МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національній авіаційний університет

В.С. Єременко, Ю.В. Куц,
В.М. Мокійчук, О.В. Самойліченко

СТАТИСТИЧНИЙ АНАЛІЗ ДАНИХ ВИМІРЮВАНЬ

*Рекомендовано Міністерством освіти і науки, молоді та спорту України
як навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів,
які навчаються за напрямом підготовки
«Метрологія та інформаційно-вимірювальні технології»*

Київ 2013

УДК 006.91:519.22 (075.8)
ББК Ж10в631.8я7
С781

Рецензенти: *Ю.О.Скрипник* – заслужений діяч науки і техніки України, д-р техн. наук, професор (Київський національний університет технологій та дизайну);
А.Д.Ніженський – д-р техн. наук, професор (Інститут електродинаміки НАНУ);
І.П. Захаров – д-р техн. наук, професор (Харківський національний університет радіоелектроніки);

Рекомендовано Міністерством освіти і науки, молоді та спорту України
(*лист 1/11-20005 від 25.12.2012*)

С781 Статистичний аналіз даних вимірювань: навч. посіб. / Єременко В.С., Куц Ю.В., Мокійчук В.М., Самойліченко О.В. – К.: НАУ, 2013.– 320 с.

ISBN 978-966-188-344-3

Присвячено аналізу експериментальних даних методами математичної статистики. Послідовно викладено сучасні методи аналізу розподілів імовірності випадкових величин і кутів, оцінювання параметрів розподілів, перевірки статистичних гіпотез, оцінювання зв'язків між випадковими величинами.

Ґрунтовно висвітлено методи оцінювання та перевірки гіпотез про значення параметрів розподілів імовірності які часто використовуються в практиці експериментальних досліджень.

Для студентів напряму підготовки «Метрологія та інформаційно-вимірювальні технології»

УДК 006.91:519.22 (075.8)
ББК Ж10в631.8я7

ISBN 978-966-188-344-3

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

Статистичне оброблення результатів вимірювань займає важливе місце в структурі підготовки фахівців-метрологів. Актуальність ґрунтовної підготовки фахівців цього напряму постійно зростає, оскільки по-перше, застосування методів вимірювань поширюється на нові сфери діяльності людини, у яких об'єкти вимірювань мають чітко виражену імовірнісну природу. Це стосується, наприклад, вимірювань для нанотехнологій, вимірювань у неруйнівному контролі, медицині, соціології тощо. По-друге, науково-технічний прогрес постійно потребує розширення діапазонів визначення різних фізичних величин, що, в свою чергу, потребує оцінювання граничних можливостей методів і засобів вимірювань та обґрунтування необхідної точності вимірювань на основі коректного застосування методів математичної статистики. По-третє, удосконалення форм і методів оброблення та подання результатів вимірювань, що знаходить відображення в нових стандартах і нормативних документах, потребує знань та певного досвіду практичного застосування нових для галузі вимірювань методів та критеріїв математичної статистики. По-четверте, у науково-технічній літературі відсутні відомості про потужність різних критеріїв перевірки статистичних гіпотез і їх залежності від обсягу вибірок. Разом з цим умови проведення переважної більшості вимірювань і випробувань не дозволяють отримувати вибірки значних обсягів. За таких обставин застосування одного критерію для перевірки певної статистичної гіпотези може призвести до помилкових висновків. Тому отримання надійних статистичних оцінок потребує комплексного застосування декількох різних критеріїв для перевірки однієї гіпотези. Це також передбачає підвищення рівня обізнаності і розширення кругозору спеціалістів-метрологів щодо застосування методів математичної статистики.

Багаторічний педагогічний досвід роботи авторів на кафедрі інформаційно-вимірювальних систем Національного авіаційного університету та курсах підвищення кваліфікації фахівців-метрологів засвідчив, що переважну більшість науково методичних видань у предметній галузі присвячено суто теоретичним питанням, розгляду й обґрунтуванню принципів та методів математичної статистики, узагальненого статистичного підходу до оцінювання результатів вимірювань та випробувань. Наведені в них приклади не охоплюють усього різноманіття статистичних методів, які рекомендовані державними і міжнародними стандартами для оброблення даних вимірювань, що ускладнює їх використання метрологами у своїй практичній діяльності. Тому автори ставили головною метою посібника ознайомлення читача і надання йому численних прикладів використання апарату математичної статистики для різних задач вимірювань та випробувань, окреслення меж застосування певних критеріїв, наведення застережень щодо можливостей отримання хибних висновків. Отже девізом підручника цілком можуть бути слова: «роби як я»!

Автори щиро вдячні рецензентам: професору кафедри автоматизації виробництва та комп'ютерних систем Київського національного університету технологій та дизайну, заслуженому діячу науки і техніки України доктору технічних наук, професору Ю.О. Скрипнику, старшому науковому співробітнику відділу Інституту електродинаміки НАН України доктору технічних наук, професору А.Д. Ніженському та професору кафедри метрології та вимірювальної техніки Харківського національного університету радіоелектроніки доктору технічних наук, професору І.П. Захарову за конструктивну критику, корисні зауваження та рекомендації, які сприяли поліпшенню якості посібника та прискоренню його виходу на фінішний етап.

Передмова і розділ 8 написаний професором Ю.В. Куцом, вступ і розділи 1 та 5 професором В.С. Єременко, розділи 2–4, 6 і 7 написані доцентом В.М. Мокійчуком та доцентом О.В. Самойліченко.

Автори будуть вдячні всім читачам, які надішлють свої зауваження та побажання за адресою: Україна, 03680, Київ-680, просп. космонавта Комарова 1, корп. 11, к. 407, кафедра інформаційно-вимірювальних систем НАУ; E-mail: ivs@nau.edu.ua.

УМОВНІ ПОЗНАЧЕННЯ ТА СКОРОЧЕННЯ

X, Y – випадкова величина

x, y – результат спостереження випадкової величини X, Y

$F(x)$ – інтегральна функція розподілу випадкової величини X

$p(x)$ – функція щільності розподілу імовірності випадкової величини X

x_i – варіанта, оцінка i-ї вхідної величини

$x_{[i]}$ – i-та порядкова статистика, варіаційний ряд

$x_{i,k}$ – k -й результат вимірювання i-ї вхідної величини

$\overline{x}_i$ – середнє арифметичне значення i-ї вхідної величини

y – оцінка вимірюваної величини

Δy – оцінка сумарної похибки вимірюваної величини

$\Delta y(P)$ – довірчий інтервал сумарної похибки результату вимірювання для довірчої імовірності P

$r(x_i, x_j)$ – коефіцієнт кореляції Пірсона оцінок i-ї та j-ї вхідних величин

r_s – коефіцієнт кореляції Спірмена

r_k – коефіцієнт кореляції Кенделла

$\mathbf{D}(x)$ – оператор дисперсії

D – оцінка дисперсії

$\mathbf{M}(x)$ – оператор математичного сподівання

μ – математичне сподівання

$\hat{\mu}$ – оцінка математичного сподівання

$\mathbf{Med}(x)$ – оператор медіани

Me – оцінка медіани

$\mathbf{Mod}(x)$ – оператор моди

Mo – оцінка моди

$\mathbf{L}(x)$ – оператор вибіркового кругового середнього кута

s – СКВ, СКВ випадкової складової похибки вимірювання

$\hat{s}$ – оцінка СКВ

$s(x_i)$ – СКВ одиничного вимірювання при багатократних вимірюваннях i -ї вхідної величини

$s(\overline{x}_i)$ – СКВ середнього арифметичного значення за багатократних вимірювань i-ї вхідної величини

u – стандартна невизначеність результату вимірювання

u_A – стандартна невизначеність, оцінена за типом А

u_B – стандартна невизначеність, оцінена за типом В

$u(x_i)$ – стандартна невизначеність оцінки *i*-ї вхідної величини

u_i – стандартна невизначеність *i*-ї вхідної величини

u_c – сумарна (комбінована) стандартна невизначеність

U – розширена невизначеність

U_P – розширена невизначеність для рівня довіри *P*

K – коефіцієнт покриття (фактор покриття) для визначення розширеної невизначеності

$t_P(v)$ – квантиль розподілу Стьюдента для довірчої імовірності (рівня довіри) *P* і кількості степенів вільності *v*

v, f – кількість степенів вільності

v_i – кількість степенів вільності для i-ї вхідної величини

v_{eff} – ефективна кількість степенів вільності

$\hat{v}_{eff}$ – оцінка ефективної кількості степенів вільності

z_P, u_P – квантиль розподілу Гаусса для довірчої імовірності *P*

z_α, u_α – квантиль розподілу Гаусса для рівня значущості α

b_{i-} – нижня межа відхилення *i*-ї вимірюваної величини від результату вимірювань

b_{i+} – верхня межа відхилення *i*-ї вимірюваної величини від результату вимірювань

b_i – симетричні межі відхилення *i*-ї вимірюваної величини від результату вимірювань

МНК – метод найменших квадратів

СКВ – середньоквадратичне відхилення

ЩРІ – щільність розподілу імовірності

ВКС – вибіркове кругове середнє

ВДВ – вибіркова довжина вектора

ВКД – вибіркова кругова дисперсія

КСВ – кругове стандартне відхилення

ВКМ – вибіркова кругова медіана

ВМ – вибіркова мода

ВКР – вибірковий круговий розмах

ВСТУП

Розвиток метрології на сучасному етапі супроводжується стрімким розширенням галузей застосування результатів вимірювань та збільшенням кількості відповідних нормативних документів. Значного поширення набули система акредитації вимірювальних і випробувальних лабораторій та система сертифікації продукції та послуг. Це зумовлює значне зростання ролі метрології та вимірювань особливо з огляду на точність та достовірність отримуваних результатів. Одним з основних шляхів забезпечення належної якості результатів вимірювань є коректне застосування методів математичної статистики під час опрацювання даних вимірювань. Під час розроблення посібника автори намагались систематично викласти основні положення та процедури математичної статистики, які застосовуються для вирішення широкого кола завдань, пов’язаних з вимірювальним експериментом.

Навчальний посібник має чітку практичну спрямованість, майже всі положення статистичного опрацювання даних, проілюстровано числовими прикладами та детальними поясненнями. Для кращого розуміння і засвоєння матеріалу та набуття практичних навичок у кожному розділі передбачено контрольні запитання та завдання. Посібник дозволяє опанувати сучасні методи статистичного аналізу даних вимірювань на рівні, достатньому для самостійного застосування цих методів у практичній та науковій діяльності.

Матеріал посібника структурований і складається з восьми розділів, які охоплюють основні статистичні методи, що використовуються у метрологічній практиці під час опрацювання даних вимірювальних експериментів.

У першому розділі викладено основні поняття та визначення математичної статистики: спостереження, вибірка, генеральна сукупність, вибіркові статистичні характеристики, порядкова статистика, а також методи їх оцінювання. Розглянуто поняття точкової та інтервальної оцінок характеристик випадкових величин, наведено показники їх якості та методи визначення, а також поняття емпіричного розподілу, гістограми, полігону частот тощо.

Другий розділ присвячено методам оцінювання статистичних характеристик експериментальних даних за умови, що закон розподілу відомий. Розглянуто методи точкового та інтервального оцінювання параметрів закону розподілу Гаусса, рівномірного і трикутного, Вейбула та ін. Окрему увагу приділено методам оцінювання характеристик центра та розсіювання вибіркових даних для випадку відсутності апріорної інформації про закон розподілу.

У третьому розділі розглянуто важливе питання визначення закону розподілу даних вимірювань. Наявність інформації про закон розподілу даних вимірювань дозволяє коректно підсумовувати похибки або складові невизначеності вимірювань та визначати відповідні довірчі інтервали; обґрунтовувати достовірність результатів контролю та випробувань. Розглянуті у розділі методи поділено на дві групи, зокрема методи з групуванням вибіркових даних та без групування. Методи з групуванням даних ґрунтуються на аналізі варіаційних рядів, як засоби аналізу використовують емпіричний закон розподілу, гістограму або полігон частот, а для прийняття рішення про відповідність теоретичної моделі закону розподілу експериментальним даним – критерії згоди Пірсона та Колмогорова–Смірнова. Методи без групування даних ґрунтуються на спеціалізованих (до конкретного закону розподілу) параметричних критеріях згоди.

Четвертий розділ присвячено методам перевірки статистичних гіпотез про параметри та характеристики вибіркових даних. Розглянуті у розділі методи застосовуються для виконання численних метрологічних процедур, таких як оцінювання показників правильності та прецизійності результатів, методів та засобів вимірювань, оцінювання збіжності та відтворюваності результатів вимірювань за різних умов використання (різними методами, засобами та у різних лабораторіях), валідації методів вимірювань та випробувань, виявлення результатів з надмірними похибками тощо.

У п'ятому розділі наведено основні процедури кореляційного аналізу. Кореляційний аналіз застосовують для визначення наявності та ступеня стохастичного взаємозв'язку між складовими похибки або невизначеності вимірювань; виявлення впливу різних факторів на процес вимірювання; обґрунтування рівнянь непрямих вимірювань тощо. У розділі розглянуто параметричні та непараметричні методи кореляційного аналізу.

Кореляційний аналіз дозволяє виявити та оцінити лише ступінь стохастичного зв'язку. Характер та параметри такої залежності визначаються методами регресійного аналізу, якому присвячено шостий розділ посібника. Регресійний аналіз широко застосовують під час опрацювання результатів сумісних вимірювань, побудови градуювальник характеристик або функцій перетворення засобів вимірювань, оцінювання якості їх калібрування, а також для усунення прогресуючих систематичних похибок з ряду спостережень вимірювального експерименту. Окреслено проблему наближень результатів експериментів математичними моделями, суть апроксимації на основі методу найменших квадратів лінійними та нелінійними функціями та спрощені методи побудови залежності.

Сьомий розділ присвячено вибраним питанням дисперсійного аналізу, який дозволяє кількісно оцінити вплив певних факторів на результати вимірювань. Така задача виникає під час проведення моніторингу процесів вимірювань та випробувань; опрацювання результатів раундів міжлабораторних порівнянь; обґрунтування моделі вимірювання тощо. Розглянуто найбільш поширені одно- та двофакторний дисперсійний аналіз.

Численні природні явища та процеси мають властивість циклічності. Для досліджень таких явищ застосовують методи кутових вимірювань. Специфічним питанням статистичного опрацювання результатів кутових вимірювань присвячено восьмий розділ посібника, у якому наведено ймовірнісну модель кута, закони розподілів імовірності випадкових кутів, вибіркові оцінки характеристик розподілів кутових величин та методику опрацювання результатів кутових вимірювань.

Більшість статистичних процедур узгоджено з існуючою національною та міжнародною нормативною базою в галузі статистичного опрацювання експериментальних даних, даних вимірювань, випробувань та метрології.

Автори мають надію, що посібник стане корисним студентам, аспірантам та працівникам вимірювальних і випробувальних лабораторій.

1. ОСНОВИ СТАТИСТИЧНОГО ОПРАЦЮВАННЯ ДАНИХ ВИМІРЮВАНЬ

Відомо, що повну інформацію про випадкову величину містить закон розподілу ймовірності цієї величини. Установлення закону розподілу випадкової величини за результатами експериментів або спостережень – основне завдання математичної статистики. Можна стверджувати, що теорія ймовірності і математична статистика вирішують взаємнообернені завдання. Теорія ймовірності за відомими законами розподілу передбачає результати випадкових експериментів (наскільки можливий той або інший результат, чи є залежність величин і її ступінь тощо). Математична статистика за результатами експерименту намагається встановити закони розподілу, функції залежності випадкових величин, рівність або відмінності їх розподілів та ін.

1.1. Спостереження, вибірка, варіаційний ряд

Під час дослідження явищ навколишнього середовища, контролю якості продукції або статистичного регулювання технологічних процесів завжди застосовують спостереження (результати вимірювань) досліджуваного об’єкта. Як спостереження можуть розглядатись такі процеси як вимірювання, випробування, аналізи тощо. ***Результатом спостереження*** є число (або множина чисел, іменованих або неіменованих), яке кількісно характеризує певну властивість об’єкта дослідження. Відповідно ***статистичні дані*** – це результати спостережень.

З огляду на теорію вимірювань та чинну нормативну документацію (НД) [2] слід розрізняти поняття «результат спостереження» і «результат вимірювання». ***Результат вимірювання*** фізичної величини – це значення величини отримане шляхом її вимірювання. У сучасних міжнародних документах [3] для результату вимірювання прийнято узагальнене поняття – «результат вимірювання (випробування, контролю або аналізу)». Відповідно ***результат спостереження*** – зафіксоване за показувальним пристроєм засобу вимірювання значення величини в заданий момент часу.

Під ***спостереженням*** розуміють операції, що проводяться під час вимірювання і що мають на меті своєчасну і правильну фіксацію відліку. Результат спостереження містить в собі всі види похибок, властивих вимірювальній процедурі. Застосовувати термін «вимірювання» замість терміну «спостереження» у нормативному документі [2] не рекомендується.

Отже, результат спостереження можна обрати як результат вимірювання у випадку вимірювань з разовими спостереженнями. Якщо вимірювання проводиться з багаторазовими спостереженнями, то результат отримують шляхом опрацювання ряду спостережень відповідно до встановленої методики, яка, як правило, ґрунтується на статистичних методах.

Завдання математичної статистики полягає в тому, щоб на підставі знання деяких властивостей підмножини елементів, узятих із деякої множини, висловити деякі твердження про властивості цієї множини – генеральної сукупності. Сукупність елементів, що мають деяку спільну ознаку, називають ***генеральною***. Наприклад, якщо ознака людська (національність, освіта, коефіцієнт інтелекту IQ тощо), то генеральна сукупність – все населення Землі. Це дуже велика сукупність, тобто кількість елементів у сукупності n велика. Кількість елементів називається ***обсягом сукупності***. Таким чином, уся множина об’єктів, що підлягає дослідженню, є ***генеральною сукупністю***. Сукупності можуть бути кінцевими і нескінченними. У наведеному прикладі генеральна сукупність – усі люди – хоч і дуже велика, проте звичайно скінчена. Генеральна сукупність – усі зірки, – напевно, нескінченна. У теоретичних висновках обсяг генеральної сукупності вважають нескінченним.

У теорії похибок випадкові величини розглядаються зазвичай як результат прямих вимірювань певної фізичної величини невідомого, але незмінного розміру, спотворений випадковими похибками. Кожен результат спостереження можна вважати елементом деякої необмеженої генеральної сукупності. У цій сукупності незліченна кількість результатів розподілена за ймовірністю під впливом похибок у приладах, неуважності експериментатора, випадкових завад у самому явищі та ін.

Якщо провести n повторних вимірювань випадкової величини X, тобто отримаємо n конкретних різних числових значень x_1, x_2,…, x_n, то цей результат експерименту можна вважати вибіркою обсягу n з гіпотетичної генеральної сукупності результатів одиничних вимірювань.

Вибірка – це одна або декілька вибіркових одиниць, узятих з генеральної сукупності і призначених для отримання інформації про неї [1]. Елементи вибірки називають ***варіантами***. Вибірковою одиницею може бути одна з конкретних одиниць, з яких складається генеральна сукупність, або певна кількість продукції, матеріалу або послуг, які створюють сукупність і взяті з одного місця, в один час для формування частини вибірки. Зрозуміло, що для задач, які розглядаються у посібнику, одиницею є результат одного спостереження, а вибіркою – сукупність результатів спостережень під час проведення вимірювання з багаторазовими спостереженнями. Вибірка має достатньо повно відображати особливості всіх об’єктів генеральної сукупності, щоб отримувані оцінки були достовірними, тобто вона має бути репрезентативною (представницькою).

Вибірка буде ***репрезентативною***, якщо відбір елементів у вибірку проводиться випадково і незалежно. Це означає, що всі елементи генеральної сукупності мають однакову ймовірність потрапити у вибірку. В жодному разі не слід покладатися на інтуїцію. Варто зазначити: якщо вибірка буде не репрезентативною (її називають зміщеною), то зі збільшенням її обсягу може зменшитися точність або можуть бути зроблені помилкові висновки.

Функції результатів спостережень $f(x_1, x_2, \ldots x_i \ldots x_n)$, що використовуються, зокрема, для оцінювання параметрів розподілів і (або) для перевірки статистичних гіпотез, називають ***статистиками*** або ***статистичними оцінками***. Якщо в імовірнісній моделі результати спостережень розглядаються як випадкові величини (або випадкові елементи), то статистики як функції випадкових величин (елементів) самі є випадковими величинами (елементами). Статистики, що є ***вибірковими*** аналогами характеристик випадкових величин (математичного сподівання, медіани, дисперсії, моментів та ін.) і використовувані для оцінювання цих характеристик, називають ***статистичними характеристиками***. Термін «вибірковий» будемо застосовувати, коли характеристики оцінюються за вибіркою.

В імовірнісній моделі вибірки спостережувані значення зазвичай розглядають як реалізацію незалежних однаково розподілених випадкових величин $X_1(\omega), X_2(\omega), ..., X_n(\omega)$, де ω – елементарна подія з простору Ω. При цьому вважають, що отримані під час спостережень конкретні значення ($x_1, x_2, ..., x_n$) відповідають певній елементарній події $\omega = \omega_0$.

Під час повторних спостережень будуть отримані інші значення, які відповідатимуть іншій елементарній події $\omega = \omega_1$. Мета опрацювання статистичних даних полягає в тому, щоб за наслідками спостережень, що відповідають елементарній події $\omega = \omega_0$, зробити висновок про ймовірнісну міру P і результати спостережень за різних можливих ω.

Застосовують також інші, складніші ймовірнісні моделі вибірок. Наприклад, цензуровані вибірки відповідають випробуванням, що проводяться протягом певного проміжку часу. При цьому для частини виробів вдається виміряти час напрацювання на відмову, а для інших лише констатується, що час напрацювання на відмову для них більший від часу випробування. Для вибірок іншого виду відбір об'єктів можна проводити у декілька етапів. Наприклад, для вхідного контролю реактивів можна спочатку відбирати коробки, у відібраних коробках – пакунки, у вибраних пакунках – скляні колби з реактивом. У цьому випадку маємо три ступені відбору. Зрозуміло, що ця вибірка матиме інші властивості, аніж проста випадкова вибірка із сукупності колб.

Варіаційним рядом $x_{[1]}, x_{[2]}, ... x_{[n]}$ називається вибірка, записана в порядку зростання її варіант $x_1 \le x_2 \le ... \le x_n$. Надалі елементи варіаційного ряду позначатимемо як $x_{[i]}$.

У випадку дослідження неперервної випадкової величини, або аналізу вибірки значного обсягу ($n > 100$) розбивають варіаційний ряд на класи (інтервали) і отримують інтервальний варіаційний ряд. Ширину інтервалів Δx визначають за формулою

$$\Delta x = \left(x_{\max} - x_{\min}\right) / k ,$$

де $x_{\max}$ і $x_{\min}$ – найбільше і найменше значення варіант вибірки; k – кількість класів.

Оптимальна кількість класів залежить від обсягу вибірки. Для визначення кількості класів можна користуватися табл. 1.1.

Таблиця 1.1

Обсяг вибірки *n*	25...40	40...60	60...80	100...200	200...1000
Кількість класів *k*	5...6	6...8	7...10	8...12	10...15

Припустимо, що виконано n вимірювань випадкової дискретної величини X і отримано k різних значень $x_1, x_2, ..., x_k$. При цьому значення x_1 спостерігалося m_1 разів, x_2 – m_2 разів,…, $x_k - m_k$ разів. Отже, з нескінченної гіпотетичної генеральної сукупності результатів вимірювань виконано вибірку обсягом $n = m_1 + m_2 + ... + m_k$. Числа $m_1, m_2, ..., m_k$ є ***частотами*** спостережуваних значень $x_1, x_2, ..., x_k$. Величини $\widetilde{m}_1 = m_1 / n$, $\widetilde{m}_2 = m_2 / n, ..., \widetilde{m}_k = m_k / n$ називають ***відносними частотами*** варіант x_i. Зрозуміло, що $\widetilde{m}_1 + \widetilde{m}_2 + ... + \widetilde{m}_k = 1$. Будемо вважати, що варіанти $x_1, x_2, ..., x_k$ розміщені в порядку зростання, тобто побудовано варіаційний ряд (перший рядок). Отримані результати зручно подати у табличному вигляді (табл. 1.2). Другий рядок таблиці являє собою варіаційний ряд для частот, третій – для відносних частот, четвертий – для кумулятивних (нагромаджених) відносних частот.

Таблиця 1.2

x_i	x_1	x_2	$\dots$	x_i	$\dots$	x_k
m_i	m_1	m_2	$\dots$	m_i	$\dots$	m_k
$\widetilde{m}_i$	m_1 / n	m_2 / n	$\dots$	m_i / n	$\dots$	m_k / n
$F_i = \sum_{j=1}^{i} \widetilde{m}_j$	m_1 / n	$\dfrac{m_1 + m_2}{n}$	$\dots$	$\sum_{j=1}^{i} m_i / n$	$\dots$	$\sum_{j=1}^{k} m_j / n = 1$

Якщо кількість варіант k не дуже велика, то для отримання більш наочного уявлення про розподіл випадкової величини X будують полігони частот. Для цього на осі абсцис відкладають значення варіант $x_1, x_2, ..., x_k$, а на осі ординат – відповідні значення частот $m_1, m_2, ..., m_k$ або відносних частот $\widetilde{m}_1, \widetilde{m}_2, ..., \widetilde{m}_k$ або кумулятивних відносних частот F_i. Очевидно, що полігон відносних частот дає уявлення про розподіл ймовірностей, а графік кумулятивних відносних частот можна назвати ***емпіричною функцією розподілу***. Ця функція виражає залежність між значеннями кількісної ознаки і нагромадженою частотою. Отже, емпіричною функцією розподілу $F_n(x)$ називається частка елементів вибірки, менших за x. Емпірична функція розподілу містить всю інформацію про результати спостережень.

Щоб записати вираз для емпіричної функції розподілу у вигляді формули, уведемо функцію $c(x, y)$ двох змінних:

$$c(x,y)=\begin{cases}0, & x\le y\\ 1, & x>y\end{cases}.$$

Випадкові величини, що моделюють результати спостережень, позначимо через $X_1(\omega), X_2(\omega), ..., X_n(\omega), \omega \in \Omega$. Тоді емпірична функція розподілу $F_n(x)$ набуде вигляду

$$F_n(x)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}c(x, X_i(\omega)).$$

Згідно із законом великих чисел для кожного дійсного числа x емпірична функція розподілу $F_n(x)$ збігається до функції розподілу $F(x)$ результатів спостережень, тобто

$$F_n(x)\to F(x),$$

якщо $n\to\infty$ (теорема В.І. Глівенка). (Далі для спрощення аргумент ω у позначенні випадкових величин випускатимемо).

Емпіричну функцію розподілу визначена на всій числовій осі. Очевидно, що $F(x) = 0$ для всіх $x < x_1$ і $F(x) = 1$ для всіх $x > x_k$. На інтервалі $x_1 < x < x_k$ функція $F(x)$ має вигляд східчастої монотонно зростаючої від 0 до 1 функції, такої, що $F(a) = P(X < a)$ (рис. 1.1)

У випадку інтервального варіаційного ряду частота дорівнює загальній кількості варіант у даному інтервалі. Всі інтервали, крім останнього, є напіввідкритими справа (наприклад, $[a_i; a_{i+1})$), а останній закритий $[a_{k-1}; a_k]$.

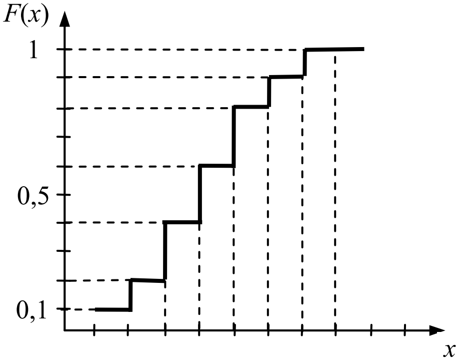


Рис. 1.1. Приклад емпіричної інтегральної функції розподілу ймовірності

Можна скласти таблицю інтервальних варіаційних рядів (табл. 1.1) у якій a_i – границі класових інтервалів.

Таблиця 1.1

Зведена таблиця інтервального варіаційного ряду

Номер класу	1	2	…	k
Класовий інтервал	$[a_0;a_1)$	$[a_1;a_2)$	…	$[a_{k1};a_k]$
Частота	m_1	m_2	…	m_k
Відносна частота	$\widetilde{m}_1 = m_1 / n$	$\widetilde{m}_2$	…	$\widetilde{m}_k$
Щільність відносної частоти	$p_1 = \widetilde{m}_1 / \Delta x$	p_2	…	p_k

Якщо на осі абсцис відкласти класові інтервали і над ними побудувати прямокутники з висотами, що дорівнюють відповідним щільностям $\widetilde{m}_i$ відносної частоти, то площа кожного прямокутника буде дорівнювати відносній частоті $S_i = \Delta x p_i = \Delta x \widetilde{m}_i / \Delta x = \widetilde{m}_i$. Отримана таким чином східчаста фігура називається ***гістограмою*** (рис. 1.2). Площа під гістограмою дорівнює одиниці, оскільки становить суму площ прямокутників $S = \sum_{i=1}^{k} S_i = \sum_{i=1}^{k} \widetilde{m}_i = 1$. Ламана лінія, яка проходить по осі абсцис, обводить гістограму і знову проходить по осі абсцис, є графіком емпіричної функції щільності розподілу ймовірності.

За умови нескінченно великої кількості класових інтервалів, частота $\widetilde{m}_i$ слугує наближенням імовірності потрапляння випадкової величини в i -й інтервал

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} p(x)dx \approx p_i \,.$$

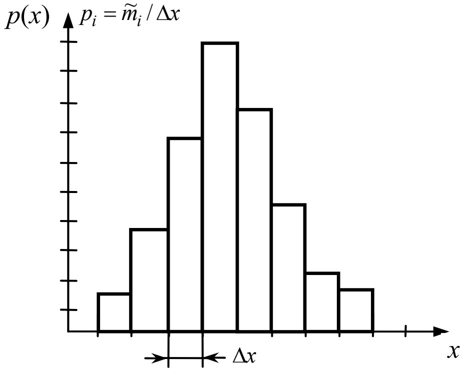


Рис. 1.2. Приклад емпіричної функції щільності розподілу ймовірності

Цю властивість використовують для порівняння теоретичного і емпіричного розподілів.

Вважатимемо щільність імовірності неперервної випадкової величини постійною всередині кожного інтервалу, а функцію розподілу на кожному інтервалі як лінійно зростаючу від початкового до кінцевого її інтервального значення.

1.2. Точкові оцінки характеристик ряду спостережень

Методологічною основою статистичного опрацювання результатів спостережень є вибірковий метод, сутність якого полягає у перенесенні результатів дослідження вибірки на генеральну сукупність. Така можливість обґрунтовується таким чином. Нехай генеральна сукупність має певний генеральний параметр Q. Проводиться серія з n незалежних вимірювань випадкової величини X з певним невідомим законом розподілу ймовірності. Результатом вимірювання є вибірка $\left(x_1,\ldots x_i,\ldots x_n\right)$ обсягу n.

Необхідно знайти оцінку генерального параметра Q, тобто

$$\hat{Q} = \varphi\left(x_1,\ldots x_i,\ldots x_n\right).$$

Як параметр Q можуть бути, наприклад, математичне сподівання, дисперсія, інші моменти випадкової величини вищих порядків, а також медіана та мода розподілів випадкової величини.

Вважається, що x_i отримують за незмінних умов, і всі результати спостережень незалежні.

Кожне з x_i, $j=\overline{1,n}$ є реалізацією генеральної сукупності X. Нагадаємо, що генеральна сукупність – це сукупність усіх можливих значень досліджуваної випадкової величини, тобто власне сама випадкова величина. Отже, кожне значення x_i можна розглядати як реалізацію випадкової величини X_i, а всю вибірку $(x_1,...x_i,...x_n)$ як реалізацію випадкового вектора $(X_1,...X_i,...X_n)$, у якому всі X_i, $j=\overline{1,n}$ незалежні і підпорядковані тому ж розподілу ймовірності, що й X. Такий перехід дозволяє вважати вибірковий параметр $\hat{Q}$ функцією випадкової величини

$$\hat{Q}=\varphi(X_1,...X_i,...X_n), \tag{1.1}$$

що дає змогу не лише знаходити аналітичні розв’язки (1.1), але й отримувати вирази для розподілів імовірності випадкових векторів $(X_1,...X_i,...X_n)$ та випадкових величин Q.

Оцінювання – це визначення наближеного значення невідомої характеристики або параметра розподілу (генеральній сукупності) іншою оцінюваною складовою математичної моделі реального (технічного, економічного, тощо) явища або процесу за результатами спостережень. При цьому параметром генеральної сукупності при вимірюванні може бути або число, або набір чисел (вектор), або функція. Оцінювання проводять за допомогою оцінок – статистик, що є основою для оцінювання невідомих параметрів розподілу вибіркових даних.

Точкове оцінювання – спосіб, що полягає в тому, що безпосередньо отримане у результаті оцінювання значення оцінки застосовується як невідоме значення параметра розподілу. Відповідно *точкова оцінка* параметра Q – статистична оцінка, яка визначається одним числом $\hat{Q}=y(x_1,\ldots x_i\ldots x_n)$ за вибіркою $x_1,\ldots x_i \ldots x_n$.

Позначимо невідомий параметр розподілу, тобто числову характеристику генеральної сукупності X, через Q, а оцінку невідомого параметра – $\hat{Q}$. Ця оцінка є функцією від вибірки. Функція вибірки $\hat{Q}$ називається точковою оцінкою, оскільки вона визначає одну точку на числовій осі. Наприклад, як оцінки положення центра розподілу використовуються вибіркове середнє, медіана, мода, середнє арифметичне максимальної та мінімальної варіант вибірки, геометричне середнє, гармонічне середнє тощо.

Наявність декількох методів оцінювання одних і тих же параметрів зумовлює потребу вибирати між цими методами. Ступінь відповідності Q його оцінці $\hat{Q}$ залежить не лише від обсягу n вибірки, але й від виду функції φ. Остання з вимог найкращого наближення $\hat{Q}$ до Q повинна задовольняти такі показники якості, як незсуненість, обґрунтованість та ефективність.

Незсуненість оцінки передбачає, що зі збільшенням кількості спостережень середнє значення оцінки прямує до значення оцінюваного параметра:

$$\lim_{n\to\infty}(\mathbf{M}(\hat{Q})) = Q,$$

де $\mathbf{M}(\cdot)$ – оператор математичного сподівання.

Якщо ця умова не виконується, оцінку називають зсуненою, а величину зсуву визначають як різницю $\mathbf{M}(\hat{Q}) - Q$.

Цей зсув може зумовлюватися як властивостями самої функції φ, так і похибками вимірювання, юстування, калібрування, невипадковим характером отриманої вибірки, чи комбінацією цих факторів. В іншому випадку він не залежить від обсягу вибірки і називається ***систематичною похибкою***. Наявність систематичних похибок унеможливлює оцінювання істинного значення вимірюваного параметра.

Оцінка називається ***обґрунтованою*** коли зі збільшенням обсягу вибірки $n \to \infty$ вона збігається з відповідним параметром генеральної сукупності, тобто для будь-якого як завгодно малого додатного числа ε виконується рівняння

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|Q - \hat{Q}\right| \le \varepsilon\right) = 1,$$

тобто розсіювання оцінки $\hat{Q}$ (як випадкової величини) зі зростанням n дедалі більше концентрується в околі істинного значення Q.

Вимога ***ефективності*** оцінки полягає в такому: для вибірок рівного обсягу ефективна оцінка повинна мати мінімальне розсіювання (вибіркову дисперсію). Якщо маємо

$$\mathbf{D}(\hat{Q}_1) \le \mathbf{D}(\hat{Q}_2),$$

то більш ефективною є оцінка $\hat{Q}_1$. У цьому виразі $\mathbf{D}(\cdot)$ – позначення оператора дисперсії.

Оцінкою математичного сподівання генеральної сукупності є вибіркове середнє

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i . \qquad (1.2)$$

Ця оцінка є незсуненою, обґрунтованою та ефективною.

Якщо вибіркові дані згруповані у варіаційний ряд, то оцінку математичного сподівання визначають за формулою

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} m_i x_i ,$$

де x_i – значення варіанти для варіаційного ряду або середина класового інтервалу для інтервального варіаційного ряду; m_i – частота варіанти або класова частота.

Вибіркова медіана Me також може слугувати оцінкою математичного сподівання генеральної сукупності (особливо у випадку симетричного закону розподілу генеральної сукупності). Для дисперсії вибіркової медіани справедливе граничне співвідношення

$$\lim_{n\to\infty}\left(\mathbf{D}(\hat{Me})\right) = \frac{\pi}{2}\mathbf{D}(\bar{x}) .$$

Зауважимо, що дисперсія оцінки медіани перевищує дисперсію вибіркового середнього $\bar{x}$ у $\pi/2$ разів, тобто оцінка вибіркового середнього є більш ефективною.

Вибіркова дисперсія $\hat{s}^2$ є оцінкою дисперсії генеральної сукупності:

$$\hat{s}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mathbf{M}(X))^2 .$$

Ця оцінка є незсуненою, але якщо дійсне значення математичного сподівання $\mathbf{M}(X)$ невідоме і використовується оцінка, то отримана оцінка дисперсії

$$\hat{s}_*{}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 ,$$

є зсуненою: $\hat{s}_*{}^2 = \dfrac{n-1}{n}\hat{s}^2$.

Незсунену оцінку дисперсії визначають за формулою

$$\hat{s}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 . \qquad (1.3)$$

де знаменник $(n-1) = \nu$ називається кількістю степенів вільності. Кількість степенів вільності в загальному випадку дорівнює різниці між кількістю значень вибірки, на підставі яких обчислено цю оцінку, мінус кількість констант, необхідних для обчислення оцінки і визначених на підставі тих самих значень. Наприклад, у рівнянні (1.2) втрачено один степінь вільності під час визначення вибіркового середнього на основі n спостережень.

У випадку, коли вибіркові дані подано інтервальним варіаційним рядом, для достатньо великого обсягу n і малої кількості класів, оцінка вибіркової дисперсії є завищеною (зсуненою) на величину $\Delta x^2/12$, де Δx – ширина класового інтервалу. Для розрахунку цієї оцінки вводять поправку Шеппарда:

$$\hat{s}'^2 = \hat{s}^2 - \Delta x^2/12 .$$

Незсуненою точковою оцінкою стандартного відхилення вибіркового середнього $\overline{x}$ буде статистика

$$\hat{s}_{\overline{x}} = \hat{s} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2} .$$

Ця статистика є характеристикою сукупності спостережень, тоді як $\hat{s}$ є характеристикою окремого спостереження.

Для знаходження точкових оцінок найчастіше використовують методи: метод максимальної правдоподібності, метод моментів, метод квантилів.

Метод максимальної правдоподібності був запропонований Р.А.Фішером у 1912 р. Він ґрунтується на принципі, згідно з яким кращою оцінкою параметра випадкової величини є та оцінка, яка найбільш імовірна за результатами проведення експерименту. Тобто найбільш правдоподібним значенням параметра Q береться та його оцінка $\hat{Q}$, для якої ймовірність отримати в n експериментах вибірку $(x_1, x_2, ..., x_n)$ є максимально великою. Кожна з величин x_i має щільність розподілу ймовірності $f(x_i / Q)$. Функцію правдоподібності визначають за рівнянням

$$L(x_1, x_2, ..., x_n / Q) = f(x_1 / Q) \times f(x_2 / Q) \times ... \times f(x_n / Q).$$

Ця функція має максимум при $\hat{Q} = Q$, де $\hat{Q}$ є розв’язком рівняння

$$\frac{\partial L(x_1, x_2, ..., x_n / Q)}{\partial Q} = 0, \text{ або } \frac{\partial \ln L(x_1, x_2, ..., x_n / Q)}{\partial Q} = 0.$$

Якщо потрібно оцінити не один, а декілька невідомих параметрів $Q_1, \ldots Q_j, ... Q_k$, оцінки максимуму функцій правдоподібності для цих параметрів знаходять шляхом розв’язання системи з k рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L(x_1, x_2, ..., x_n / Q_1, ..., Q_k)}{\partial Q_1} = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial L(x_1, x_2, ..., x_n / Q_1, ..., Q_k)}{\partial Q_k} = 0. \end{cases}$$

Застосування цього методу розглянемо на прикладі оцінювання параметрів положення μ та розсіювання σ випадкової величини, розподіленої за гауссівським законом за вибіркою $(x_1, ... x_i, ... x_n)$. Функція правдоподібності у цьому випадку

$$L(x_1, x_2, ..., x_n / \mu, \sigma) = \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi\sigma^2}\right)^n} e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

Якщо цю функцію помножити на $(2\pi)^{\frac{n}{2}}$ і прологарифмувати, отримаємо

$$\ln L(x_1, x_2, ..., x_n / \mu, \sigma) = -n \ln \sigma - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 . \qquad (1.4)$$

Диференціюємо рівняння (1.4) за параметрами μ і σ:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L(x_1, x_2, ..., x_n / \mu, \sigma)}{\partial MX} = \dfrac{1}{\sigma^2} \sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 = 0, \\ \dfrac{\partial L(x_1, x_2, ..., x_n / \mu, \sigma)}{\partial \sigma} = -\dfrac{n}{\sigma} + \dfrac{1}{\sigma^3} \sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 = 0. \end{cases} \qquad (1.5)$$

Перше рівняння системи (1.5) буде дорівнювати нулю якщо

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu) = 0 , \ \sum_{i=1}^{n} x_i - n\mu = 0 ,$$

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i = \bar{x} . \qquad (1.6)$$

Отриману оцінку математичного сподівання підставляємо у друге рівняння системи (1.5), дістаємо:

$$\frac{1}{\sigma^3} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 = \frac{n}{\sigma} ;$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 . \qquad (1.7)$$

Оцінки (1.6) і (1.7) збігаються з оцінками математичного сподівання та середньо квадратичного відхилення (СКВ) з оцінками (1.2) та (1.3), отже вони є обґрунтованими й ефективними. Оцінка математичного сподівання $\bar{x}$ є незсуненою і має гауссівський розподіл, а оцінка дисперсії $\hat{s}^2$ зсунена і має розподіл χ^2, який при $n \to \infty$ наближається до гаусівського.

Отже, оцінки, отримані методом максимальної правдоподібності є: обґрунтованими, асимптотично ефективними, мають асимптотично гаусівський розподіл, такими, що відповідають умові: якщо для параметра Q існує ефективна оцінка, то рівняння правдоподібності має єдиний розв'язок, який збігається з цією оцінкою.

Метод моментів був розроблений К. Пірсоном і є історично першим методом оцінювання параметрів. Він полягає в прирівнюванні певного числа вибіркових моментів до відповідних моментів розподілу, функціонально зв'язаних з невідомими параметрами

$$\begin{cases} m_1(Q_1,...Q_k) = m_1^*(x_1,...x_n), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ m_k(Q_1,...Q_k) = m_k^*(x_1,...x_n), \end{cases} \tag{1.8}$$

де $m_i(Q)$ і $m_i^*(x)$ – відповідно i-й момент розподілу з невідомими параметрами та i-й вибірковий момент, $i = \overline{1,k}$.

Оцінки параметрів Q знаходять шляхом розв'язання отриманих рівнянь (1.8) відносно параметрів.

Оцінки, отримані за методом моментів, є асимптотично незсуненими та асимптотично нормальними, але не є асимптотично ефективними, тобто навіть за великих обсягів вибірки вони не мають найменшої можливої дисперсії.

Метод квантилів подібний до методу моментів. У разі використання цього методу теоретичні квантилі як функції невідомих параметрів закону розподілу прирівнюються до вибіркових квантилів, у результаті маємо систему рівнянь яка розв'язується відносно невідомих параметрів $Q_1,...Q_k$

$$\begin{cases} \kappa_{p1}(Q_1,...Q_k) = \kappa_{p1}^*(x_1,...x_n), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \kappa_{pk}(Q_1,...Q_k) = \kappa_{pk}^*(x_1,...x_n), \end{cases}$$

де $\kappa_{pi}(Q)$ і $\kappa_{pi}^*(x)$ – відповідно i-й момент розподілу з невідомими параметрами та i-й вибірковий момент.

Цей метод зручно використовувати, якщо існує аналітичний вираз функції $F^{-1}(p/Q)$, оберненої до функції розподілу $F(x/Q)$.

1.3. Інтервальні оцінки характеристик ряду спостережень

Розглянуті точкові оцінки дають одне числове значення параметра, яке є випадковою величиною і в загальному випадку відрізняється від детермінованого істинного значення параметра. Ця випадковість зумовлюється тим, що оцінки параметрів розподілу генеральної сукупності обчислюють не за всією сукупністю, а за вибірками з обмеженою кількістю елементів. Випадковість значень елементів, які потрапили у вибірку, і визначає випадковість отриманого значення оцінки. За значенням оцінки параметра не можна зробити висновок про її точність.

Більш інформативним був би результат оцінювання, який характеризувався б можливим відхиленням оцінки від параметра і ймовірністю виконання цієї умови. Такий результат отримують інтервальним оцінюванням параметра.

Інтервальне оцінювання – спосіб оцінювання, за якого визначається інтервал, у якому із заданою імовірністю знаходиться шукане (істинне) значення параметра розподілу.

Цей інтервал називається довірчим чи надійним, а відповідна ймовірність – довірчою ймовірністю чи надійністю. Зрозуміло, що чим більшим є довірчий інтервал, тим більша впевненість, що оцінювана величина лежить у межах інтервалу.

Довірча ймовірність визначається як $P = 1 - \alpha$, де α – рівень значущості, який дорівнює ймовірності того, що надійний інтервал не накриває значення параметра, тобто ймовірності того, що під час оцінювання допущена помилка.

Припустімо, що необхідно визначити довірчий інтервал для параметра Q генеральної сукупності, використовуючи незсунену та обґрунтовану вибіркову оцінку $\hat{Q}$. Ця оцінка має вибірковий розподіл із середнім $\mathbf{M}(\hat{Q}) = Q$ і стандартним відхиленням $\sigma_Q \to 0$, якщо $n \to \infty$. Можна вказати ймовірність

$$P(\left|\hat{Q} - Q\right| \leq \varepsilon) = 1 - \alpha \,. \tag{1.9}$$

з якою відхилення оцінки від її математичного сподівання не буде перевищувати деякого малого додатного числа ε. Вираз (1.9) можна переписати таким чином:

$$P(\hat{Q} - \varepsilon \leq Q \leq \hat{Q} + \varepsilon) = 1 - \alpha \,,$$

де $\hat{Q} - \varepsilon, \hat{Q} + \varepsilon$ – нижня та верхня границі довірчого інтервалу.

Ці границі є випадковими величинами, оскільки отримані за вибірковими спостереженнями оцінка $\hat{Q}$ є випадковою величиною.

1.4. Порядкові статистики ряду спостережень

Опрацьовуючи результати вимірювань, аналізуючи похибки і невизначеність вимірювань найчастіше використовують моделі випадкових величин з нормальним законом розподілу, а також логарифмічно-нормальний, експоненційний, гамма-розподіл і деякі інші параметричні сімейства розподілів. В цих сімействах імовірності подій можуть бути визначені функціональними залежностями – формулами, які містять параметри. Якщо значення цих параметрів відомі, то відомі також і імовірності. Тому оцінювання параметрів є основним завданням параметричної статистики.

Слід пам’ятати, що параметричні формули є лише наближеними виразами для щільності розподілів, а отже, і для ймовірностей подій. У деяких випадках похибки таких наближень можуть бути значними, що робить не правильними статистичні висновки, які грунтуються на використанні такого розподілу.

У більшості технічної та нормативної літератури припускають, що сумарна похибка (стандартна невизначеність) результатів вимірювання формується в результаті сукупного впливу багатьох малих факторів, і відповідно центральній граничній теоремі теорії ймовірності ця величина добре наближається (за розподілом) до гауссівської випадкової величини. Таке твердження є справедливим, якщо фактори, що визначають похибки, діють адитивно і незалежно одні від інших. На припущенні про гауссівський закон розподілу результатів спостережень побудовано більшість класичних моделей кореляційного, регресійного, дисперсійного аналізу, моделі вимірювань, калібрування, рівняння поширення невизначеності вимірювань. Але, якщо фактори діють мультиплікативно, то в наслідок центральної граничної теореми закон розподілу сумарної похибки потрібно апроксимувати логарифмічно нормальним розподілом. У прикладних задачах обґрунтувати адитивність, а не мультиплікативність дії факторів, а також їх незалежність у більшості випадків неможливо. Тому використання закону розподілу Гаусса для апроксимації імовірнісних характеристик таких даних є некоректним. Ці теоретичні припущення підтверджуються експериментальними дослідженнями, які були проведені різними авторами і наведені в літературі з теорії похибок та вимірювань. Результати цих досліджень показали, що розподіли похибок як цифрових, так і аналогових приладів, які використовуються для вимірювання електричних та неелектричних величин у 90% випадків істотно відрізняються від гауссівського. Звідси можна зробити висновок, що результати вимірювань мають властивості, що обмежують використання як їх моделей випадкових величин з розподілом Гаусса.

Альтернативою параметричним методам статистики є непараметричний підхід, за яким функцію розподілу оцінюють безпосередньо із отриманих вибіркових даних.

Переваги непараметричних методів полягають у тому, що їх можна застосовувати:

– для перевірки гіпотез про параметри генеральної сукупності, коли випадкові величини не розподілені за нормальним законом.

– для номінальних і порядкових даних.

– для перевірки гіпотез, які не пов'язані з параметрами генеральної сукупності.

– у більшості випадків для непараметричних методів обчислення простіше, ніж для параметричних, а самі методи зрозуміліші.

Недоліки непараметричних методів полягають у тому, що вони: менш точні, ніж відповідні параметричні, менш інформативні, менш ефективні.

Одним з типів методів, які входять в групу непараметричних є рангові, у яких використовуються не самі вибіркові значення, а їх ранги. Такі методи дозволяють оцінити властивості випадкових величин незалежно від їх функцій розподілу.

Рангом числа x_i у вибірці $x_1, \ldots, x_n$ називають той номер який він отримує при упорядкуванні всієї групи за зростанням (спаданням). Так, ранг 1 отримує найменше (найбільше) число у вибірці, ранг 2 – найменше (найбільше) із тих, що залишилися і т.д. Ранг n отримує найбільше (найменше) з чисел у вибірці.

Якщо допускається, що результати спостережень $x_1, \ldots, x_n$, розподілені неперервно, то рівність отриманих чисел $x_1, \ldots, x_n$ теоретично має нульову ймовірність. Але на практиці величини x_i вимірюються з обмеженою точністю і тому їх рівність є можливою.

Якщо серед чисел $x_1,\ldots,x_n$ є однакові, вони отримують спільний ранг, зазвичай середній. Наприклад, якщо однакові величини займають третє, четверте та п'яте місця у вибірці, кожне з них отримує середній ранг (3+4+5)/4. Такі ранги називають ***зв'язаними***.

Вибірку, елементи якої розміщені на місцях, номери яких відповідають їх рангам, називаються ***ранжованою*** або ***варіаційним рядом***. Елементи варіаційного ряду називають ще ***порядковими статистиками***.

У разі заміни числових значень спостережень їх рангами інформація неминуче втрачається. Іноді така втрата може бути повною. Нехай, наприклад, $x_1,\ldots,x_n$ – результати незалежних спостережень невідомої величини А. Якщо замінити цю вибірку послідовністю рангів отримуємо деяку перестановку чисел $1,2....n$. Ця перестановка не містить інформації про значення величини А, яке може мати розмірність, а ранги – безрозмірні.

Попри цей недолік, методи рангової статистики дозволяють розв'язувати такі ж задачі оброблення експериментальних даних, як і параметричні методи, зокрема ті, що ґрунтуються на припущені про нормальність, тому їх широко застосовують для розв'язання широкого кола статистичних задач.

Контрольні запитання та завдання

1. Поясніть терміни «вибірка», «генеральна сукупність», «порядкова статистика», «статистична оцінка».
2. Які показники якості статистичних оцінок вам відомі?
3. Наведіть та поясніть методи отримання статистичних оцінок характеристик випадкових величин.
4. Наведіть незсунену, обґрунтовану та ефективну оцінку математичного сподівання генеральної сукупності.
5. Які оцінки називають точковими, інтервальними?
6. Запропонуйте алгоритм побудови емпіричної інтегральної функції розподілу та емпіричної функції розподілу щільності імовірності.
7. У чому полягає Центральна гранична теорема?
8. Що таке ранг елемента вибірки та які правила його визначення?
9. Яку вибірку називають ранжованою?
10. Для даних з табл. Д2.1 дод. 2 згідно з варіантом визначте оцінки математичного сподівання та дисперсії. Визначте ранги елементів заданої вибірки та побудуйте варіаційний ряд.

2. МЕТОДИ ОЦІНЮВАННЯ ПАРАМЕТРІВ ЗАКОНУ РОЗПОДІЛУ ДАНИХ

2.1. Оцінювання параметрів за відомим законом розподілу

Нижче розглянуті методи оцінювання параметрів для законів розподілу, які часто зустрічаються на практиці.

2.1.1. Оцінювання параметрів закону розподілу Гаусса

Щільність закону розподілу Гаусса (диференціальну функцію розподілу) (рис. 2.1) визначають за формулою

$$p(x;\mu;\sigma)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right),$$

де μ – параметр положення (зсуву); σ – параметр розсіювання.

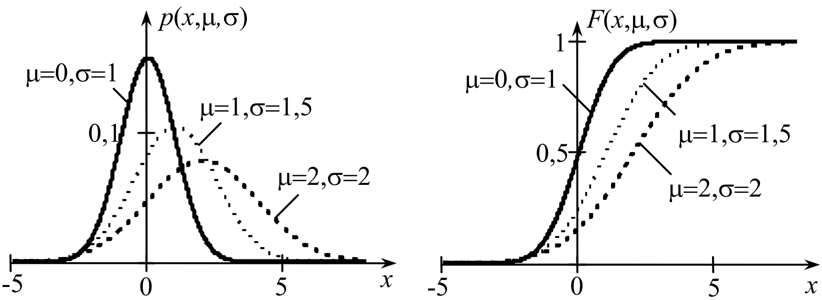
Розмірність функції $p(x;\mu;\sigma)$ обернена до розмірності x.

Функція розподілу (інтегральна)

$$F(x;\mu;\sigma)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)dt\ .$$

Для розв’язання практичних задач часто застосовують функцію нормованого розподілу Гаусса ($\mu=0,\ \sigma=1$)

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)dt\ .$$



а *б*

Рис. 2.1. Диференціальна (*а*) та інтегральна (*б*) функції розподілу Гаусса

Точкові оцінки параметра μ

Оцінка найбільшої правдоподібності параметра μ за рядом спостережень $x_i, i = \overline{1,n}$:

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \,. \qquad (2.1)$$

Оцінка є обґрунтованою, незсуненою, ефективною. Оцінка розподілена так само, як і випадкова величина з математичним сподіванням $\mathbf{M}(\hat{\mu}) = \mu$ та дисперсією $\mathbf{D}(\hat{\mu}) = \sigma^2 / n$. У випадку обмеженого обсягу спостережень ($n \le 10$) для стабілізації оцінки в околі центра розподілу можливе її визначення за такою формулою:

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{d_i \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{d_j}} \text{, де } d_i = \sum_{k=1}^{n} \left(x_k - x_i\right)^2 . \qquad (2.2)$$

Оцінка за значенням медіани

Як оцінку параметра μ можна використовувати вибіркову медіану:

$$\hat{\mu} = \mathbf{Med}(x) \,, \qquad (2.3)$$

де $\mathbf{Med}(x)$ – оператор вибіркової медіани.

$$\mathbf{Med}(x) = \begin{cases} x_{\left[{(n+1)}/{2}\right]}, \text{ якщо } n \text{ непарне,} \\ \frac{1}{2}\left(x_{\left[{n}/{2}\right]} + x_{\left[1+{n}/{2}\right]}\right), \text{ якщо } n \text{ парне.} \end{cases}$$

Ефективність оцінки E, якщо $n \to \infty$ прямує до $2/\pi = 0{,}637$, тобто для досягнення оцінкою ефективності оцінки максимальної правдоподібності необхідний в $\pi/2$ більший обсяг спостережень.

Оцінювання за порядковими статистиками (квантилями)

Діксон запропонував прості оцінки μ:

– середнє з двох оптимальних порядкових статистик:

$$\hat{\mu} = \frac{1}{2}(x_{[i]} + x_{[j]}) \,. \qquad (2.4)$$

– середнє варіаційного ряду зі спостережень, крім двох крайніх:

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n-2} \sum_{i=2}^{n-1} x_{[i]} \,. \tag{2.5}$$

Оптимальні порядкові статистики для оцінки (2.4) наведено у табл. 2.1. Якщо $n > 20$, можна скористатись залежностями $i = [0{,}27n]$, $j = [0{,}73n]$, де $[\cdot]$ – оператор заокруглення до найближчого цілого.

Ефективність оцінки (2.4) прямує до 0,81, якщо $n \to \infty$, а ефективність оцінки (2.5) не поступається оцінці (2.1).

Таблиця 2.1

Оптимальні порядкові статистики для оцінки Діксона

n	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**
i	1	1	2	2	2	2	3	3	3	3
j	2	3	3	4	5	6	6	7	8	9
n	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	∞
i	4	4	4	4	5	5	5	6	6	$0{,}27n$
j	9	10	11	12	12	13	14	14	15	$0{,}73n$

Швидкі оцінки Кенуя

До швидких оцінок Кенуя належать такі:

Середньоквартильна оцінка:

$$\hat{\mu} = 0{,}5(x_{[0{,}25n]} + x_{[0{,}75n]}) \,. \tag{2.6}$$

Ефективність оцінки $E \approx 1{,}21/n$. Метод можна рекомендувати лише для швидкого наближеного оцінювання.

Швидка оцінка за трьома квантилями:

$$\hat{\mu} = 0{,}2x_{[n/16]} + 0{,}6x_{[n/2]} + 0{,}2x_{[15n/16]} \,. \tag{2.7}$$

Ефективність оцінки $E \approx 0{,}83$. Метод досить стійкий до відхилення розподілу спостережень від розподілу Гаусса.

Оцінка за п’ятьма квантилями:

$$\hat{\mu} = \frac{1}{6}(x_{[n/16]} + x_{[n/4]} + 2x_{[n/2]} + x_{[3n/4]} + x_{[15n/16]}) \,. \tag{2.8}$$

Ефективність оцінки $E \approx 0{,}93$. Метод стійкий до відхилення розподілу спостережень від розподілу Гаусса.

Стійка оцінка Ходжеса–Лемана за середніми Уолша

Ця оцінка застосовна у випадку відхилення розподілу спостережень від розподілу Гаусса та наявності аномальних значень (спостережень з надмірною похибкою).

За рядом спостережень $x_i, i = \overline{1,n}$ визначають множину ($n(n+1)/2$) середніх Уолша:

$$z_{i,j} = 0{,}5(x_i + x_j), i \le j\,. \qquad (2.9)$$

Оцінка Ходжена–Лемана визначається як медіана множини середніх Уолша (2.9):

$$\hat{\mu} = \mathbf{Med}(z)\,.$$

Інтервальні оцінки параметра μ

Інтервальна оцінка μ за відомого значення σ

Границі інтервальної оцінки параметра μ (2.1), (2.5) для довірчої імовірності P розраховують за формулами:

$$\mu_{\text{н}}(n,P) = \hat{\mu} - u_{\gamma}\frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \mu_{\text{в}}(n,P) = \hat{\mu} + u_{\gamma}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \qquad (2.10)$$

де $u_{\gamma} - \gamma$-квантиль нормованого розподілу Гаусса (табл. 2.2); $\gamma = P$ для односторонньої оцінки і $\gamma = (1+P)/2$ – для двосторонньої.

Таблиця 2.2

Значення квантилів стандартного розподілу Гаусса

γ	u_γ	γ	u_γ	γ	u_γ	γ	u_γ
0,50	0,00000	**0,76**	0,70630	**0,950000**	1,64485	**0,999200**	3,15591
0,52	0,05015	**0,78**	0,77219	**0,960000**	1,75069	**0,999400**	3,23888
0,54	0,10043	**0,80**	0,84162	**0,970000**	1,88079	**0,999500**	3,29053
0,56	0,15097	**0,81**	0,87790	**0,975000**	1,95996	**0,999600**	3,35279
0,58	0,20189	**0,820**	0,91536	**0,980000**	2,05375	**0,999700**	3,43161
0,60	0,25335	**0,840**	0,99446	**0,990000**	2,32635	**0,999800**	3,54008
0,62	0,30548	**0,860**	1,08032	**0,992000**	2,40891	**0,999900**	3,71902
0,64	0,35846	**0,880**	1,17499	**0,994000**	2,51214	**0,999950**	3,89059
0,66	0,41246	**0,900**	1,28155	**0,995000**	2,57583	**0,999990**	4,26489
0,68	0,46770	**0,910**	1,34075	**0,996000**	2,65207	**0,999995**	4,41717
0,70	0,52440	**0,920**	1,40507	**0,997000**	2,74778	**0,999999**	4,75342
0,72	0,58284	**0,930**	1,47579	**0,998000**	2,87816		
0,74	0,64334	**0,940**	1,55477	**0,999000**	3,09023		

Наближені значення u_γ можна отримати за формулами:

$$u_{\gamma} = t - \left(1 + \sum_{i=1}^{3} d_i t^i\right)^{-1} \cdot \sum_{i=0}^{2} c_i t^i\,,\ t = \sqrt{-2\ln(1-P)}\,, \qquad (2.11)$$

де $c_0 = 2{,}515517$, $c_1 = 0{,}802853$, $c_2 = 0{,}010328$, $d_1 = 1{,}432788$,

$d_2 = 0{,}189269$, $d_3 = 0{,}001308$;

$$u_\gamma = 2{,}0637\left(\ln\left(\frac{1}{1-\gamma}\right) - 0{,}16\right)^{0,4274} - 1{,}5774\,,\; 0{,}5 \le \gamma \le 0{,}999\,. \quad (2.12)$$

Абсолютна похибка апроксимації для (2.11) не перевищує значення $0{,}00045$, для (2.12) – $0{,}0008$.

Оцінка μ за невідомого значення σ

Границі інтервальної оцінки параметра μ (2.1), (2.5) з довірчою ймовірністю P розраховують за формулами:

$$\mu_\text{н}(n,P) = \hat{\mu} - t_\gamma(\nu)\frac{s}{\sqrt{n}}; \quad \mu_\text{в}(n,P) = \hat{\mu} + t_\gamma(\nu)\frac{s}{\sqrt{n}}, \quad (2.13)$$

де $t_\gamma(\nu) - \gamma$ -квантиль розподілу Стьюдента з $\nu = n-1$ степенями вільності (див. табл. Д2.2 дод. 2), s – оцінка СКВ; $\gamma = P$ для односторонньої оцінки і $\gamma = (1+P)/2$ – для двосторонньої оцінки.

Значення $t_\gamma(\nu)$ можна знайти за такими формулами:

$$t_\gamma(\nu) = u_\gamma\left(1 - \frac{u_\gamma^2 + 1}{4\nu}\right)^{-1}; \; t_\gamma(\nu) = \sqrt{\nu\left(\exp\left(\frac{u_\gamma^2}{0{,}9975\nu - 0{,}445}\right) - 1\right)}\,.$$

Значення u_γ беруть з табл. 2.2 або визначають із застосуванням апроксимацій (2.11), (2.12).

Для практичного використання часто обирають $P = 0{,}95$, тоді можна застосовувати апроксимацію $\gamma = 0{,}975$:

$$t_{0,975}(\nu) = 1{,}96 + 2{,}5/(\nu - 0{,}8)\,. \quad (2.14)$$

Середньоквартильна оцінка μ

Для оцінки $\hat{\mu}$ згідно з (2.6) інтервальної границі становлять:

$$\mu_\text{н}(n,P) = \hat{\mu} - R_\gamma(n)\cdot l, \quad \mu_\text{в}(n,P) = \hat{\mu} + R_\gamma(n)\cdot l, \quad (2.15)$$

де l – ширина міжквартильного інтервалу, $l = x_{[0,75n]} - x_{[0,25n]}$, $R_\gamma(n) - \gamma$ -квантиль розподілу l (табл. 2.3); $\gamma = (1+P)/2$ – для двосторонньої оцінки і $\gamma = P$ – для односторонньої.

Таблиця 2.3

Значення квантилів розподілу ширини міжквартильного інтервалу l

n	γ			**n**	γ		
	0,95	**0,975**	**0,99**		**0,95**	**0,975**	**0,99**
11	0,470	0,623	0,876	**35**	0,260	0,319	0,393
15	0,400	0,514	0,676	**39**	0,246	0,301	0,369
19	0,354	0,448	0,573	**43**	0,234	0,286	0,349
23	0,321	0,402	0,506	**47**	0,224	0,273	0,332
27	0,296	0,367	0,458	**51**	0,215	0,261	0,317
31	0,276	0,341	0,422				

Інтервальна оцінка для медіани як оцінки μ

Якщо $n > 50$ довірчий інтервал для медіанної оцінки μ визначають за порядковими статистиками:

$$x_{[k]} \leq \hat{\mu} \leq x_{[n-k+1]}, \tag{2.16}$$

де $k = 0{,}5\left(n - 1{,}64\sqrt{n-1}\right)$, якщо $P = 0{,}90$; $k = 0{,}5\left(n - 1{,}96\sqrt{n-1}\right)$, якщо $P = 0{,}95$; $k = 0{,}5\left(n - 2{,}58\sqrt{n-1}\right)$, якщо $P = 0{,}99$.

Для $n \leq 50$ номери порядкових статистик (2.16) наведено у табл. 2.4.

Таблиця 2.4

Номери порядкових статистик для визначення довірчого інтервалу для медіанної оцінки μ

n	***P***				**n**	***P***				**n**	***P***				**n**	***P***			
	0,95		**0,99**			**0,95**		**0,99**			**0,95**		**0,99**			**0,95**		**0,99**	
5	0	5	0	5	**17**	5	12	3	14	**29**	9	20	8	21	**40**	14	26	12	28
6	1	5	0	6	**18**	5	13	4	14	**30**	10	20	8	22	**41**	14	27	12	29
7	1	6	0	7	**19**	5	14	4	14	**31**	10	21	8	23	**42**	15	27	13	29
8	1	7	1	7	**20**	6	14	4	16	**32**	10	22	9	23	**43**	15	28	13	30
9	2	7	1	8	**21**	6	15	5	16	**33**	11	22	9	24	**44**	16	28	14	30
10	2	8	1	9	**22**	6	16	5	17	**34**	11	23	10	24	**45**	16	29	14	31
11	2	9	1	10	**23**	7	16	5	18	**35**	12	23	10	25	**46**	16	30	14	32
12	3	9	2	10	**24**	7	17	6	18	**36**	12	24	11	26	**47**	17	30	15	32
13	3	10	2	11	**25**	8	17	6	19	**37**	13	24	11	26	**48**	17	31	15	33
14	3	11	2	12	**26**	8	18	7	19	**38**	13	25	11	27	**49**	18	31	16	33
15	4	11	3	12	**27**	8	19	7	20	**39**	13	26	12	27	**50**	18	32	16	34
16	4	12	3	12	**28**	9	19	7	21										

Приклад 2.1. Під час вимірювань отримано такі результати:

5,120	4,004	5,112	3,360	4,905	4,497	5,038	8,572	4,855	4,061
7,071	7,783	2,066	7,576	2,668	2,200	3,969	4,643	6,283	4,585

Необхідно визначити значення параметра μ розподілу ряду спостережень, якщо прийняти гіпотезу про розподіл Гаусса.

Розв'язання. Упорядкуємо початкові дані:

2,066	2,200	2,668	3,360	3,969	4,004	4,061	4,497	4,585	4,643
4,855	4,905	5,038	5,112	5,120	6,283	7,071	7,576	7,783	8,572

Визначимо точкові оцінки параметра μ:

За формулою (2.1): $\sum_{i=1}^{20} x_i = 98{,}368,\ \hat{\mu} = 98{,}368/20 = 4{,}918$.

За формулою (2.2):

$$d_1 = (0)^2 + (4{,}004 - 5{,}120)^2 + (5{,}112 - 5{,}120)^2 + \ldots + (4{,}585 - 5{,}120)^2 = 61{,}879$$

$$d_2 = (5{,}120 - 4{,}004)^2 + (0)^2 + (5{,}112 - 4{,}004)^2 + \ldots + (4{,}585 - 4{,}004)^2 = 77{,}789$$

Отримані значення d_i:

61,879	77,789	61,816	109,638	61,070	64,618	61,352	328,042	61,146	75,769
153,740	225,185	223,790	202,323	162,352	208,860	79,093	62,583	98,309	63,289

Отримане значення оцінки (2.2):

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{d_j} = 0{,}221,\ \hat{\mu} = \frac{1}{20}\left(\frac{5{,}120}{61{,}879 \cdot 0{,}221} + \ldots + \frac{4{,}585}{63{,}289 \cdot 0{,}221}\right) = 4{,}768.$$

За формулою (2.3): $\hat{\mu} = \mathbf{Med}(x) = 4{,}749$.

За формулою (2.4): з табл. 2.1 i=6, j=15;

$\hat{\mu} = (x_{[6]} + x_{[15]})/2 = (4{,}004 + 5{,}120)/2 = 4{,}562$.

За формулою (2.5): $\hat{\mu} = (2{,}200 + 2{,}668 + \ldots + 7{,}783)/18 = 87{,}730/18 = 4{,}874$.

За формулою (2.6): i = [0,25·20]=5, j = [0,75·20]=15,

$\hat{\mu} = (x_{[5]} + x_{[15]})/2 = (3{,}969 + 5{,}120)/2 = 4{,}545$.

За формулою (2.7): [20/16] = 1, [20/2]=10, [15·20/16] = 19,

$\hat{\mu} = 0{,}2x_{[1]} + 0{,}6x_{[10]} + 0{,}2x_{[19]} = 0{,}2 \cdot 2{,}066 + 0{,}6 \cdot 4{,}643 + 0{,}2 \cdot 7{,}783 = 4{,}756$.

За формулою (2.8): [20/16] = 1, [20/4] = 5, [20/2] = 10, [3·20/4] = 15, [15·20/16] = 19, $\hat{\mu} = (x_{[1]} + x_{[5]} + 2x_{[10]} + x_{[15]} + x_{[19]})/6 =$

$= (2{,}066 + 3{,}969 + 2 \cdot 4{,}643 + 5{,}120 + 7{,}783)/6 = 4{,}704$.

Визначимо інтервальні оцінки параметра μ:

За формулою (2.10): з урахуванням того, що значення $\sigma = 2$ для $P = 0{,}95$ отримаємо $\gamma = (1 + 0{,}95)/2 = 0{,}975$, з табл. 2.2 – $u_\gamma = 1{,}95996$.

Отже, $4{,}918-1{,}95996\frac{2}{\sqrt{20}} \le \hat{\mu} \le 4{,}918+1{,}95996\frac{2}{\sqrt{20}}$, $4{,}042 \le \hat{\mu} \le 5{,}795$.

За формулою (2.13): з урахуванням того, що значення СКВ $s=1{,}793$ для $P=0{,}95$ отримаємо $\gamma=(1+0{,}95)/2=0{,}975$, з табл. Д2.2 дод. 2 – $t_\gamma(\nu)=t_{0,975}(19)=2{,}093$, або за формулою (2.14) отримуємо значення $t_{0,975}(19)=1{,}96+2{,}5/(19-0{,}8)=2{,}097$.

Отже, $4{,}918-2{,}093\frac{1{,}793}{\sqrt{20}} \le \hat{\mu} \le 4{,}918+2{,}093\frac{1{,}793}{\sqrt{20}}$, $4{,}079 \le \hat{\mu} \le 5{,}757$.

