер, що з'єднують вершини v_i і v_j.

Приклади.

Матриці суміжності для графів, наведених на рис. 3.1:

$$A(G) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, A(D) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \ A(M) = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матриця інцидентності

Інцидентність - це відношення між вершинами і ребрами: ребро інцидентне кожній з вершин, яке воно з'єднує. Воно задається матрицею інцидентності C, в якій рядки позначаються іменами вершин, а стовпці - іменами ребер графа. Матриця інцидентності графа визначається як ($n \times m$) матриця $C\ (G) = (c_{ij})$, у якій

$$c_{ij} = \begin{cases} 1, \text{вершина } v_i \text{ інцидентна ребру } e_j, \\ 0, \text{вершина } v_i \text{ інцидентна ребру } e_j. \end{cases}$$

Це прямокутна бінарна матриця, в якій число рядків дорівнює числу вершин графа n, а число стовпців - числу ребер m.

Число ребер, інцидентних вершині v_i графа (орграфа, мультиграфа), називається степенем цієї вершини і позначається $deg\ (v_i)$. Степінь вершини можна визначити за матрицями інцидентності і суміжності. Степінь вершини v_i дорівнює числу одиниць в i-му рядку матриці інцидентності або матриці суміжності.

Сума степенів усіх вершин дорівнює подвоєному числу ребер, оскільки кожне ребро бере участь в степенях двох вершин, тобто вважається в цій сумі два рази. Оскільки ця сума парна, то і число вершин з непарними степенями теж парне.

Вершина, степінь якої дорівнює 1, називається *кінцевою*, або висячою.

Граф називається *однорідним степені k*, якщо степені всіх його вершин дорівнюють k.

Визначення 3.1.4. Граф $G' = (V', E')$ називається *частиною* графа $G = (V, E)$, якщо $V' \subseteq V$, а E' підмножина множини ребер G, обидва кінці яких належать V'.

Визначення 3.1.5. Граф $G' = (V', E')$ називається *підграфом* графа $G = (V, E)$, якщо $V' \subset V$, а E', а E' - множина всіх ребер G, обидва кінці яких належать V'. Множину вершин $V' \subset V$ називають такою, що породжує множину підграфа V', а сам підграф - *породженим* вершинами V'.

Всякий підграф графа G є частиною G, але не всяка частина - підграф (див. рис.3.2). Підграф повністю визначається множиною V' своїх вершин і може бути побудований так: у вихідному графі G вибираємо множину вершин V' і видаляємо всі ребра такі, хоча б один кінець яких не належить V'. Частина графа - це підграф, з якого, можливо, видалені деякі ребра. Наприклад, частина графа G на рис. 3.2, б) містить вершини v_3, v_4, v_5, v_6, але не містить ребер (v_3, v_4), (v_4, v_5), (v_5, v_6), (v_3, v_6), в той час, як його підграф на рис. 3.2, в) містить всі ребра, що з'єднують ці вершини.

Визначення 3.1.6. Частина графа, утворена вершиною v_i і всіма вершинами, суміжними з нею, називається *зіркою* вершини v_i.

Визначення 3.2.7. Повний підграф, породжений заданою множиною вершин, називається *клікою.*

Приклад.

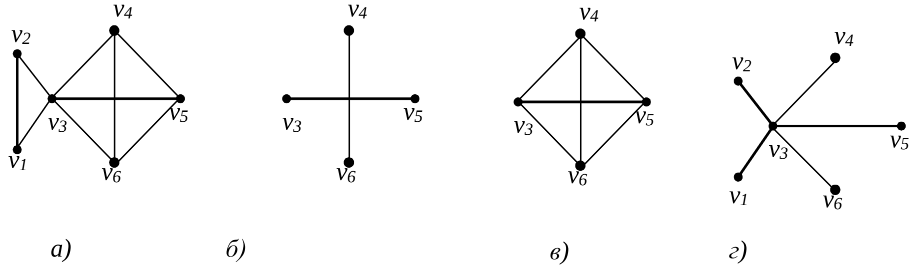


Рис.3.2. а) граф G; б) частина графа G;
в) підграф графа G, кліка; г) зірка вершини v_3.

Визначення 3.1.8. Підграф G' графа G називається *максимальним* по деякій властивості, якщо G' володіє цією властивістю, а будь-який підграф графа G, що містить G', не володіє ним. Підграф G' графа G називається *мінімальним* по деякій властивості, якщо G' володіє цією властивістю, а будь-який підграф графа G, що міститься в G', не володіє ним.

Наприклад, підграф на рис. 3.2, в) є максимальною клікою; підграф цього підграфа, породжений вершинами v_3, v_4, v_5, також буде клікою, але не максимальної, а мінімальної клікою буде підграф, породжений двома вершинами, наприклад, v_3 і v_4.

Шляхи і зв'язність в неорієнтованих графах

Визначення 3.9. *Шлях* P_i в неорієнтованому графі – це послідовність ребер (v_{i0}, v_{i1}), (v_{i1}, v_{i2}), ..., $(v_{i,n-1}, v_{in})$, така, що будь-які два сусідні ребра різні і мають загальну інцидентну ним вершину. Вершина v_{i0} називається *початком* шляху, вершина v_{in} – *кінцем* шляху.

Шлях можна задати також послідовністю вершин, не указуючи ребер, наприклад: v_{i0}, v_{i1}, v_{i2}, ..., $v_{i,n-1}$, v_{in}. У мультиграфі при завданні шляху потрібно вказувати імена ребер. Число ребер на шляху P називається його *довжиною* і позначається $l(P)$.

Очевидно, що, якщо в неорієнтованому графі існує шлях з v_{i0} в v_{in}, то існує шлях з v_{in} в v_{i0}, – це той же шлях, пройдений у зворотному напрямі.

Шлях називається *циклічним*, або просто *циклом*, якщо $v_{i0} = v_{in}$. Цикл називається *простим*, якщо будь-яка вершина графа зустрічається в ньому не більше одного разу. Цикл називається *повним*, якщо в нього входять всі вершини графа.

Одне і те ж ребро може зустрічатися на шляху декілька разів. Шлях називається *ланцюгом*, якщо кожне ребро зустрічається в ньому не більше одного разу, і *простим ланцюгом* (або простим шляхом), якщо будь-яка вершина графа зустрічається в ньому не більше, ніж один раз. Простий ланцюг – це ланцюг, який не перетинає сам себе.

Визначення 3.1.10. Вершини v_i і v_j називаються *зв'язаними*, якщо існує шлях з початком в v_i і кінцем в v_j. В цьому випадку говорять також, що вершина v_j *досяжна* з вершини v_i. Кожна вершина за визначенням пов'язана сама з собою шляхом нульової довжини.

Визначення 3.1.11. Неорієнтований граф називається *зв'язним*, якщо всі його вершини зв'язані між собою.

Зв'язаність - це бінарне відношення на множині вершин. Воно рефлексивно (кожна вершина пов'язана сама з собою за визначенням), симетрично (для кожного шляху є зворотний шлях) і транзитивне. Транзитивність означає, що якщо є шлях з v_i в v_j і шлях з v_j в v_k, тобто шлях з v_i в v_k. Це очевидно: щоб отримати такий шлях, досить до послідовності ребер, що веде з v_i в v_j, приписати праворуч послідовність ребер, що веде з v_j в v_k.

Таким чином, відношення зв'язаності є відношенням еквівалентності на множині вершин графа G і розбиває цю множину на неперетинаючі підмножини - класи еквівалентності. Всі вершини одного класу пов'язані між собою, вершини з різних класів між собою не пов'язані. Максимальний зв'язний підграф графа G називається *компонентой зв'язності* графа G.

Зв'язний граф складається з однієї компоненти зв'язності.

Теорема 3.1.1. Якщо дві вершини зв'язані між собою, то існує простий ланцюг, що зв'язує їх.

Визначення 3.1.12. Вершина графа називається *точкою зчленування*, якщо її видалення збільшує число зв'язних компонент графа. Граф називається *роздільним*, якщо він містить хоч би одну точку зчленування, і *нероздільним*, якщо він не містить таких точок. Максимальні нероздільні підграфи графа називаються його *блоками*. Ребро між точками зчленування – *міст* або *перешийок.*

Наприклад, в графі G на рис. 3.3 вершини v_5, v_2, v_7 – точки зчленування, ребро (v_5, v_7) – перешийок.

Теорема 3.1.2. Вершина v_i є точкою зчленування зв'язного графа G, тоді і тільки тоді, якщо існують такі вершини v_j і v_k, відмінні від v_i, що будь-який шлях між ними проходить через v_i.

Приклад.

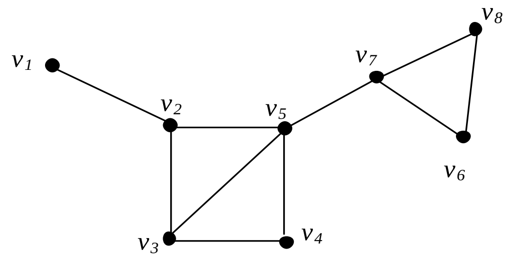


Рис. 3.3. Точки зчленування в неорієнтованому графі.

Роздільні графи називають ще *1-зв'язними*. Взагалі, *k-зв'язним* називають граф, для порушення зв'язності якого треба видалити не менше k вершин. Можна сказати, що число зв'язності k характеризує надійність зв'язності. Якщо граф зображує, наприклад, мережу комунікацій, то це число говорить про те, що при пошкодженні будь-яких $k - 1$ вузлів мережа все ще забезпечує зв'язок між будь-якими вузлами, що залишилися.

Відстані. Діаметр, радіус, центр.

Визначення 3.13. У неорієнтованому графі *відстанню* $d(v_i, v_j)$ між вершинами v_i і v_j називається мінімальна з довжин простих ланцюгів, що зв'язують ці вершини.

Оскільки за визначенням кожна вершина пов'язана сама з собою, то $d(v_i, v_i)=0$.

Відстань $d(v_i, v_i)$ задовольняє аксіомам метрики:

$d(v_i, v_j) \geq 0$, причому $d(v_i, v_i) = 0$, якщо і тільки якщо $v_i = v_j$;

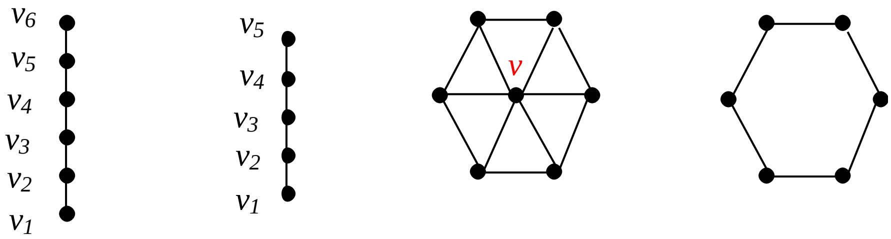
$d(v_i, v_j) = d(v_j, v_i)$;

$d(v_i, v_j) + d(v_j, v_k) \geq d(v_i, v_k)$ (нерівність трикутника).

Визначення 3.14. *Діаметром* $d(G)$ графа G називається максимальна з відстаней між його вершинами: $d(G)= \max\limits_{v_i, v_j \in G} d(v_i, v_j)$. *Максимальним видаленням* від вершини v_i називається величина $r(v_i)= \max\limits_{v_j \in G} d(v_i, v_j)$. Вершина v називається *центром* графа G, якщо $r(v)$ мінімально серед інших вершин графа: $r(v)= \min\limits_{v_i \in G} r(v_i)$. Максимальне видалення $r(v)$ від центру v називається *радіусом* графа G і позначається $r(G)$. Вершини з максимальним видаленням $r(v)$, що співпадає зі значенням діаметру, називаються периферіями.

Число центрів і співвідношення між радіусом і діаметром в графі можуть бути різними. У повному неорієнтованому графі діаметр і радіус рівні одиниці, і всі вершини – центри, і одночасно периферії. Якщо граф G - простий ланцюг з непарним числом $2n + 1$ вершин, то $n + 1$-а від початку вершина - єдиний центр, $d (G) = 2n$, $r (G) = n$. Якщо ж граф G - простий ланцюг з парним числом $2n$ вершин, то n-а і $n + 1$-а від початку вершини - два центри, $d (G) = 2n - 1$, $r (G) = n - 1$. Периферіями в обох випадках будуть перша і остання вершини.

Приклад 1.



а) *б*) *в*) *г*)

Рис. 3.4. Приклади графів.

Діаметр графа на рис. 3.4, а) дорівнює 5, радіус - 3; в графі два центри: вершини v_3, v_4. Діаметр графа на рис. 3.4, б) дорівнює 4, радіус - 2; вершина v_3 - центр графа. У графі на рис. 3.4, в) топологічно еквівалентній окружності (вірніше, колесу телеги), діаметр $d(G) = 2$, радіус $r(G) = 1$, тобто діаметр, як і в колі, в два рази більше радіуса; вершина v - центр. У графі на рис. 3.4, г) $d(G) = 3$, радіус $r(G) = 3$, і всі вершини - центри.

Приклад 2. Побудуємо матрицю відстаней для графа, що зображено на рисунку 3.3.