За формулою (2.15): ширина міжквартильного інтервалу $l=x_{[15]}-x_{[5]}=5{,}120-3{,}969=1{,}151$, для $P=0{,}95$ отримаємо $\gamma=0{,}975$, з табл. 2.3 (із застосуванням лінійної інтерполяції) маємо $R_\gamma(n)=t_{0,975}(20)=0{,}437$.

Отже, $4{,}545-0{,}437\cdot 1{,}151 \le \hat{\mu} \le 4{,}545+0{,}437\cdot 1{,}151$, $4{,}042 \le \hat{\mu} \le 5{,}047$.

За формулою (2.16): з табл. 2.4 для $P=0{,}95$ номери порядкових статистик 6 та 14. Отже, інтервальна оцінка математичного мподівання: $x_{[6]} \le \hat{\mu} \le x_{[14]}$, $4{,}004 \le \hat{\mu} \le 5{,}112$.

Точкові оцінки параметра σ

Оцінка найбільшої правдоподібності параметра σ за рядом спостережень $x_i,\ i=\overline{1,n}$:

$$\hat{\sigma}=\sqrt{s^2}=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\hat{\mu}\right)^2}\ . \tag{2.17}$$

Також може бути розрахована за такими формулами:

$$\hat{\sigma}=\sqrt{\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\cdot\hat{\mu}^2\right)}=\sqrt{\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2/n\right)}$$

Оцінка σ за вибірковим розмахом R

За обсягу спостережень $n\le 20$ рекомендується застосовувати формулу для спрощеного розрахунку:

$$\hat{\sigma}=R\cdot d(n), \tag{2.18}$$

де $R=\max(x)-\min(x)$; $d(n)$ – параметр, який пов’язує значення СКВ та розмаху для розподілу Гаусса (табл. 2.5).

Таблиця 2.5

Коефіцієнт *d* для визначення σ за вибірковим розмахом

n	**d**	**n**	**d**	**n**	**d**	**n**	**d**
2	0,8862	**7**	0,3698	**12**	0,3069	**17**	0,2787
3	0,5908	**8**	0,3562	**13**	0,2998	**18**	0,2747
4	0,4857	**9**	0,3367	**14**	0,2935	**19**	0,2711
5	0,4299	**10**	0,3249	**15**	0,2880	**20**	0,2677
6	0,3946	**11**	0,3152	**16**	0,2831		

Оцінка Даутона за порядковими статистиками

Досить проста з огляду на проведення розрахунків та достатньо ефективна ($E \approx 0{,}94$) оцінка СКВ така:

$$\hat{\sigma} = \frac{1{,}77245}{n(n-1)} \sum_{i=1}^{n} \left(x_{[i]} \cdot (2i - n - 1) \right).$$

Інтервальні оцінки параметра σ

Методи визначення інтервальних оцінок параметра σ залежать від методів визначення точкових оцінок. Так границі інтервальної оцінки параметра σ (2.17) при довірчій ймовірності P визначають за формулами:

$$\sigma_{\text{н}}(n,P) = \sqrt{\frac{1}{\chi^2_{\gamma'}} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \hat{\mu})^2}, \; \sigma_{\text{в}}(n,P) = \sqrt{\frac{1}{\chi^2_{\gamma''}} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \hat{\mu})^2}, \quad (2.19)$$

або
$$\sigma_{\text{н}}(n,P) = \sqrt{\frac{n-1}{\chi^2_{\gamma'}} \hat{\sigma}^2}, \; \sigma_{\text{в}}(n,P) = \sqrt{\frac{n-1}{\chi^2_{\gamma''}} \hat{\sigma}^2},$$

де $\hat{\mu}$ – вибіркова оцінка параметра μ; χ^2_{γ} $-\gamma$-квантиль розподілу Пірсона з $\nu = n-1$ степенями вільності (якщо значення $\hat{\mu}$ відоме, то $\nu = n$) (див. табл. Д1.4 дод. 1); $\gamma' = (1+P)/2, \gamma'' = (1-P)/2$ – для двосторонньої оцінки і $\gamma' = P, \gamma'' = 1-P$ – для односторонньої.

Інтервальна оцінка σ за вибірковим розмахом R

Якщо σ оцінювати за формулою (2.18), відповідною інтервальною оцінкою буде:

$$\sigma_{\text{н}}(n,P) = \frac{R}{\omega(\gamma')}; \; \sigma_{\text{в}}(n,P) = \frac{R}{\omega(\gamma'')}, \quad (2.20)$$

де R – вибірковий розмах; $\omega(\gamma) - \gamma$-квантиль розподілу розмаху вибірки обсягу n нормованого розподілу Гаусса (табл. 2.6); $\gamma' = (1+P)/2$, $\gamma'' = (1-P)/2$ – для двосторонньої оцінки і $\gamma' = P, \gamma'' = 1 - P$ – для односторонньої.

Таблиця 2.6

Значення квантилів розподілу розмаху $\omega(\gamma)$

n	**Односторонні оцінки**						**Двосторонні оцінки**					
	P		***P***		***P***		***P***		***P***		***P***	
	γ'	γ''	γ'	γ''	γ'	γ''	γ'	γ''	γ'	γ''	γ'	γ''
	0,90	**0,10**	**0,95**	**0,05**	**0,99**	**0,01**	**0,95**	**0,05**	**0,975**	**0,025**	**0,995**	**0,005**
3	2,90	0,62	3,31	0,43	4,12	0,19	3,31	0,43	3,68	0,30	4,42	0,13
4	3,24	0,98	3,63	0,76	4,40	0,43	3,63	0,76	3,98	0,59	4,69	0,34
5	3,48	1,26	3,86	1,03	4,60	0,66	3,86	1,03	4,20	0,85	4,89	0,55
6	3,66	1,49	4,03	1,25	4,76	0,87	4,03	1,25	4,36	1,06	5,03	0,75
7	3,81	1,68	4,17	1,44	4,88	1,05	4,17	1,44	4,49	1,25	5,15	0,92
8	3,93	1,83	4,29	1,60	4,99	1,20	4,29	1,60	4,61	1,41	5,26	1,08
9	4,04	1,97	4,39	1,74	5,08	1,34	4,39	1,74	4,70	1,55	5,34	1,21
10	4,13	2,09	4,47	1,86	5,16	1,47	4,47	1,86	4,79	1,67	5,42	1,33
11	4,21	2,20	4,55	1,97	5,23	1,58	4,55	1,97	4,86	1,78	5,49	1,45
12	4,29	2,30	4,62	2,07	5,29	1,68	4,62	2,07	4,92	1,88	5,54	1,55
13	4,35	2,39	4,68	2,16	5,35	1,77	4,68	2,16	4,99	1,97	5,60	1,64
14	4,41	2,47	4,74	2,24	5,40	1,86	4,74	2,24	5,04	2,06	5,65	1,72
15	4,47	2,54	4,80	2,32	5,45	1,93	4,80	2,32	5,09	2,14	5,70	1,80
16	4,52	2,61	4,85	2,39	5,49	2,01	4,85	2,39	5,14	2,21	5,74	1,88
17	4,57	2,67	4,89	2,45	5,54	2,07	4,89	2,45	5,18	2,27	5,78	1,94
18	4,61	2,73	4,93	2,51	5,57	2,14	4,93	2,51	5,22	2,34	5,82	2,01
19	4,65	2,79	4,97	2,57	5,61	2,20	4,97	2,57	5,26	2,39	5,85	2,07
20	4,69	2,84	5,01	2,62	5,65	2,25	5,01	2,62	5,30	2,45	5,89	2,12

Приклад 2.2. Для даних з прикладу 2.1 необхідно визначити значення параметра σ, якщо прийняти гіпотезу про розподіл Гаусса.

Розв'язання. Точкові оцінки параметра σ:

За формулою (2.17): $\sum_{i=1}^{20}(x_i - \hat{\mu})^2 = 61{,}066,\ \hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{19}61{,}066} = 1{,}793$.

За формулою (2.18): значення розмаху ряду $R = 8{,}575 - 2{,}066 = 6{,}506$, з табл. 2.5 $d(20) = 0{,}2577$. Отже значення $\hat{\sigma} = 6{,}506 \cdot 0{,}2577 = 1{,}677$.

За формулою (2.19): $\hat{\sigma} = \frac{1,77245}{20(19)}(2,066 \cdot (2 \cdot 1 - 21) + 2,200 \cdot (2 \cdot 2 - 21) + ...$

$... + 8,572 \cdot (2 \cdot 20 - 21)) = \frac{1,77245}{20(19)} 387,120 = 1,806$.

Інтервальні оцінки параметра σ :

За формулою (2.19): для $P = 0,95$ отримаємо $\gamma' = (1 + 0,95) / 2 = 0,975$, $\gamma'' = (1 - 0,95) / 2 = 0,025$ для $v = 19$ з табл. Д1.4 дод. 1 – $\chi^2_{\gamma'} = 32,852$, $\chi^2_{\gamma''} = 8,907$. Отже, $\sqrt{\frac{19}{32,852} 1,793^2} \le \hat{\sigma} \le \sqrt{\frac{19}{8,907} 1,793^2}$, $1,018 \le \hat{\sigma} \le 1,956$.

За формулою (2.20): для $P = 0,95$ отримаємо $\gamma' = 0,975$, $\gamma'' = 0,025$, з табл. 2.6 для n=20 – $\omega(\gamma') = 5,30$, $\omega(\gamma'') = 2,45$.

Отже, враховуючи, що $R = 6,506$, інтервальна оцінка параметра σ: $\frac{6,506}{5,30} \le \hat{\sigma} \le \frac{6,506}{2,45}$, $1,228 \le \hat{\sigma} \le 2,656$.

2.1.2. Оцінювання параметрів рівномірного і трикутного розподілів

Щільність рівномірного розподілу ймовірностей випадкової величини (рис. 2.2, *а*) описується формулою

$$p(x;a;b) = \begin{cases} 0, a > x > b, \\ \dfrac{1}{b-a}, a \le x \le b, \end{cases}$$

де a – ліва границя; b – права границя розподілу.

Інтегральна функція розподілу (рис. 2.2, *б*) визначається за такою формулою:

$$F(x;a;b) = \begin{cases} 0\ , x < a, \\ \dfrac{x-a}{b-a}\ , a \le x \le b, \\ 1, x > b. \end{cases}$$

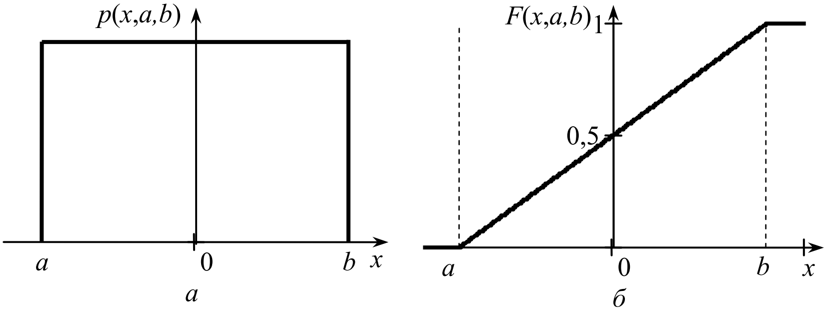


Рис. 2.2. Диференціальна (*а*) та інтегральна (*б*) функції рівномірного закону розподілу

Точкові оцінки для рівномірного закону розподілу

За достатнього обсягу даних $n > 50$ для оцінювання параметрів *a* та *b* можна запропонувати прості оцінки:

$$a = \min(x)\,,\ b = \max(x)\,. \tag{2.21}$$

Зрозуміло, що ці оцінки не є стійкими до наявності спостережень з надмірною похибкою і значною мірою залежать від обсягу даних.

За обсягу даних $n \le 50$ більш доцільним є застосування таких оцінок:

$$a = \bar{x} - s\sqrt{3}\,,\ b = \bar{x} + s\sqrt{3}\,, \tag{2.22}$$

де $\bar{x}$ – оцінка математичного сподівання; s – оцінка СКВ.

Для забезпечення стійкості до наявності у ряді спостережень з надмірною похибкою у виразі (2.22) замість оцінок $\bar{x}$ і s можна застосувати відповідні урізані оцінки:

$$\bar{x} = \mathbf{Med}(x)\,,\ s = 1{,}15\,\mathbf{Med}(\Delta x)\,, \tag{2.23}$$

де Δx – множина модулів різниць між результатами спостережень та медіани ряду спостережень $\Delta x_i = \left| x_i - \mathbf{Med}(x) \right|$.

Приклад 2.3. Під час вимірювань отримано такі результати:

12,847	19,688	11,416	15,475	12,248	17,990	17,007	12,545	16,763	18,062
15,227	18,587	14,873	10,997	18,807	14,207	16,149	10,199	13,778	12,180

Необхідно визначити значення параметрів *a* та *b* розподілу ряду спостережень, якщо прийняти гіпотезу про рівномірний розподіл.

Розв'язання. За формулою (2.21): $a = 10{,}199$, $b = 19{,}688$.

За формулою (2.22): $\bar{x} = 14{,}952$, $s = 2{,}871$, $a = 14{,}952 - \sqrt{3} \cdot 2{,}871 = 9{,}980$, $b = 14{,}952 + \sqrt{3} \cdot 2{,}871 = 19{,}925$.

За формулою (2.23) упорядковані початкові дані:

10,199	10,997	11,416	12,180	12,248	12,545	12,847	13,778	14,207	14,873
15,227	15,475	16,149	16,763	17,007	17,990	18,062	18,587	18,807	19,688

Значення медіани $\bar{x} = \mathbf{Med}(x) = 15{,}050$, значення різниць Δx_i (упорядковані за зростанням):

0,177	0,177	0,425	0,843	1,099	1,272	1,713	1,957	2,203	2,505
2,802	2,870	2,940	3,012	3,537	3,634	3,757	4,053	4,638	4,851

Відповідне значення медіани: $\mathbf{Med}(\Delta x) = 2{,}654$, $s = 1{,}15 \cdot 2{,}654 = 3{,}052$. Отже, $a = 15{,}050 - \sqrt{3} \cdot 3{,}052 = 9{,}765$, $b = 115{,}050 + \sqrt{3} \cdot 3{,}052 = 20{,}335$.

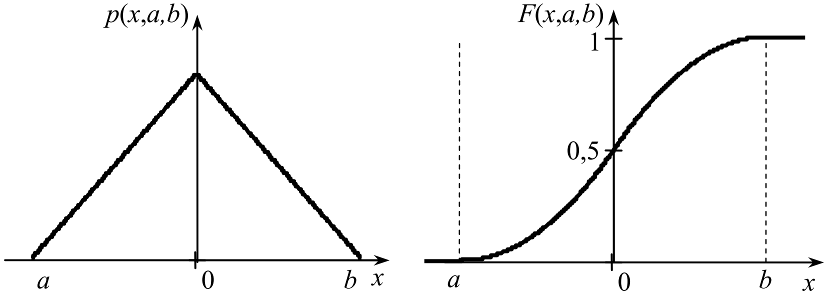
Щільність трикутного (Сімпсона) закону розподілу імовірності випадкової величини (рис. 2.3, *а*) описується формулою

$$p(x;a;b) = \begin{cases} 0, a > x > b, \\ \dfrac{4(x-a)}{(b-a)^2}, a \le x \le \dfrac{b+a}{2}, \\ \dfrac{4(b-x)}{(b-a)^2}, \dfrac{b+a}{2} \le x \le b, \end{cases}$$

де a – ліва границя; b – права границя розподілу.

Функція розподілу (інтегральна, рис. 2.3, *б*):

$$F(x;a;b) = \begin{cases} 0, x < a, \\ \dfrac{2(x-a)^2}{(b-a)^2}, a \le x \le \dfrac{b+a}{2}, \\ 1 - \dfrac{2(b-x)^2}{(b-a)^2}, \dfrac{b+a}{2} \le x \le b, \\ 1, x > b. \end{cases}$$



а *б*

Рис. 2.3. Диференціальна (*а*) та інтегральна (*б*) функції трикутного закону розподілу

Точкові оцінки для трикутного закону розподілу

За достатнього обсягу даних $n > 50$ для оцінювання параметрів a та b можна рекомендувати прості оцінки:

$$a = \min(X)\,,\ b = \max(X)\,. \qquad (2.24)$$

Також як і для рівномірного розподілу ці оцінки не є стійкими до наявності спостережень з надмірною похибкою та значною мірою залежать від обсягу даних.

За обсягу даних $n \le 50$ більш доцільним є застосування таких оцінок:

$$a = \bar{x} - s\sqrt{6}\,,\ b = \bar{x} + s\sqrt{6}\,, \qquad (2.25)$$

де $\bar{x}$ – оцінка математичного сподівання; s – оцінка СКВ.

Для забезпечення стійкості до наявності у ряді спостережень з надмірною похибкою у виразі (2.25) замість оцінок $\bar{x}$ і s можна застосувати відповідні стійкі або зрізані оцінки, наприклад:

$$\bar{x} = \mathbf{Med}(x)\,,\ s = 1{,}75\mathbf{Med}(\Delta x)\,. \qquad (2.25)$$

Приклад 2.4. Під час вимірювань отримано такі результати:

15,223	14,993	14,969	14,609	13,092	17,015	14,110	16,816	15,073	12,842
13,696	13,781	11,578	14,693	15,335	14,722	18,462	16,297	16,721	16,168

Необхідно визначити значення параметрів a та b розподілу ряду спостережень, якщо прийняти гіпотезу про трикутний розподіл.

Розв'язання. За формулою (2.24): $a = 11{,}578$, $b = 18{,}462$.

За формулою (2.25): $\bar{x} = 15{,}010$, $s = 1{,}619$, $a = 15{,}010 - 6 \cdot 1{,}619 = 11{,}043$, $b = 15{,}010 + \sqrt{6} \cdot 1{,}619 = 18{,}997$.

За формулою (2.26) упорядковано початкові дані:

11,578	12,842	13,092	13,696	13,781	14,110	14,609	14,693	14,722	14,969
14,993	15,073	15,223	15,335	16,168	16,297	16,721	16,816	17,015	18,462

Значення медіани $\bar{x} = \mathbf{Med}(x) = 14{,}981$, значення різниць Δx_i (упорядковані за зростанням):

0,012	0,012	0,092	0,242	0,259	0,288	0,354	0,372	0,871	1,187
1,200	1,285	1,316	1,740	1,835	1,889	2,034	2,139	3,403	3,481

Відповідне значення медіани $\mathbf{Med}(\Delta x) = 1{,}193$, $s = 1{,}75 \cdot 1{,}193 = 2{,}037$.

Отже, $a = 14{,}981 - \sqrt{6} \cdot 2{,}037 = 9{,}991$, $b = 14{,}981 + \sqrt{6} \cdot 2{,}037 = 19{,}971$.

2.1.3. Оцінювання параметрів експоненційного розподілу

Щільність експоненціального розподілу ймовірностей випадкової величини (рис. 2.4, *а*) описується формулою

$$p(x;v) = \frac{1}{v}\exp\left(-\frac{x}{v}\right), \qquad x \ge 0,$$

де v – параметр розподілу.

Функція розподілу (рис. 2.4, *б*):

$$F(x;v) = 1 - \exp\left(-\frac{x}{v}\right).$$

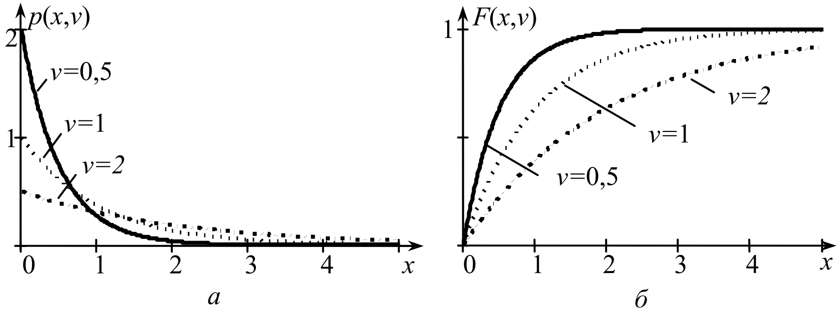


Рис. 2.4. Диференціальна (*а*) та інтегральна (*б*) функції експоненціального розподілу ймовірності

Експоненціальний розподіл широко застосовують для аналізу надійності технічних пристроїв. Тому становить інтерес оцінка параметра експоненціального розподілу стосовно різних програм випробувань на надійність. Як оцінюваний параметр у цьому випадку розглядається відповідно до теорії надійності інтенсивність відмов $\lambda = 1/v$.

Точкові оцінки

Оцінка параметра v за рядом спостережень x_i, $i = \overline{1,n}$:

$$\hat{v} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \ . \qquad (2.27)$$

Використовуючи зв'язок параметра v з медіаною можна запропонувати оцінку:

$$\hat{v} = \mathbf{Med}(x)/\ln(2)\,. \qquad (2.28)$$

Оцінювання за однією порядковою статистикою (квантильна оцінка)

Хартер і Епштейн запропонували оцінку параметра v, яка ґрунтується на одній порядковій статистиці x_r (на одному r-му за величиною спостереженні). Оцінка визначається за формулою

$$v_r = \frac{x_r}{\sum\limits_{i=1}^{r} a_i}, \text{ або } v_r = \frac{x_r}{\sum\limits_{i=0}^{r-1} a_{i+1}}, \qquad (2.29)$$

де $a_i = 1/(n-i+1)$.

Епштейн показав, що ефективність цієї оцінки порівняно з оцінкою v_0 не менша за 0,96 для $\frac{r}{n} \le \frac{2}{3}$ та 0,98 для $\frac{r}{n} \le \frac{1}{2}$.

Якщо задати рівень квантиля p, то значення $r = [np]$, де $[\cdot]$ – оператор заокруглення до цілого числа.

Інтервальні оцінки

Границі інтервальної оцінки параметра v (2.27) за довірчої ймовірності P розраховують за формулами:

$$v_{\text{н}}(n,P) = \frac{2\sum\limits_{i=1}^{n} x_i}{\chi^2_{\gamma'}},\ v_{\text{в}}(n,P) = \frac{2\sum\limits_{i=1}^{n} x_i}{\chi^2_{\gamma''}}, \qquad (2.30)$$

де $\chi^2_\gamma - \gamma$-квантиль розподілу хі-квадрат з $f = 2n$ степенями вільності; $\gamma' = \frac{1+P}{2}, \gamma'' = \frac{1-P}{2}$ – для двосторонньої оцінки і $\gamma' = P, \gamma'' = 1-P$ – для односторонньої.

На практиці інтервальні оцінки записують у формі

$$v_{\text{н}}(n,P)=\frac{2n\overline{x}}{\chi^2_{\gamma'}};\qquad v_{\text{в}}(n,P)=\frac{2n\overline{x}}{\chi^2_{\gamma''}},\qquad \text{де}\qquad \overline{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i.$$

Зазвичай використовують табульовані коефіцієнти оцінок

$$k_{\text{н}}=\frac{2n}{\chi^2_{\gamma'}};\;\; k_{\text{в}}=\frac{2n}{\chi^2_{\gamma''}}.$$

Значення коефіцієнтів $k_{\text{н}}$ і $k_{\text{в}}$ для двосторонньої інтервальної оцінки для $P=0{,}90$ і $P=0{,}95$ наведено в табл. 2.7.

Границі інтервальної оцінки параметра v визначеного за формулами (2.28), (2.29) для довірчої імовірності P розраховують за формулами:

$$v_{\text{н}}=k_{\text{н}}\hat{v},\; v_{\text{в}}=k_{\text{в}}\hat{v}, \tag{2.31}$$

значення коефіцієнтів $k_{\text{н}}$ і $k_{\text{в}}$ для двосторонньої інтервальної оцінки при $P=0{,}90$ і $P=0{,}95$ отримують з табл. 2.7 (для формули (2.29) приймають $n=r$).

Таблиця 2.7

Значення коефіцієнтів $k_{\text{н}}$ і $k_{\text{в}}$

n	**P = 0,90**		**P = 0,95**		**n**	**P = 0,90**		**P = 0,95**	
	$k_{\text{н}}$	**$k_{\text{в}}$**	**$k_{\text{н}}$**	**$k_{\text{в}}$**		**$k_{\text{н}}$**	**$k_{\text{в}}$**	**$k_{\text{н}}$**	**$k_{\text{в}}$**
1	0,334	19,496	0,271	39,498	**16**	0,693	1,594	0,647	1,750
2	0,422	5,628	0,359	8,257	**17**	0,700	1,569	0,654	1,717
3	0,477	3,669	0,415	4,849	**18**	0,706	1,547	0,661	1,687
4	0,516	2,928	0,456	3,670	**19**	0,712	1,527	0,668	1,661
5	0,546	2,539	0,488	3,080	**20**	0,717	1,509	0,674	1,637
6	0,571	2,296	0,514	2,725	**25**	0,741	1,438	0,700	1,545
7	0,591	2,131	0,536	2,487	**30**	0,759	1,389	0,720	1,482
8	0,608	2,010	0,555	2,316	**40**	0,785	1,325	0,750	1,400
9	0,624	1,917	0,571	2,187	**50**	0,804	1,283	0,772	1,347
10	0,637	1,843	0,585	2,085	**70**	0,830	1,232	0,802	1,283
11	0,649	1,783	0,598	2,003	**100**	0,855	1,189	0,830	1,229
12	0,659	1,733	0,610	1,935	**200**	0,894	1,128	0,875	1,154
13	0,669	1,691	0,620	1,878	**300**	0,912	1,103	0,896	1,124
14	0,677	1,654	0,630	1,829	**500**	0,931	1,078	0,918	1,094
15	0,685	1,622	0,639	1,787					

Приклад 2.5. Під час вимірювань отримано такі результати:

5,844	1,528	2,365	0,600	1,491	1,017	1,762	2,304	1,144	0,014
1,840	1,719	0,503	0,009	0,172	3,863	3,333	2,352	1,511	0,308

Необхідно оцінити значення параметрів розподілу ряду спостережень, якщо прийняти гіпотезу про експоненційний розподіл.

Розв'язання. Упорядкуємо початкові дані:

0,009	0,014	0,172	0,308	0,503	0,600	1,017	1,144	1,491	1,511
1,528	1,719	1,762	1,840	2,304	2,352	2,365	3,333	3,863	5,844

Визначимо точкові оцінки параметра v.

За формулою (2.27): $\sum_{i=1}^{15} x_i = 33{,}679,\ \hat{v} = 33{,}679/20 = 1{,}684$.

За формулою (2.28): $\mathbf{Med}(x) = 1{,}520,\ \ln(2) = 0{,}693,$
$\hat{v} = 1{,}520/0{,}693 = 2{,}193$.

За формулою (2.29) для рівня квантиля $p = 0{,}66$ – для розрахунку використаємо r-ту порядкову статистику $r = [0{,}66 \cdot 20] = 13$, $x_{13} = 1{,}840$,

$$\sum_{i=1}^{13} a_i = \frac{1}{20-1+1} + \frac{1}{20-2+1} + \ldots + \frac{1}{20-13+1} = 1{,}005,\ \hat{v} = \frac{1{,}840}{1{,}005} = 1{,}831.$$

Визначимо інтервальні оцінки параметра v:
з табл. 2.6 для $P = 0{,}95$ та $n = 20$ отримаємо $k_\text{н} = 0{,}674$ та $k_\text{в} = 1{,}637$, для $n = r = 13$ маємо $k_\text{н} = 0{,}620$; $k_\text{в} = 1{,}878$. Отже,
за формулою (2.34): $0{,}674 \cdot 1{,}684 \le \hat{v} \le 1{,}637 \cdot 1{,}684 \Rightarrow 1{,}135 \le \hat{v} \le 2{,}757$;
за формулою (2.35): $0{,}674 \cdot 2{,}193 \le \hat{v} \le 1{,}637 \cdot 2{,}193 \Rightarrow 1{,}478 \le \hat{v} \le 3{,}560$;
за формулою (2.35): $0{,}620 \cdot 1{,}831 \le \hat{v} \le 1{,}878 \cdot 1{,}831 \Rightarrow 1{,}135 \le \hat{v} \le 3{,}439$.

2.1.4. Оцінювання параметрів розподілу Вейбула

Розподіл Вейбула набув широкого застосування у теорії надійності. Такий розподіл має напрацювання на відмову деяких невідновлюваних виробів. До них відносяться, зокрема, вироби у яких відмова наступає унаслідок втомного руйнування. При оцінюванні надійності механічних вузлів цим законом описується надійність підшипників.

Щільність розподілу ймовірностей Вейбула випадкової величини (рис. 2.5, *а*) описується формулою

$$p(x;\alpha;\beta)=\frac{\beta}{\alpha^{\beta}}\cdot x^{\beta-1}\exp\left(-\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta},\quad x\geq 0,$$

або $p(x;\alpha;\beta;\mu)=\dfrac{\beta}{\alpha^{\beta}}\cdot(x-\mu)^{\beta-1}\exp\left(-\dfrac{x-\mu}{\alpha}\right)^{\beta},\quad x\geq\mu,$

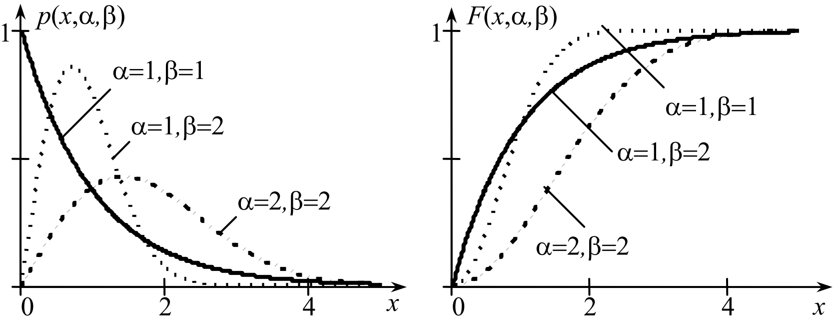
де α – параметр масштабу; β – параметр форми; μ – параметр зсуву.

Інтегральна функція закону розподілу Вейбула випадкової величини записується або в двопараметричній формі

$$F(x,\alpha,\beta)=1-\exp\left(-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta}\right),$$

або в три параметричній:

$$F(x)=1-\exp\left(-\left(\frac{x-\mu}{\alpha}\right)^{\beta}\right).$$



а *б*

Рис. 2.5. Диференціальна (*а*) та інтегральна (*б*) функції розподілу імовірності Вейбула

Розглянемо оцінки для двопараметричної форми.

Відомо, що випадкова величина $y=\ln x$ має розподіл найменших значень із функцією

$$F(y)=1-\exp\left(-\exp\left(\frac{y-u}{b}\right)\right).$$

Оцінки параметрів $\hat{u}$ і $\hat{b}$ пов'язані з оцінками $\hat{\alpha}$ і $\hat{\beta}$ співвідношеннями $\hat{\beta} = \frac{1}{\hat{b}}$ і $\hat{\alpha} = e^{\hat{u}}$.

Тому на практиці часто використовують такий прийом. Обробленням ряду величин $\ln x_i$ спочатку оцінюють параметри $\hat{u}$ і $\hat{b}$, а потім $\hat{\alpha}$ і $\hat{\beta}$.

Особливість розподілу Вейбулла – надзвичайно велике розмаїття форм кривих розподілу – зумовлює його широке застосування на практиці, тому вдосконалення методів оцінювання його параметрів актуально. Широкий огляд методів оцінювання параметрів розподілу Вейбула наведено в праці [26].

Точкові оцінки

Оцінка максимальної правдоподібності

За відомого параметра форми β оцінка для α має вигляд

$$\hat{\alpha} = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^{\beta} \right)^{\frac{1}{\beta}}. \tag{2.32}$$

За невідомого β спільні оцінки максимальної правдоподібності параметрів α і β є розв’язками системи рівнянь

$$\begin{cases} n\alpha^{\beta} - \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^{\beta} = 0, \\ \frac{n}{\beta} + \sum\limits_{i=1}^{n} \ln x_i - \frac{1}{\alpha^{\beta}} \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^{\beta} \ln x_i = 0. \end{cases} \tag{2.33}$$

У загальному випадку система (2.33) розв’язується методом послідовних наближень. Цікавий метод прискореного розв’язання наведеної системи рівнянь, запропонований в праці [26]. Система зводиться до іншої системи:

$$\begin{cases} \alpha = \left(\dfrac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^{\beta} \right)^{\frac{1}{\beta}}, \\ \dfrac{1}{\beta} + \dfrac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} \ln x_i - \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^{\beta} \ln x_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^{\beta}} = 0. \end{cases}$$

У праці [26] пропонується оцінка

$$\hat{\beta} = \left(\frac{s_3}{s_1} - \frac{s_2}{n} + \beta_0 \frac{s_3^2 - s_1 s_4}{s_1^2} \left[\left(\frac{s_3}{s_1} - \frac{s_2}{n} \right) \beta_0 - 1 \right] \right)^{-1}, \qquad (2.34)$$

де $\beta_0 = v^{-1.075}$; $\bar{x} = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} x_i$; $s = \sqrt{\dfrac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} \left(x_i - \bar{x} \right)^2}$; $v = \dfrac{s}{\bar{x}}$;

$s_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^{\beta_0}$; $s_2 = \sum\limits_{i=1}^{n} \ln x_i$; $s_3 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^{\beta_0} \ln x_i$; $s_4 = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^{\beta_0} \left(\ln x_i \right)^2$.

За оцінкою $\hat{\beta}$ обчислюється оцінка параметра α:

$$\hat{\alpha} = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^{\hat{\beta}} \right)^{\frac{1}{\hat{\beta}}}.$$

Оцінювання методом моментів

Метод моментів ґрунтується на прирівнюванні емпіричних моментів статистичного ряду до їх теоретичних значеннь, що є функціями параметрів розподілу. Залежність моментів розподілу Вейбула від його параметрів дуже складна (включає в себе комбінацію гамма-функцій). Тому найчастіше користуються заздалегідь підготовленими таблицями. Одна з них відтворена як табл. 2.8.

Порядок обчислення оцінок $\hat{\alpha}$ і $\hat{\beta}$ включає в себе послідовне обчислення:

$$\bar{x}, s, v, \hat{\beta} = v^{-1.075} \text{ та } \hat{\alpha} = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^{\hat{\beta}} \right)^{\frac{1}{\hat{\beta}}}. \qquad (2.35)$$

Таблиця 2.8

Залежність параметра β розподілу Вейбула від коефіцієнта варіації $v = s / \bar{x}$

v	**β**	***v***	**β**	***v***	**β**	***v***	**β**
3,14	0,400	1,80	0,588	0,910	1,10	0,547	1,90
2,93	0,417	1,67	0,625	0,837	1,20	0,523	2,00
2,75	0,435	1,55	0,667	0,775	1,30	0,496	2,10
2,57	0,455	1,43	0,714	0,723	1,40	0,480	2,20
2,40	0,476	1,32	0,769	0,681	1,50	0,461	2,30
2,24	0,500	1,21	0,833	0,640	1,60	0,444	2,40
2,08	0,526	1,10	0,909	0,605	1,70	0,428	2,50
1,94	0,556	1,00	1,000	0,575	1,80	0,365	3,00

Оцінювання методом квантилів

Позначимо через x_p і x_q відповідно p- і q- вибіркові квантилі розподілу Вейбула. Тоді оцінки параметрів розподілу Вейбула розраховують за формулами:

$$\hat{\beta} = \frac{\ln d_p - \ln d_q}{\ln x_p - \ln x_q}; \ \hat{\alpha} = \exp\left(-\frac{\ln x_p \ln d_q - \ln x_q \ln d_p}{\ln d_p - \ln d_q} \right), \qquad (2.36)$$

де $d_p = -\ln(1-p)$ і $d_q = -\ln(1-q)$.

У праці [26] показано, що найбільша ефективність оцінки $\hat{\alpha}$ досягається для p = 0,398 і q = 0,821 (d_p = 0,5074 і d_q = 1,7203), а $\hat{\beta}$ – для p = 0,167 і q = 0,974 (d_p = 0,1827 і d_q = 3,6496).

Рекомендується для спільної оцінки параметрів $\hat{\alpha}$ і $\hat{\beta}$ використовувати квантилі рівнів p = 0,2 і 0,95 (у цьому випадку ефективність оцінок не менша за 60% порівняно з оцінками максимальної правдоподібності (див. підрозділ 2.3.1) для всіх α і β). Відповідно:

$$\hat{\beta} = -2{,}59713 \ln\left(\frac{x_{0,2}}{x_{0,95}} \right)^{-1}; \ \hat{\alpha} = e^{\left(0{,}42246 \ln(x_{0,2}) + 0{,}57754 \ln(x_{0,95})\right)} \qquad (2.40)$$

Інтервальні оцінки

Границі інтервальної оцінки параметра α (для розглянутих вище методів оцінювання) за довірчої імовірності P розраховують за формулами:

$$\alpha_{\text{н}}(n,P)=\left(\frac{2\sum_{i=1}^{n}x_i^{\beta}}{\chi^2_{\gamma'}}\right)^{\frac{1}{\beta}};\ \alpha_{\text{в}}(n,P)=\left(\frac{2\sum_{i=1}^{n}x_i^{\beta}}{\chi^2_{\gamma''}}\right)^{\frac{1}{\beta}}$$

де $\chi^2_{\gamma}-\gamma$-квантиль розподілу хі-квадрат з $f=2n$ степенями вільності; $\gamma'=\dfrac{1+P}{2},\gamma''=\dfrac{1-P}{2}$ – для двосторонньої оцінки і $\gamma'=P,\gamma''=1-P$ – для односторонньої.

На практиці інтервальні оцінки записують у формі

$$\alpha_{\text{н}}(n,P)=k_{\text{н}}^{\frac{1}{\beta}}\cdot\bar{x}^{\frac{1}{\beta}};\ \alpha_{\text{в}}(n,P)=k_{\text{в}}^{\frac{1}{\beta}}\cdot\bar{x}^{\frac{1}{\beta}},\ \text{де}\ \bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^{\beta}.$$

Зазвичай використовують табульовані коефіцієнти оцінок:

$$k_{\text{н}}=\frac{2n}{\chi^2_{\gamma'}};\ k_{\text{в}}=\frac{2n}{\chi^2_{\gamma''}}.$$

Значення коефіцієнтів $k_{\text{н}}$ і $k_{\text{в}}$ для двосторонньої інтервальної оцінки для $P=0{,}90$ і $P=0{,}95$ наведено в табл. 2.7.

Границі інтервальної оцінки параметра β для довірчої ймовірності $P=0{,}95$ розраховують за формулами:

$$\beta_{\text{н}}(n)=\frac{\hat{\beta}}{k(n)};\ \beta_{\text{в}}(n)=\hat{\beta}k(n),\ \text{де}\ k(n)=1+\frac{2{,}05}{(n-3)^{0{,}55}}. \quad (2.37)$$

Приклад 2.6. Під час вимірювань отримано такі результати:

0,309	1,971	1,186	0,359	1,989	1,608	1,686	2,385	2,343	2,658
3,690	1,876	1,665	2,828	5,822	1,575	5,318	0,021	3,541	2,118

Необхідно визначити значення параметрів розподілу ряду спостережень, якщо прийняти гіпотезу про розподіл Вейбула.

Розв'язання. Упорядкуємо початкові дані:

0,021	0,309	0,359	1,186	1,575	1,608	1,665	1,686	1,876	1,971
1,989	2,118	2,343	2,385	2,658	2,828	3,541	3,690	5,318	5,822

Точкові оцінки параметрів α і β.

За формулою (2.32): для заданого значення $\beta = 2$ відповідне значення

$$\hat{\alpha} = \left(\frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{20}142{,}725\right)^{\frac{1}{2}} = 2{,}671.$$

За формулою (2.35): $\bar{x} = 2{,}247$, $s = 1{,}444$, $v = 1{,}444/2{,}247 = 0{,}643$,

$$\hat{\beta} = 0{,}643^{-1{,}075} = 1{,}609,\ \hat{\alpha} = \left(\frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20} x_i^{1{,}609}\right)^{\frac{1}{1{,}609}} = \left(\frac{1}{20}88{,}216\right)^{\frac{1}{1{,}609}} = 2{,}516.$$

За формулою (2.34): $\bar{x} = 2{,}247$, $s = 1{,}444$, $v = 1{,}444/2{,}247 = 0{,}643$,

$$s_1 = \sum_{i=1}^{20} x_i^{1{,}609} = 88{,}216,\ s_2 = \sum_{i=1}^{20} \ln(x_i) = 8{,}544,\ s_3 = \sum_{i=1}^{20} \ln(x_i)\cdot x_i^{1{,}609} = 104{,}487,$$

$$s_4 = \sum_{i=1}^{20} \ln(x_i)^2 \cdot x_i^{1{,}609} = 144{,}635,\ \beta_0 = 0{,}643^{-1{,}075} = 1{,}609;$$

$$\hat{\beta} = \left(\frac{104{,}487}{88{,}216} - \frac{8{,}544}{20} + 1{,}609\frac{104{,}487^2 - 88{,}216\cdot 144{,}635}{88{,}216^2}\times\right.$$

$$\left.\times\left[\left(\frac{104{,}487}{88{,}216} - \frac{8{,}544}{20}\right)1{,}609 - 1\right]\right)^{-1} = 1{,}483;$$

$$\hat{\alpha} = \left(\frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20} x_i^{1{,}483}\right)^{\frac{1}{1{,}483}} = \left(\frac{1}{20}76{,}185\right)^{\frac{1}{1{,}483}} = 2{,}464.$$

За формулою (2.36): для рівня квантилів $p = 0{,}4$ та $q = 0{,}8$ – для розрахунку використаємо порядкові статистику $r_p = [0{,}4\cdot 20] = 8$, $r_q = [0{,}8\cdot 20] = 16$, $x_8 = 1{,}686$, $x_{16} = 2{,}828$, $d_p = 0{,}5108$, $d_q = 1{,}6094$,

$$\hat{\beta} = \frac{\ln(0{,}5108) - \ln(1{,}6094)}{\ln(1{,}686) - \ln(2{,}828)} = 2{,}219;$$

$$\hat{\alpha} = \exp\left(-\frac{\ln(1{,}686)\ln(1{,}6094) - \ln(2{,}828)\ln(0{,}5108)}{\ln(0{,}5108) - \ln(1{,}6094)}\right) = e^{-(-0{,}825)}.$$

Інтервальна оцінка параметра α отриманого за формулою (2.35): з табл. 2.7 для $P = 0{,}95$ та $n = 20$ маємо значення $k_{н} = 0{,}674;$ $k_{в} = 1{,}637$,

$\bar{x} = \frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20} x_i^{1,609} = 4,411$. Отже, $0,674^{\frac{1}{1,609}} \cdot 4,411^{\frac{1}{1,609}} \le \hat{\alpha} \le 1,637^{\frac{1}{1,609}} \cdot 4,411^{\frac{1}{1,609}} \Rightarrow$

$\Rightarrow 1,969 \le \hat{\alpha} \le 3,418$.

Визначимо інтервальну оцінку параметра β отриманого за формулою (2.35):

для P = 0,95 та n = 20 маємо (2.37) $k(20) = 1 + \frac{2,05}{(20-3)^{0,55}} = 1,432$. Отже

$1,609/1,432 \le \hat{\beta} \le 1,609 \cdot 1,432 \Rightarrow 1,124 \le \hat{\beta} \le 2,303$.

2.1.5. Оцінювання параметрів гамма-розподілу

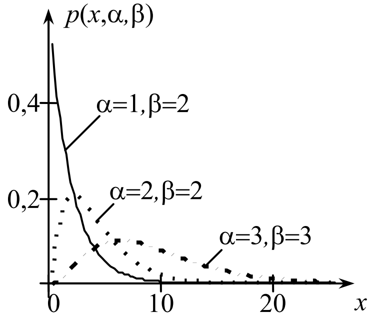
Щільність гамма-розподілу (рис. 2.5, *а*) має вигляд

$$p(x,\alpha,\beta) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}} = \frac{1}{(\alpha-1)!\beta^{\alpha}} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}};\ x,\beta > 0, \alpha > 1,$$

де α і β – параметри розподілу, що підлягають оцінюванню за вибірковими даними.

Інтегральна функція гамма-розподілу (рис. 2.5, *б*) не виражається елементарними функціями і має вигляд

$$F(x;\alpha;\beta) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}} \int_{-\infty}^{x} t^{\alpha-1} e^{-\frac{t}{\beta}} dt .$$



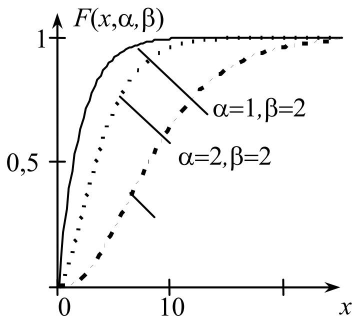


Рис. 2.5. Диференціальна (*а*) та інтегральна (*б*) функції гамма-розподілу ймовірності

Точкові оцінки

Оцінка β за відомого значення α

$$\hat{\beta} = \frac{\bar{x}}{\alpha}, \quad \text{де} \quad \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i. \tag{2.38}$$

Спільна оцінка параметрів α і β

Оцінки максимальної правдоподібності

Оцінки максимальної правдоподібності α і β за вибіркою обсягу n є розв'язком системи рівнянь

$$\begin{cases} -n\ln\beta - n\dfrac{\partial[\ln\Gamma(\alpha)]}{\partial\alpha} + \sum\limits_{i=1}^{n}\ln x_i = 0, \\ -n\beta\alpha + \sum\limits_{\iota=1}^{n} x_i = 0. \end{cases}$$

Систему можна розв'язати методом послідовних наближень. Коли α не дуже мала, можна використовувати таке наближення:

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\ln\Gamma(\alpha+1) \approx \ln\left(\alpha + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{24\left(\alpha + \dfrac{1}{20}\right)^2}.$$

Метод розв'язання системи рівнянь максимальної правдоподібності запропоновано у праці [26]. Запишемо систему рівнянь максимальної правдоподібності у вигляді

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n}\ln x_i - n[\ln\beta + \psi(\alpha)] = 0, \\ \sum\limits_{\iota=1}^{n} x_i - n\beta\alpha = 0, \end{cases}$$

де $\psi(\alpha)$ – логарифм похідної гамма-функції.

Пропонується розв'язання системи за допомогою параметра A:

$$A=\ln\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}{n\left(\prod\limits_{i=1}^{n}x_i\right)^{\frac{1}{n}}}=\ln\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)-\left(\ln(n)+\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}\ln(x_i)\right),\qquad(2.39)$$

що ґрунтується на апроксимації залежності α від A.

Із системи рівнянь (2.39) випливає $\ln\alpha-\psi(\alpha)=A$. У діапазоні значень $0{,}025\le A\le 8{,}2$ (що відповідає $0{,}10\le\alpha\le 20$) застосовною є апроксимація

$$\hat{\alpha}=\begin{cases}\left(\dfrac{C}{A}\right)^{0{,}9885}\exp\left[-0{,}187(C-A)\right], & A<C,\\ \left(\dfrac{C}{A}\right)^{0{,}8699}, & A\ge C,\end{cases}$$

де C = 0,5772 – стала Ейлера (відносна похибка апроксимації не перевищує 0,8%).

Параметр β оцінюється, як і раніше, за формулою $\hat{\beta}=\dfrac{1}{n\hat{\alpha}}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i$. Оцінка для a може бути спрощена:

$$\hat{\alpha}=\begin{cases}0{,}580859A^{-0{,}9885}e^{(0{,}108\cdot A)}, & \text{якщо } A<0{,}5772;\\ 0{,}619980A^{-0{,}8699}, & \text{якщо } A\ge 0{,}5772.\end{cases}\qquad(2.40)$$

Ще одну оцінку, що ґрунтується на апроксимації гамма-функції, розглянута в праці [26]. Пропонується розкладання гама-функції за формулою Стерлінга:

$$\Gamma(\alpha)\cong e^{-\alpha}\alpha^{\alpha-\frac{1}{2}}\sqrt{2\pi}\left(1+\frac{1}{12\alpha}+\frac{1}{288^2}\right).$$

У випадку використання перших трьох членів розкладання маємо оцінку

$$\frac{1}{\alpha}=-3+\sqrt{9+12(\ln(m_1)-m_2)},\qquad(2.41)$$

де $m_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i, \quad m_2 \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln x_i.$

Оцінка для β у цьому випадку, як і раніше, визначається за формулою $\hat{\beta} = \frac{m_1}{\hat{\alpha}} = \frac{\overline{x}}{\hat{\alpha}}.$

Незміщена оцінка для малих вибірок

У праці [26] запропоновано оцінку

$$\hat{\beta} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i \ln x_i\right) - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln x_i. \tag{2.42}$$

Її точність, незважаючи на простоту обчислень, цілком задовільна. Відповідно $\hat{\alpha} = \frac{\overline{x}}{\hat{\beta}}.$

Оцінка методом моментів

Метод застосовний у випадку, якщо $n \geq 50$. Оцінки мають вигляд

$$\hat{\alpha} = \left(\frac{\overline{x}}{s}\right)^2; \ \hat{\beta} = \frac{s^2}{\overline{x}}, \tag{2.43}$$

де $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i, \quad s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^2.$

Інтервальна оцінка параметра β

За відомого параметра α інтервальна оцінка для β має вигляд

$$k_{\text{н}} \frac{\overline{x}}{\alpha} \leq \beta \leq k_{\text{в}} \frac{\overline{x}}{\alpha}, \tag{2.44}$$

де $k_{\text{н}}$, $k_{\text{в}}$ – коефіцієнти, які беруть з табл. 2.7, із заміною n на $n\alpha$.

Приклад 2.7. Під час вимірювань отримано такі результати:

0,309	1,971	1,186	0,359	1,989	1,608	1,686	2,385	2,343	2,658
3,690	1,876	1,665	2,828	5,822	1,575	5,318	0,021	3,541	2,118

Необхідно визначити значення параметрів розподілу ряду спостережень, якщо прийняти гіпотезу про гамма-розподіл.

Розв'язання. Точкові оцінки параметрів α і β.

За формулою (2.38) – для заданого значення $\alpha = 2$ $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = 2{,}007$,

$\hat{\beta} = \frac{\bar{x}}{\alpha} = \frac{2{,}007}{2} = 1{,}004$.

За формулою (2.40): визначимо значення A (2.39):

$\ln\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) = \ln(40{,}141) = 3{,}692$, $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln(x_i) = \frac{1}{20}\cdot(8{,}627) = 0{,}431$,

$$A = \ln\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) - \left(\ln(n) + \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}\ln(x_i)\right) = 3{,}692 - (\ln(20) + 0{,}431) = 3{,}692 - 3{,}427 = 0{,}265.$$

Оскільки A < 0,5772, то $\hat{\alpha} = 0{,}580859 \cdot 0{,}265^{-0{,}9885} e^{0{,}108\cdot 0{,}265} = 2{,}219$,

відповідне значення $\hat{\beta} = \frac{\bar{x}}{\hat{\alpha}} = \frac{2{,}007}{2{,}219} = 0{,}904$.

За формулою (2.41): $m_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = 2{,}007$, $m_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln(x_i) = 0{,}431$;

$\hat{\alpha} = \frac{1}{-3 + \sqrt{9 + 12\cdot\left(\ln(2{,}007) - 0{,}431\right)}} = 2{,}039$, $\hat{\beta} = \frac{2{,}007}{2{,}039} = 0{,}984$.

за формулою (2.42) – $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i \ln(x_i)) = \frac{37{,}626}{20} = 1{,}881$, $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = 2{,}007$,

$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln(x_i) = 0{,}431$, $\hat{\beta} = 1{,}881 - 2{,}007\cdot 0{,}431 = 1{,}016$; $\hat{\alpha} = \frac{2{,}007}{1{,}016} = 1{,}976$.

За формулою (2.43) – $\bar{x} = 2{,}007$, $s = 1{,}445$, $\hat{\alpha} = \left(\frac{2{,}007}{1{,}445}\right)^2 = 1{,}929$,

$\hat{\beta} = \frac{1{,}445^2}{2{,}007} = 1{,}040$.

Інтервальна оцінка β за відомого α

Нехай $\alpha = 2$ і довірча ймовірність $P = 0{,}95$. Оскільки $\bar{x} = 2{,}007$, з табл. 2.7 для $n\alpha = 20\cdot 2 = 40$, отримуємо $k_{\text{н}} = 0{,}750$ і $k_{\text{в}} = 1{,}400$, остаточно за формулою (2.44)

$$0{,}750\cdot\frac{2{,}007}{2} \le \beta \le 1{,}400\cdot\frac{2{,}007}{2}\cdot 2{,}007 \Rightarrow \quad 0{,}753 \le \beta \le 1{,}405.$$

2.2. Оцінювання без наявності інформації про закону розподілу ймовірностей

2.2.1. Оцінки для центра розподілу

Як первинні (досить грубі) оцінки центра групування значень випадкових величин за невідомого закону розподілу ймовірностей можуть бути використані різні граничні нерівності, які дають змогу отримати певні інтервальні оцінки центру розподілу.

Нерівність Чебишева

Нерівність Чебишева має вигляд

$$P\left(\left|x-\mu\right| \ge k\sigma\right) < \frac{1}{k^2},$$

де μ і σ – відповідно середнє значення та стандартне відхилення розподілу ймовірності.

З нерівності Чебишева випливає, що

$$x - \frac{\sigma}{\sqrt{1-P}} \le \mu \le x + \frac{\sigma}{\sqrt{1-P}},$$

де P – довірча ймовірність.

Якщо замість значення випадкової величини x використовується вибіркове середнє $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$, то виконується нерівність

$$\bar{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n(1-P)}} \le \mu \le \bar{x} + \frac{\sigma}{\sqrt{n(1-P)}}.$$

Якщо відомо, що розподіл симетричний відносно центра μ, то відповідний довірчій інтервал визначається як:

$$x - \frac{2\sigma}{3\sqrt{1-P}} \le \mu \le x + \frac{2\sigma}{3\sqrt{1-P}}$$

або $\bar{x} - \frac{2\sigma}{3\sqrt{n(1-P)}} \le \mu \le \bar{x} + \frac{2\sigma}{3\sqrt{n(1-P)}}.$

Звідси легко бачити, що тільки знання того факту, що розподіл випадкової величини симетричний, вже дозволяє побудувати більш вузький довірчий інтервал для центра розподілу.

Нерівність Менделя

Якщо розподіл випадкової величини *X* має єдиний максимум у точці μ_0, причому

$$\tau = \sigma^2 + (\mu - \mu_0)^2, s = \frac{|\mu - \mu_0|}{\sigma},$$

то виконується нерівність

$$P(|x - \mu_0| > \lambda\tau) \le \begin{cases} 1 - \frac{\lambda}{\sqrt{3}}, & \lambda \le \frac{2}{\sqrt{3}}; \\ \frac{4\lambda^2}{9}, & \lambda > \frac{2}{\sqrt{3}}, \end{cases}$$

звідки

$$x - \sqrt{3}(1 - P)\tau \le \mu \le x + \sqrt{3}P\tau; \quad \lambda \le \frac{2}{\sqrt{3}}$$

або

$$x - \frac{3}{2}P\tau \le \mu \le x + \frac{3}{2}P\tau.$$

2.2.2. Оцінювання розсіяння розподілу

Певне уявлення про ступінь розсіяння неперервного розподілу дають його вибіркові квантилі. У загальному випадку довірчий інтервал для p-квантилів обмежений елементами впорядкованої за зростанням вибірки з номерами r і s, оскільки довірча ймовірність

$$P = I_p(r, n - r + 1) - I_p(s, n - s + 1) = \sum_{i=r}^{s-1} C_n^i p^i (1 - p)^{n-i} = P(x_r \le x_p \le x_s),$$

де $I_p(a,b)$ – функція бета-розподілу з параметрами a і b.

Якщо $s = n - r + 1$ (випадок симетричного інтервалу), то $P = \sum_{i=r}^{n-r} C_n^i p^i (1 - p)^{n-i}$.

Значення r і s, якщо p = 0,25 і p = 0,75 (тобто для 25% - і 75%-х квантилів – квартилей), для різних n і α наведено в праці [26].

Різниця між $x_{0,75}$ і $x_{0,25}$, названа інтерквартільною шириною, є характеристикою ступеня розсіяння розподілу відносно його центра.

Контрольні запитання та завдання

1. Які параметри визначають закон розподілу Гаусса?
2. Наведіть відомі вам методи отримання точкових оцінок параметрів закону розподілу Гаусса.
3. Наведіть відомі вам методи отримання інтервальних оцінок параметрів закону розподілу Гаусса.
4. Зобразіть графічно щільність розподілу ймовірності для законів Гаусса, рівномірного, трикутного, Вейбула, експоненційного та гамма-розподілу для різних значень відповідних параметрів.
5. Для даних табл. Д2.1 дод. 2 згідно з варіантом визначте оцінки математичного сподівання та СКВ, вважаючи, що дані мають закон розподілу Гаусса.
6. Для даних табл. Д2.2 дод. 2 згідно з варіантом визначте оцінки параметрів, для випадків, що закон розподілу даних експоненційний або Вейбула.
7. Запишіть десять довільних чисел від 10 до 30. Оцініть статистичні характеристики отриманого ряду, якщо припустити рівномірний або трикутний закон розподілу. Окрім основних, застосуйте оцінки (2.22), (2,24) та (2.25), (2,26).

3. МЕТОДИ ВИЗНАЧЕННЯ ЗАКОНУ РОЗПОДІЛУ ДАНИХ

Вибір методу та правильне оцінювання закону розподілу даних (випадкових похибок) є важливим етапом опрацювання експериментальних даних, оскільки від виду закону розподілу залежить значення довірчих границь випадкової похибки. На практиці існує два загальні підходи до визначення закону розподілу даних (див. рис. 3.1).

Перший підхід застосовують за наявності достатнього (20...100 і більше) обсягу результатів спостережень і полягає у використанні критеріїв згоди для ***згрупованих*** даних. Такі критерії потребують попередньої побудови таких оцінок закону розподілу, як полігон частот, гістограма, емпіричні функції розподілу, за виглядом яких висувають гіпотезу про закон розподілу. Але необхідно враховувати, що групування даних призводить до втрати інформації.

Другий підхід ґрунтується на застосуванні спеціалізованих критеріїв згоди для ***повних*** даних за наявності обмеженої кількості даних або якщо неможливо побудувати зазначені оцінки закону розподілу (рис. 3.1). Для цього підходу необхідна апріорна інформація про закон розподілу. Найбільш розвинені критерії для закону розподілу Гаусса.

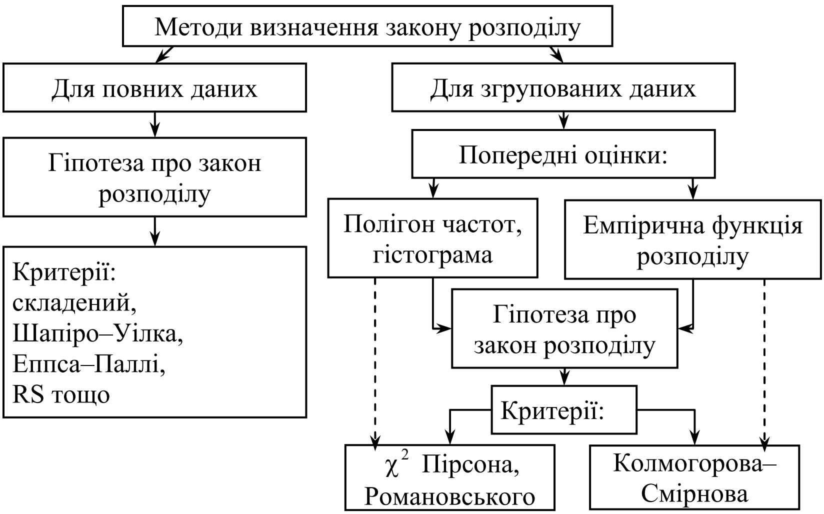


Рис. 3.1. Загальна методика визначення закону розподілу ряду спостережень

3.1. Попереднє визначення закону розподілу даних за діаграмою $\beta_1\beta_2$

Питання підбору розподілів для експериментальних даних має довгу історію розвитку; натепер запропоновано багато різних методів його розв'язання. Найбільш поширені з них пов'язані із застосуванням розподілу Гаусса. Згідно із центральною граничною теоремою розподіл Гаусса прийнятний для опису багатьох (хоча і не всіх) реальних явищ. Серед інших розподілів найбільш вживаними є гамма-розподіл і логарифмічно нормальний розподіл, які використовувалися для опису випадкових величин, обмежених з одного боку, так само, як бета-розподіл – для опису випадкових величин, обмежених згори і знизу.

На рис. 3.2 показано області в площині (β_1, β_2) для різних розподілів – розподілу Гаусса, бета-розподілу (окремий випадок – експоненціальний розподіл) і логарифмічно нормального, де β_1 – квадрат нормованого показника асиметрії, а β_2 – нормований показник ексцесу

$$\beta_1 = \sqrt{\frac{\mu_3}{(\mu_2)^{3/2}}}; \quad \beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2}, \tag{3.1}$$

де μ_j – центральні моменти випадкової величини X j-го порядку, оцінки яких розраховують за вибіркою x_i обсягом n:

$$\hat{\mu}_j = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^j .$$

Сюди входить також t-розподіл Стьюдента – симетричний розподіл, що сходиться до нормального, коли його параметр (кількість степенів вільності) довільно збільшується.

Для будь-якого Гауссівського розподілу $\beta_1 = 0$ і $\beta_2 = 3$. Тому на рис. 3.2 цей розподіл зображено однією точкою, так само, як експоненціальний ($\beta_1 = 4{,}0$ і $\beta_2 = 9{,}0$) і рівномірний ($\beta_1 = 0$ і $\beta_2 = 1{,}8$) розподіли. Це пояснюється тим, що у цих розподілів немає параметра форми і тому вони мають єдину форму. Гамма-розподіл, логарифмічно нормальний розподіл і t-розподіл Стьюдента зображено прямими. Отже, гамма-розподіл можна підібрати для усіх значень β_1 і β_2, що лежать поблизу середньої прямої.

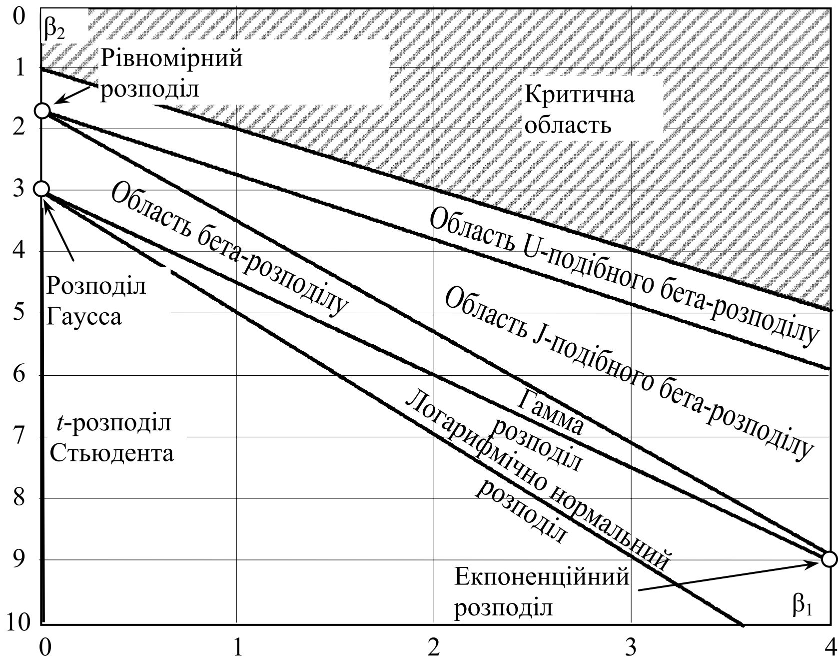


Рис. 3.2. Області для різних розподілів у площині (β_1 , β_2)

Відзначимо також, що крива для гамма-розподілу проходить поблизу кривої для логарифмічно нормального розподілу. Це допомагає пояснити той факт, що емпіричні дані часто можуть бути однаково задовільно (або однаково незадовільно) описані як гамма-розподілом, так і логарифмічно нормальним розподілом. Бета-розподіл, що має два параметри форми, займає на рис. 3.2 певну область і, отже, він є більш загальним, ніж інші розподіли.

Проте велика область значень β_1 і β_2 не охоплена жодним з розглянутих раніше розподілів. Такі розподіли можуть бути описані спеціальними сімействами розподілів, наприклад Джонсона або Пірсона.

Для застосування графіків, зображених на рис. 3.2, необхідно знати значення β_1 і β_2, які зазвичай бувають невідомі. Проте ці прямі можна використовувати на етапі попереднього аналізу для того, щоб дізнатися, чи будуть отримані дані належним чином описані одним з наведених на рис. 3.2 розподілів. Це виконується шляхом знаходження вибіркових оцінок b_1 і b_2 (у формулу (3.1) підставляють вибіркові оцінки відповідних моментів) і нанесення точки (b_1, b_2) на рис. 3.2. Якщо ця точка лежатиме досить близько від точки, прямої або області, що відповідає одному з названих вище розподілів, то останній може бути використаний для опису емпіричних даних. Після цього можна приступити до знаходження оцінок параметрів розподілу, використовуючи відповідні формули [19; 25; 26].

Застосовуючи цей метод необхідно враховувати два важливі обмеження. По-перше, для будь-якої множини даних значення b_1 і b_2 є лише оцінками для β_1 і β_2 які схильні до коливань від вибірки до вибірки. Дійсно, вивчаючи формули (3.1), бачимо, що ці оцінки дуже чутливі до невеликої кількості крайніх (з надмірною похибкою) значень вибірки. Тому методи, викладені в цьому розділі, необхідно використовувати з обережністю, особливо коли кількість спостережень невелика, наприклад, менша за 200. По-друге, у загальному випадку форма розподілу не визначається однозначно його нормованими показниками асиметрії і ексцесу. Отже, підбір розподілу для опису певної множини емпіричних даних за допомогою рис. 3.2 не гарантує адекватності вибраної моделі. Зазвичай потрібно складати таблицю частот і порівнювати підібраний розподіл з фактичними даними.

3.2. Методи з групуванням даних

Розглянуті у підрозділі методи застосовують загальні критерії згоди, які полягають у порівнянні вибіркових групових оцінок емпіричних даних (гістограми, полігону частот тощо) з теоретичними, заздалегідь відомими функціями розподілу. Всі відомі загальні критерії згоди можна розбити на три основні групи:

- критерії, що ґрунтуються на вивченні різниці між теоретичною щільністю розподілу і емпіричною гістограмою;
- критерії, що ґрунтуються на відстані між теоретичною і емпіричною функціями розподілу імовірності;
- кореляційно-регресійні критерії, що ґрунтуються на вивченні кореляційних та регресійних зв’язків між емпіричними та теоретичними порядковими статистиками.

3.2.1. Аналіз варіаційних рядів

Полігоном частот для неперервного розподілу називають ламану лінію, відрізки якої з'єднують точки $(\bar{x}_1, \hat{m}_1), (\bar{x}_2, \hat{m}_2), \ldots,$ $(\bar{x}_j, \hat{m}_j)$, де $\bar{x}_j$ – середини інтервалів, на які розбито область значень величини X; $\hat{m}_j$ – частоти спостережуваних значень у j-му інтервалі, $j = \overline{1, l}$, l – кількість інтервалів. Якщо немає іншої інформації, областю значень величини X є інтервал від мінімального до максимального значення, визначених за аналізованим рядом спостережень. Частоти визначають як кількість значень ряду, які лежать у межах j-го інтервалу.

Нагадаємо, що полігон відносних частот – ламана лінія, відрізки якої з'єднують точки $(\bar{x}_1, \hat{m}_1 / n), (\bar{x}_2, \hat{m}_2 / n), \ldots,$ $(\bar{x}_j, \hat{m}_j / n)$, де $\bar{x}_j$ – середини інтервалів, на які розбито область значень величини X; $\hat{m}_j$ – відповідні частоти; n – обсяг спостережень.

Гістограма – східчаста фігура, яка складається з прямокутників, основи яких відповідають довжині інтервалів h, а висоти дорівнюють відношенню $\hat{m}_j / (nh)$. Площа гістограми завжди дорівнює одиниці.

Емпірична функція розподілу (функція розподілу вибірки) – це функція $F(x)$, яка визначає для кожного значення x відносну частоту події $X < x$:

$$F(x) = n_x / n,$$

де n_x – кількість варіант, менших за x; n – обсяг вибірки.

Емпірична функція розподілу має такі властивості:

1) область значень функції $[0,1]$;

2) функція $F(x)$ – неспадна;

3) якщо x_1 – найменша варіанта, x_k – найбільша, то $F(x) = 0$, якщо $x < x_1$, та $F(x) = 1$, якщо $x > x_k$.

Методика побудови полігону частот та гістограми

1. Визначаються мінімальне $x_{\min}$ та максимальне $x_{\max}$ вибіркові значення.

2. Експериментальні дані розбиваються на l інтервалів. У випадку $n < 100$ кількість інтервалів визначають як найближче ціле від кореня квадратного з обсягу ряду спостережень n ($l = [\sqrt{n}]$). Якщо обсяг даних $n > 100$, то за формулою Старджесса отримують $l = [1 + 3{,}31\lg(n)]$. Рекомендується обирати непарне значення l.

3. Визначається ширина інтервалів гістограми $h = (x_{\max} - x_{\min}) / l$.

4. Визначаються границі інтервалів $int_j = x_{\min} + j \cdot h,\ j = 0 \ldots l$ та середини інтервалів $\bar{x}_j = (int_j + int_{j-1}) / 2,\ j = 1 \ldots l$.

5. Розраховуються емпіричні частоти $\hat{m}_j$ – кількість значень ряду, що потрапили в j-й інтервал ($\hat{m}_j = \hat{m}_j + 1$ якщо $int_{j-1} \le x_i < int_j, i = 1 \ldots n, j = 1 \ldots l$).

6. Будується полігон частот (рис. 3.3).

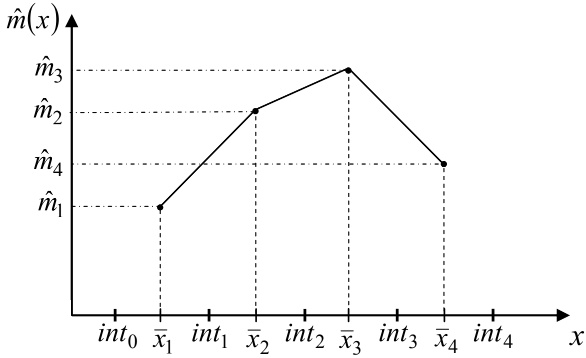


Рис. 3.3. Полігон частот

7. Розраховуються оцінки гістограми $p_j = \hat{m}_j / (n \cdot h)$; якщо будь-яке значення $p_j = 0$, то необхідно зменшити кількість інтервалів l, або об'єднати сусідні інтервали.

8. Будується гістограма за виглядом якої висувається гіпотеза про тип закону розподілу (рис. 3.4). Приклад побудови гістограми за вибірковими даними розглянуто у прикладі 3.2.

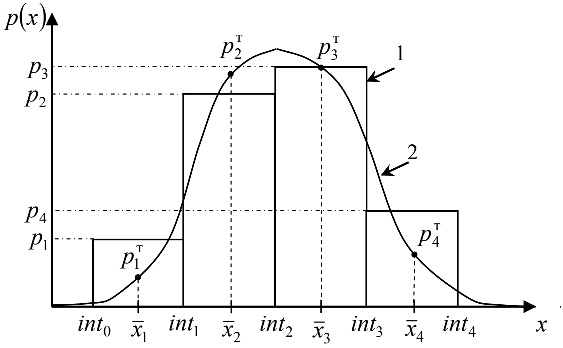


Рис. 3.4. Гістограма (*1*) та щільність розподілу за висунутою гіпотезою (*2*)

Методика оцінювання інтегральної функції розподілу

1. Визначають мінімальне $x_{\min}$ та максимальне $x_{\max}$ вибіркові значення.

2. Експериментальні дані розбивають на l інтервалів. Кількість інтервалів визначають як найближче ціле від кореня квадратного з обсягу ряду спостережень n ($l = [\sqrt{n}]$), якщо $n < 100$. Якщо обсяг даних $n > 100$, то за формулою Старджесса $l = [1 + 3{,}31\lg(n)]$.

3. Визначають ширину інтервалів $h = (x_{\max} - x_{\min}) / l$.

4. Визначають границі інтервалів $int_j = x_{\min} + j \cdot h,\ j = \overline{0, l}$ та середини інтервалів $\bar{x}_j = \left(int_j + int_{j-1}\right)/2,\ j = \overline{1, l}$.

5. Розраховуються емпіричні частоти $\hat{m}_j$ – кількість значень ряду, що потрапили в j-й інтервал ($\hat{m}_j = \hat{m}_j + 1$, якщо $int_{j-1} \le x_i < int_j, i = 1 \ldots n, j = \overline{1, l}$).

6. Розраховують відносні частоти $\tilde{m}_j = \hat{m}_j / n$.

7. Розраховують оцінки інтегральної функції розподілу $F_j = \sum_{i=1}^{j} \tilde{m}_i,\ j = \overline{1, l}$.

8. Будують оцінку інтегральної функції розподілу, за виглядом

якої висувається гіпотеза про тип закону розподілу (рис. 3.5).

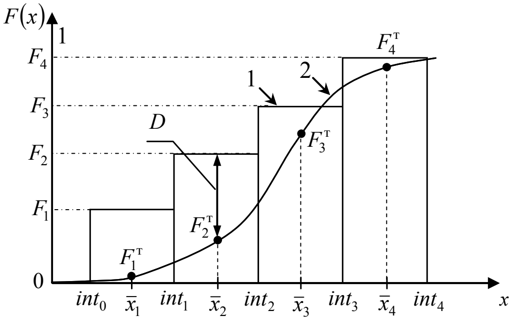


Рис. 3.5. Емпірична (*1*) і теоретична (*2*) функції розподілу

3.2.2. Перевірка гіпотез про згоду оцінки закону розподілу з теоретичною моделлю

Критерій χ^2 Пірсона

1. За досліджуваною вибіркою розраховують параметри для обраної функції щільності $p(x)$. *Наприклад для нормального закону це оцінки математичного сподівання $\bar{x}$ і СКВ s.*

2. За обраною функцією щільності $p(x)$ та розрахованими значеннями інтервалів гістограми $\bar{x}_j$ визначаються відповідні теоретичні значення $p_j^{\text{т}} = p(\bar{x}_j)$ (див. рис. 3.4).

3. Розраховуються теоретичні частоти для всіх інтервалів $m_j^{\text{т}} = p_j^{\text{т}} nh$.

4. Розраховується статистика χ_p^2:

$$\chi_p^2 = \sum_{j=1}^{l} \frac{(\hat{m}_j - m_j^{\text{т}})^2}{m_j^{\text{т}}} = nh \sum_{j=1}^{l} \frac{(p_j - p_j^{\text{т}})^2}{p_j^{\text{т}}}. \qquad (3.2)$$

Якщо $\chi_p^2 < \chi_\alpha^2(\nu)$, приймається гіпотеза про обраний закон розподілу.

Значення $\chi_\alpha^2(\nu)$ знаходять за таблицями χ^2-розподілу (табл. 3.1 або табл. Д1.4 дод. 1), значення $\nu = l - k - 1$, k – кількість параметрів обраного закону розподілу.

Таблиця 3.1

Граничні значення статистики $\chi^2_\alpha(\nu)$

ν	Рівень значущості α			ν	Рівень значущості α		
	0,1	**0,05**	**0,01**		**0,1**	**0,05**	**0,01**
1	2,71	3,84	6,64	**11**	17,3	19,7	24,7
2	4,61	5,99	9,21	**12**	18,5	21,0	26,2
3	6,25	7,81	11,3	**13**	19,8	22,4	27,7
4	7,78	9,49	13,3	**14**	21,1	23,7	29,1
5	9,24	11,1	15,1	**15**	22,3	25	30,6
6	10,6	12,6	16,8	**16**	23,5	26,3	32,0
7	12,0	14,1	18,5	**17**	24,8	27,6	33,4
8	13,4	15,5	20,1	**18**	26,0	28,9	34,8
9	14,7	16,9	21,7	**19**	27,2	30,1	36,2
10	16,0	18,3	23,2	**20**	28,4	31,4	37,6

Приклад 3.2. В експерименті були отримані такі результати спостережень x_i :

9,6 9,3 9,5 9,0 8,0 10,2 11,0 10,6 12,0 10,8 10,9 10,6 10,6 10,7 9,0

Необхідно визначити закон розподілу експериментальних даних із використанням гістограми.

Розв'язання.

1. Мінімальне значення $x_{\min} = 8$, максимальне $x_{\max} = 12$.

2. Кількість інтервалів $l = [\sqrt{n}] = [\sqrt{15}] = 4$.

3. Ширина інтервалів гістограми $h = (12 - 8)/4 = 1$.

4. Границі інтервалів для x:

$int_0 = 8 + 0 \cdot 1 = 8, int_1 = 8 + 1 \cdot 1 = 9, int_2 = 10, int_3 = 11, \quad int_4 = 12$.

Середні значення інтервалів гістограми

$\bar{x}_1 = 8{,}5,\ \bar{x}_2 = 9{,}5,\ \bar{x}_3 = 10{,}5,\ \bar{x}_4 = 11{,}5$.

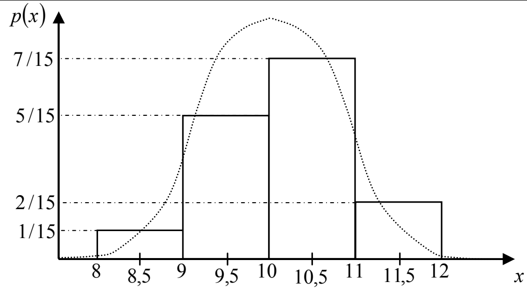
5. Емпіричні частоти (за впорядкованою вибіркою):

$$\underbrace{8{,}0}_{\hat{m}_1 = 1}\ \underbrace{9{,}0\ 9{,}0\ 9{,}3\ 9{,}5\ 9{,}6}_{\hat{m}_2 = 5}\ \underbrace{10{,}2\ 10{,}4\ 10{,}6\ 10{,}6\ 10{,}7\ 10{,}8\ 10{,}9}_{\hat{m}_3 = 7}\ \underbrace{11{,}0\ 12{,}0}_{\hat{m}_4 = 2}$$

6. Оцінки значень гістограми $p_1 = 1/(15 \cdot 1), p_2 = 5/15, p_3 = 7/15,$

$p_4 = 2/15$.

7. Отримана гістограма:



Застосуємо критерій χ^2 Персона для перевірки гіпотези про згоду закону розподілу вибірки із законом Гаусса.

1. За модель обираємо закон розподілу Гаусса, функція щільності $p(x)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$. Оцінкою μ є середнє арифметичне $\overline{x}=10{,}12$, оцінкою σ – СКВ, $s=1{,}05$.

2. За обраною функцією щільності $p(x)$ визначимо відповідні теоретичні значення, підставивши замість x середні значення інтервалів гістограми $\overline{x}_j$:

$$p_1^{\text{т}}=\frac{1}{1{,}05\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(8{,}5-10{,}12)^2}{2(1{,}05)^2}}=0{,}116\,;\ p_2^{\text{т}}=\frac{1}{1{,}05\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(9{,}5-10{,}12)^2}{2(1{,}05)^2}}=0{,}319\,,$$

$$p_3^{\text{т}}=0{,}355,\ p_4^{\text{т}}=0{,}161\,.$$

3. Визначимо теоретичні частоти для всіх інтервалів $m_1^{\text{т}}=0{,}116\cdot 15\cdot 1=1{,}741,\quad m_2^{\text{т}}=4{,}778, m_3^{\text{т}}=5{,}324, m_4^{\text{т}}=2{,}408$.

4. Статистика χ_p^2 (див. формулу (3.2)):

$$\chi_p^2=\frac{(1-1{,}741)^2}{1{,}741}+\frac{(5-4{,}778)^2}{4{,}778}+\frac{(7-5{,}324)^2}{5{,}324}+\frac{(2-2{,}408)^2}{2{,}408}=2{,}494\,.$$

Граничне значення $\chi_\alpha^2(v)=\chi_{0,05}^2(1)=3{,}84$ ($\nu=4-2-1=1$). Отже, (табл. 3.1) $\chi_p^2=2{,}494<\chi_\alpha^2(v)=3{,}84$, тому приймається гіпотеза про те, що закон розподілу результатів гауссівський.

Критерій Колмогорова–Смірнова

Як міра розбіжності між емпіричним і теоретичним законами розподілу в критерії Колмогорова–Смірнова вибрано максимальне значення D модуля різниці між емпіричною функцією розподілу $F(x)$ і вибраною теоретичною функцією розподілу $F^{\text{т}}(x)$:

$$D = \max\left|F^{\text{т}}(x) - F(x)\right|.$$

А. Н. Колмогоров довів, що незалежно від вигляду передбачуваної функції розподілу неперервної випадкової величини X у разі необмеженого збільшення кількості незалежних вимірювань n імовірність нерівності $D\sqrt{n} \le \lambda$ наближається до межі ймовірності $P(\lambda)$, що дорівнює:

$$P(\lambda) = 1 - \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k e^{-2k^2\lambda^2} . \tag{3.3}$$

Послідовність застосування критерію:

1. Будують оцінку інтегральної функції розподілу $F(x)$, за графіком якої виноситься гіпотеза про тип закону розподілу; відповідну інтегральну функцію $F^{\text{т}}(x)$ наносять на той самий графік (рис. 3.5).

2. Знаходять максимальне значення D модуля різниці між $F(x)$ і $F^{\text{т}}(x)$ (рис. 3.5).

3. Знаходять величину λ:

$$\lambda = D\sqrt{n} . \tag{3.4}$$

4. Рішення щодо гіпотези про закон розподілу приймають двома способами:

1) якщо для заданої ймовірності P, $\lambda < \lambda(P)$, то приймається гіпотеза про те, що закон розподілу $F(x)$ відповідає обраному $F^{\text{т}}(x)$. Значення $\lambda(P)$ наведено в табл. 3.2;

2) за обчисленим значенням λ за формулою (3.3) або табл. 3.3 визначають імовірність $P(\lambda)$ як імовірність того, що за рахунок випадкових причин максимальна розбіжність між емпіричною і теоретичною функціями розподілу буде не меншою від отриманої за результатами вимірювань. Отже, якщо ймовірність $P(\lambda)$ досить

велика, то гіпотезу про відповідність експериментального розподілу $F(x)$ теоретичному $F^{\text{т}}(x)$ слід розглядати як правдоподібну, що не суперечить експериментальним даним.

Таблиця 3.2

Граничні значення статистики $\lambda(P)$

P	0,99	0,95	0,9
$\lambda(P)$	0,44	0,52	0,57

Таблиця 3.3

Значення імовірності $P(\lambda)$

λ	$P(\lambda)$	λ	$P(\lambda)$	λ	$P(\lambda)$
0,0	1,000	0,7	0,711	1,2	0,112
0,3	1,000	0,8	0,544	1,3	0,068
0,4	0,997	0,9	0,393	1,4	0,040
0,5	0,964	1	0,270		
0,6	0,864	1,1	0,178		

Приклад 3.3. В експерименті отримано такі результати спостережень x_i :

9,6 9,3 9,5 9,0 8,0 10,2 11,0 10,6 12,0 10,8 10,9 10,6 10,6 10,7 9,0

Необхідно визначити закон розподілу експериментальних даних із використанням емпіричної інтегральної функції розподілу.

Розв'язання.

1. Мінімальне значення $x_{\min} = 8$, максимальне $x_{\max} = 12$.

2. Кількість інтервалів $l = [\sqrt{n}] = [\sqrt{15}] \approx 4$.

3. Ширина інтервалів гістограми $h = (12-8)/4 = 1$.

4. Границі інтервалів

$int_0 = 8 + 0 \cdot 1 = 8, int_1 = 8 + 1 \cdot 1 = 9, int_2 = 10, int_3 = 11, \quad int_4 = 12$.

Середні значення інтервалів гістограми

$\overline{x}_1 = 8{,}5, \overline{x}_2 = 9{,}5, \overline{x}_3 = 10{,}5, \overline{x}_4 = 11{,}5$.

5. Емпіричні частоти (за впорядкованою вибіркою)

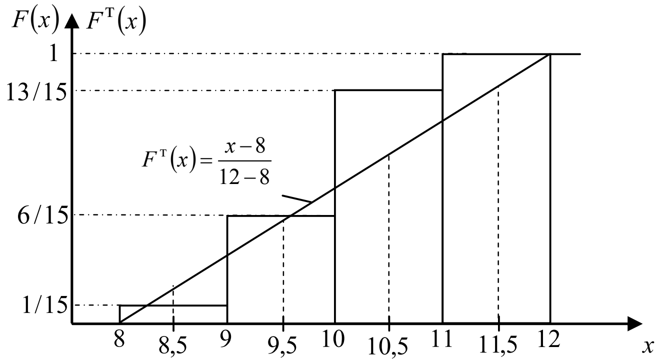
$$\underbrace{8{,}0}_{\hat{m}_1 = 1}\ \underbrace{9{,}0\ 9{,}0\ 9{,}3\ 9{,}5\ 9{,}6}_{\hat{m}_2 = 5}\ \underbrace{10{,}2\ 10{,}4\ 10{,}6\ 10{,}6\ 10{,}7\ 10{,}8\ 10{,}9}_{\hat{m}_3 = 7}\ \underbrace{11{,}0\ 12{,}0}_{\hat{m}_4 = 2}$$

6. Відносні частоти становлять

$\widetilde{m}_1 = 1/15, \widetilde{m}_2 = 5/15, \widetilde{m}_3 = 7/15, \widetilde{m}_4 = 2/15$.

7. Оцінки інтегральної функції розподілу
$F_1 = 1/15, F_2 = 6/15, F_3 = 13/15, F_4 = 15/15$.

8. Отримана оцінка інтегральної функції розподілу:



Застосуємо критерій Колмогорова–Смірнова

1. За модель обираємо рівномірний закон розподіл з інтегральною функцією розподілу вигляду $F^{\text{т}}(x) = \begin{cases} 0\ , x < a, \\ \dfrac{x-a}{b-a}\ , a \le x \le b, \\ 1, x > b. \end{cases}$ Оцінкою a є мінімальне значення ряду спостережень $a = 8$, оцінкою b – максимальне, $b = 12$.

2. За обраною функцією розподілу $F^{\text{т}}(x)$ визначимо відповідні теоретичні значення, підставивши замість x середні значення інтервалів гістограми $\overline{x}_j$:

$$F_1^{\text{т}} = \frac{8{,}5-8}{12-8} = 0{,}125\ ;\ F_2^{\text{т}} = \frac{9{,}5-8}{12-8} = 0{,}375\ ;\ F_3^{\text{т}} = 0{,}625;\ F_4^{\text{т}} = 0{,}875\ .$$

3. Знаходимо модулі різниці між емпіричною $F(x)$ і теоретичною $F^{\text{т}}(x)$ функціями:

$D_1 = \left|F_1 - F_1^{\text{т}}\right| = \left|0{,}067 - 0{,}125\right| = 0{,}058$; $D_2 = 0{,}025$; $D_3 = 0{,}242$; $D_4 = 0{,}125$.

Максимальне значення $D = 0{,}242$.

4. Статистика (3.4) $\lambda = 0{,}242 \cdot \sqrt{15} = 0{,}936$.

Граничне значення (табл. 3.2) $\lambda(P) = \lambda(0{,}95) = 0{,}52$.

Отже, $\lambda = 0{,}936 > \lambda(P) = 0{,}52$, тому гіпотеза про рівномірний закон розподілу результатів не приймається.

Якщо проаналізувати отримане значення $\lambda = 0{,}936$, то з табл. 3.3 маємо $P(\lambda) = 0{,}393$. Отже, імовірність того, що розподіл аналізованих даних є рівномірним, становить $39{,}3\%$.

3.3. Методи без групування даних

Розглянемо методи перевірки гіпотез про закон розподілу експериментальних даних без попереднього групування. Ці методи доцільно застосовувати у випадку обмеженого обсягу даних, оскільки групування призводить до втрати статистичної інформації.

3.3.1. Перевірка гіпотез про закон розподілу Гаусса

Розглянуті нижче критерії згоди з розподілом Гаусса мають на меті перевірку нульової гіпотези H_0, яка полягає у тому, що ряд спостережень містить n значень, які розглядаються як реалізації випадкової величини, що підпорядкована розподілу ймовірності Гаусса. У праці [16] розглянуто графічні методи, моментні критерії, регресійні критерії та критерії характеристичних функцій для перевірки зазначеної гіпотези. Тамже запропоновано два види критеріїв відхилення від нормальності: направлені критерії – коли форму відхилення визначають в альтернативній гіпотезі, і багатосторонні критерії, для яких форму відхилення не визначають.

Загалом направлені критерії пов’язані з характеристиками асиметрії або ексцесу розподілу ймовірності спостережень. Вони ґрунтуються на тому, що у випадку розподілу Гаусса випадкової величини X із середнім $\mu = \mathbf{M}(X)$ центральний момент третього порядку $\mu_3 = 0$, нормований центральний момент третього порядку (асиметрія сукупності (3.1)) $\sqrt{\beta_1} = 0$, нормований центральний момент четвертого порядку (кривизна сукупності (3.1)) $\beta_2 = 3$.

Направлений критерій перевірки на асиметрію, оснований на статистиці $\sqrt{\beta_1}$

Цей критерій застосовується для $n \geq 8$. За рядом спостережень визначають вибіркове значення $\sqrt{\beta_1}$ (3.1). Якщо альтернативна гіпотеза H_1 полягає в наявності позитивної асиметрії, критерій слід використовувати лише за умови $\sqrt{\beta_1} > 0$. Якщо альтернативна гіпотеза полягає в наявності від'ємної асиметрії, критерій потрібно використовувати лише за умови $\sqrt{\beta_1} < 0$.

В обох випадках рішення приймають на користь відхилення нульової гіпотези для рівня значущості α, коли статистика $|\sqrt{\beta_1}|$ перевищує p-квантиль для $p = 1 - \alpha$ (табл. 3.4).

Таблиця 3.4

Критерій перевірки на асиметрію; значення p-квантилю для статистики $\sqrt{\beta_1}$

n	**p**		**n**	**p**		**n**	**p**	
	0,95	**0,99**		**0,95**	**0,99**		**0,95**	**0,99**
8	0,99	1,42	**40**	0,59	0,87	**150**	0,32	0,46
9	0,97	1,41	**45**	0,56	0,82	**175**	0,30	0,43
10	0,95	1,39	**50**	0,53	0,79	**200**	0,28	0,40
12	0,91	1,34	**60**	0,49	0,72	**250**	0,25	0,36
15	0,85	1,26	**70**	0,46	0,67	**300**	0,23	0,33
20	0,77	1,15	**80**	0,43	0,63	**350**	0,21	0,30
25	0,71	1,06	**90**	0,41	0,60	**400**	0,20	0,28
30	0,66	0,98	**100**	0,39	0,57	**450**	0,19	0,27
35	0,62	0,92	**125**	0,35	0,51	**500**	0,18	0,26

Направлений критерій перевірки на кривизну з використанням статистики β_2

Цей критерій застосовують, якщо $n \geq 8$.

У критерії на більшу кривизну альтернативна гіпотеза H_1 полягає у такому: теоретичний розподіл має нормований центральний момент четвертого порядку $\beta_2 > 3$. Якщо вибіркове значення β_2 перевищує граничне значення статистики критерію (значення p-квантиля), якщо $p = 1 - \alpha = 0{,}95$ або $p = 1 - \alpha = 0{,}99$, то нульова гіпотеза має бути відхилена за певного рівня значущості α (табл. 3.5).

У критерії на меншу кривизну альтернативна гіпотеза H_1 полягає у такому: $\beta_2 < 3$. Якщо вибіркове значення β_2 менше від граничного значення статистики критерію (значення p-квантилю), якщо $p = \alpha = 0{,}05$ або $p = \alpha = 0{,}01$, то нульова гіпотеза має бути відхилена за певного рівня значущості α (табл. 3.5).

Таблиця 3.5

Критерій перевірки на кривизну; значення
p -квантиля для статистики β_2

n	**p**				**n**	**p**			
	0,01	**0,05**	**0,95**	**0,99**		**0,01**	**0,05**	**0,95**	**0,99**
8	1,31	1,46	3,70	4,53	**75**	2,08	2,27	3,87	4,59
9	1,35	1,53	3,86	4,82	**100**	2,18	2,35	3,77	4,39
10	1,39	1,56	3,95	5,00	**125**	2,24	2,40	3,71	4,24
12	1,46	1,64	4,05	5,20	**150**	2,29	2,45	3,65	4,13
15	1,55	1,72	4,13	5,30	**200**	2,37	2,51	3,57	3,98
20	1,65	1,82	4,17	5,36	**250**	2,42	2,55	3,52	3,87
25	1,72	1,91	4,16	5,30	**300**	2,46	2,59	3,47	3,79
30	1,79	1,98	4,11	5,21	**350**	2,50	2,62	3,44	3,72
35	1,84	2,03	4,10	5,13	**400**	2,52	2,64	3,41	3,67
40	1,89	2,07	4,05	5,04	**450**	2,55	2,66	3,39	3,63
45	1,93	2,11	4,00	4,94	**500**	2,57	2,67	3,37	3,60
50	1,95	2,15	3,99	4,88					

Приклад 3.4

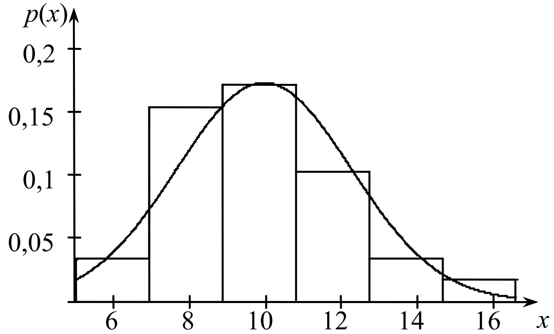
В експерименті отримано такі ($n = 30$) результати спостережень x_i :

8,683	7,962	8,580	7,146	4,943	10,131	9,638	11,669	16,575	12,426
12,955	12,587	12,747	12,019	6,867	10,207	7,733	12,090	9,454	8,067
7,831	8,450	11,674	9,265	10,269	10,262	8,294	9,002	10,108	9,893

Необхідно перевірити гіпотезу про згоду розподілу даних із законом Гаусса.

Розв'язання. Для вихідних даних отримано такі вибіркові характеристики:

$\hat{\mu}_1 = 9{,}918$; $\hat{\mu}_2 = 5{,}281$; $\hat{\mu}_3 = 6{,}402$; $\hat{\mu}_4 = 103{,}644$; $\hat{\beta}_1 = 0{,}527$; $\sqrt{\hat{\beta}_1} = 0{,}726$; $\hat{\beta}_2 = 3{,}716$. Отримане значення $\sqrt{\hat{\beta}_1} = 0{,}726 > 0{,}66$ (див. табл. 3.4), Отже, наявна лівостороння асиметрія і розподіл імовірності значень аналізованої вибірки не відповідає закону Гаусса. Отримане значення $\hat{\beta}_2 = 3{,}316 < 4{,}11$ (див. табл. 3.5), Отже, наявна кривизна відповідає закону Гаусса. Гістограму результатів показано на рисунку:



Як видно з гістограми у вибірці наявна позитивна (лівостороння асиметрія) Перевіримо направлені критерії щодо асиметрії та кривизни для $p = 0{,}95$.

Загальний висновок: розподіл імовірності значень аналізованої вибірки не відповідає закону Гаусса.

Двосторонній *RS*-критерій

За кількості результатів спостережень $n \le 20$ їх відповідність розподілу Гаусса перевіряють за допомогою простого *RS*-критерію.

Статистика критерію розраховується як

$$\frac{R}{s},$$

де $R = x_{\max} - x_{\min}$ – розмах вибірки; $s = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^2}$ – зсунена оцінка СКВ.

Гіпотеза H_0 про гауссівський розподіл експериментальних даних приймається, якщо:

$$\Phi_{н}(\alpha, n) < \frac{R}{s} < \Phi_{в}(\alpha, n).$$

де $\Phi_{н}(\alpha, n)$ і $\Phi_{в}(\alpha, n)$ – граничні (нижнє та верхнє) значення статистики, які визначаються за таблицею для заданого рівня значущості α і обсягу вибірки n (табл. 3.6).

Таблиця 3.6

Коефіцієнти $\Phi_н(\alpha, n)$ і $\Phi_в(\alpha, n)$

n	Нижня границя $\Phi_н(\alpha, n)$					Верхня границя $\Phi_в(\alpha, n)$				
	Рівень значущості α									
	0,005	**0,01**	**0,025**	**0,05**	**0,10**	**0,10**	**0,05**	**0,025**	**0,01**	**0,005**
3	1,735	1,737	1,745	1,758	1,782	1,997	1,999	2,000	2,000	2,000
4	1,83	1,87	1,93	1,98	2,04	2,409	2,429	2,439	2,445	2,447
5	1,98	2,02	2,09	2,15	2,22	2,712	2,753	2,782	2,803	2,813
6	2,11	2,15	2,22	2,28	2,37	2,949	3,012	3,056	3,095	3,115
7	2,22	2,26	2,33	2,40	2,49	3,143	3,222	3,282	3,338	3,369
8	2,31	2,35	2,43	2,50	2,59	3,308	3,399	3,471	3,543	3,585
9	2,39	2,44	2,51	2,59	2,68	3,449	3,552	3,634	3,720	3,772
10	2,46	2,51	2,59	2,67	2,76	3,57	3,635	3,777	3,875	3,935
11	2,53	2,58	2,66	2,74	2,84	3,68	3,80	3,903	4,012	4,079
12	2,59	2,64	2,72	2,80	2,90	3,78	3,91	4,02	4,134	4,208
13	2,64	2,70	2,78	2,86	2,96	3,87	4,00	4,12	4,244	4,325
14	2,70	2,75	2,83	2,92	3,02	3,95	4,09	4,21	4,34	4,431
15	2,74	2,80	2,88	2,97	3,07	4,02	4,17	4,29	4,44	4,53
16	2,79	2,84	2,93	3,01	3,12	4,09	4,24	4,37	4,52	4,62
17	2,83	2,88	2,97	3,06	3,17	4,15	4,31	4,44	4,60	4,70
18	2,87	2,92	3,01	3,10	3,21	4,21	4,37	4,51	4,67	4,78
19	2,90	2,96	3,05	3,14	3,25	4,27	4,43	4,57	4,74	4,85
20	2,94	2,99	3,09	3,18	3,29	4,32	4,49	4,63	4,80	4,91

Приклад 3.5. В експерименті отримано такі результати спостережень x_i

10,893	7,099	7,843	10,206	9,384	8,802	10,099	10,771
10,306	10,011	9,236	9,591	9,326	9,868	11,018	10,181

Необхідно перевірити гіпотезу про згоду розподілу даних із законом розподілу Гаусса.

Розв'язання. Максимальне значення ряду 11,018; мінімальне 7,019; тоді розмах R=3,919; СКВ s = 1,0619. Отже R/s = 3,6907.

Граничні значення (табл. 3.7) $\Phi_н(0{,}05{,}16) = 3{,}01$ і $\Phi_в(0{,}05{,}16) = 4{,}24$. Оскільки 3,01<$R/S$=3,6907<4,24, то приймається гіпотеза H_0 про гауссівський закон розподілу.

Складений критерій

Якщо кількість результатів спостережень n < 50, відповідність їх розподілу закону Гаусса перевіряють за складеним критерієм.

Критерій 1. Обчислюють відношення $\widetilde{d}$:

$$\widetilde{d} = \frac{\sum_{i=1}^{n} |x_i - \overline{x}|}{ns^*}, \tag{3.5}$$

де s^* – зсунена оцінка СКВ, що визначається за формулою

$$s^* = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}{n}}. \tag{3.6}$$

Результати спостережень групи можна вважати розподіленими нормально, якщо

$$d(1 - \alpha_1 / 2, n) < \widetilde{d} \le d(\alpha_1 / 2, n),$$

де $d(1 - \alpha_1 / 2, n)$ і $d(\alpha_1 / 2, n)$ – квантилі розподілу, отримані з табл. 3.7 для n, $\alpha_1 / 2$ і $(1 - \alpha_1 / 2)$, причому α_1 – заздалегідь обраний рівень значущості критерію.

Таблиця 3.7

Статистика d для складеного критерію

n	$\alpha_1/2 \cdot 100$		$(1 - \alpha_1/2) \cdot 100$	
	1 % ($\alpha_1 = 0{,}02$)	5 % ($\alpha_1 = 0{,}1$)	95 % ($\alpha_1 = 0{,}1$)	99 % ($\alpha_1 = 0{,}02$)
16	0,9137	0,8884	0,7236	0,6829
21	0,9001	0,8768	0,7304	0,6950
26	0,8901	0,8686	0,7360	0,7040
31	0,8826	0,8625	0,7404	0,7110
36	0,8769	0,8578	0,7440	0,7167
41	0,8722	0,8540	0,7470	0,7216
46	0,8682	0,8508	0,7496	0,7256
51	0,8648	0,8481	0,7518	0,7291

Критерій 2. Можна вважати, що результати спостережень належать нормальному розподілу, якщо не більше m різниць $|x_i - \overline{x}|$ перевищили значення $z_{P/2}s$, де s – оцінка СКВ, що обчислюється за формулою

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{n-1}},$$

а $z_{P/2}$ – верхній квантиль розподілу нормованої функції Лапласа, що відповідає імовірності $P/2$ (табл. 3.9).

Значення P визначаються з табл. 3.8 за обраним рівнем значущості α_2 і кількості результатів спостережень n.

Для рівнів значущості, відмінних від передбачених у табл. 3.8, значення P знаходять шляхом лінійної інтерполяції.

У випадку, якщо під час застосування критерію для критерію 1 обраний рівень значущості α_1, а для критерію 2 рівень значущості α_2, то результуючий рівень значущості складеного критерію

$$\alpha \le \alpha_1 + \alpha_2 .$$

У випадку, якщо хоча б один із критеріїв не виконується, то вважають, що розподіл результатів спостережень групи не відповідає нормальному.

Таблиця 3.8

Значення P для обчислення $z_{P/2}$

n	***m***	α_2 **100**		
		1 %	**2 %**	**5 %**
10	**1**	0,98	0,98	0,96
11—14	**1**	0,99	0,98	0,97
15—20	**1**	0,99	0,99	0,98
21—22	**2**	0,98	0,97	0,96
23	**2**	0,98	0,98	0,96
24—27	**2**	0,98	0,98	0,97
28—32	**2**	0,99	0,98	0,97
33—35	**2**	0,99	0,98	0,98
36—49	**2**	0,99	0,99	0,98

Таблиця 3.9

Квантилі розподілу нормованої функції Лапласа $z_{P/2}$

P	**0,96**	**0,97**	**0,98**	**0,99**
$z_{P/2}$	2,054	2,170	2,326	2,576

Приклад 3.6. Для ряду спостережень з прикладу 3.5 застосуємо складений критерій.

Критерій 1. Середнє арифметичне ряду $\bar{x} = 9{,}6646$; $s^* = 1{,}0281$ див. формулу (3.6) відповідно статистика критерію $\tilde{d} = 0{,}7746$.

Граничні значення (див. табл. 3.7) $d(0{,}01{,}16) = 0{,}9137$ і $d(0{,}99{,}16) = 0{,}6829$. Оскільки $0{,}6829 < \tilde{d} = 0{,}7746 \leq 0{,}9137$, то гіпотеза H_0 про гауссівський закон розподілу не відхиляється і доцільно перевірити критерій 2.

Критерій 2. Середньоквадратичне відхилення ряду $s = 1{,}0619$; для рівня значущості $\alpha_2 = 0{,}01$ та $n = 16$ з табл. 3.8 маємо $P = 0{,}99$, $m = 1$. Відповідно з табл. 3.9 для $P = 0{,}99$ – $z_{P/2} = 2{,}576$. Отже $z_{P/2}s = 2{,}576 \cdot 1{,}0619 = 2{,}7353$. Для аналізованого ряду значення $|x_i - \bar{x}|$:

1,228	2,566	1,822	0,541	0,281	0,863	0,434	1,106
0,641	0,346	0,429	0,074	0,339	0,203	1,353	0,516

Відповідно до умови критерію може бути лише ($m = 1$) одне значення $|x_i - \bar{x}|$ більше за $z_{P/2}s = 2{,}7353$. У даних таких значень немає, отже, гіпотеза H_0 про гауссівський закон розподілу приймається.

Критерій Шапіро–Уілка

Цей критерій можна застосовувати, якщо $8 \leq n \leq 50$. Використання критерію для малих вибірок з $n < 8$ за наявності відхилень від розподілу Гаусса не дає змоги отримати достовірні результати.

Критерій ґрунтується на регресійному аналізі порядкових статистик за їх очікуваними значеннями. Статистика критерію W – відношення квадрата суми лінійної різниці вибіркових порядкових статистик до звичайної оцінки дисперсії.

Для визначення W початкові дані впорядковують. Якщо значення деяких спостережень однакові, вони все одно входять у впорядковану серію. Для серії з n незалежних спостережень, розміщених у порядку неубування обчислюють проміжну суму:

$$S = \sum_k a_k \left(x_{[n+1-k]} - x_{[k]} \right), \tag{3.7}$$

де k – індекс, який набуває значення від 1 до $n/2$ за парного n або від 1 до $(n-1)/2$ за непарного; a_k – коефіцієнт, що має спеціальні значення, що відповідають обсягу вибірки (табл. 3.10).

Статистика критерію W :

$$W = S^2 / \left(n\hat{\mu}_2\right), \tag{3.8}$$

де $\hat{\mu}_2$ – вибірковий центральний момент другого порядку.

Якщо $W \geq W(\alpha, n)$, то гіпотеза H_0 про відповідність розподілу значень спостережень розподілу Гаусса приймається. Значення $W(\alpha, n)$ наведено в табл. 3.11.

Таблиця 3.10

Значення коефіцієнта a_k для критерію Шапіро–Уілка

k	***n***									
								8	**9**	**10**
1		-	-	-	-	-	-	0,6052	0,5888	0,5739
2	-	-	-	-	-	-	-	0,3164	0,3244	0,3291
3	-	-	-	-	-	-	-	0,1743	0,1976	0,2141
4	-	-	-	-	-	-	-	0,0561	0,0947	0,1224
5	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,0399
	11	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
1	0,5601	0,5475	0,5359	0,5251	0,5150	0,5056	0,4968	0,4886	0,4808	0,4734
2	0,3315	0,3325	0,3325	0,3318	0,3306	0,3290	0,3273	0,3253	0,3232	0,3211
3	0,2260	0,2347	0,2412	0,2460	0,2495	0,2521	0,2540	0,2553	0,2561	0,2565
4	0,1429	0,1586	0,1707	0,1802	0,1878	0,1939	0,1988	0,2027	0,2059	0,2085
5	0,0695	0,0922	0,1099	0,1240	0,1353	0,1447	0,1524	0,1587	0,1641	0,1686
6	-	0,0303	0,0539	0,0727	0,0980	0,1005	0,1109	0,1197	0,1271	0,1334
7	-	-	-	0,0240	0,0433	0,0593	0,0725	0,0737	0,0932	0,1013
8	-	-	-	-	-	0,0196	0,0359	0,0496	0,0612	0,0711
9	-	-	-	-	-	-	-	0,0163	0,0303	0,0422
10	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,0140
	21	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**
1	0,4643	0,4590	0,4542	0,4493	0,4450	0,4407	0,4366	0,4328	0,4291	0,4254
2	0,3185	0,3156	0,3126	0,3098	0,3069	0,3043	0,3018	0,2992	0,2968	0,2944
3	0,2578	0,2571	0,2563	0,2554	0,2543	0,2533	0,2522	0,2510	0,2499	0,2487
4	0,2119	0,2131	0,2139	0,2145	0,2148	0,2151	0,2152	0,2151	0,2150	0,2148
5	0,1736	0,1764	0,1787	0,1807	0,1822	0,1836	0,1848	0,1857	0,1864	0,1870
6	0,1399	0,1443	0,1480	0,1512	0,1539	0,1563	0,1584	0,1601	0,1616	0,1630
7	0,1092	0,1150	0,1201	0,1245	0,1283	0,1316	0,1346	0,1372	0,1395	0,1415
8	0,0804	0,0878	0,0941	0,0997	0,1046	0,1089	0,1128	0,1162	0,1192	0,1219
9	0,0530	0,0618	0,0696	0,0764	0,0823	0,0876	0,0923	0,0965	0,1002	0,1036

k	**n**									
10	0,0263	0,0368	0,0459	0,0539	0,0610	0,0672	0,0728	0,0778	0,0822	0,0862
11	-	0,0122	0,0228	0,0321	0,0403	0,0476	0,0540	0,0598	0,0650	0,0697
12	-	-	-	0,0107	0,0200	0,0284	0,0358	0,0424	0,0483	0,0537
13	-	-	-	-	-	0,0094	0,0178	0,0253	0,0320	0,0381
14	-	-	-	-	-	-	-	0,0084	0,0159	0,0227
15	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,0076
	31	**32**	**33**	**34**	**35**	**36**	**37**	**38**	**39**	**40**
1	0,4220	0,4188	0,4156	0,4127	0,4098	0,4068	0,4040	0,4015	0,3989	0,3964
2	0,2921	0,2898	0,2786	0,2854	0,2834	0,2813	0,2794	0,2774	0,2755	0,2737
3	0,2475	0,2463	0,2451	0,2439	0,2427	0,2415	0,2403	0,2391	0,2380	0,2368
4	0,2155	0,2141	0,2137	0,2132	0,2127	0,2121	0,2116	0,2110	0,2104	0,2098
5	0,1874	0,1878	0,1880	0,1882	0,1883	0,1883	0,1883	0,1881	0,1880	0,1878
6	0,1641	0,1651	0,1660	0,1667	0,1673	0,1678	0,1683	0,1686	0,1689	0,1691
7	0,1433	0,1449	0,1463	0,1475	0,1487	0,1496	0,1505	0,1513	0,1520	0,1526
8	0,1243	0,1265	0,1284	0,1301	0,1317	0,1331	0,1344	0,1356	0,1366	0,1376
9	0,1066	0,1093	0,1118	0,1140	0,1160	0,1179	0,1196	0,1211	0,1225	0,1237
10	0,0899	0,0931	0,0961	0,0988	0,1013	0,1036	0,1056	0,1075	0,1092	0,1108
11	0,0739	0,0777	0,0812	0,0844	0,0873	0,0900	0,0924	0,0947	0,0967	0,0986
12	0,0585	0,0629	0,0669	0,0706	0,0739	0,0770	0,0798	0,0824	0,0848	0,0870
13	0,0435	0,0485	0,0530	0,0572	0,0610	0,0645	0,0677	0,0706	0,0733	0,0759
14	0,0289	0,0344	0,0395	0,0441	0,0484	0,0523	0,0559	0,0592	0,0622	0,0651
15	0,0144	0,0206	0,0262	0,0314	0,0361	0,0404	0,0444	0,0481	0,0515	0,0546
16	-	0,0068	0,0131	0,0187	0,0239	0,0287	0,0331	0,0372	0,0409	0,0444
17	-	-	-	0,0062	0,0119	0,0172	0,0220	0,0264	0,0305	0,0343
18	-	-	-	-	-	0,0057	0,0110	0,0158	0,0203	0,0244
19	-	-	-	-	-	-	-	0,0053	0,0101	0,0146
20	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,0049
	41	**42**	**43**	**44**	**45**	**46**	**47**	**48**	**49**	**50**
1	0,3940	0,3917	0,3894	0,3872	0,3850	0,3830	0,3808	0,3789	0,3770	0,3651
2	0,2719	0,2701	0,2684	0,2667	0,2651	0,2635	0,2620	0,2604	0,2589	0,2574
3	0,2357	0,2345	0,2334	0,2323	0,2313	0,2302	0,2291	0,2281	0,2271	0,2260
4	0,2091	0,2085	0,2078	0,2072	0,2065	0,2058	0,2052	0,2045	0,2038	0,2032
5	0,1876	0,1874	0,1871	0,1868	0,1868	0,1862	0,1869	0,1855	0,1851	0,1847
6	0,1693	0,1694	0,1695	0,1695	0,1695	0,1695	0,1695	0,1693	0,1692	0,1691
7	0,1531	0,1535	0,1539	0,1542	0,1545	0,1548	0,1550	0,1551	0,1553	0,1554
8	0,1384	0,1392	0,1398	0,1405	0,1410	0,1415	0,1420	0,1423	0,1427	0,1430
9	0,1249	0,1259	0,1269	0,1278	0,1286	0,1293	0,1300	0,1306	0,1312	0,1317

Закінчення табл. 3.10

k	***n***									
10	0,1123	0,1136	0,1149	0,1160	0,1170	0,1180	0,1189	0,1197	0,1205	0,1212
11	0,1004	0,1020	0,1035	0,1049	0,1062	0,1073	0,1085	0,1095	0,1105	0,1113
12	0,0891	0,0909	0,0927	0,0943	0,0959	0,0972	0,0986	0,0998	0,1010	0,1020
13	0,0782	0,0804	0,0824	0,0842	0,0860	0,0876	0,0892	0,0906	0,0919	0,0932
14	0,0677	0,0701	0,0724	0,0745	0,0765	0,0783	0,0801	0,0817	0,0832	0,0846
15	0,0575	0,0602	0,0628	0,0651	0,0673	0,0694	0,0713	0,0731	0,0748	0,0764
16	0,0476	0,0506	0,0534	0,0560	0,0584	0,0607	0,0628	0,0648	0,0667	0,0685
17	0,0379	0,0411	0,0442	0,0471	0,0497	0,0522	0,0546	0,0568	0,0588	0,0608
18	0,0283	0,0318	0,0352	0,0383	0,0412	0,0439	0,0465	0,0489	0,0511	0,0532
19	0,0188	0,0227	0,0263	0,0296	0,0328	0,0357	0,0385	0,0411	0,0436	0,0459
20	0,0094	0,0136	0,0175	0,0211	0,0245	0,0277	0,0307	0,0335	0,0361	0,0386
21	-	0,0045	0,0087	0,0126	0,0163	0,0197	0,0229	0,0229	0,0288	0,0314
22	-	-	-	0,0042	0,0081	0,0118	0,0153	0,0185	0,0215	0,0244
23	-	-	-	-	-	0,0039	0,0076	0,0111	0,0143	0,0174
24	-	-	-	-	-	-	-	0,0037	0,0071	0,0104
25	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,0035

Таблиця 3.11

Граничні значення статистики $W(\alpha, n)$ для критерію Шапіро–Уілка

n	**α**		***n***	**α**		***n***	**α**	
	0,01	**0,05**		**0,01**	**0,05**		**0,01**	**0,05**
8	0,749	0,818	**23**	0,881	0,914	**38**	0,916	0,938
9	0,764	0,829	**24**	0,884	0,916	**39**	0,917	0,939
10	0,781	0,842	**25**	0,888	0,918	**40**	0,919	0,940
11	0,792	0,850	**26**	0,891	0,920	**41**	0,920	0,941
12	0,805	0,859	**27**	0,894	0,923	**42**	0,922	0,942
13	0,814	0,866	**28**	0,896	0,924	**43**	0,923	0,943
14	0,825	0,874	**29**	0,898	0,926	**44**	0,924	0,944
15	0,835	0,881	**30**	0,900	0,927	**45**	0,926	0,945
16	0,844	0,887	**31**	0,902	0,929	**46**	0,927	0,945
17	0,851	0,892	**32**	0,904	0,930	**47**	0,928	0,946
18	0,858	0,897	**33**	0,906	0,931	**48**	0,929	0,947
19	0,863	0,901	**34**	0,908	0,933	**49**	0,929	0,947
20	0,868	0,905	**35**	0,910	0,934	**50**	0,930	0,947
21	0,873	0,908	**36**	0,912	0,935			
22	0,878	0,911	**37**	0,914	0,936			

Приклад 3.7. Для ряду спостережень з прикладу 3.5 застосуємо критерій Шапіро–Уілка. Для виконання розрахунків за формулою (3.8) впорядкуємо ряд результатів та складемо таблицю:

k	1	2	3	4	5	6	7	8
x_{n+1-k}	11,018	10,893	10,771	10,306	10,206	10,181	10,099	10,011
x_k	7,099	7,843	8,802	9,236	9,326	9,384	9,591	9,868
$x_{n+1-k}-x_k$	3,919	3,05	1,969	1,07	0,88	0,797	0,508	0,143
a_k	0,5056	0,329	0,2521	0,1939	0,1447	0,1005	0,0593	0,0196
$a_k\cdot(x_{n+1-k}-x_k)$	1,9814	1,0035	0,4964	0,2075	0,1273	0,0801	0,0301	0,0028

Отже, $S = 3{,}9291$, $\hat{\mu}_2 = 1{,}0619$, $n = 16$. Значення статистики (3.8) становить $W = (3{,}9291)^2 / (16 \cdot 1{,}0619) = 15{,}4380 / 16{,}9897 = 0{,}9087$.

Граничне значення (табл. 3.11) $W(0{,}05{,}16) = 0{,}887$. Оскільки $W > W(0{,}05{,}16)$, то приймається гіпотеза H_0 про гауссівський закон розподілу даних.

3.3.2. Перевірка гіпотез про експоненційний закон розподілу

Критерій Шапіро–Уілка

Нехай маємо впорядковану вибірку $x_{[1]} \le x_{[2]} \le \ldots \le x_{[n]}$, а параметр μ розподілу невідомий, оскільки розглядається щільність імовірностей:

$$p(x) = \frac{1}{\nu} \exp\left(\frac{x-\mu}{\nu} \right),$$

з невідомим параметром μ.

Статистика критерію має вигляд

$$W_E = \frac{n\left(\bar{x} - x_{[1]}\right)^2}{(n-1)\sum_{i=1}^{n}\left(x_{[i]} - \bar{x}\right)^2}, \tag{3.9}$$

або, якщо $n \to \infty$ $(n > 50)$

$$W_E = \frac{\left(\bar{x} - x_{[1]}\right)^2}{\sum_{i=1}^{n}\left(x_{[i]} - \bar{x}\right)^2}.$$

Гіпотеза експоненційності спостережуваного розподілу не відхиляється з достовірністю P, якщо $W_1(P) \le W_E \le W_2(P)$, де $W_1(P)$ і $W_2(P)$ – граничні значення, що наведені в табл. 3.12.

Для випадку цензурованої вибірки за відсутності r_1 найменших і r_2 найбільших членів вибірки, модифікація критерію Шапіро–Уілка має вигляд

$$W_1 = \frac{\left(\sum\limits_{i=2}^{n-r_1-r_2} T_{r_1+i}\right)^2}{(n-r_1-r_2)\sum\limits_{i=2}^{n-r_1-r_2} a_{ij}^{(n-r_1-r_2)} T_{r_1+i} T_{r_1+j}}, \tag{3.10}$$

де

$$T_i = (n-i+1)\left(x_{[i]} - x_{[i-1]}\right),\ i = 2,\ldots,n;$$

$$a_{ij} = \frac{i-1}{n-j-1},\ \left(n \ge i \ge j \ge 2; a_{ij}^{(n)} = a_{ji}^{(n)}; i, j = 2,3,\ldots,n.\right).$$

Таблиця 3.12

Граничні значення критерію експоненційності W_E Шапіро–Уілка

n	$P=0{,}90$		$P=0{,}95$		n	$P=0{,}90$		$P=0{,}95$	
	$W_1(P)$	$W_2(P)$	$W_1(P)$	$W_2(P)$		$W_1(P)$	$W_2(P)$	$W_1(P)$	$W_2(P)$
7	0,071	0,358	0,062	0,404	22	0,026	0,084	0,023	0,094
8	0,062	0,301	0,054	0,342	23	0,025	0,078	0,022	0,087
9	0,058	0,261	0,050	0,301	24	0,024	0,074	0,021	0,082
10	0,056	0,231	0,049	0,261	25	0,023	0,070	0,021	0,078
11	0,052	0,208	0,046	0,234	26	0,022	0,066	0,020	0,073
12	0,050	0,191	0,044	0,215	27	0,022	0,063	0,020	0,070
13	0,046	0,173	0,040	0,195	28	0,021	0,061	0,019	0,067
14	0,043	0,159	0,038	0,178	29	0,021	0,058	0,019	0,064
15	0,040	0,145	0,036	0,163	30	0,020	0,054	0,018	0,060
16	0,038	0,134	0,034	0,150	31	0,019	0,052	0,017	0,057
17	0,034	0,120	0,030	0,135	32	0,019	0,050	0,017	0,055
18	0,031	0,109	0,028	0,123	33	0,018	0,048	0,017	0,053
19	0,029	0,102	0,026	0,114	34	0,018	0,047	0,017	0,051
20	0,028	0,095	0,025	0,106	35	0,018	0,045	0,016	0,049
21	0,027	0,091	0,024	0,101					

Граничні значення статистики W_1 (3.11) знаходять з табл. 3.12 із заміною n на $n-r_1-r_2$, тобто гіпотеза експоненційності не відхиляється, якщо

$$W_{1(n-r_1-r_2)}(P)\le W_1 \le W_{2(n-r_1-r_2)}(P).$$

У випадку, якщо параметр μ відомий (припустимо, $\mu=0$, завжди можна зробити заміну x_i на $x_i-\mu$), то статистика Шапіро–Уілка матиме вигляд:

$$W_{E_0}=\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}\right)^2}{\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2}. \qquad (3.11)$$

Гіпотеза експоненційності не відхиляється, якщо

$$\hat{W}_1(P)\le W_{E_0}\le \hat{W}_2(P),$$

де $\hat{W}_1(P)$ і $\hat{W}_2(P)$ – граничні значення, що наведені в табл. 3.13.

Замість статистики W_{E_0} можна скористуватися статистикою

$$W_{E_0}=\frac{\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2}{n\left[(n+1)\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2\right]},$$

граничні значення якої збігаються з $W_1(P)$ та $W_2(P)$ (табл. 3.13, в якій *n* треба замінити на (*n*+*1*)).

Для випадку цензурування справа статистика змінюється на

$$W_2=\frac{\left(\sum_{i=2}^{n-r_2+1}T_{i-1}\right)^2}{\left(n-r_2\right)\sum_{i=2}^{n-r_2+1}\sum_{j=2}^{n-r_2+1}a_{ij}^{(n-r_2+1)}T_{i-1}T_{j-1}}.$$

Таблиця 3.13

Граничні значення критерію експоненційності W_{E_0} Шапіро–Уілка

n	$P=0{,}90$		$P=0{,}95$		n	$P=0{,}90$		$P=0{,}95$	
	$\hat{W}_1(P)$	$\hat{W}_2(P)$	$\hat{W}_1(P)$	$\hat{W}_2(P)$		$\hat{W}_1(P)$	$\hat{W}_2(P)$	$\hat{W}_1(P)$	$\hat{W}_2(P)$
7	0,033	0,225	0,025	0,260	**22**	0,022	0,069	0,020	0,080
8	0,032	0,200	0,025	0,230	**23**	0,021	0,065	0,019	0,075
9	0,031	0,177	0,025	0,205	**24**	0,021	0,062	0,019	0,069
10	0,030	0,159	0,025	0,184	**25**	0,020	0,058	0,018	0,065
11	0,030	0,145	0,025	0,166	**26**	0,020	0,056	0,018	0,062
12	0,029	0,134	0,025	0,153	**27**	0,020	0,054	0,017	0,058
13	0,028	0,124	0,025	0,140	**28**	0,019	0,052	0,017	0,056
14	0,027	0,115	0,024	0,128	**29**	0,019	0,050	0,016	0,054
15	0,026	0,106	0,024	0,119	**30**	0,019	0,048	0,016	0,053
16	0,025	0,098	0,023	0,113	**31**	0,018	0,047	0,016	0,051
17	0,024	0,093	0,023	0,107	**32**	0,018	0,045	0,015	0,050
18	0,024	0,087	0,022	0,101	**33**	0,018	0,044	0,015	0,048
19	0,023	0,083	0,022	0,096	**34**	0,017	0,043	0,014	0,046
20	0,023	0,077	0,021	0,090	**35**	0,017	0,041	0,014	0,045
21	0,022	0,074	0,020	0,085					

Її граничні значення збігаються з граничними значеннями статистики W_{E_0} (табл. 3.13 із заміною n на $(n - r_2 + 1))$.

Приклад 3.7. Задано упорядкований ряд спостережень

x= (1, 2, 4, 5, 9, 11, 18, 21, 29, 35).

Необхідно перевірити відповідність розподілу ймовірностей випадкової величини, поданої цією вибіркою, експоненціальним розподілом з імовірністю $P = 0{,}95$. Розглянути випадки невідомого початку розподілу (μ невідомо) і відомого значення $\mu = 1$.

Розв'язання. Випадок 1 (μ невідоме). Обчислюємо за виразом (3.9) $\bar{x} = 13{,}5$; $\left(\bar{x} - x_{[1]}\right)^2 = \left(3{,}5 - 1\right)^2 = 156{,}25$; $\sum_{i=1}^{10}\left(x_{[i]} - \bar{x}\right)^2 = 1256{,}5$. Тоді $W_E = \frac{10 \cdot 156{,}25}{9 \cdot 1256{,}5} = 0{,}138$. Із табл. 3.12 для $P = 0{,}95$ і $n = 10$ знаходимо $W_1(0{,}95) = 0{,}049$ і $W_2(0{,}95) = 0{,}261$.

Оскільки $W_1(0{,}95) < W_E < W_2(0{,}95)$, гіпотеза експоненційності розподілу не відхиляється.

Випадок 2 ($\mu = 1$). Знаходимо еквівалентний ряд $x_{[i]} - \mu = x_{[i]} - 1$: 0, 1, 3, 4, 8, 10, 17, 20, 28, 34, для якого за формулою (3.11) маємо $\overline{x} = 12{,}5$;

$\sum\limits_{i=1}^{10}\left(x_{[i]} - \overline{x}\right)^2 = 1256{,}5$ і $\left(\sum\limits_{i=1}^{10} x_{[i]}\right)^2 = 15625$. Тоді $W_{E_0} = \dfrac{1256{,}5}{15625} = 0{,}08$.

Із табл. 3.13 для $P = 0{,}95$ і $n = 10$ знаходимо: $\hat{W}_1(P) = 0{,}025$ і $\hat{W}_2(P) = 0{,}184$.

Оскільки $\hat{W}_1(0{,}95) = 0{,}025 < W_{E_0} = 0{,}08 < \hat{W}_2(0{,}95) = 0{,}184$, гіпотеза експоненційності не відхиляється.

Обчислюємо статистику $\widetilde{W}_{E_0} = \dfrac{15625}{10 \cdot (11 \cdot 2819 \cdot 15625)} = 0{,}102$.

Із табл. 3.12 для значення $n + 1 = 11$ і $P = 0{,}95$ маємо $W_1(0{,}95) = 0{,}046$ і $W_2(0{,}95) = 0{,}234$, що також не дозволяє відхилити гіпотезу експоненційності, оскільки значення $\widetilde{W}_{E_0}$ не виходить за межі критичного діапазону.

Перевіримо гіпотезу експоненційності для поданого ряду спостережень за умови, що перше і два останні спостереження цензуровані (для випадку, коли значення μ невідоме і $P = 0{,}95$).

Маємо $r_1 = 1$ і $r_2 = 2$, $n - r_1 - r_2 = 7$.

Знаходимо $T_3 = 8 \cdot \left(x_{[3]} - x_{[2]}\right) = 8 \cdot 2 = 16$; $T_4 = 7 \cdot \left(x_{[4]} - x_{[3]}\right) = 7$; $T_5 = 6 \cdot \left(x_{[5]} - x_{[4]}\right) = 24$; $T_6 = 5 \cdot \left(x_{[6]} - x_{[5]}\right) = 10$; $T_7 = 4 \cdot \left(x_{[7]} - x_{[6]}\right) = 28$; $T_8 = 3 \cdot \left(x_{[8]} - x_{[7]}\right) = 9$.

Обчислюємо $a_{ij}^{(n - r_1 - r_2)} = a_{ij}^{(7)} = \dfrac{i-1}{7 - j + 1} = \dfrac{i-1}{8 - j}$;

$$a_{22}^{(7)} = \frac{1}{6};\ a_{32}^{(7)} = \frac{2}{6};\ a_{42}^{(7)} = \frac{3}{6};\ a_{52}^{(7)} = \frac{4}{6};\ a_{62}^{(7)} = \frac{5}{6};\ a_{72}^{(7)} = \frac{6}{6};\ a_{33}^{(7)} = \frac{2}{5};$$

$$a_{43}^{(7)} = \frac{3}{5};\ a_{53}^{(7)} = \frac{4}{5};\ a_{63}^{(7)} = \frac{5}{5};\ a_{73}^{(7)} = \frac{6}{5};\ a_{44}^{(7)} = \frac{3}{4};\ a_{54}^{(7)} = \frac{4}{4};\ a_{64}^{(7)} = \frac{5}{4};$$

$$a_{74}^{(7)} = \frac{6}{4};\ a_{55}^{(7)} = \frac{4}{3};\ a_{65}^{(7)} = \frac{5}{3};\ a_{75}^{(7)} = \frac{6}{3};\ a_{66}^{(7)} = \frac{5}{2};\ a_{76}^{(7)} = \frac{6}{2};\ a_{77}^{(7)} = \frac{6}{1}.$$

Далі отримуємо

$$6\cdot\left(\frac{1}{6}\cdot T_3\cdot T_3+\frac{2}{6}\cdot T_3\cdot T_4+\frac{3}{3}\cdot T_3\cdot T_5+\ldots+\frac{5}{3}\cdot T_6\cdot T_7+\frac{5}{2}\cdot T_7\cdot T_7+\frac{6}{2}\cdot T_7\cdot T_8\right)=$$

$$=6\cdot\left(\frac{16\cdot16}{2}+\frac{2\cdot16\cdot17}{2}+\ldots+\frac{5\cdot28\cdot28}{2}+\frac{6\cdot29\cdot9}{2}\right)=40056.$$

Знаходимо $(T_3+T_4+\ldots+T_7+T_8)^2=(16+7+\ldots+28+9)^2=8836$.

Остаточно отримуємо $W_1=\dfrac{8836}{40056}=0{,}220$. Із табл. 3.12 для $n-r_1-r_2=7$ і $P=0{,}95$ знаходимо $W_1(0{,}95)=0{,}062$ і $W_2(0{,}95)=0{,}0404$. Оскільки $W_1(0{,}95)=0{,}062<W_E=0{,}220<W_2(0{,}95)=0{,}404$, гіпотеза експоненційності розподілу ймовірностей випадкової величини не відхиляється.

Критерій Шермана

Статистика критерію визначається за формулою

$$\omega_n=\frac{1}{2n}\frac{\sum_{i=1}^{n}|x_i-\bar{x}|}{\bar{x}}. \qquad (3.12)$$

Якщо $\omega_n\le\omega_n(P)$, то з довірчою ймовірністю P гіпотеза експоненційності приймається. Граничні значення статистики Шермана $\omega_n(P)$ наведено в табл. 3.14

Таблиця 3.14

Граничні значення $\omega_n(P)$ статистики Шермана

n	**P**			**n**	**P**		
	0,90	**0,95**	**0,99**		**0,90**	**0,95**	**0,99**
1	0,450	0,475	0,495	**11**	0,442	0,469	0,521
2	0,484	0,537	0,609	**12**	0,440	0,466	0,516
3	0,467	0,518	0,614	**13**	0,438	0,463	0,511
4	0,468	0,509	0,589	**14**	0,436	0,460	0,506
5	0,462	0,502	0,574	**15**	0,434	0,458	0,502
6	0,458	0,494	0,562	**16**	0,433	0,455	0,498
7	0,454	0,488	0,551	**17**	0,431	0,453	0,495
8	0,451	0,482	0,542	**18**	0,430	0,451	0,491
9	0,448	0,477	0,534	**19**	0,429	0,449	0,489
10	0,445	0,473	0,527	**20**	0,427	0,448	0,486

Якщо $n > 20$, статистика критерію Шермана задовільно апроксимується нормальним розподілом із середнім $\mathbf{M}(\omega_n)$ і дисперсією $\mathbf{D}(\omega_n)$, де

$$\mathbf{M}(\omega_n) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} \approx \frac{1}{e} = 0{,}36788\,;$$

$$\mathbf{D}(\omega_n) = \frac{2n^{n+2} + n(n-1)^{n+2}}{(n+2)(n+1)^{n+2}} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{2n+2} \approx \frac{2e-5}{e^2}\frac{1}{n} = \frac{0{,}05908}{n}.$$

Отже, випадкова величина $\omega_n^* = \dfrac{\omega_n - \mathbf{M}(\omega_n)}{\sqrt{\mathbf{D}(\omega_n)}}$ має стандартний нормальній розподіл, для якого можна застосувати ефективну нормальну апроксимацію:

$$\tilde{\omega}_n = u - \frac{0{,}0955}{\sqrt{n}}\left(u^2 - 1\right), \tag{3.13}$$

де $u = \dfrac{\omega_n - 0{,}3679\left(1 - \dfrac{1}{2n}\right)}{0{,}2431\sqrt{n}\left(1 - \dfrac{0{,}605}{n}\right)}$.

Статистика $\tilde{\omega}_n$ добре апроксимується стандартним нормальним розподілом вже за умови $n > 20$.

Отже, якщо $\tilde{\omega}_n \le u_P$, то з довірчою ймовірністю P гіпотеза експоненційності приймається (u_P – P-квантиль стандартного нормального розподілу (табл. Д1.1 дод. 1)).

Приклад 3.8 Необхідно перевірити гіпотезу про належність до експоненційного розподілу даних прикладу 3.7 за критерієм Шермана для довірчої ймовірності $P = 0{,}95$.

Розв’язання. Маємо $\bar{x} = 13{,}5$; за формулою (3.12) обчислюємо $\omega_n = \dfrac{1}{2 \cdot 10 \cdot 13{,}5} \cdot (|1 - 13{,}5| + |2 - 13{,}5| + \ldots + |35 - 13{,}5|) = 0{,}4$.

Із табл. 3.14 для $n = 10$ знаходимо $\omega_n(0{,}95) = 0{,}473$.

Оскільки $\omega_n = 0{,}400 < \omega_n(0{,}95) = 0{,}473$, гіпотеза експоненційності не відхиляється.

За формулою (3.13) обчислюємо:

$$u = \frac{0{,}4 - 0{,}3679 \cdot \left(1 - \frac{1}{2 \cdot 10}\right)}{0{,}2431 \cdot \sqrt{10} \cdot \left(1 - \frac{0{,}605}{10}\right)} = 0{,}01863;$$

$$\tilde{\omega}_n = 0{,}01863 - \frac{0{,}0955}{\sqrt{10}}\left(0{,}01863^2 - 1\right) = 0{,}049,$$

отримане значення $\omega_n = 0{,}049 < u_{0,95} = 1{,}645$. Отже, гіпотеза експоненційності не відхиляється.

Критерій Фішера

Якщо наявний впорядкований ряд спостережень $x_{[1]}$, $x_{[2]}$, ..., $x_{[n]}$, то статистика критерію має вигляд:

$$F = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_{[i]}}{(n-1)x_{[1]}}. \tag{3.14}$$

Ця статистика у випадку справедливості нульової гіпотези (тобто експоненційності розподілу) має F-розподіл Фішера з $f_1 = 2n - 2$ і $f_2 = 2$ степенями вільності. Якщо

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} x_{[i]}}{(n-1)x_{[1]}} > F_P(2n-2{,}2),$$

де $F_P(f_1, f_2)$ – граничне значення F-статистики з f_1 і f_2 степенями вільності та імовірності P, то нульова гіпотеза експоненціальності розподілу відхиляється.

Граничне значення F-статистики можуть бути визначені за таблицями розподілу Фішера (табл. Д1.3 дод. 1).

Приклад 3.9. Необхідно перевірити гіпотезу експоненційності за критерієм Фішера для даних із прикладу 3.7 для $P = 0{,}95$.

Розв'язання. Для початкових даних маємо $n = 10$, $x_1 = 1$ і $\sum_{i=1}^{10} x_i = 135$, за формулою (3.14) обчислюємо $F = 135/9 = 15$.

Із табл. Д1.3 дод. 1 розподілу Фішера для $F_{0,95}(18{,}2)$ знаходимо

$F_{0,95}(18,2) = 19,4$.

Оскільки $F = 15 < F_{0,95}(18,2) = 19,4$, то гіпотеза експоненційності приймається.

3.3.3. Критерії згоди для рівномірного розподілу

Якщо $x_1,...,x_n$ – вибірка випадкової величини X, яка має розподіл імовірностей з функцією $F(x)$, то випадкова величина $Y = F(X)$ розподілена рівномірно на інтервалі [0,1]. Тому встановлення рівномірності розподілу Y за вибіркою $y_i = F(x_i)$ є по суті критерієм згоди даних спостережень з теоретичним розподілом $F(x)$. Цим пояснюється підвищений інтерес до пошуку простих в обчислювальному відношенні і ефективних критеріїв рівномірності розподілу випадкових величин.

Критерій Шермана

Статистика критерію Шермана для перевірки рівномірності розподілу за впорядкованою вибіркою має вигляд

$$\omega_{n=1} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n+1}\left|U_{[i]} - U_{[i-1]} - \frac{1}{n+1}\right|, \quad U_{[0]} = 0, \quad U_{[n]} = 1.$$

Тут символ U введено для зручності позначення елементів вибірки випадкової величини $U = (U_{[0]},\ldots U_{[i]},\ldots U_{[n]})$ з рівномірним розподілом на інтервалі [0,1].

Розподіл статистики Шермана розглянуто в підрозділі 3.3.2, там же наведено граничні значення (табл. 3.14) і апроксимації статистики цього критерію.

Приклад 3.10. Наявний ряд спостережень випадкової величини:

$U_{[i]}$: 0,047; 0,051; 0,155; 0,168; 0,291; 0,348; 0,512; 0,561; 0,672; 0,691.

Перевіримо гіпотезу рівномірності розподілу випадкової величини U на інтервалі [0,1] за критерієм Шермана за довірчої ймовірності $P = 0,95$.

Розв'язання. Знаходимо

$$\hat{\omega}_n = \frac{1}{2}\cdot\left(\left|0,047 - \frac{1}{11}\right| + \left|0,051 - 0,047 - \frac{1}{11}\right| + ... + \left|0,691 - 0,672 - \frac{1}{11}\right|\right) = 0,2474.$$

Із табл. 3.14 для n=10 маємо $\omega_{10}(0,95) = 0,473$.

Оскільки $\hat{\omega}_n = 0{,}247 < \omega_{10}(0{,}95) = 0{,}473$, гіпотеза рівномірності не відхиляється.

Розглянемо нормальну апроксимацію ω_n-розподілу.

Маємо (див. підрозділ 3.3.2)

$$\mathbf{M}(\omega_n) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} = \left(\frac{10}{11}\right)^{11} = 0{,}35049\,;$$

$$\mathbf{D}(\omega_n) = \frac{2\cdot 10^{12} + 10\cdot 9^{12}}{12\cdot 11^{12}} - \left(\frac{10}{11}\right)^{22} = 0{,}00525\,,\ \left(\sqrt{\mathbf{D}(\omega_n)} = 0{,}07246\right).$$

Обчислюємо:

$$\overline{\omega}_n = \frac{\hat{\omega}_n - \mathbf{M}(\omega_n)}{\sqrt{\mathbf{D}(\omega_n)}} = \frac{0{,}24741 - 0{,}35049}{0{,}07246} = -1{,}42251\,.$$

Оскільки $\left|\overline{\omega}_n\right| = 1{,}457 < u_{0,95} = 1{,}645$ (95%-вий квантиль стандартного нормального розподілу), гіпотеза рівномірності не відхиляється.

Апроксимація

$$u = \frac{\hat{\omega}_n - 0{,}3679\cdot\left(1 - \dfrac{1}{2n}\right)}{\dfrac{0{,}243}{\sqrt{n}}\cdot\left(1 - \dfrac{0{,}605}{n}\right)} = -1{,}41418\,;$$

$$\overline{\omega}_n = -1{,}4475 - \frac{0{,}0995}{\sqrt{10}}\cdot\left(1{,}4475^2 - 1\right) = -1{,}482\,.$$

Видно, що результати $\hat{\omega}_n$ і $\overline{\omega}_n$ близькі – значення величини $\overline{\omega}_n$, що має стандартний нормальний розподіл, лежить у межах 95%-го інтервалу, що дозволяє прийняти гіпотезу рівномірності.

Критерій Ченга–Спірінга

Критерій рівномірності розподілу, аналогічний критерію Шапіро–Уілка (див. підрозділ 3.3.2). Його статистика має вигляд

$$W_p = \frac{\left[\left(x_{[n]} - x_1\right)\dfrac{n+1}{n-1}\right]^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(x_{[i]} - \overline{x}\right)^2}\,,$$

де $x_{[n]} - x_{[1]}$ – вибірковий розмах.

Завжди у випадку справедливості нульової гіпотези (розподіл рівномірний) справедливі нерівності:

$$\frac{2(n+1)^2}{(n-1)^2} \geq W_p \geq \frac{4(n+1)^2}{n(n-1)^2}, \quad (n = 2,4,\ldots,2k);$$

$$\frac{2(n+1)^2}{(n-1)^2} \geq W_p \geq \frac{4n(n+1)^2}{n(n-1)^3}, \quad (n = 1,3,\ldots,2k–1).$$

Гіпотеза рівномірності відхиляється, якщо $W_1(P) \leq W_p \leq W_2(P)$, де $W_1(P)$ і $W_2(P)$ – граничні значення для довірчої ймовірності P, наведені в табл. 3.15.

Таблиця 3.15

Граничні значення $W_1(P)$ і $W_2(P)$ критерію рівномірності Ченга–Спірінга

n	**Довірча ймовірність** P						***n***	**Довірча ймовірність** P					
	0,90		**0,95**		**0,99**			**0,90**		**0,95**		**0,99**	
	W_1	W_2	W_1	W_2	W_1	W_2		W_1	W_2	W_1	W_2	W_1	W_2
3	6,30	7,97	6,15	7,99	6,03	8,00	**16**	0,65	1,03	0,62	1,11	0,56	1,31
4	3,74	5,31	3,44	5,34	3,08	5,53	**17**	0,61	0,97	0,58	1,04	0,53	1,20
5	2,58	4,02	2,42	4,18	2,40	4,39	**18**	0,58	0,90	0,55	0,98	0,50	1,12
6	2,00	3,23	1,88	3,41	1,71	3,67	**19**	0,55	0,85	0,52	0,92	0,47	1,05
7	1,64	2,68	1,54	2,85	1,39	3,13	**20**	0,52	0,80	0,50	0,86	0,45	0,98
8	1,40	2,32	1,32	2,47	1,18	2,77	**21**	0,50	0,76	0,47	0,81	0,43	0,92
9	1,22	2,04	1,15	2,19	1,04	2,46	**22**	0,47	0,72	0,45	0,78	0,41	0,89
10	1,08	1,79	1,02	1,92	0,91	2,18	**23**	0,45	0,68	0,43	0,73	0,40	0,84
11	0,97	1,60	0,92	1,73	0,83	1,99	**24**	0,44	0,65	0,42	0,70	0,38	0,80
12	0,89	1,45	0,84	1,57	0,76	1,79	**25**	0,42	0,62	0,40	0,67	0,36	0,76
13	0,81	1,31	0,77	1,42	0,69	1,64	**30**	0,35	0,51	0,33	0,54	0,31	0,61
14	0,75	1,22	0,71	1,31	0,64	1,52	**40**	0,26	0,37	0,25	0,39	0,23	0,44
15	0,70	1,12	0,66	1,21	0,60	1,39	**50**	0,21	0,29	0,20	0,30	0,19	0,33

Приклад 3.11. Для даних прикладу 3.10 необхідно перевірити гіпотезу рівномірності розподілу випадкової величини критерієм Ченга–Спінінга, якщо $P = 0,95$.