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	$\mathbf{r(v_i)}$
v_1	0	1	2	3	2	4	3	4	**4**
v_2	1	0	1	2	1	3	2	3	**3**
v_3	2	1	0	1	1	3	2	3	**3**
v_4	3	2	1	0	1	3	2	3	**3**
v_5	2	1	1	1	0	2	1	2	**2**
v_6	4	3	3	3	2	0	1	1	**4**
v_7	3	2	2	2	1	1	0	1	**3**
v_8	4	3	3	3	2	1	1	0	**4**

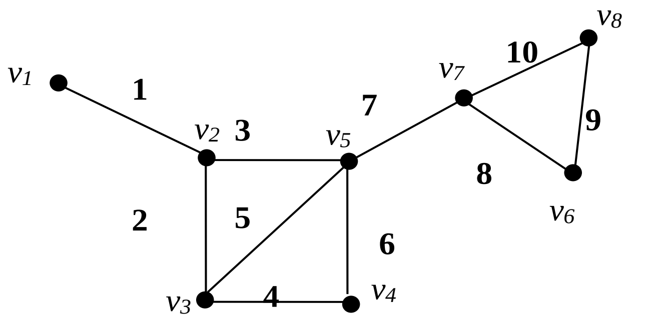
Знаходимо максимальні віддалення та визначаємо діаметр d=4 та радіус графа r=2; відповідно центр - v_5, а периферії - v_1, v_6, v_8(позначено кольором).

Побудуємо для графа матриці суміжності та інцедентності та визначимо степені вершин.

A	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	***deg***
v_1	0	1	0	0	0	0	0	0	**1**
v_2	1	0	1	0	1	0	0	0	**3**
v_3	0	1	0	1	1	0	0	0	**3**

v_4	0	0	1	0	1	0	0	0	**2**
v_5	0	1	1	1	0	0	1	0	**4**
v_6	0	0	0	0	0	0	1	1	**2**
v_7	0	0	0	0	1	1	0	1	**3**
v_8	0	0	0	0	0	1	1	0	**2**
deg	**1**	**3**	**3**	**2**	**4**	**2**	**3**	**2**	***20***

Для побудови матриці інцедентності треба поіменувати ребра.



A	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	***deg***
v_1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**
v_2	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	**3**
v_3	0	1	0	1	1	0	0	0	0	0	**3**
v_4	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	**2**
v_5	0	0	1	0	1	1	1	0	0	0	**4**
v_6	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	**2**
v_7	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	**3**
v_8	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	**2**

3.1.3. Ейлерові графи. Гамільтонів цикл.

Ейлеров обхід. Теорема Ейлера. Гамільтонів цикл.

Ейлерові графи

Визначення 3.1.15. *Ейлеровим обходом*, або е*йлеровим циклом*, в неорієнтованому графі (мультиграфі) називається цикл, який містить всі ребра графа в точності по одному разу. Граф називається *ейлеровим*, якщо в ньому існує ейлерів обхід.

Не будь-який граф – ейлерів. Це встановив великий математик Л.Ейлер, займаючись задачею про Кенігсбергські мости. У місті Кенігсберзі за часів

Ейлера було сім мостів (див. рис. 3.5). Задача полягає в тому, щоб пройти кожен міст по одному разу і повернутися в початкову точку. Ейлер звів цю задачу до задачі знаходження обходу графа на рис. 3.6 і показав, що вона не має рішення. Необхідні і достатні умови існування ейлерова обходу він сформулював в наступній теоремі.

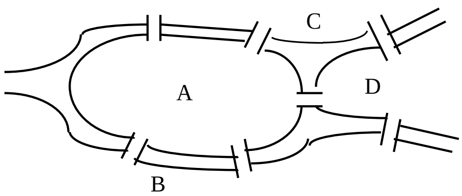


Рис.3.5.Кенігсбергські мости.

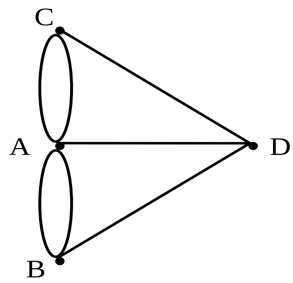


Рис. 3.6. Граф до задачі про Кенігсбергські мости.

Теорема 3.1.3. (Л. Ейлер, 1736 р.). Неорієнтований граф є ейлеровим тоді і тільки тоді, коли він зв'язний, і степені всіх його вершин – парні.

Доведення.

Необхідність. Нехай G - Ейлеров граф. Ейлеров обхід цього графа такий, що проходячи через кожну його вершину, входить в неї по одному ребру, а виходить по іншому. Це означає, що кожна вершина інцидентна парному числу ребер ейлерова циклу, а оскільки такий цикл містить всі ребра графа G, то це означає парність степенів усіх вершин.

Достатність. Припустимо тепер, що степені вершин графа G парні. Нехай ланцюг P_1 починається з довільної вершини v_1. Будемо продовжувати ланцюг, наскільки можливо, вибираючи кожного разу нове ребро. Так як степеня всіх вершин парні, то, потрапивши в чергову відмінну від v_1 вершину, ми завжди будемо мати в розпорядженні ще не пройдене ребро. Тому ланцюг P_1 можна продовжити шляхом додавання цього ребра. Таким чином, побудова ланцюга P_1 закінчиться в вершині v_1, тобто P_1 неодмінно буде циклом. Якщо виявиться, що P_1 містить всі ребра графа G, то це буде необхідний Ейлеров цикл. В іншому випадку, видаливши з графа G всі ребра циклу P_1, розглянемо граф G_1, отриманий в результаті такої операції. Оскільки P_1 і G мали вершини тільки парних степенів, то, очевидно, і G_1 буде володіти тою же властивістю. Крім того, в силу зв'язності графа G, графи P_1 і G_1 повинні мати хоча б одну загальну вершину v_2. Тепер, починаючи з вершини v_2, побудуємо цикл P_2 в графі G_1 подібно до того, як будували цикл P_1. Позначимо через P_1', P_1'' частини циклу P_1 від v_1 до v_2 і від v_2 до v_1 відповідно. Отримаємо новий цикл $P_3 = P_1' \cup P_2 \cup P_1''$, який, починаючись в v_1, проходить по ребрах ланцюга P_1' до v_2, а потім обходить всі ребра циклу P_2 і, нарешті, повертається в v_1 по ребрах ланцюга P_1'' (рис.3.7).

Якщо цикл P_3 ні Ейлеров, тобто містить ще не всі ребра графа, то, виконавши аналогічні побудови, отримаємо ще більший цикл, і т. п. Цей процес закінчиться побудовою ейлерова циклу.

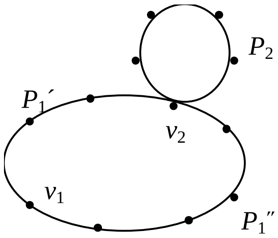
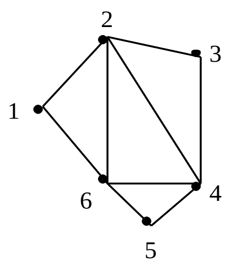


Рис. 3.7. Граф до доведення теореми Ейлера.

Приклади.

На рис. 3.8 показаний Ейлеров граф. Крім задачі про Кенігсбергські мости, відомий ряд інших старовинних цікавих задач і головоломок, вирішення яких зводиться до з'ясування питання, чи є граф ейлеровим. В одній з них потрібно окреслити фігуру, іменовану шаблями (знаком) Магомета (рис. 3.9), не відриваючи олівця від паперу і не повторюючи ліній.



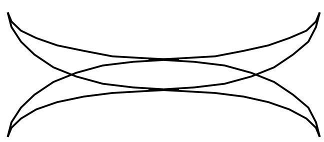


Рис.3.8. Ейлеров граф. *Рис. 3.9. Шаблі Магомета.*

Гамільтонів цикл

Визначення 3.1.16. Цикл в неорієнтованому графі називається *гамільтоновим*, якщо він містить всі вершини графа в точності по одному разу. Граф називається *гамільтоновим*, якщо в ньому існує гамільтонів цикл.

Задача знаходження гамільтонова циклу, поставлена англійським математиком Гамільтоном, при всій схожості її формулювання із задачею про ейлеров обхід, виявляється набагато складнішою. Прості критерії існування гамільтонова циклу невідомі. В той же час інтерес до її рішення великий, оскільки вона має природну прикладну інтерпретацію. Якщо розглядати граф як транспортну мережу, вершини якої – міста, а ребра – шляхи між містами, то задача про гамільтонів цикл виявляється окремим випадком відомої "задачі про комівояжера": об'їхати всі міста, побувавши в кожному рівно один раз і повернутися в початкове місто. Складніша постановка цього завдання пов'язана з випадком, коли різні шляхи мають різну ціну у вартості або тривалості; тоді потрібно знайти обхід всіх міст з мінімальною ціною.

Необхідні умови існування Гамільтонових графів поки не знайдені. Наступні теореми визначають достатні умови існування гамільтонових графів (це тільки дві з деякої множини теорем та умов, але всі вони - достатні).

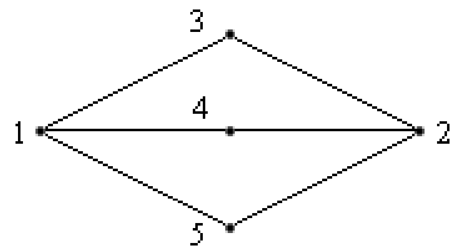
Теорема Дірака. Якщо в графі $G\ (V,\ E)$ з $n \geq 3$ вершинами $\forall v \in V$ $deg\ (v) \geq n / 2$, то граф G є гамільтоновим.

Теорме Оре. Якщо $n \geq 3$ і $deg\ u + deg\ v \geq n$ для будь-яких двох різних несуміжних вершин u і v неорієнтованого графа G, то G - гамільтонів граф.

Легко бачити, що повні графи - Гамільтонові, а однозв'язні графи не є Гамільтоновими. Будь-який граф, що містить точку зчленування - є однозв'язний, тобто графи з точками зчленування, перешийками - негамільтонові.

Значить, Гамільтонові графи зв'язності 2 і більше. Але не всі.

Тета-графом називають граф, що містить дві вершини ступеня 3, з'єднані трьома простими ланцюгами, що попарно не перетинаються, довжини не менше двох:



Якщо двозв'язний граф містить тета-граф, то він негамільтонів.

Незважаючи на те, що існує критерій для визначення Ейлерова графа і такий відсутній для Гамільтонових графів, більшість графів - Гамільтонові.

3.1.4. Плоскі графи. Теорема Куратовського. Розфарбування графів.

Плоскі та планарні графи. Нерівність Ейлера. Теорема Понтрягина-Куратовського щодо планарності графів. Розфарбування графів, хроматичне число. Цикломатичне число.

Плоскі та планарні графи. Теорема Понтрягина-Куратовського.

Визначення 3.1.16. Граф називається *планарным*, якщо він може бути намальований на площині так, що його ребра перетинаються тільки у вершинах графа. Граф називається *плоским*, якщо він вже укладений на площині так, що ніякі його два ребра не перетинаються в точках, відмінних від вершин графа.

На рис. 3.10, а) показаний планарний граф, зображений так, що його ребра перетинаються, а на рис. 3.10, б) - той же граф без перетинів ребер, тобто плоский граф.

Розглянемо умови, при яких граф є плоским.

Визначення 3.1.17. Частина плоского графа, яка обмежена циклом і не включає ніякий інший цикл, називається *гранню*. Необмежена нескінченна область, зовнішня по відношенню до кінцевих граней, також вважається гранню.

Грані плоского графа утворюють розбиття площини, на якій він зображений. На рис. 3.10, б) в графі G z_0 - нескінченна грань, z_1, z_2, z_3 - кінцеві. Якщо граф непланарен, то він не може бути зображений у вигляді плоского графа, і поняття грані для нього втрачає сенс.

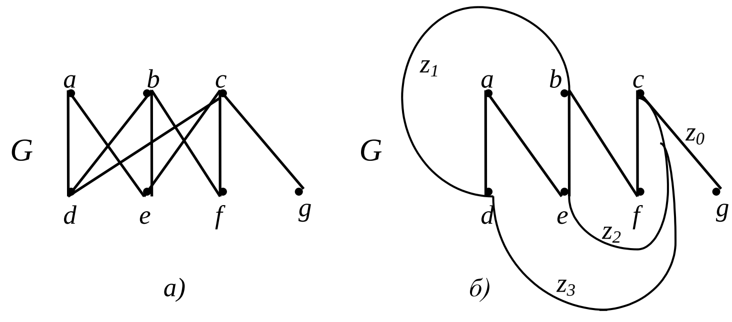


Рис. 3.10. Плоский граф.

Теорема 3.1.4. (Ейлера). Плоске представлення зв'язаного планарного графа (мультиграфа) з n вершинами, m ребрами і r гранями задовольняє наступній формулі:

$n - m + r = 2.$

Доведення проводиться по індукції за числом граней або ребер.

Теорема 3.1.5. У простому планарному графі з n вершинами, m ребрами і r гранями $3r \le 2m$.