Розв'язання. Для початкових даних визначимо $x_{[n]} = 0,691$, $x_{[1]} = 0,047$ та $\sum_{i=1}^{10}(x_i - \bar{x})^2 = 0,54657$.

Тоді $W_p = \dfrac{\left[(0{,}691 - 0{,}047)\cdot\dfrac{11}{9}\right]^2}{0{,}54657} = 1{,}13351 \approx 1{,}134$.

Із табл. 3.15 для $P = 0{,}95$ та $n = 10$ знаходимо $W_1(0{,}95) = 1{,}02$ та $W_2(0{,}95) = 1{,}92$.

Оскільки $W_1(P) = 1{,}02 < W_p = 1{,}134 < W_2(P) = 1{,}92$, гіпотеза рівномірності розподілу приймається.

Критерій Саркаді-Косіка

Розглянемо досить ефективний критерій рівномірності на інтервалі [0,1], який ґрунтується на модифікації критерію Ватсона, що має статистику

$$J = n^2 \sum_{i=1}^{n} d_i^2 - n\left(\sum_{i=1}^{n} d_i\right)^2,$$

де $d_i = \dfrac{x_i - \dfrac{i}{n+1}}{i(n-i+1)}$ і $x_i \le x_2 \le \ldots \le x_n$.

Розподіл визнається не суперечливим рівномірному для рівня значущості α, якщо $J < J(\alpha)$, де $J(\alpha)$ – граничне значення наведене у табл. 3.16

Таблиця 3.16

Граничне значення $J(\alpha)$ критерію Саркаді–Косіка [344]

n	**Рівень значущості α**		**n**	**Рівень значущості α**	
	0,05	**0,10**		**0,05**	**0,10**
5	0,499	0,408	**40**	1,040	0,836
10	0,741	0,599	**50**	1,020	0,823
15	0,881	0,695	**60**	1,060	0,862
20	0,931	0,748	**70**	1,070	0,870
25	0,973	0,782	**80**	1,070	0,876
30	1,000	0,806	**90**	1,080	0,880
35	1,020	0,823	**100**	1,080	0,883

Критерій має досить високу потужність.

Приклад 3.12 Для даних прикладу 3.10 перевіримо гіпотезу рівномірності розподілу випадкової величини критерієм Сарки–Косіка для рівня значущості $\alpha = 0,05$.

Розв'язання. Поетапне обчислення статистики критерію подано в таблиці:

i	x_i	$\frac{i}{n+1}$	$x_i - \frac{i}{n+1}$	$i\,(n-i+1)$	d_i	d_i^2
1	0,047	0,0909	-0,0439	10	-0,004391	$1,928 \cdot 10^{-5}$
2	0,051	0,1818	-0,1308	18	-0,007268	$5,282 \cdot 10^{-5}$
3	0,155	0,2727	-0,1177	24	-0,004905	$2,406 \cdot 10^{-5}$
4	0,168	0,3636	-0,1956	28	-0,006987	$4,882 \cdot 10^{-5}$
5	0,291	0,4545	-0,1637	30	-0,005452	$2,972 \cdot 10^{-5}$
6	0,348	0,5454	-0,1975	30	-0,006582	$4,332 \cdot 10^{-5}$
7	0,512	0,6363	-0,1244	28	-0,004442	$1,973 \cdot 10^{-5}$
8	0,561	0,7272	-0,1663	24	-0,006928	$4,800 \cdot 10^{-5}$
9	0,672	0,8181	-0,1462	18	-0,008121	$6,595 \cdot 10^{-5}$
10	0,691	0,9090	-0,2181	10	-0,021809	$4,756 \cdot 10^{-4}$

Обчислюємо статистику

$$J = 100 \cdot 8,2733 \cdot 10^{-4} - 10 \cdot (-0,076884)^2 = 0,024 .$$

Оскільки $J = 0,024 < J(\alpha) = 0,741$, гіпотеза рівномірності приймається.

Критерій Фроцині

Для перевірки рівномірності ряду $U = (U_{[1]} \le ... \le U_{[n]})$ на відрізку [0,1] статистика критерію Фроцині має вигляд

$$B_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \left| U_{[i]} - \frac{i - 0,5}{n} \right| .$$

Розподіл визнається рівномірним, якщо $B_n < B_n(P)$, де $B_n(P)$ – граничне значення статистики Фроцині для перевірки рівномірності (P – довірча ймовірність), наведено в табл. 3.17.

Таблиця 3.17

Граничне значення статистики $B_n(P)$ критерію Фроцині для перевірки рівномірності розподілу

n	**Довірча ймовірність P**			**n**	**Довірча ймовірність P**		
	0,90	**0,95**	**0,99**		**0,90**	**0,95**	**0,99**
5	0,4964	0,5756	0,7282	**11**	0,4948	0,5806	0,7486
6	0,4908	0,5700	0,7123	**12**	0,4987	0,5790	0,7324
7	0,4955	0,5780	0,7428	**13**	0,4942	0,5815	0,7441
8	0,4933	0,5733	0,7394	**14**	0,4956	0,5769	0,7417
9	0,4947	0,5764	0,7258	**15**	0,4961	0,5730	0,7418
10	0,4896	0,5723	0,7310	∞	0,4970	0,5780	0,7440

Приклад 3.13. Для даних з прикладу 3.10 перевіримо гіпотезу рівномірності розподілу випадкової величини за критерієм Фроцині для довірчої ймовірності $P = 0{,}95$.

Розв'язання. Обчислюємо

$$B_n = \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot \left(\left|0{,}047 - 0{,}05\right| + \left|0{,}051 - 0{,}15\right| + \ldots + \left|0{,}691 - 0{,}95\right|\right) = 0{,}4756 .$$

Із табл. 3.17 знаходимо $B_n(0{,}95) = 0{,}5723$.

Оскільки $B_n = 0{,}4756 < B_n(0{,}95) = 0{,}5723$, гіпотеза рівномірності розподілу U не відхиляється.

3.3.4. Перевірка гіпотез про закон розподілу Вейбула

Критерій Ман-Фертига–Шуера

Розподіл Вейбула є узагальнювальним для експоненціального розподілу. Закон розподілу Вейбула

$$F(x) = 1 - \exp\left(-\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta},$$

збігається за умови $\beta = 1$ з експоненціальним. Тому розподіл Вейбула часто розглядається як альтернатива у випадку перевірки експоненційності розподілу.

Розглянемо критерій згоди для розподілу Вейбула. Критерій був запропонований його авторами для випробувань виробів на довговічність.

Якщо $t_1, t_2, ..., t_r$ – перші r порядкові статистики, отримані під час випробувань виробів обсягом $n \geq r$, то статистика критерію

$$K = \frac{\sum_{i=\left[\frac{r}{2}\right]+1}^{r-1} a_i^{-1}(x_{i+1} - x_i)}{\sum_{i=1}^{r} \alpha_i^{-1}(x_{i+1} - x_i)},$$

де $x_i = \ln t_i$, $\left[\frac{r}{2}\right]$ – найбільше ціле число, більше або рівне $\frac{r}{2}$, a_i – коефіцієнт наведений в табл. Д1.7 дод. 1.

Гіпотеза згоди емпіричного розподілу з двопараметричним розподілом Вейбула відхиляється, якщо

$$K > K_P(r, n),$$

де $K > K_P(r, n)$ – граничне значення статистики для довірчої достовірності P (за відомих результатів відмов r виробів із n), наведено в табл. Д1.8 дод. 1.

Приклад 3.14. Маємо ряд спостережень

x_i	1	2	4	5	6	7	15	18	23	29

Перевіримо гіпотезу згоди з двопараметричним розподілом Вейбула при довірчій достовірності $P = 0{,}95$.

Розв'язання. Для ряду значень x_i маємо ряд:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\ln x_i$	0	0,693	1,386	1,609	1,792	1,946	2,708	2,890	3,135	3,367

Із табл. Д1.7 дод. 1 маємо:

i	1	2	3	4	5
a_i	1,053606	0,559013	0,399100	0,324470	0,286163
i	6	7	8	9	
a_i	0,269493	0,271645	0,300869	0,405316	

З урахуванням коефіцієнтів a_i для $n = r = 10$

$$\sum_{i=6}^{9} \frac{\ln x_{i+1} - \ln x_i}{\alpha_i} = \frac{2{,}708 - 1{,}946}{0{,}269493} + ... + \frac{3{,}367 - 3{,}135}{0{,}405316} = 4{,}886;$$

$$\sum_{i=1}^{9}\frac{\ln x_{i+1}-\ln x_i}{\alpha_i}=4{,}886+\sum_{i=1}^{5}\frac{\ln x_{i+1}-\ln x_i}{\alpha_i}=$$

$$=4{,}886+\frac{0{,}693}{1{,}053606}+\ldots+\frac{1{,}946-1{,}792}{0{,}28163}=8{,}443,$$

$$K=\frac{4{,}886}{8{,}443}=0{,}579\ .$$

Із табл. Д.1.8 дод 1 для $n=10$ та $r=10$ знаходимо $K_{0,95}(10;10)=0{,}69$. Оскільки $K<K_{0,95}(10,10)$, гіпотеза про розподіл Вейбула приймається.

Для випадку цензурування (відкидання k найбільших значень вибірки) маємо:

$$\sum_{i=4}^{6}\frac{\ln x_{i+1}-\ln x_i}{\alpha_i}=\frac{1{,}792-1{,}609}{0{,}324470}+\ldots+\frac{2{,}708-1{,}946}{0{,}269493}=3{,}929\ ;$$

$$\sum_{i=1}^{6}\frac{\ln x_{i+1}-\ln x_i}{\alpha_i}=\frac{0{,}693}{1{,}053606}+\ldots+\frac{2{,}708-1{,}946}{0{,}269493}=6{,}386,$$

$$K=\frac{3{,}929}{6{,}386}=0{,}615$$

Із табл. Д.1.8 дод. 1 для $n=10$ та $r=7$ знаходимо $K_{0.95}(7;10)=0{,}81$.

Оскільки $K=0{,}62<K_{0,95}(7,10)=0{,}81$, гіпотеза про згоду із законом розподілу Вейбула також не відхиляється.

Контрольні запитання та завдання

1. Наведіть та поясніть відомі методи визначення закону розподілу за даними ряду спостережень.
2. З якою метою застосовують діаграму $\beta_1\beta_2$?
3. Поясніть суть та послідовність застосування спеціалізованих критеріїв згоди із визначеними законами розподілу. Застосуйте їх для визначення закону розподілу вибірки обраної (за варіантом) з табл. Д2.2 дод. 2.
4. Які методи передбачають групування даних?
5. Наведіть алгоритми побудови полігону частот, гістограми та інтегральної функції розподілу? Як перевірити їх правильність?
6. Для даних з табл. Д2.2 згідно з варіантом побудуйте полігон частот, гістограму та інтегральну функцію розподілу.
7. Для даних з табл. Д2.2 згідно з варіантом визначте закон розподілу шляхом застосування критеріїв, які передбачають групування даних.

4. ПЕРЕВІРКА ГІПОТЕЗ ПРО СТАТИСТИЧНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНИХ ДАНИХ

Процедури і методи вирішення ряду практичних завдань статистики для випадків, коли спостережувані величини є випадковими і розподілені за гауссівським законом, розглянуто у підрозділах 4.1, 4.2 та 4.3. Методи застосовують за умови виконання таких умов: елементи вибірки отримано незалежними повтореннями експерименту; у випадку скінченої генеральної сукупності обсяг вибірки не повинен перевищувати більше 10% обсягу генеральної сукупності; спостережувані змінні розподілено за гауссівським законом. Проте якщо розподіл імовірності мало відрізняється від нормального, такі методи залишаються ефективними. Тоді обсяг вибірки має бути не меншим ніж 10 одиниць, причому достовірність отримуваних статистичних висновків зростає зі збільшенням обсягів вибірок. У підрозділах 4.4 – 4.7 розглянуто критерії для інших розподілів імовірності.

4.1. Гіпотези про математичне сподівання

Порівняння невідомого середнього значення із заданим значенням μ_0 за відомої дисперсії.

Початкові дані: обсяг вибірки n, сума спостережуваних значень $\sum_{i=1}^{n} x_i$, задане значення μ_0, значення дисперсії генеральної сукупності σ_0^2 або стандартного відхилення σ_0, обраний рівень значущості α.

Визначається квантиль стандартного гауссівського закону розподілу рівня $(1-\alpha)$: $u_{1-\alpha}$, квантиль стандартного гауссівського закону розподілу рівня $(1-\alpha/2)$: $u_{1-\alpha/2}$, а також обчислюється значення $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$. За отриманими результатами порівнюють вибіркове середнє значення $\bar{x}$ із заданим значенням μ_0 таким чином.

1. У двосторонньому випадку: гіпотеза статистичної рівності вибіркового середнього і заданого значення (нульова гіпотеза) відхиляється, якщо:

$$\left|\bar{x}-\mu_0\right|>\left(u_{1-\alpha/2}/\sqrt{n}\right)\sigma_0. \qquad (4.1)$$

2. В односторонньому випадку:

а) гіпотеза про те, що вибіркове середнє, не менше за μ_0 (нульова гіпотеза), відхиляється, якщо

$$\bar{x}<\mu_0-\left(u_{1-\alpha}/\sqrt{n}\right)\sigma_0;$$

б) гіпотеза про те, що вибіркове середнє, не більше за μ_0 (нульова гіпотеза) відхиляється, якщо

$$\bar{x}>\mu_0+\left(u_{1-\alpha}/\sqrt{n}\right)\sigma_0.$$

Примітка. Квантилі стандартного гауссівського закону розподілу визначають за табл. Д.1 дод. 1.

Розглянутий критерій можна застосовувати для перевірки правильності налаштування технологічного процесу на середину поля допуску або на задане оптимальне значення. Точність технологічного процесу передбачається відомою або заздалегідь оціненою, тобто значення σ_0^2 відоме. Можливі технологічні процеси: механічне оброблення, розфасування та інші, де рівноможливі відхилення контрольованого параметра у більший та менший бік від центра налаштування.

Приклад 4.1. Задано такі результати спостережень

58,5	60,0	59,0	56,0	56,5	57,5	59,0	58,0	61,5	55,5	57,5	58,0	56,5	56,5	57,0	58,5	57,0	59,5	59,5	52,0

Перевіримо гіпотезу про рівність вибіркового середнього $\bar{x}$ і значення $\mu_0=57{,}0$, якщо дисперсія генеральної сукупності $\sigma_0^2=3{,}83$ відповідно $\sigma_0=1{,}99$, обраний рівень значущості $\alpha=0{,}1$.

Розв'язання. За початковими даними визначаємо: обсяг вибірки $n=20$, сума $\sum_{i=1}^{20}x_i=1153{,}5$, квантиль стандартного гауссівського закону розподілу рівня $(1-\alpha)$: $u_{1-\alpha}=1{,}28$, рівня $(1-\alpha/2)$: $u_{1-\alpha/2}=1{,}65$, а також значення $\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{20}x_i=57{,}68$.

Оскільки співвідношення (4.1) не виконується і виконується нерівність $\left|\bar{x}-\mu_0\right|=0{,}68 \;<\; \left[u_{1-\alpha/2}/\sqrt{n}\right]\cdot\sigma_0=0{,}72$, то гіпотеза $\bar{x}=\mu_0$ приймається.

Порівняння невідомого середнього значення із заданим значенням за невідомої дисперсії

Початкові дані: обсяг вибірки n; сума значень $\sum x_i$; сума квадратів значень спостережуваних величин $\sum x_i^2$; задане значення μ_0; степені вільності: $v = n - 1$; рівень значущості α.

Визначають квантиль розподілу Стьюдента рівня $(1-\alpha)$ із v степенями вільності: $t_{1-\alpha}(v)$ і квантиль рівня $(1-\alpha/2)$ – $t_{1-\alpha/2}(v)$, а також значення $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$. Обчислюють вирази:

$$D = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 / n}{n-1}, \tag{4.2}$$

$$s = \sqrt{D}. \tag{4.3}$$

За отриманими результатами вибіркове середнє значення $\bar{x}$ порівнюють із заданим значенням μ_0:

1. У двосторонньому випадку: гіпотеза рівності вибіркового середнього і заданого значення (нульова гіпотеза) відхиляється, якщо виконується нерівність:

$$|\bar{x} - \mu_0| > \left(t_{1-\alpha/2}(f) / \sqrt{n}\right)s. \tag{4.4}$$

2. В односторонньому випадку:

а) гіпотеза про те, що вибіркове середнє, не менше за μ_0, (нульова гіпотеза) відхиляється, якщо виконується умова:

$$\bar{x} < \mu_0 - \left(t_{1-\alpha}(v) / \sqrt{n}\right)s;$$

б) гіпотеза про те, що вибіркове середнє, не більше за μ_0 (нульова гіпотеза), відхиляється за умови:

$$\bar{x} > \mu_0 + \left(t_{1-\alpha}(v) / \sqrt{n}\right)s.$$

Примітка. Квантилі розподілу Стьюдента наведено в табл. Д.1.2 дод. 1.

Описаний критерій можна застосовувати для таких самих задач, що і попередній, але точність технологічного процесу заздалегідь невідома. При цьому може бути з’ясовано, чи є відхилення від точної міри випадковими або наявна систематична похибка.

Приклад 4.2. Для даних прикладу 4.1 перевіримо гіпотезу про $\bar{x} = \mu_0 = 57{,}0$ для рівня значущості $\alpha = 0{,}1$ за невідомої дисперсії.

Розв'язання. За початковими даними визначаємо: обсяг вибірки $n = 20$, степені вільності $v = n - 1 = 19$, сума значень величин $\sum_{i=1}^{20} x_i = 1153{,}5$, сума квадратів значень $\sum_{i=1}^{20} x_i^2 = 66604{,}75$, квантиль розподілу Стьюдента рівня $(1-\alpha)$ із $v = 19$ степенями вільності: $t_{0,9}(19) = 1{,}33$, рівня $(1-\alpha/2)$ – $t_{0,95}(19) = 1{,}73$, значення $\bar{x} = 57{,}68$. За формулами (4.4) і (4.5) маємо:

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{20}(x_i - \bar{x})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^{20} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{20} x_i\right)^2 / n}{n-1} = 4{,}0, \; s = \sqrt{4{,}0} = 2{,}0 .$$

Оскільки співвідношення (4.6) не виконується і виконується нерівність $|\bar{x} - \mu_0| = 0{,}68 \; < \; \left(t_{0,95}(19)/\sqrt{n}\right)s = 0{,}78$, гіпотеза $\bar{x} = \mu_0$ приймається.

Порівняння невідомих середніх значень двох вибірок за відомих дисперсій

Початкові дані: обсяги вибірок n_1 і n_2, суми значень спостережуваних величин $\sum x_{1,i}$ і $\sum x_{2,i}$, значення дисперсій генеральних сукупностей σ_{01}^2 і σ_{02}^2, обраний рівень значущості α.

Визначають квантиль стандартного гауссівського закону розподілу рівня $(1-\alpha)$ – $u_{1-\alpha}$ і квантиль рівня $(1-\alpha/2)$ – $u_{1-\alpha/2}$, знаходять: $\bar{x}_1 = \frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1} x_{1,i}$ і $\bar{x}_2 = \frac{1}{n_2}\sum_{i=1}^{n_2} x_{2,i}$. Обчислюють величину:

$$\sigma_d = \sqrt{\frac{\sigma_{01}^2}{n_1} + \frac{\sigma_{02}^2}{n_2}} . \tag{4.5}$$

За отриманими результатами порівнюють середні значення двох сукупностей.

1. У двосторонньому випадку: гіпотеза рівності середніх значень (нульова гіпотеза) відхиляється, якщо виконується нерівність:

$$|\bar{x}_1 - \bar{x}_2| > u_{1-\alpha/2}\sigma_d . \tag{4.6}$$

2. В односторонньому випадку:

а) гіпотеза про те, що перше середнє $\bar{x}_1$ не менше від другого $\bar{x}_2$ (нульова гіпотеза) відхиляється, якщо виконується умова:

$$\bar{x}_1 < \bar{x}_2 - u_{1-\alpha}\sigma_d ; \qquad (4.7)$$

б) гіпотеза про те, що перше середнє $\bar{x}_1$ не більше ніж друге $\bar{x}_2$ (нульова гіпотеза) відхиляється, якщо виконується нерівність:

$$\bar{x}_1 > \bar{x}_2 + u_{1-\alpha}\sigma_d .$$

Примітка. Квантилі стандартного гауссівського закону розподілу визначаються за табл. Д.1.1 дод. 1.

Розглянутий критерій можна застосовувати для розв'язання таких задач.

1. Процес вимірювання проводять паралельно двома різними приладами, точність кожного з них відома, тобто відомі параметри σ_{01} і σ_{02}. Чи можна вважати. що результати, виміряні обома приладами будуть однаковими.

2. Необхідно визначити, чи однакове середнє значення – параметр вмісту важких металів у двох партіях авіаційного палива, випущених двома заводами. При цьому заздалегідь відомі характеристики розсіювання цього вмісту (тобто дисперсії) для кожного з двох заводів.

3. Порівняти результати спостережень для двох різних умов зовнішнього середовища.

Приклад 4.3 Задано такі результати спостережень:

Перша вибірка	57,5	59,0	58,0	55,5	58,5	60,0	59,0	56,5	61,5	56,0
	58,5	57,0	59,5	52,0	57,5	58,0	56,5	57,0	56,5	59,5

Друга вибірка	57,0	59,0	54,5	54,5	57,0	57,0	60,5	57,5	54,5	56,0
	56,0	60,0	56,0	54,0	57,5	54,0	54,5	54,5	55,0	54,0

Перевіримо гіпотезу $\bar{x}_1 = \bar{x}_2$, якщо задано значення дисперсій $\sigma_{01}^2 = 3{,}83$ і $\sigma_{02}^2 = 3{,}83$, рівень значущості $\alpha = 0{,}1$.

Розв'язання. Обсяги двох вибірок $n_1 = n_2 = 20$, суми значень $\sum x_{1,i} = 1153{,}5$ і $\sum x_{2,i} = 1123$. Визначаємо квантиль стандартного гауссівського закону розподілу рівня $(1-\alpha)$ (табл. Д1.1 дод. 1): $u_{0,9} = 1{,}28$, квантиль рівня $(1-\alpha/2)$: $u_{0,95} = 1{,}65$, а також значення

$\bar{x}_1 = \frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20} x_{1,i} = 57{,}68$ і $\bar{x}_2 = \frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20} x_{2,i} = 56{,}15$. За формулою (4.5) дістаємо:

$$\sigma_d = \sqrt{\frac{\sigma_{01}^2}{n_1} + \frac{\sigma_{02}^2}{n_2}} = \sqrt{\frac{3{,}83}{20} + \frac{3{,}83}{20}} = 0{,}65 .$$

Оскільки співвідношення (4.6) $\left|\bar{x}_1 - \bar{x}_2\right| = 1{,}53 > u_{0,95}$, $\sigma_d = 1{,}06$ виконується, то гіпотеза $\bar{x}_1 = \bar{x}_2$ відхиляється.

Умова (4.7) не виконується, тобто

$$\bar{x}_1 = 57{,}68 > \bar{x}_2 - u_{0,9}, \ \sigma_d = 55{,}42 .$$

Отже, приймається гіпотеза про те, що середнє $\bar{x}_1$ не менше за $\bar{x}_2$.

Порівняння середніх значень двох вибірок за невідомих але рівних дисперсій

Початкові дані: обсяги двох вибірок n_1 і n_2, сума значень величин $\sum x_{1,i}$ і $\sum x_{2,i}$, сума квадратів значень величин: $\sum x_{1,i}^2$ і $\sum x_{2,i}^2$, степені вільності: $v = n_1 + n_2 - 2$, рівень значущості α.

Визначають квантилі розподілу Стьюдента рівня $(1-\alpha)$ із v степенями вільності – $t_{1-\alpha}(v)$ і рівня $(1-\alpha/2)$ – $t_{1-\alpha/2}(v)$ (табл. Д.1.2 дод. 1) та значення $\bar{x}_1 = \frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1} x_{1,i}$, $\bar{x}_2 = \frac{1}{n_2}\sum_{i=1}^{n_2} x_{2,i}$.

Далі обчислюють:

$$s = \sum_{i=1}^{n_1}\left(x_{1,i} - \bar{x}_1\right)^2 + \sum_{i=1}^{n_2}\left(x_{2,i} - \bar{x}_2\right)^2 = \\ = \sum_{i=1}^{n_1} x_{1,i}^2 + \sum_{i=1}^{n_2} x_{2,i}^2 - \frac{1}{n_1}\left(\sum_{i=1}^{n_1} x_{1,i}\right)^2 - \frac{1}{n_2}\left(\sum_{i=1}^{n_2} x_{2,i}\right)^2 \qquad (4.8)$$

і величину
$$s_d = \sqrt{\frac{(n_1 + n_2)}{n_1 \cdot n_2} \cdot \frac{s}{n_1 + n_2 - 2}} . \qquad (4.9)$$

За отриманими результатами порівнюють середні значення двох сукупностей.

1. У двосторонньому випадку: гіпотеза рівності середніх значень (нульова гіпотеза) відхиляється, якщо виконується нерівність:

$$\left|\bar{x}_1 - \bar{x}_2\right| > t_{1-\alpha/2}(v) s_d \ . \qquad (4.10)$$

2. В односторонньому випадку:

а) гіпотеза про те, що перше середнє $\bar{x}_1$, не менше від другого $\bar{x}_2$ (нульова гіпотеза), відхиляється, якщо виконується нерівність

$$\bar{x}_1 < \bar{x}_2 - t_{1-\alpha}(v) s_d \ ; \qquad (4.11)$$

б) гіпотеза про те, що перше середнє $\bar{x}_1$, не більш від другого $\bar{x}_2$ (нульова гіпотеза), відхиляється, якщо справедливий вираз:

$$\bar{x}_1 > \bar{x}_2 + t_{1-\alpha}(v) s_d \ .$$

Примітка. Дисперсії невідомі, але в припущенні можуть бути рівними.

Приклад 4.4 Для даних прикладу 4.3 перевірити гіпотезу $\bar{x}_1 = \bar{x}_2$, за рівня значущості $\alpha = 0{,}1$ і невідомих дисперсій.

Розв'язання. Обсяги вибірок $n_1 = n_2 = 20$, суми значень $\sum x_{1,i} = 1153{,}5$ і $\sum x_{2,i} = 1123$, суми квадратів значень: $\sum x_{1,i}^2 = 66604{,}75$ і $\sum x_{2,i}^2 = 63133$, степені вільності: $v = n_1 + n_2 - 2 = 38$.

Квантилі розподілу Стьюдента рівня $(1-\alpha)$ із $v = 38$ степенями вільності: $t_{0,9}(38) = 1{,}30$, рівня $(1-\alpha/2)$ – $t_{0,95}(38) = 1{,}69$, значення $\bar{x}_1 = \frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20} x_{1,i} = 57{,}68$ і $\bar{x}_2 = \frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20} x_{2,i} = 56{,}15$. За формулами (4.8) і (4.9) обчислюємо величини:

$$s = \sum_{i=1}^{20} x_{1,i}^2 + \sum_{i=1}^{20} x_{2,i}^2 - \frac{1}{20}\left(\sum_{i=1}^{20} x_{1,i}\right)^2 - \frac{1}{20}\left(\sum_{i=1}^{20} x_{2,i}\right)^2 = 153{,}19 \ ;$$

$$s_d = \sqrt{\frac{(20+20)}{20 \cdot 20} \cdot \frac{s}{20+20-2}} = 0{,}64 \ .$$

Оскільки виконується співвідношення (4.10) $\left|\bar{x}_1 - \bar{x}_2\right| = 1{,}53 > t_{0,95}(38) \cdot s_d = 1{,}08$, то гіпотеза $\bar{x}_1 = \bar{x}_2$ відхиляється.

Умова (4.11) не виконується, $\bar{x}_1 = 57{,}68 > \bar{x}_2 - t_{0,9}(38) \cdot s_d = 55{,}32$.

Отже, справедлива гіпотеза про те, що середнє $\bar{x}_1$ не менше від другого $\bar{x}_2$.

4.2. Гіпотези про дисперсію

Такі гіпотези виникають на практиці при порівнянні прецизійності результатів вимірювань, або визначенні її відповідності встановленим вимогам при проведенні валідації.

Порівняння дисперсії або стандартного відхилення із заданим значенням

Початкові дані: обсяг вибірки n, сума значень величин $\sum x_i$, сума квадратів значень величин: $\sum x_i^2$, задане значення $\sigma_0^2 = D_0$, степені вільності: $v = n - 1$, обраний рівень значущості α.

Спочатку визначають значення квантилів χ^2-розподілу із v степенями вільності рівнів $\alpha, (1-\alpha)$, $\alpha/2$ і $(1-\alpha/2)$ відповідно: $\chi^2_{\alpha}(v)$, $\chi^2_{1-\alpha}(v)$, $\chi^2_{\alpha/2}(f)$, $\chi^2_{1-\alpha/2}(v)$. Далі обчислюють вирази:

$$C = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right)^2 / n, \tag{4.12}$$

$$\frac{C}{\sigma_0^2}. \tag{4.13}$$

За отриманими результатами порівнюють значення дисперсії D із заданим значенням σ_0^2 або значення стандартного відхилення σ із заданим значенням σ_0:

1. Двосторонній випадок: гіпотеза про рівність дисперсії (стандартного відхилення) і заданого значення (нульова гіпотеза) відхиляється, якщо виконується умова:

$$\frac{C}{\sigma_0^2} < \chi^2_{\alpha/2}(v) \text{ або } \frac{C}{\sigma_0^2} > \chi^2_{1-\alpha/2}(v). \tag{4.14}$$

2. Односторонній випадок:

а) гіпотеза про те, що дисперсія (стандартне відхилення) не більше від заданого значення (нульова гіпотеза) відхиляється, якщо справедливою є нерівність:

$$\frac{C}{\sigma_0^2} > \chi^2_{1-\alpha}(v).$$

б) гіпотеза про те, що дисперсія (стандартне відхилення) не менше від заданого значення (нульова гіпотеза) відхиляється, якщо

$$\frac{C}{\sigma_0^2} < \chi_\alpha^2(v).$$

Примітка. Квантилі χ^2 -розподілу наведено в табл. Д.1.4 дод. 1.

Описаний критерій можна застосовувати для оцінювання точності одного устаткування або технологічного процесу порівняно з відомою точністю (тобто відомим параметром σ_0) іншого устаткування або технологічного процесу. Для порівняння використовують міри однорідності однієї сукупності виробів (тобто величини розкиду показника якості) з відомою заздалегідь мірою однорідності, що характеризується стандартним відхиленням σ_0.

Приклад 4.5 Задано такі результати спостережень:

59,0	57,0	54,5	54,5	54,0	57,5	54,5	54,5	57,0	57,0
60,0	56,0	56,0	54,0	56,0	54,5	55,0	54,0	60,5	57,5

Перевіримо гіпотезу про рівність дисперсії вибірки $\hat{D}$ значенню $\sigma_0^2 = D_0 = 3{,}5$ для рівня значущості $\alpha = 0{,}1$.

Розв'язання. Обсяг вибірки $n = 20$, степені вільності $v = n - 1 = 19$, сума значень спостережуваних величин $\sum x_i = 1125$, сума квадратів значень спостережуваних величин: $\sum x_i^2 = 63133$.

Визначимо квантилі χ^2 -розподілу із $v = 19$ степенями вільності рівнів α, $(1-\alpha)$, $\alpha/2$ і $(1-\alpha/2)$ відповідно (табл. Д.1.4 дод. 1):

$$\chi_{0,1}^2(19) = 11{,}65\ , \chi_{0,9}^2(19) = 27{,}20\ , \ \chi_{0,05}^2(19) = 10{,}12\ , \ \chi_{0,95}^2(v) = 30{,}14\ .$$

За формулами (4.12) і (4.13) обчислюємо:

$$C = \sum_{i=1}^{20}(x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^{20} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{20} x_i\right)^2 / n = 63133 - \frac{1125^2}{20} = 76{,}55,$$

$$\frac{C}{\sigma_0^2} = \frac{76{,}55}{3{,}5} = 21{,}87\cdot$$

Оскільки нерівності (4.20) не виконуються і маємо співвідношення:

$$\frac{C}{\sigma_0^2} = 21{,}87 > \chi_{0,05}^2(19) = 10{,}12\ ; \quad \frac{C}{\sigma_0^2} = 21{,}87 < \chi_{0,95}^2(19) = 30{,}14\ ,$$

то нульова гіпотеза $\hat{D} = D_0$ приймається.

Порівняння дисперсій або стандартних відхилень двох генеральних сукупностей

Початкові дані: обсяги двох вибірок n_1 і n_2, суми значень величин $\sum x_{1,i}$ і $\sum x_{2,i}$, суми квадратів значень величин: $\sum x_{1,i}^2$ і $\sum x_{2,i}^2$, степені вільності: $v_1 = n_1 - 1$ і $v_2 = n_2 - 1$, обраний рівень значущості α.

Необхідно визначити квантилі розподілу Фішера: $F_{1-\alpha/2}(v_1, v_2)$ і $F_{1-\alpha}(v_1, v_2)$, обчислити значення:

$$C_1 = \sum_{i=1}^{n_1} \left(x_{1,i} - \bar{x}_1\right)^2 = \sum_{i=1}^{n_1} x_{1,i}^2 - \left(\sum_{i=1}^{n_1} x_{1,i}\right)^2 / n_1, \tag{4.15}$$

$$C_2 = \sum_{i=1}^{n_2} \left(x_{2,i} - \bar{x}_2\right)^2 = \sum_{i=1}^{n_2} x_{2,i}^2 - \left(\sum_{i=1}^{n_2} x_{2,i}\right)^2 / n_2. \tag{4.16}$$

Далі визначають величини:

$$s_1^2 = \frac{C_1}{n_1 - 1}, \; s_2^2 = \frac{C_2}{n_2 - 1}.$$

За отриманими результатами порівнюють дисперсії двох сукупностей:

1. Двосторонній випадок: гіпотеза рівності двох дисперсій або рівності двох стандартних відхилень (нульова гіпотеза) відхиляється за виконання умови:

$$\frac{s_1^2}{s_2^2} < \frac{1}{F_{1-\alpha/2}(v_2, v_1)} \text{ або } \frac{s_1^2}{s_2^2} > F_{1-\alpha/2}(v_1, v_2). \tag{4.17}$$

2. Односторонній випадок:

а) гіпотеза про те, що $D_1 < D_2$ $(\sigma_1 < \sigma_2)$ (нульова гіпотеза) відхиляється за умови, що:

$$\frac{s_1^2}{s_2^2} > \frac{1}{F_{1-\alpha}(v_1, v_2)}; \tag{4.18}$$

б) гіпотеза про те, що $D_1 > D_2$ $(\sigma_1 > \sigma_2)$ (нульова гіпотеза) відхиляється, якщо справедливою є нерівність:

$$\frac{s_1^2}{s_2^2} < \frac{1}{F_{1-\alpha}(v_2, v_1)}.$$

Примітка. Квантилі розподілу Фішера наведено в табл. Д.1.3 дод. 1.

Розглянутий критерій застосовують для таких випадків:

1) порівняння точності двох засобів вимірювань за результатами спостережень однієї величини;

2) зіставлення стабільності двох процесів, наприклад стандартизованого та нововведеного, за результатами порівняння двох вибірок з відповідних сукупностей контрольних параметрів.

Приклад 4.6 Для даних прикладу 4.3 перевірити гіпотезу про рівність вибіркових дисперсій s_1^2 і s_2^2 за рівня значущості $\alpha = 0{,}1$.

Розв'язання. Обсяги вибірок $n_1 = n_2 = 20$, степені вільності: $v_1 = n_1 - 1 = 19$ і $v_2 = n_2 - 1 = 19$. Розраховуємо суму значень спостережуваних величин $\sum x_{1,i} = 1153{,}5$ і $\sum x_{2,i} = 1123$, суму квадратів значень величин: $\sum x_{1,i}^2 = 66604{,}75$ і $\sum x_{2,i}^2 = 63133$; визначаємо значення квантилів розподілу Фішера (табл. Д.1.3 дод. 1): $F_{0,9}(19,19) = 1{,}82$ і $F_{0,95}(19,19) = 2{,}17$. За формулами (4.15) і (4.16) обчислюємо значення:

$$C_1 = \sum_{i=1}^{20} \left(x_{1,i} - \bar{x}_1\right)^2 = 66604{,}75 - (1153{,}5)^2 / 20 = 76{,}64\,;$$

$$C_2 = \sum_{i=1}^{20} \left(x_{2,i} - \bar{x}_2\right)^2 = 63133 - (1123)^2 / 20 = 76{,}55\,.$$

Далі за формулами (4.17) визначаємо величини:

$$s_1^2 = \frac{C_1}{20-1} = 4{,}034\,,\quad s_2^2 = \frac{C_2}{20-1} = 4{,}029\,.$$

Оскільки умови (4.18) не виконуються і $\dfrac{s_1^2}{s_2^2} = 1{,}001 > \dfrac{1}{F_{0,95}(19,19)} = 0{,}461$ і $\dfrac{s_1^2}{s_2^2} = 1{,}001 < F_{0,95}(19_1,19) = 2{,}17$, то гіпотеза про $s_1^2 = s_2^2$ приймається.

4.3. Гіпотези про математичні сподівання та дисперсії груп спостережень

У цьому підрозділі розглянуто критерії, які дозволяють порівняти математичні сподівання або дисперсії декількох груп даних. Такими групами можуть бути, наприклад, групи даних, отримані у результаті міжлабораторних порівнянь.

Критерій Кохрена

Для сукупності із p стандартних відхилень s_i, розрахованих за однією і тією ж кількістю результатів спостережень n у групах даних, тестова статистика Кохрена має вигляд

$$C = \frac{s_{\max}^2}{\sum_{i=1}^{p} s_i^2}, \tag{4.19}$$

де $s_{\max}$ – найбільше значення стандартного відхилення в сукупності.

У випадку, якщо значення тестової статистики менше (або дорівнює) від 5%-го критичного значення, тестову позицію ($s_{\max}$) визнають коректною, тобто дисперсії груп даних можна вважати статистично рівними.

Якщо значення тестової статистики більше від 5%-го граничного значення і менше (або дорівнює) за 1%-ве значення, то тестову позицію ($s_{\max}$) можна вважати такою, що відрізняється від загальної групи. Її використання у подальших розрахунках може призвести до помилок.

У випадку, якщо значення тестової статистики більше від 1%-го критичного значення, тестова позиція надто відрізняється від загальної групи і не повинна використовуватись у подальших розрахунках.

Граничні значення для критерію Кохрена наведено в табл. Д1.5 дод. 1.

Критерій Кохрена застосовують лише у випадках, коли всі стандартні відхилення виходять з однієї і тієї ж кількості n результатів вимірювань, отриманих в умовах повторюваності. За допомогою критерію Кохрена перевіряють тільки найбільше значення в сукупності стандартних відхилень, і тому така перевірка є односторонньою. Розсіювання в дисперсіях може також виявлятися і в найменших значеннях стандартних відхилень.

Якщо найбільше значення стандартного відхилення класифіковане як таке, що містить надмірну похибку, воно має бути вилучене, а перевірку з використанням критерію Кохрена можна повторити на значеннях, що залишилися. Слід зазначити, що процедура повторення може призвести до надмірних вилучень даних у випадках, коли нормальний розподіл, взятий за основу, не є достатньо обґрунтованою апроксимацією. Так само обережно потрібно використовувати критерій Кохрена у випадках, коли результати, що характеризуються великими значеннями стандартних відхилень, подані двома або трьома групами.

Приклад 4.7 Маємо 20 вибірок значень одного параметра з різних лабораторій. Перевірити чи є дисперсії отриманих вибірок однорідними. Значення дисперсій за кожною вибіркою зведено у таблицю:

2,18	1,85	1,79	1,92	2,11	1,73	1,88	1,90	1,95	1,92
2,37	1,67	1,95	1,92	2,25	2,03	2,98	1,91	1,92	2,01

Розв'язання. Маємо: $n = 20$, $\alpha = 0{,}05$.

За формулою (4.19) знаходимо статистику Кохрена $C = 0{,}108$. Граничні значення $C_{1\%} = 0{,}21$ і $C_{5\%} = 0{,}17$. Оскільки $C < C_{5\%}$, гіпотеза про однорідність дисперсій отриманих вибірок даних приймається такою, що не суперечить експериментальним даним.

Критерій Граббса

Для перевірки гіпотези про статистичну рівність групи математичних сподівань перевіряють найбільшу величину x_p з групи математичних сподівань, розміщених у порядку зростання $x_{[i]}, i = 1, 2, \cdots, p$. Обчислюють статистику Граббса G_p:

$$G_p = \left(x_{[p]} - \bar{x}\right)/ s, \tag{4.20}$$

де

$$\bar{x} = \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p} x_{[i]};$$

$$s = \sqrt{\frac{1}{p-1}\sum_{i=1}^{p}\left(x_i - \bar{x}\right)^2}.$$

Для перевірки значущості найменшого математичного сподівання x_1 обчислюють тестову статистику

$$G_1 = \left(\bar{x} - x_{[1]}\right)/ s. \tag{4.21}$$

У випадку, якщо значення тестової статистики менше (або дорівнює) за 5%-ве критичне значення (табл. Д1.6 дод. 1), тестову позицію $x_{[p]}$ або $x_{[1]}$ визнають коректною.

У випадку, якщо значення тестової статистики більше від 5%-го критичного значення і менше (або дорівнює) за 1%-ве критичне значення, тестову позицію можна вважати такою, що відрізняється від загальної групи. Її використання у подальших розрахунках може призвести до помилок.

Якщо значення тестової статистики більше від 1%-го порогового значення, тестова позиція відрізняється від загальної групи і не повинна використовуватись у подальших розрахунках.

Перевірка відхилення двох значень математичних сподівань від групи за критерієм Граббса

Щоб перевірити, чи містять два найбільші значення математичних сподівань $x_{[p]}$ і $x_{[p-1]}$ надмірну похибку, обчислюють статистику Граббса

$$G = s_{p-1,p}^2 / s_0^2,$$

де $s_0^2 = \sum_{i=1}^{p}\left(x_{[i]} - \bar{x}\right)^2$; $s_{p-1,p}^2 = \sum_{i=1}^{p-2}\left(x_{[i]} - \bar{x}_{p-1,p}\right)^2$, $\bar{x}_{p-1,p} = \frac{1}{p-2}\sum_{i=1}^{p-2} x_{[i]}$.

У випадку, якщо значення тестової статистики менше (або дорівює) за 5%-ве критичне значення (табл. Д1.6 дод. 1), тестові позиції $x_{[p]}$ та $x_{[p-1]}$ визнають коректною.

Відповідно, щоб перевірити два найменші значення математичних сподівань $x_{[1]}$ і $x_{[2]}$, обчислюють значення статистики Граббса

$$G = \frac{s_{1,2}^2}{s_0^2},$$

де $$s_{1,2}^2 = \sum_{i=3}^{p}\left(x_{[i]} - \bar{x}_{1,2}\right)^2; \quad \bar{x}_{1,2} = \frac{1}{p-2}\sum_{i=3}^{p} x_{[i]}.$$

У випадку, якщо значення тестової статистики G менше (або дорівює) за 5%-ве критичне значення (табл. Д1.6 дод. 1), тестові позиції $x_{[p]}$ та $x_{[p-1]}$ визнають коректною.

Граничні значення критерію Граббса наведено в табл. Д1.6 дод. 1.

Під час аналізу даних експерименту з оцінювання однорідності математичних сподівань p груп даних критерій Граббса застосовують так. Спочатку до математичних сподівань груп застосовують критерій Граббса для перевірки одного значення. Якщо виявляється, що математичні сподівання не однорідні, то необхідно виключити найбільше і повторити перевірку для іншого екстремального математичного сподівання (наприклад, якщо найбільше значення відрізняється, слід перевірити найменше значення, а найбільше значення при цьому виключити). Критерій Граббса для двох значень μ застосовують, якщо при перевірянні одного значення μ – математичні сподівання груп однорідні.

Приклад 4.8 Маємо 20 вибірок значень одного параметра з різних лабораторій. Необхідно перевірити, чи є математичні сподівання отриманих вибірок однорідними. Значення математичних сподівань кожної вибірки зведено у таблицю:

59,0	60,0	57,0	54,0	56,0	57,0	56,0	57,0	57,5	54,5
54,5	56,0	60,5	54,5	55,0	54,5	54,0	57,5	54,5	54,0

Розв'язання. Маємо: $n = 20$, $\alpha = 0{,}05$.

За формулами (4.20) і (4.21) знаходимо $G_P = 2{,}223$ і $G_1 = 1{,}099$ відповідно. Граничні значення (табл. Д1.6 дод. 1) $G_{1\%} = 3$ і $G_{5\%} = 2{,}71$. Оскільки $G_P < G_{5\%}$ і $G_1 < G_{5\%}$, то гіпотеза про однорідність математичних сподівань отриманих вибірок даних приймається.

Дисперсійний критерій

Цей критерій застосовують для перевірки однорідності математичних сподівань k груп даних, обсяг кожної групи n значень. Статистика критерію має вигляд

$$F = \frac{kn(n-1)}{k-1} \frac{\sum_{j=1}^{k}\left(\bar{x}_j - \bar{x}\right)}{\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n}\left(x_{ij} - \bar{x}_j\right)^2}, \qquad (4.22)$$

де $\bar{x}_j = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_{ij}$ – математичне сподівання j–ї групи,

$\bar{x} = \frac{1}{kn}\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n} x_{ij}$ – міжгрупове математичне сподівання.

У випадку справедливості нульової гіпотези (математичні сподівання однорідні) статистика критерію має розподіл Фішера з $v_1 = k-1$ і $v_2 = k(n-1)$ степенями вільності.

Якщо $F > F_\alpha(k-1; k(n-1))$, нульова гіпотеза відхиляється. Тут $F_\alpha(v_1, v_2)$ – α квантиль F-розподілу (табл. Д1.3 дод. 1).

Якщо $v_2 = k(n-1) > 4$ можна використовувати спрощений критерій Романовського, що ґрунтується на статистиці

$$R = \frac{|Q-1|}{\sigma_Q}, \tag{4.23}$$

де

$$Q = \frac{n[k(n-1)-2]}{k-1} \cdot \frac{\sum_{j=1}^{k}(\bar{x}_j - \bar{x})^2}{\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n}(x_{ij} - \bar{x}_j)^2}, \tag{4.24}$$

$$\sigma_Q = \sqrt{\frac{2(kn-3)}{(k-1)(kn-k-4)}}. \tag{4.25}$$

Якщо значення $R \geq 3$, то нульова гіпотеза (математичні сподівання однорідні) відхиляється.

Слід пам'ятати, що застосування цього критерію для випадку, коли закон розподілу величин x_{ij} не є Гаусівським не рекомендується, оскільки він стає в цьому випадку нестійким.

Його стійкість до відхилень від нормальності підвищується, якщо використати модифіковані степені вільності для F-критерію:

$$v_1 = d(k-1) \text{ і } v_2 = dk(n-1) \tag{4.26}$$

де

$$d = 1 + \frac{kn+1}{kn-1}\frac{c}{kn-c}, \tag{4.27}$$

$$c = \frac{\lambda}{v^2}, \; v = \frac{s_2}{kn-1}, \tag{4.28}$$

$$\lambda = \frac{kn(kn+1)s_4 - 3(kn-1)s_2^2}{(kn-1)(kn-2)(kn-3)}, \tag{4.29}$$

$$s_m = \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n}(x_{ij} - \bar{x})^m. \tag{4.30}$$

Приклад 4.9. Маємо 5 вибірок по 20 значень одного параметра з різних лабораторій.

Перша вибірка:

57,5	58,5	58,5	57,5	61,5	59,0	57,0	60,0	58,0	59,5
58,0	59,5	59,0	56,5	56,0	55,5	52,0	56,5	57,0	54,5

Друга вибірка:

56,5	56,0	55,0	58,0	59,0	58,0	55,0	60,0	55,5	53,5
55,0	57,0	57,5	55,0	56,0	57,0	54,5	53,0	53,0	53,0

Третя вибірка:

53,5	55,5	54,0	53,5	53,5	58,0	57,0	57,5	59,0	58,5
60,0	57,5	57,5	59,0	60,0	59,5	56,5	55,5	53,5	56,5

Четверта вибірка:

59,0	57,5	58,5	55,5	57,5	58,0	58,0	58,0	56,0	58,5
56,5	57,5	58,5	60,0	59,0	58,0	56,5	52,0	59,5	58,5

П’ята вибірка:

59,0	60,5	58,0	59,0	56,0	57,0	55,5	59,5	58,0	58,0
58,0	56,0	55,0	53,5	56,0	58,0	58,0	53,5	61,0	59,5

Необхідно перевірити рівність математичних сподівань отриманих вибірок за рівня значущості $\alpha = 0{,}05$.

Розв’язання. Знаходимо математичні сподівання для кожної вибірки: $\bar{x}_1 = 57{,}58$, $\bar{x}_2 = 55{,}88$, $\bar{x}_3 = 56{,}77$, $\bar{x}_4 = 57{,}65$, $\bar{x}_5 = 57{,}45$.

За формулою (4.22) знаходимо значення F-статистики критерію. Маємо $F = 2{,}64$.

Для $\nu_1 = k - 1 = 5 - 1 = 4$, $\nu_2 = k(n-1) = 5 \cdot (20-1) = 95$ і $\alpha = 0{,}05$ знаходимо $F_{0,95}(4;95) = 2{,}47$. Оскільки $F = 2{,}64 > F_{0,95}(4;95) = 2{,}47$, то гіпотеза про однорідність математичних сподівань відхиляється.

Розглянемо тепер більш стійкий F-критерій. Обчислюємо за формулами (4.27) – (4.30) значення: $s_2 = 450{,}33$; $s_4 = 5158$; $\lambda = -8{,}64$; $\nu = 4{,}55$; $c = -0{,}418$; $d = 0{,}996$. Далі знаходимо (4.26) $\nu_1 = 3{,}98$ і $\nu_2 = 94{,}6$. Попередній результат підтверджується і гіпотеза про однорідність математичних сподівань відхиляється.

Розглянемо спрощений критерій Романовського. За формулами (4.23) – (4.25) знаходимо: $Q = 2{,}58$, $\sigma_Q = 0{,}73$ і $R = 2{,}17$. Оскільки $R = 2{,}17 < 3$, то гіпотеза про однорідність математичних сподівань приймається.

Цей результат відрізняється від двох попередніх, оскільки критерій Романовського має меншу потужність, ніж два попередніх критерії, тому на практиці краще застосовувати саме їх.

Метод прямого порівняння (критерій Тьюкі)

Критерій Тьюкі ґрунтується на послідовності статистик

$$T_j = \frac{\left|\bar{x}_j - \bar{x}\right|}{s\sqrt{\dfrac{k-1}{kn}}}, \qquad (4.31)$$

за якими порівнюються попарно всі досліджувані середні $\bar{x}_j$ із загальним середнім. У цьому випадку s^2 є оцінкою загальної дисперсії з $v = k(n-1)$ степенями вільності, тобто

$$s^2 = \frac{1}{k(n-1)} \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n} \left(x_{ij} - \bar{x}\right)^2 . \qquad (4.32)$$

Якщо $T_j < T_P$ для всіх $j = 1, \cdots, k$, де T_P – граничне значення статистики (табл. 4.1), то нульова гіпотеза не відхиляється. Порушення нерівності за будь-якого значення j відхиляє нульову гіпотезу. Передбачається, що дисперсії s_j^2 всіх вибірок статистично однорідні. Цей критерій є альтернативою дисперсійному аналізу.

Таблиця 4.1

Граничні значення T_P критерію Тьюкі,

v	Довірча імовірність P = 0,90							
	k							
	3	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
3	3,164							
4	2,813	3,094						
5	2,629	2,877	3,054					
6	2,516	2,744	3,032					
7	2,440	2,654	2,806	2,924	3,020			
8	2,385	2,589	2,734	2,846	2,937	3,015		
9	2,344	2,540	2,679	2,787	2,875	2,949	3,014	
10	2,312	2,502	2,636	2,740	2,826	2,898	2,960	3,015
11	2,286	2,472	2,602	2,703	2,786	2,856	2,917	2,970
12	2,265	2,447	2,574	2,673	2,754	2,822	2,881	2,934
13	2,247	2,426	2,551	2,647	2,727	2,794	2,852	2,903
14	2,232	2,408	2,531	2,626	2,704	2,769	2,826	2,876
15	2,219	2,393	2,514	2,607	2,684	2,748	2,804	2,854
16	2,208	2,379	2,499	2,591	2,667	2,730	2,786	2,834

Закінчення табл. 4.1

17	2,198	2,368	2,486	2,577	2,652	2,715	2,769	2,817
18	2,190	2,357	2,474	2,565	2,638	2,700	2,754	2,802
19	2,182	2,348	2,464	2,553	2,626	2,688	2,741	2,788
20	2,175	2,340	2,455	2,544	2,616	2,677	2,730	2,776
30	2,133	2,290	2,398	2,482	2,550	2,607	2,657	2,700
60	2,092	2,241	2,343	2,422	2,486	2,539	2,586	2,627
120	2,068	2,193	2,289	2,363	2,423	2,473	2,516	2,554
Довірча імовірність *P*=0,95								
v	***k***							
	3	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
3	4,148							
4	3,565	3,889						
5	3,254	3,527	3,724					
6	3,068	3,311	3,486	3,622				
7	2,944	3,168	3,327	4,453	3,556			
8	2,857	3,066	3,215	3,332	3,428	3,510		
9	2,791	2,990	3,131	3,242	3,333	3,410	3,478	
10	2,741	2,931	3,066	3,172	3,259	3,333	3,397	3,454
11	2,700	2,884	3,014	3,116	3,200	3,271	3,333	3,388
12	2,667	2,845	2,971	3,070	3,151	3,220	3,281	3,334
13	2,640	2,813	2,936	3,032	3,111	3,178	3,237	3,289
14	2,617	2,786	2,906	3,000	3,077	3,143	3,200	3,250
15	2,597	2,763	2,881	2,973	3,048	3,112	3,168	3,219
16	2,580	2,743	2,859	2,949	3,023	3,086	3,141	3,189
17	2,565	2,726	2,840	2,928	3,001	3,063	3,117	3,164
18	2,552	2,711	2,823	2,910	2,982	3,043	3,096	3,143
19	2,540	2,697	2,808	2,894	2,965	3,025	3,077	3,123
20	2,530	2,685	2,794	2,879	2,949	3,009	3,060	3,106
30	2,465	2,610	2,711	2,790	2,854	2,909	2,957	2,998
60	2,404	2,538	2,632	2,704	2,764	2,814	2,857	2,896
120	2,068	2,193	2,289	2,363	2,423	2,473	2,516	2,554

Приклад 4.10 Для даних прикладу 4.9 необхідно перевірити рівність математичних сподівань за довірчої імовірності $P = 0{,}95$.

Розв'язання. Знаходимо математичні сподівання для кожної вибірки:

$\bar{x}_1 = 57{,}58$; $\bar{x}_2 = 55{,}88$; $\bar{x}_3 = 56{,}77$; $\bar{x}_4 = 57{,}65$; $\bar{x}_5 = 57{,}45$.

Знаходимо за формулою (4.32) оцінку сукупної дисперсії $s^2 = 4{,}74$. Знаходимо кількість степенів вільності $v = k(n-1) = 5 \cdot (20-1) = 95$. Визначаємо для кожної вибірки за формулою (4.31):

$T_1 = 1{,}17$; $T_2 = 2{,}73$; $T_3 = 0{,}67$; $T_4 = 1{,}34$; $T_5 = 0{,}88$. Для $v = 95$ і $P = 0{,}95$ із застосуванням інтерполяції знаходимо $T_{0,95} = 2{,}432$ (табл. 4.1). Оскільки $T_2 = 2{,}73 > T_{0,95}$ то гіпотеза про однорідність математичних сподівань відхиляється.

4.4. Гіпотези про інші статистичні характеристики

4.4.1. Критерії симетричності розподілу

Критерій Смірнова

Перевіряється гіпотеза $H_0 : F(a) = 1 - F(a)$, тобто гіпотеза про те, що функція розподілу $F(x)$ симетрична відносно центра *a*. Для вибірки $x_1, x_2, \cdots, x_n$ випадкової величини статистику Смірнова обчислюють за формулою:

$$\tau_n = \max_{x>0} \left| K^+ - K^- \right|, \tag{4.33}$$

де K^+ – кількість значень x, що належать інтервалу $(a, a + x)$; K^- – кількість значень x, що належать інтервалу $(a - x, a)$. Гіпотеза симетричності розподілу відхиляється з достовірністю $1 - \alpha$, якщо $\tau_n \geq \tau(\alpha)$, де $\tau(\alpha)$ – граничне значення статистики, для $n \geq 50$ визначають за формулою

$$\tau_n(\alpha) = \left(n + \frac{2}{3} \right)^{1/2} u_{1-\alpha/2}, \tag{4.34}$$

де $u_{1-\alpha/2}$ – квантиль розподілу Гаусса (табл. Д1.1 дод. 1).

Приклад 4.11 Для ряду даних $x_i : 1, 2, 3, 5, 9, 11, 18, 21, 29, 35$ перевіримо гіпотезу симетричності відносно значення $x = 10$ за допомогою критерію Смірнова за рівня значущості $\alpha = 0{,}05$.

Розв'язання. Маємо для $x_1 = 1$:

– в інтервал (10,11) потрапило $K^+ = 1$ значення;

– в інтервал (9,10) потрапило $K^- = 1$ значення.

Отже, якщо $x_1 = 1$ маємо $K^+ - K^- = 0$. За аналогією отримуємо дані, наведені в таблиці:

i	x_i	K^+	K^-	$K^+ - K^-$
1	1	1	1	0
2	2	1	1	0
3	3	1	1	0
4	5	1	2	-1
5	9	2	5	-3
6	11	3	5	-2
7	18	3	5	-2
8	21	4	5	-1
9	29	5	5	0
10	35	5	5	0

За формулами (4.33) і (4.34) визначаємо: $\tau_n = \max\left|K^+ - K^-\right| = 3$, $\tau_n(\alpha) = \sqrt{10 + 2/3}u_{0,975} = 3{,}266 \cdot 1{,}96 = 6{,}40$. Оскільки $\tau_n = 3 < \tau_n(\alpha) = 6{,}40$, розподіл можна вважати симетричним (нагадаємо, що критерій застосовний для $n \geq 50$, а приклад слід розглядати як демонстраційний).

Знаковий критерій симетричності

Перевіряється гіпотеза про симетричність розподілу відносно центра a. Статистиками критерію є K^+ – кількість додатних значень величин $y_i = x_i - a$; K^- – кількість їх від'ємних значень.

Гіпотеза симетричності відхиляється, якщо

$$\min\left(K^+, K^-\right) < K(\alpha), \tag{4.35}$$

де $K(\alpha)$ – граничне значення, наведене в табл. 4.2.

Якщо n > 100, розподіл K^+ задовільно апроксимується нормальним з $\mathbf{M}(K^+) = \dfrac{n}{2}$ і $\mathbf{D}(K^-) = \dfrac{n}{4}$.

Формула для граничних значень має вигляд

$$K(\alpha) = \left[\frac{n-1}{2} - c\sqrt{n+1}\right],$$

де $c = 1{,}288$ для $\alpha = 0{,}01$; $c = 0{,}89$ для $\alpha = 0{,}05$; $c = 0{,}8224$ для $\alpha = 0{,}10$.

Випадкова величина $F = \dfrac{K^+}{n - K^- + 1}$ за справедливості нульової гіпотези симетричності має F-розподіл Фішера з $v_1 = 2\left(n - K^+ + 1\right)$ і $v_2 = 2K^+$ степенями вільності.

Таблиця 4.2

Граничне значення $K(\alpha)$ критерію знаків (α – рівень значущості)

n	α			**n**	α			**n**	α		
	0,01	**0,05**	**0,10**		**0,01**	**0,05**	**0,10**		**0,01**	**0,05**	**0,10**
5			0	**34**	9	10	11	**63**	20	23	24
6		0	0	**35**	9	11	12	**64**	21	23	24
7		0	0	**36**	9	11	12	**65**	21	24	25
8	0	0	0	**37**	10	12	13	**66**	22	24	25
9	0	1	1	**38**	10	12	13	**67**	22	25	26
10	0	1	1	**39**	11	12	13	**68**	22	25	26
11	0	1	2	**40**	11	13	14	**69**	23	25	27
12	1	2	2	**41**	11	13	14	**70**	23	26	27
13	1	2	3	**42**	12	14	15	**71**	24	26	28
14	1	2	3	**43**	12	14	15	**72**	24	27	28
15	2	3	3	**44**	13	15	16	**73**	25	27	28
16	2	3	4	**45**	13	15	16	**74**	25	28	29
17	2	4	4	**46**	13	15	16	**75**	25	28	29
18	3	4	5	**47**	14	16	17	**76**	26	28	30
19	3	4	5	**48**	14	16	17	**77**	26	29	30
20	3	5	5	**49**	15	17	18	**78**	27	29	31
21	4	5	6	**50**	15	17	18	**79**	27	30	31
22	4	5	6	**51**	15	18	19	**80**	28	30	32
23	4	6	7	**52**	16	18	19	**81**	28	31	32
24	5	6	7	**53**	16	18	20	**82**	28	31	33
25	5	7	7	**54**	17	19	20	**83**	29	32	33
26	6	7	8	**55**	17	19	20	**84**	29	32	33
27	6	7	8	**56**	17	20	21	**85**	30	32	34
28	6	9	9	**57**	18	20	21	**86**	30	33	34
29	7	9	9	**58**	18	21	22	**87**	31	33	35
30	7	10	10	**59**	19	21	22	**88**	31	34	35
31	7	10	10	**60**	19	21	23	**89**	31	34	36
32	8	10	10	**61**	20	22	23	**90**	32	35	36
33	8	11	11	**62**	20	22	24	**91**	32	35	37

Критерій простий в обчислювальному відношенні, але має невисоку потужність. Тому його рекомендується використовувати, якщо $n > 50$ (n – половина обсягу вибірки).

Приклад 4.12. Для ряду даних $x_i : 1, 2, 3, 5, 9, 11, 18, 21, 28, 30$. перевіримо гіпотезу симетричності розподілу відносно значення $x = 10$ за критерієм знаків для рівня значущості $\alpha = 0{,}05$.

Розв'язання. Маємо $K^+ = 5$ і $K^- = 5$, $\min(K^+, K^-) = 5$. Із табл. 4.2 маємо $K(0{,}05) = 1$. Оскільки за формулою (4.35) $\min(K^+, K^-) = 5 < K(0{,}05) = 1$, гіпотеза симетричності розподілу не відхиляється.

Критерій симетричності Антіла-Керстінга-Цукіні

Необхідно перевірити симетричність даних відносно медіани. Нехай $\mathbf{Med}(x)$ – оцінка медіани ряду $x_{[1]} \le x_{[2]} \le \ldots \le x_{[n]}$. Утворимо ряд значень $y_i = \left| x_{[i]} - \mathbf{Med}(x) \right|$, і нехай R_i – ранг величини y_i відповідно до упорядкованого за зростанням ряду значень $y_{[i]}$.

Позначимо:

$$\operatorname{sign}(z) = \begin{cases} 1, z > 0, \\ 0, z = 0, \\ -1, z < 0. \end{cases}$$

Тоді статистика критерію має вигляд

$$T_1(\gamma) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} c_\gamma \left(\frac{R_i}{2(n+1)}; \frac{1}{2} - \gamma \right) \operatorname{sign}\left(x_{[i]} - \mathbf{Med}(x) \right),$$

де $c_\gamma = \min\left(r; \frac{1}{2} - \gamma \right)$, якщо $0 \le r$, $\gamma \le \frac{1}{2}$.

Гіпотеза симетричності відхиляється, якщо $T_1(\gamma) \ge T_{\text{кр}}(\gamma)$.

Для $\gamma = 0$ і $n \ge 7$ статистика

$$T_1(0) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} c_0 \left(\frac{R_i}{2(n+1)}; \frac{1}{2} \right) \operatorname{sign}\left(x_{[i]} - \mathbf{Med}(x) \right)$$

розподілена асимптотично нормально з $\mu = 0$ та дисперсією $\sigma^2 = 0{,}03156 e^{-\frac{a}{n}}$, де $a = 5{,}66$ для парних n та $a = 9{,}75$ для непарних n.

Якщо $\gamma = \frac{1}{6}$, для $T_1\left(\frac{1}{6}\right)$ також може бути застосована апроксимація Гаусса за умови, що $n \ge 7$, $\sigma^2 = 0{,}01736 e^{-a/n}$, де $a = 5{,}77$ для парних n і $a = 11{,}11$ для непарних.

Отже, для розглянутих статистик граничні значення можна розрахувати за формулами (P – довірча ймовірність):

– для парних n

$$T_{\text{гр}}(0) = 0{,}1776513 \exp\left(-\frac{2{,}83}{n} \right) u_P; \; T_{\text{гр}}\left(\frac{1}{6} \right) = 0{,}131757 \exp\left(-\frac{2{,}885}{n} \right) u_P;$$

– для непарних n

$$T_{\text{гр}}(0)=0{,}1776513\exp\left(-\frac{4{,}875}{n}\right)u_P;\ T_{\text{гр}}\left(\frac{1}{6}\right)=0{,}131757\exp\left(-\frac{5{,}555}{n}\right)u_P,$$

де u_P – квантиль стандартного нормального розподілу.

Приклад 4.13. Для даних з попереднього прикладу 4.12 перевірити гіпотезу симетричності розподілу критеріями $T_1(0)$ і $T_1(1/6)$ Антіла-Керстінга-Цукіні для $P=0{,}95$.

Розв'язання. Для ряду $x_{[i]}$ медіана $\mathbf{Med}(x)=\frac{x_{[5]}+x_{[6]}}{2}=10$. Отримуємо ряд значень $y_i=\left|x_{[i]}-\mathbf{Med}(x)\right|$: 9, 8, 7, 5, 1, 1, 8, 11, 18, 20.

Ранжованому ряду $y_{[i]}$: 1, 1, 4, 7, 8, 8, 9, 11, 18, 20

відповідає послідовність рангів R_i: 1,5; 1,5; 3; 4; 5,5; 5,5; 7; 8; 9; 10.

Послідовність рангів R_i, що відповідає послідовності y_i, має вигляд

7; 5,5; 4; 3; 1,5; 1,5; 5,5; 8; 9; 10.

Для послідовності x_i ряд $\operatorname{sign}\left(x_{[i]}-\mathbf{Med}(x)\right)$ матиме вигляд

-1; -1; -1; -1; -1; +1; +1; +1; +1; +1.

Обчислюємо статистики критерію:

$$T_1(0)=\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\sum_{i=1}^{n}\min\left[\frac{R_i}{2(n+1)},\frac{1}{2}\right]\cdot sign\left(x_{[i]}-\mathbf{Med}(x)\right)=\frac{1}{\sqrt{10}}\times$$

$$\times\left[\min\left(\frac{7}{2\cdot 11},\frac{1}{2}\right)\cdot(-1)+\min\left(\frac{5{,}5}{2\cdot 11},\frac{1}{2}\right)\cdot(-1)+\ldots+\min\left(\frac{10}{2\cdot 11},\frac{1}{2}\right)\cdot 1\right]=0{,}1868;$$

$$T_1\left(\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\sum_{i=1}^{n}\min\left[\frac{R_i}{2(n+1)},\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right]\cdot\operatorname{sign}\left(x_{[i]}-\mathbf{Med}(x)\right)=\frac{1}{\sqrt{10}}\times$$

$$\times\left[\min\left(\frac{7}{2\cdot 11},\frac{1}{3}\right)\cdot(-1)+\min\left(\frac{5{,}5}{2\cdot 11},\frac{1}{3}\right)\cdot(-1)+\ldots+\min\left(\frac{10}{2\cdot 11},\frac{1}{3}\right)\cdot 1\right]=0{,}11498.$$

Для $P=0{,}95$ маємо $u_P=1{,}645$ і граничні значення:

$$T_{\text{гр}}(0)=0{,}17765\exp\left(-\frac{2{,}83}{10}\right)1{,}645=0{,}220;$$

$$T_{\text{гр}}\left(\frac{1}{6}\right)=0{,}131757\exp\left(-\frac{2{,}885}{10}\right)1{,}645=0{,}1624.$$

Оскільки $T_1(0)=0{,}1868<T_{\text{кр}}(0)=0{,}220$ і $T_1(1/6)=0{,}115<T_{\text{гр}}(1/6)=0{,}162$, гіпотеза симетричності розподілу відносно медіани приймається.

4.4.2. Порівняння параметрів для експоненціального розподілу

Припустимо, що є дві вибірки випадкових величин (наприклад, час напрацювання на відмову виробу) обсягами n і m: $x_1, x_2, \cdots, x_n$ та $y_1, y_2, \cdots, y_m$, які розподілені за експоненціальним законом, тобто зі щільністю розподілу:

$$p(x) = \frac{1}{v_1}\exp\left(-\frac{x}{v_1}\right) \text{ та } p(y) = \frac{1}{v_2}\exp\left(-\frac{y}{v_2}\right),$$

де v_1 і v_2 — параметри розподілів (середні значення).

Іноді на практиці (наприклад аналіз надійності об’єктів) використовують параметр $\lambda = \dfrac{1}{v}$ – інтенсивність відмов.

Критерій Фішера

Статистика критерію має вигляд

$$F = \frac{m\sum_{i=1}^{n} x_i}{n\sum_{j=1}^{m} y_j}. \tag{4.36}$$

У випадку справедливості нульової гіпотези статистика F має розподіл Фішера з $f_1 = 2n$ і $f_2 = 2m$ степенями вільності. Якщо F_γ – γ-квантиль розподілу Фішера, то з достовірністю α нульова гіпотеза $H_0 : v_1 = v_2$ відхиляється на користь альтернативної $H_1 : v_1 \neq v_2$ якщо $F \geq F_{1-\alpha/2}(2n, 2m)$ або $F \leq F_{\alpha/2}(2n, 2m)$, або на користь альтернативи $H_1^{'} : v_1 > v_2$, якщо $F > F_{1-\alpha}(2n, 2m)$, або на користь альтернативи $H_1^{''} : v_1 < v_2$, якщо $F < F_\alpha(2n, 2m)$.

Приклад 4.14 Є дві вибірки по 8 значень одного параметра з різних лабораторій.

Перша вибірка:

12	14	16	20	30	40	60	85

Друга вибірка:

22	38	44	54	68	72	86	90

Необхідно перевірити гіпотезу про статистичну рівність параметрів розподілу значень вибірок. Рівень значущості $\alpha = 0{,}05$.

Розв'язання. Спочатку знаходимо: $\sum_{i=1}^{8} x_i = 277$ і $\sum_{j=1}^{8} y_j = 474$.

Далі за формулою (4.36) визначаємо значення *F*-статистики, ураховуючи, що в чисельнику має бути більше значення:

$$F = \frac{8 \cdot 474}{8 \cdot 277} = 1{,}711.$$

За табл. Д1.3 дод. 1 знаходимо граничні значення $F_{0,975}(16,16) = 2{,}761$, $F_{0,025}(16,16) = 1/F_{0,975}(16,16) = 1/2{,}761 = 0{,}362$.

Оскільки $F_{0,025}(16,16) = 0{,}362 < F = 1{,}711 < F_{0,975}(16,16) = 2{,}761$, то гіпотеза про рівність параметрів розподілу вибірок даних приймається.

Критерій Нагарсенкера

Нехай маємо k вибірок обсягом n кожна, які містять експоненційно розподілені випадкові величини. Для перевірки нульової гіпотези $H_0 : v_1 = v_2 = \cdots = v_k$ рівності параметрів розподілу у всіх вибірках застосовується критерій, що ґрунтується на статистиці:

$$L = \prod_{j=1}^{k} \frac{\bar{x}_j}{\bar{x}}, \tag{4.37}$$

де

$$\bar{x}_j = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_{ij}, \quad \bar{x} = \frac{1}{nk}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}. \tag{4.38}$$

Якщо $L \le L_\alpha(n,k)$, то нульова гіпотеза відхиляється з достовірністю $1-\alpha$. Значення $L_\alpha(n,k)$ для рівня значущості $\alpha = 0{,}05$ наведено в табл. 4.3.