Доведення грунтується на тому факті, що кожна грань має принаймні три ребра, що її обмежують, і кожне ребро знаходиться на межі принаймні двох граней.

Наступна теорема встановлює так звану *нерівність Ейлера*.

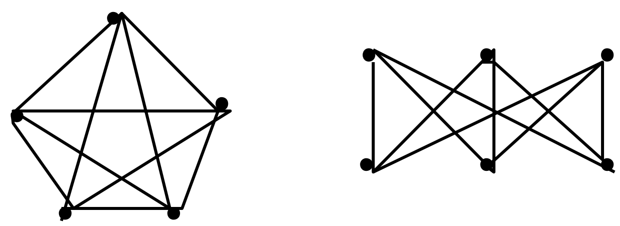
Теорема 3.1.6. У простому планарному графі з n вершинами, m ребрами і r гранями $\boldsymbol{m \le 3n - 6}$.

Доведення. З формули $n - m + r = 2$ отримуємо: $r = 2 + m - n$. Підставляючи значення r в нерівність $3r \le 2m$, отримаємо: $6 + 3m - 3n \le 2m$, тобто $m \le 3n - 6$.

Теорема 3.1.6 дає необхідну умову планарності графа, базуючись на явних об’єктах: вершинах та ребрах, а грань, якої може і не бути, якщо граф виявиться не плоским, не фігурує у формулі.

На рис. 3.11 зображені два неплоских графа, які мають найменше число вершин і не є планарними. Доведемо це.

Граф K_5 - це простій повний граф, що є зіркою, вписаною в п'ятикутник. Він має 5 вершин і 10 ребер, тобто 3n – 6 = 9, тому нерівність Ейлера $10 \le 3n–6$ не виконано. За теоремою 3.1.6 граф K_5 непланарен.



K_5 $K_{3,3}$

Рис. 3.11. *Неплоскі графи.*

Очевидно, що будь-який граф, що містить у якості підграфа граф K_5, обов'язково буде неплоским.

Інший граф, який не містить графа K_5 і є непланарним, – це повний *дводольний* граф $K_{3,3}$. У *дводольних графах* множина вершин розбита на дві неперетинаючі підмножини, які називають *долями.* Такі графи виникають в задачах про з'єднання *n* будинків і *m* пунктів обслуговування за допомогою комунікацій (див. рис. 3.12). Наприклад, дослідження планарности графа $K_{3,3}$ необхідне в задачі "про три будинки і три колодязі", в якій жителі будинків хотіли б ходити за водою до колодязів так, щоб ніколи не зустрічати нікого з своїх сусідів. Очевидно, для того, щоб їх бажання було виконано, потрібно, щоб їх шляхи ніколи не перетиналися. Для цього граф, що сполучає "дома" і "колодязі", повинен бути плоским. Проте граф $K_{3,3}$ – непланарний, так що бажання жителів нездійсненно.

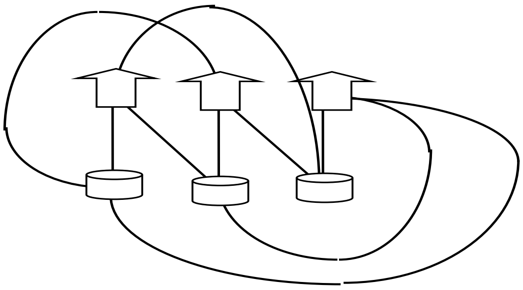


Рис. 3.12. Задача про будинки і колодязі.

Здається, що для графа $K_{3,3}$ $m = 9$, $n = 6$, тобто нерівність Ейлера виконується. Проте, він непланарен. Доведемо це.

Припустимо, що граф $K_{3,3}$ планарен. Тоді, за теоремою Ейлера, число його граней $r = 9 - 6 + 2 = 5$. В силу дводольні $K_{3,3}$, в ньому немає циклів довжиною менше *4*, тому, підсумовуючи довжини меж всіх граней і з огляду на те, що в цій сумі кожне ребро графа $K_{3,3}$ зустрінеться двічі, отримаємо: $2m \geq 4r$, тобто $4r \leq 18$, і, отже, $r < 5$, що суперечить теоремі Ейлера. Таким чином, $K_{3,3}$ непланарен. Це приклад того, що умова $m \leq 3n - 6$ не є достатньою умовою планарності.

Графи K_5 і $K_{3,3}$ дозволяють визначити найбільш загальний критерій планарності, який ми наводимо тут без доказу зважаючи на його складність. Попередньо введемо нові визначення.

Визначення 3.1.18. Операція підразбиття ребра (u, v) в графі $G = \{V, E\}$ полягає у видаленні з *E* ребра (u, v), додаванні до *V* нової вершини *w* і додаванні до $E \setminus \{(u, v)\}$ двох ребер (u, w) і (w, v). Граф *H* називається підразбиттям графа *G*, якщо *H* може бути отриманий з *G* шляхом послідовного застосування операції підразбиття ребер.

Неважко переконатися в тому, що операція підразбиття ребра не змінює співвідношення Ейлера. Дійсно, в результаті підразбиття як кількість ребер, так і кількість вершин, збільшиться на одиницю, а кількість граней не зміниться (див. рис.3.13), так як при видаленні ребра в плоскому графі зникне одна грань, а при додаванні двох ребер з'явиться нова.
Таким чином, $(n + 1) - (m + 1) + (r - 1 + 1) = n - m + r$.

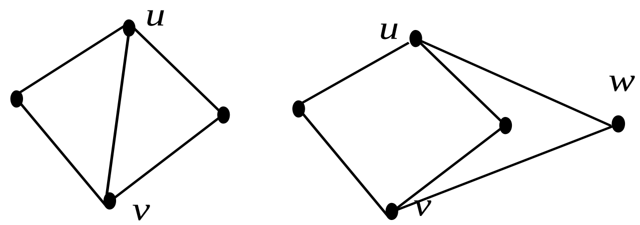


Рис. 3.13 Підразбиття ребра (u, v).

Визначення 3.1.19. Графи *G* і *H* *гомеоморфні*, якщо існують такі їх підрозбиття, які ізоморфні.

Теорема 3.1.7 (Понтрягіна — Куратовського). Граф планарен тоді і тільки тоді, коли він не містить підграфів, гомеоморфних графам K_5 і $K_{3,3}$.

Теорема 3.1.8. У кожному планарном графі існує вершина, степінь якої не більше 5.

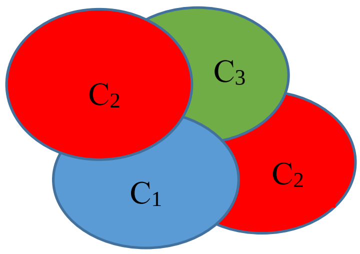
Доведення від противного. Припустимо, що степеня усіх вершин рівні 6.

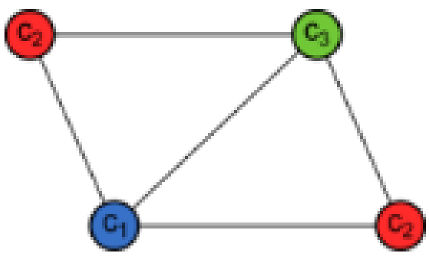
Тоді, з одного боку (за нерівністю Ейлера) $m \leq 3n-6$, а з іншого боку $6n \leq \Sigma deg(v_i) = 2m \Rightarrow 3n \leq m \Rightarrow m \geq 3n$.

Отримали протиріччя: $m \leq 3n-6$ і одночасно $m \geq 3n$.

Розфарбування графа

Розбиття площини на непересічні області називаються *картою*. Області на карті називаються сусідніми, якщо вони мають спільну межу. Задача полягає в розфарбовуванні карти таким чином, щоб ніякі дві сусідні області не були зафарбовані одним кольором.





Розфарбуванням графа називається таке приписування кольорів (натуральних чисел) його вершинам, що ніякі дві суміжні вершини не отримують однаковий колір. Найменше можливе число кольорів в розфарбуванні графа G називавется *хроматичним числом* і позначається $\chi\,(G)$. Множина вершин, що розфарбована в один колір, називається *однокольоровим класом* і є незалежним (тобто будь-які дві вершини з одного класу не є суміжними).

Спосіб явного вираження хроматичного числа через інваріанти графа невідомий, відомі тільки деякі оцінки, наприклад, $\chi(G) \leq \max \deg u + 1$.

Хоча ефективного методу визначення χ, не знайдено, існують цілком ефективні алгоритми розфарбовування графів.

На основі хроматичного числа можна сформулювати ще одну властивість **планарності:** $\boldsymbol{\chi\,(G) \leq 4}$.

Власне в 1879 році Келі була висунута гіпотеза 4 фарб: будь-який планарний граф - 4-х розфарбовований. Спроби довести цю гіпотезу привели Хівуда в 1890 році до доведення теореми: всякий планарний граф можна розфарбувати 5 фарбами.

Труднощі проблеми 4-х фарб привела до появи різних інтерпретацій, і в кінці 60-х років була зведена до дослідження великої, але кінцевої множини непереборних конфігурацій - тисячі чотиреста вісімдесят два зразка. У 1976 році Аппелю і Хейкену вдалося протягом 2000 годин машинного часу розфарбувати ці графи в 4 кольори.

Спочатку розфарбування графів були потрібні для складання географічних карт. Сьогодні ж вони (зокрема розфарбування з використанням мінімальної кількості кольорів) використовуються, наприклад, для складання розкладів, розподілу регістрів в мікропроцесорах, розпаралелювання чисельних методів

Задача про знаходження $\chi\,(G)$ не розв'язується за поліноміальний час.

Хроматичні числа різних графів:

1-хроматичні графи - це нульові (що не мають ребер) графи і тільки вони - $\chi\,(O_n) = 1$.

$\chi\,(K_n) = n$ *- хроматичне число повного графа з n вершинами .*

$\chi\,(C_n) = \{2$*, якщо n - парне; 3, якщо n – непарне} – циклічні графи.*

Для дводольних графів та дерев - $\chi\,(G) = 2$.

Цикломатичне число

Цикломатичне число визначається як $\gamma(G) = m\text{-}n + k$, де m-кількість ребер, n-кількість вершин, k-кількість компонент зв'язності (наприклад, для неорієнтованого зв'язного графа $k = 1$). Тоді, для плоского неориентированного зв'язаного графа можна визначити кількість граней як $r = \gamma(G) + 1$.

Цикломатичне число є однією з можливих числових характеристик графа. Наприклад, при цикломатическая числі, що дорівнює нулю, граф не містить циклів; якщо ж воно дорівнює одиниці, то граф має тільки один цикл. Або, цикломатичне число це - мінімальне число ребер, які треба видалити, щоб граф став ациклічним.

Тема 3.2. Орієнтовані графи.

3.2.1. Основні поняття для орієнтованих графів.

Основні визначенні, матриці. Шляхи та зв'язність.

У орієнтованих графах ряд понять співпадає з аналогічними для неорієнтованих графів. Проте, в літературі часто одні і ті ж поняття мають різні назви. В основному ми дотримуватимемося однакової термінології як для орієнтованих, так і для неорієнтованих графів.

Матриці суміжності та інцидентності.

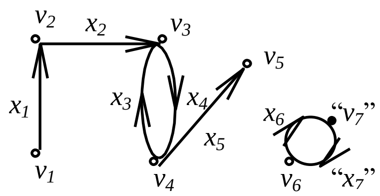
Для орграфа його бінарна матриця суміжності A в загальному випадку несиметрична: елемент $a_{ij} = 1$, якщо і тільки якщо є дуга $e = (v_i, v_j)$. Число одиниць в цій матриці дорівнює числу дуг графа. (Зауважимо, що в матриці суміжності неорієнтованого графа петлі відповідає одна одиниця, що стоїть на головній діагоналі, а іншим ребрам - по дві одиниці, відповідні елементам, симетричним відносно головної діагоналі.) Якщо ж матриця суміжності орграфа D виявляється симетричною, то це означає, що для кожної дуги (v_i, v_j) в ньому є протилежно спрямована дуга (v_j, v_i). Така матриця збігається з матрицею суміжності неорієнтованого графа, отриманого з D заміною кожної пари протилежно орієнтованих дуг (v_i, v_j) і (v_j, v_i) на одне неорієнтоване ребро (v_i, v_j). Тому симетричний орграф завжди можна замінити простим неорієнтованим графом, які мають ту ж матрицю суміжності. Однак властивість симетричності може виконуватися не для всіх дуг орграфа; тоді на рисунку зображуються обидві протилежно спрямовані дуги.

Поняття інцидентності для орграфів зберігається, проте в матриці інцидентності C розрізняють початок і кінець дуги.

Матрицею інцидентності орграфа D називається $(n \times m)$ матриця $C(D) = (c_{ij})$, у якій

$$c_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ якщо вершина } v_i \text{ є кінцем дуги } e_j, \\ -1, \text{ якщо вершина } v_i \text{ є початком дуги } e_j, \\ 0, \text{ якщо вершина } v_i \text{ не інцидентна дузі } e_j. \end{cases}$$

Приклад .



D

$$C(D) = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Рис. 3.14. Орграф і його матриця інцидентності.

У кожному стовпці матриці інцидентності знаходиться рівно дві одиниці: 1 і -1. Вершина v_6 на рис. 3.14. має петлю. Щоб відобразити її в матриці інцидентності, вводиться додаткова фіктивна вершина v_7 і петля ділиться на дві дуги: x_6 і x_7 .

Необхідність враховувати орієнтацію дуг в орграфі призводить до розщеплення поняття "степінь вершини" на дві частини. *Напівстепені заходу* $deg^+(v_i)$ вершини v_i називається число дуг, що входять в v_i ; *напівстепені результату* $deg^-(v_i)$ - число дуг, що виходять з неї. Напівстепені результату v_i дорівнює числу одиниць в i-му рядку матриці суміжності, напівстепені заходу v_i - числу одиниць в i-му стовпці матриці суміжності. Напівстепені заходу і результату легко визначаються і по матриці інцидентності: сума позитивних одиниць в i-му рядку визначає напівстепені заходу вершини v_i , а негативних - виходу. Загальна сума дає степінь вершини: $deg(v_i) = deg^+(v_i) + deg^-(v_i)$

Поняття підграфа для орграфа залишається тим же. Поняття зірки, як і степінь, розщеплюється на дві частини. *Напівзірка заходу* вершини v_i - це підграф, який визначається вершиною v_i і всіма вершинами, з яких дуги заходять в вершину v_i . *Напівзірка виходу* вершини v_i - це підграф, який визначається вершиною v_i і всіма вершинами, в які з v_i йдуть дуги.

Приклад.

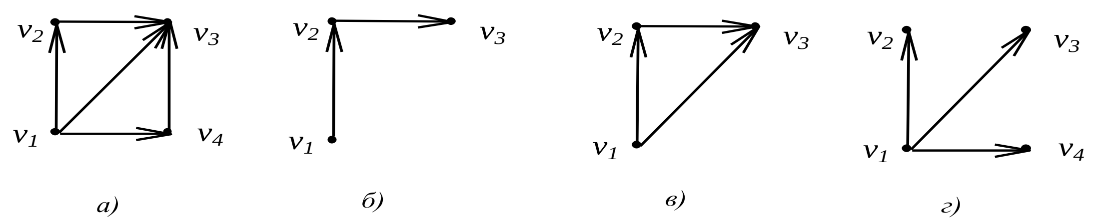


Рис. 3.15 . а) - орієнтований граф D ; б) - частина графа D , в) - підграф графа D , породжений вершинами v_1 , v_2 , v_3 ; г) – напівзірка виходу вершини v_1 .

Отже, графи і орграфи можуть бути задані трьома способами:

- безпосереднім завданням множин вершин V і дуг E (наприклад, списком);
- матрицею суміжності або матрицею інцидентності (правда, мультіграф матрицею суміжності не може бути заданий однозначно, оскільки ця матриця не містить імен ребер);
- малюнком.

Коли два графа однакові? Для перших двох способів завдання відповідь проста: коли збігаються їх описи - списки вершин і ребер або матриці. Візуально, за малюнком, визначити, чи однакові графи, складніше. Один і той же граф можна зобразити різними малюнками, по різному розташувавши вершини і надавши ребрам різну геометричну форму і довжину.

Наприклад, графи D_1 і D_2 на рис. 3.16 геометрично однакові. Однак вони відрізняються нумерацією вершин, через що матриці суміжності і списки дуг у них будуть різні. Наприклад, дуга (v_1, v_3) є в першому графі, але відсутня у другому: замість неї з'явилася дуга (v_4, v_2). Тому множини дуг цих графів різні і, згідно з визначенням 3.1.2, різні самі графи.

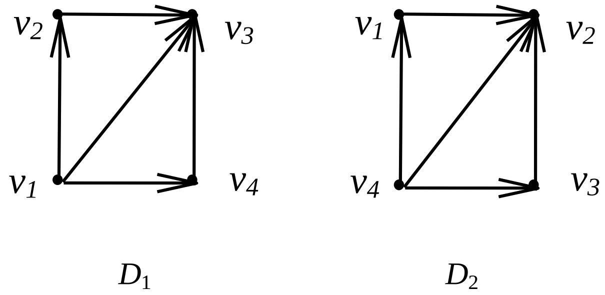


Рис. 3.16 . Ізоморфізм графів.

Графи, які відрізняються тільки нумерацією вершин (і які, отже, при деякій іншій нумерації можна зробити однаковими), називаються *ізоморфними*. Ізоморфізм графів з невеликим числом вершин іноді можна безпосередньо побачити на малюнку, однак, в загальному випадку проблема встановлення ізоморфізму графів виявляється складною в обчислювальному відношенні задачею.

Шляхи і зв'язність в орієнтованих графах

Визначення 3.2.1. *Шлях* P_i в орієнтованому графі - це послідовність дуг $(v_{i\,0}, v_{i\,1})$, $(v_{i\,1}, v_{i\,2})$, ..., $(v_{i\,n-1}, v_{in})$, така, що кінець будь-якої дуги збігається з початком наступної. Вершина v_{i0} називається *початком* шляху, вершина v_{in} - *кінцем* шляху.

Інше позначення шляху - послідовність вершин $v_0, v_1, ..., v_{n-1}, v_n$, які з'єднані дугами в напрямку стрілок. Надалі ми саме так і будемо позначати шлях в орграфі.

Поняття циклу, ланцюга, простого ланцюга, довжини шляху і циклу без зміни переносяться на орграфи. (Цикл в орграфі називають інакше *контуром*).

На рис. 3.17 зображено кілька орграфов. У орграфе D_7 *u, v, w* - простий ланцюг, а *u, v, y, x, v, w* - ланцюг, який не є простим, оскільки вершина *v* зустрічається в ній двічі. Шлях *u, v, y, x, u* є простим циклом, але не є гамільтоновим (повним) циклом. Шлях *u, v, w, x, u* в графі D_4 є циклом; він є також простим, гамільтоновим і ейлеровим циклом. У графі D_6 шлях *u , v, u* є циклом, але не є гамільтоновим циклом, так як він містить не всі вершини графа.

Інші поняття, і, перш за все, зв'язність і досяжність, істотно змінюються для орграфів.

Визначення 3.2.2. Вершина v_j *досяжна* з вершини v_i, якщо існує шлях з початком в v_i і кінцем в v_j. За визначенням вважаємо, що будь-яка вершина досяжна з себе самої.

Для орграфів вірне твердження, аналогічне теоремі 3.1.1.

Теорема 3.1.1.′ Якщо вершина v_j досяжна з вершини v_i, то існує простий шлях з v_i в v_j.

Для мереж комунікацій теорема 3.1.1′ має наступну прозору інтерпретацію: якщо деяка особа має можливість відправити повідомлення іншій особі через ланцюжок посередників, то зможе це зробити так, що жоден посередник не передасть це повідомлення двічі.

Визначення 3.2.3. *Напівшлях* в орієнтованому графі – це послідовність ребер, така, що будь-які два сусідні ребра різні і мають загальну інцидентну їм вершину. Інакше кажучи, напівшлях – це шлях, який проходить без урахування орієнтації ребер. Кажуть, що вершини u і v в орграфе *поєднувані*, якщо v можна досягти з u, не обов'язково дотримуючись напрямку в дугах, тобто, якщо між ними існує напівшлях.

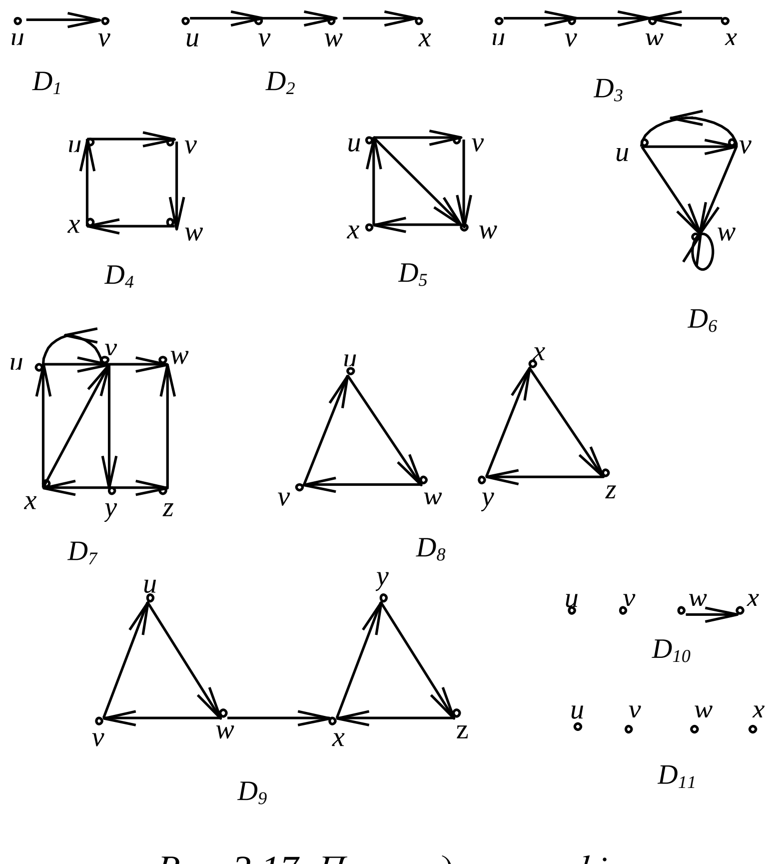


Рис. 3.17. Приклади орграфів.

Відношення досяжності між вершинами в орграфі несиметрично: якщо v_j досяжна з v_i, то v_i не обов'язково досяжна з v_j. Однак напівшлях з v_j в v_i в цьому випадку існує завжди. Можливий випадок, коли між вершинами немає шляху ні в одну, ні в іншу сторону, але є напівшлях. Наприклад, на рис. 3.17 в графі D_3 не існує шляху з вершини u в вершину x, однак існує напівшлях u, v, w, x.

У зв'язку з несиметричністю відношення досяжності, відстань між двома вершинами орграфа $d(u, v)$ не задовольняє всім аксіомам метрики. Зокрема, воно не обов’язково симетрично: в загальному випадку $d(u, v) \neq d(v, u)$. Як приклад розглянемо орграф D_7 на рис. 3.17: $d(x, v) = 1$, $d(v, x) = 2$. При відсутності шляху між двома вершинами відстань вважається або невизначеною, або нескінченною. Наприклад, в графі D_7 відстань $d(w, u)$ не визначена.

Нерівність трикутника має місце в тому випадку, якщо вершина v досяжна з u і w досяжна з v. Дійсно, нехай $d(u, v) = s$, $d(v, w) = t$ і $u, u_2, u_3, ..., u_s, v$ - найкоротший шлях з u в v, а $v, v_2, v_3, ..., v_t, w$ - найкоротший шлях з v в w. Тоді $u, u_2, u_3, ..., u_t, w$ - шлях довжини $s + t$ з u в w, і ми робимо висновок, що $d(u, v) \leq d(u, v) + d(v, w)$.

Види зв'язності орграфів

В орграфа існують різні види зв'язності, які описуються наступним визначенням.

Визначення 3.2.4.

1. Орграф $D = (V, E)$ називається *сильно зв'язним*, або *сильним* , якщо будь-які дві його вершини досяжні одна з одної (тобто якщо між ними існують шляхи в обидві сторони).

Приклад. Орграфи D_4, D_5 на рис. 3.17 сильно зв'язні, тоді як інші орграфи – ні. Наприклад, в орграфі D_9 вершини x, y, z недосяжні з вершин u, v, w.

Якщо мережа комунікацій сильно зв’явзна, то кожна особа може передати повідомлення будь-якої іншої особі.

2. Орграф називається *односторонньо зв'язаним*, або *одностороннім*, якщо для будь-якої пари вершин хоча б одна досяжна з іншої, тобто якщо існує шлях між ними хоча б в одну сторону.

Наприклад, орграфи D_1, D_2, D_9 на рис. 3.17 односторонньо зв'язні. Орграф D_3 не односторонній, так як вершини *u* і *x* недосяжні одна для одної.

Мережа комунікацій є односторонньо зв'язаної, якщо для кожної пари її членів принаймні один може послати повідомлення іншому.

3. Орграф називається *слабо зв'язаним*, або *слабким* , якщо кожна пара вершин поєднувані, тобто, якщо між будь-якою парою вершин існує напівшлях. Наприклад, орграф D_3 на рис. 3.17 слабо зв'язний, тоді як орграф D_8 – ні, так як вершини *u* і *x* НЕ поєднувані.

4. Орграф називається *незв'язним*, якщо між деякою парою вершин немає напівшляху (тобто якщо він не є слабо зв'язаним).

Приклади незв'язних графів на рис. 3.17: D_8 , D_{10} , D_{11}.

Відзначимо, що ці чотири властивості впорядковані по включенню: граф, що володіє однією з цих властивостей, має всі властивості, які в цьому визначенні "нижче" нього. Так, сильно зв'язний граф має властивості 2 - 4 і т.д.