Таблиця 4.3

Граничні значення $L_\alpha(n,k)$ критерію Нагарсенкера для $\alpha = 0{,}05$

n	**k**				**n**	**k**			
	3	**4**	**5**	**6**		**3**	**4**	**5**	**6**
4	0,454	–	–	–	**10**	0,736	0,671	0,616	0,569
5	0,535	0,443	–	–	**20**	0,859	0,821	0,787	0,756
6	0,596	0,510	0,442	–	**40**	0,927	0,906	0,888	0,870
7	0,643	0,563	0,498	0,444	**80**	0,963	0,952	0,942	0,933
8	0,681	0,606	0,545	0,492	**100**	0,970	0,962	0,954	0,946
9	0,711	0,641	0,583	0,534					

Приклад 4.15. Є чотири вибірки по 5 значень параметрів, що розподілені за експоненціальним законом.

Перша вибірка:

2	4	8	12	18

Друга вибірка:

5	7	11	19	21

Третя вибірка:

11	17	21	22	29

Четверта вибірка:

1	5	9	13	18

Необхідно перевірити гіпотезу про рівність параметрів v цих вибірок за допомогою критерію Нагарсенкера для рівня значущості $\alpha = 0{,}05$.

Розв'язання. Знаходимо середні значення вибірок:
$\bar{x}_1 = 8{,}8$, $\bar{x}_2 = 12{,}6$, $\bar{x}_3 = 20{,}0$, $\bar{x}_4 = 9{,}2$.

За формулами (4.37) і (4.38) знаходимо: $\bar{x} = 12{,}65$ і $L = 0{,}797$.
З табл. 4.3 беремо граничне значення $L_{0,05}(5,4) = 0{,}443$. Оскільки $L = 0{,}797 > L_{0,05}(5,4) = 0{,}443$, то гіпотеза про однорідність параметрів отриманих вибірок даних приймається.

4.4.3. Перевірка гіпотези про рівність медіан

Порівняємо спостереження попарно і проставимо знаки їх різниць. Послідовність знаків є результатом n незалежних випробувань з двома можливими наслідками: «плюс» або «мінус». Якщо розподіли збігаються, то в кожному випробуванні вірогідності наслідків дорівнюють 0,5:

$$P(+) = P(-) = 0{,}5.$$

Кількість плюсів і кількість мінусів є значеннями випадкових величин, які розподілені за біноміальним законом і теоретично мають бути однаковими. Мала кількість плюсів (або мінусів) означатиме, що гіпотеза неправильна.

Умови застосування критерію:

– дані мають бути отримані випадковим чином;

– немає жодних вимог до закону розподілу генеральних сукупностей, з яких ці дані отримано.

Якщо обсяг вибірки $n \le 25$, як критерій вибираємо

$$S = \min(\textit{кількість} \text{ «+» або «-»}).$$

Граничні значення $S_{\text{гр.}}$ знаходимо з табл. 4.4. Якщо значення $S \le S_{\text{гр.}}$, гіпотеза відхиляється.

Таблиця 4.4

Граничні значення $S_{\text{гр.}}$ для критерію медіан

n	$\alpha = 0{,}05$	$\alpha = 0{,}1$	**n**	$\alpha = 0{,}05$	$\alpha = 0{,}1$
9	1	1	**16**	3	4
10	1	1	**17**	4	4
11	1	2	**18**	4	5
12	2	2	**19**	4	5
13	2	3	**20**	5	5
14	2	3	**25**	7	7
15	3	3	**30**	9	10

Приклад 4.16. Маємо дві вибірки по 20 значень одного параметра з різних лабораторій. Перша вибірка:

59,0	60,5	58,0	59,0	56,0	57,0	55,5	59,5	58,0	58,0
58,0	56,0	55,0	53,5	56,0	58,0	58,0	53,5	61,0	59,5

Друга вибірка:

59,0	57,5	58,5	55,5	57,5	58,0	58,0	58,0	56,0	58,5
56,5	57,5	58,5	60,0	59,0	58,0	56,5	52,0	59,5	58,5

Необхідно перевірити рівність їх медіан. Рівень значущості $\alpha = 0{,}05$.

Розв'язання. Знайдемо медіану першої вибірки $M_1 = 58$. Побудуємо таблицю різниць $d = X2_i - M_1$:

1,00	-0,50	0,50	-2,50	-0,50	0,00	0,00	0,00	-2,00	0,50
-1,50	-0,50	0,50	2,50	1,00	0,00	-1,50	-6,00	1,50	0,50

Знаходимо кількість K^+, якщо $d > 0$, і K^-, якщо $d < 0$:

$$K^+ = 8 \ , K^- = 8 .$$

Знаходимо: $S = \min\left(K^+, K^-\right) = 8$.

Із табл. 4.4 знаходимо граничне значення $S_{\text{гр}}$ для $n = 20$, $\alpha = 0{,}05$. Оскільки $S = 8 > S_{\text{гр}} = 5$, то гіпотеза про рівність медіан отриманих вибірок даних не суперечить експериментальним даним.

4.5. Гіпотези про належність спостереження до генеральної сукупності експериментальних даних

Під час опрацювання результатів спостережень, як правило, першим етапом є перевірка належності індивідуальних спостережень до загальної сукупності експериментальних даних. Фактично перевіряють на наявність надмірної похибки в спостереженнях. Надмірні похибки належать до похибок, що змінюються випадково під час повторних спостережень. Вони явно перевищують за своїм значенням похибки, виправдані умовами проведення вимірювання. Під надмірною похибкою розуміють значення похибки, що істотно перевищує очікуване в цих умовах значення [4]. У праці [5] розуміється значення похибки, відхилення якої від центра розподілу істотно перевищує значення, виправдане об'єктивними умовами вимірювання, тому з погляду теорії імовірності поява промаху малоймовірна.

Причинами грубих похибок можуть бути неконтрольовані зміни умов вимірювань, напруги живлення, несправність засобу вимірювальної техніки, помилки оператора та ін.

Для вилучення результатів спостережень з надмірними похибками застосовують апарат перевірки статистичних гіпотез та відповідні статистичні критерії.

Критерій «3σ» (критерій Райта)

За умови, що вимоги до точності результатів прямих вимірювань невисокі, а закон розподілу даних гауссівський, можна користуватися найпростішим критерієм, яким є критерій «3σ» (критерій Райта). За цим критерієм можна перевіряти як максимальне, так і мінімальне значення у ряді спостережень.

Порядок застосування критерію:

1. Якщо перевіряється один «підозрілий» x' результат з ряду спостережень $x_i, i=\overline{1,n}$, то з ряду $x_i, i=\overline{1,n}$ вилучають «підозрілий» x' результат та обчислюють оцінки математичного сподівання $\bar{x}$ і СКВ s.

Якщо умова $|x'-\bar{x}|>3s$ виконується, то результат спостереження x' містить надмірну похибку, тобто не належить до загальної сукупності даних.

2. Якщо перевіряється весь ряд результатів $x_i, i=\overline{1,n}$, для ряду x_i обчислюють оцінки математичного сподівання $\bar{x}$ і СКВ s.

Результати спостережень, які задовольняють умову $|x_i-\bar{x}|>3s$, визнаються такими, що мають надмірні похибки.

Це правило в ряді випадків є надмірно «жорстким». Так, якщо для гауссівського розподілу поява результату спостереження x_i, для якого $\left|x_i - \bar{x}\right| > 3s_x$, свідчить про наявність у ньому надмірної похибки, то для рівномірного розподілу аналогічний висновок відповідає умові $\left|x_i - \bar{x}\right| > \sqrt{3}s$, а для трикутного $\left|x_i - \bar{x}\right| > \sqrt{6}s$. Отже, цей критерій виявлення надмірних похибок можна модифікувати з урахуванням виду розподілу випадкових похибок.

Приклад 4.17. Задано такі результати спостережень:

20,5 18,5 15,0 19,0 21,0 18,0 32,0 20,0 19,5

Необхідно перевірити, чи містить результат 32 надмірну похибку за припущення гауссівського розподілу.

Розв'язання. З ряду вилучаємо значення 32 та розраховуємо

$\bar{x} = 18{,}94$; $s = 1{,}88$; $3s = 5{,}64$; $\left|x_i - \bar{x}\right| = \left|32 - 18{,}94\right| = 13{,}06 > 5{,}64$.

Висновок: результат 32 містить надмірну похибку і має бути вилучений з ряду спостережень.

Критерій Романовського

Результат x_i з ряду спостережень $x_i, i = \overline{1,n}$ містить надмірну похибку, якщо виконується умова

$$t = \frac{\left|x_i - \bar{x}\right|}{s} \geq t_\alpha^{'}(\nu),$$

де $\bar{x}$ – середнє значення ряду без «підозрілого» значення; s – оцінка СКВ результатів ряду без «підозрілого» значення; $t_\alpha^{'}(\nu)$ – модифікований коефіцієнт Стьюдента,

$$t_\alpha^{'}(\nu) = t_\alpha(\nu)\sqrt{\frac{n+1}{n}},$$

ν – кількість степенів вільності, $\nu = n - 1$.

Значення $t_\alpha^{'}(\nu)$ вибирають з табл. 4.5 для обсягу даних ряду n і рівня значущості α.

За цим критерієм можна перевіряти максимальне та мінімальне значення у ряді спостережень, а також декілька мінімальних або максимальних значень, причому граничне значення $t_\alpha^{'}(\nu)$ обирають для $\nu = n - k$, де k – кількість «підозрілих» результатів.

Таблиця 4.5

Модифікований коефіцієнт Стьюдента $t'_\alpha(\nu)$

ν	Рівень значущості α			ν	Рівень значущості α		
	0,10	**0,05**	**0,01**		**0,10**	**0,05**	**0,01**
1	7,733	15,561	77,964	**17**	1,787	2,168	2,997
2	3,372	4,969	11,460	**18**	1,779	2,156	2,953
3	2,631	3,558	6,530	**19**	1,772	2,145	2,932
4	2,335	3,041	5,044	**20**	1,765	2,135	2,912
5	2,177	2,77	4,355	**21**	1,759	2,127	2,895
6	2,077	2,616	3,963	**22**	1,754	2,119	2,880
7	2,010	2,508	3,711	**23**	1,749	2,112	2,865
8	1,960	2,431	3,536	**24**	1,745	2,105	2,852
9	1,923	2,372	3,409	**25**	1,741	2,099	2,840
10	1,893	2,327	3,310	**26**	1,737	2,904	2,830
11	1,869	2,291	3,233	**27**	1,733	2,088	2,820
12	1,850	2,261	3,170	**28**	1,730	2,083	2,810
13	1,833	2,236	3,118	**30**	1,724	2,079	2,802
14	1,819	2,215	3,075	**40**	1,706	2,048	2,742
15	1,807	2,197	3,038	**60**	1,685	2,018	2,683
16	1,796	2,181	3,006	**120**	1,665	1,988	2,628

Приклад 4.18. Задано такі результати спостережень:

20,5 18,5 15,0 19,0 21,0 18,0 32,0 20,0 19,5

Необхідно перевірити, чи містить результат 32 надмірну похибку.

Розв'язання. З ряду вилучаємо значення 32 і розраховуємо

$$\bar{x} = 18{,}94;\ s = 1{,}88;\ t = \frac{32 - 18{,}94}{1{,}88} = \frac{13{,}06}{1{,}88} = 6{,}95 > t_{0,05}(8) = 2{,}43.$$

Висновок: результат 32 містить надмірну похибку.

Критерій Діксона

Цей критерій можна застосовувати для гауссівського розподілу похибки та для невеликих обсягів даних ряду спостережень $n \le 25$ для перевірки максимального або мінімального значення у ряді спостережень. Порядок застосування залежить від апріорної інформації про можливу наявність одного або декількох результатів з надмірними похибками.

1. Перевірка наявності одного результату з надмірною похибкою.

Значення ряду упорядковуються за зростанням: $x_{[1]} < x_{[2]} < ... < x_{[n]}$. Результат $x_{[n]}$ (максимальний) містить надмірну похибку, якщо

$$r_{\max} = \frac{\left(x_{[n]} - x_{[n-1]}\right)}{\left(x_{[n]} - x_{[1]}\right)} > Z_{\alpha}(n),$$

результат $x_{[1]}$ (мінімальний) містить надмірну похибку, якщо

$$r_{\min} = \frac{\left(x_{[2]} - x_{[1]}\right)}{\left(x_{[n]} - x_{[1]}\right)} > Z_{\alpha}(n),$$

де $Z_{\alpha}(n)$ – коефіцієнт, значення якого вибирають, виходячи з обсягу ряду n і рівня значущості α (табл. 4.6).

Таблиця 4.6

Значення коефіцієнта $Z_{\alpha}(n)$

n	Рівень значущості α			n	Рівень значущості α		
	0,10	**0,05**	**0,10**		**0,10**	**0,05**	**0,10**
4	0,68	0,76	0,89	**16**	0,28	0,33	0,43
6	0,48	0,56	0,70	**18**	0,26	0,31	0,41
8	0,40	0,47	0,59	**20**	0,26	0,30	0,39
10	0,35	0,41	0,53	**30**	0,22	0,26	0,34
14	0,29	0,35	0,45				

Для проміжних значень n для визначення $Z_{\alpha}(n)$ застосовують лінійну інтерполяцію.

2. Перевірка наявності двох або більше результатів з надмірною похибкою.

Значення ряду упорядковують за зростанням $x_{[1]} < x_{[2]} < ... < x_{[n]}$. Розраховують значення коефіцієнта r відповідно до табл. 4.7. Якщо отримане значення $r > Z_{\alpha}(n)$ (табл. 4.8), то досліджуваний результат містить надмірну похибку.

Коефіцієнти r_{10} і r_{11} застосовують, у випадку, якщо передбачається наявність одного спостереження з надмірною похибкою, а r_{21} і r_{22} – коли двох.

Таблиця 4.7

Формули для розрахунку коефіцієнта Діксона

Кількість спостережень	Коефіцієнт Діксона	Для мінімального значення	Для максимального значення
3–7	r_{10}	$\dfrac{x_{[2]}-x_{[1]}}{x_{[n]}-x_{[1]}}$	$\dfrac{x_{[n]}-x_{[n-1]}}{x_{[n]}-x_{[1]}}$
8–10	r_{11}	$\dfrac{x_{[2]}-x_{[1]}}{x_{[n-1]}-x_{[1]}}$	$\dfrac{x_{[n]}-x_{[n-1]}}{x_{[n]}-x_{[2]}}$
11–13	r_{21}	$\dfrac{x_{[3]}-x_{[1]}}{x_{[n-1]}-x_{[1]}}$	$\dfrac{x_{[n]}-x_{[n-2]}}{x_{[n]}-x_{[2]}}$
14–25	r_{22}	$\dfrac{x_{[3]}-x_{[1]}}{x_{[n-2]}-x_{[1]}}$	$\dfrac{x_{[n]}-x_{[n-2]}}{x_{[n]}-x_{[3]}}$

Таблиця 4.8

Значення коефіцієнта $Z_{\alpha}(n)$

r	n	Рівень значущості α			r	n	Рівень значущості α		
		0,1	**0,05**	**0,01**			**0,1**	**0,05**	**0,01**
r_{10}	**3**	0,886	0,941	0,988	r_{22}	**14**	0,492	0,546	0,641
	4	0,679	0,765	0,889		**15**	0,472	0,525	0,616
	5	0,557	0,642	0,780		**16**	0,454	0,507	0,595
	6	0,482	0,560	0,698		**17**	0,438	0,490	0,577
	7	0,434	0,507	0,637		**18**	0,424	0,475	0,561
r_{11}	**8**	0,479	0,554	0,683		**19**	0,412	0,462	0,547
	9	0,441	0,512	0,635		**20**	0,401	0,450	0,535
	10	0,409	0,477	0,597		**21**	0,391	0,440	0,524
r_{21}	**11**	0,517	0,576	0,679		**22**	0,382	0,430	0,514
	12	0,490	0,546	0,642		**23**	0,374	0,421	0,505
	13	0,467	0,521	0,615		**24**	0,367	0,413	0,497
						25	0,360	0,406	0,489

Приклад 4.19. Задано такі результати спостережень:

20,5 18,5 15,0 19,0 21,0 18,0 32,0 20,0 19,5

Необхідно перевірити, чи містить результат 32 надмірну похибку.

Розв'язання. Упорядковуємо результати спостережень за зростанням:

15,0 18,0 18,5 19,0 19,5 20,0 20,5 21,0 **32,0**

Розраховуємо $r_{\max} = \dfrac{(32-21)}{(32-15)} = \dfrac{11}{17} \approx 0{,}65 > Z_{\alpha}(n) = 0{,}44\ (n = 9, \alpha = 0{,}05)$.

Висновок: результат 32,0 містить надмірну похибку і має бути вилучений з ряду спостережень.

Критерій Ірвіна

Для застосування критерію ряд спостережень $x_i, i=\overline{1,n}$ упорядковують за зростанням.

Результат $x_{[1]}$ (мінімальний) або $x_{[n]}$ (максимальний) з ряду спостережень містить надмірну похибку, якщо виконуються умови:

$$\lambda_{\min} = \frac{\left|x_{[2]} - x_{[1]}\right|}{s} \geq \lambda_{\alpha}(n) \text{ для мінімального значення;}$$

$$\lambda_{\max} = \frac{\left|x_{[n]} - x_{[n-1]}\right|}{s} \geq \lambda_{\alpha}(n) \text{ для максимального значення,}$$

де s – оцінка СКВ результатів ряду спостережень; $\lambda_{\alpha}(n)$ – граничне значення статистики Ірвіна; α – рівень значущості.

Значення $\lambda_{\alpha}(n)$ вибирають з табл. 4.11 для обсягу даних n.

Таблиця 4.9

Граничне значення статистики Ірвіна $\lambda_{\alpha}(n)$

n	α			n	α			n	α		
	0,1	**0,05**	**0,01**		**0,1**	**0,05**	**0,01**		**0,1**	**0,05**	**0,01**
2	2,33	2,77	3,64	**40**	0,91	1,15	1,63	**90**	0,82	1,03	1,50
3	1,79	2,17	2,90	**50**	0,88	1,11	1,60	**100**	0,81	1,02	1,47
10	1,18	1,46	2,03	**60**	0,86	1,08	1,57	**200**	0,75	0,95	1,38
20	1,03	1,27	1,80	**70**	0,84	1,05	1,53	**300**	0,72	0,91	1,32
30	0,96	1,20	1,70	**80**	0,83	1,04	1,50	**500**	0,68	0,87	1,28

Приклад 4.20. Задано такі результати спостережень:

20,5 18,5 15,0 19,0 21,0 18,0 32,0 20,0 19,5

Необхідно перевірити, чи містить результат 32 надмірну похибку.

Упорядковуємо результати спостережень за зростанням:

15,0 18,0 18,5 19,0 19,5 20,0 20,5 21,0 **32,0**

Розраховане значення СКВ дорівнює $s = 4{,}67$.

Розраховуємо значення статистики λ:

$$\lambda_{\min} = \frac{18{,}0 - 15{,}0}{4{,}67} = 0{,}64 < \lambda_{0{,}05}(9) = 1{,}18;$$

$$\lambda_{\max} = \frac{32{,}0 - 21{,}0}{4{,}67} = 2{,}36 > \lambda_{0{,}05}(9) = 1{,}18.$$

Висновок: результат 15 не містить надмірної похибки, результат 32,0 містить надмірну похибку і повинен бути вилучений з ряду спостережень.

Критерій «вільний» від закону розподілу похибки

У разі обмеженої кількості спостережень n і (або) складності оцінки параметрів або визначення закону розподілу рекомендується [14] вилучати результати з надмірними похибками, використовуючи наближені оцінки коефіцієнтів виду розподілу. З ряду спостережень вилучаються результати $x_i < x_{r-}$ та $x_i > x_{r+}$. Значення x_{r-}, x_{r+} визначаються за такими формулами:

$$x_{r-} = \bar{x} - s\left(1 + A\sqrt{\frac{1}{\gamma^2} - 1}\right); \; x_{r+} = \bar{x} + s\left(1 + A\sqrt{\frac{1}{\gamma^2} - 1}\right),$$

де $\bar{x}, s$ – вибіркові середнє та СКВ ряду спостережень; A – коефіцієнт, значення якого вибирається залежно від заданої довірчої імовірності в діапазоні від 0,85 до 1,30; рекомендовано $A = 1{,}3$ [14]; γ – контрексцес, значення якого залежить від форми закону розподілу,

$$\gamma = \sqrt{s^4 / \mu_4}\,,$$

де μ_4 – вибірковий центральний момент четвертого порядку:

$$\mu_4 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^4 .$$

Розрахунки значень $\bar{x}, s$ і μ_4 виконують без «підозрілого» спостереження.

Приклад 4.21. Для даних з прикладу 4.20 перевіримо наявність надмірної похибки спостережень 15 і 32.

Розв’язання. Для ряду без спостережень 15 і 32 отримаємо $\bar{x} = 19{,}50$; $s = 1{,}08$; $\mu_4 = 1{,}75$; $\gamma = 0{,}88$; $x_{r-} = 19{,}50 - 1{,}08 \cdot \left(1 + 1{,}3 \cdot \sqrt{\frac{1}{0{,}88^2} - 1}\right) = 16{,}67$,

$$x_{r+} = 19{,}50 + 1{,}08 \cdot \left(1 + 1{,}3 \cdot \sqrt{\frac{1}{0{,}88^2} - 1}\right) = 21{,}33 .$$

Висновок: результати 15 і 32 містять надмірну похибку, оскільки $15 < x_{r-} = 16{,}67$, $32 > x_{+} = 21{,}33$ і тому повинні бути вилучені з ряду.

4.6. Гіпотези про однорідність експериментальних даних

Завдання перевірки однорідності двох вибірок формулюється таким чином. Нехай є дві впорядковані за збільшенням вибірки розмірів m і n: $x_{[1]} < x_{[2]} < ... < x_{[m]}$ і $y_{[1]} < y_{[2]} < ... < y_{[n]}$. Зазвичай вважають, що $m \le n$. Перевіряється гіпотеза про те, що дві вибірки отримують з однієї і тієї ж генеральної сукупності, тобто H_0: $F(x) = G(x)$, якщо $x \in (-\infty; \infty)$.

Рангові критерії зсуву

Рангові критерії ґрунтуються на послідовності рангів вибіркових значень випадкових величин. При цьому розглядаються не самі вибіркові значення, а їх ранги, що визначаються за порядковим номером елемента вибірки в загальному ряду, впорядкованому за збільшенням. Наприклад, у впорядкованій вибірці $x_{[1]} \le x_{[2]} \le \ldots \le x_{[n]}$ вибіркове значення $x_{[i]}$ замінюється рангом $R = i$.

Швидкий (грубий) ранговий критерій

Розглядаються дві вибірки обсягів n і m при $n + m \ge 20$ $(n, m \ge 4)$. Їх елементи ранжують за збільшенням спільно. Однаковим значенням привласнюють однаковий усереднений ранг. Для кожної групи знаходять суми рангів $\sum_{i=1}^{n} R_{1,i}$ і $\sum_{i=1}^{m} R_{2,i}$ та середні ранги $\overline{R}_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} R_{1,i}$ і $\overline{R}_2 = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} R_{2,i}$.

Обчислюємо $d = \overline{R}_1 - \overline{R}_2$. Статистика d-критерію може бути апроксимована нормальним розподілом із середнім $\mathbf{M}(d) = 0$ і СКВ

$$s_d = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} R_{1,i} + \sum_{i=1}^{m} R_{2,i}}{6}\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right)} = \sqrt{\frac{(m+n)(m+n+1)}{12}\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right)}. \quad (4.39)$$

Тому, якщо $\left|d^*\right| = \left|d / s_d\right| < u_{1-\alpha/2}$, гіпотеза зсуву відхиляється з рівнем значущості α. Ефективність критерію для вибірок випадкових величин з розподілом Гаусса дорівнює 0,95 (для інших розподілів – не менше ніж 0,86).

Приклад 4.22. Є дві вибірки даних:

Перша	59,0	60,0	57,0	54,0	56,0	57,0	56,0	57,0	57,5	54,5
вибірка	54,5	56,0	60,5	54,5	55,0	54,5	54,0	57,5	54,5	54,0

Друга	57,5	58,5	58,5	57,5	61,5	59,0	57,0	60,0	58,0	59,5
вибірка	58,0	59,5	59,0	56,5	56,0	55,5	52,0	56,5	57,0	56,5

Необхідно перевірити гіпотезу про однорідність даних вибірок для рівня значущості $\alpha = 0{,}05$.

Розв'язання. Вхідні дані: $n = m = 20$. Побудуємо спільний ряд в порядку зростання значень елементів:

52,0	54,0	54,0	54,0	54,5	54,5	54,5	54,5	54,5	55,0
55,5	56,0	56,0	56,0	56,0	56,5	56,5	56,5	57,0	57,0
57,0	57,0	57,0	57,5	57,5	57,5	57,5	58,0	58,0	58,5
58,5	59,0	59,0	59,0	59,5	59,5	60,0	60,0	60,5	61,5

Ранги першої вибірки дорівнюють (однакові ранги усереднюються):

X_1	54,0	54,0	54,0	54,5	54,5	54,5	54,5	54,5	55,0	56,0
R_1	3,0	3,0	3,0	7,0	7,0	7,0	7,0	7,0	10,0	13,5
X_1	56,0	56,0	57,0	57,0	57,0	57,5	57,5	59,0	60,0	60,5
R_1	13,5	13,5	21,0	21,0	21,0	25,5	25,5	33,0	37,5	39,0

Для другої вибірки маємо:

X_2	52,0	55,5	56,0	56,5	56,5	56,5	57,0	57,0	57,5	57,5
R_2	1,0	11,0	13,5	17,0	17,0	17,0	21,0	21,0	25,5	25,5
X_2	58,0	58,0	58,5	58,5	59,0	59,0	59,5	59,5	60,0	61,5
R_2	28,5	28,5	30,5	30,5	33,0	33,0	35,5	35,5	37,5	40,0

Знаходимо $\sum_{i=1}^{20} R_{1,i} = 318$, $\overline{R}_1 = 15{,}9$, $\sum_{i=1}^{20} R_{2,i} = 502$, $\overline{R}_2 = 25{,}1$. Далі визначаємо $d = \left|\overline{R}_1 - \overline{R}_2\right| = \left|15{,}9 - 25{,}1\right| = 9{,}2$. За формулою (4.39) визначимо:

$$s_d = \sqrt{\frac{318+502}{6}\left(\frac{1}{20}+\frac{1}{20}\right)} = 3{,}40 .$$

Далі знаходимо $d^* = \left|\frac{9{,}2}{3{,}4}\right| = 2{,}49$ і $u_{1-\alpha/2} = 1{,}96$ (табл. Д1.1 дод. 1). Оскільки $d^* > u_{1-\alpha/2}$, то гіпотеза про однорідність даних відхиляється.

Критерій Манна–Уітні–Вілкоксона

Нехай $x_{[1]},\ldots,x_{[n]}$ і $y_{[1]},\ldots,y_{[m]}$ – упорядковані за збільшенням вибірки. Такий ранговий критерій ґрунтується на статистиці

$$U=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}h_{ij}\ , \tag{4.40}$$

де

$$h_{ij}=\begin{cases}1, & x_i<y_j;\\ 0, & x_i>y_j.\end{cases}$$

Тут U – кількість пар значень x_i і y_j, для яких $x_i<y_j$.

Якщо $U_1(\alpha)\le U\le U_2(\alpha)$, гіпотеза зсуву відхиляється ($U_1(\alpha)$ і $U_2(\alpha)$ – граничні значення, наведені в табл. 4.10).

З U-статистикою Манна–Уітні пов'язана статистика Вілкоксона, що визначається сумою рангів елементів однієї вибірки (припустимо, вибірка $x_{[i]}$ обсягу n) у впорядкованій послідовності елементів сумісної вибірки обсягу $(m+n)$:

$$R=mn+\frac{n(n+1)}{2}-U\ . \tag{4.41}$$

Якщо $n,m>20$, застосовною є апроксимація

$$W=\left(R-\frac{n(n+m+1)}{2}\right)\Bigg/\left(\sqrt{\frac{nm(n+m+1)}{12}}\right). \tag{4.42}$$

Статистика W апроксимується нормальним розподілом, і гіпотеза зсуву відхиляється з достовірністю α, якщо $|W|>u_{1-\alpha/2}$.

Таблиця 4.10

Граничні значення $U_1(\alpha)$ і $U_2(\alpha)$ критерію Манна–Уітні

n	**m**	$1-\alpha$				**n**	**m**	$1-\alpha$			
		0,90		0,95				0,90		0,95	
		U_1	U_2	U_1	U_2			U_1	U_2	U_1	U_2
4	**4**	1	15	0	16	**5**	**5**	4	21	2	23
	5	2	18	1	19		**6**	5	25	3	27
	6	3	21	2	22		**7**	6	29	5	30
	7	4	24	3	25		**8**	8	32	6	34
	8	5	27	4	28		**9**	9	36	7	38
	9	6	30	4	32		**10**	11	39	8	42
	10	7	33	5	35						

Продовження таблиці 4.10

n	**m**	$1-\alpha$				**n**	**m**	$1-\alpha$			
		0,90		0,95				0,90		0,95	
		U_1	U_2	U_1	U_2			U_1	U_2	U_1	U_2
6	**6**	7	29	5	31	**10**	**18**	55	125	48	132
	7	8	34	6	36		**19**	58	132	52	138
	8	10	38	8	40		**20**	62	138	55	145
	9	12	42	10	44	**12**	**12**	42	102	37	107
	10	14	46	11	49		**13**	47	109	41	117
	11	16	50	13	53		**14**	51	117	45	123
	12	17	55	14	58		**15**	55	125	49	131
7	**7**	11	38	8	41		**16**	60	132	53	139
	8	13	43	10	46		**17**	64	140	57	147
	9	15	48	12	51		**18**	68	148	61	155
	10	17	53	14	56		**19**	72	156	65	163
	11	19	58	16	61		**20**	77	163	69	171
	12	21	63	18	66	**14**	**14**	61	135	55	141
	13	24	67	20	71		**15**	66	144	59	151
	14	26	72	22	76		**16**	71	153	64	160
8	**8**	15	49	13	51		**17**	77	161	69	169
	9	18	57	15	54		**18**	82	170	74	178
	10	20	60	17	63		**19**	87	179	78	188
	11	23	65	19	69		**20**	92	188	83	197
	12	26	70	22	74		**21**	97	197	88	206
	13	28	76	24	80		**22**	102	206	93	215
	14	31	81	26	86	**16**	**16**	83	173	75	181
	15	33	87	29	91		**17**	89	183	81	191
	16	36	92	31	97		**18**	95	193	86	202
9	**9**	21	60	17	64		**19**	101	203	92	212
	10	24	66	20	70		**20**	107	213	98	222
	11	27	72	23	76		**21**	113	223	103	233
	12	30	78	26	82		**22**	119	233	109	243
	13	33	84	28	89		**23**	125	243	115	253
	14	36	90	31	95		**24**	131	253	120	264
	15	39	96	34	101	**18**	**18**	109	215	99	225
	16	42	102	37	107		**19**	116	226	106	236
10	**10**	27	73	23	77		**20**	123	237	112	248
	11	31	79	26	84		**21**	130	248	119	259
	12	34	86	29	91		**22**	136	260	125	271
	13	37	93	33	97		**23**	143	271	132	282
	14	41	99	36	104		**24**	150	282	138	294
	15	44	106	39	111		**25**	157	293	145	305
	16	48	112	42	118		**26**	164	304	151	317
	17	51	119	45	125						

Закінчення таблиці 4.10

n	**m**	$1-\alpha$				**n**	**m**	$1-\alpha$			
		0,90		0,95				0,90		0,95	
		U_1	U_2	U_1	U_2			U_1	U_2	U_1	U_2
20	**20**	138	262	127	273	**28**	**30**	313	527	293	547
	21	146	274	134	286		**31**	325	543	304	564
	22	154	286	141	299		**32**	347	549	315	571
	23	161	299	149	311		**33**	359	565	326	598
	24	169	311	156	324		**34**	370	582	337	615
	25	177	323	163	337	**30**	**30**	338	562	317	583
	26	185	335	171	349		**31**	350	580	328	602
	27	192	348	178	362		**32**	362	598	340	620
	28	200	360	186	374		**33**	374	616	352	638
22	**22**	171	313	158	326		**34**	387	633	364	656
	23	179	327	166	340		**35**	399	651	375	675
	24	188	340	174	354		**36**	411	669	387	693
	25	197	353	182	368	**32**	**32**	388	636	365	659
	26	205	367	191	381		**33**	402	654	378	678
	27	214	380	199	395		**34**	415	673	391	697
	28	223	393	207	409		**35**	428	692	403	717
	29	231	407	215	423		**36**	441	711	416	736
	30	240	420	223	437		**37**	454	730	428	756
24	**24**	207	369	192	384		**38**	467	749	441	775
	25	217	383	201	399	**34**	**34**	443	713	418	738
	26	226	398	210	414		**35**	457	733	431	759
	27	236	412	219	429		**36**	471	753	445	779
	28	245	427	228	444		**37**	485	773	458	800
	29	255	441	238	458		**38**	499	793	472	820
	30	264	456	247	473		**39**	513	813	485	841
	31	274	470	256	488		**40**	527	833	499	861
	32	284	484	265	503	**36**	**36**	471	753	445	779
26	**26**	247	429	230	446		**37**	486	774	459	801
	27	257	445	240	462		**38**	500	795	473	822
	28	268	460	250	478		**39**	515	815	487	843
	28	278	476	260	494		**40**	529	836	501	864
	30	289	491	270	510	**38**	**38**	563	881	533	911
	31	299	507	280	526		**39**	578	904	548	934
	32	310	522	290	542		**40**	594	926	563	957
28	**28**	291	493	272	512	**40**	**40**	628	972	596	1004
	29	302	510	282	530						

Якщо у двох порівнюваних вибірках є збіжні значення, то їм рекомендується приписувати середні ранги. При цьому в знаменнику статистики (4.42) потрібно використовувати величину

$$\sqrt{\frac{nm(n+m+1)}{12}(1-\frac{\sum_{i=1}^{k} t_i\left(t_1^2-1\right)}{(m+n)(m+n-1)(m+n+1)})}, \qquad (4.43)$$

де k – загальна кількість груп зюіжних величин; t_i – кількість величин, що збіглися в i-й групі (слід пам'ятати, що збіг ураховують лише тоді, коли зіжні величини, належать різним вибіркам, збіг, що цілком складається з елементів однієї і тієї ж вибірки, на величину W не впливають).

Одним з варіантів застосування розглянутого критерію є ранговий критерій Вілкоксона. Для двох вибірок x і y однакового обсягу n будується ряд різниць $z_i = |x_i - y_i|$. Упорядкований ряд значень $z_{[i]}$ містить суму рангів T величин $z_{[i]}$. Гіпотеза зсуву відхиляється, якщо $T_1(\alpha) \le T \le T_2(\alpha)$, де $T_1(\alpha)$ і $T_2(\alpha)$ – граничні значення, наведені в таблиці 4.11.

Таблиця 4.11

Граничні значення статистики T критерію Вілкоксона

n	$1-\alpha$				**n**	$1-\alpha$				**n**	$1-\alpha$			
	0,90		0,95			0,90		0,95			0,90		0,95	
	T_1	T_2	T_1	T_2		T_1	T_2	T_1	T_2		T_1	T_2	T_1	T_2
6	2	19	0	21	**13**	22	69	18	73	**20**	61	149	53	157
7	4	24	3	25	**14**	26	79	22	83	**22**	76	177	66	187
8	6	30	4	32	**15**	31	89	26	94	**24**	92	208	82	218
9	9	36	6	39	**16**	36	100	30	106	**26**	111	240	99	252
10	11	44	9	46	**17**	42	111	35	118	**28**	131	275	117	289
11	14	51	11	55	**18**	48	123	41	130	**30**	152	313	138	327
12	18	60	14	64	**19**	54	136	47	143	**32**	176	353	160	368

Якщо $n \ge 20$, застосовуєм наближення

$$T^* = \frac{T - \frac{n(n+1)}{4}}{\sqrt{n(n+1)(2n+1)}}.$$

Якщо $|T^*| < u_{1-\alpha/2}$, гіпотеза наявності зсуву відхиляється.

Приклад 4.23 Маємо дві вибірки даних:

Перша	59,0	60,0	57,0	54,0	56,0	57,0	56,0	57,0	57,5	54,5
вибірка	54,5	56,0	60,5	54,5	55,0	54,5	54,0	57,5	54,5	54,0

Друга	57,5	58,5	58,5	57,5	61,5	59,0	57,0	60,0	58,0	59,5
вибірка	58,0	59,5	59,0	56,5	56,0	55,5	52,0	56,5	57,0	56,5

Необхідно перевірити гіпотезу про однорідність даних вибірок за критерієм Манна-Уітні-Вілкоксона для рівня значущості $\alpha = 0{,}05$.

Розв'язання. Вхідні дані: $n = m = 20$. Підрахуємо кількість пар, для яких $x_i < y_j$ для всіх $i = 1, \cdots, n$ і $j = 1, \cdots, m$ і зведемо у таблицю:

19	19	19	19	19	19	19	19	19	17
17	17	12	12	12	10	10	4	1	1

Визначаємо за формулою (4.40): $U = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} h_{ij} = 284$. Далі для вірогідності $1 - \alpha = 1 - 0{,}05 = 0{,}95$ знаходимо $U_1 = 127$ і $U_2 = 273$. Оскільки нерівність $U_1 < U < U_2$ не виконується, тобто $U > U_1$ і $U > U_2$, то гіпотеза про однорідність даних відхиляється.

Для статистики Вілкоксона за формулою (4.41) маємо:

$$R = mn + \frac{n(n+1)}{2} - U = 20 \cdot 20 + \frac{20 \cdot (20+1)}{2} - 284 = 326 .$$

Оскільки $n, m > 20$ за апроксимацією (4.42): $W = -2{,}27$. Оскільки $|W| = 2{,}27 > u_{1-\alpha/2} = 1{,}96$, то гіпотеза про однорідність даних відхиляється.

Застосуємо критерій Вілкоксона. Побудуємо ряд різниць $x_i - y_i$:

1,5	1,5	-1,5	-3,5	-5,5	-2,0	-1,0	-3,0	-0,5	-5,0
-3,5	-3,5	1,5	-2,0	-1,0	-1,0	2,0	1,0	-2,5	-2,5

Ранжуємо за величиною значення $z_i = |x_i - y_i|$:

z_i	0,5	1,0	1,0	1,0	1,0	1,5	1,5	1,5	1,5	2,0
R	1,0	3,5	3,5	3,5	3,5	7,5	7,5	7,5	7,5	11,0
z_i	2,0	2,0	2,5	2,5	3,0	3,5	3,5	3,5	5,0	5,5
R	11,0	11,0	13,5	13,5	15,0	17,0	17,0	17,0	19,0	20,0

В отриманий ряд значень $|x_i - y_i|$ містить суму рангів T величин $z_i = x_i - y_i > 0$. Маємо для $1 - \alpha = 0{,}95$: $T = 210$, $T_1 = 53$, $T_2 = 157$. Оскільки $T > T_1$ і $T > T_2$, то гіпотеза про однорідність даних відхиляється.

Непараметричні критерії масштабу

Непараметричні рангові критерії масштабу, як правило, будуються на базі відповідних критеріїв зсуву зміною або статистики критерію, або правил присвоєння рангів спостереженням. У подальшому викладі матеріалу для відомих критеріїв масштабу на це буде звертатися увага. Нагадаємо, що критерії масштабу застосовуються з метою виявлення можливих відмінностей характеристик розсіювання спостережень вибірок.

Критерій Ансарі–Бредлі

Критерій Ансарі–Бредлі є масштабним аналогом критерію Вілкоксона. Порівнюються дві вибірки x_1 і x_2 обсягами ***m* і *n* значень** відповідно. Нехай R_i – ранги елементів однієї з вибірок (припустимо, $\boldsymbol{x}$**)** упорядкованих за збільшенням ряду. Статистикою критерію Ансарі–Бредлі є

$$S=\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{m+n+1}{2}-\left|R_i-\frac{m+n+1}{2}\right|\right). \qquad (4.44)$$

Обчислювати статистику критерію можна й іншим, простішим способом. Поставимо елементам впорядкованої за збільшенням об'єднаної вибірки x=(x_1 , x_2) обсягу $m + n$ у відповідність ранги за таким правилом

$$R(x_i)=\begin{cases} m+n-i+1, & i>\dfrac{m+n+1}{2}, \\ i, & i\le\dfrac{m+n+1}{2}. \end{cases}$$

Тоді статистика критерію обчислюється так

$$S=\sum_{i=1}^{m}R(x_i),$$

тобто її визначають сумою спеціальним чином призначених рангів однієї вибірки.

Для парних значень $(m+n)$ послідовність рангів має вигляд

$$1,2,3,\cdots,\frac{m+n}{2},\frac{m+n}{2},\cdots,3,2,1,$$

а для непарних $(m+n)$:

$$1,2,3,\cdots,\frac{m+n-1}{2},\frac{m+n+1}{2},\cdots,3,2,1.$$

Гіпотеза рівності параметрів масштабу не відхиляється за рівня значущості α, якщо $S_1(\alpha)<S<S_2(\alpha)$, де $S_1(\alpha)$, $S_2(\alpha)$ – граничні значення, наведені в табл. 4.12.

Для $m, n > 10$ можна використовувати асимптотичну нормальність розподілу величини

$$S^* = \frac{S - \mathbf{M}(S)}{\sqrt{\mathbf{D}(S)}}, \tag{4.45}$$

де

$$\mathbf{M}(S) = \begin{cases} \dfrac{m(m+n+2)}{4}, & m+n = 2k, \\ \dfrac{m(m+n+2)^2}{4(m+n)}, & m+n = 2k-1; \end{cases} \tag{4.46}$$

$$\mathbf{D}(S) = \begin{cases} \dfrac{mn(m+n-2)(m+n+2)}{48(m+n-1)}, & m+n = 2k, \\ \dfrac{mn(m+n+1)\left[(m+n)^2+3\right]}{48(m+n)^2}, & m+n = 2k-1. \end{cases} \tag{4.47}$$

Нульова гіпотеза рівності параметрів масштабу в двох вибірках приймається за рівня значущості α, якщо

$$\left|S^*\right| < u_{1-\alpha/2}.$$

Ефективність критерію порівняно з F-критерієм у разі гауссівського розподілу дорівнює 0,61.

Таблиця 4.12

Граничні значення $S_1(\alpha)$ і $S_2(\alpha)$ статистики Ансарі-Бредлі

m	***n***	$1-\alpha$				***m***	***n***	$1-\alpha$			
		0,90		**0,95**				**0,90**		**0,95**	
		S_1	S_2	S_1	S_2			S_1	S_2	S_1	S_2
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2	**8**	2	10	2	10	**5**	**5**	10	20	10	20
	9	2	11	2	11		**6**	1	21	10	23
	10	2	12	2	12		**7**	11	24	11	24
	11	2	13	2	13		**8**	12	26	11	26
	12	2	14	2	14		**9**	13	27	12	28
	13	3	14	2	15		**10**	14	29	12	30
	14	3	15	2	16		**11**	14	31	13	32
	15	3	16	2	17		**12**	15	33	14	34
	16	3	17	2	17		**13**	16	34	14	36
	17	3	18	2	19		**14**	16	36	15	38
	18	3	19	2	19		**15**	17	38	15	40

Продовження табл. 4.12

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
3	**6**	4	13	4	13	**6**	**6**	15	27	14	28
	7	5	13	4	14		**7**	16	29	15	30
	8	5	15	4	16		**8**	17	31	16	32
	9	5	16	4	17		**9**	18	34	16	35
	10	5	17	5	18		**10**	18	36	17	37
	11	6	18	5	19		**11**	19	38	18	40
	12	6	20	5	21		**12**	20	40	19	41
	13	6	21	5	22		**13**	21	42	19	44
	14	7	22	6	23		**14**	22	44	20	46
	15	7	23	6	24	**7**	**7**	21	35	19	37
	16	7	24	6	25		**8**	22	38	20	39
	17	8	25	6	26		**9**	23	40	21	42
4	**5**	7	14	6	16		**10**	24	43	22	44
	6	7	17	7	17		**11**	25	45	23	47
	7	8	19	7	19	**8**	**8**	26	45	26	46
	8	8	20	7	21		**9**	29	48	27	49
	9	9	21	8	22		**10**	30	50	28	52
	10	9	23	8	24		**11**	31	53	29	55
	11	10	24	9	26		**12**	32	56	30	58
	12	10	26	9	27	**9**	**9**	35	55	33	57
	13	11	27	9	29		**10**	36	58	34	58
	14	11	29	10	30		**11**	38	61	36	63
	15	12	30	10	32	**10**	**10**	43	67	41	69
	16	12	32	11	33						

Приклад 4.24. Для даних прикладу 4.23 необхідно перевірити гіпотезу про однорідність даних вибірок за критерієм Ансарі–Бредлі для рівня значущості $\alpha = 0{,}05$.

Розв'язання. Обсяги вибірок $n = m = 20$. Впорядкуємо об'єднану вибірку за зростанням значень елементів вибірки:

52,0	54,0	54,0	54,0	54,5	54,5	54,5	54,5	54,5	55,0
55,5	56,0	56,0	56,0	56,0	56,5	56,5	56,5	57,0	57,0
57,0	57,0	57,0	57,5	57,5	57,5	57,5	58,0	58,0	58,5
58,5	59,0	59,0	59,0	59,5	59,5	60,0	60,0	60,5	61,5

За формулою (4.44) знаходимо $S = 199$. Оскільки $m, n > 10$, застосовуємо апроксимацію (4.45). За формулами (4.46) і (4.47)

$$\mathbf{M}(S) = \frac{20 \cdot (20 + 20 + 2)}{4} = 210;$$

$$\mathbf{D}(S) = \frac{20 \cdot 20 \cdot (20+20-2)(20+20+2)}{48(20+20-1)} = 341\,.$$

За формулою (4.45) $S^* = -0{,}59$. Оскільки $\left|S^*\right| = 0{,}59 < u_{1-\alpha/2} = 1{,}96$ (табл. Д1.1, дод.1), то гіпотеза про однорідність даних приймається.

Критерій однорідності Лемана–Розенблата

Серед наявних непараметричних критеріїв перевірки однорідності найбільш зручним для практичного використання є критерій Лемана-Розенблата, який не потребує оцінювання функції щільності розподілу ймовірності або наявності апріорної інформації про неї. Критерієм однорідності Лемана-Розенблата є критерій типу ω^2. Статистика критерію має вигляд

$$T = \frac{mn}{m+n} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left[G_m(x) - F_n(x)\right]^2 dH_{m+n}(x)\,,$$

де $H_{m+n}(x) = \frac{m}{m+n} G_m(x) + \frac{n}{m+n} F_n(x)$ – емпірична функція розподілу, побудована за варіаційним рядом після об’єднання двох вибірок.

Процедура застосування критерію Лемана-Розенблата така. Нехай наявні два варіаційні ряди $x_{[i]}$ і $y_{[j]}$ побудовані за вибірками x_i і y_j. Перевіряється гіпотеза H$_0$: $f(x) = g(y)$, за альтернативної гіпотези H_1: $f(x) \neq g(y)$. Для перевірки справедливості гіпотези H_0 розраховується T – статистика:

$$T = \frac{1}{mn(m+n)} \left(n \sum_{i=1}^{n} (r_i - i)^2 + m \sum_{j=1}^{m} \left(s_j - j\right)^2 \right) - \frac{4mn-1}{6(m+n)} \qquad (4.48)$$

де r_i, s_j – порядкові номери елементів відповідно $x_{[i]}$ і $y_{[j]}$ в загальному варіаційному ряді, побудованому за об’єднаною вибіркою з x_i і y_j; n, m – обсяги вибірок відповідно x і y.

Якщо в результаті розрахунків отримане значення $T \leq T_{\text{гр}}$, де $T_{\text{гр}}$ – граничне значення розподілу T – статистики для заданого рівня значущості α (табл. 4.13), то приймають гіпотезу H_0, в іншому випадку приймається гіпотеза H_1.

Таблиця 4.13

Граничні значення $T_{гр}$ для критерію Лемана–Розенблата

$P = 1 - \alpha$	0,900	0,925	0,95	0,975	0,99
$T_{гр}$	0,35	0,40	0,46	0,58	0,75

Приклад 4.25. Є дві вибірки даних:

Перша вибірка	59,0	60,0	57,0	54,0	56,0	57,0	56,0	57,0	57,5	54,5
	54,5	56,0	60,5	54,5	55,0	54,5	54,0	57,5	54,5	54,0

Друга вибірка	57,5	58,5	58,5	57,5	61,5	59,0	57,0	60,0	58,0	59,5
	58,0	59,5	59,0	56,5	56,0	55,5	52,0	56,5	57,0	56,5

Необхідно перевірити гіпотезу про однорідність даних вибірок за критерієм Лемана–Розенблата для рівня значущості $\alpha = 0{,}05$.

Розв'язання. Обсяги вибірок $n = m = 20$. Побудуємо спільний ряд в порядку зростання значень елементів:

52,0	54,0	54,0	54,0	54,5	54,5	54,5	54,5	54,5	55,0
55,5	56,0	56,0	56,0	56,0	56,5	56,5	56,5	57,0	57,0
57,0	57,0	57,0	57,5	57,5	57,5	57,5	58,0	58,0	58,5
58,5	59,0	59,0	59,0	59,5	59,5	60,0	60,0	60,5	61,5

Ранги першої вибірки дорівнюють (однакові ранги усереднюються):

x_1	54,0	54,0	54,0	54,5	54,5	54,5	54,5	54,5	55,0	56,0
R_1	3,0	3,0	3,0	7,0	7,0	7,0	7,0	7,0	10,0	13,5
x_1	56,0	56,0	57,0	57,0	57,0	57,5	57,5	59,0	60,0	60,5
R_1	13,5	13,5	21,0	21,0	21,0	25,5	25,5	33,0	37,5	39,0

Для другої вибірки маємо:

x_2	52,0	55,5	56,0	56,5	56,5	56,5	57,0	57,0	57,5	57,5
R_2	1,0	11,0	13,5	17,0	17,0	17,0	21,0	21,0	25,5	25,5
x_2	58,0	58,0	58,5	58,5	59,0	59,0	59,5	59,5	60,0	61,5
R_2	28,5	28,5	30,5	30,5	33,0	33,0	35,5	35,5	37,5	40,0

За формулою (4.48) знаходимо статистику Лемана-Розенблата $T = 0{,}77$. Для достовірності $1 - \alpha = 1 - 0{,}05 = 0{,}95$ знаходимо $T_{гр} = 0{,}46$. Оскільки $T = 0{,}77 > T_{гр} = 0{,}46$, то гіпотеза про однорідність даних відхиляється.

Знако–ранговий критерій

За знако–ранговим критерієм перевіряється гіпотеза про однорідність для парних вибірок. Потрібно перевірити, чи збігаються закони розподілу ймовірностей генеральних сукупностей, з яких взято ці вибірки. Часто в такий спосіб перевіряють наявність ефекту оброблення: збіг розподілів «до» і «після» оброблення.

Гіпотези формулюються таким чином:

– H_0: вибірки мають однаковий закон розподілу імовірності;

– H_1: закони розподілу випадкових величин розрізняються.

Алгоритм використання критерію полягає у такому.

Для кожної пари (x, y) будують різниці $d_i = x_i - y_i$. Не враховують пари, у яких різниця дорівнює нулю. Ранжують отримані різниці за абсолютним значенням (ігноруючи знаки). Знаходять суму від'ємних рангів і суму додаткових рангів. Якщо вибірки однорідні, то ці суми не можуть істотно відрізнятися. Подано T – найменша з отриманих сум, n – кількість пар, у яких різниці не дорівнюють нулю. Визначають статистику:

– якщо $n \le 30$, статистикою є T;

– якщо $n > 30$, статистикою є:

$$z = \frac{T - \dfrac{n(n+1)}{4}}{\sqrt{\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{24}}}.$$

Знаходять граничні значення. Якщо $n \le 30$, граничні точки T знаходять за табл. 4.14, якщо $n > 30$, граничні значення z-статистики знаходять за таблицею нормального закону розподілу (табл. Д1.1, дод.1).

Висновок: якщо значення статистики потрапляє в критичну область (менше за граничне значення), то нульова гіпотеза відхиляється.

Таблиця 4.14

Граничні значення T-статистики

n	$\alpha = 0{,}05$	$\alpha = 0{,}1$	**n**	$\alpha = 0{,}05$	$\alpha = 0{,}1$
9	8	3	**16**	36	24
10	11	5	**17**	41	28
11	14	7	**18**	47	33
12	17	10	**19**	54	38
13	21	13	**20**	60	43
14	26	16	**25**	101	77
15	30	20	**30**	152	120

Приклад 4.26. Маємо дві вибірки по 20 значень.

Перша	59,0	57,5	58,5	55,5	57,5	58,0	58,0	58,0	56,0	58,5
вибірка	56,5	57,5	58,5	60,0	59,0	58,0	56,5	52,0	59,5	58,5

Друга	59,0	60,5	58,0	59,0	56,0	57,0	55,5	59,5	58,0	58,0
вибірка	58,0	56,0	55,0	53,5	56,0	58,0	58,0	53,5	61,0	59,5

Необхідно перевірити гіпотезу про однорідність вибірок за знако-ранговим критерієм для рівня значущості $\alpha = 0{,}05$.

Розв'язання. Побудуємо таблицю різниць $d_i = x_i - y_i$:

0,00	-3,00	0,50	-3,50	1,50	1,00	2,50	-1,50	-2,00	0,50
-1,50	1,50	3,50	7,00	3,00	0,00	-1,50	-1,50	-1,50	-1,00

Побудуємо таблицю різниць $d_i^* = |x_i - y_i|$ у порядку збільшення значень d_i:

0,00	0,00	0,50	0,50	1,00	1,00	1,50	1,50	1,50	1,50
1,50	1,50	1,50	2,00	2,50	3,00	3,00	3,50	3,50	7,00

Знаходимо ранги значень d_i^*:

1,50	1,50	3,50	3,50	5,50	5,50	10,0	10,0	10,0	10,0
10,0	10,0	10,0	14,0	15,0	16,5	16,5	18,5	18,5	20,0

Визначаємо суму рангів R^+, що відповідають додатним значенням d_i і суму рангів R^-, що відповідають від'ємним значенням d_i: $R^+ = 102{,}5$, $R^- = 104{,}5$.

Обчислюємо статистику $T = \min(R^+, R^-) = 102{,}5$.

Із табл. 4.14 знаходимо граничне значення $T_{\text{гр}} = 60$ для $n = 20$, $\alpha = 0{,}05$. Оскільки $T = 102{,}5 > T_{\text{гр}} = 60$, то гіпотеза про однорідність отриманих вибірок даних не суперечить експериментальним даним.

Критерій омега-квадрат ω^2

Необхідно перевірити непараметричну гіпотезу найбільш загального вигляду:

$$H_0 : F(x) = G(x),$$

де $F(x) = P(X \le x)$, $G(x) = P(Y \le x)$.

Припускається, що всі випадкові величини, з яких складається імовірнісна модель, взаємонезалежні (в сукупності).

Відзначимо одну важливу властивість функції розподілу ймовірності випадкової величини Z, де $Z = X - Y$. Якщо випадкові величини X і Y незалежні і однаково розподілені, то для $F(x) = P(Z \le x)$ виконується рівність

$$F(-x) = 1 - F(x),$$

що означає симетрію функції розподілу ймовірності відносно нуля. Щільність такої функції розподілу є парною функцією, її значення в точках x і $(-x)$ збігаються.

Для перевірки гіпотези однорідності можна бути використати критерій ω^2. Його будують таким чином. Нехай $R(Z_j)$ є рангом $|Z_j|$ у ранжуванні від меншого до більшого абсолютних значень різниць $|Z_1|, |Z_2|, \cdots, |Z_j|$, $j = 1, 2, \cdots, n$.

Критерій ω^2 має вид:

$$\omega_n^2 = \sum_{j=1}^{n} \left(F_n(Z_j) + F_n(-Z_j) - 1\right)^2 .$$

Граничний розподіл цієї статистики визначають як:

$$\lim_{n \to \infty} P\left(\omega_n^2 < x\right) = S_0(x).$$

Граничні значення статистики типу омега-квадрат для перевірки однорідності двох вибірок, що відповідають найбільш поширеним значенням рівнів значущості, наведено в табл. 4.15.

Таблиця 4.15

Граничні значення статистики ω^2

$P = 1 - \alpha$	α	ω^2
0,90	0,10	1,20
0,95	0,05	1,66
0,99	0,01	2,80

Правило прийняття рішень у задачі перевірки однорідності двох вибірок формулюють таким чином. Якщо $\omega_n^2 \le \omega_{\text{гр}}^2$, то гіпотеза однорідності приймається, інакше – відхиляється.

Приклад 4.27. Є дві вибірки по 20 значень параметра з різних лабораторій:

Перша	59,0	57,5	58,5	55,5	57,5	58,0	58,0	58,0	56,0	58,5
вибірка	56,5	57,5	58,5	60,0	59,0	58,0	56,5	52,0	59,5	58,5

Друга	59,0	60,5	58,0	59,0	56,0	57,0	55,5	59,5	58,0	58,0
вибірка	58,0	56,0	55,0	53,5	56,0	58,0	58,0	53,5	61,0	59,5

Необхідно перевірити гіпотезу про однорідність даних вибірок за критерієм ω^2 для рівня значущості $\alpha = 0{,}05$.

Розв'язання. Побудуємо таблицю різниць $z_i = x_i - y_i$, упорядковану за зростанням значень z_i (тобто варіаційний ряд за $z_{[i]}$):

-3,5	-3,0	-2,0	-1,5	-1,5	-1,5	-1,5	-1,5	-1,0	0,0
0,0	0,5	0,5	1,0	1,5	1,5	2,5	3,0	3,5	7,0

Для розрахунку значення статистики w_n^2 побудуємо таблицю.

Розрахунок значення статистики w_n^2

j	z_j	$F_n(z_j)$	$-z_j$	$F_n(-z_j)$	$\left(F_n(z_j)+F_n(-z_j)-1\right)^2$
1	-3,50	0,05	3,50	0,95	0,00
2	-3,00	0,10	3,00	0,90	0,00
3	-2,00	0,15	2,00	0,80	$2{,}50 \cdot 10^{-3}$
4	-1,50	0,40	1,50	0,80	0,04
5	-1,00	0,45	1,00	0,70	0,02
6	0,00	0,55	-0,00	0,55	0,01
7	0,50	0,65	-0,50	0,45	0,01
8	1,00	0,70	-1,00	0,45	0,02
9	1,50	0,80	-1,50	0,40	0,04
10	2,50	0,85	-2,50	0,10	$2{,}50 \cdot 10^{-3}$
11	3,00	0,90	-3,00	0,10	0,00
12	3,50	0,95	-3,50	0,05	0,00
13	7,00	1,00	-7,00	0,00	0,00

Із таблиці з варіаційного ряду видалено дубльовані значення (повторювані значення). У першому стовпчику вказано номери (ранги) членів варіаційного ряду, у другому – самі ці члени, у третьому – значення емпіричної функції розподілу для значень аргумента, що збігаються з членами варіаційного ряду. У другому стовпчику наведено члени варіаційного ряду із протилежними знаками, а потім вказуються відповідні значення емпіричної функції розподілу.

Наприклад, оскільки мінімальне спостережуване значення дорівнює мінус 3,5, то $F_n(x) = 0$ при $x < -3{,}5$, тому для 20-го члена варіаційного ряду в п'ятому стовпчику записано 0. Як інший приклад розглянемо мінімальний член варіаційного ряду, тобто (-3,5). Змінюючи знак, отримуємо 3,5. Це число стоїть на 12-й позиції варіаційного ряду. На цьому інтервалі емпірична функція розподілу збігається зі своїм значенням у правому кінці ряду ($F_n(3{,}5) = 0{,}95$), тому слід записати в п'ятому стовпчику в першому рядку значення 0,95. Решта значень п'ятого стовпчика заповнюється аналогічно.

На підставі третього і п'ятого стовпчиків заповнюється шостий. Залишається знайти суму значень, що містяться у шостому стовпчику. Результати розрахунків (підсумовування значень у шостому стовпчику таблиці) показують, що значення статистики $\omega_n^2 = 0{,}15$. Відповідно до табл. 4.18 $\omega_{\text{гр}}^2 = 1{,}66$. Оскільки $\omega^2 = 0{,}15 < \omega_{\text{гр}}^2 = 1{,}66$, гіпотеза про однорідність отриманих вибірок даних приймається.

4.7. Гіпотези про систематичну похибку в ряді спостережень

Методи виявлення систематичної похибки (*тренду*) у ряді спостережень залежать від його характеру: лінійне зростання або спадання математичного сподівання або дисперсії ряду, періодична зміна математичного сподівання тощо. За умови, якщо випадковою похибкою можна знехтувати, тренд можна виявити за чергуванням знаків відхилень результатів або від центра розподілу ймовірності, яким може бути математичне сподівання, медіана тощо, або від попередніх результатів. Отже, якщо знаки невиправлених випадкових відхилень чергуються з деякою закономірністю, це свідчить про наявність тренда. Наприклад, якщо наявна послідовність знаків «+» або «–» випадкових відхилень попередніх результатів від наступних, то наявна періодична систематична похибка (рис. 4.1, *а*). Якщо групи знаків «+» і «–» випадкових відхилень від центра розподілу чергуються, то наявна прогресуюча систематична похибка (рис. 4.1, *б*).

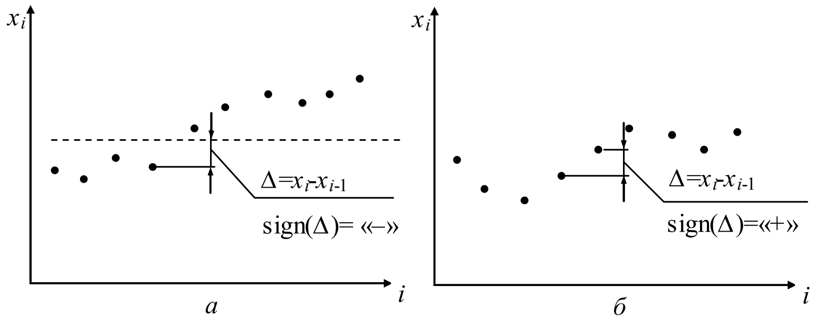


Рис. 4.1. Графічне пояснення процесу виявлення тренду

Але ці правила виявлення тренду можна використати, якщо випадкова складова похибки неістотна.

Якщо випадковою складовою похибки знехтувати не можна, для виявлення тренда застосовують інші критерії.

Критерій серій, оснований на медіані

Цей критерій дозволяє виявити прогресуючу систематичну похибку. Послідовність його застосування така:

1. Визначають значення медіани $\mathbf{Med}(x)$ за рядом спостережень $x_i, i = \overline{1, n}$.

2. Для ряду спостережень замість кожного x_i ставлять плюс, якщо $x_i > \mathbf{Med}(x)$, і мінус, якщо $x_i < \mathbf{Med}(x)$, а якщо значення ряду дорівнює $\mathbf{Med}(x)$, то його випускають в отриманій послідовності плюсів і мінусів.

3. Для отриманих послідовностей плюсів і мінусів визначають серії, загальну кількість серій $v(n)$ і тривалість найдовшої серії $\tau(n)$. Під серією розуміють послідовність плюсів або мінусів (найкоротша серія складається з одного плюса чи мінуса).

4. Перевіряють гіпотезу H_0 про статистичну незалежність випадкових відхилень, тобто відсутність систематичної похибки. Конкуруюча гіпотеза H_1 – випадкові відхилення статистично залежні, тобто наявна прогресуюча систематична похибка. Гіпотеза H_0 для рівня значущості $0{,}05 < a < 0{,}0975$ приймається, якщо одночасно виконуються нерівності:

$$\begin{aligned} \nu(n) &> \frac{1}{2}\left(n+1-1{,}96\sqrt{n-1}\right), \\ \tau(n) &< 3{,}31\mathrm{g}(n+1). \end{aligned} \tag{4.49}$$

Якщо хоча б одна з нерівностей (4.49) не виконується, гіпотезу H_0 відкидають і приймають гіпотезу H_1 про наявність прогресуючого тренду.

Критерій «зростаючих» і «спадних» серій

Цей критерій чутливий до наявності періодичного тренду. Послідовність його застосування така.

1. Для ряду спостережень $x_1,...x_i,...,x_n$ на $i-$му місці ставлять плюс, якщо $x_{i+1} > x_i$ $\left(x_{i+1} - x_i > 0\right)$, і мінус, якщо $x_{i+1} < x_i$ $\left(x_{i+1} - x_i < 0\right)$ (якщо $x_{i+1} = x_i$, враховують лише одне значення).

2. Для отриманої послідовності плюсів і мінусів визначають серії, загальну кількість серій $v(n)$ і тривалість найдовшої серії $\tau(n)$. Під серією розуміють послідовність плюсів або мінусів (найкоротша серія складається з одного плюса або мінуса).

3. Перевіряють гіпотезу H_0 про статистичну незалежність випадкових відхилень $\left(x_{i+1} - x_i\right)$, тобто відсутність систематичної похибки. Конкуруюча гіпотеза H_1 – випадкові відхилення статистично залежні, тобто наявна періодична систематична похибка. Гіпотеза H_0 для рівня значущості $0{,}05 < \alpha < 0{,}0975$ приймається, якщо одночасно виконуються нерівності:

$$\nu(n) > \frac{1}{3}(2n-1) - 1{,}96\sqrt{\frac{16n-29}{90}}, \qquad (4.50)$$
$$\tau(n) < \tau_0(n),$$

де значення $\tau_0(n)$ обирають залежно від n:

$$\tau_0(n \le 26) = 5;\ \tau_0(26 < n \le 153) = 6;\ \tau_0(153 < n \le 1170) = 7.$$

Якщо хоча б одна з нерівностей (4.50) не виконується, то гіпотезу H_0 відкидають і приймають гіпотезу H_1 про наявність тренда.

Критерій Аббе

Цей критерій застосовують для виявлення прогресуючого тренда сукупності із законом розподілу Гаусса.

Група результатів спостережень містить тренд, що постійно зростає або зменшується, якщо виконується нерівність

$$\frac{s_d^2}{s^2} < \nu_\tau(\alpha, n), \qquad (4.78)$$

де n – кількість спостережень у групі; $\nu_\tau(\alpha,n)$ – квантиль розподілу, що відповідає рівню значущості α і обсяг вибірки n, s – вибіркове СКВ; s_d – СКВ групи результатів спостережень, що обчислюється за формулою

$$s_d = \sqrt{\frac{1}{2(n-1)} \sum_{i=1}^{n-1} (x_{i+1} - x_i)^2} \ .$$

Значення $\nu_\tau(\alpha, n)$ залежно від рівня значущості і кількості спостережень наведені в табл. 4.16. Для кількості спостережень $n > 60$ значення $\nu_\tau(\alpha, n)$ обчислюють за формулою

$$\nu_\tau(\alpha, n) = 1 + \frac{u_\alpha}{\sqrt{n + 0{,}5(1 + u_\alpha^2)}},$$

де u_α – квантиль розподілу Гаусса.

Наприклад, якщо $\alpha = 0{,}05, n = 60$, то $u_\alpha = -1{,}645$ і $\nu_\tau(0{,}05{,}60) \approx 0{,}79$.

Таблиця 4.16

Квантилі розподілу $\nu_\tau(\alpha, n)$

Кількість спостережень n		**4**	**6**	**8**	**10**	**12**	**14**	**16**	**18**
Рівень значущості α	**0,01**	0,31	0,32	0,33	0,37	0,41	0,45	0,47	0,50
	0,05	0,39	0,44	0,49	0,53	0,56	0,59	0,61	0,63
Кількість спостережень n		**20**	**22**	**24**	**30**	**35**	**40**	**50**	**60**
Рівень значущості α	**0,01**	0,52	0,54	0,56	0,60	0,62	0,65	0,68	0,71
	0,05	0,65	0,66	0,68	0,71	0,73	0,75	0,77	0,79

Метод Фостера–Стьюарта

Цей метод дає можливість, окрім тренду математичного сподівання, установити наявність тренду дисперсії ряду спостережень, тобто випадкової складової похибки. Послідовність застосування така.

1. Виконують порівняння кожного спостереження з попереднім і визначають дві послідовності $k_1, \ldots k_i, \ldots k_n$ і $l_1, \ldots l_i, \ldots l_n$ (i = 2, 3, 4, n). де

$$k_i = \begin{cases} 1, \text{ якщо } x_i \text{ більше за всі попередні значення,} \\ 0, \text{ у протилежному випадку;} \end{cases}$$

$$l_i = \begin{cases} 1, \text{ якщо } x_i \text{ менше за всі попередні значення,} \\ 0, \text{ у протилежному випадку.} \end{cases}$$

2. Обчислюють величини *s* і *d*, що характеризують зміну ряду спостережень і дисперсії:

$$s = \sum_{i=1}^{n}\left(k_i + l_i\right); \; d = \sum_{i=1}^{n}\left(k_i - l_i\right).$$

Величина *s* характеризує зміну (тренд) дисперсії ряду спостережень у часі, вона може набувати значення від 0 (коли всі значення ряду рівні) до *n*–1 (ряд монотонний). Величина *d* характеризує зміну середнього (математичного сподівання) ряду і змінюється від – (*n*–1) (коли ряд монотонно спадає) до (*n*–1) (коли ряд монотонно зростає). Ці величини є випадковими з математичним сподіванням μ_S для величини *s* і 0 для величини *d*.

3. Перевіряють гіпотези про випадковість відхилення величини *s* від її математичного сподівання μ_S і про випадковість відхилення величини *d* від нуля за допомогою критерію Стьюдента:

$$t_s = \frac{\left|s - \mu_S^2\right|}{l}; \; t_d = \frac{\left|d - 0\right|}{\mu_S},$$

де $l = \sqrt{2\ln(n) - 3{,}4253}$; $\mu_S = \sqrt{2\ln(n) - 0{,}8456}$ для $n > 50$, для $n \le 50$ значення беруть з табл. 4.17.

Таблиця 4.17

Значення сталих μ_S і l для методу Фостера–Стьюарта

n	**10**	**15**	**20**	**25**	**30**	**35**	**40**	**45**	**50**
μ_S	1,964	2,153	2,279	2,373	2,447	2,509	2,561	2,606	2,645
l	1,288	1,521	1,677	1,791	1,882	1,956	2,019	2,072	2,121

Отримані значення t_s і t_d порівнюють з граничними значеннями табл. 4.18 з розподілу Стьюдента $t(1 - \alpha/2, n)$ для обраного рівня значущості α.

Якщо значення $t_s < t(1 - \alpha/2, n)$ або $t_d < t(1 - \alpha/2, n)$, то відповідних складових тренду немає; якщо $t_s < t(1 - \alpha/2, n)$, а $t_d > t(1 - \alpha/2, n)$, то наявний лінійний тренд, а тренд дисперсії відсутній і т.д.