Критерії зв'язності

Перевірка сильної, слабкої або односторонньої зв'язності шляхом безпосереднього використання визначень може виявитися дуже трудомісткою, оскільки в орграфі з n вершинами є (n (n-1)) /2 пар вершин. Наведемо критерії приналежності до кожного з трьох класів орграфів: сильних, односторонніх і слабких.

У сильно зв'язкового графі будь-яка вершина v_i входить принаймні в один цикл, утворений шляхами з v_i в деяку іншу вершину v_j і назад з v_j в v_i. Цикли, що проходять через v_i і інші вершини графа, необов'язково всі різні. Зокрема, сильно зв'язний граф, що містить *n* вершин, може являти собою один простий цикл, що проходить через всі вершини.

Теорема 3.2.1. Орграф сильно зв'язний тоді і тільки тоді, коли в ньому є повний цикл, тобто цикл, що проходить через всі вершини.

У термінах мереж комунікацій теорема стверджує, що для того, щоб кожна особа могло відправити повідомлення до будь-якої іншої особи, необхідно (і достатньо) наявність послідовності осіб з наступними властивостями: 1) кожна з них може зв'язатися з наступним; 2) в послідовності представлені всі учасники мережі; 3) остання особа може зв'язатися з першим.

Теорема 3.2.2. Орграф *D* односторонньо зв'язний тоді і тільки тоді, коли в ньому є повний шлях.

В якості ілюстрації цієї теореми зауважимо, що орграф D_7 на рис. 8.14 односторонньо зв'язний, тому що в ньому є повний шлях x , u , v , y , z , w . Граф D_2 також односторонньо зв'язний.

Лема. У будь-якій підмножині вершин одностороннього графа D існує вершина, з якої досяжні (шляхом використання дуг D) всі інші вершини в цій множині.

Доказ леми проведемо індукцією по числу вершин k в довільній множині U. При k=1 лема вірна, так як кожна вершина досяжна сама з себе. Припустимо, що вона вірна для всіх множин з k вершинами, і виберемо деяку множину U, що містить k+1 вершину. Позначимо елементи U через $v_1, v_2, ..., v_{k+1}$. За припущенням індукції в $U \setminus \{ v_{k+1} \}$ існує вершина v_i, з якої досяжні все v_j при $j<k+1$. Тепер, оскільки орграф D односторонній, або v_i досяжна з v_{k+1}, або v_{k+1} досяжна з v_i . Якщо v_{k+1} досяжна з v_i , то з v_i досяжні всі вершини в U. Якщо v_i досяжна з v_{k+1} , то з v_{k+1} досяжні всі вершини в U. Це доводить лему.

Теорема 3.2.3. Орграф D слабо зв'язний тоді і тільки тоді, коли в ньому є повний напівшлях.

Для ілюстрації цієї теореми зауважимо, що орграф D_3 на рис. 3.17 – слабо зв'язний, оскільки послідовноність вершин u, v, w, x утворює повний напівшлях. При цьому він не є одностороннім, так як в ньому не існує повного шляху. Граф D_9 є слабо зв'язаним і одностороннім.

3.2.2. Дослідження орграфів за допомогою матриць.

Зв’язок матриць орграфів зі шляхами. Матриця досяжності. Матриця відстаней.

Значну частину інформації щодо орграфа D можна уявити в зручній формі, використовуючи матриці. Визначимо наступні операції над матрицями. Нехай $A = (a_{ij})$ і $B = (b_{ij})$ - дві матриці $n \times n$. Тоді

$A + B = (a_{ij} + b_{ij})$ – поелементне складання матриць A , B ,

$A \times B = (a_{ij} \times b_{ij})$ – поелементний добуток A і B ,

$AB = (c_{ij})$, де $c_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$, – добуток A і B .

Транспонованою матрицею A' до матриці A є матриця (a'_{ij}), в якій $a'_{ij} = a_{ji}$.

Визначимо булево перетворення $B : N \to \{0,1\}$ наступним чином:

$$B(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x = 0, \\ 1, \text{ если } x > 0. \end{cases}$$

Тоді перетворення $B(A)$ для матриці $A = (a_{ij})$ означає, що елемент (i, j) в $B(A)$ дорівнює $B(a_{ij})$. наприклад:

$$B\begin{pmatrix} 1 & 8 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

В результаті отримуємо бінарну матрицю.

Будемо позначати через $\boldsymbol{I}$ діагональну одиничну матрицю (матрицю, в якій на головній діагоналі стоять одиниці, а всі інші елементи дорівнюють нулю), і через $\boldsymbol{J}$ – одиничну матрицю, в якій *всі* елементи дорівнюють одиниці.

Матриці орграфов і їх зв'язок зі шляхами

Матрицю суміжності A (D) орграфа D можна використовувати для підрахунку кількості різних шляхів в D. Сама матриця A задає ребра D, тобто шляхи довжини 1. Виявляється, що матриця A^{l} (l- я степінь A) задає число шляхів довжини l.

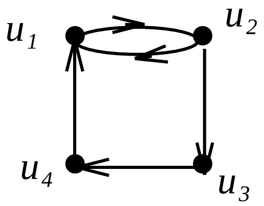
Теорема 3.2.4. Елемент $(i, j) = c_{ij}^{(l)}$ матриці A^{l} орграфа D дорівнює числу шляхів довжини l з v_i в v .

Доведення теореми проведемо індукцією по l. Для $l = 1$ теорема очевидна: матриця суміжності задає шляхи довжиною 1. Нехай для деякого l теорема вірна, тобто елемент матриці A^l дорівнює числу шляхів довжини l з v_i в v_j . Доведемо її для l+1. Будь-який шлях довжини l+1 з v_i в v_j складається з дуги, що веде з v_i в суміжну з нею вершину v_k, і потім шляху довжини l з v_k в v_j. Число шляхів довжини l+1 з v_i в v_j, що проходять на першому кроці через вершину v_k, так само $a_{ik} c_{kj}^{(l)}$ (якщо дуги з v_i в v_k немає, то $a_{ik} = 0$, і $a_{ik} c_{kj}^{(l)} = 0$, а якщо така дуга є, то $a_{ik} c_{kj}^{(l)} = c_{kj}^{(l)}$, так як $a_{ik} = 1$). Загальна кількість шляхів довжини l+1 з v_i в v_j отримаємо, якщо підсумуємо цю величину за всіма k : $\sum_{k=1}^{n} c_{ik} c_{kj}^{(l)}$. Ця сума дорівнює елементу (i, j) добутку матриць A і A^l, тобто елементу (i, j) матриці A^{l+1}, що і доводить теорему.

Слідування. Елемент (i, j) матриці $A + A^2 + ... + A^l$ орграфа D дорівнює числу всіх шляхів довжини $\leq l$ з v_i в v_j.

Приклад. На рис. 3.18 наведені матриці суміжності A, A^2, A^3 і A^4, відповідні орграфу D. Матриця A^2 показує число шляхів довжиною два: оскільки елемент a_{11} в A^2 дорівнює 1, в D існує шлях довжиною 2 з u_1 в u_1 . Дійсно, це цикл u_1, u_2, u_1. Елемент $a_{13} = 1$, тобто в D існує шлях довжиною 2 з u_1 в u_3 : u_1, u_2, u_3 , і т.д. Елемент $a_{21} = 2$ в A^3 , отже, існує два шляхи довжини 3 з u_2 в u_1 . Ці шляхи - u_2, u_1, u_2, u_1 і u_2, u_3, u_4, u_1. Аналогічно інтерпретуються інші елементи матриць A^2, A^3, A^4 і т.д.

Неважко помітити, що якщо в графі немає циклів, матриця A^n стане нульовою через певну (яку?) кількість кроків.



D

$$A = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \qquad A^2 = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$A^3 = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \qquad A^4 = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Рис. 3.18. *Степені матриці суміжності орграфа D.*

Матриця відстаней

Нова матриця, яка виявляється корисною при розгляді орграфів, – *матриця відстаней* (d_{ij}), де d_{ij} – відстань від u_i до u_j, яке визначається як довжина найкоротшого шляху з u_i в u_j. (Нагадаємо, що величина d_{ij} не визначена, якщо шляху з u_i в u_j немає.)

Теорема 3.2.5. Нехай орграф D має матрицю суміжності A і матрицю відстаней (d_{ij}). Тоді, якщо величина d_{ij}, $i \neq j$ визначена, то вона дорівнює найменшому k, для якого елемент (i, j) в A^k не дорівнює 0.

Дотримуючись цієї теореми, можна побудувати матрицю відстаней, послідовно зводячи до степені матрицю суміжності орграфа. На рис. 3.18 наведені степені матриці суміжності орграфа D. Використовуємо їх для отримання матриці відстаней цього графа (див. рис. 3.19).

1. Матриця відстаней має нулі на головній діагоналі і спочатку збігається з матрицею суміжності, тобто вона містить всі шляхи довжиною 1. Інші елементи матриці відстаней поки не визначені.

2. Матриця A^2 вказує всі шляхи довжиною 2. Невизначеним елементам матриці відстаней d_{ik} присвоюємо значення 2, якщо $a_{ik}^{(2)} \neq 0$.

3. Тим елементам d_{ik}, які ще не визначені, присвоюємо значення 3, якщо елементи A^3 $a_{ik}^{(3)} \neq 0$.

Тепер матриця відстаней повністю визначена.

$$1).\ d(D)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & x & x \\ 1 & 0 & 1 & x \\ x & x & 0 & 1 \\ 1 & x & x & 0 \end{pmatrix} 2).\ d(D)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & x \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & x & 0 & 1 \\ 1 & 2 & x & 0 \end{pmatrix}\ 3).\ d(D)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Рис. 3.19. Обчислення матриці відстаней орграфа D.

Теорема 3.2.6. Для того, щоб орграф з n вершинами з матрицею суміжності A мав хоча б один цикл, необхідно і достатньо, щоб матриця $K = A^2 + A^3 + \ldots + A^n$ мала хоча б один не нульовий діагональний елемент.

Використання матриць дозволяє отримати і перелічення конкретних шляхів. Для цього всім дугам графа D дамо конкретні імена (наприклад, $e_1, \ldots, e_m$), і в матриці A замінимо одиниці іменами відповідних дуг, тобто елемент $a_{ij} = 1$ замінимо ім'ям дуги, яка з'єднує вершину v_i з вершиною v_j. Отриману матрицю позначимо через $H(D)$. Для того, щоб визначити добуток матриць цього виду, введемо алгебру на множинах шляхів.

Шлях будемо розглядати як слово (послідовність символів) в алфавіті $\{e_1, \ldots, e_m\}$. Нехай дано дві множини шляхів M_1 і M_2. Сума M_1 і M_2 визначається як їх звичайне теоретико-множинне об'єднання: $M_1 \cup M_2$, добуток $M_1 \cdot M_2$ - як множина, що отримується приписуванням справа до кожного слова з M_1 всіх слів з M_2. Наприклад, якщо $M_1 = \{e_2e_4e_2, e_3e_1, e_1\}$, $M_2 = \{e_3e_1e_4, e_2\}$, то $M_1 \cdot M_2 =$ $= \{e_2e_4e_2e_3e_1e_4, e_2e_4e_2e_2, e_3e_1e_3e_1e_4, e_3e_1e_2, e_1e_3e_1e_4, e_1e_2\}$. (Таку операцію називають *конкатенацією*.) Порожня множина $\varnothing$ грає тут роль нуля: $M_1 \cdot \varnothing = \varnothing \cdot M_2 = \varnothing$. Тому замість $\varnothing$ будемо, як і в матриці A, писати 0. Очевидно, що операція конкатенації некомутативна. Вона має простий сенс: якщо M_1 - множина всіх шляхів, що ведуть з v_i в v_j, а M_2 - множина всіх шляхів, що ведуть з v_j в v_k, то $M_1 \cdot M_2$ - це множина всіх шляхів, що ведуть з v_i в v_k і проходять через v_j.

За допомогою цих операцій визначимо добуток $Z=X \cdot Y$ квадратних матриць X і Y однаковою розмірності n, елементами яких є множини слів (такі матриці назвемо словниковими):

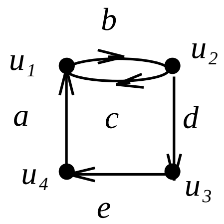
$$z_{ij} = \bigcup_{k=1}^{n} x_{ik} \cdot y_{kj} \ .$$

У цій формулі роль суми елементів грає теоретико-множинне об'єднання, а добутку – вище наведена конкатенація. Степінь матриці H визначається по індукції формулою $H^{l+1} = H \cdot H^{l}$.

Теорема 3.2.7. Елемент $(i, j) = h_{ij}^{(l)}$ матриці H^l орграфа D являє собою множину всіх шляхів довжини l з v_i в v_j.

Слідування. Елемент (i, j) матриці $H \cup H^2 \cup ... \cup H^l$ орграфа D дорівнює множині всіх шляхів довжини $\leq l$ з v_i в v_j.

Приклад .



$$H=\begin{pmatrix} 0 & b & 0 & 0 \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e \\ a & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} H^2=\begin{pmatrix} bc & 0 & bd & 0 \\ 0 & cd & 0 & de \\ ea & 0 & 0 & 0 \\ 0 & ab & 0 & 0 \end{pmatrix} H^3=\begin{pmatrix} 0 & bcb & 0 & bde \\ cbc \cup dea & 0 & cbd & 0 \\ 0 & eab & 0 & 0 \\ abc & 0 & abd & 0 \end{pmatrix}$$

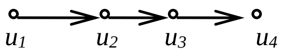
Рис. 3.20. Матриця шляхів в орграфі.

Матриця досяжності

Матриця досяжності $R(D)=(r_{ij})$ визначається наступним чином:

$$r_{ij} = \begin{cases} 1, & u_j \text{ досяжна з } u_i, \\ 0, & u_j \text{ ні досяжна з } u_i. \end{cases}$$

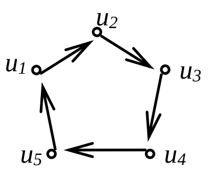
Будь-яка вершина досяжна сама з себе, тому $r_{ii} = 1$ для всіх i . На рис. 3.21 представлені матриці суміжності, відстаней і досяжності для деяких орграфів.



D_2

$$A(D_2) = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

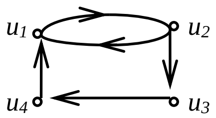
$$R(D_2) = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \qquad (d_{ij}) = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ x & 0 & 1 & 2 \\ x & x & 0 & 1 \\ x & x & x & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$



D_3

$$A(D_3) = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$R(D_3) = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \qquad (d_{ij}) = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$



D_4

$$A(D_4) = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$(d_{ij}) = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \qquad R(D_4) = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Рис. 3.21. Матриці відстаней і досяжності для орграфів.

Матриця досяжності може бути отримана за допомогою матриці суміжності.

Теорема 3.2.8. Нехай A - матриця суміжності і R - матриця досяжності орграфа D з n вершинами. Тоді

$$R = B(\boldsymbol{I} + A + A^2 + ... + A^{n-1}) = B[(\boldsymbol{I} + A)^{n-1}],$$

де B – булево перетворення, а $\boldsymbol{I}$ **–** одинична діагональна матриця.

Доведення. Дійсно, за теоремою 3.1.1′, якщо v_j досяжна з v_i, то існує простий ланцюг з v_i в v_j. Довжина цього шляху не перевищує n-1, оскільки у простому ланцюзі вершини не повторюються. Згідно зі слідуванням з теореми 3.2.14, в цьому випадку елемент (i, j) матриці $\boldsymbol{I} + A + A^{2} + ... + A^{n-1}$ буде ненульовим, звідки і слідує наша теорема.

У наступній теоремі буде показано застосування матриці досяжності як методу визначення зв'язності орграфа.

Теорема 3.2.9. Нехай орграф D має матрицю досяжності R і матрицю суміжності A. Тоді

1) D сильно зв'язний тоді і тільки тоді, якщо $R = \boldsymbol{J}$;

2) D односторонньо зв'язний тоді і тільки тоді, якщо $B(R + R') = \boldsymbol{J}$;

3) D слабо зв'язний тоді і тільки тоді, коли $B[(\boldsymbol{I} + A + A')^{n-1}] = \boldsymbol{J}$, де $\boldsymbol{J}$ – одинична матриця.

3.2.3. Вершинні бази і мережі комунікацій.

Сильні компоненти, вершинні базі. Процедура Кеніга. Використання матриць досяжності для знаходження вершинних баз.

Сильні компоненти і вершинна база

Припустимо, ми хочемо передати повідомлення по мережі комунікацій так, щоб воно могло досягнути всіх її учасників. Якщо мережа сильно зв’язна, досить передати повідомлення будь-якій одній особі. Однак, якщо орграф не є сильно зв'язним, то повідомлення, передане одній особі, не завжди досягне всіх учасників. В такому випадку виникає задача знаходження множини вершин, з яких досяжні всі інші вершини, причому бажано, що б ця множина містила найменше число вершин.

Визначення 3.2.5. Сукупність вершин B орграфа D називається його *вершинної базою* (або базою вершин), якщо кожна вершина, яка не входить в B, досяжна з деякою вершини в B, і множина B – мінімальна. Тут *мінімальність* B означає, що ні з якої власної підмножини B не можна досягти всіх вершин D, що залишилися.

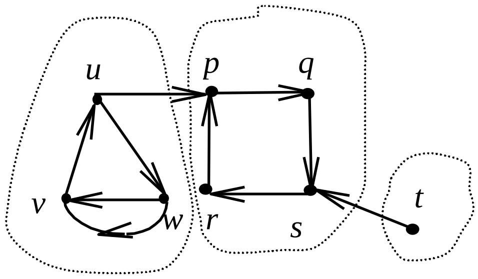


Рис. 3.22. Сильні компоненти орграфа.

Для прикладу розглянемо орграф, зображений на рис. 3.22. Знайдемо вершинну базу з найменшим числом елементів, виходячи з її визначення. Вершина t не має вхідних дуг, тому ми повинні включити її в вершинну базу. Вершини u, v, w недосяжні з p, q, r, s, але кожна з них досяжна одина для одної, тому одна з них повинна входити в будь-яку з вершинних баз. Отже, вершинну базу можна отримати додаванням до t або u, або v, або w. З множини $\{t, u, q\}$ також можна досягти всі інші вершини, але вона не є вершинної базою, оскільки підмножина $\{t, u\}$ вже володіє необхідною властивістю. Насправді множини $\{t, u\}$, $\{t, v\}$ і $\{t, w\}$ утворюють всі вершинні бази. Як видно, всі вони мають однакове число вершин, і це не випадково. Таким чином, пошук вершинної бази з найменшим числом елементів закінчується відразу, як тільки знаходиться довільна вершинна база.

Розглянемо процедуру знаходження всіх вершинних баз даного орграфа. Більшість результатів з пошуку вершинних баз належить Кенігу[15]. Щоб описати процедуру Кеніга, введемо деякі попередні визначення.

Визначення 3.2.6. Максимальний сильно зв'язний підграф орграфа D називається *сильно зв'язною компонентою* D (*сильною компонентою зв'язності, сильною компонентою*).

Наприклад, на рис. 3.22 підграф, породжений вершинами v, w, є сильно зв'язним, проте він не є сильною компонентою, так як входить в сильний

---

[15] Денеш Кеніг (1884 - 1944) - угорський математик, який написав першу книгу з теорії графів. Його авторству належать чимало цікавих теорем з теорії графів (дводольні графи містять цикли тільки парної довжини; граф двохкольоровий тоді і тільки тоді, коли він не містить непарних простих циклів).

підграф, породжений вершинами *u*, *v*, *w*, тобто не є максимальним за властивістю сильної зв'язності. Іншою сильною компонентою є підграф, породжений вершинами *p*, *q*, *r*, *s*, – всі вони досяжні одна для одної, так як входять в один цикл. Одна вершина *t* також є сильною компонентою. Сильні компоненти мають наступні властивості.

Теорема 3.2.10. У орграфе $D = (V, E)$ кожна вершина *u* входить в одну і тільки одну сильну компоненту.

Доведення. Вершина *u* входить щонайменше в одну сильну компоненту. Справді, підграф, породжений *u*, є сильним (так як кожна вершина досяжна сама для себе). Будемо додавати вершини до тих пір, поки будуть все ще виходити сильно зв'язані підграфи. Така процедура призводить до сильно зв'язаної компоненти, що містить *u*. Припустимо тепер, що *u* входить в сильні компоненти *K* і *L*. Розглянемо підграф, породжений вершинами з *K* і *L*. Цей підграф сильно зв'язний, так як, якщо *a* входить в *K*, а *b* входить в *L*, то з *a* можна потрапити в *b* через вершини з $K \cup L$, оскільки з *a* можна досягти *u* через вершини *K* і з *u* можна досягти *b* через вершини *L*. Аналогічно, з *b* можна потрапити в *a* через вершини $K \cup L$. З максимальності *K* і *L* маємо, що $K \cup L = K$ і $K \cup L = L$, тому $K = L$.

Ця теорема дає той же самий результат, що і лема про впорядкування квазівпорядкованої множини. Дійсно, всі вершини сильно зв'язного підграфа досяжні одна для одної, тобто перебувають у відношенні сильної зв'язності, яке є симетричним, рефлексивним і транзитивним. Отже, множина вершин сильно зв'язаної компоненти утворюють один клас еквівалентності. Ці класи еквівалентності пов'язані між собою і утворюють новий граф D^*, вершини якого відповідають сильним компонентів графа *D*.

Орграф D^*, званий *конденсацією* графа *D*, будується наступним чином. Нехай $K_1, K_2, ..., K_p$ – сильні компоненти *D*. Тоді вибираємо множину вершин $V(D^*) = \{K_1, K_2, ..., K_p\}$, і проводимо дугу від K_i до K_j тоді і тільки тоді, коли $i \neq j$ і для деяких вершин $u \in K_i$ і $v \in K_j$ в *D* є хоча б одна дуга з *u* в *v*.

Конденсація D^* орграфа *D* не має циклів. Дійсно, нехай в D^* існує цикл $K_{i_1}, K_{i_2}, ..., K_{i_t}, K_{i_1}$ і *u* – деяка вершина в K_{i_1}, *v* – деяка вершина в K_{i_2} Використовуючи цикл $K_{i_1}, K_{i_2}, ..., K_{i_t}, K_{i_1}$, легко довести, що *u* досяжна з v і v досяжна з u. Таким чином, виявляється, що u і v входять в одну сильну компоненту і, отже, $K_{i_1} = K_{i_2}$, а це про суперечить визначенню циклу.

Оскільки новий орграф D^*, що є конденсацією вихідного орграфа D, і не містить циклів, він буде мати легко визначаєму єдину вершину базу B^* і з неї буде легко отримати всі вершинні бази орграфа D. Це властивість конденсації графа заснована на наступній теоремі.

Теорема 3.2.11. В орграфі без циклів D є єдина вершинна база, що складається з усіх вершин, які не мають вхідних дуг.

Доведення. Нехай B – множина всіх вершин, які не мають вхідних дуг. Ясно, що будь-яка вершина u з B має бути присутня в кожній вершинної базі. Досить довести, що будь-яка вершина v, яка не належить B, досяжна з деякої вершинної множини B. Щоб показати це, припустимо, що $v \notin B$. Нехай $v = v_0$. Оскільки $v_0 \notin B$, є дуга (v_1, v_0), що входить в v_0, причому $v_1 \neq v_0$. Якщо $v_1 \in B$, все доведено. Якщо немає, то значить є дуга (v_2, v_1), що входить в v_1, причому $v_2 \neq v_1$. Продовжуючи цей процес, побудуємо шлях $v_t, v_{t-1}, ..., v_1, v_0$, який не містить вершин з B. Всі вершини цього шляху різні, оскільки, якщо $v_i = v_j$, $i > j$ і $v_i, v_{i-1}, ..., v_{j+1}$ різні, то $v_i, v_{i-1}, ..., v_{j+1}, v_j$ - цикл, що суперечить допущенню про відсутність циклів в орграфе D. Так як D має кінцеве число вершин, то побудова шляху $v_t, v_{t-1}, ..., v_1, v_0$ не може тривати нескінченно. Врешті-решт ми повинні досягти деякої вершини v_t, що входить в B. Таким чином, вершина $v = v_0$ досяжна з v_t.

Слідування. У орграфі без циклів існує вершина, в яку не входить жодна дуга.

Теорема 3.2.12. Нехай B^* – єдина вершинна база конденсації D^* орграфа D. Тоді вершинними базами в D, служать такі множини B, які містять по одній вершині з кожної сильної компоненти D, що належить B^*.

Доведення. Припустимо, що B^* – єдина вершинна база в D^* і B містить по одній вершині з кожної сильної компоненти B^*. Ясно, що кожна вершина в D досяжна з B. Потрібно показать, що B є мінімальною множиною, що володіє такою властивістю, що кожна вершина в D досяжна з B. Для доведення мінімальності досить показати, що не знайдеться вершини $v \in B$, що досяжна з іншої вершини $u \in B$. Якби це було можливо, то сильна компонента, містить v, була б досяжна в D^* з сильної компоненти, що містить u, що суперечило б мінімальності B^*. Щоб завершити доведення, покажемо, що якщо B є довільна вершинна база, то вона містить точно по одній вершині з кожної сильної компоненти D, що належить B^*. Звичайно, база B повинна містити принаймні по одній вершині з кожної такої сильної компоненти, а також, можливо, і інші вершини. За умови мінімальності випливає, що ніякі інші вершини не потрібні.

Слідуванням з теореми 3.2.12 є теорема 3.2.13.

Теорема 3.2.13. Будь-які дві вершинні бази орграфа містять однакове число вершин.

З цих теорем витікає процедура (Кеніга) знаходження множини вершинних баз орграфа.