Таблиця 4.18

Значення коефіцієнта $t(1-\alpha/2, n)$ для розподілу Стьюдента з n степенями вільності

n	$\alpha = 0{,}01$	$\alpha = 0{,}05$	$\alpha = 0{,}1$	n	$\alpha = 0{,}01$	$\alpha = 0{,}05$	$\alpha = 0{,}1$
3	5,841	3,182	2,353	**16**	2,921	2,120	1,746
4	4,604	2,776	2,132	**18**	2,878	2,101	1,734
5	4,032	2,571	2,015	**20**	2,845	2,086	1,725
6	3,707	2,447	1,943	**22**	2,819	2,074	1,717
7	3,499	2,365	1,895	**24**	2,797	2,064	1,711
8	3,355	2,306	1,860	**26**	2,779	2,056	1,706
9	3,250	2,262	1,833	**28**	2,763	2,048	1,701
10	3,169	2,228	1,812	**30**	2,750	2,043	1,697
12	3,055	2,179	1,796	**40**	2,704	2,021	1,684
14	2,977	2,145	1,761	∞	2,576	1,960	1,645

Приклад 4.29 Унаслідок вимірювань був отриманий такий ряд спостережень:

5,93 6,45 6,48 6,78 7,11 7,29 7,70 7,35 7,54 8,16

Необхідно перевірити отримані результати на наявність тренда.

Розв'язання. Наведемо отримані результати у вигляді графіка (рис. 4.2)

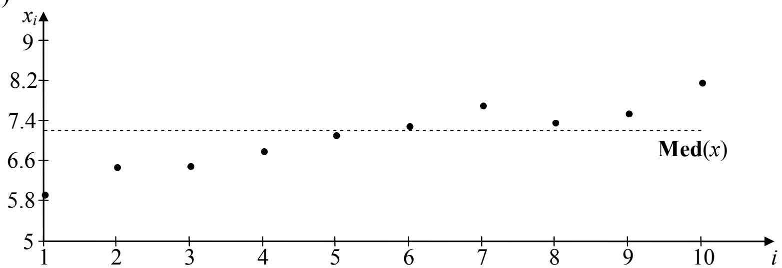


Рис. 4.2. Графік результатів спостережень

Уже із загального вигляду розміщення результатів на графіку можна передбачити наявність прогресуючого тренда.

Критерій серій, що ґрунтується на медіані

Побудуємо варіаційний ряд:

5,93 6,45 6,48 6,78 7,11 7,29 7,35 7,54 7,70 8,16

Значення медіани $\mathbf{Med}(x)$ оцінене за рядом спостережень дорівнює $(7{,}11+7{,}29)/2=7{,}20$.

Формуємо послідовність плюсів і мінусів, за якою визначаємо серії.

\- - - - - + + + + +

Для отриманої послідовності кількість серій $\nu(n)=2$, тривалість найбільшої серії $\tau(n)=5$. Для висновку про відсутність прогресуючого тренду, необхідно, щоб виконувались нерівності (4.49). Перевіряємо:

$$\frac{1}{2}\left(n+1-1{,}96\sqrt{n-1}\right)=\frac{1}{2}\left(10+1-1{,}96\sqrt{10-1}\right)\approx 2{,}56>\nu(n),$$

$$\left(3{,}3\cdot 1\mathrm{g}(n+1)\right)=3{,}3\cdot 1\mathrm{g}(10+1)\approx 3{,}44<\tau(n).$$

Оскільки друга нерівність (4.49) не виконується, тому можна зробити висновок, що в ряді спостережень наявний прогресуючий тренд.

Критерій «зростаючих» і «спадних» серій. Для ряду різниць спостережень $\Delta=x_{i+1}-x_i$ отримуємо таку послідовність знаків:

+ + + + + + + - + +

Для отриманої послідовності кількість серій $\nu(n)=3$, тривалість найбільшої серії $\tau(n)=7$.

Для висновку про відсутність прогресуючого тренда, треба, щоб виконувались нерівності (4.50), отже,

$$\frac{1}{3}(2n-1)-1{,}96\sqrt{\frac{16n-29}{90}}=\frac{1}{3}(2\cdot 10-1)-1{,}96\sqrt{\frac{16\cdot 10-29}{90}}\approx 3{,}97>\nu(n),$$

$$\tau_0(n)=5<\tau(n),$$

Оскільки жодна з нерівностей (4.50) не виконується, тому можна зробити висновок, що в ряді спостережень наявний і періодични тренд.

Критерій Аббе. За вихідним рядом спостережень отримуємо:

$$s_d=\sqrt{\frac{1}{2(n-1)}\sum_{i=1}^{n-1}(x_{i+1}-x_i)^2}=0{,}260;\ s=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}=0{,}636.$$

Відповідно, відношення s_d^2/s^2 дорівнює 0,167.

Для $\alpha=0{,}05$ і $n=10$ отримуємо з табл. 4.18 $\nu_\tau(\alpha,n)=0{,}53$.

Відношення s_d^2/s^2 менше за граничне значення $\nu_\tau(\alpha,n)$. Отже, у ряді спостережень наявний тренд.

Метод Фостера–Стьюарта. За вихідним рядом спостережень визначаємо дві послідовності з елементами k_i і l_i :

k_i	1	1	1	1	1	1	0	0	1
l_i	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Обчислюємо величини *s* і *d*:

$$s=(1+0)+(1+0)+(1+0)+(1+0)+(1+0)+(1+0)+(0+0)+(0+0)+(1+0)=7,$$

$$d=(1-0)+(1-0)+(1-0)+(1-0)+(1-0)+(1-0)+(0-0)+(0-0)+(1-0)=7.$$

Обчислюємо значення статистик t_s і t_d, значення $\mu_S=1{,}964$ та $l=1{,}288$

беремо з табл. 4.20:

$$t_s = \frac{\left|s - \mu_S^2\right|}{l} = \frac{\left|7 - 10^2\right|}{1,288} = 1,077\,;\; t_d = \frac{\left|d - 0\right|}{\mu_S} = \frac{\left|7\right|}{1,964} = 3,072\,.$$

Порівнюємо отримані величини t_s і t_d з граничним (табл. 4.21) для $\alpha = 0,05$ та $n = 10$ – $t(1 - 0,05/2,10) = 2,228$. Отже, $t_s = 1,077 < 2,228$.

Висновок: систематичної зміни дисперсії у ряді спостережень не відбувається. $t_d = 3,072 > 2,228$, тому в ряді спостережень наявний прогресуючий тренд.

Контрольні запитання та завдання

1. Які гіпотези про статистичні характеристики вам відомі?
2. Як перевірити статистичну рівність математичних сподівань, дисперсій, за умови гауссівського закону розподілу?
3. З якою метою перевіряють статистичну рівність математичних сподівань або дисперсій груп даних?
4. Наведіть критерії перевірки симетричності розподілу ймовірності.
5. Із застосуванням математичного генератора випадкових величин з експоненційним розподілом отримайте дві вибірки та перевірте статистичну рівність параметрів v_1 і v_2 отриманих вибірок.
6. Запишіть дві довільні вибірки по 10 чисел з інтервалу від 10 до 20. Перевірте статистичну рівність медіан отриманих вибірок.
7. З якою метою перевіряють приналежність спостереження до загальної сукупності експериментальних даних?
8. Перевірте наявність надмірної похибки (мінімальне та максимальне значення) у вибірці, обраній за варіантом з табл. Д2.2, дод.2.
9. У чому полягає статистична однорідність експериментальних даних. Наведіть відомі вам методи перевірки статистичної однорідності.
10. Що таке тренд? Які види тренда вам відомі?
11. Перевірте обрану згідно з варіантом вибірку з табл. Д2.2, дод.2 на наявність тренда математичного сподівання та дисперсії.

5. КОРЕЛЯЦІЙНИЙ АНАЛІЗ

5.1. Загальні відомості про поняття кореляції

Кореляція в широкому розумінні слова означає зв’язок, співвідношення між об’єктивно існуючими явищами та процесами. У математичній статистиці – це ймовірнісна або систематична залежність між ознаками різних явищ і процесів, яка на відміну від функціональної обтяжена дією випадкових факторів. Проте для розкриття і дослідження причинних зв’язків через їх різноманіття цього загального визначення стає недостатньо. Мало встановити лише наявність зв’язку між двома або декількома явищами, велике методологічне значення має правильний вибір виду і форми зв’язку. Зв’язки між явищами і процесами можуть бути різні за значенням. Для визначення ступенів інтенсивності, тісноти, лінійності, чіткості, строгості зв’язку проблема кореляції розглядається у вузькому сенсі. Виходячи з цього, можна навести таке визначення: якщо випадкові змінні причинно зумовлені і можна в імовірнісному сенсі висловлюватися про їх зв’язок, то наявний кореляційний (стохастичний) зв’язок, або кореляція між ними.

Функціональний і кореляційний зв’язки – два основні типи зв’язку, що визначають співвідношення між явищами і процесами. При цьому слід зазначити, що будь-який причинний вплив може виражатися або функціональним, або кореляційним зв’язком. Проте не кожна функція або кожна кореляція відповідає причинній залежності між явищами.

Для ефективного вивчення зв’язків необхідно використовувати сукупності, однорідні стосовно тих ознак, зв’язок яких вивчається. Якщо визначають час, витрачений працівником на вироблення одиниці виробу на підприємствах, що розрізняються між собою лише технічним рівнем виробництва, слід очікувати, що в цьому випадку спостерігатиметься дуже тісний зв’язок між цими ознаками. Чим тісніший зв’язок між явищами, тим, більше виключається дія другорядних причин і тим менше позначаються (впливають) випадкові фактори. У результаті такий кореляційний зв’язок між явищами наближається до функціонального. Тому функціональний зв'язок можна розглядати як граничний випадок кореляції.

Кореляція між двома змінними може трансформуватися у функціональний зв'язок, якщо декілька змінних, сполучених певним чином, розглядати одночасно.

Слід зазначити, що іноді істинний функціональний зв'язок важко виявити внаслідок похибок вимірювання, зміни умов реалізації, помилкового або формального розгляду причинних стосунків, що накладаються. І тоді невипадкові змінні, що перебувають у функціональній залежності, перетворюються у випадкові, а зв'язок починає набувати стохастичного характеру. Наприклад, закон вільного падіння виконується точно лише в безповітряному просторі. У випадку відхилення від цієї умови закон проявляється у вигляді кореляції.

Причинний вплив може бути виражений у вигляді функціонального або кореляційного зв'язку. Але звідси зовсім не випливає протилежне твердження, що за будь-яким кореляційним або функціональним зв'язком криється причинна залежність. По-перше, це пов'язано з різноманіттям форм причинно-наслідкових відношень; по-друге, уже з визначення функціонального і кореляційного зв'язків видно, що йдеться про віддзеркалення кількісного зв'язку між явищами або про оцінку цього зв'язку за числовими даними. Завдання ж наукового дослідження полягає в пошуку причинних залежностей. Тільки знання істинних причин явищ дозволяє правильно тлумачити спостережувані закономірності. Проте кореляція як формально-статистичне поняття сама по собі не розкриває причинного характеру зв'язку. За допомогою кореляційного аналізу не можна вказати, яке явище слід брати як причину, а яке – як наслідок. Кореляція лише визначає оцінку тісноти зв'язку.

У багатьох ситуаціях відносно легко, виходячи з логіко-професійних міркувань, пояснити, які змінні являють собою причину, а що є наслідком. Наприклад, існує кореляція між зростанням продуктивності праці і підвищенням заробітної плати. У загальному випадку зростання продуктивності праці можна вважати причиною підвищення заробітної плати. Проте, підвищення заробітної плати може бути матеріальним стимулом росту продуктивності праці.

Розглянемо тепер різні види кореляції. Основні класифікаційні ознаки та відповідні види кореляції показано на рис. 5.1.

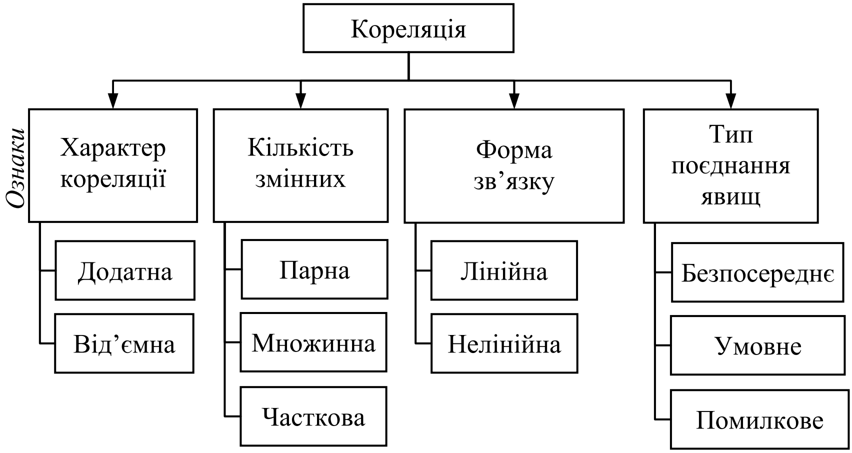


Рис. 5.1. Класифікаційні ознаки та види кореляції

За характером кореляції розрізняють:

а) додатну кореляцію. Вона спостерігається, якщо зі збільшенням або зменшенням значень однієї змінної значення іншої відповідно збільшуються або зменшуються (рис. 5.2, *а, в*). Додатна кореляція існує, наприклад, між продуктивністю праці і заробітною платою, між ростом і масою людини. Додатна кореляція називається також рівнонапрямленою (чи прямою) кореляцією;

б) від'ємну кореляцію. За цього виду кореляції зі збільшенням або зменшенням значень однієї змінної значення іншої відповідно зменшуються або збільшуються (рис. 5.2, *б*). Від'ємна кореляція існує, наприклад, між продуктивністю праці і вартістю виробу. Від'ємну кореляцію називають також оберненою.

За кількістю змінних розрізняють:

а) просту, або парну кореляцію. Це кореляція між двома змінними;

б) множинну кореляцію. Це кореляція між більш ніж двома змінними. За допомогою множинної кореляції охоплюється увесь причинно-наслідковий комплекс, у якому окремі явища, як правило, є наслідком не однієї, а декількох причин. Множинна кореляція є віддзеркаленням цих об’єктивно існуючих множинних зв’язків. Установлення цих зв’язків, що супроводжується їх поясненням, розкриває механізм явищ;

в) часткову кореляцію. Це кореляція між двома змінними за «фіксованого» впливу інших змінних, що включені до аналізу. За допомогою часткової кореляції якнайповніше досліджується причинно-наслідковий комплекс і розкривається внутрішня структура співвідношень між ознаками досліджуваних явищ. Важливість використання часткової кореляції випливає з того факту, що одночасно взаємодіють декілька факторів і спільно впливають на досліджувану ознаку. Якщо визначати кореляцію між залежною змінною (наслідок) і кожною пояснюваною змінною (причиною) окремо, то вплив інших змінних позначатиметься на мірі зв’язності виділених змінних. Це може призвести до помилкових висновків.

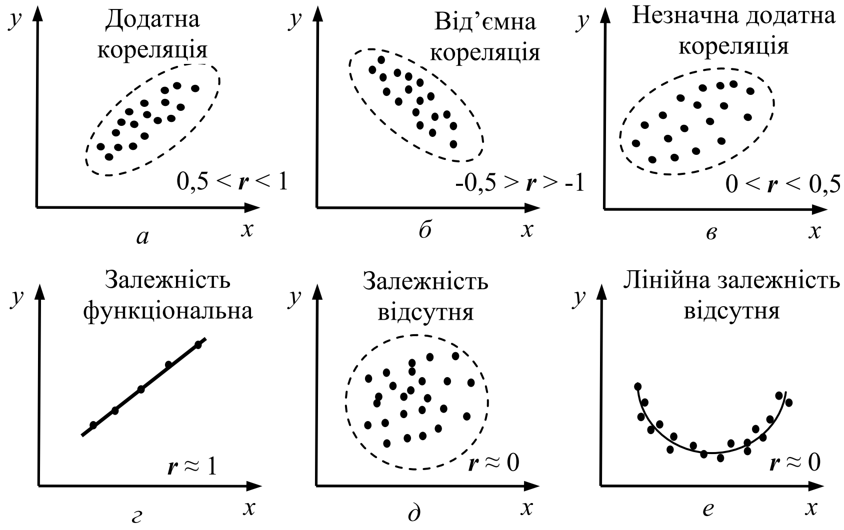


Рис. 5.2. Графічне зображення функціонального та стохастичного зв’язків між величинами x і y

За формою зв’язку розрізняють:

а) лінійну кореляцію. Для цього виду кореляції між досліджуваними змінними існують лінійні співвідношення;

б) нелінійну кореляцію. За цього виду кореляції між змінними існують нелінійні співвідношення (рис. 5.2, е).

За типом поєднання явищ розрізняють:

а) безпосередню кореляцію. В цьому випадку досліджувані явища пов'язані між собою безпосередньо. Визначальна змінна чинить прямий вплив на залежну змінну. Отже, безпосередня кореляція існує, якщо з одного явища логічно випливає інше, і для пояснення цієї кореляції не треба залучати інші явища;

б) непряму кореляцію. За непрямої кореляції змінні, що вивчаються, не мають безпосереднього причинно-наслідкового зв'язку, а визначаються загальною для них причиною. Логічно обґрунтувати такий зв'язок можна лише за допомогою інших явищ. У випадку непрямої кореляції існує небезпека переходу на формальний шлях дослідження, що може призвести до помилкової кореляції.

Дуже наочний приклад непрямої кореляції дає статистика дореволюційної Росії. Було встановлено тісну кореляцію між кількістю пожеж у країні і розмірами врожаю. Очевидно, низькі врожаї ніяк не можна вважати причиною пожеж у будівлях, і крім того, не можливо боротися з пожежами за допомогою агротехнічних заходів. У дійсності в наведеному прикладі між змінними існує лише непрямий зв'язок. Як розміри врожаю, так і кількість пожеж істотно залежать від третього явища – метеорологічних умов. Сильна посуха призводить неврожаю. Вона ж спонукає до виникнення пожеж. Тільки завдяки цьому проявляється зв'язок між урожайністю в сільському господарстві та кількістю пожеж. Цей приклад ще раз демонструє, що змістовне пояснення досліджуваних явищ необхідне для правильного тлумачення кореляції;

в) помилкова кореляція. Під помилковою кореляцією (нонсенс-кореляцією) часто розуміють формальний зв'язок між явищами, що не знаходить будь-якого логічного пояснення та оснований лише на кількісному співвідношенні між ними. Часто помилкова кореляція виникає під час вивчення динамічних рядів, і особливо характерно для економічних явищ. Якщо матеріалу за роками або місяцями, легко виявити еволюторну компоненту, що показує основну тенденцію ряду. У випадку зіставлення рядів такого типу необхідно (перш ніж установлювати кореляцію між обома рядами) виключити з них закономірні зміни рівня. Збіг або протиспрямованість еволюторних тенденцій, що не мають загального пояснення і не пов'язаних загальністю розвитку, може слугувати причиною штучного зв'язку, позбавленого сенсу. Подібний зв'язок нічого не дає для дослідження причин, що зумовлюють виникнення та перебіг явищ.

Нагадаємо відомі з літератури зі статистики приклади помилкової кореляції між кількістю лелек, що звили гнізда в районах Східної Прусії, і народжуваністю в цих районах в ці ж роки. Обчислення, виконані заради жарту, показали додатну кореляцію між цими явищами. Наведений приклад ще раз підтверджує, що причинна залежність не може бути виведена ні з якої спостережуваної спільної зміни явищ без їх попереднього логічного обґрунтування.

Проблема помилкової кореляції виникає під час використання індексів, процентних чисел, а також коли до обох зіставлюваних величин додається або від кожної віднімається одна й та сама величина. Помилкова кореляція може виникнути і в тому випадку, коли одна змінна входить до складу іншої і тим самим формально зумовлює відповідність обох змінних.

Таким чином, можна сформулювати завдання кореляційного аналізу таким:

1. Визначення ступеня зв'язку (тісноти, сили, строгості, інтенсивності) двох і більше явищ. Загальні знання про об'єктивно існуючі причинні зв'язки мають доповнюватися науково пояснюваними знаннями про міру залежності між ними. Для цього виконують відповідні статистичні обчислення. Ідеться передусім, про верифікацію вже відомих зв'язків. Але кореляційний аналіз може слугувати також інструментом для виявлення ще невідомих зв'язків.

2. Відбір факторів, що найбільше впливають на результативну ознаку, на підставі вимірювання ступеня зв'язності між явищами. Відібрані фактори використовують у подальшому аналізі. Найважливішими факторами кореляційного та регресивного аналізу вважають ті, які корелюють найбільше з досліджуваними явищами. Усвідомлено змінюючи фактори, що впливають на

результат експерименту, можна досягнути бажаного ефекту в результативній ознаці наслідку.

3. Виявлення невідомих причинних зв'язків. Під час вирішення цього завдання необхідно враховувати своєрідні взаємозв'язки в причинно-наслідковому комплексі і особливості науково–методологічних правил статистичного дослідження, що спираються на кількісні зв'язки між явищами. Кореляція безпосередньо не впливає на причинні зв'язки між явищами, але підсилює ступінь необхідності існування цих зв'язків і достовірність судження про їх наявність.

5.2. Кореляційний аналіз даних із розподілом Гаусса

5.2.1. Коефіцієнт парної кореляції Пірсона

Щільність стохастичного лінійного зв'язку між випадковими величинами X і Y із гауссівським розподілом незалежно від їх роду характеризується коефіцієнтом кореляції:

$$r = \frac{\mathbf{M}\{(X-\mathbf{M}\{X\})(Y-\mathbf{M}\{Y\})\}}{\sqrt{\mathbf{D}(X)\mathbf{D}(Y)}} = \frac{\mathbf{cov}(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)},$$

де $\mathbf{cov}(X,Y)$ – оператор коваріації випадкових величин X і Y.

Властивості коефіцієнта кореляції:

1. Модуль $|r| \le 1$,

2. Якщо $r=0$, то X і Y – незалежні випадкові величини,

3. Якщо $|r|=1$, то між X і Y відбувається функціональний зв'язок,

4. Якщо $0<|r|<1$, то між X і Y відбувається стохастичний зв'язок.

Для статистичного визначення коефіцієнта кореляції між X і Y проводять ряди незалежних випробувань, результатом кожного з яких є пара величин (x_i, y_i) – реалізації відповідно X і Y. На кореляційному полі, тобто на координатній площині у вигляді точок, координатами яких є значення величин x_i і y_i, будується діаграма розсіювання (рис. 5.2), за аналізом якої будується припущення відносно виду залежності (лінійна або нелінійна) між X і Y. У випадку припущення про лінійність розраховують статистичну оцінку коефіцієнта кореляції:

$$\hat{r} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2}}, \qquad (5.1)$$

де $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$, $\overline{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$.

За малого обсягу вибірки n оцінка $\hat{r}$ є зміщеною відносно генерального параметра r. Для усунення цього недоліку на малих вибірках використовують відкориговану оцінку:

$$\hat{r}^* = \hat{r}\left[1 + \frac{1 - r^2}{2(n-3)}\right]. \qquad (5.2)$$

Значення оцінок коефіцієнта кореляції завжди є відмінним від нуля. Тому виникає задача перевірки значущості коефіцієнта кореляції. Гіпотеза H_0 про випадковість відхилень від нуля вибіркового коефіцієнта кореляції у випадку генеральної сукупності з параметром $r = 0$, перевіряється за t-розподілом з $(n-2)$ степенями вільності та заданим рівнем значущості α (табл. Д1.2, дод.1):

$$\hat{t} = \frac{\hat{r}\sqrt{n-2}}{\sqrt{1 - \hat{r}^2}}. \qquad (5.3)$$

Якщо $\left|\hat{t}\right| \geq t_{n-2,\alpha}$, – гіпотеза $H_0 : r = 0$ не приймається і коефіцієнт кореляції визнається значущим.

Значення $\hat{r}$, обчислені за результатами оброблення різних вибірок, відрізнятимуться одне від одного. Вони є випадковими величинами з визначеними розподілами ймовірностей. Ці вибіркові розподіли залежать від форми розподілу генеральної сукупності, обсягу вибірки, значення параметрів генеральної сукупності. У загальному випадку ці розподіли досить складні. Для випадку, коли випадкові величини X і Y розподілені нормально, змінна V, що відображає вплив багатьох випадкових незалежних факторів, також має гауссівський розподіл. Точне визначення щільності ймовірності $\hat{r}$ для цього випадку запропонував Р.Фішер. Ця щільність сильно залежить від генерального коефіцієнта кореляції

r та обсягу досліджуваних вибірок. У випадку коли n є достатньо великим і $|r|$ значно відрізняється від одиниці, функція щільності розподілу ймовірності $\hat{r}$ наближається до нормальної.

Розподіл $\hat{r}$ тим сильніше відрізняється від нормального розподілу, чим менша кількість спостережень і чим більше його абсолютне значення. Розподіл оцінки $\hat{r}$ може бути наближено зведений до нормального за допомогою $\overset{*}{Z}$-перетворення Фішера:

$$\overset{*}{Z} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\hat{r}}{1-\hat{r}}\right) = 1{,}1513\lg\frac{1+\hat{r}}{1-\hat{r}},\ \hat{r} \neq 1. \qquad (5.4)$$

Оцінка $\overset{*}{Z}$ має математичне сподівання

$$\mathbf{M}\left[\overset{*}{Z}\right] = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+r}{1-r}\right),\ \hat{r} \neq 1,$$

і дисперсію:

$$\sigma^2\left[\overset{*}{Z}\right] \approx \frac{1}{n-3},\ n > 3.$$

Для цього перетворення інтервал визначення $-1 \le r \le 1$ переходить в інтервал $-\infty < \overset{*}{Z} < \infty$. Обернене перетворення подається виразом $\hat{r} = tgh\,\overset{*}{Z}$.

Значущість коефіцієнта кореляції перевіряється за статистикою

$$\hat{U} = \frac{\overset{*}{Z}}{\sqrt{\sigma^2\left[\overset{*}{Z}\right]}} = \overset{*}{Z}\sqrt{n-3}, \qquad (5.5)$$

яка порівнюється з граничним значенням u_P – значенням квантиля нормального нормованого розподілу, який відповідає заданому рівню довірчої ймовірності. Якщо $\left|\hat{U}\right| \ge u_P$, то коефіцієнт кореляції значущий.

Для малих обсягів досліджуваних вибірок n значення $\hat{r}$ значно розсіюються в околі значення r, що знижує точність оцінки коефіцієнта кореляції. В цьому випадку замість статистики з розподілом Гаусса $\hat{U}$ використовується статистика $t = \frac{\overset{*}{Z}}{s}$ (s – оцінка СКВ величини $\overset{*}{Z}$), яка має розподіл Стьюдента з кількістю степенів вільності $v = n - 2$.

Вибірковий коефіцієнт кореляції $\hat{r}$ є обґрунтованою точковою оцінкою коефіцієнта кореляції r. Для оцінювання його статистичної надійності знаходять довірчий інтервал, всередині якого із заданою довірчою імовірністю P визначають невідомий коефіцієнт кореляції генеральної сукупності:

$$tgh\,\overset{*}{Z}_1 \le r \le tgh\,\overset{*}{Z}_2\,, \tag{5.6}$$

де $\overset{*}{Z}_{1,2} = \overset{*}{Z} \mp \frac{u_{(1+P)/2}}{\sqrt{n-3}}$, $u_{(1+P)/2}$ – квантиль нормального розподілу (табл. Д1.1, дод.1).

Для $n < 25$ границі надійного інтервалу обчислюють за наближеною формулою

$$r_{\text{н}}^{\text{в}} = \hat{r} \pm \frac{(1-\hat{r}^2)}{2n} \pm u_{(1+P)/2}\frac{1-\hat{r}^2}{\sqrt{n-1}}\,,\ n > 2\,.$$

Перевірка значущості коефіцієнта кореляції для малих обсягів вибірок. Гіпотеза про значущість коефіцієнта зв’язку між випадковими величинами може бути перевірена шляхом порівняння вибіркового коефіцієнта кореляції $\hat{r}$ з його граничним значенням r_α, яке є $1-\alpha/2$ – квантилем r-розподілу при $r = 0$. Кореляція між випадковими величинами визнається значущою, якщо $|\hat{r}| \ge r_\alpha$. Граничні значення r_α можуть бути обраховані за такими наближеними формулами:

– для $n > 5$:

$$r_\alpha = \frac{\exp\left(\frac{2}{\sqrt{n-3}}u_{1-\alpha/2}\right) - 1}{\exp\left(\frac{2}{\sqrt{n-3}}u_{1-\alpha/2}\right) + 1}\,; \tag{5.7}$$

– для $n > 20$:

$$r_\alpha = \sqrt{\frac{t^2_{1-\alpha/2}}{n-2+t^2_{1-\alpha/2}}}\,,$$

– для $n > 100$

$$r_\alpha = \frac{1}{\sqrt{n-1}} u_{1-\alpha/2}\,,$$

де $u_{1-\alpha/2}$ і $t_{1-\alpha/2}$ – $(1-\alpha/2)$-квантилі стандартного гауссівського розподілу і розподілу Стьюдента з $n-2$ степенями вільності.

Приклад 5.1. За результатами сумісних вимірювань величин x і y отримано такі результати спостережень:

x	0,5	1,6	3,3	3,1	5,0	3,5	5,6	4,9	4,8	5,4
y	2,2	1,0	1,7	2,6	3,7	2,1	3,7	2,6	4,0	3,7

Необхідно оцінити степінь зв'язку між величинами *x* і *y*.

Розв'язування. За формулою (5.1): $\sum_{i=1}^{10} x_i = 37{,}7$; $\bar{x} = \frac{37{,}7}{10} = 3{,}77$;

$\sum_{i=1}^{10} y_i = 27{,}3$; $\bar{y} = \frac{27{,}3}{10} = 2{,}73$; $\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2} = \sqrt{26{,}001} = 5{,}099$;

$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2} = \sqrt{9{,}201} = 3{,}033$; $\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y}) = 11{,}939$;

$\hat{r} = \frac{11{,}939}{5{,}099 \cdot 3{,}033} = 0{,}772$.

Оскільки маємо малий обсяг вибірок, розрахуємо значення скоригованого коефіцієнта кореляції (5.2):

$$\hat{r}^* = 0{,}772\left[1 + \frac{1-(0{,}772)^2}{2(10-3)}\right] = 0{,}794\,.$$

Перевіримо значущість отриманої оцінки за виразом (5.3)

$$\hat{t} = \frac{0{,}794\sqrt{10-2}}{\sqrt{1-(0{,}794)^2}} = 3{,}696\,,$$

Із табл. Д1.2, дод.1 для рівня значущості $\alpha = 0{,}05$ отримаємо $t_{8;0,05} = 1{,}86$. Оскільки $|\hat{t}| = 3{,}696 \ge t_{8;0,05} = 1{,}86$, гіпотеза $H_0 : r = 0$ не приймається і оцінений коефіцієнт кореляції визнаємо значущим.

Перевіримо значущість отриманої оцінки за виразом (5.7)

Значення $1-\alpha/2$ квантиля розподілу Гаусса (табл. Д1.1, дод.1) для рівня значущості $\alpha = 0{,}05$ становить $u_{1-\alpha/2} = 1{,}96$. Значення $\exp\left(\frac{2}{\sqrt{n-3}}1{,}96\right) = 1{,}482$. Отже, граничне значення коефіцієнта кореляції $r_\alpha = \frac{1{,}482-1}{1{,}482+1} = 0{,}63$. Оскільки $\left|\hat{r}^*\right| = 0{,}794 \geq r_\alpha = 0{,}63$, гіпотеза $H_0 : r = 0$ не приймається і коефіцієнт кореляції визнаємо значущим.

Визначимо довірчі границі для $P = 0{,}95$ коефіцієнта кореляції згідно з формулами (5.4)–(5.6): $\overset{*}{Z} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+0{,}794}{1-0{,}794}\right) = 1{,}025$; $\overset{*}{Z}_1 = 1{,}025 - \frac{1{,}96}{\sqrt{7}} = 0{,}284$; $\overset{*}{Z}_2 = 1{,}025 + \frac{1{,}96}{\sqrt{7}} = 1{,}766$; $tgh\overset{*}{Z}_1 = 0{,}277$; $tgh\overset{*}{Z}_2 = 0{,}943$; Отже $0{,}277 \leq r \leq 0{,}943$.

5.2.2. Перевірка статистичних гіпотез щодо коефіцієнта кореляції Пірсона

Відповідність вибіркового коефіцієнта кореляції $\hat{r}$ теоретичному (гіпотетичному) значенню r перевіряють на підставі стандартної нормальної змінної $\hat{U}$ за формулою

$$\hat{U} = \left|\overset{*}{Z}_1 - \overset{*}{Z}\right|\sqrt{n-3},$$

де $\overset{*}{Z}_1$, $\overset{*}{Z}$ – z-перетворення Фішера (5.4) статистик $\hat{r}$ та r.

Якщо значення $\hat{U}$ менше за P-квантиль розподілу Гаусса u_P (табл. Д1.1, дод.1) для заданої довірчої ймовірності P, то приймається рішення, що $\hat{r} = r$.

Порівняння двох вибіркових коефіцієнтів кореляції $\hat{r}_1$ і $\hat{r}_2$ (на основі z-перетворення $\hat{r}_1$ та $\hat{r}_2$) виконують за формулою

$$\hat{U} = \frac{\left|\overset{*}{Z}_1 - \overset{*}{Z}_2\right|}{\sqrt{\frac{1}{n_1-3} + \frac{1}{\sqrt{n_2-3}}}},$$

де n_1 і n_2 – відповідні обсяги досліджуваних вибірок.

Якщо значення $\hat{U}$ менше за P-квантиль розподілу Гаусса u_P (табл. Д1.1, дод.1) для заданої довірчої ймовірності P, то приймається рішення, що $r_1 = r_2$, тобто вибірки взято з однієї генеральної сукупності.

5.3. Кореляційний аналіз, що ґрунтується на порядкових статистиках. Рангова кореляція

У випадку, якщо визначається взаємозв'язок між рядами спостережень, які мають довільні закони розподілів, а також якщо аналізуються ознаки, що не піддаються безпосередньому кількісному оцінюванню, проте мають ряд якісних градацій застосовують коефіцієнти рангової кореляції.

5.3.1. Коефіцієнт рангової кореляції Спірмена

Для розрахунку коефіцієнта рангової кореляції за обома рядами спостережень x_i і y_i формують ряди рангів Rx і Ry. За вибіркам будуються варіаційні ряди, потім кожному значенню вихідної вибірки приписується ранг відповідно до його номера у варіаційному ряду. Якщо у вибірці є однакові значення, то для них розраховується середній ранг, який приписується кожному з чисел. Такі ранги називають ***зв'язаними***, а їх група – ***зв'язною***.

Коефіцієнт рангової кореляції Спірмена r_S визначають за такою формулою:

$$r_S = 1 - \frac{6\sum_{i=1}^{n} D_i^2}{n(n^2-1)}, \qquad (5.8)$$

де n – кількість пар спостережень; $D_i = Rx_i - Ry_i$ – різниці пар рангів у досліджуваних вибірках.

Для перевірки правильності розрахунків сума різниць рангів D_i повинна дорівнювати нулю.

Коефіцієнт рангової кореляції Спірмена має такі властивості:

1. Модуль $|r_S| \le 1$,

2. У випадку $r_S = 1$ ранги обох рядах рівні, тобто значення $D_i = 0$,

3. У випадку $r_S = -1$ відбувається протилежне впорядкування послідовностей рангів,

4. Якщо $r_S = 0$, кореляція не спостерігається.

У випадку, коли коефіцієнт рангової кореляції Спірмена визначений для кількісних показників, розподілених за гауссівським законом, для коефіцієнта кореляції Пірсона виконується рівняння: $r = 2\sin(\pi/6)r_S$.

Значущість коефіцієнта кореляції r_S наближено оцінюється за допомогою t-критерію. Для кількості пар значень $n > 10$ маємо:

$$t = r_S \sqrt{\frac{n-2}{1-r_S^2}}\,. \tag{5.9}$$

Статистика t має розподіл Стьюдента (табл. Д1.2, дод.1) з кількістю степенів вільності $\nu = n-2$. Перевіряється основна гіпотеза $H_0 : r_S = 0$, $|t| < t_{P;\nu}$, проти альтернативи $H_1 : r_S \neq 0$, $|t| > t_{P;\nu}$. Якщо $n \geq 10$, значущість коефіцієнта кореляції Спірмена також можна перевірити за такими критеріями.

Критерій 1. Якщо

$$|r_s| > r_P\,, \tag{5.10}$$

де $r_P = u_p \dfrac{1}{\sqrt{n-1}}$, u_p – квантиль розподілу Гаусса (табл. Д1.1, дод.1), то з імовірністю P значення r_s визнається значущим.

Критерій 2. Якщо

$$S < S_{1-P} \text{ або } S > S_P\,, \tag{5.11}$$

де $S = \sum_{i=1}^{n} D_i^2$, $S_{1-P}^{P} = \dfrac{n(n^2-1)}{6} \pm u_{(1+P)/2} \dfrac{n(n+1)}{6}\sqrt{n-1}$, $u_{u_{(1+P)/2}}$ – квантиль розподілу Гаусса (табл. Д1.1, дод.1), з імовірністю P значення r_s визнається значущим.

Критерій 3. Якщо

$$J \geq J_P \text{ або } J \leq -J_P\,, \tag{5.12}$$

де $J = \dfrac{r_s}{2}\left(\sqrt{n-1} + \sqrt{\dfrac{n-2}{1-r_s^2}}\right)$, $J_P = \dfrac{1}{2}u_{(1+P)/2} + \dfrac{1}{2}t_{(1+P)/2;\nu}$, $u_{u_{(1+P)/2}}$ – квантиль розподілу Гаусса (табл. Д1.1, дод.1), $t_{(1+P)/2;\nu}$ – квантиль розподілу Стьюдента (табл. Д1.2, дод.1) з кількістю степенів вільності $\nu = n - 2$, то з імовірністю P значення r_s визнається значущим.

Якщо $n \leq 30$, значущість коефіцієнта рангової кореляції Спірмена оцінюється за допомогою спеціальних таблиць для коефіцієнта кореляції рангів, які дають більш точні значення.

У випадку, коли в досліджуваних вибірках часто трапляються зв'язні ранги, доцільно розраховувати коефіцієнт рангової кореляції за формулою

$$r_S = 1 - \frac{6\sum_{i=1}^{n} D_i^2}{(n^3 - n) - (T_A + T_B)},$$

де $T_A = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}(t_{Aj}^3 - t_{Aj})$; $T_A = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k}(t_{Bj}^3 - t_{Bj})$; t_{Aj} – кількість членів у послідовних групах (з рівними рангами) вибірки A; t_{Bj} – кількість членів у послідовних групах вибірки B.

Приклад 5.2 За результатами сумісних вимірювань величин x і y отримано такі результати спостережень:

x	2,7	2,1	4,9	4,3	5,2	6,2	8,2	9,5	10,3	11,6
y	4,3	1,7	3,6	3,9	5,5	4,2	4,5	4,9	7,4	5,8

Необхідно оцінити ступінь зв'язку між величинами x і y за допомогою коефіцієнта кореляції Спірмена.

Розв'язання. Впорядкуємо вибірки x і y та визначимо номери їх елементів:

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x	2,1	2,7	4,3	4,9	5,2	6,2	8,2	9,5	10,3	11,6
y	1,7	3,6	3,9	4,2	4,3	4,5	4,9	5,5	5,8	7,4

Визначимо ранги спостережень початкових вибірок як відповідні номери елементів у впорядкованих вибірках:

x	2,7	2,1	4,9	4,3	5,2	6,2	8,2	9,5	10,3	11,6
R_x	2	1	4	3	5	6	7	8	9	10
y	4,3	1,7	3,6	3,9	5,5	4,2	4,5	4,9	7,4	5,8
R_y	5	1	2	3	8	4	6	7	10	9

Обчислимо значення різниць рангів D_i та відповідні значення D_i^2:

R_x–R_y	–3	0	2	0	–3	2	1	1	-1	1
D_i^2	9	0	4	0	9	4	1	1	1	1

Перевіримо правильність розрахунків: $\sum_{i=1}^{n} D_i = 0$.

За формулою (5.8): $\sum_{i=1}^{n} D_i^2 = 30$; $r_S = 1 - \frac{6 \cdot 30}{10(10^2 - 1)} = 1 - \frac{180}{990} = 0{,}818$.

Перевіримо значущість розрахованого значення r_s:

– за формулою (5.10): $t = 0{,}818\sqrt{\frac{10-2}{1-(0{,}818)^2}} = 4{,}025$, оскільки $\left|\hat{t}\right| = 3{,}696 \geq t_{8;0,95} = 1{,}86$ – коефіцієнт кореляції визнаємо значущим;

– за формулою (5.10): $r_P = u_{0,95}\frac{1}{\sqrt{10-1}} = 1{,}645 \cdot 0{,}333 = 0{,}548$, оскільки $\left|r_s\right| = 0{,}818 \geq r_{0,95} = 0{,}548$ – коефіцієнт кореляції визнаємо значущим;

– за формулою (5.11): $S = \sum_{i=1}^{n} D_i^2 = 30$,

$S_{0,95} = \frac{10(10^2 - 1)}{6} + u_{(1+0,95)/2}\frac{10(10+1)}{6}\sqrt{10-1} = 165 + 1{,}96 \cdot 55 = 228$; $S_{0,05} = 165 - 1{,}96 \cdot 55 = 57$. Оскільки значення $S = 30 < S_{0,05} = 57$, то коефіцієнт кореляції визнаємо значущим;

– за формулою (5.12): $J = \frac{0{,}818}{2}\left(\sqrt{10-1} + \sqrt{\frac{10-2}{1-10^2}}\right) = 3{,}24$,

$J_{0,95} = \frac{1}{2}u_{(1+0,95)/2} + \frac{1}{2}t_{(1+0,95)/2;8} = \frac{1}{2}1{,}96 + \frac{1}{2}2{,}31 = 2{,}13$. Оскільки значення $J = 3{,}24 > J_{0,95} = 2{,}13$ – коефіцієнт кореляції визнаємо значущим.

5.3.2. Коефіцієнт рангової кореляції Кенделла

Іншу рангову міру зв'язку запропонував М. Дж. Кенделл. Вона базується на визначенні узгодженості пар рангів у досліджуваних вибірках X і Y. Якщо пари (x_i, y_i) узгоджені $(1 \leq i < j \leq n)$, то повинні виконуватися нерівності $x_i < x_j$ та $y_i < y_j$ або $x_i > x_j$ та

$y_i > y_j$ (тобто $sign(x_j - x_i)\cdot sign\,(y_j - y_i) = 1$). Нехай S – кількість узгоджених пар, а Q – кількість неузгоджених пар. Тоді міра перевищення узгодженості над неузгодженістю є статистика:

$$T = S - Q = \sum_{i<j} sign(x_j - x_i) sign\,(y_j - y_i)\,;\ T \in \left[-n(n-1)/2; n(n-1)/2\right].$$

Значення $\max T = n(n-1)/2$ визначається через абсолютно узгодженні порядки $x_1,....,x_n$ та $y_1,....,y_n$. Як оцінку ступеня узгодженості вибірок застосовують коефіцієнт рангової кореляції Кенделла:

$$\hat{r}_k = \frac{T}{T_{\max}} = \frac{2(S-Q)}{n(n-1)} = 1 - \frac{4}{n(n-1)}Q\,. \qquad (5.13)$$

Він має такі властивості:

1. Якщо між послідовностями порядкових статистик існує повна відповідність, тобто кожний елемент займає одне й те саме місце в обох рангах, то $\hat{r}_k = +1$.

2. Якщо існує взаємообернена залежність, тобто у другій послідовності ранги розміщені у зворотному порядку порівняно з першою, то $\hat{r}_k = -1$.

3. У всіх інших випадках $-1 < \hat{r}_k < +1$.

Розглянемо методику оцінювання кореляції двох вибірок x і y за способом, який запропонував Кенделл:

1. Упорядковуємо значення вибірки x за зростанням, а значення вибірки y перерозподіляємо відповідно до значень упорядкованої вибірки x, тобто зберігаємо взаємну відповідність значень x_i та y_i як у початкових вибірках (отримуємо вибірку y^*).

2. Визначаємо ранги отриманої вибірки y^* – R^*.

3. За отриманою послідовністю рангів R^* визначаємо кількість інверсій. Інверсією Q_i називають пару рангів R_i^* і R_j^* ($i < j, i = 1\ldots n-1,\ j = i+1\ldots n-1$), для якої $R_i^* > R_j^*$. Отриману сумарну кількість інверсій використовують як оцінку Q.

4. За формулою (5.13) визначаємо оцінку коефіцієнта кореляції Кенделла.

Для перевірки значущості оцінку коефіцієнта кореляції

Кендалла $\hat{r}_k$ (перевіряєть гіпотезу $H_0 : \hat{r}_k = 0$) використовують нормально розподілену статистику:

$$u = \frac{3\hat{r}_k \sqrt{n(n-1)}}{\sqrt{2(2n+5)}} . \qquad (5.14)$$

Якщо $|u| \le u_\alpha$, то з рівнем значущості α приймається гіпотеза H_0, тобто визнається, що $\hat{r}_k$ не є значущим. Якщо $n \le 10$, оцінку значущості коефіцієнта рангової кореляції Кенделла визначають за допомогою спеціальної таблиці критичних значень. У випадку, якщо вибірка розподілена за гауссівським розподілом, коефіцієнт рангової кореляції Кенделла можна використовувати для швидкого оцінювання звичайного коефіцієнта кореляції за формулою

$$r = \tau_k \pi / 2 .$$

Якщо в досліджуваних вибірках часто трапляються однакові значення (зв'язані ранги), оцінку $\hat{r}_k$ коригують:

$$\hat{r}_k = \frac{\frac{n(n-1)}{2} - 2Q}{\sqrt{\frac{1}{2}n(n-1) - D_Y}\sqrt{\frac{1}{2}n(n-1) - D_Y}} ,$$

де $D_X = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{q} t_{iX}(t_{iX} - 1)$; $D_Y = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{f} t_{iY}(t_{iY} - 1)$; t_{iX} (t_{iY}) – кількість елементів в групах з однаковими значеннями у вибірках x та y, q, f – кількість груп у вибірках x та y відповідно.

Приклад 5.3 За результатами сумісних вимірювань величин x та y отримано такі результати спостережень:

x	1,4	4,9	3,1	4,2	5,4	8,6	9,2	8,0	11,1	10,7
y	1,9	3,6	2,0	2,1	2,9	6,0	6,2	5,4	6,6	5,6

Необхідно оцінити ступінь зв'язку між величинами x і y за допомогою коефіцієнта кореляції Кенделла.

Розв'язання. Впорядкуємо вибірку x і за нею вибірку y :

x*	1,4	3,1	4,2	4,9	5,4	8,0	8,6	9,2	10,7	11,1
y*	1,9	2,0	2,1	3,6	2,9	5,4	6,0	6,2	5,6	6,6

Визначимо ранги вибірки y^* :

y*	1,9	2,0	2,1	3,6	2,9	5,4	6,0	6,2	5,6	6,6
R*	1	2	3	5	4	6	8	9	7	10

Визначимо кількість інверсій:

$i=1,\ R_i^*=1,$ кількість значень у послідовності рангів, які менші за $R_i^*=1$:–

$Q_1=0$; $Q_2=0$; $Q_3=0$; $Q_4=1,$ оскільки лише $R_5^*<R_4^*$; $Q_5=0$; $Q_6=0$;

$Q_7=1,$ оскільки $R_9^*<R_7^*$; $Q_1=1$; оскільки $R_9^*<R_8^*$; $Q_9=0$.

Отже кількість інверсій $Q=3$.

За формулою (5.13) коефіцієнт рангової кореляції Кенделла

$$\hat{r}_k=1-\frac{4}{10(10-1)}3=1-\frac{12}{90}=0{,}867\cdot$$

Перевіряємо значущість розрахованого значення $\hat{r}_k$:

За формулою (5.14): $u=\dfrac{3\cdot 0{,}867\sqrt{10(10-1)}}{\sqrt{2(2\cdot 10+5)}}=\dfrac{24{,}666}{7{,}071}=3{,}488\cdot$ Для рівня значущості $\alpha=0{,}05$ з табл. Д.1.1, дод.1 $u_{1-\alpha}=u_{0,95}=1{,}645$. оскільки $|u|=3{,}488\geq u_{0,95}=1{,}645$ – коефіцієнт кореляції визнаємо значущим.

Значення коефіцієнтів рангів кореляції Спірмена і Кенделла пов'язані між собою такими нерівностями:

1. нерівністю Деніелса, якщо $n\to\infty$, то $-1\leq 3r_k-2r_s\leq 1$:

$$-1\leq\frac{3(n+2)}{n-2}r_k-\frac{2(n+1)}{n-2}r_s\leq 1;$$

2. нерівністю Дарбіка – Стюарта: якщо $r_k\geq 0$:

$$\frac{3nr_k-(n-2)}{2(n+2)}\leq r_s\leq 1-\frac{1-r_k}{2(n+2)}\left[(n-1)(1-r_k)+4\right];$$

для $n\to\infty$: $\dfrac{3r_k}{2}-\dfrac{1}{2}\leq r_s\leq\dfrac{1}{2}+t_k-\dfrac{1}{2}t_k{}^2$,

для $r_k<0$: $\dfrac{1}{2}r_k^2+r_k-\dfrac{1}{2}\leq r_s\leq\dfrac{3}{2}r_k+\dfrac{1}{2}$.

На практиці, якщо значення коефіцієнта рангової кореляції не близькі до одиниці і n є досить великим, маємо $r_s\approx 1{,}5r_k$.

Розглянуті коефіцієнти рангової кореляції Спірмена і Кенделла не потребують наявності лінійної кореляції між досліджуваними вибірками. Обмеженням є необхідність монотонності функції регресії, крім того, їх використання послаблює вплив аномальних значень, які відчутно позначаються на результаті визначення коефіцієнта кореляції.

5.4. Спеціальні питання кореляційного аналізу

У цьому підрозділі розглянуто деякі спеціальні питання кореляційного аналізу, які виникають під час опрацювання більше двох груп вибірок або у випадку нелінійного зв'язку між аналізованими даними.

5.4.1. Часткова кореляція

У багатьох випадках розглядається кореляційна залежність між трьома і більше змінними. Припускається, що результат спостережень належить до корельованої багатовимірної генеральної сукупності. Як міру взаємозв'язку між будь-якими двома змінними в цьому разі використовують часткову кореляцію. Вона показує ступінь залежності між двома змінними у випадку інших сталих змінних.

Якщо наявна лінійна кореляція між змінними x, y, z, а r_{xy}, r_{xz}, r_{yz} – три парні коефіцієнти взаємної кореляції, то $r_{xy/z}$ є частковим коефіцієнтом кореляції між x та y за сталою змінною z:

$$\hat{r}_{xy/z} = \frac{\hat{r}_{xy} - \hat{r}_{xz}\hat{r}_{yz}}{\sqrt{(1-\hat{r}_{xz}^2)(1-\hat{r}_{yz}^2)}}.$$

Аналогічно отримують часткові коефіцієнти кореляції між іншими парами змінних:

$$\hat{r}_{xz/y} = \frac{\hat{r}_{xz} - \hat{r}_{xy}\hat{r}_{yz}}{\sqrt{(1-\hat{r}_{xy}^2)(1-\hat{r}_{yz}^2)}}; \quad \hat{r}_{yz/x} = \frac{\hat{r}_{yz} - \hat{r}_{xy}\hat{r}_{xz}}{\sqrt{(1-\hat{r}_{xy}^2)(1-\hat{r}_{xz}^2)}}.$$

Розрахунок часткових коефіцієнтів кореляції дозволяє визначити взаємний вплив змінних у випадку їх неочевидної взаємозалежності. Наприклад, якщо $\hat{r}_{xy/z} \approx 0$, це означає, що кореляція між змінними x та y базується лише на загальному впливі змінної z.

Визначення часткових коефіцієнтів кореляції дозволяє об'єднувати між собою ознаки, і таким чином зменшувати кількість залежних змінних, що характеризують досліджуваний об'єкт.

Частковий коефіцієнт кореляції перевіряють на значущість, так само, як коефіцієнт парної кореляції. Однак кількість степенів вільності в разі виключення кожної змінної зменшується на одиницю. Наприклад, у розглянутих випадках виключається одна змінна і кількість степенів вільності дорівнює $n-2-1$. Тоді для перевірки гіпотези $H_0: \hat{r}_{xy/z}=0$ використовується статистика:

$$t=\left|\frac{\hat{r}_{xy/z}\sqrt{n-k}}{\sqrt{1-\hat{r}^2_{xy/z}}}\right|,$$

яка має розподіл Стьюдента ($k-$ кількість змінних, у розглянутому випадку $k=3$) з $n-k$ степенями вільності.

Для $t>t_{P;n-k}$ нульова гіпотеза відхиляється з імовірністю P.

Якщо треба визначити, чи залежить випадкова змінна x від сукупності інших змінних $y,z,...$, оцінюють множинний коефіцієнт кореляції. У випадку трьох змінних такий коефіцієнт знаходять як

$$\hat{R}_{x/yz}=\sqrt{\frac{\hat{r}^2_{xy}+\hat{r}^2_{xz}-2\hat{r}_{xy}\hat{r}_{xz}\cdot\hat{r}_{yz}}{1-\hat{r}^2_{yz}}}. \tag{5.15}$$

За загальною формулою (5.15) аналогічно обраховують коефіцієнти $\hat{R}_{y/xz}$ і $\hat{R}_{z/xy}$.

Множинний коефіцієнт кореляції є мірою лінійної залежності однієї змінної від усіх інших. Для перевірки гіпотези $H_0: R_{x/yz}=0$ використовують статистику:

$$F=\frac{\hat{r}^2_{x/yz}}{1-\hat{r}_{x/yz}}\cdot\frac{n-k}{k-1}.$$

яка має F-розподіл Фішера, у випадку справедливості гіпотези H_0 з $\nu_1=k-1$ і $\nu_2=n-k$ степенями вільності (де k – кількість змінних). Якщо $F>F_\alpha(\nu_1,\nu_2)$, відповідна кореляція визнається значущою. Розраховане значення коефіцієнта множинної кореляції порівнюють з граничним значенням для імовірності P, яке обчислюється так:

$$r_{x/yz}(P)=\sqrt{\frac{(n-1)F_P(f_1f_2)}{n-k+(k-1)F_P(f_1f_2)}}\ .$$

Кореляція визнається значущою, якщо $\hat{r}_{x/yz}\geq r_{x/yz}(P)$.

5.4.2. Оцінювання кореляційного відношення

У випадку нелінійної стохастичної залежності, оцінювання щільності зв'язку між випадковими величинами X та Y за допомогою коефіцієнта кореляції може призвести до прийняття помилкових рішень. Для уникнення такого результату використовують кореляційне відношення. Нехай маємо n значень випадкової величини Y: y_1, $y_2, \ldots, y_k$. Для кожного значення y_i спостерігаються n_i значень випадкової величини X. Якщо $n=\sum_{i=1}^{k}n_i$, x_{ij} ($j=1\ldots n_i$) – j-е значення величини X, яке спостерігається при y_i, вибіркова оцінка кореляційного відношення X за Y дорівнює

$$\hat{\eta}_{xy}^2=\frac{\sum_{i=1}^{k}n_i(\bar{x}_i-\bar{x})^2}{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(x_{ij}-\bar{x})^2}=\frac{\sum_{i=1}^{k}n_i\bar{x}_i^2-n\bar{x}^2}{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}x_{ij}^2-n\bar{x}^2},$$

де $\bar{x}_i=\frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i}x_{ij}$ – умовне середнє значення в i-й точці; $\bar{x}=\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}\bar{x}_i$ – загальне середнє.

Властивості кореляційного відношення:

1. Виконується нерівність $0\leq\eta_{xy}^2\leq 1$.

2. У загальному випадку $\eta_{xy}^2\neq\eta_{yx}^2$, тобто міра нелінійного зв'язку несиметрична.

3. Співвідношення між коефіцієнтом $\hat{r}$ і кореляційними відношеннями η_{xy}^2 і η_{yx}^2 виражаються нерівностями:

$$\hat{r}_{xy}^2\leq\eta_{xy}^2\ \text{і}\ \hat{r}_{yx}^2\leq\eta_{yx}^2.$$

4. У випадку лінійного кореляційного зв'язку між величинами *X* та *Y* виконуються співвідношення та рівність:

$$\eta^2_{xy} \le \eta^2_{yx} \text{ і } \eta^2_{xy} = \hat{r}^2_{xy}.$$

Отже, різниця $\eta^2_{xy} - \hat{r}^2_{xy}$ може бути мірою нелінійності кореляційного зв'язку.

5. Якщо оцінка η^2_{xy} або η^2_{yx} дорівнює нулю, маємо $\hat{r}_{xy} = 0$.

Значущість оцінки кореляційного відношення перевіряється статистикою

$$F = \frac{\eta^2(n-k)}{(k-1)(1-\eta^2)}.$$

Якщо $F > F_\alpha(\nu_1, \nu_2)$, то кореляційне відношення значуще з рівнем α, де $F_\alpha(\nu_1, \nu_2)$ – квантиль *F*-розподілу з $\nu_1 = k-1$ та $\nu_2 = n-k$ степенями вільності.

Гіпотезу H_0: $\eta^2_{xy} - \hat{r}^2_{xy} = 0$ проти альтернативної H_1: $\eta^2_{xy} - \hat{r}^2_{xy} \ne 0$ перевіряють за статистикою

$$F^* = \frac{(\eta^2 - \hat{r}^2_{xy})(n-k)}{(k-2)(1-\eta^2)},$$

яка у випадку справедливості нульової гіпотези має *F*-розподіл з $\nu_1 = k-2$ та $\nu_2 = n-k$ степенями вільності. Якщо $F^* > F_P(\nu_1, \nu_2)$, то з імовірністю P гіпотеза про лінійність кореляційного зв'язку відхиляється.

Контрольні запитання та завдання

1. Поясніть суть терміна «кореляція». Як можна оцінити ступінь кореляційного зв'язку?
2. Які показники кореляції застосовують, якщо закон розподілу даних відмінний від закону Гаусса?
3. Як перевірити значущість та визначити довірчий інтервал отриманої оцінки коефіцієнта кореляції?
4. Поясніть суть множинної кореляції та кореляційного відношення.
5. Визначте наявність кореляції математичних сподівань вибірок з табл. Д2.1, дод.1 та номера відповідного варіанта із застосуванням наведених у розділі коефіцієнтів кореляції. Перевірте значущість отриманих оцінок.

6. РЕГРЕСІЙНИЙ АНАЛІЗ

Якщо взаємозв'язок аналізованих величин достовірно виявлено (див. розділ 5), подальшим логічним кроком дослідження є постановка і розв'язання такої задачі – установлення виду математичної залежності між аналізованими величинами. Якщо залежність у загальному випадку виражається як $\mathbf{M}(Y) = g(X)$, тобто шуканою є залежність математичних сподівань величини Y від значень величини X, то така залежність називається регресійною, а методи визначення такої залежності та оцінювання її статистичних властивостей є змістом регресійного аналізу. Залежно від моделі шуканої функції $g(X)$ розрізняють лінійну, нелінійну та множинну регресії, а відповідно до методів оцінювання параметрів моделі – параметричну та непараметричну.

Якщо досліджуються вибірки $x = \{x_i, i = \overline{1,n}\}$ та $y = \{y_i, i = \overline{1,n}\}$ загальна схема регресійного аналізу містить такі етапи.

1. Знаходження вибіркової оцінки регресії:
   - вибір моделі та оцінювання її параметрів;
   - оцінювання статистичної значущості отриманих параметрів.
2. Оцінювання адекватності обраної моделі, тобто статистичної значущості вибіркової регресії порівняно з розсіюванням значень y_i, яке характеризується СКВ s_y.
3. Визначення довірчих меж функції регресії, які із заданою імовірністю містять середні або індивідуальні значення Y, за якими визначають межі похибки (розширену невизначеність) значення Y для заданого значення X.

Натепер найбільш повно розроблено апарат регресійного аналізу, який передбачає, що вибіркові значення y_i статистично незалежні і мають гауссівський закон розподілу. У випадку порушення цієї умови доцільно застосовувати методи непараметричної регресії.

6.1. Лінійна регресія

У випадку лінійної регресії розглядають модель залежності двох величин X та Y в такому загальному вигляді

$$Y(X) = kX + b,\ k, b \in R .$$

Початковими даними можуть бути n пар вибіркових значень x_i та y_i, (рис. 6.1, *а*) $i = 1...n$, або у випадку значень $y_{i,k}$ величини Y з багаторазовими спостереженнями обсягом m, $i = 1...n$, $k = 1...m$ – n пар x_i та середніх значень $\bar{y}_i$ (рис. 6.1, *б*). Для простоти далі будемо використовувати лише позначення y_i.

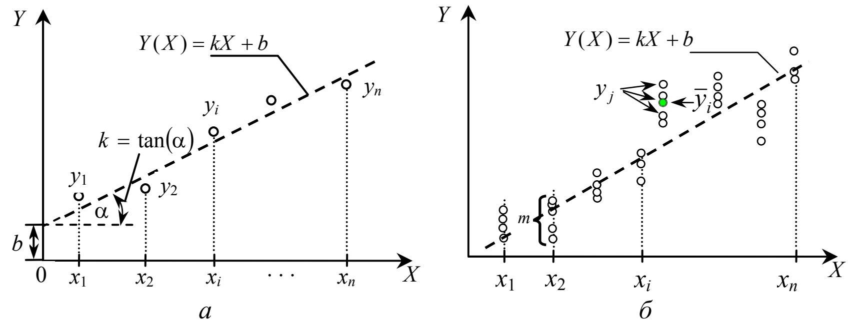


Рис. 6.1. Графічне зображення початкових даних для визначення регресії: значення *Y,* отримані як результати вимірювань з одноразовими (*а*) або багаторазовими (*б*) спостереженнями

Існує декілька методів оцінювання коефіцієнтів регресії k і b – спрощені, метод найменших квадратів (МНК) та метод найбільшої правдоподібності. Розглянемо найбільш прості і придатні для застосування методи оцінювання коефіцієнтів регресії.

6.1.1. Спрощені методи оцінювання коефіцієнтів регресії

Метод Бартлетта – Кенуя

Пари спостережень (y_i, x_i) упорядковуються за x і розбиваються на три приблизно однакові групи обсягом M (перша і третя групи повинні бути обов'язково однакового обсягу). У кожній групі знаходять суми $\sum y_i$ і $\sum x_i$ (позначимо їх відповідно $y1^\Sigma, y2^\Sigma, y3^\Sigma$ і $x1^\Sigma, x2^\Sigma, x3^\Sigma$). Тоді коефіцієнти регресії оцінюються за допомогою співвідношень:

$$k = \frac{y3^\Sigma - y1^\Sigma}{x3^\Sigma - x1^\Sigma},\ b = \bar{y} - k\bar{x}\ \text{або}\ b = \frac{y2^\Sigma}{M} - k\frac{x2^\Sigma}{M}. \qquad (6.1)$$

СКВ коефіцієнта k: $s_k = \dfrac{0{,}8s\sqrt{n}}{x3^\Sigma - x1^\Sigma}$, де $s = \dfrac{8}{9}\sum_{i=1}^{n-1}\dfrac{|y_i - y_{i+1}|}{n}$.

У виразах (6.1) замість значень сум або середніх значень можна використовувати відповідні значення медіан, що забезпечує більшу стійкість до наявності спостережень з надмірною похибкою.

Якщо *n* пар спостережень розбивають на чотири групи, які містять у собі 1/6, 1/3, 1/3 та 1/6 частин спостережень, то

$$k = \frac{3y1^{\Sigma} + y2^{\Sigma} - y3^{\Sigma} - 3y4^{\Sigma}}{3x1^{\Sigma} + x2^{\Sigma} - x3^{\Sigma} - x4^{\Sigma}} \text{ із СКВ } s_k = \frac{1{,}9 s\sqrt{n}}{3x1^{\Sigma} + x2^{\Sigma} - x3^{\Sigma} - x4^{\Sigma}}.$$

Ці оцінки застосовні для великих вибірок обсягу $n \geq 100$.

Приклад 6.1 Задано такі результати спостережень:

x	1,00	1,05	1,10	1,15	1,20	1,25	1,30	1,35	1,40	1,45	1,50	1,55	1,60	1,65	1,70
y	4,80	5,08	6,40	5,31	5,19	5,56	5,45	5,65	5,67	6,01	6,25	6,11	6,41	6,53	6,39

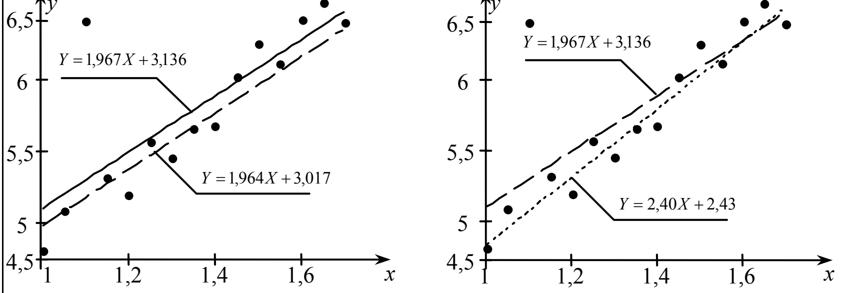
Знайдемо оцінку коефіцієнтів регресії методом Бартлетта – Кенуя.

Розв'язання. Розбиваємо пари спостережень (y_i, x_i) на три частини по п'ять пар і знаходимо відповідні суми: $x1^{\Sigma} = 5{,}50;\ x2^{\Sigma} = 6{,}75;\ x3^{\Sigma} = 8{,}00;\quad y1^{\Sigma} = 26{,}78;\ y2^{\Sigma} = 28{,}34;\ y3^{\Sigma} = 31{,}69$, відповідні середні значення $\bar{x} = 1{,}35$; $\bar{y} = 5{,}787$. За формулою (6.1) отримуємо: $k = \dfrac{31{,}69 - 26{,}78}{8 - 5{,}5} = 1{,}964$; $b = 5{,}787 - 1{,}964 \cdot 1{,}35 = 3{,}136$ або $b = (28{,}34/5) - 1{,}964 \cdot (6{,}75/5) = 3{,}017$.

Отримані результати зображено графічно на рисунку, *а*.

Якщо взяти у розрахунках значення медіан, дістанемо (рисунок, *б*): $Me_{x1} = 1{,}1;\ Me_{x3} = 1{,}6;\ Me_{y1} = 5{,}19;\ Me_{y3} = 6{,}39;\ Me(X) = 1{,}35;\ Me(Y) = 5{,}67$;

$k = \dfrac{6{,}39 - 5{,}19}{1{,}6 - 1{,}1} = 2{,}4$; $b = 5{,}67 - 2{,}4 \cdot 1{,}35 = 2{,}43$.



Графіки регресії

Як видно (рисунок *б*), із застосуванням медіанних оцінок отримано «точнішу» модель, оскільки третє значення у ряді *y*, не було враховане.

Метод Керріча

Для окремого випадку лінійної залежності вигляду $y = bx, (a = 0)$ Керріч запропонував простий метод оцінювання. Для спостережуваної множини $\{x_i, y_i, i = \overline{1,n}\}$ обчислюють різниці d_i та оцінки їх математичного сподівання і СКВ:

$$d_i = \lg y_i - \lg x_i\,;\; \bar{d} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d_i \text{ та } s_{\bar{d}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(d_i - \bar{d})^2}\,.$$

Оскільки будь-яке відношення y_i / x_i є оцінкою k, то будь-яке значення d_i є оцінкою $\lg(k)$.

Якщо $s_{\bar{d}} / \bar{d} << 1$, оцінкою $\lg(k)$ є величина $\bar{d}$, тобто $\lg(k) = \bar{d}$. Отже, оцінка дорівнюватиме $\tilde{b} = 10^{\bar{d}}$.

Приклад 6.2 Задано такі результати спостережень

x	1,00	1,05	1,10	1,15	1,20	1,25	1,30	1,35	1,40	1,45	1,50	1,55	1,60	1,65	1,70
y	1,91	2,30	2,31	2,28	2,54	2,29	2,97	2,79	2,39	2,52	3,01	2,85	3,28	3,05	3,90

Знайдемо оцінку коефіцієнта регресії k методом Керріча.

Розв'язання. Обчислюємо послідовність значень $d_i = \lg y_i - \lg x_i$:

d:	0,28	0,34	0,32	0,30	0,33	0,26	0,36	0,32	0,23	0,24	0,30	0,26	0,31	0,27	0,36

Відповідно $\bar{d} = 0{,}299$, $k = 10^{0{,}299} = 1{,}991$. Отримане значення k близьке до значення оцінки за МНК і становить $k = 1{,}922$.

6.1.2. Стійкі методи оцінювання коефіцієнтів регресії

Розглянемо метод побудови лінійної регресії за умови точно відомих значень вхідних величин і розподілах похибок вимірювань вихідних величин, відмінних від гауссівських.

Якщо значення вхідних величин x_i точно відомі, а випадкова похибка вимірювань y_i, $i = \overline{1,m}$ має розподіл, близький до гауссівського, але відмінний від строго гауссівського, або можуть містити грубі похибки, то для побудови лінійної регресії вигляду $Y = kX + b$ рекомендується використовувати стійкі методи, зокрема метод оцінювання Хубера.

У випадку використання стійких методів необхідно отримати початкові наближення коефіцієнтів регресії b_0, k_0, якими можуть бути МНК-оцінки або оцінки Вальда та Барлетта.

Для отримання стійких оцінок Вальда чи Барлетта множину всіх експериментальних точок розбивають на дві або три групи рівного обсягу (у порядку зростання x_i) і знаходять медіани значень x_i і y_i за першою групою (x^I і y^I) і за другою (або третій) групі (x^{II} і y^{II}). Оцінки коефіцієнтів регресії обчислюють за формулами:

$$k_0 = \frac{(y^{\mathrm{II}} - y^{\mathrm{I}})}{(x^{\mathrm{II}} - x^{\mathrm{I}})}, \quad b_0 = \bar{y} - k \cdot \bar{x} \,,$$

де $\bar{x}, \bar{y}$ – середні значення вхідних і вихідних величин відповідно.

Стійкі оцінки Хубера знаходять із застосуванням ітераційної процедури. На q-му кроці виконують такі операції:

1. Обчислюють відхилення даних від розрахункової лінії:

$$z_{iq} = y_i - (b_{q-1} + k_{q-1} x_i), \quad i = \overline{1, n} \,.$$

2. Оцінюють СКВ через медіану відхилень:

$$s_q = 1{,}4826\,\mathbf{Med}[|z_{iq}|]. \tag{6.2}$$

3. Визначають значення u_{iq} та v_{iq}:

$$u_{iq} = \begin{cases} \dfrac{z_{iq}}{s_q}, \text{ якщо } \left|\dfrac{z_{iq}}{s_q}\right| < 1{,}5; \\ 1, \quad \text{якщо } \left|\dfrac{z_{iq}}{s_q}\right| > 1{,}5; \end{cases} \qquad v_{iq} = \begin{cases} 1, \text{ якщо } \left|\dfrac{z_{iq}}{s_q}\right| < 1{,}5; \\ \dfrac{z_{iq}}{s_q}, \text{ якщо } \left|\dfrac{z_{iq}}{s_q}\right| > 1{,}5. \end{cases} \tag{6.3}$$

4. Обчислюють суми

$$h_{0q} = \sum_{i=1}^{n} u_{iq}; \quad h_{1q} = \sum_{i=1}^{n} x_i u_{iq};$$
$$c_{0q} = \sum_{i=1}^{n} v_{iq}; \quad c_{1q} = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i v_{iq}\right); \quad c_{2q} = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i^2 v_{iq}\right). \tag{6.4}$$

5. Знаходять прирости оцінок

$$\Delta b_q = \frac{\left(h_{1q} c_{1q} - h_{0q} c_{2q}\right)}{\left(c_{1q}^2 - c_{0q} c_{2q}\right)}; \quad \Delta k_q = \frac{\left(h_{0q} c_{1q} - h_{1q} c_{0q}\right)}{\left(c_{1q}^2 - c_{0q} c_{2q}\right)}. \tag{6.5}$$

6. Обчислюють нові значення коефіцієнтів

$$b_q = b_{q-1} + \Delta b_q, \quad k_q = k_{q-1} + \Delta k_q \,. \tag{6.6}$$

Ітераційний процес закінчується після виконання заданої кількості кроків q, або під час виконання правила зупинки:

$$\Delta b_q < ds(b_0) \ \text{ і } \ \Delta k_q < ds(k_0), \qquad (6.7)$$

де $s(b_0), s(k_0)$ – СКВ початкових наближень; $d > 0$ – задається,

$$y_0(x) = b_0 + k_0 x, \quad s(y_0) = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - y_0(x_i)\right)^2}{n-2};$$

$$s(k_0) = \frac{s(y_0)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{N}\left(x_i - \overline{x}\right)^2}}; \quad s(b_0) = s(k_0)\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n}}.$$

Приклад 6.3 У результаті експерименту отримано такі значення вихідної величини y_i, $(i = \overline{1, N}, N = 16)$ та незалежної змінної x_i.

x_i: 1,000 1,063 1,125 1,188 1,250 1,313 1,375 1,438
1,500 1,563 1,625 1,688 1,750 1,813 1,875 1,938

y_i: 4,638 5,275 5,840 5,776 5,411 5,705 6,236 6,779
7,033 7,558 6,963 6,343 7,520 6,816 7,619 7,398

Необхідно визначити коефіцієнти лінійної регресії методом Хубера.