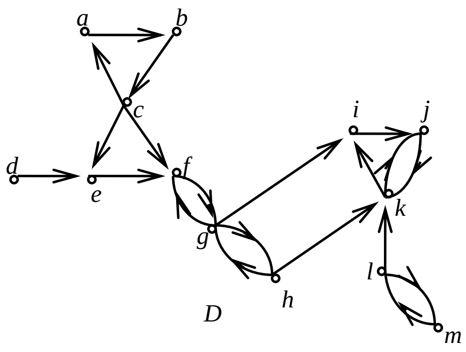
1. Знаходяться всі сильні компоненти орграфа D.

2. Будується конденсація D^* орграфа D.

3. Знаходиться множина вершин орграфа конденсації B^*, що складається з вершин, в які не входить ні одна дуга (вершинна база B^* конденсації графа D^*).

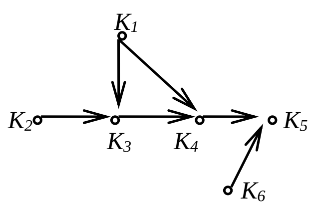
4. З кожної сильної компоненти, що входить в B^*, вибирається по одній вершині. Ця множина і є вершинною базою B орграфа D.

Розглянемо цю процедуру для орграфа, зображеного на рис. 3.23.



Сильні компоненти:

$\{a,b,c\}$	K_1
$\{d\}$	K_2
$\{e\}$	K_3
$\{f,g,h\}$	K_4
$\{i,j,k\}$	K_5
$\{l,m\}$	K_6



Вершинна база B^* в D^*:
$\{K_1,K_2,K_6\}$

Рис. 3.23. Орграф, його конденсація і вершинна база.

Знайдемо всі сильні компоненти цього орграфа. Він містить шість сильних компонент (множини вершин, що входять до них, вказані на малюнку). Будуємо конденсацію D^* графа D. У якості вершин D^* вибираємо все сильні компоненти K_1 - K_6 і з'єднуємо їх дугами. В конденсації D^* знайдеться, наприклад, дуга з K_3 в K_4, оскільки в орграфі D є дуга (e, f). Аналогічно в D * знайдеться дуга з K_4 в K_5, оскільки в D є дуга з g в i. Є й інша дуга (h, k) з вершини в K_4 до вершини в K_5, проте в конденсацію графа включається тільки одна з них.

Тепер знайдемо вершинну базу в D^*. Компоненти K_1, K_2 і K_6 не мають вхідних дуг; вони утворюють множину $B^* = \{K_1, K_2, K_6\}$, з якої досяжна кожна інша вершина в D^*. Таким чином, $B^* = \{K_1, K_2, K_6\}$ є вершинної базою для конденсації D^*. Далі, якщо взяти по одному елементу з кожної сильної компоненти K_1, K_2, K_6, то отримаємо вершинну базу для D. Наприклад, множина $B = \{a, d, l\}$ дає таку вершинну базу. Інша вершинна база задається множиною $\{a, d, m\}$. З B * виходять і інші вершинні бази: $\{b, d, l\}$, $\{b, d, m\}$, $\{c, d, l\}$, $\{c, d, m\}$.

Ми бачимо, що в D * завжди є єдина вершинна база B^*, що складається, як в цьому прикладі, з усіх вершин, які не мають вхідних дуг. У свою чергу, кожну вершину базу в D можна отримати з бази в D^*, вибираючи по одній вершині з кожної сильної компоненти в D, що входить в B^*. Таким чином, отримані вершинні бази складають множини всіх вершинних баз.

Використання матриці досяжності для знаходження сильних компонент орграфа

Теорема 3.2.14. Нехай орграф D має матрицю досяжності $R=(r_{ij})$ і $R^2 = (s_{ij})$. Тоді:

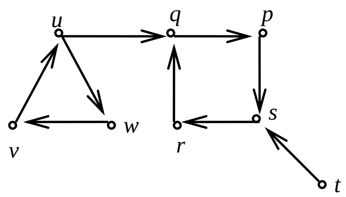
1) сильна компонента, що містить вершину u_i, визначається одиничними елементами в i -му рядку (або стовпці) поелементного добутку $R \times R'$, де R'- матриця, транспонована до R;

2) число вершин в сильній компоненті, що містить u_i, так само s_{ii}.

Доведення. Вершина u_j досяжна з вершини u_i тоді і тільки тоді, коли $r_{ij}=1$. У свою чергу, u_i досяжна з u_j тоді і тільки тоді, коли $r_{ji}=1$. Таким чином, u_i і u_j взаємно досяжні в тому і тільки тому випадку, якщо $r_{ij} r_{ji}=1$.

Величина s_{ii} дорівнює $\sum_{j=1}^{n} r_{ij} r_{ji}$, де n – число вершин. Далі, $r_{ij}\, r_{ji} = 1$ тоді і тільки тоді, коли u_i і u_j взаємно досяжні. Таким чином, підсумовування цих чисел за всіма j дає число вершин u_j, взаємно досяжних для вершин u_i.

На рис. 3.24 наведені матриці R, $R{\times}R'$ і R^2 для зображеного там же орграфа D. Поелементний добуток $R{\times}R'$ є клітинно-діагональною матрицею. Кожна клітина відповідає одній сильній компоненті. Ми можемо знайти сильні компоненти, переглядаючи матрицю по рядках. Наприклад, рядок, що відповідає вершині u в матриці $R{\times}R'$, визначає сильну компоненту $\{u, v, w\}$. Елемент (u, u) в матриці R^2, а саме 3, дає число елементів в цій сильній компоненті. Аналогічно можна знайти інші сильні компоненти.



Сильні
компоненти
$\{u, v, w\}$
$\{p, q, r, s\}$
$\{t\}$

$$R=R(D)=\begin{array}{c} \\ u\\ v\\ w\\ p\\ q\\ r\\ s\\ t \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} u & v & w & p & q & r & s & t \end{array}\\ \begin{pmatrix} 1&1&1&1&1&1&1&0\\ 1&1&1&1&1&1&1&0\\ 1&1&1&1&1&1&1&0\\ 0&0&0&1&1&1&1&0\\ 0&0&0&1&1&1&1&0\\ 0&0&0&1&1&1&1&0\\ 0&0&0&1&1&1&1&0\\ 0&0&0&1&1&1&1&1 \end{pmatrix}\end{array}$$

$$R{\times}R'=\begin{array}{c} \\ u\\ v\\ w\\ p\\ q\\ r\\ s\\ t \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} u & v & w & p & q & r & s & t \end{array}\\ \begin{pmatrix} 1&1&1&0&0&0&0&0\\ 1&1&1&0&0&0&0&0\\ 1&1&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&1&1&1&0\\ 0&0&0&1&1&1&1&0\\ 0&0&0&1&1&1&1&0\\ 0&0&0&1&1&1&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1 \end{pmatrix}\end{array}$$

$$R^2=\begin{array}{c} \\ u\\ v\\ w\\ p\\ q\\ r\\ s\\ t \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} u & v & w & p & q & r & s & t \end{array}\\ \begin{pmatrix} 3&3&3&7&7&7&7&0\\ 3&3&3&7&7&7&7&0\\ 3&3&3&7&7&7&7&0\\ 0&0&0&4&4&4&4&0\\ 0&0&0&4&4&4&4&0\\ 0&0&0&4&4&4&4&0\\ 0&0&0&4&4&4&4&0\\ 0&0&0&5&5&5&5&1 \end{pmatrix}\end{array}$$

Рис. 3.24. Сильні компоненти орграфа, що визначаються по матриці досяжності.

Графи і бінарні відношення

Між простими (без кратних ребер) графами і бінарними відношеннями існує взаємно однозначна відповідність. Всякий орграф з множиною вершин $V = \{ v_1, \ldots v_n \}$ визначає бінарне відношення на множині V - відношення суміжності. Матриця суміжності цього графа - це матриця бінарного відношення суміжності. Вірно і зворотне - всяке бінарне відношення ρ на довільній множині $M = \{ m_1, \ldots, m_n \}$ можна представити графом G, вершини якого відповідають елементам M, а ребро (m_i , m_j) в цьому графі існує, тоді і тільки тоді, якщо виконується $m_i \rho m_j$. Бінарна матриця відношення ρ одночасно є матрицею суміжності графа G, а сам граф називають графом відношення ρ.

По матриці суміжності графа можна визначити властивості відношення ρ. Граф рефлексивного відношення містить петлі у всіх вершинах і, відповідно, одиниці у всіх елементах головною діагоналі матриці суміжності. Симетричному відношенню відповідає граф із симетричною матрицею суміжності. Як було зазначено вище, такий орграф рівносильний простому неорієнтованому графів. Граф транзитивного відношення має наступну властивість: якщо існують ребра (v_i, v_j) і (v_j, v_k), то існує ребро (v_i, v_k). Граф відношення еквівалентності являє собою сукупність повних підграфів.

Оскільки будь-який граф являє певне відношення, можна визначити операції об'єднання і перетину над графами так само, як над відношеннями. Доповненням ρ′ відношення ρ (тобто відношенню, яке істинно, коли ρ не виконується) відповідає доповнення графа G до повного графа, тобто граф G', в якому є ті і тільки ті дуги, яких немає в G. Зворотному відношенню ρ^{-1} відповідає граф G^{-1}, який отриманий з графа G зміною орієнтації всіх його дуг на протилежні.

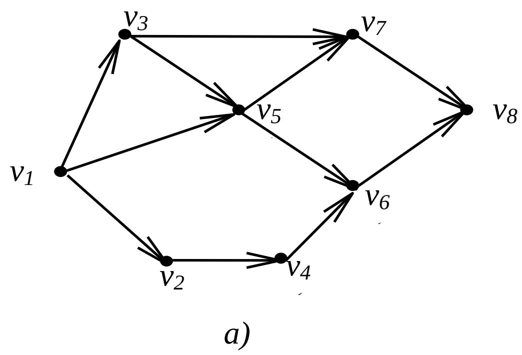
Тема 3.3. Ациклічні графи

3.3.1. Топологічне сортування ациклічних графів.

Ациклічні графи, топологічне сортування.

Визначення 3.3.1. Орграф називається *ациклічним*, якщо він не містить циклів.

У загальному випадку орграф може містити шляхи якої завгодно довжини, оскільки кожен шлях може проходити через одну вершину будь-яке число раз. Однак це можливо, тільки якщо в графі є цикли. У ациклічному графі довжини шляхів обмежені, так як вершини в його шляхах не можуть повторюватися, тобто всі його шляхи – прості ланцюги. Отже, в ациклічному орграфе є шляхи максимальної довжини, тобто шляхи, які не можуть бути продовжені: не можна додати ребро ні до їх початку, ні до їх кінця. Звідси випливає, що в ациклічному графі існує, принаймні, одна вершина, в яку не входить жодна дуга (таку вершину називають *витоком* , або *джерелом*), і, принаймні, одна вершина, з якої не виходить жодна дуга (таку вершину називають *стоком*).



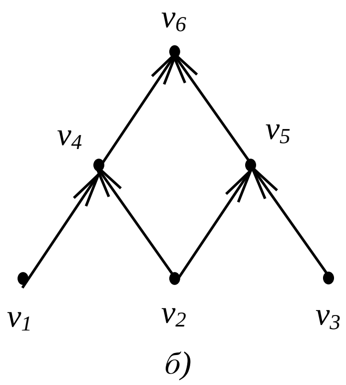


Рис. 3.25. *Ациклічні графи.*

Дійсно, в ациклічному графі будь-який шлях приводить в вершину, з якої він не може продовжитися (див. рис. 3.25). Така вершина і є стік. Якщо ж продовжити цей шлях від його початку проти орієнтації, прийдемо в вершину, з якої не можна вийти проти орієнтації інцідентних їй ребер, тобто в вершину, яка не має вхідних ребер. Така вершина є джерелом.

Приклади.

Ациклічний орграф з одним джерелом і одним стоком називається *двополюсним*. Двополюсний граф зображений на рис. 3.25,а). Ациклічний орграф на рис. 3.25, б) має три джерела і один стік.

Граф конденсації деякого орграфа є ациклічним графом, так як він ніколи не містить циклів. Іншим прикладом ациклического графа є уявлення напіврешіток у вигляді діаграм Хассе. Діаграма повної решітки являє собою двополюсний ациклічний орграф.

Визначення 3.3.2. *Топологічним сортуванням* орграфа називається така нумерація вершин, що для будь-якого ребра (v_i, v_j) номер його початку менше номера його кінця: $i < j$.

Теорема 3.3.1. Для орграфа топологічне сортування існує тоді і тільки тоді, коли він ациклічний.

Доведення. Припустимо, що для циклу топологічне сортування можливе. Виберемо в циклі довільну вершину v_i. Цикл містить ребра (v_i, v_j) і (v_k, v_i), причому за визначенням 3.3.2 повинно бути $i<j$ та $k<i$. При проходженні вздовж циклу номера вершин повинні тільки зростати і, отже, всі вони будуть більше i. Тому, коли ми прийдемо в v_k, отримаємо $k>i$, що суперечить припущенню.

Для ациклічного орграфа D з n вершинами топологічне сортування здійснюється за допомогою наступного алгоритму. Виберемо в D будь-який стік і дамо йому номер n. Всі інцидентні йому ребра – входять, тому їх початки будуть мати номери, менші n, і, отже, для них умову визначення 3.3.2 виконано. Видалимо обраний стік разом з усіма інцидентними йому ребрами. Отримаємо ациклічний граф з n-1 вершиною. Виберемо в ньому будь-який стік і дамо йому номер n-1. Будемо повторювати процедуру видалення стоків і інцидентних їм ребер до тих пір, поки не пронумеруємо все вершини. Оскільки щоразу ребра, що видаляються, будуть задовольняти умові визначення 3.3.2, отримаємо топологічне сортування вихідного орграфа. Приклад топологічної сортування графа наведено на рис. 3.25, б).

3.3.2. Дерева.

Властивості дерев. Бінарні дерева. Збалансовані дерева.

Якщо в ациклічному орграфе "скасувати" орієнтацію ребер, то в отриманому неорієнтованому графі можуть виникнути цикли. Тому неорієнтовний ациклічний граф має більш специфічний вигляд.

Визначення 3.3.3. Зв'язний неорієнтований граф без циклів називається *неорієнтованим деревом*. Незв'язний граф, що складається з декількох дерев, називається *лісом*.

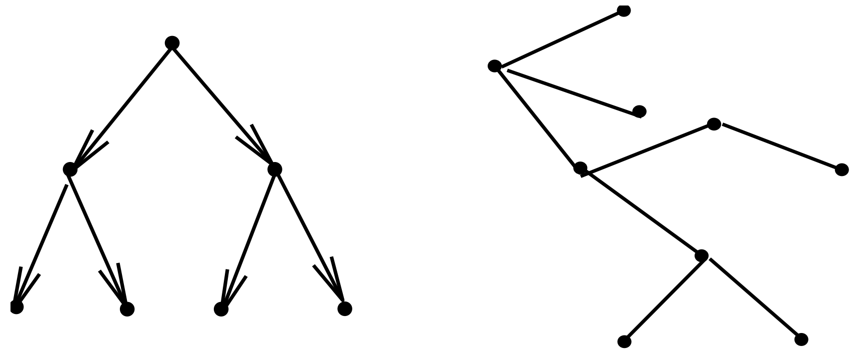
Таке дерево є неорієнтованим ациклічним графом, тому в ньому всі шляхи – прості.

Поняття *орієнтованого* дерева відрізняється від ациклічного графа.

Визначення 3.3.4. Зв'язний орграф, що не містить циклів, в якому тільки одна вершина не має вхідних дуг, а всі інші вершини мають по одній дузі, що входить, називається *орієнтованим* , або *спрямованим деревом*.

Визначення 3.3.5. Вершина, яка не має вхідних дуг, називається *коренем* дерева. Вершини, які не мають дуг, що виходять, називаються *кінцевими*, або *термінальними*, або *листям*. Проміжні вершини, що лежать між коренем і листям, називаються *транзитними.*

Орієнтовані дерева часто зображують без стрілок, попередньо обумовивши, що це зростаюче вниз (або вгору) дерево. На рис. 3.26, а) зображено зростаюче вниз дерево, на рис. 3.26, б) – неорієнтоване дерево.



а) *б)*

Рис. 3.26. *Приклади дерев.*

Наступна теорема описує основні властивості дерев.

Теорема 3.3.2.

1. У будь-якому дереві є, принаймні, дві кінцеві вершини (вершини ступеня 1).

2. Між будь-якими двома вершинами дерева є рівно один шлях.

3. Число ребер у дереві з n вершинами дорівнює n -1.

Доведення. 1). Оскільки в дереві всі шляхи - прості, то в ньому є принаймні один максимальний шлях, тобто шлях, який не можна продовжити. Кінці цього шляху і є кінцевими вершинами. (Зауважимо, що в довільному ациклічному орграфе теж є максимальні шляхи; їх кінцями є стоки. Однак стік може мати ступінь, більше одиниці. В цьому випадку продовжити з нього шлях не можна не тому, що немає іншого інцидентного йому ребра, а тому, що інші ребра - теж входять, і вийти по них зі стоку не можна.)

2). Наявність шляху між будь-якою парою вершин випливає зі зв'язності дерева, а єдиність цього шляху – з того, існування двох шляхів між парою вершин завжди створює цикл.

3). Третій пункт теореми найпростіше довести, ввівши процедуру перетворення неориентированного дерева в орієнтоване. Виберемо в дереві довільну вершину. Назвемо її *коренем*. Ребра, інцидентні кореню, орієнтуємо в напрямку від кореня. Для кожної вершини v_i, що є кінцем одного з цих ребер, орієнтуємо інші інцідентні їй ребра в напрямку від v_i. Продовжуємо цю процедуру до тих пір, поки не будуть досягнуті кінцеві вершини. В силу єдиності шляху між вершинами жодна вершина не буде досягнута двічі (тобто не доведеться орієнтувати вже орієнтовані ребра), а в силу зв'язності дерева все вершини будуть досягнуті. З цієї процедури видно, що корінь не має вхідних ребер (його напівстепень заходу дорівнює 0), а кожна з інших n-1 *вершин* має одне вхідне ребро. Оскільки всі ребра є вхідними для якоїсь вершини, то звідси і випливає п.3 теореми. □

З одного неориєнтованого дерева з n вершинами можна отримати рівно n різних орієнтованих дерев, так як вибір різних коренів завжди дає різні ордерева. Це випливає з того, що з кореня досяжні всі інші вершини, сам же корінь недосяжний ні з якої іншої вершини. Іншими словами, орієнтоване дерево завжди односторонньо зв'язно. Однак різні ордеревья, отримані з одного і того ж дерева, можуть виявитися ізоморфними.

Приклад. Якщо вихідне дерево - простий ланцюг, то вибір в якості кореня кінців цього ланцюга дасть два ізоморфні орієнтовані ланцюги, а якщо цей ланцюг містить парне число вершин і, отже, два центри, то вибір цих центрів дасть два ізоморфних ордерева з двома шляхами, що починаються з кореня.

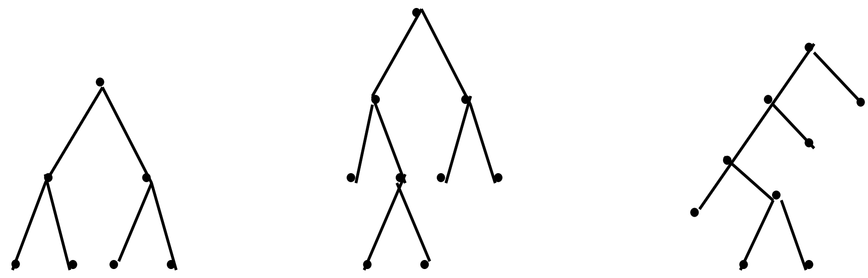
Визначення 3.3.6. Дерево, в якому кожна вершина має по дві вихідних дуги або не має зовсім, називається *двійковим*, або *бінарним* деревом.

Визначення 3.3.7. Нехай n – кількість кінцевих вершин в бінарному дереві, d– довжина шляху від кореня дерева до кінцевої вершини і m – натуральне число, тоді дерево називається *збалансованим*, якщо:

1) або $n = 2^m$ і тоді $d = m$,

2) або $2^m < n < 2^{m+1}$, і тоді $d = m$ або $d = m + 1$.

На рис. 3.27, *а*), *б*) дерева збалансовані, *в*) - незбалансоване дерево.



$n = 4$
$d = 2$
$n = 2^m = 2^2$
$d = m$

$2^m < n < 2^{m+1}$

$2^2 < 5 < 2^3 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} d = 2 \\ d = 3 \end{array}\right.$

$2^2 < 5 < 2^3$
$d = 1$
$d = 2$
$d = 4$

а) б) в)

Рис. 3.27. *Приклади дерев.*

Дерева відображають ієрархічні структури, наприклад, за допомогою дерева можна уявити ієрархію службових положень в деякій організації, ієрархію понять деякої предметної області, родинні стосунки (генеалогічне дерево) і т.п.

Бінарні орієнтовані дерева мають велике значення в програмуванні для представлення складних структур даних і побудови алгоритмів їх обробки. Зручним способом уявлення арифметичного виразу є польський запис, де операції передують операндам, на відміну від зазвичайного запису. Наприклад, функція $f\ (x,\ y) = x{+}y$ в польскому запису має вигляд: $+\ (\ x\ ,\ y\ )$ або просто $+\ xy$. На рис. 3.28 показано дерево арифметичного виразу $(a\ +\ b)\ \times(a\ -\ b)$. Для перетворення його в польський запис $\times+\ ab\ -\ ab$ використовується алгоритм обходу дерева зверху вниз і зліва направо, який показаний на рис. 3.28.

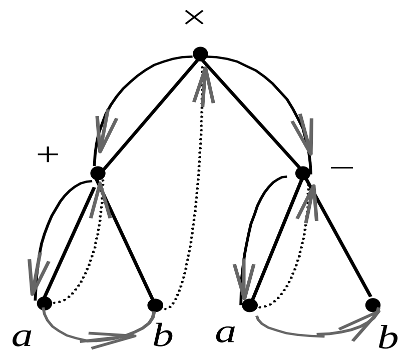


Рис. 3.28. *Обхід дерева.*

Спочатку вибирається значення, що зберігається в корені дерева (воно завантажується в стек). Потім відбувається спуск по лівій гілці до термінальної вершини. Всі значення, що лежать на цьому шляху, записуються після кореневого: $\times + a$. Дійшовши до термінальної вершини, ми піднімаємося до першої знизу транзитної вершини, і спускаємося по правому піддереву; отримуємо $\times + ab$. Послідовно повторюючи цей процес, ми дійдемо знову до кореня дерева, після чого спускаємося по правому піддереву за тим же алгоритмом. В результаті отримуємо вираз: $\times + ab - ab$.

Питання до розділу 3.

1. Основні поняття для неорієнтованих графів.
2. Діаметр, радіус, центри і периферії графа.
3. Ейлеров обхід графа. Теорема Ейлера. Гамільтонів цикл.
4. Основні поняття для орієнтованих графів
5. Досяжність в орграфі. Типи зв'язності орграфів. Критерії зв'язності орграфів.
6. Поняття вершинної бази, компоненти сильної зв'язності, конденсації орграфів. Процедура Кеніга знаходження вершинної бази орграфів.
7. Використання матриць для дослідження орграфів.
8. Ациклічні графи. Топологічне сортування.
9. Дерева. Орієнтовані дерева. Збалансовані дерева.
10. Планарні і плоскі графи. Дослідження планарності графів. Теорема Понтрягіна-Куратовского.
11. Розфарбування графів. Гіпотеза 4-х фарб.

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

Базова література

1. Бардачов Ю.М. Дискретна математика / Ю.М.Бардачов, Н.А.Соколова, В.Є.Ходаков – К.: Вища школа, 2002.
2. Кузнецов О. П. Дискретная математика для инженера. Учебное пособие 6-е изд., стер. / О.П.Кузнецов – СПб.: Издательство «Лань», 2009.
3. Лавров И. А. Задачи по теории множеств, математической логике теории алгоритмов / И.А. Лавров, Л.Л. Максимова – М. : Наука, 1975.
4. Нікольський Ю.В. Дискретна математика / Ю.В.Нікольський, В.В.Пасічник, Ю.М.Щербина – К.: Видавнича група BHV, 2007.
5. Новиков Ф.А. Дискретная математика для программистов. 2ое издание. Учебник для ВУЗов / Ф.А.Новиков – СПб.: Питер, 2006.
6. Таран Т. А. Основы дискретной математики. Учебное пособие / Т.А.Таран – К.: Просвіта, 1998.
7. Темнікова О.Л. Дискретна математика: практикум з дисципліни «Дискретна математика» для студентів спеціальності 113 «Прикладна математика» [Електронне видання] / О.Л.Темнікова – К. : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2018.

Допоміжна література

8. Берж К. Теория графов и ее приложения / К.Берж – М.: Изд. Иностр. Лит., 1962.
9. Биркгоф Г. Теория решеток / Г. Биркгоф – М.: Наука. 1984.
10. Горбатов В. А. Основы дискретной математики / В.А. Горбатов – М.:Высш. шк, 1986.
11. Клини С. К. Введение в метаматематику / С.К. Клини – М.: Мир. 1957.
12. Коэн П. Дж. Теория множеств и континуум-гипотеза / П.Дж. Коєн – М.: Мир. 1973.
13. Куратовский К. Теория множеств / К. Куратовский, А. Мостовский – М.: Мир. 1970.

14. Нефедов В. Н. Курс дискретной математики / В.Н.Нефедов, В.А.Осипова – М.: МАИ, 1992.

15. Оре О. Теория графов / О. Оре – М.: Наука, 1968.

16. Столл Р. Множество, логика, аксиоматические теории / Р. Столл – М.: Просвещение, 1968.

17. Харари Ф. Теория графов / Ф. Харари – М.: Мир, 1973.

18. Шапорев С.Д. Дискретная математика. Курс лекций и практических занятий / С.Д. Шапроев – СПб.: “БХВ – Петербург”. – 2006.

19. Яблонский С.В. Введение в дискретную математику / С.В. Яблонский – - М.: Наука. 1979.