Розв'язання. Нехай початкові наближення $b_0 = 3{,}895$, $k_0 = 1{,}475$.

Проводимо першу ітерацію $q = 1$, $z_{i1} = y_i - (b_0 + k_0 x_i)$;

z_{i1}: -0,732 -0,187 0,286 0,129 -0,327 -0,126 0,313 0,764
0,926 1,358 0,671 -0,041 1,044 0,248 0,958 0,645

$\mathbf{Med}(|z_{i1}|) = 0{,}487$; $s_1 = 1{,}4826 \cdot 0{,}487 = 0{,}721$; (див. формулу (6.2)).

Розрахунки виконано за формулами (6.3).

u_{i1}: -1,015 -0,259 0,397 0,179 -0,455 -0,175 0,4345 1,059
1,284 1 0,930 -0,057 1,447 0,344 1,328 0,894 (6.5)

v_{i1}: 1 1 1 1 1 1 1 1
1 1,883 1 1 1 1 1 1 (6.5)

$h_{01} = 7{,}336; h_{11} = 12{,}973; c_{01} = 16{,}883; c_{11} = 24{,}879; c_{21} = 37{,}999$ (див. (6.4)).

Обчислюємо приріст оцінок (6.5): $\Delta b_1 = -1{,}951$, $\Delta k_1 = 1{,}619$.

Обчислюємо нові значення коефіцієнтів за формулою (6.6):

$$b_1 = 3{,}895 - 1{,}951 = 1{,}944, \quad k_1 = 1{,}475 + 1{,}619 = 3{,}094.$$

Обчислюємо параметри правила зупинки ітерацій за формулою (6.7):

$y_{q=0}(x_i)$: 5,038 5,231 5,425 5,618 5,811 6,005 6,198 6,392
6,585 6,778 6,972 7,165 7,358 7,552 7,752 7,939

Обраховуємо значення порівняльної оцінки вихідних величин до і після знаходження регресії за допомогою залишкової дисперсії $(s(y_{q=0}),\quad s(y_{q=1}))$ та значення СКВ початкових наближень оцінок:

$s(y_{q=0}) = 0{,}508;\quad s(k_0) = 0{,}441;\quad s(b_0) = 0{,}660;\quad s(y_{q=1}) = 0{,}223.$

Оскільки $s(y_0) > s(y)_{q=1}$, то це свідчить, що процедура виконується правильно. Обираємо $d = 0{,}1$, тоді $ds(b_0) = 0{,}06; ds(k_0) = 0{,}04$.

Як видно, для $q = 1$ правило зупинки не виконується $\underline{|\Delta b_1| > 0{,}06}$, $\underline{|\Delta k_1| > 0{,}04}$, тому проводимо ітерацію, яка виконується аналогічно попередній.

Отже, для $q = 2$ маємо: $z_{i2} = y_i - (b_1 + k_1 x_i)$; $\Delta b_2 = 0{,}861$, $\Delta k_2 = -0{,}652$; $b_2 = 2{,}805, k_2 = 2{,}442$; $s(y_{q=2}) = 0{,}215 < s(y_{q=1}) < s(y_{q=0})$.

Правило зупинки не виконується $\underline{|\Delta b_2| > 0{,}06}$, $\underline{|\Delta k_2| > 0{,}04}$.

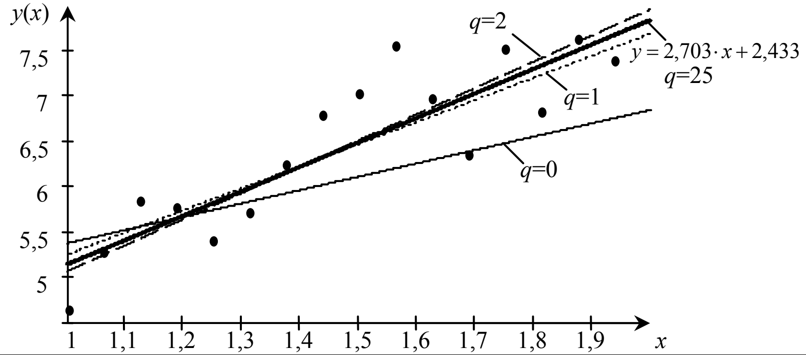
Для $q = 3$ маємо: $z_{i3} = y_i - (b_2 + k_2 x_i)$; $\Delta b_3 = -0{,}642, \Delta k_3 = 0{,}454$; $b_2 = 2{,}164, k_2 = 2{,}896$; $s(y_{q=3}) = 0{,}209 < s(y_{q=2}) < s(y_{q=1}) < s(y_{q=0})$.

Правило зупинки не виконується $\underline{|\Delta b_3| > 0{,}06}$, $\underline{|\Delta k_3| > 0{,}04}$.

Для $q = 25$ маємо: $z_{i25} = y_i - (b_{24} + k_{24} x_i)$; $\Delta b_{25} = 0{,}059$, $\Delta k_{25} = 0{,}031$; $s(y_{q=25}) = 0{,}207; < s(y_{q=3}) < s(y_{q=2}) < s(y_{q=1}) < s(y_{q=0})$.

Правило зупинки виконується $\underline{|\Delta b_{25}| < 0{,}06}$, $\underline{|\Delta k_{25}| < 0{,}04}$.

Маємо оцінки Хубера $b_{25} = 2{,}433$, $k_{12} = 2{,}703$ для шуканої лінійної функції. Отримані ітераційні функції показано на рисунку:



6.1.3. Оцінювання коефіцієнтів регресії методом найменших квадратів

Значення коефіцієнтів регресії k і b знаходять з умови мінімуму суми квадратів відхилень початкових значень y_i і значень отриманих за побудованою функцією $Y(X)$ – $y_{\text{регр.}}$:

$$MIN\left(\sum_{i=1}^{n}\left(y_{\text{регр.}} - y_i\right)^2\right).$$

Відповідно до цієї умови, значення коефіцієнтів регресії знаходять за такими формулами:

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sum_{i=1}^{n} y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n}(x_i y_i)}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2};\; k = \frac{n\sum_{i=1}^{n}(x_i y_i) - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}. \quad (6.10)$$

Після проведеного оцінювання необхідно перевірити статистичну значущість отриманих коефіцієнтів k і b.

Перевірка значущості коефіцієнтів *k* і *b*

Для оцінювання значущості використовується критерій Стьюдента для перевірки двох гіпотез:

H_0 – оцінка статистично незначуща, коефіцієнт дорівнює 0;

H_1 – оцінка статистично значуща, коефіцієнт не дорівнює 0.

Розраховують *t*-статистику:

$$t_k = \frac{|k|}{s_k},\; t_b = \frac{|b|}{s_b}, \quad (6.9)$$

де s_k, s_b – оцінки СКВ коефіцієнтів k і b відповідно:

$$s_k = \frac{s_y}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}},\; s_b = s_k\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n}},\; s_y = \sqrt{\frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - y_{\text{регр.}i}\right)^2}, \quad (6.10)$$

де $\bar{x}$ – середнє арифметичне вибіркових значень ряду $\left\{x_i, i = \overline{1,n}\right\}$.

Якщо $t_k < t_\alpha(v)$, або $t_b < t_\alpha(v)$ приймається гіпотеза H_0, тобто для обсягу вибірки *n* коефіцієнт *k* або *b* є статистично незначущим.

Якщо $t_k \geq t_{\alpha}(v)$ приймається гіпотеза H_1 – відповідний коефіцієнт є статистично значущим. Значення $t_{\alpha}(v)$ знаходиться як $(1-a)\cdot 100$ одностороння довірча границя з таблиці розподілу Стьюдента (табл. Д1.2, дод.1) для степенів вільності $v = n-2$ та рівня значущості $\alpha = 1 - P$.

Перевірка адекватності отриманої моделі

Загалом перевіряється гіпотеза про те, що обрана модель вигляду $Y = g(X)$, побудована за результатами парних вимірювань x_i, y_i, $i = 1 \ldots n$, задовільно узгоджується з цими даними. Як правило, приймають рівень значущості $\alpha = 0{,}05$. Для перевірки зазначеної гіпотези застосовують або критерій Фішера за умови, що похибка значень вибірки y має гауссівський закон розподілу, або критерії аналізу залишків.

Критерій Фішера

Перевірку адекватності моделі регресії проводять із застосуванням критерію Фішера для перевірки двох гіпотез:

H_0 – модель не адекватна;

H_1 – модель адекватна (лінійна).

Суть перевірки полягає в тому, що значення спостережень y_i ($\bar{y}_i$) мають лежати приблизно на прямій $Y(X)$, тобто їх відхилення від прямої регресії не повинні бути надто великими відносно відхилення значень у групі спостережень $y_{i,k}$ від їх середнього $\bar{y}_i$.

Статистику Фішера розраховують за формулою:

$$F = \frac{s_y^2}{s_{\text{гр.}}^2},$$

де s_y – СКВ розсіювання значень y_i в околі регресії (6.10); $s_{\text{гр}}$ – СКВ розсіювання значень у групі спостережень в околі $\bar{y}_i$.

У випадку багаторазових спостережень Y маємо:

$$s_{\text{гр}}^2 = \frac{1}{n(m-1)} \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} \left(y_{i,k} - \bar{y}_i\right)^2 .$$

У випадку одиничних спостережень величини Y значення $s_{\text{гр}}^2$ повинно бути відомим до проведення експерименту.

Отже, якщо виконується нерівність $F < F_\alpha(v_1, v_2)$, то модель адекватна, якщо $F \geq F_\alpha(v_1, v_2)$ – модель не адекватна.

Значення $F_\alpha(v_1, v_2)$ знаходять з таблиці розподілу Фішера (табл. Д1.3, дод.1) для степенів вільності $v_1 = n-2, v_2 = m-1$ та рівня значущості $\alpha = 1-P$.

У випадку однократних вимірювань Y значення $F_\alpha(v_1, \infty)$ знаходять з таблиці розподілу Фішера (табл. 6.1).

Таблиця 6.1

Значення коефіцієнтів Фішера $F_\alpha(v_1, \infty)$

v_1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
α=0,01	21,31	2,09	1,95	1,85	1,78	1,72	1,68	1,64	1,61	1,58	1,55
α=0,05	3,01	2,61	2,38	2,22	2,11	2,02	1,95	1,89	1,84	1,80	1,76

Критерії аналізу залишків

Якщо вибіркові значення y_i отримано шляхом одноразових вимірювань, або мають відмінний від гауссівського закон розподілу ймовірності, для оцінювання адекватності моделі регресії проводять аналіз залишків. Залишки q_i визначають як різницю між початковими значеннями y_i та значеннями отриманими за регресією $y_{\text{регр}}$: $q_i = y_i - y_{\text{регр}}$. Потім перевіряють випадковість залишків із використанням критеріїв знаків та серій, відсутність тренда залишків – критерій висхідних і низхідних серій, а також рівність нулю математичного сподівання залишків – будь-який придатний параметричний (Стьюдента) або непараметричний критерій.

Критерій знаків

Виконують підрахунок кількості додатних залишків q_+; якщо ця кількість перебуває у межах $q_\alpha(n) < q_+ < n - q_\alpha(n)$, то гіпотеза про адекватність моделі приймається.

Значення $q_\alpha(n)$ для $n < 50$ та $\alpha = 0{,}05$ беруть з табл. 6.2.

Таблиця 6.2

Граничні значення $q_\alpha(n)$ для критерію знаків

n	6…8	9…11	12…14	15,16	17…19	20…22	23…24	25…27	28,29
$q_\alpha(n)$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
n	30…32	33;34	35;36	37…39	40;41	42;43	44…46	47;48	49
$q_\alpha(n)$	9	10	11	12	13	14	15	16	17

Значення $q_\alpha(n)$ для $n \geq 50$ та $\alpha = 0{,}05$ визначають за формулою $0{,}5(n-1) - 0{,}98\sqrt{m+1}$.

Критерій серій

Виконують підрахунок кількості серій V у послідовності залишків $q_1 \ldots q_n$, (серією є послідовність залишків одного знака, найменша серія – один залишок), якщо кількість серій перебуває у межах $V_\alpha^-(n) < V < V_\alpha^+(n)$, то гіпотеза про адекватність моделі приймається.

Значення $V_\alpha^-(n), V_\alpha^+(n)$ для $n < 40$ та $\alpha = 0{,}05$ беруть з табл. 6.3

Таблиця 6.3

Граничні значення $V_\alpha^-(n), V_\alpha^+(n)$ для критерію серій

$n/2$	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	18	20
$V_\alpha^-(n)$	2	3	3	4	5	6	7	8	8	9	10	11	12	14
$V_\alpha^+(n)$	9	10	12	13	14	15	16	18	19	20	21	22	25	27

Значення $V_\alpha^-(n), V_\alpha^+(n)$ для $n \geq 40$ та $\alpha = 0{,}05$ визначають за формулою

$$V_\alpha^{\pm}(n) = \frac{1}{n}\left(2q_+(n-q_+) \pm 1{,}96\sqrt{2q_+ \frac{n-q_+}{n-1}\left(2q_+(n-q_+) - n\right)}\right),$$

де q_+ – кількість додатних залишків.

Визначення довірчих інтервалів (розширеної невизначеності) значень *y* розрахованих за регресією

Оцінюється СКВ $s(\cdot)$ випадкової складової похибки (стандартна невизначеність $u(\cdot)$) середнього значення $\bar{y}$ та індивідуального значення y, визначених за отриманою залежністю як функція від аргумента x:

$$s_{\bar{y}}(x) = u_{\bar{y}}(x) = s_y \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(x-\bar{x})^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}}\,, \tag{6.11}$$

$$s_y(x) = u_y(x) = s_y \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(x-\bar{x})^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}}\,. \tag{6.12}$$

Середньоквадратичне відхилення випадкової складової похибки середнього $\bar{y}$ має максимум на краях лінії регресії:

$$s_{\bar{y}\max} \approx \sqrt{1+3w^2}\,\frac{s_y}{\sqrt{m}}\,,$$

де w – кількість піврозмахів; $V = |x_{\max} - \bar{x}| = |x_{\min} - \bar{x}|$ у відхиленні аргумента x від середнього значення; $x_{\max}, x_{\min}$ – максимальне та мінімальне значення аргумента.

За отриманими значеннями s оцінюють довірчий інтервал $\Delta(\cdot)$ випадкової похибки (розширену невизначеність $U(\cdot)$) середнього та індивідуального значень y:

$$\Delta_{\bar{y}}(x) = U_{\bar{y}}(x) = t_{\alpha/2}(v)s_{\bar{y}}(x)\,;\ \Delta_y(x) = U_y(x) = t_{\alpha/2}(v)s_y(x)\,, \tag{6.13}$$

де $t_{\alpha/2}(v)$ – квантиль розподілу Стьюдента, для довірчої імовірності $P = 1-\alpha$ та $v = n-2$ степеней вільності (табл. Д1.2, дод.1).

Отже, як видно з формул (6.11)-(6.13), довірчі області, які із заданою імовірністю P містять середні або індивідуальні значення y, залежать від відстані значення x (за яким визначають y) від середнього $\bar{x}$ (рис. 6.2).

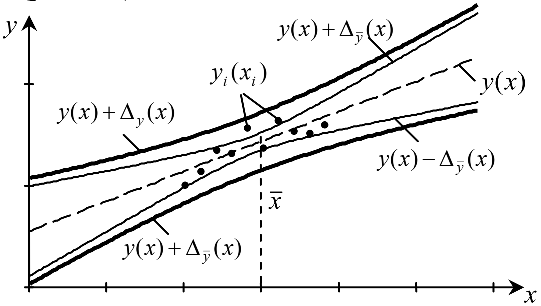


Рис. 6.2. Графік довірчих інтервалів регресії

Приклад 6.4. Задано такі результати сумісних вимірювань:

x	1,00	1,10	1,20	1,30	1,40	1,50	1,60	1,70	1,80	1,90
y	11,60	11,93	10,76	12,87	12,20	12,63	13,52	14,08	13,21	13,50

Необхідно визначити довірчі границі розрахованих за лінійною регресією значень y.

Розв'язання. Приймемо гіпотезу про лінійний характер зв'язку між x і y. Оцінимо значення коефіцієнтів k і b згідно з МНК на підставі формул (6.8):

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 14{,}5; \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 21{,}85; \sum_{i=1}^{n} y_i = 126{,}299; \sum_{i=1}^{n}\left(x_i y_i\right) = 185{,}382;$$

$$b = \frac{21{,}85 \cdot 126{,}299 - 14{,}5 \cdot 185{,}382}{10 \cdot 21{,}85 - 210{,}25} = 8{,}678\,;\; k = \frac{10 \cdot 185{,}382 - 14{,}5 \cdot 126{,}299}{10 \cdot 21{,}85 - 210{,}25} = 2{,}726\,.$$

Перевіримо значущість отриманих коефіцієнтів (6.9)-(6.10):

$$\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - y_{\text{регр.}i}\right)^2 = 3{,}127\,;\; \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = 0{,}825\,;\; s_y = \sqrt{\frac{1}{8} 3{,}127} = 0{,}625\,;$$

$$s_k = \frac{0{,}625}{\sqrt{0{,}825}} = 0{,}688\,;\; t_k = \frac{2{,}726}{0{,}688} = 3{,}959\,;$$

$$s_b = 0{,}688\sqrt{\frac{21{,}85}{10}} = 1{,}018\,;\; t_b = \frac{8{,}678}{1{,}018} = 8{,}529\,.$$

Граничне значення $t_\alpha(v) = t_{0{,}05}(8) = 1{,}860$. Оскільки $t_k = 3{,}959 > 1{,}860$, $t_b = 8{,}529 > 1{,}860$ коефіцієнти k і b значущі.

Отже, отримане рівняння моделі $Y(X) = 2{,}726X + 8{,}678$.

Перевіримо адекватність моделі початковим даним за різними критеріями.

Критерій знаків:

Отримані значення залишків:

x	1,00	1,10	1,20	1,30	1,40	1,50	1,60	1,70	1,80	1,90
q	0,20	0,25	-1,19	0,64	-0,30	-0,13	0,49	0,77	-0,38	-0,36

Кількість залишків $q_i \geq 0$, $q_+ = 5$. Граничні значення (табл. 6.2) $q_\alpha(n) = q_{0{,}05}(10) = 1$, $n - q_\alpha(n) = 10 - 1 = 9$. Оскільки $1 < q_+ = 5 < 9$, зробимо висновок, що модель адекватна.

Критерій серій:

Визначимо серії залишків

q $\boxed{0{,}20\ \ 0{,}25}$ $\boxed{-1{,}19}$ $\boxed{0{,}64}$ $\boxed{-0{,}30\ \ -0{,}13}$ $\boxed{0{,}49\ \ 0{,}77}$ $\boxed{-0{,}38\ \ -0{,}36}$

Отже, кількість серій $V = 6$. Граничні значення (табл. 6.3) $V_\alpha^-(10) = 2, V_\alpha^+(10) = 9$. Оскільки $2 < V = 5 < 9$, зробимо висновок, що модель адекватна.

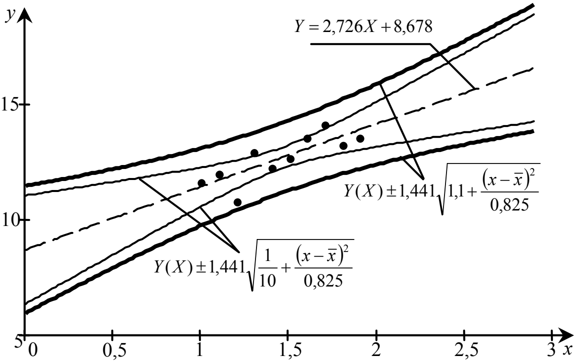
Визначимо довірчі границі (розширену невизначеність) значень y

розрахованих за регресією. Середньоквадратичне відхилення випадкової складової похибки (стандартна невизначеність) відповідно до формул (6.11), (6.12):

$$s_{\bar{y}}(x) = 0{,}625\sqrt{\frac{1}{10} + \frac{(x - \bar{x})^2}{0{,}825}}\,,\ s_y(x) = 0{,}625\sqrt{1 + \frac{1}{10} + \frac{(x - \bar{x})^2}{0{,}825}}\ .$$

Відповідно довірчі границі (розширена невизначеність) для $P = 0{,}95$ (див. формулу (6.13)): $t_{\alpha/2}(\nu) = t_{0{,}025}(8) = 2{,}306$ відповідно

$$\Delta_{\bar{y}}(x) = 1{,}441\sqrt{\frac{1}{10} + \frac{(x - \bar{x})^2}{0{,}825}}\,,\ \Delta_y(x) = 1{,}441\sqrt{1 + \frac{1}{10} + \frac{(x - \bar{x})^2}{0{,}825}}\ .$$



Визначення довірчих інтервалів (розширеної невизначеності) значень *x*, розрахованих за регресією

Для реалізації певних метрологічних задач, наприклад в аналітичних методах, часто застосовують градуювання (побудову лінійної регресійної залежності) шляхом вимірювання певного показника y_i для різних значень оцінюваного показника x_i, наприклад залежність поглинання, проходження і віддзеркалення інфрачервоного випромінювання від вологості матеріалу.

Отримана ґрадуювальна залежність використовується потім для обчислення показника $x_{\text{регр}}$ для об'єкта, який дає відгук

$$x_{\text{регр}} = \frac{y_{\text{регр.}} - b}{k}\,.$$

Середньоквадратичне відхилення випадкової похибки значення $x_{\text{регр.}}$, безпосередньо пов'язане із СКВ s_y:

$$s(x_{\text{регр}})=\frac{s_y}{k}\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{(x_{\text{регр.}}-\bar{x})^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}\right)^2}}$$

Відповідно значення довірчого інтервалу похибки (рис. 6.3) (розширеної невизначеності) становить:

$$\Delta(x_{\text{регр}})=U(x_{\text{регр}})=t_{\alpha/2}(\nu)s(x_{\text{регр}}) \qquad (6.14)$$

де $t_{\alpha/2}(\nu)$ – квантиль розподілу Стьюдента, для довірчої імовірності $P=1-\alpha$ і $\nu=n-2$ степенів вільності (табл. Д1.2, дод.1).

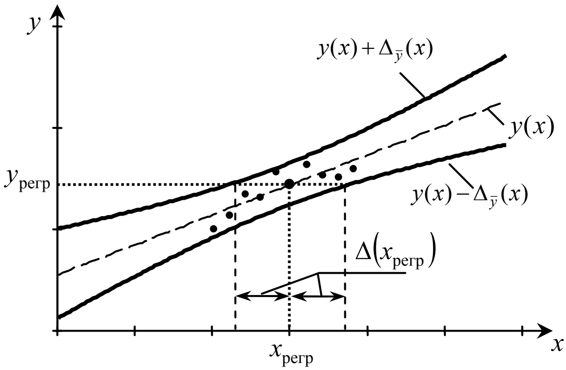


Рис. 6.3. Графічне зображення довірчих інтервалів значень *x*, визначених за регресією

Значення x та y можуть бути схильні до впливу невідомого постійного зсуву тобто наявності постійної систематичної похибки θ_x та θ_y. Відповідно СКВ значення $x_{\text{регр}}$ визначають за рівністю

$$s_{\Sigma}(x_{\text{регр}})=\sqrt{\left(\frac{\theta_x}{\sqrt{3}}\right)^2+\left(\frac{\theta_y}{k\sqrt{3}}\right)^2+s^2(x_{\text{регр}})}\,.$$

Підставивши $s_{\Sigma}(x_{\text{регр}})$ у вираз (6.18) замість $s_{\Sigma}(x_{\text{регр}})$, отримаємо шукані значення довірчих інтервалів похибки $\Delta(x_{\text{регр}})$.

6.1.4. Перевірка початкових даних на наявність надмірної похибки

На точність відтворення регресійної моделі істотно впливають наявні у початкових даних $\{y_i; i = \overline{1,n}\}$ спостереження з надмірною похибкою. Зрозуміло, що таке спостереження може відчутно спотворити шукану модель та призвести до значних похибок у подальшому визначенні y за отриманою залежністю. Перевірку на наявність надмірної похибки у початкових даних проводять після побудови моделі за залишками q_i.

Критерій Ектона

Критерій Ектона застосовують якщо загальна кількість спостережень $N \geq 30$ для виділення лише одного спостереження з надмірною похибкою в простій лінійній моделі вигляду $y = b + kx$. Якщо для кожного значення незалежної змінної x_i ($i = \overline{1,n}$) отримано m значень залежної змінної y_i, то $N = nm$.

Статистикою критерію є величина

$$V = \frac{|q_l - \overline{q}|}{S_l}, \tag{6.15}$$

де q_l – залишок від значення y_l, яке ймовірно містить надмірну похибку; $\overline{q} = \frac{1}{n-1}\sum_{\substack{i=1 \\ i\neq l}}^{n} q_i$ – середнє за всіма іншими залишками; S_l – СКВ залишків після відкидання підозрілого (y_l-го) спостереження.

Якщо для кожного значення змінної x_i отримано m_i значень залежної змінної y_i, оцінка s_k^2 у такому випадку має вигляд

$$s_l^2 = \frac{\sum_{\substack{i=1 \\ i\neq l}}^{n}\sum_{j=1}^{m_i}\left(y_{ij} - \overline{y}_i\right)^2 + \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq l}}^{n} m_i\left(\overline{y}_i - y_{\text{регр}.i}\right)^2}{\sum_{\substack{i=1 \\ i\neq l}}^{n} m_i - 2} \quad \text{для } 1 < m_i < m,$$

$$s_l^2 = \frac{\sum\limits_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m}\left(y_{ij}-\overline{y}_i\right)^2 + m\sum\limits_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n}\left(\overline{y}_i - y_{\text{регр}.i}\right)^2}{nm-2}, \text{ якщо } m_i = m, \quad (6.16)$$

$$s_l^2 = \frac{\sum\limits_{\substack{i=1\\ i\neq l}}^{n}\left(\overline{y}_i - y_{\text{регр}.i}\right)^2}{n-2}, \text{ якщо } m_i = 1.$$

Залишок q_l з імовірністю P визнається таким, що має надмірну похибку, якщо $V > V_P$, де V_P – граничне значення, наведено в табл. 6.4.

Таблиця 6.4

Граничні значення V_P критерію Ектона

n	**P**		**n**	**P**		**n**	**P**	
	0,95	**0,99**		**0,95**	**0,99**		**0,95**	**0,99**
3	12,3	31,4	**7**	3,98	5,88	**15**	3,34	4,22
4	7,17	16,27	**8**	3,77	5,33	**20**	3,28	4,02
5	5,05	9	**9**	3,63	4,98	**25**	3,26	3,94
6	4,34	6,85	**10**	3,54	4,75			

Приклад 6.5 Після вимірювань отримано $n = 16$ груп по $m = 3$ результатів у кожній ($N = 48$). Значення аргумента $x_i, i = \overline{1,n}$, значення y_i та відповідні середні значення $y_{cp.i}$:

x_i	1,0	1,3	1,5	1,8	2,0	2,3	2,5	2,8	3,0	3,3	3,5	3,8	4,0	4,3	4,5	4,8
y_{1i}	5,2	5,4	4,3	8,8	8,1	9,5	14,1	11,5	9,8	11,3	10,9	12,7	16,6	17,1	17,0	16,6
y_{2i}	4,9	5,0	4,4	8,6	8,9	8,8	15,3	11,0	9,9	10,7	10,1	14,5	14,7	16,3	14,1	16,5
y_{3i}	5,1	4,8	5,2	9,0	7,9	9,1	14,7	9,4	9,4	12,4	13,1	12,6	14,2	14,8	17,0	15,0
y_{cpi}	5,1	5,1	4,6	8,8	8,3	9,1	14,7	10,6	9,7	11,5	11,4	13,3	15,2	16,1	16,0	16,0

Необхідно перевірити вхідні дані на наявність надмірної похибки за критерієм Ектона.

Розв'язання. Розраховані значення коефіцієнтів k і b згідно з МНК на підставі формули (6.8) становлять: $k = 3{,}1; b = 2{,}0$.

Розрахуємо значення залишків:

y_i	5,1	5,1	4,6	8,8	8,3	9,1	**14,7**	10,6	9,7	11,5	11,4	13,3	15,2	16,1	16,0	16,0
y_{pi}	5,1	6,0	6,7	7,6	8,2	9,1	**9,8**	10,7	11,3	12,2	12,8	13,8	14,4	15,3	16,0	16,9
q_i	0	-0,9	-2,1	1,2	0,1	0	**4,9**	-0,1	-1,6	-0,7	-1,4	-0,5	0,8	0,8	0	-0,9

Підозрілим є сьоме значення y_7=14,7, оскільки відповідне значення залишку q_7=4,9, є найбільшим. Згідно з виразом (6.16) розрахуємо значення s_k без урахування значень y_{7j} відповідних q_7 , тобто $s_7^2 = 1{,}581; \sqrt{s_7} = 1{,}257$. Середнє значення розмахів без урахування q_7 становить $\overline{q} = -0{,}353$.

Відповідно до рівняння (6.19) статистика критерію Ектона: $V = \frac{|q_7 - \overline{q}|}{s_7} = \frac{|4{,}9 - (-0{,}353)|}{1{,}257} = 4{,}178$. Із табл. 6.4 маємо $V_{16;0,95} = 3{,}34$.

Оскільки $V = 4{,}178 > V_{16;0,95} = 3{,}34$, то значення y_{7j} містять надмірну похибку.

Критерій Тітьєна–Мура–Бекмана

Критерій виявлення одного аномального значення в лінійній моделі регресії вигляду $y = b + kx$ ґрунтується на статистиці

$$R = \max\left|\frac{q_i}{s_i}\right|, \quad \text{де} \quad s_i^2 = \frac{\sum_{j=1}^{n} q_j^2}{n-2}\left[1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_i - \overline{x})^2}{\sum_{j=1}^{n}(x_j - \overline{x})^2}\right]. \qquad (6.17)$$

Якщо $R > R(P, n)$, то відповідне значення y_i визнається з імовірністю P таким, що містить надмірну похибку. Граничні значення $R(P, n)$ наведеніо в табл. 6.12,

Таблиця 6.12

Граничні значення $R(P, n)$ для критерію Тітьєна–Мура–Бекмана

n	**Довірча ймовірність *P***			*n*	**Довірча ймовірність *P***		
	0,90	**0,95**	**0,99**		**0,90**	**0,95**	**0,99**
4	1,41	1,41	1,41	**16**	2,50	2,64	2,92
5	1,69	1,71	1,73	**18**	2,56	2,71	2,99
6	1,88	1,92	1,97	**20**	2,60	2,76	3,06
7	2,01	2,07	2,16	**24**	2,69	2,85	3,17
8	2,10	2,19	2,31	**30**	2,79	2,97	3,28
9	2,18	2,28	2,43	**36**	2,86	3,03	3,35
10	2,24	2,35	2,53	**48**	2,97	3,15	3,41
11	2,30	2,43	2,64	**60**	3,04	3,21	3,50
12	2,35	2,48	2,70	**100**	3,22	3,40	3,75
14	2,43	2,57	2,80				

Приклад 6.6 Для даних прикладу 6.5 перевіримо ряд середніх значень $y_{\text{сер}.i}$ на наявність надмірної похибки.

Розв'язання. Розрахуємо значення статистики R за виразом (6.17):

$$\frac{\sum_{j=1}^{n} q_j^2}{n-2} = 2{,}717;\ \bar{x} = 2{,}9;\ \sum_{j=1}^{n}(x_j - \bar{x})^2 = 21{,}360;$$

$$s_1^2 = 2{,}717\left[1 - \frac{1}{16} - \frac{(1{,}0-2{,}9)^2}{21{,}360}\right] = 3{,}346;\ R_1 = \left|\frac{q_1}{s_1}\right| = \left|\frac{0}{1{,}829}\right| = 0;$$

$$s_2^2 = 2{,}717\left[1 - \frac{1}{16} - \frac{(1{,}3-2{,}9)^2}{21{,}360}\right] = 3{,}213;\ R_1 = \left|\frac{q_2}{s_2}\right| = \left|\frac{-0{,}9}{1{,}792}\right| = 0{,}502;...$$

i	1	2	3	4	5	6	7	8
s_i	1,829	1,792	1,771	1,744	1,729	1,713	1,705	1,699
R_i	0	0,502	1,186	0,688	0,058	0	**2,874**	0,059
i	9	10	11	12	13	14	15	16
s_i	1,699	1,705	1,713	1,729	1,744	1,771	1,792	1,829
R_i	0,941	0,411	0,818	0,289	0,459	0,452	0	0,492

Максимальне значення R_7 = 2,874. За табл. 6.12 $R(0{,}95{,}16) = 2{,}64$. Оскільки $R_7 > R(0{,}95{,}16) = 2{,}64$, то значення y_{7j} мають надмірну похибку.

Критерій Прескотта-Лунда

Статистика критерію має вигляд:

$$R^* = \max(R_i^*),\ R_i^* = \sqrt{n}\,\frac{q_i}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n} q_j^2}} \tag{6.18}$$

Гіпотеза про наявність аномального значення в лінійній регресійній моделі з $l = 2$ параметрами відхиляється, якщо $R^* > R_P^*$, де R_P^* – граничне значення, що визначається як

$$R_P^* = \sqrt{\frac{(n-k)F(P, v_1, v_2)}{n-k-1+F(P, v_1, v_2)}},$$

де $F(P, v_1, v_2)$ – P-квантиль F-розподілу Фішера з $v_1 = 1$ і $v_2 = n - l - 1$ степенями вільності.

Таблицю граничних значень R_P^* наведено в табл. 6.5.

Таблиця 6.5

Граничні значення R_P^* для критерію в регресії Прескотта–Лунда

N	l							
	1	2	3	4	5	6	8	10
Довірча ймовірність $P = 0{,}90$								
5	1,87							
6	2,00	1,89						
7	2,10	2,02	1,90					
8	2,18	2,12	2,03	1,91				
9	2,24	2,20	2,13	2,05	1,92			
10	2,30	2,26	2,21	2,15	2,06	1,92		
12	2,39	2,37	2,33	2,29	2,24	2,17	1,93	
14	2,47	2,45	2,42	2,39	2,36	2,31	2,19	1,94
16	2,53	2,51	2,50	2,47	2,45	2,42	2,34	2,23
18	2,58	2,57	2,56	2,54	2,52	2,50	2,44	2,35
20	2,63	2,62	2,61	2,59	2,58	2,56	2,52	2,46
25	2,72	2,72	2,71	2,70	2,69	2,68	2,66	2,63
30	2,80	2,79	2,77	2,78	2,77	2,77	2,75	2,73
35	2,86	2,85	2,85	2,85	2,84	2,84	2,82	2,81
40	2,91	2,91	2,90	2,90	2,90	2,89	2,88	2,87
45	2,95	2,95	2,95	2,95	2,94	2,94	2,93	2,93
50	2,99	2,99	2,99	2,99	2,98	2,98	2,98	2,97
60	3,06	3,06	3,05	3,05	3,05	3,05	3,05	3,04
70	3,11	3,11	3,11	3,11	3,11	3,11	3,10	3,10
80	3,16	3,16	3,15	3,15	3,15	3,15	3,15	3,15
90	3,20	3,20	3,19	3,19	3,19	3,19	3,19	3,19
100	3,23	3,23	3,23	3,23	3,23	3,23	3,23	3,22
Довірча ймовірність $P = 0{,}95$								
5	1,92							
6	2,07	1,93						
7	2,19	2,08	1,94					
8	2,28	2,20	2,20	1,94				
9	2,35	2,29	2,21	2,10	1,95			
10	2,42	2,37	2,31	2,22	2,11	1,95		
12	2,52	2,49	2,45	2,39	2,33	2,24	1,96	
14	2,61	2,58	2,55	2,51	2,47	2,41	2,25	1,96
16	2,68	2,66	2,63	2,60	2,57	2,53	2,43	2,26
18	2,73	2,72	2,70	2,68	2,65	2,62	2,55	2,44

Закінчення табл. 6.5

20	2,78	2,77	2,76	2,74	2,72	2,70	2,64	2,57
25	2,89	2,88	2,87	2,86	2,84	2,83	2,80	2,76
30	2,96	2,96	2,95	2,94	2,93	2,93	2,90	2,88
35	3,03	3,02	3,02	3,01	3,00	3,00	2,98	2,97
40	3,08	3,08	3,07	3,07	3,06	3,06	3,05	3,03
45	3,13	3,12	3,12	3,12	3,11	3,11	3,10	3,09
50	3,17	3,16	3,16	3,16	3,15	3,15	3,14	3,14
60	3,23	3,23	3,23	3,23	3,22	3,22	3,22	3,21
70	3,29	3,29	3,28	3,28	3,28	3,28	3,27	3,27
80	3,33	3,33	3,33	3,33	3,33	3,33	3,32	3,32
90	3,37	3,37	3,37	3,36	3,37	3,38	3,36	3,36
100	3,41	3,41	3,40	3,40	3,40	3,40	3,40	3,40

Приклад 6.7 Для даних прикладу 6.5 перевіримо ряд середніх значень $y_{сер.i}$ на наявність надмірної похибки.

Розв'язання. Розрахуємо значення статистики R^* відповідео до виразу (6.18): $\sum_{j=1}^{16} q_j^2 = 38{,}08; \sqrt{38{,}08} = 6{,}168.$

i	1	2	3	4	5	6	7	8
q_i	0	-0,9	-2,1	1,2	0,1	0	**4,9**	-0,1
R^*_i	0	0,584	1,362	0,778	0,065	0	**3,178**	0,065
i	9	10	11	12	13	14	15	16
q_i	-1,6	-0,7	-1,4	-0,5	0,8	0,8	0	-0,9
R^*_i	1,038	0,454	0,908	0,324	0,519	0,519	0	0,584

Згідно з табл. 6.5 для $l = 2; n = 16; P = 0{,}95$ отримаємо $R_P^* = 2{,}66$. Оскільки $R_7^* = 3{,}178 > R_P^* = 2{,}66$, то y_{7j} містять надмірну похибку.

6.1.5. Визначення обсягу вимірювань для отримання заданої точності оцінювання коефіцієнтів регресії

Завдання формулюється таким чином: для заданого заздалегідь СКВ σ_y випадкової похибки окремого спостереження y_i необхідно так спланувати спостереження, щоби похибка визначення коефіцієнта k регресії МНК за заданої довірчої імовірності P не перевищувала Δk (при цьому бажано, щоб кількість спостережень аргумента x_i – n і інтервал його зміни $l(x)$ були мінімальними). Визначення обсягу вімірювань ілюструє рис.6.4.

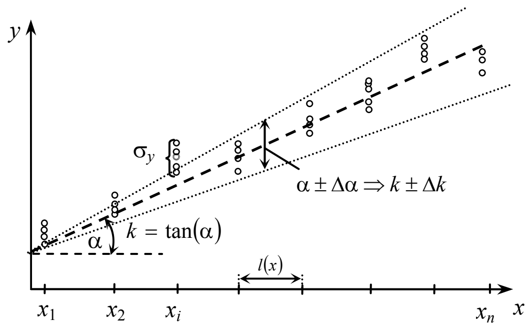


Рис. 6.4. Графічне пояснення визначення обсягу вимірювань

У випадку найбільш несприятливого розміщення спостережень (половина в околі одного кінця інтервалу, половина – іншого) мінімальне допустиме співвідношення між кількістю спостережень n і довжиною інтервалу $l(x)$ для досягнення заданої точності визначення коефіцієнта регресії має вигляд (табл. 6.6):

$$l(x) \geq \frac{\sigma_y}{\Delta k} \kappa(P;n), \qquad (6.19)$$

де $\kappa(P;n) = \begin{cases} 2t_{1-P}(n)\sqrt{\dfrac{n-1}{n(n-2)}}, & \text{якщо } n = 2m; \\ 2t_{1-P}(n)\sqrt{\dfrac{n-1}{(n+1)(n-2)}}, & \text{якщо } n = 2m-1. \end{cases}$

Таблиця 6.6

Значення коефіцієнта $\kappa(P;n)$

n	**Довірча ймовірність P**			**n**	**Довірча ймовірність P**			**n**	**Довірча ймовірність P**		
	0,90	**0,95**	**0,99**		**0,90**	**0,95**	**0,99**		**0,90**	**0,95**	**0,99**
3	10,93	22,01	55,11	**12**	1,10	1,35	1,68	**21**	0,77	0,94	1,14
4	3,58	18,49	48,58	**13**	1,04	1,28	1,58	**22**	0,75	0,91	1,10
5	2,48	3,35	4,78	**14**	0,99	1,21	1,49	**23**	0,73	0,89	1,08
6	1,94	2,54	3,42	**15**	0,95	1,16	1,42	**24**	0,72	0,86	1,05
7	1,69	2,15	2,82	**16**	0,91	1,11	1,36	**25**	0,70	0,85	1,03
8	1,48	1,87	2,40	**17**	0,88	1,07	1,30	**26**	0,68	0,83	1,00
9	1,36	1,70	2,15	**18**	0,85	1,03	1,25	**30**	0,63	0,76	0,92
10	1,25	1,55	1,94	**19**	0,82	1,00	1,21	**60**	0,48	0,52	0,62
11	1,17	1,44	1,80	**20**	0,79	0,97	1,17				

Отже, за заданими значеннями σ_y і Δk знаходять співвідношення між $l(x)$ і Δk та $l(x)$ і n. Відповідно задавши одне співвідношення, отримують інше.

Приклад 6.8

Нехай під час градуювання вимірювача опору (на базі міліамперметра, фактично вимірюється струм за стабільної напруги живлення) СКВ випадкової похибки окремого спостереження y_i становить $\sigma_y = 0{,}5$ мА . Необхідно визначити:

а) кількість точок вимірювання струму x_i, яка забезпечить похибку коефіцієнта регресії $\Delta k = 0{,}1$ для інтервалу вимірювання $l(x) = 10$ Ом за довірчої імовірності $P = 0{,}95$;

б) найменшу довжину інтервалу вимірювання $l(x)$, яка забезпечить точність оцінки $\Delta k = 0{,}05$ для $n = 10$ кількості точок вимірювання струму за довірчої імовірності $P = 0{,}9$.

Розв'язання.

Визначимо із формули (6.19) значення $\kappa(P;n)$: $l(x) = 10$, $\Delta k = 0{,}1$, $\sigma_y = 0{,}5$, $P = 0{,}95 \Rightarrow \kappa(0{,}95;n) = 10 \cdot 0{,}1 / 0{,}5 = 2$. Із табл. 6.6 маємо n=8.

Для заданих значень $n = 10, P = 0{,}9$ із табл. 6.6 знаходимо $\kappa(0{,}9;10) = 1{,}25$. Відповідно для $\Delta k = 0{,}05$, $\sigma_y = 0{,}5$ маємо $l(x) = 1{,}25 \cdot 0{,}5 / 0{,}1 = 6{,}25$ мА.

6.2. Нелінійна регресія

Степенева функція (геометрична регресія)

Розглянемо степеневу функцію, яка в найбільш загальному вигляді задається виразом

$$F(x,k,m) = kx^m . \qquad (6.20)$$

За умови, що $F(x,k,m) > 0, x > 0$, прологарифмуємо (6.25):

$$\ln F(x,k,m) = \ln k + m \ln x . \qquad (6.21)$$

Як відомо, якщо функція $F(\cdot)$ є апроксимувальною для деякої функції $f(\cdot)$, то функція $\ln F(\cdot)$ буде апроксимувальною для функції $\ln f(\cdot)$. Якщо ввести змінну $x' = \ln x$, тоді, як випливає з рівняння з (6.21) $\ln F(\cdot)$ буде функцією від $x' : \Phi(x')$.

Позначимо:

$$m = A, \ln k = B, \tag{6.22}$$

тоді вираз (6.21) набуває вигляд:

$$\Phi(x', A, B) = Ax' + B. \tag{6.23}$$

Отже, задача побудови регресії зводиться до знаходження апроксимувальної функції у вигляді лінійної. У результаті для знаходження регресії у вигляді степеневої функції використовують таким алгоритм.

1. Логарифмують вихідні значення x і y.

2. Згідно з рівнянням (6.8) визначають параметри A і B як відповідно, k і b, апрксимувальної функції вигляду (6.23).

3. Знаходять відповіднос до виразів (6.22) значення параметрів k і m: $k = e^B, m = A$.

4. Оцінюють границі похибки лінеаризованої функції $\Phi(x, A, B)$: $\Delta_{\text{лін.}\bar{y}}(x)$ і $\Delta_{\text{лін.}y}(x)$ за формулами (6.13).

5. Оцінюють границі похибки шуканої функції $y(x)$: $y(x) \pm \Delta_{\bar{y}}(x) = e^{\left(\Phi(\ln(x), A, B) \pm \Delta_{\text{лін.}\bar{y}}(\ln(x))\right)}$, $y(x) \pm \Delta_y(x) = e^{\left(\Phi(\ln(x), A, B) \pm \Delta_{\text{лін.}y}(\ln(x))\right)}$.

Приклад 6.9 Для вихідних даних:

x	2,00	2,10	2,20	2,30	2,40	2,50	2,60	2,70	2,80	2,90
y	3,91	5,81	6,24	6,15	8,52	9,00	9,29	11,71	13,02	15,13
$x'=\ln(x)$	0,69	0,79	0,88	0,96	1,03	1,10	1,16	1,22	1,28	1,34
$y'=\ln(y)$	1,36	1,76	1,83	1,82	2,14	2,20	2,23	2,46	2,57	2,72

необхідно оцінити нелінійну регресію даних у вигляді степеневої функції.

Розв'язання. Значення коефіцієнтів: A = 1,904, B = 0,119, k = 1,127, m = 1,904, s_y=0,086.

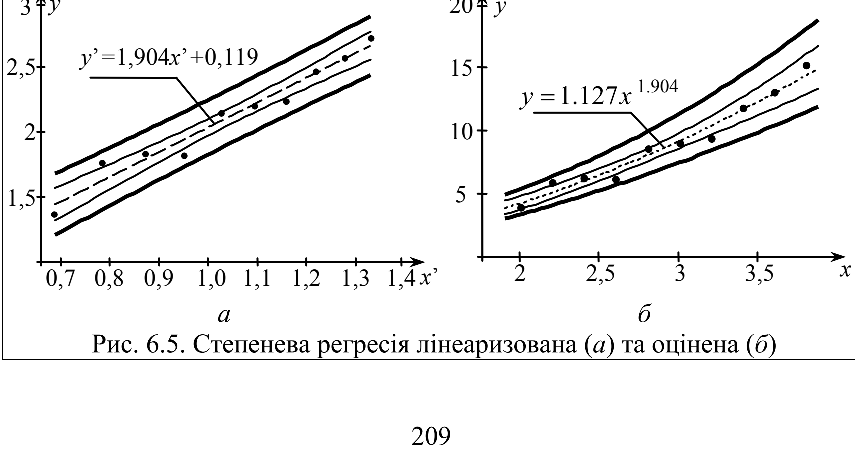


Рис. 6.5. Степенева регресія лінеаризована (*а*) та оцінена (*б*)

Показникова функція

Показникова функція задається виразом

$$F(x,k,m) = ke^{mx}, k > 0\,. \tag{6.24}$$

Прологарифмуємо рівняння (6.24), за умови, що $F(x,k,m) > 0, x > 0$, отримаємо:

$$\ln F(x,k,m) = \ln k + mx\,. \tag{6.25}$$

Позначимо:

$$x' = x\,,\ m = A,\ \ln k = B\,, \tag{6.26}$$

тоді вираз (6.25) набуває вигляду (6.23) і задача побудови регресії зводиться до попередньої.

Для знаходження регресії у вигляді показникової використовують таким алгоритм.

1. Логарифмують вихідні значення тільки y.

2. Згідно з рівнянням (6.8) визначають параметри A і B як, відповідно, k і b апроксимувальної функції вигляду (6.24).

3. Знаходять згідно з виразами (6.26) значення параметрів k і m: $k = e^B$, $m = A$.

4. Оцінюють границі похибки лінеаризованої функції $\Phi(x,A,B)$: $\Delta_{\text{лін.}\bar{y}}(x)$ і $\Delta_{\text{лін.}y}(x)$ згідно з виразами (6.13).

5. Оцінюють границі похибки шуканої функції $y(x)$: $y(x) \pm \Delta_{\bar{y}}(x) = e^{\left(\Phi(x,A,B) \pm \Delta_{\text{лін.}\bar{y}}(x)\right)}$, $y(x) \pm \Delta_y(x) = e^{\left(\Phi(x,A,B) \pm \Delta_{\text{лін.}y}(x)\right)}$.

Приклад 6.10. Є вихідні дані:

x	2,00	2,10	2,20	2,30	2,40	2,50	2,60	2,70	2,80	2,90
y	1,01	1,72	2,88	2,85	4,31	3,60	5,36	5,35	5,85	7,04

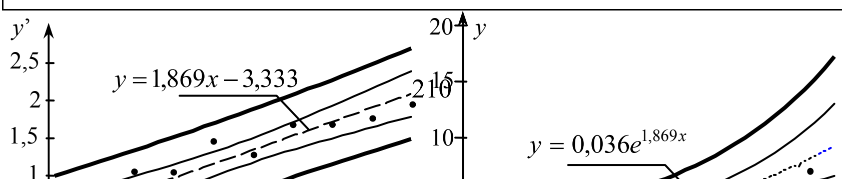
Необхідно оцінити параметри нелінійної регресії у вигляді показникової функції.

Розв'язання. Виконаємо перетворення даних:

$x'=x$	2,00	2,10	2,20	2,30	2,40	2,50	2,60	2,70	2,80	2,90
$y'=\ln(y)$	0,01	0,54	1,06	1,05	1,46	1,28	1,68	1,68	1,77	1,95

Отримані за формулами (6.23, 6.26) значення коефіцієнтів: A = 1,869, B = -3,333, k = 0,036, m = 1,869, s_y = 0,224.

Графічне зображення отриманих результатів показано на рис. 6.6.



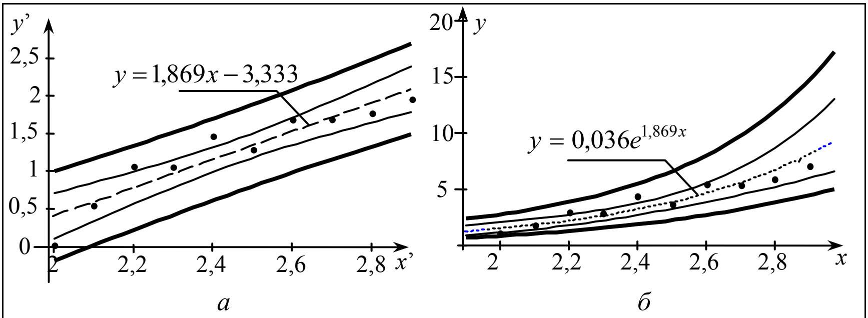


Рис. 6.6. Показникова регресія лінеаризована (*а*) та оцінена (*б*)

Дробово-лінійна функція

Дробово-лінійна функція задається виразом вигляду:

$$F(x,k,m) = \frac{1}{kx+m}\,. \tag{6.27}$$

Перепишемо рівняння (6.27) таким чином:

$$\frac{1}{F(x,k,m)} = kx+m\,. \tag{6.28}$$

Позначимо:

$$x' = x\ ,\ m = B,\ k = A\,, \tag{6.29}$$

тоді формула (6.28) набуває вигляду (6.23) і задача побудови регресії зводиться до попередньої.

Для знаходження регресії у вигляді дробово-лінійної використовують такий алгоритм.

1. Вихідні значення y замінюють на нові після перетворення вигляду $y' = 1/y$.

2. Згідно з рівнянням (6.8) визначають параметри A і B, як *k* і *b* відповідно, наближаючої функції вигляду (6.28).

3. Знаходять відповідно до виразу (6.29) значення параметрів k і m: $k = A,\ m = B$.

4. Оцінюють границі похибки лінеаризованої функції $\Phi(x,A,B)$: $\Delta_{\text{лін.}\bar{y}}(x)$ і $\Delta_{\text{лін.}y}(x)$ відповідно до рівняння (6.13).

5. Оцінюють границі похибки шуканої функції $y(x)$: $y(x) \pm \Delta_{\bar{y}}(x) = \left(\Phi(x,A,B) \pm \Delta_{\text{лін}\bar{y}}(x)\right)^{-1}$; $y(x) \pm \Delta_{y}(x) = \left(\Phi(x,A,B) \pm \Delta_{\text{лін}y}(x)\right)^{-1}$.

Приклад 6.11. Вихідні дані задано таблицею:

x	2,00	2,20	2,40	2,60	2,80	3,00	3,20	3,40	3,60	3,80
y	0,69	0,60	0,61	0,58	0,49	0,53	0,48	0,45	0,48	0,42
$x'=x$	2,00	2,20	2,40	2,60	2,80	3,00	3,20	3,40	3,60	3,80
$y'=1/y$	1,45	1,66	1,65	1,73	2,05	1,87	2,09	2,24	2,08	2,37

Необхідно оцінити регресію у вигляді дробово-лінійної функції.

Розв'язання. Отримано за формулами (6.23, 6.29) значення коефіцієнтів: A=0,459, B=0,590, k=0,459, m=0,590, s_y=0,103. Графічне зображення отриманих результатів наведено на рис. 6.7.

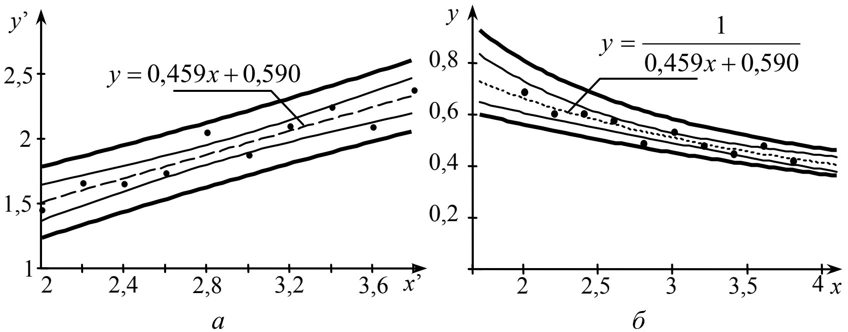


Рис. 6.7. Дробово-лінійна регресія лінеаризована (a) та оцінена ($б$)

Логарифмічна функція

Логарифмічна функція задається таким виразом:

$$F(x,k,m) = k\ln x + m\,. \tag{6.30}$$

Із рівняння (6.30) видно, що для переходу до лінійної функції (6.23) достатньо зробити перетворення виду $x' = \ln x$. Відповідно, для знаходження регресії використовують наступний алгоритм.

1. Вихідні значення x заміняють на $x' = \ln(x)$.

2. Згідно з формулами (6.8) визначають параметри A і B, як k і b, відповідно апроксимувальної функції вигляду (6.23).

3. Знаходять значення параметрів k і m: $k = A, m = B$.

4. Оцінюють границі похибки лінеаризованої функції $\Phi(x, A, B)$: $\Delta_{\text{лін.}\bar{y}}(x)$ та $\Delta_{\text{лін.}y}(x)$ відповідно до рівняння (6.13).

5. Оцінюють границі похибки шуканої функції $y(x)$:

$$y(x) \pm \Delta_{\bar{y}}(x) = \Phi(\ln(x), A, B) \pm \Delta_{\text{лін.}\bar{y}}(\ln(x)),$$

$$y(x) \pm \Delta_{y}(x) = \Phi(\ln(x), A, B) \pm \Delta_{\text{лін.}y}(\ln(x))\,.$$

Приклад 6.12 Вихідні дані задано таблицею:

x	2,00	2,30	2,60	2,90	3,20	3,50	3,80	4,10	4,40	4,70
y	4,97	5,86	6,86	7,17	8,14	7,94	8,89	8,86	9,00	9,39
$x'=\ln(x)$	0,69	0,83	0,96	1,06	1,16	1,25	1,34	1,41	1,48	1,55
$y'=y$	4,97	5,86	6,86	7,17	8,14	7,94	8,89	8,86	9,00	9,39

Необхідно оцінити регресію у вигляді логарифмічної функції.

Розв'язання. Отримано значення коефіцієнтів: A = 5,058, B = 1,769, k = 5,058, m = 1,769, s_y = 0,294. Графічне зображення отриманих результатів наведено на рис. 6.8.

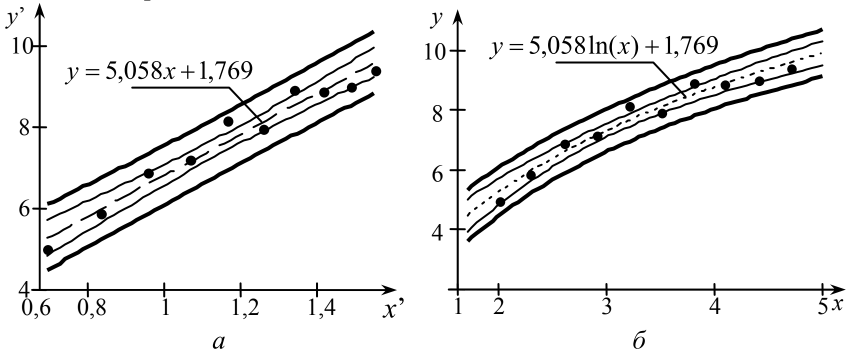


Рис. 6.8. Дробово-лінійна регресія лінеаризована (*а*) та оцінена (*б*)

Гіперболічна функція

Гіперболічну функцію задають таким виразом:

$$F(x,k,m) = \frac{k}{x} + m .$$

Для переходу до лінійної функції (6.23) досить виконати перетворення вигляду $x' = 1/x$. Відповідно, для знаходження регресії у вигляді гіперболічної використовують такий алгоритм.

1. Вихідні значення x заміняють на $x' = 1/x$.

2. Згідно із формулами (6.8) визначають параметри A і B, як k і b, відповідно апроксимувальної функції вигляду (6.23).

3. Знаходять значення параметрів k і m: $k = A$, $m = B$.

4. Оцінюють границі похибки лінеаризованої функції $\Phi(x,A,B)$: $\Delta_{\text{лін.}\bar{y}}(x)$ та $\Delta_{\text{лін.}y}(x)$ на підставі формули (6.13).

5. Оцінюють границі похибки шуканої функції $y(x)$:

$$y(x) \pm \Delta_{\bar{y}}(x) = \Phi(1/x, A, B) \pm \Delta_{\text{лін.}\bar{y}}(1/x) ,$$

$$y(x) \pm \Delta_y(x) = \Phi(1/x, A, B) \pm \Delta_{\text{лін.}y}(1/x) \cdot$$

Приклад 6.13 Вихідні дані задано таблицею:

x	3,00	3,50	4,00	4,50	5,00	5,50	6,00	6,50	7,00	7,50
y	5,16	4,05	3,76	4,14	4,10	3,58	3,78	3,33	4,00	3,69
x'=1/x	0,33	0,29	0,25	0,22	0,20	0,18	0,17	0,15	0,14	0,13
y'=y	5,16	4,05	3,76	4,14	4,10	3,58	3,78	3,33	4,00	3,69

Необхідно оцінити регресію у вигляді гіперболічної функції.

Розв'язання. Отримано значення коефіцієнтів: A = 5,634, B = 2,792, k = 5,634, m = 2,792, s_y = 0,345. Графічне зображення отриманих результатів показано на рис. 6.9.

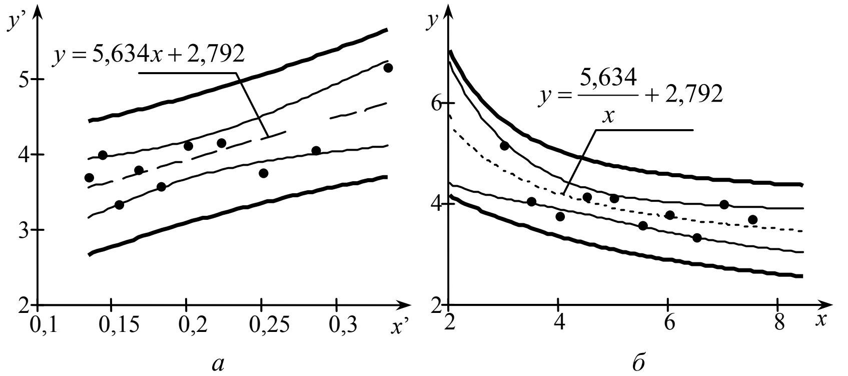


Рис. 6.9. Гіперболічна регресія лінеаризована (*а*) та оцінена (*б*)

Дробово-раціональна функція

Дробово-раціональну функцію задають таким виразом:

$$F(x,k,m) = \frac{x}{kx+m}. \qquad (6.31)$$

Перепишемо рівняння (6.31) наступним чином

$$\frac{1}{F(x,k,b)} = k + \frac{m}{x}. \qquad (6.32)$$

Із виразу (6.32) видно, що задача оцінки дробово-раціональної регресії подібна до розглянутих вище. Позначимо:

$$x' = 1/x\,, m = A, k = B\,, \qquad (6.33)$$

тоді формула (6.32) набуває вигляду (6.23).

Відповідно, для знаходження регресії у вигляді гіперболічної використовують такий алгоритм:

1. Вихідні значення x та y заміняють на $x' = 1/x$ та $y' = 1/y$.

2. Згідно із формулами (6.8) визначають параметри A і B, як k і b, відповідно до апроксимувальнлї функції вигляду (6.23).

3. Згідно (6.33) знаходять значення параметрів k і m: $k = B,\ m = A$.

4. Оцінюють границі похибки лінеаризованої функції $\Phi(x, A, B)$: $\Delta_{\text{лін.}\bar{y}}(x)$ і $\Delta_{\text{лін.}y}(x)$ на рідставі рівнянь (6.13).

5. Оцінюють границі похибки шуканої функції $y(x)$:

$$y(x) \pm \Delta_{\bar{y}}(x) = \left(\Phi(\ln(x), A, B) \pm \Delta_{\text{лін.}\bar{y}}(\ln(x))\right)^{-1};$$

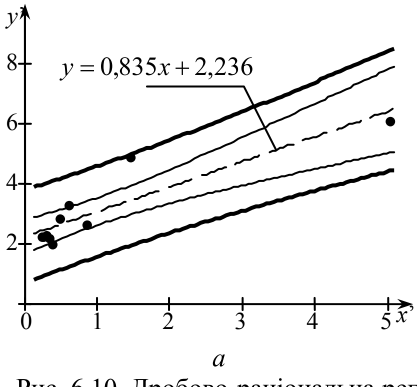
$$y(x) \pm \Delta_{y}(x) = \left(\Phi(\ln(x), A, B) \pm \Delta_{\text{лін.}y}(\ln(x))\right)^{-1}.$$

Приклад 6.14 Вихідні дані задано таблицею::

x	0,20	0,70	1,20	1,70	2,20	2,70	3,20	3,70	4,20	4,70
y	0,16	0,21	0,38	0,31	0,35	0,51	0,46	0,44	0,45	0,45
$x'=1/x$	5,00	1,43	0,83	0,59	0,45	0,37	0,31	0,27	0,24	0,21
$y'=1/y$	6,07	4,85	2,61	3,25	2,83	1,98	2,15	2,28	2,24	2,20

Необхідно оцінити нелінійну регресію у вигляді дробово-раціональної функції.

Розв'язання. Отримано за формулами (6.23, 6.33) значення коефіцієнтів: A = 0,835, B = 2,236, k = 2,236, m = 0,835, s_y = 0,626. Графічне зображення отриманих результатів наведено на рис. 6.10.



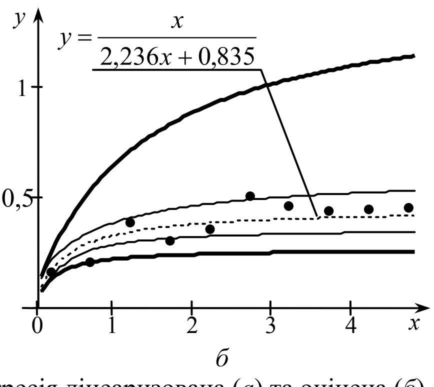


Рис. 6.10. Дробово-раціональна регресія лінеаризована (*а*) та оцінена (*б*)

Узагальнені відомості для нелінійної регресії експериментальних даних відповідно до функцій наведено в табл. 6.7

Таблиця 6.7

Нелінійні функції, оцінювання параметрів яких зводиться до лінійної регресії

Назва	**Функція**	**Проміжне перетворення**		**Значення**	
		для *x*	**для *y***	***k***	***m***
Степенева	$y = kx^m$	$\ln(x)$	$\ln(y)$	e^B	A
Показникова	$y = ke^{mx}$	–	$\ln(y)$	e^B	A
Дробово-лінійна	$y = \dfrac{1}{kx + m}$	–	$\dfrac{1}{y}$	A	B
Логарифммічна	$y = k\ln x + m$	$\ln(x)$	–	A	B
Гіперболічна	$y = k\dfrac{1}{x} + m$	$\dfrac{1}{x}$	–	A	B
Дробово-раціональна	$y = \dfrac{x}{kx + m}$	$\dfrac{1}{x}$	$\dfrac{1}{y}$	B	A

6.3. Застосування регресійного аналізу для виявлення та усунення прогресуючої систематичної похибки (тренда)

Для виявлення та усунення прогресуючої систематичної похибки вимірювання фактично апроксимуються залежності систематичної похибки від часу лінійною функцією. Отже, маємо результати спостережень, задані у вигляді послідовності $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ і, відповідні номери спостережень $i = (1,2 \ldots n)$. Характеристику систематичної похибки можна побудувати у вигляді лінійної функції $Y(i) = k \cdot i + b$ (див. підрозд. 6.1).

Для перевірки наявності прогресуючої систематичної похибки необхідно перевірити статистичну значущість отриманого коефіцієнта k за формулою (6.31).

Для усунення систематичної похибки на основі отриманої моделі вносять поправки в ряд результатів спостережень:

$$y_{\text{кор}_i} = y_i - kx_i,\ i \in 1 \ldots n .$$

Застосування такої поправки буде обґрунтоване лише якщо довести, що отримана модель систематичної похибки адекватна (див. підрозд.6.2.1).

Приклад 6.15 Задані значення десяти результатів спостережень отримано при вимірюванні незмінної в часі величини y, які наведені в таблиці. Необхідно перевірити їх на наявність прогресуючої систематичної похибки та за її наявності внести відповідні поправки. Середньоквадратичне відхилення випадкової похибки результатів y дорівнює $s_{\text{гр}} = 0{,}05$.

Розв'язання.

Для зручності доповнимо таблицю стовпцями, у яких наведемо результати проміжних обчислень.

№	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$	$y_{\text{регр}}$	y_i-$y_{\text{регр}}$	$(y_i$-$y_{\text{регр}})^2$	y_i-kx_i
1	1	1,2	1,0	1,20	1,24	-0,0447	0,0020	1,1753
2	2	1,25	4,0	2,50	1,26	-0,0193	0,0004	1,2007
3	3	1,35	9,0	4,05	1,28	0,0560	0,0031	1,2760
4	4	1,30	16,0	5,20	1,30	-0,0187	0,0003	1,2013
5	5	1,40	25,0	7,00	1,32	0,0567	0,0032	1,2767
6	6	1,40	36,0	8,40	1,34	0,0320	0,0010	1,2520
7	7	1,39	49,0	9,73	1,36	-0,0027	0,0000	1,2173
8	8	1,35	64,0	10,80	1,38	-0,0673	0,0045	1,1527
9	9	1,45	81,0	13,05	1,40	0,0080	0,0001	1,2280
$\sum$	**45,0**	**12,09**	**285,00**	**61,93**			**0,0147**	
b	**1,220**					s_y	**0,0429**	
k	**0,025**	F	**0,858**		s_k **0,0071**			t_k **2,8352**

Примітка. Значення $y_{\text{регр}} = kx + b$.

Перевіримо статистичну значущість коефіцієнта k ; СКВ s_k = 0,0071, t_k = 0,025/0,0071 = 2,365.

Граничне значення $t_\alpha(v)$ при α = 0,05 та v = (9–2) = 7 беремо з табл. Д.1.2, дод.1 (слід обирати рівень значущості α в таблиці з умови $P = 1 - \alpha / 2 = 0{,}975$). У результаті отримуємо: t_k =2,8352 > $t_{0,975}(v)$=2,365. Отже, розрахований коефіцієнт регресії k є значущим, тому в результатах спостережень y_i наявна прогресуюча систематична похибка.

Перевіримо адекватність моделі; СКВ s_y = 0,0429, $s_{\text{гр.}} = 0{,}05$. Отже, $F = 0{,}0429 / 0{,}05 = 0{,}858$.

Граничне значення $F_\alpha(v_1, v_2)$, якщо α = 0,05 і v_1 = (9-2) = 7, беремо з табл. Д.1.3, дод.1 ($v_1 = f_1$, $v_2 = f_2$).

У результаті отримуємо: F = 0,858 < $F_{0,05}(7, \infty)$=2,01. Отже, модель адекватна і може застосовуватись для внесення поправки. Початкові результати та скориговані результати після внесення поправки зображено на рис. 6.11.

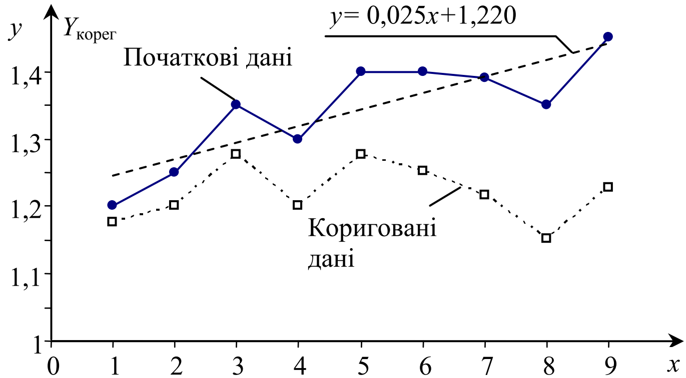


Рис. 6.11. Графічне пояснення корегування прогресуючих систематичних похибок

Контрольні запитання та завдання

1. Які передумови застосування регресійного аналізу ви знаєте?

2. Які методи оцінювання коефіцієнтів регресійної моделі вам відомі? Проведіть порівняльний аналіз цих методів.

3. За яких умов доцільно застосовувати спрощені або стійкі методи оцінювання коефіцієнтів регресійної моделі

4. Наведіть загальну послідовність дій при застосуванні регресійного аналізу для лінійної моделі регресії.

5. Які передумови застосування МНК?.

6. Наведіть вирази для розрахунку та розкрийте сутність довірчих границь рівняння регресії.

7. Для даних (табл. Д2.3, дод.1) обраних за вашим варіантом побудуйте модель регресії. Як змінну x використайте числа $x_i = i/10, i = \overline{1,10}$.

7. МЕТОДИ ДИСПЕРСІЙНОГО АНАЛІЗУ ДЛЯ ОПРАЦЮВАННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ВИМІРЮВАНЬ

У практичній діяльності метрологів під час проведення вимірювальних та випробувальних експериментів виникає потреба кількісно встановити вплив різних факторів на отримані результати. Для встановлення величини та закономірності впливу факторів на результат у генеральній сукупності можна застосовувати різні статистичні методи: кореляційний аналіз, регресійний аналіз, аналіз на основі статистичних критеріїв. Ці методи також містять і дисперсійний аналіз.

Дисперсійний аналіз (від лат. – dispersio – розсіювання) – це статистичний метод, який дозволяє кількісно оцінити вплив різних факторів на зміну результатів вимірювання.

Уперше цей метод запропонував у 1925 р. Р. Фішер для опрацювання результатів агрономічних досліджень, що дозволило визначити умови, за яких досліджуваний сорт сільськогосподарської культури дає максимальний врожай. Сучасне застосування цього методу охоплює широке коло завдань, зокрема віднести науково-практичні дослідження в метрології. У термінах теорії математичної статистики дисперсійний аналіз розглядається як виявлення систематичних відмінностей між результатами безпосередніх вимірювань (спостережень), виконаних за тих або інших умов, що змінюються. Дисперсійний аналіз можна застосовувати за обмеженої кількості одиниць спостереження. До того ж він особливо ефективний в умовах, коли результативна ознака істотно змінюється під одночасною дією кількох факторів, що діють з різними силами впливу.

7.1. Загальні відомості та визначення дисперсійного аналізу

Методи дисперсійного аналізу дозволяють визначити кількісний показник ***ступеня впливу*** деякого фактора (наприклад, температури в лабораторії) на мінливість досліджуваного показника (наприклад, масової частки вологи в досліджуваному зразку), який характеризує статистичну сукупність (множину значень показника) і ***достовірність*** впливу фактора та її довірчі межі. Окрім того, за допомогою дисперсійного аналізу можна дослідити статистичну різницю оцінок математичних сподівань різних вібірок. У поглибленому аналізі дисперсійний метод може виконувати допоміжні функції, а саме наукового обґрунтування застосування інших статистичних методів кількісного аналізу.

Дисперсійний аналіз ґрунтується на оцінюванні дисперсій значень певних показників. При цьому вихідні дані розглядаються як сукупність груп спостережень, згрупованих за певним фактором. У подальшому аналізі розглядають ***загальну дисперсію*** як суму ***внутрішньогрупової*** та ***міжгрупової*** дисперсії. Це дозволяє окремо виділити дисперсію, зумовлену зміною досліджуваного фактора та іншими випадковими факторами. Міжгрупова дисперсія визначається впливом фактора на досліджуваний показник, тому вона ще називається ***факторною*** дисперсією. Внутрішньогрупова або ***залишкова*** дисперсія визначається впливом випадкових факторів притаманних процедурі вимірювання.

Відхилення, викликані дією факторної ознаки порівнюються з величиною відхилень, спричинених випадковими факторами. Якщо відхилення, викликані фактором більші за відхилення, зумовлені випадковими факторами, то вважають, що вплив фактора на результативну ознаку значний.

Дисперсійний аналіз, у ході якого перевіряють вплив одного фактора, називають ***однофакторним***. Для вивчення впливу двох та більше факторів використовують відповідно ***двофакторний*** та ***багатофакторний*** аналіз.

За однофакторного аналізу досліджують процес, під час перебігу якого змінюється лише одна ознака, решту ознак вважають незмінними. У цьому випадку неможливо виявити взаємодію факторів за одночасної їх зміни. У багатофакторному аналізі кожне спостереження використовують для одночасного оцінювання усіх факторів та їх взаємодій.

Фактор може бути відомий або невідомий, природного або штучного походження, як, наприклад, умови експерименту, методика вимірювань і опрацювання експиреметальних даних тощо. Кожен фактор може вважатись дискретною чи неперервною випадковою величиною, яку розділяють на декілька сталих рівнів (градацій, інтервалів). Якщо кількість спостережень (проб, даних) на всіх рівнях кожного з факторів однакова, то дисперсійний аналіз називають ***рівномірним***, інакше – ***нерівномірним***.

Факторні ознаки – це ознаки, які впливають на явище, що вивчається. ***Результативними*** називають ознаки, які змінюються під впливом факторних ознак. У ході проведення дисперсійного аналізу можуть використовуватися як якісні, так і кількісні ознаки.

Зазвичай для метрологічних задач використовують лише однофакторний або двофакторний аналіз, дослідження багатофакторних комплексів зводять до послідовного однофакторного та двофакторного аналізу. Проте такий підхід не дає змоги виявити дійсну множинність ефектів взаємодії випадкових факторів.

Методи дисперсійного аналізу можна поділити на дві групи:

1. Метод Фішера. Використовується в однофакторному дисперсійному аналізі, коли сукупна дисперсія всіх спостережень розкладається на дисперсію всередині окремих груп і дисперсію між групами.

2. Метод загальної лінійної моделі. Використовується в багатофакторному аналізі і ґрунтується на кореляційному та регресійному аналізі.

Загальні передумови дисперсійного аналізу:

1. Фактори, які досліджуються, повинні бути незалежними (непов'язаними між собою). Наприклад, не можна вивчати сумісний вплив швидкодії течії та витрати води в річці.

2. Підбір груп для досліджень (організація дисперсійного комплексу) має відбуватися випадковим чином (рандомізовано).

3. Застосовуються як кількісні, так і якісні (атрибутивні) ознаки.

Теоретичне обґрунтування дисперсійного аналізу проводилося з використанням певних припущень, покладених в основу обов'язкових умов його застосування:

1. Вибірки, які досліджуються, повинні мати гауссівський закон розподілу або мають дотримуватися умова відповідності вибіркових груп генеральним сукупностям з гауссівським законом розподілу.

2. Незалежність розподілу спостережень у групах.

3. Незмінність впливу фактора на результати всіх досліджень.

4. Повторюваність та відтворюваність спостережень.

Оскільки предметом метрологічних досліджень є явища, які мають імовірнісний характер, гауссівський розподіл трапляється досить часто.

Перед використанням дисперсійного аналізу (відповідно до обов'язкових умов застосування) потрібно перевірити:

– відповідність отриманих законів розподілу Гаусса;

– однорідність дисперсій аналізованих груп вибірок.

Недотримання хоча б однієї з наведених умов може призвести до значних похибок другого роду під час інтерпретації результатів аналізу.

Реалізація методу дисперсійного аналізу починається з формулювання нульової гіпотези: досліджувані фактори не впливають на значення ознаки, яка досліджується, тобто мінливість аналізованих даних зумовлена лише випадковими факторами.

Далі визначають імовірність отримання очікуваної відмінності, якщо нульова гіпотеза справедлива.

Потім задають допустиму імовірність. Наприклад, для метрологічних задач вибирають рівень значущості 0,05 – максимально допустиму ймовірність відхилити нульову гіпотезу, у випадку її правдивості.

Якщо визначено ймовірність отримання очікуваної відмінності менша за вибраний рівень значущості, то нульова гіпотеза відхиляється, тобто ймовірність того, що мінливість ознаки, зумовлена випадковим фактором несуттєва.

У дисперсійному аналізі використовують властивість суми квадратів центральних відхилень. Її сутність полягає в тому, що коли кілька повністю незалежних факторів діють одночасно й зумовлюють загальну змінюваність ознаки, то сума окремих дисперсій, що визначають їх вплив, дорівнює загальній дисперсії.

Якщо виконуються всі умови дисперсійного аналізу, загальну дисперсію (мінливість ознаки) можна показати як суму різних дисперсій, які виникають під дією різних факторів:

$$D_y = D_x + D_z ,$$

де D_y – загальна дисперсія результатів спостережень, яка визначає розсіювання варіант від загального середнього, характеризує розсіювання ознаки Y околі загального середнього у сукупності під впливом усіх факторів, які визначають цю варіацію; D_x – факторна (міжгрупова) дисперсія. Характеризується відмінностями середніх у кожній групі та залежить від впливу кожного фактора, за яким диференціюється кожна група. Фактично факторна дисперсія визначається впливом фактора на досліджувану ознаку; D_z – залишкова (внутрішньогрупова) дисперсія. Характеризує розсіювання варіант усередині груп. Відображає випадкову варіацію, тобто ту частину варіації, яка відбувається під впливом неврахованих або невизначених факторів та не залежить від ознаки-фактора, за яким відбувається групування. Варіація досліджуваної ознаки залежить від сили впливу неврахованих факторів, які можна вважати організованими (такими, що задаються дослідником) та випадковими (невідомими) факторами.

Отже, загальна варіація (дисперсія) є сумою варіацій, зумовлених організованими (заданими) факторами, які ще називають факторіальною варіацією та неорганізованими факторами, тобто залишковою варіацією (випадковою або невідомою).

За допомогою дисперсійного аналізу досліджується статистична значущість відмінностей між середніми досліджуваних груп на основі аналізу вибіркових дисперсій. Це проілюстровано на рис. 7.1 і 7.2.

Для різних рівнів фактора x_1, $x_2 ,\dots x_i$, … x_k (усього k рівнів) оцінювалися n_i значень показника. Ураховуючи обов'язкову умову застосування дисперсійного аналізу дисперсії вибірок для кожного рівня фактора є рівними $\left(s_1^2 = s_2^2 = s_i^2 = s_k^2\right)$. Кожна група має своє середнє значення ($\bar{y}_1$, $\bar{y}_2$, $\bar{y}_i$, $\bar{y}_k$).

Якщо середні досліджуваних груп рівні, загальна дисперсія буде визначатися лише випадковою варіацією значень показників у кожній групі (внутрішньогруповою дисперсією) (див. рис. 7.1). У цьому випадку фактор на зміну загальної дисперсії майже не впливає.

Випадок, коли середні досліджуваних груп відрізняються для різних значень досліджуваного фактора, ілюструє ри. 7.2.

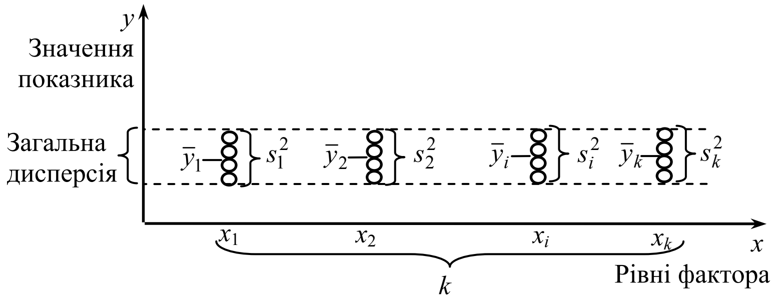


Рис. 7.1. Графічне зображення груп з рівними середніми значеннями

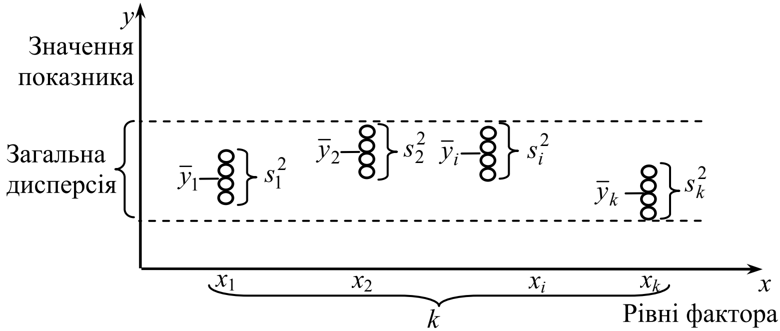


Рис. 7.2. Графічне зображення груп з різними середніми значеннями

Зміна середніх у групах призводить до збільшення загальної дисперсії, у якій, окрім внутрішньогрупової дисперсії, наявна ще і дисперсія, викликана зміною середнього значення в групах для різних рівнів фактора (факторна дисперсія). У результаті застосування дисперсійного аналізу робиться висновок, що середні груп розрізняються.

Класичний дисперсійний аналіз виконується як послідовність таких етапів:

1. Побудова дисперсійного комплексу.
2. Визначення дисперсій.
3. Оцінювання ступеня впливу фактора та неврахованих факторів.
4. Перевірка статистичної значущості отриманих результатів за допомогою теоретичних значень розподілу Фішера.

7.2. Однофакторний дисперсійний аналіз

Цей вид дисперсійного аналізу реалізується послідовністю таких етапів:

1. Побудова дисперсійного комплексу – побудова таблиці, в якій були б чітко розмежовані фактори, результативна ознака та спостереження.

2. Значення дисперсій зручно розраховувати, використовуючи такі формули:

$$\hat{D}_y = \sum y^2 - \frac{\left(\sum y\right)^2}{N},\ \hat{D}_x = \sum h - \frac{\left(\sum y\right)^2}{N},\ \hat{D}_z = \sum y^2 - \sum h,$$

де $\sum y = \sum y1 + \ldots + \sum yk + \ldots + \sum ym$, $k = \overline{1,m}$, m – кількість груп, $\sum yk = yk_1 + \ldots + yk_j + \ldots + yk_{N_k}$, $j = 1..N_k$, N_k – обсяг k-ї вибірки, $N = N_1 + \ldots + N_k + \ldots + N_m$, $\sum h = h_1 + \ldots + h_k + \ldots + h_m$, $h_k = \frac{\sum yk}{N_k}$

$\sum y^2 = \sum (y1)^2 + \ldots + \sum (yk)^2 + \ldots + \sum (ym)^2$.

3. Відношення факторної дисперсії до загальної характеризує ступінь факторних ознак у формуванні загальної мінливості результативної ознаки.

$$\eta_x = \frac{C_x}{C_y} \cdot 100 .$$

Ступінь впливу неврахованих факторів на досліджуваний показник визначається відношенням залишкових дисперсій до загальної дисперсії:

$$\eta_z = \frac{C_z}{C_y} \cdot 100 .$$

4. Для перевірки статистичної значущості отриманих результатів використовують критерій Фішера:

$$F = \frac{s_x^2}{s_z^2}, \tag{7.1}$$

де $s_x^2 = \frac{\hat{D}_x}{v_x}$, $s_z^2 = \frac{\hat{D}_z}{v_z}$ – девіати, $v_z = n - m$, $v_x = m - 1$ – степені вільності.

Під час визначення впливу факторів кількість одиниць спостережень у групах не важлива. Однак під час установлення достовірності впливу факторів, необхідний показник, який допускає порівняння груп, різних за кількістю елементів, що входять до них. Таким показником є коригована дисперсія – девіата. Девіата – це дисперсія, що припадає на один елемент вільного варіювання або на один степінь вільності.

Критерієм достовірності впливу факторної ознаки на результативну є відношення її девіати до девіати неврахованих факторів. Якщо $F > F_{\alpha}$, то отримані оцінки значущі і вплив фактора необхідно враховувати. У рівності (7.1) $F_{\alpha}(\nu_1;\nu_2)$ – граничне значення розподілу Фішера для степенів вільності $\nu_1 = \nu_x$ та $\nu_2 = \nu_z$ і рівня значущості α.

Приклад 7.1 Розрахунок однофакторного дисперсійного аналізу. Досліджується залежність результатів вимірювань ознаки y від температури t в лабораторії .

Вихідні та розрахункові дані однофакторного дисперсійного аналізу:

$t_1 = 10°C$	$t_2 = 20°C$	$t_3 = 30°C$	$t_4 = 35°C$
Результати вимірювань Y_i, $i = 1\ldots k$, $k = 4$,			
8,19	8,32	8,19	10,06
7,91	7,52	8,30	9,19
7,86	7,77	9,20	8,52
8,47	8,44	7,91	10,10
7,22	9,63	9,09	9,12
9,20	8,22	8,78	9,30
8,41	7,41	9,01	9,67
7,86	7,85	8,16	8,31
7,58	8,25	8,88	8,86
8,36	8,73	8,46	9,34
8,08	7,75	9,60	
	8,09	8,55	
		8,16	
		8,98	

Розв'язання. На першому етапі будується дисперсійний комплекс (див. табл.). Показником у цьому прикладі є результати вимірювань, фактором – температура. У цьому дослідженні маємо чотири рівні температури $t_1 = 10°C$, $t_2 = 20°C$, $t_3 = 30°C$, $t_4 = 35°C$.

За результатами попереднього опрацювання робимо висновок, що вибірки розподілені за гауссівським законом розподілу, дисперсії цих вибірок однорідні.

Обсяги вибірок кожного рівня $N_1 = 11$, $N_2 = 12$, $N_3 = 14$, $N_4 = 10$.

Загальний обсяг $N = N_1 + N_2 + N_3 + N_4 = 47$.

$$\sum y1 = \sum_{j=1}^{N_1} y1_j\,,\ \sum y1 = 89{,}12\,,\ \sum y2 = \sum_{j=1}^{N_2} y2_j\,,\ \sum y2 = 97{,}98\,,$$

$$\sum y3 = \sum_{j=1}^{N_3} y3_j\,,\ \sum y3 = 121{,}27\,,\ \sum y4 = \sum_{j=1}^{N_4} y4_j\,,\ \sum y4 = 92{,}46\,,$$

$$\sum y = \sum y1 + \sum y2 + \sum y3 + \sum y4 = 400{,}83\,,$$

$\left(\sum y1\right)^2 = (98{,}12)^2 = 7942{,}37$, $\left(\sum y2\right)^2 = 9600{,}08$, $\left(\sum y3\right)^2 = 14706{,}41$, $\left(\sum y4\right)^2 = 8548{,}85$, $\left(\sum y\right)^2 = (400{,}83)^2 = 160664{,}69$.

$h_1 = \dfrac{\sum y1}{N_1}$, $h_1 = 722{,}03$, $h_2 = 800{,}01$, $h_3 = 1050{,}46$, $h_4 = 854{,}89$,

$\sum h = h_1 + h_2 + h_3 + h_4$, $\sum h = 3427{,}39$. $\sum (y1)^2 = \sum_{j=1}^{N_1} \left(y1_j\right)^2 = 724{,}77$,

$\sum (y2)^2 = 804{,}02$, $\sum (y3)^2 = 1053{,}55$, $\sum (y4)^2 = 858{,}10$.

$$\sum y^2 = \sum (y1)^2 + \sum (y2)^2 + \sum (y3)^2 + \sum (y4)^2 = 3440{,}44\,.$$

Розраховуємо оцінки загальної D_y, факторної D_x та залишкової D_z дисперсій: $\hat{D}_y = \sum y^2 - \dfrac{\left(\sum y\right)^2}{N} = 22{,}04$, $\hat{D}_x = \sum h - \dfrac{\left(\sum y\right)^2}{N} = 8{,}99$,

$$\hat{D}_z = \sum y^2 - \sum h = 13{,}05.$$

Ступінь впливу температури на мінливість досліджуваної ознаки $\eta x = \dfrac{\hat{D}_x}{\hat{D}_y} 100 = 40{,}8$. Ступінь впливу інших факторів (неврахованих): $\eta z = \dfrac{\hat{D}_z}{\hat{D}_y} 100 = 59{,}2$. Перевірка правильності: $\eta x + \eta z = 100$. Степені вільності: $\nu_x = m - 1 = 3$, $\nu_z = N - m = 47 - 4 = 43$. Обираємо рівень значущості $\alpha = 0{,}05$. Тоді табличне значення статистики Фішера $F_{\alpha,\nu_x,\nu_z} = 2{,}82$.

Девіати $\sigma_x = \frac{\hat{D}_x}{\nu_x}$, $\sigma_z = \frac{\hat{D}_z}{\nu_z}$. $F = \frac{s_x}{s_z} = 9{,}88$, $F > F_\alpha(\nu_x;\nu_z)$.Отже, отримані оцінки значущі, вплив температури на досліджуваний показник необхідно враховувати. Величина впливу – 40,8%.

7.3. Двофакторний дисперсійний аналіз

Якщо розглядається більше, ніж один фактор, що визначає варіацію результативної ознаки, то результати опрацьовують за схемою для багатофакторного дисперсійного аналізу. Для опрацювання даних вимірювального експерименту найчастіше проводять двофакторний аналіз. Проілюструємо реалізацію двофакторного дисперсійного аналізу таким прикладом.

Приклад 7.2 Досліджується залежність результатів вимірювань ознаки y від температури t у лабораторії та вологості w.

Вихідні та розрахункові дані двофакторного дисперсійного аналізу наведені у таблиці:

Температура в лабораторії, °C					
$t_1 = 20°C$			$t_2 = 30°C$		
Вологість повітря, %					
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
20%	50%	75%	20%	50%	75%
5,61	7,61	4,99	7,51	8,48	7,46
4,80	7,17	5,07	5,94	7,99	7,73
4,96	5,04	5,88	5,99	7,34	6,82
5,98	6,34	6,46	6,00	6,19	6,60
6,03	7,90	5,80	6,69	6,27	10,35
6,26	5,88	6,07	5,79	6,32	7,01
6,49	4,17	6,94	4,26	7,48	6,02
6,24		6,62		6,80	8,06
5,32				8,50	
4,39					

Розв'язання. На першому етапі будується дисперсійний комплекс. Показником у цьому прикладі є результати вимірювань, фактором A – температура, фактором B – вологість. В експерименті маємо два рівні фактора: A – вимірювання за температур $t_1 = 20°C$, $t_2 = 30°C$; для кожного фактора B три рівні фактора B - вимірювання для вологості 20%, 50% і 75%.

За результатами попереднього опрацювання робимо висновок, що вибірки розподілені за гауссівським законом розподілу та дисперсії цих вибірок однорідні.

Обсяги вибірок кожного рівня: $N_1 = 10$, $N_2 = 7$, $N_3 = 8$, $N_4 = 7$, $N_5 = 9$, $N_6 = 8$.

Загальний обсяг $N = N_1 + N_2 + N_3 + N_4 + N_5 + N_6$, $N = 49$.

Обчислюємо суми:

$\sum y1 = \sum_{j=1}^{N_1} y1_j$, $\sum y1 = 56{,}08$, $\sum y2 = 44{,}12$, $\sum y3 = 47{,}84$, $\sum y4 = 42{,}18$, $\sum y5 = 65{,}38$, $\sum y6 = 60{,}06$;

$\sum y = \sum y1 + \sum y2 + \sum y3 + \sum y4 + \sum y5 + \sum y6$, $\sum y = 315{,}66$.

$\left(\sum y1\right)^2 = (56{,}08)^2 = 3144{,}97$, $\left(\sum y2\right)^2 = 1946{,}57$, $\left(\sum y3\right)^2 = 2288{,}67$, $\left(\sum y4\right)^2 = 1779{,}15$, $\left(\sum y5\right)^2 = 4274{,}54$, $\left(\sum y6\right)^2 = 3607{,}20$. $\left(\sum y\right)^2 = (315{,}66)^2 = 99641{,}24$.

$h_1 = \dfrac{\left(\sum y1\right)^2}{N_1}$, $h_1 = 314{,}50$, $h_2 = 278{,}08$, $h_3 = 286{,}08$, $h_4 = 254{,}16$, $h_5 = 474{,}95$, $h_6 = 450{,}90$. $\sum h = h_1 + h_2 + h_3 + h_4 + h_5 + h_6$, $\sum h = 2058{,}67$.

$\sum (y1)^2 = \sum_{j=1}^{N_1} \left(y1_j\right)^2$, $\sum (y1)^2 = 319{,}02$ $\sum (y2)^2 = 289{,}36$, $\sum (y3)^2 = 289{,}49$, $\sum (y4)^2 = 259{,}98$, $\sum (y5)^2 = 481{,}71$, $\sum (y6)^2 = 463{,}08$. $\sum y^2 = \sum (y1)^2 + \sum (y2)^2 + \sum (y3)^2 + \sum (y4)^2 + \sum (y5)^2 + \sum (y6)^2$, $\sum y^2 = 2102{,}64$.

Розраховуємо оцінки загальної D_y, факторної D_x та залишкової D_z дисперсій: $\hat{D}_y = \sum y^2 - \dfrac{\left(\sum y\right)^2}{N}$, $D_y = 69{,}15$. $\hat{D}_x = \sum h - \dfrac{\left(\sum y\right)^2}{N}$, $\hat{D}_x = 25{,}18$. $\hat{D}_z = \sum y^2 - \sum h$, $\hat{D}_z = 43{,}97$.

Ступінь впливу факторних ознак (температури та вологості) на мінливість досліджуваної ознаки $\eta x = \frac{\hat{D}_x}{\hat{D}_y}100$, $\eta x = 36{,}41$. Ступінь впливу інших факторів (неврахованих): $\eta z = \frac{\hat{D}_z}{\hat{D}_y}100$, $\eta z = 63{,}59$.

Перевірка: $\eta x + \eta z = 100$.

Для того щоб оцінити вплив кожного з факторів окремо, необхідно факторну ознаку розкласти на складові. Факторна ознака складається з дисперсії фактора A (температури) D_A, дисперсії фактора B (вологості) D_B та дисперсії їх сполучень D_{AB}, яка характеризує ступінь зумовленості впливу першого фактора другим.

$L_1 = \frac{\sum y1}{N_1}$, $L_1 = 5{,}61$, $L_2 = 6{,}30$, $L_3 = 5{,}98$ $L_4 = 6{,}03$, $L_5 = 7{,}26$, $L_6 = 7{,}51$. $LA_1 = L_1 + L_2 + L_3$, $LA_1 = 17{,}89$, $LA_2 = L_4 + L_5 + L_6$, $LA_2 = 20{,}80$.

$LB_1 = L_1 + L_4$, $LB_1 = 11{,}64$, $LB_2 = L_2 + L_5$, $LB_2 = 13{,}56$, $LB_3 = L_3 + L_6$, $LB_3 = 13{,}49$.

$LA = LA_1 + LA_2 = LB = LB_1 + LB_2 + LB_3$, $LA = 38{,}69$.

$M_1 = \frac{LA_1}{3}$, $M_1 = 5{,}96$, $M_2 = \frac{LA_2}{3}$, $M_2 = 6{,}93$. 3 – кількість градацій.

$M_3 = \frac{LB_1}{2}$, $M_3 = 5{,}82$, $M_4 = \frac{LB_2}{2}$, $M_4 = 6{,}78$, $M_5 = \frac{LB_3}{2}$, $M_5 = 6{,}75$. 2 – кількість градацій.

$\sum M_A = M_1 + M_2$, $\sum M_A = 83{,}55$, $\sum M_B = M_3 + M_4 + M_5$, $\sum M_B = 125{,}40$.

Загальне середньоарифметичне значення за градаціями факторів $L_{заг} = \frac{LA}{6}$, $L_{заг} = 6{,}45$ (6 – загальна кількість градацій).

Ступінь різноманітності для всіх факторів: $D'_x = N\left(\frac{L}{2 \cdot 3} - \left(L_{заг}\right)^2\right)$, $D'_x = 22{,}66$.

Ступінь різноманітності для фактора A: $D'_A = N\left(\frac{LA}{2} - \left(L_{заг}\right)^2\right)$, $D'_A = 8{,}45$.

Ступінь різноманітності для фактора B: $D'_B = N\left(\frac{LB}{3} - \left(L_{\text{заг}}\right)^2\right)$, $D'_B = 9{,}68$.

Ступінь різноманітності для сполучень факторів A і B: $D'_{AB} = D'_x - D'_A - D'_B$, $D'_{AB} = 4{,}53$.

Поправковий коефіцієнт K розраховують з метою розкладання сумарну дисперсію досліджуваних факторів на складові:

$$K = \frac{D_x}{D'_x},\ K = 1{,}11.$$

Дисперсія, зумовлена дією досліджуваного фактора A: $D_A = D'_A K$, $D_A = 9{,}39$.

Дисперсія, зумовлена дією досліджуваного фактора B: $D_B = D'_B K$, $D_B = 10{,}75$.

Дисперсія, зумовлена дією сполучення факторів A і B: $D_{AB} = D'_{AB} K$, $D_{AB} = 5{,}04$.

Повна дисперсійна структура двофакторного дисперсійного комплексу: $D_Y = \left(D_A + D_B + D_{AB}\right) + D_Z$, $D_Y = 69{,}15$.

Ступінь впливу фактора A на формування змінюваності результативної ознаки: $\eta A = \frac{D_A}{D_Y} \cdot 100$, $\eta A = 13{,}58$.

Ступінь впливу фактора B: $\eta B = \frac{C_B}{C_Y} \cdot 100$, $\eta B = 15{,}55$.

Ступінь впливу взаємодії факторів: $\eta_{AB} = \frac{D_{AB}}{D_Y}$, $\eta_{AB} = 7{,}28$.

Степені вільності: $\nu_A = 2 - 1$, $\nu_B = 3 - 1$, $\nu_{AB} = 2 \cdot 3$, $\nu_X = \nu_A + \nu_B + \nu_{AB}$, $\nu_Z = N - 2 \cdot 3$. Обираємо рівень значущості $\alpha = 0{,}05$. Тоді табличне значення статистики Фішера $F_{\alpha,\nu_A,\nu_z} = 4{,}067$, $F_{\alpha,\nu_B,\nu_z} = 3{,}21$, $F_{\alpha,\nu_{AB},\nu_z} = 2{,}32$, $F_{\alpha,\nu_x,\nu_z} = 2{,}11$.

Девіати: $\sigma_A = \frac{D_A}{\nu_A}$, $\sigma_A = 9{,}39$, $\sigma_B = \frac{D_B}{\nu_B}$, $\sigma_B = 5{,}38$, $\sigma_{AB} = \frac{D_{AB}}{\nu_{AB}}$, $\sigma_{AB} = 0{,}84$, $\sigma_x = \frac{D_x}{\nu_x}$, $\sigma_x = 2{,}80$ $\sigma_z = \frac{D_z}{\nu_z}$, $\sigma_z = 1{,}02$.

$F_A = \frac{\sigma_A}{\sigma_z}$, $F_A = 9{,}18$, $F_B = \frac{\sigma_B}{\sigma_z}$, $F_B = 5{,}26$, $F_{AB} = \frac{\sigma_{AB}}{\sigma_z}$, $F_{AB} = 0{,}82$,

$F_x = \frac{\sigma_x}{\sigma_z}$, $F_x = 2{,}74$.

Результати аналізу величини впливу кожного з факторів чи сумарної їх дії вважають достовірними, якщо $F > F_\alpha$.

Отже, отримані оцінки значущі, вплив температури та вологості, також їх загальний вплив на досліджуваний показник необхідно враховувати. Величина впливу температури – 13,58%, вологості – 15,55%, їх взаємодії – 7,28%.

Контрольні запитання та завдання

1. Наведіть мету та можливі практичні сфери застосування дисперсійного аналізу.
2. Які передумови застосування дисперсійного аналізу ви знаєте?
3. З яких факторів складається загальна мінливість ознаки?
4. Які відмінності між досліджуваними групами можна виділити за допомогою дисперсійного аналізу?
5. Наведіть алгоритм та основні співвідношення для реалізації однофакторного дисперсійного аналіз?
6. Розкрийте сутність поняття «девіата».
7. Наведіть вираз та розкрийте сутність кожної складової для повної дисперсійної структури двофакторного дисперсійного комплексу.
8. Виберіть з табл. Д2.4, дод.2 дані згідно з варіантом і виконайте однофакторний дисперсійний аналіз тільки для фактора В (стовбці А1).
9. Для обраних з табл. Д2.4, дод.2 даних виконайте двофакторний дисперсійний аналіз для факторів А та В.

8. ВИБРАНІ ПИТАННЯ СТАТИСТИЧНОГО АНАЛІЗУ РЕЗУЛЬТАТІВ КУТОВИХ ВИМІРЮВАНЬ

Задачі аналізу випадкових даних, виражених значеннями кутів на площині, виникають у різних галузях науки і техніки, у медицині і біології, географії і метеорології, економіці та психології, а також підчас дослідження інформаційних процесів у фізиці, радіотехніці, діагностиці, неруйнівному контролі технічних систем та в інших галузях науки і техніки.

Прикладами задач такого аналізу є, наприклад, дослідження напрямків вітру та океанічних течій, сезонних коливань температури, напрямків міграції диких тварин, орієнтації площини поляризації світла тощо. Для визначення їх статистичних характеристик та параметрів кутових даних необхідно застосовувати відповідні статистичні методи аналізу. Проте, незважаючи на значну практичну цінність та більш ніж сторічну історію розвитку, питання статистичного аналізу результатів кутових спостережень ще не знайшли відповідного висвітлення ні в нормативно-методичних, ні в навчальних виданнях.

У цьому розділі, в межах відведеного обсягу, викладено початкові відомості про статистичні методи оброблення результатів вимірювань випадкових кутових величин.

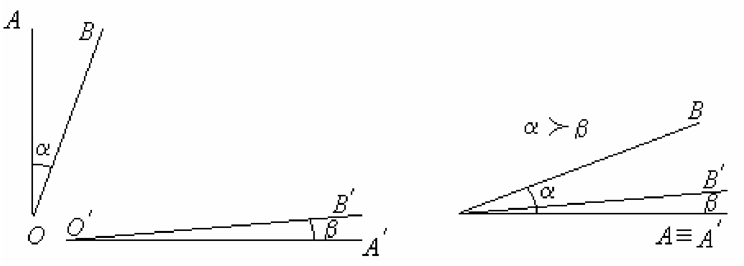
8.1. Основні поняття, визначення та одиниці вимірювання кутів

Базові поняття кутометрії сформовані ще в евклідовій геометрії і добре відомі. Передусім це поняття *плоского кута* – геометричної фігури, утвореної двома різними променями, що виходять з однієї точки, яка називається вершиною кута.

Кути можна порівнювати. Для них установлені відношення порядків. Два плоскі кути α та β називають рівними (або конгруентними), якщо вони можуть бути суміщені таким чином, щоб їх відповідні сторони і вершини збігалися. Відношення конгруентності позначають як $\alpha \equiv \beta$.

На площині від довільного променя в певному напрямку можна відкласти кут, що дорівнює заданому рівний даному куту. Отже, кут можна розглядати як міру повороту променя від його початкового положення до заданого. Залежно від напрямку повороту можна розглядати додатні і від'ємні кути. Будемо вважати додатними кути, що утворюються рухом променя в напрямку проти руху годинникової стрілки.

Щоб з'ясувати, який з двох кутів α чи β є більшим, необхідно сумістити в одній площині вершини і одну пару їх сторін. Якщо друга сторона одного кута, наприклад кута β, буде розміщена всередині кута α, то говорять, що кут α більший за кут β і позначають цей факт як $\alpha \prec \beta$ (рис.8.1).



а *б*

Рис. 8.1. Порівнювання кутів: а – до суміщення; б – після суміщення

У геометричній системі, в основу якої покладено точково-векторну аксіоматику кута, визначається по-іншому: під кутом розуміють певну метричну величину, яка пов'язана з двома векторами через операцію їх скалярного добутку. Відомо, що кожна пара векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$ визначає деякий кут φ – число, пов'язане з векторами такою формулою

$$\cos\varphi = \frac{\left(\overline{a}, \overline{b}\right)}{\left|\overline{a}\right|\left|\overline{b}\right|},$$

де $\left(\overline{a}, \overline{b}\right)$ – скалярний добуток векторів.

8.1.1. Одиниці вимірювання кутів

Розглянемо коротко питання вибору одиниць вимірювання кутів.

Історичні факти. Ще жерці древнього Вавилона, усвідомлюючи процес зміни природних циклів на Землі приблизно за 360 діб, розділили коло на відповідну кількість рівних частин, яким відповідає кут, що дорівнює одному градусу 1^o (одна дев’яноста частка прямого кута). За іншої гіпотези поділ кола на $360°$ (градус, кожного градуса на 60 (мінут) і кожної мінути – на 60 (секунд) походить від шумерів (приблизно 2100 р. до н.е.), які вміли вимірювати кути з точністю до декількох кутових мінут.

Істотний внесок у розроблення одиниць вимірювання кутів зробили древньогрецькі математики і астрономи. Відомий древньогрецький астроном Клавдій Птоломей (II ст. н. е.) ділив коло на 360 частин, для позначення яких від застосовував слово «$\tau\mu\eta'\mu\alpha\tau\alpha$», тобто «відрізки», яке було переведено латинським словом «segmentes». Птолемей скорочено позначав їх через μ^o. Згодом почали писати лише один верхній символ – кружечок, який зберігся дотепер для позначення градуса (найбільш імовірно, що саме слово «градус» має арабське походження).

Кожну з рівних частин (градусів) Птоломей поділяв на 60 частин, які назвав «$\lambda\varepsilon\pi\tau\alpha$», що дослівно означає «дріб’язок», або «перші шість десятих». Наступні два шестидесяткові поділи він назвав “вторими шестидесятими” і «третіми шести десятими». У перекладі на латину ці поділи отримали назви відповідно «minuta prima», «minuta secunda», «minuta tetria» (перша мінута, друга мінута, третя мінута). Слово «minuta» означає «зменшена», «дрібна». Птоломей користувався скороченими позначеннями шестидесяткових розрядів, які збігаються із сучасними позначеннями кутових мінут і секунд.

Прийняті одиниці вимірювання кутів. Природною одиницею плоского кута є повний плоский кут величиною 2π. Це кут, на який повинен бути повернутий промінь навколо точки, з якої він виходить до суміщення з його початковим положенням. На практиці застосовують часткову одиницю – частину кута повного оберту. Відомо, що плоский кут $\theta \in [0,2\pi)$ визначається як відношення довжини дуги l, що відповідає центральному куту θ на колі радіуса r, до величини цього радіуса:

$$\theta = \frac{l}{r}.$$

Виходячи із загальних міркувань когерентна одиниця вимірювання кута в системі СІ повинна була бути безрозмірною: $\left[\theta\right]=\dfrac{\left[l\right]}{\left[r\right]}=\dfrac{м}{м}=1$. Проте це не завжди зручно. Тому в системі СІ визначено одиницю вимірювання плоского кута – 1 радіан – центральний кут, який утворено двома радіусами кола, що відсікають на колі дугу довжиною r.

У системі одиниць СІ радіан віднесено до додаткових одиниць. ДСТУ 3651.0–97 визначає радіан як безрозмірну похідну одиницю, назва якої може (там, де це зручно), але не обов'язково, бути використана у поданні інших похідних одиниць. Радіан як додаткова одиниця системи одиниць має одну виняткову особливість – незалежність від вибору основних одиниць довільної системи одиниць.

Державний стандарт ДСТУ 3651.0–97 дозволяє застосовувати поряд з радіаном і інші позасистемні одиниці вимірювання плоского кута – градуси, мінути, секунди та гради.

Град – це 1/100 прямого кута (позначається через 1^{g}). Ця одиниця запропонована під час введення метричної системи мір. Утворення часткових одиниць для града здійснюється через коефіцієнт 1/100, наприклад, один сантиград дорівнює одній сотій града: $1^{c}=0.01^{g}$. Град широко застосовують за кордоном, хоча в нашій Україні ця одиниця не набула широкого використання.

Градус уведено як 1/90 частину прямого кута (один градус містить 60 кутових мінут, або 3600 кутових секунд: $1^{o}=60^{'}=3600^{''}$ 1). Куту 2π радіан у градусній мірі відповідає 360^{o}. Некогерентній одиниці плоского кута в один оберт відповідає один повний цикл ($2\,\pi$ радіан).

8.1.2. Задання кутів більших за 2π

У загальному випадку вимірювані кути можуть виходити за межі інтервалу $[0{,}2\pi)$, тобто областю значень кута Φ є множина всіх дійсних чисел R. Тоді зручно інтерпретувати значення таких кутів за допомогою гвинтової лінії, як це показано на рис. 8.2.

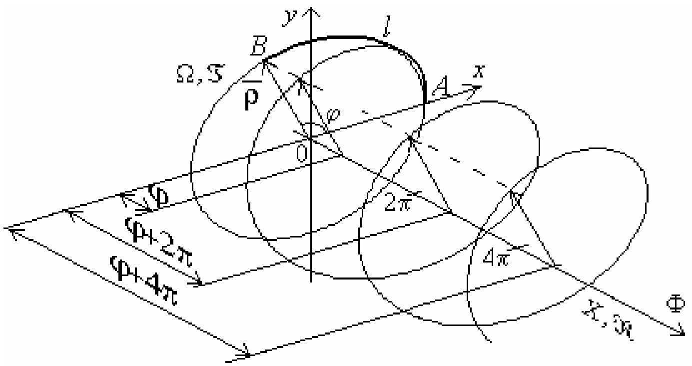


Рис. 8.2. Задання кутів на гвинтовій лінії та колі

Областю значень кута є множина X точок осі 0Ф. Відображення кут – число відбувається через гвинтову лінію, яка задається рівняннями

$$x = \cos\Phi,\ \ y = \sin\Phi,\quad \Phi = 2\pi n + \varphi,\ n \in Z\ .$$

На рис.8.2 напрямку вектора ρ у площині xOy відповідає дуга AB довжиною l. Цій дузі через гвинтову лінію ставиться у відповідність одне з чисел осі 0Ф вигляду $\varphi + 2\pi n$, $n \in Z$. Числове значення n задається початковими умовами або в інший спосіб, який визначається умовами фізичної реалізації експерименту кутових вимірювань.

Конструктивна форма подання кута $\Phi \succ 2\pi$ у вигляді

$$\Phi = \left[\frac{\Phi}{2\pi}\right] \cdot 2\pi + \varphi\,, \tag{8.1}$$

де $[\Phi] \in Z$ – ціла (кількість повних обертів) і $\{\Phi\} \equiv \varphi \in [0,2\pi)$ – дробова частини кута Φ, є основою формулою визначення довільного кута при для кутових вимірювань. У практиці таких вимірювань основну увагу приділяють дробовій частині кута φ, але саме форма (8.1) дає можливість досліджувати довільні кути.

Із виразу (8.1) випливає, що

$$\varphi \equiv \Phi(\mathrm{mod}\, 2\pi),$$

тобто дробова частина кута $\Phi \succ 2\pi$ визначається шляхом операції порівняння за модулем 2π величини $\Phi(\mathrm{mod}\, 2\pi)$, тобто визначення лишку числа φ за модулем 2π.

Розглядаючи періодичні процеси, що розгортаються в часі з періодом T (або у просторі з просторовим періодом λ), можна поставити у відповідність їх періодам величину 2π. Тоді кожному інтервалу часу t (або відстані D) ставиться у відповідність кут $\varphi \equiv 2\pi\left(\frac{t}{T}\right)\mathrm{mod}1$ (або $\varphi \equiv 2\pi\left(\frac{D}{\lambda}\right)\mathrm{mod}1$). Таким чином, дробова частина t (або дробова частина D) ідентифікується з кутом φ, після чого вона може досліджуватись методами кутометрії. Для неї також можуть бути застосовані одиниці вимірювання кутів.

8.2. Статистичні кутові вимірювання

Результати аналізу даних кутових вимірювань показують, що такі вимірювання мають характерні властивості, відмінні від властивостей лінійних вимірювань, тобто вимірювань, аргументом яких є числова вісь $R \in (-\infty, \infty)$. Ці відмінності пояснюються передусім тим фактом, що геометрична інтерпретація суті кутових вимірювань проводиться на колі в інтервалі зміни кута $[0, 2\pi)$.

На практиці експериментатори часто використовують єдиний підхід для статистичного оброблення результатів як лінійних, так і кутових спостережень. Наприклад, і для лінійних, і для кутових вимірювань застосовують як найбільш імовірне значення середнє арифметичне, а розсіювання результатів вимірювання характеризують середнім квадратичним відхиленням. У ряді випадків такий підхід може призвести до грубих помилок.

Розглянемо на прикладі обмеження щодо застосування у кутометрії статистичних методів аналізу розподілених на прямій випадкових величин. Наведений нижче приклад демонструє можливість отримання некоректних оцінок у результаті статистичного оброблення результатів кутових вимірювань.

Приклад 8.1 Нехай в серії M=100 вимірювань отримано значення: $\varphi_j = 1^\circ$ для $j = \overline{1,50}$ і $\varphi_j = 359^\circ$ для $j = \overline{51,100}$. Цілком природно, що середнє значення кута дорівнює 0°, а розсіювання значень – 1°. Водночас формальне застосування відомих для розподілу на прямій оцінок середнього і СКВ, дає інші результати:

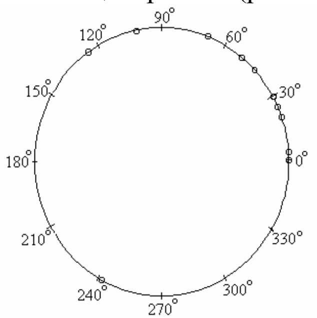
$$\widetilde{\varphi} = \frac{1}{M}\sum_{j=1}^{M}\varphi_j = \frac{50}{100}\left(1^{\circ} + 359^{\circ}\right) = 180^{\circ};$$

$$\widetilde{\sigma}_{\varphi} = \sqrt{\frac{1}{M-1}\sum_{j=1}^{M}\left(\varphi_j - \overline{\varphi}\right)^2} = \sqrt{\frac{50}{99}2\cdot\left(179^{\circ}\right)^2} \approx 180^{\circ}.$$

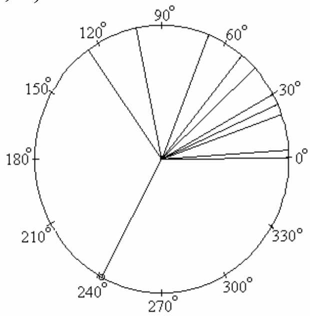
Такі помилки зменшуються, а в ряді випадків і зникають, з віддаленням середнього значення кута від границі інтервалу вимірювання: $\varphi = 0^{\circ}$ або $\varphi = 360^{\circ}$.

Отже, для оброблення результатів кутових вимірювань необхідно використовувати статистичні характеристики, відмінні від тих, що застосовують в аналізі випадкових величин.

Результати кутових спостережень графічно зображені шляхом відтворення виміряних напрямків (кутів) точками на одиничному колі (рис. 8.3, *а*), або векторами, які закінчуються в цих точках, а починаються в центрі кола (рис. 8.3, *б*).



а

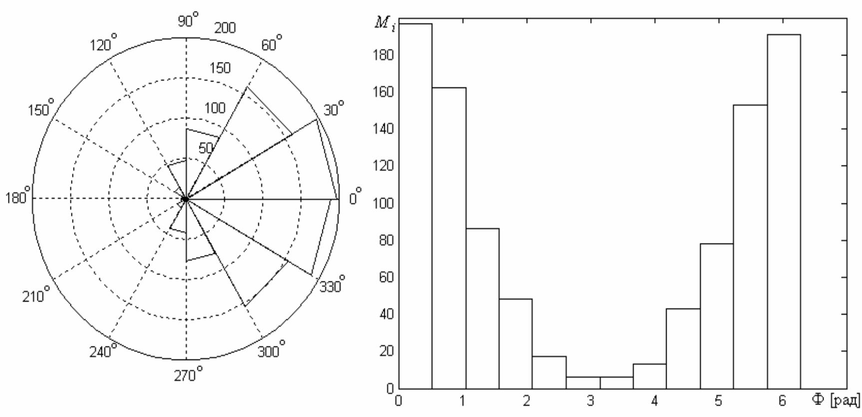


б

Рис.8.3. Графічне зображення результату спостереження кутових величин точками на колі (*а*) та векторами (*б*)

Розбиття кола на клас-інтервали та групування даних за цими клас-інтервалами дозволяє застосувати кругові гістограми для відображення експериментальних даних кутових вимірювань значного обсягу (рис. 8.4, *а*). Кругова гістограма являє собою коло, поділене на m клас-секторів (найчастіше однакові величини). Для цих секторів розраховують кількість спостережених кутів M_j, $j = \overline{1,m}$, значення яких належать j-му інтервалу. У випадку рівних клас-інтервалів на графіках у визначених секторах маємо прямокутники, висота яких дорівнює значенням M_j, або відносним частотам – M_j/M. Графік кутової гістограми спостережень кутів на колі для випадку $m = 12$ та $n = 1000$ зображено на рис.8.4, *а*)

Іншим зручним способом графічного зображення кутових спостережень є графік лінійної гістограми (рис. 8.4, *б*), що являє собою «розгорнуту» на інтервал $[0,2\pi)$ кутову гістограму.



а *б*

Рис.8.4. Кругова *а*) та лінійна (розгорнута кругова) *б*) гістограми кутових спостережень

У теорії статистичних кутових вимірювань як основної математичної моделі використовують модель випадкового кута $\Psi(\omega)$, областю визначення якого є імовірнісний простір (Ω, F, P) - вимірний імовірнісний простір з мірою, де Ω – простір елементарних подій $\omega \in \Omega$; $\mathsf{F} - \sigma$-алгебра підмножини Ω; P – імовірнісна міра, задана на підмножинах F. Імовірнісний простір (Ω, F, P) породжує імовірнісний простір значень випадкового кута – (X, B, P_ψ), де $X \subseteq R$ – множина числової осі R; В – алгебра (σ-алгебра) підмножини X; P_ψ – імовірність (імовірнісна міра) випадкових подій, заданих на підмножинах B.

Розглянемо особливості імовірнісної моделі кута детальніше.

8.2.1. Імовірнісна модель кута на площині

В основу визначення випадкового кута і побудови його моделі покладено конструктивне подання кута на площині у вигляді формули (8.1)

Випадковим кутом називають дійсну одновимірну функцію $\Psi(\omega)$, якщо її дробова частина $\psi(\omega) \in [0,2\pi)$ є випадковою величиною

$$\Psi(\omega) = \left[\frac{\Psi(\omega)}{2\pi}\right] 2\pi + \psi(\omega),\ \omega \in \Omega\,. \tag{8.2}$$

Збіжність у виразі (8.2) розуміють у сенсі збіжності функцій розподілу.

Дробову частину $\psi(\omega)$ позначають як

$$\psi(\omega) \equiv \Psi(\omega)(\operatorname{mod} 2\pi),$$

якщо кут розглядають на колі з одиничним радіусом $r = 1$. Для випадку, коли $r \neq 1$, маємо

$$\psi(\omega) \equiv \Psi(\omega)(\operatorname{mod} 2\pi r).$$

Той факт, що випадковий кут $\Psi(\omega)$ утворюється сумою цілої і дробової частин у вигляді (8.2) визначає особливості побудови його функцій розподілу ймовірностей та характеристичних функцій.

Функція розподілу ймовірностей випадкового кута $\psi(\omega)$ на інтервалі $[0,2\pi)$. В загальному виді визначається наступним чином

$$G(x') = P\{\omega \in \Omega : 0 < \psi(\omega) \le x'\},\ x' \equiv x(\operatorname{mod} 2\pi). \tag{8.3}$$

Вираз (8.3) задає функцію розподілу ймовірностей дробової частини випадкового кута $\psi(\omega) \equiv \Psi(\omega)(\operatorname{mod} 2\pi)$. У порівнянні з традиційно прийнятою в теорії ймовірностей функцією розподілу $G(x')$ випадкової величини вона має ті ж властивості, але на скінченому інтервалі $[0,2\pi)$, а не на всій числовій осі R.

Функція $G(x')$ має такі властивості:

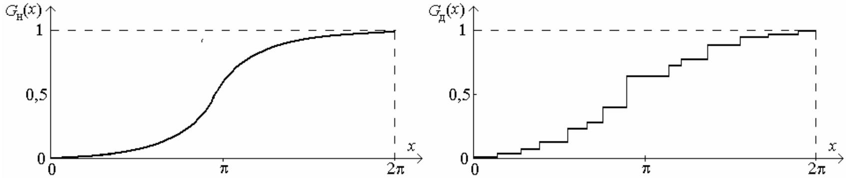
1) $G(x')$ монотонно неспадна на інтервалі $x' \in [0,2\pi)$ і неперервна справа;

2) $G(2\pi) = 1$ і є неперервною в точці $x' = 2\pi$;

3) $G(0) = 0$;

4) $G(x_2') - G(x_1') \geq 0$ для $x_2' \geq x_1'$, $x_1', x_2' \in [0,2\pi)$.

Графіки неперервної $G(x')$ і дискретної функції $G_д(x')$ функцій показано на рис 8.5, *а* і *б* відповідно.



а б

Рис. 8.5. Графіки функцій розподілу: *а* – $G(x')$; *б* – $G_д(x')$

Інтегральна функція розподілів імовірностей послідовності випадкових кутів на R. У загальному виді визначається як

$$F(x) = G(x') + \left[\frac{x}{2\pi}\right] + C,\ x \in R,\ x' \equiv x(\operatorname{mod} 2\pi). \qquad (8.4)$$

Функція $G(x')$ входить у вираз (8.4) як складова компонента.

Функції $F(x)$ має такі властивості:

1) $F(x)$ монотонно неспадна;

2) $F(x)$ неперервна справа на $x \in R$;

3) $F(-\infty) \to -\infty$;

4) $F(\infty) \to \infty$;

5) $F(x') = F(x') - F(0_-),\ \ x' \in [0,2\pi)$;

6) $\mathrm{F}(x) - \dfrac{x}{2\pi}$ є періодичною функцією з періодом 2π;

7) $F(x + 2\pi) - F(x) \equiv 1,\ x \in R$;

8) для $0 \leq x_2 - x_1 \leq 2\pi$ маємо

$$P\{\omega \in \Omega : x_1 < \Psi(\omega) \leq x_2\} = \begin{cases} 0,\ x_2 \leq x_1\ , \\ F(x_2) - F(x_1)(\ x_1 < x_2 \leq x_1 + 2\pi), \\ 1,\ x_2 > x_1 + 2\pi\ ; \end{cases}$$

9) для характерного випадку різниці кутів у межах 2π, тобто $0 < x_2 - x_1 \leq 2\pi$, маємо

$$\begin{cases} F(x_2) - F(x_1) = P\{x_1 < x' \le x_2\} \text{ для } \left[\dfrac{x_2}{2\pi}\right] = \left[\dfrac{x_1}{2\pi}\right]; \\ \left(F(x_2') - F(0)\right) + \left(F(x_1') - F(2\pi)\right) = \\ = P\{(0 \le x' \le x_2') + P(x_1' \le x' \le 2\pi)\} \text{ для} \left[\dfrac{x_2}{2\pi}\right] = \left[\dfrac{x_1}{2\pi}\right] + 1, \end{cases}$$

де $x_1' \equiv x_1 (\bmod 2\pi)$; $x_2' \equiv x_2 (\bmod 2\pi)$;

10) постійна складова *C*, як правило, дорівнює нулю, але залежно від постановки задачі кутових вимірювань може набувати й інших числових значень.

Із наведених властивостей функції $F(x)$, $x \in R$, випливає, що монотонно неспадна функція $F(x)$ має однакові прирости

$$F(x + 2\pi(k+1)) - F(x + 2\pi k) = 1, \ \forall k \in Z,$$

що не суперечить властивостям нормованої ймовірнісної міри.

Загальний вигляд функції $F(x)$ потребує окремого пояснення. Приклад графіка $F(x)$ для неперервного випадку ілюструє рис. 8.6.

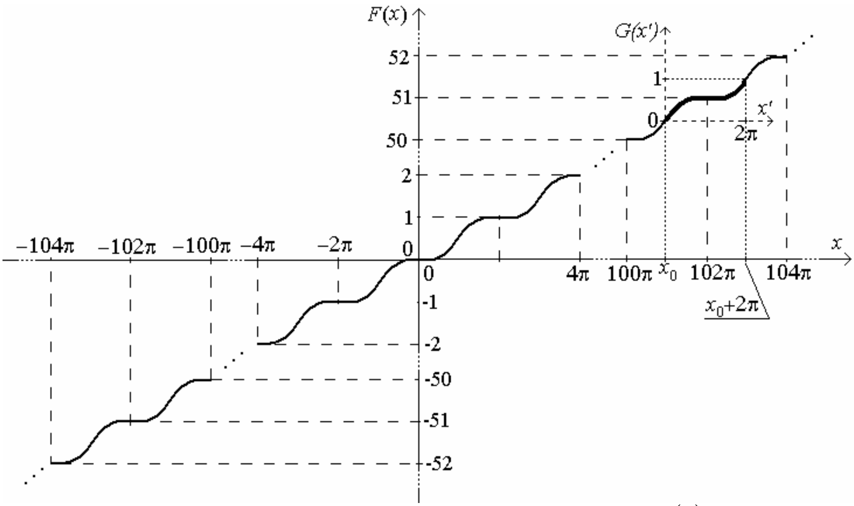


Рис. 8.6. Графік неперервної функції $F(x)$

Значна кількість кутових вимірювань пов’язана з відсутністю фіксованої точки початку координат, тобто як нульовий напрямок можна брати довільне число x_0 з числової осі R. Тоді результати кутових вимірювань доцільно розглядати в інтервалі $\left[x_0, x_0 + 2\pi\right]$ або $\left[x_0 - \pi, x_0 + \pi\right]$, $x_0 \in R$.

На кожному скінченому відрізку $\left[x, x + 2\pi\right)$, $x \in R$, довільний випадковий кут $\Psi(\omega)$ має функцію розподілу ймовірностей $G(x')$ його дробової частини.

Щільність розподілу ймовірностей $p(x)$ ***випадкового кута*** $\psi(\omega)$**.** Функція $p(x)$ для абсолютно неперервних законів розподілу на колі не тільки має деякі властивості, які збігаються з властивостями функції $p(x)$ на прямій, але й має ряд відмінних від них .

Для абсолютно неперервних функцій $G(x')$ і $F(x)$ маємо

$$G\left(x_2'\right) - G\left(x_1'\right) = F\left(x_2' + 2\pi k\right) - F\left(x_1' + 2\pi k\right) = \int_{x_1}^{x_2} p(y)dy,$$

$$x_2' \geq x_1', \quad x_1', x_2' \in [0, 2\pi), \quad k \in Z.$$

Функція $p(x)$ називається *щільністю розподілу ймовірностей випадкового кута* $\psi(\omega)$ *на* $[0, 2\pi)$ і має такі властивості:

1) $p(x + 2\pi) = p(x)$, є періодичною функцією з періодом 2π ;

2) $p(x) \geq 0, \quad x \in [0, 2\pi)$;

3) $\int_0^{2\pi} p(x)dx = \int_{2\pi k}^{2\pi(k+1)} p(x)dx = 1, \ k \in Z$.

Щільність розподілу ймовірностей суми двох незалежних випадкових кутів $[\psi_1(\omega) + \psi_2(\omega)] \bmod 2\pi$ визначається згорткою щільності розподілу ймовірностей її складових

$$p(\theta) = \int_0^{2\pi} p_2(\theta - x)p_1(x)dx = \int_0^{2\pi} p_1(\theta - x)p_2(x)dx .$$

Характеристична функція f_n ***випадкового кута на*** $[0, 2\pi)$**.** Характеристична функція випадкового кута є періодичною з періодом 2π і визначається для цілих значень $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, тобто для $n \in Z$ як

$$f_n = \mathbf{M}\{\exp(in\Psi(\omega))\} = \int_0^{2\pi} e^{inx} dG(x) = \int_{2\pi k}^{2\pi(k+1)} e^{inx} dF(x),\ k \in Z\ .$$

Характеристичну функцію f_n випадкового кута $\psi(\omega) \equiv \Psi(\omega)(\mathrm{mod}\,2\pi)$ можна подати у вигляді

$$f_n = a_n + ib_n\ ,$$

де множини дійсних чисел $\{a_n, b_n\}$ обчислені стосовно початкового нульового напрямку $\alpha_0 = 0$:

$$a_n = \mathbf{M}\{\cos n\Psi(\omega)\} = \int_0^{2\pi} \cos nx dG(x);$$

$$b_n = \mathbf{M}\{\sin n\Psi(\omega)\} = \int_0^{2\pi} \sin nx dG(x)\ .$$

Характеристична функція випадкових кутів має такі властивості.

1. Модуль характеристичної функції $|f_n| \le 1$.

2. Для $n = 0$ маємо $f_0 = 1$.

3. Характеристична функція від'ємного аргумента дорівнює комплексноспряженій характеристичній функції: $f_{-n} = f_n^*$, оскільки $\alpha_{-n} = \alpha_n$, $\beta_{-n} = -\beta_n$.

4. Характеристична функція суми незалежних випадкових кутів $\psi_1(\omega), \ldots \psi_m(\omega)$ дорівнює добутку характеристичних функцій компонент:

$$f_n = \prod_{j=1}^{m} f_n^{(j)}\ ,$$

де $f_n^{(j)}$ – характеристична функція n-го порядку j-го випадкового кута.

5. Характеристична функція кута $[\psi(\omega) + \nu]\mathrm{mod}\,2\pi$, де довільний дійсний $\nu = \mathrm{const}$, дорівнює

$$\mathbf{M}e^{in(\psi+\nu)} = e^{in\nu} f_n\ .$$

6. Щільність розподілу ймовірностей випадкового кута однозначно визначається її характеристичною функцією

$$p(\theta) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{-in\theta} . \tag{8.5}$$

Формула (8.5) являє собою розвинення $p(\theta)$ у ряд Фур'є. Відповідно до критерію Діріхле апроксимація (8.5) виконується для широкого класу функцій $p(\theta)$, які на інтервалі $[0,2\pi)$ мають лише скінченну кількість максимумів і мінімумів та скінченну кількість розривів. Використання виразу (8.5) у ряді випадків дозволяє істотно спростити вирази щільності розподілу ймовірностей випадкових кутів.

Характеристичну функцію можна обчислити відносно довільного початкового напряму ν. У цьому разі маємо

$$f_n(\nu) = \mathbf{M} e^{in(\psi-\nu)} = \alpha_n(\nu) + i\beta_n(\nu) = \rho_n(\nu) e^{i\mu_n(\nu)} .$$

Для характеристичної функції (8.5) виконуються такі співвідношення :

$$\rho_n(\nu) = \rho_n, \;\; \mu_n(n) \equiv (\mu_n - n\nu) \bmod 2\pi . \tag{8.6}$$

Кожна з наведених вище функцій на $[0,2\pi)$ – розподіл імовірностей $G(x')$ випадкового кута, щільність розподілу $p(x')$ імовірностей випадкового кута, характеристична функція f_n випадкового кута – повністю задає випадковий кут $\psi(\omega)$ на $[0,2\pi)$.

8.2.2. Закони розподілів імовірностей випадкових кутів

Розподіли ймовірностей випадкових кутів на колі досліджуються лише починаючи з XX ст. Р. Мізес дослідив розподіл, названий його ім'ям (1918), намотаний гауссівський розподіл вивчав Ф. Перрен (1928). Значний внесок в розвиток ідей статистичного аналізу випадкових кутів у XX ст.. зробили такі вчені, як Р.А. Фішер, Е.Дж. Гамбел , Д. Дуранд , Дж. А. Грінвуд , Г. С. Ватсон , Е. Дж. Вильямс, С.Р. Рао, Д.Р. Рао, Е.С. Пірсон, К. В. Мардіа та ін.

Однією з характерних ознак кола є виконання на ньому операції додавання за модулем 2π. Це обумовлює властивість періодичності законів щільності розподілу ймовірностей випадкового кута, чим вони істотно відрізняються від розподілів імовірностей випадкових величин, і що потребує врахування під час статистичного оброблення. Загальний вигляд щільності розподілу ймовірностей випадкового кута $p(\theta)$, $\theta \in (-\infty,\ \infty)$, зображено на рис. 8.7. Цей графік побудований за умов апріорної невизначеності розташування інтервалу вимірювання $[\theta_п, \theta_п + 2\pi)$, де $\theta_п$ – початок інтервалу, і для якого виконується умова нормування: $\int\limits_{\theta_п}^{\theta_п+2\pi} p(\theta) d\theta = 1$.

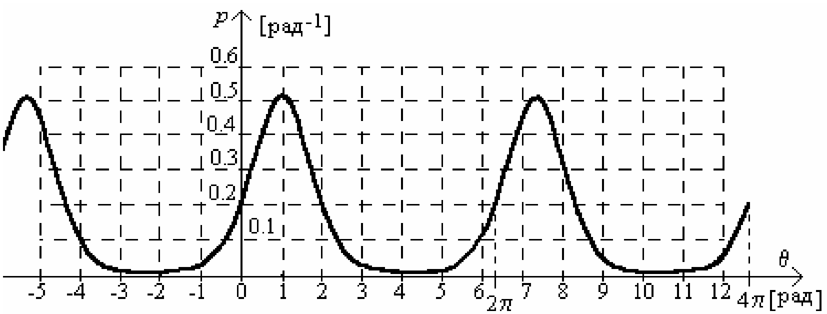


Рис. 8.7. Загальний вигляд щільності розподілу ймовірностей випадкового кута

Щільність розподілу ймовірності $p(\theta)$, показана на рис. 8.7., є періодичною з періодом 2π. У теорії статистичної кутометрії такі розподіли називають одночастотними. Багаточастотні розподіли мають період менший за 2π у певне ціле число разів, тобто період $\frac{2\pi}{j}$, $j = 2,\ 3,\ldots$.

Розглянемо характерніші закони розподілу ймовірностей випадкових кутів на колі.

Намотаний гауссівський розподіл. Цей розподіл відіграє винятково важливу роль у статистиці випадкових кутів. Він належить до сім’ї намотаних розподілів, яка утворюється під час нелінійного перетворення випадкової величини $\xi(\omega)$ у випадковий кут $\psi(\omega)$ видгляду

$$\psi(\omega) \equiv [K\xi(\omega)] \bmod 2\pi, \tag{8.7}$$

де K – масштабний коефіцієнт перетворення.

Перетворення (8.7) приводить до трансформації законів розподілу на прямій в намотані закони розподілу ймовірностей випадкових кутів (тобто в розподіли, що намотані на одиничне коло, тобто коло одиничного радіуса).

Якщо на прямій задано розподіл $F(x)$ випадкової величини $\xi(\omega)$, то відповідний намотаний закон розподілу $F_{2\pi}(\theta)$ випадкового кута $\psi(\omega) \in [0,2\pi)$ у загальному випадку визначають за формулою

$$F_{2\pi}(\theta) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} [F(\theta + 2\pi j) - F(2\pi j)], \;\; \theta \in [0,2\pi), \;\; j \in Z .$$

Якщо випадкова величина $\xi(\omega)$ має щільність розподілу ймовірності $p(x)$, то неперервний випадковий кут $\psi(\omega)$ також розподілений неперервно зі щільністю розподілу

$$p_{2\pi}(\theta) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} p(\theta + 2\pi j), \;\; j \in \mathbf{Z}. \tag{8.8}$$

У загальному випадку функція $p_{2\pi}(\theta)$ несиметрична відносно середини інтервалу $[0,2\pi)$, а на його кінцях набуває однакових значень: $p_{\nu}(0) = \lim\limits_{\theta \to 2\pi} p_{\nu}(\theta)$. У багатьох випадках значення j в сумі можна обмежити числами $\pm 1 .... \pm 5$, оскільки розподіли ймовірностей випадкових величин мають скінченні дисперсії.

Довільний закон розподілу на прямій можна перетворити в намотаний. Оскільки для випадкової величини $\xi(\omega)$ часто обґрунтовується гауссівський розподіл ймовірностей, слід очікувати, що в статистичній кутометрії також часто трапляється намотаний гауссівський розподіл, щільність розподілу ймовірності якого задається виразом

$$p_{2\pi}(\theta/\mu,\sigma)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\sum_{j=-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{[(\theta-\mu)(\mathrm{mod}\,2\pi)+2\pi j]^2}{2\sigma^2}\right), \quad (8.9)$$

де μ – математичне сподівання; σ – середньоквадратичне відхилення випадкової величини $\xi(\omega)$.

Чим менше значення σ, тим більше намотаний гауссівський закон розподілу ймовірностей концентрується в околі математичного сподівання. Цей закон має важливу властивість: сума незалежних кутів $\sum_{i=1}^{n}\theta_i$, кожний з яких має розподіл (8.9), теж має такий самий розподіл, але з іншими характеристиками.

Приклад трансформації випадкової величини з гауссівською щільністю розподілу ймовірності у випадковий кут відповідно до формули (8.6) для $K=1$ показано на рис. 8.8.

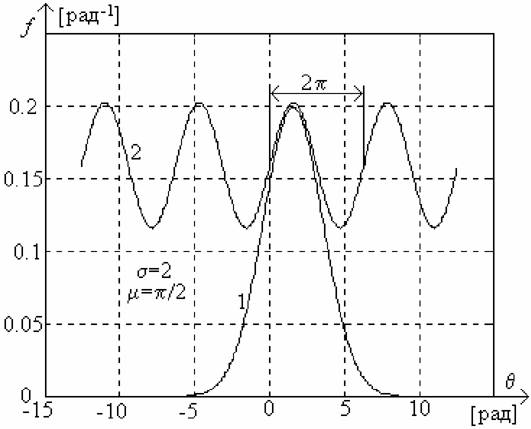


Рис. 8.8. Графіки щільності розподілу ймовірностей гауссівського (*1*) і намотаного гауссівського (*2*) розподілів з параметрами

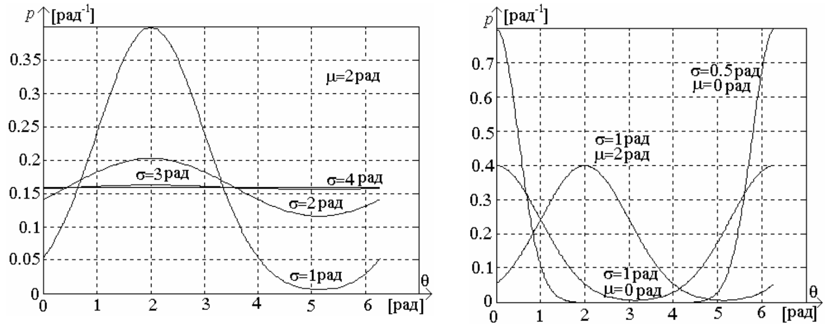
Характеристична функція намотаного гауссівського розподілу $f_{2\pi}(n)=f_n$ імовірностей має вигляд

$$f_n=\alpha_n=\exp\left(-\frac{n^2\sigma^2}{2}\right),\ \beta_n=0,\ n\in Z. \quad (8.10)$$

У статистичній кутометрії відома центральна гранична теорема, яка доводить, що для незалежних випадкових кутів

$\psi_1(\omega),...,\psi_n[\omega]$, що мають однакову функцію розподілу імовірності $F(\theta)$, розподіл імовірностей нормованої суми кутів $\psi_\Sigma(\omega)=\left[\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{n}\psi_j(\omega)\right]\mathrm{mod}\,2\pi$ у випадку $n\to\infty$ наближається до намотаного гауссівського розподілу.

Приклади щільностей розподілу ймовірностей намотаного гауссівського розподілу для різних значень параметрів показано на рис. 8.9, *а, б*. Із цих графіків видно, що намотаний гауссівський розподіл одновершинний і симетричний відносно значення $\theta\equiv\mu(\mathrm{mod}\,2\pi)$.



а *б*

Рис. 8.9. Щільність намотаного гауссівського розподілу ймовірностей випадкових кутів з параметрами: *а* – $\mu=2$ рад і $\sigma=(1;\ 2;\ 3;\ 4)$ рад; *б* – $\mu=0;2$ рад і $\sigma=(0,5;1)$ рад.

На інтервалі $[0,2\pi)$ відношення максимального до мінімального значень щільності розподілу ймовірностей (тобто значення щільності розподілу для кутів μ і $(\mu+\pi)(\mathrm{mod}\,2\pi)$) не залежить від μ, тому його доцільно визначати для $\mu=0$:

$$\frac{\sum\limits_{j=-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{(2\pi j)^2}{2\sigma^2}\right)}{\sum\limits_{j=-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{(2\pi j+\pi)^2}{2\sigma^2}\right)}=\frac{1+2\sum\limits_{j=1}^{\infty}\exp\left(-\frac{(2\pi j)^2}{2\sigma^2}\right)}{2\sum\limits_{j=0}^{\infty}\exp\left(-\frac{(2\pi j)^2}{2\sigma^2}\right)}=1-\left[2\sum_{j=0}^{\infty}\exp\left(-\frac{(2\pi j)^2}{2\sigma^2}\right)\right]^{-1}.$$

Якщо $\sigma \to \infty$, граничний розподіл перетворюється на рівномірний зі значенням щільності $1/2\pi$ (на рис. 8.9, *а* графіки зі значеннями параметра $\sigma = 3$ рад та $\sigma = 4$ рад майже не розрізняються), а збільшення μ приводить до зміщення максимуму функції в бік більших значень кутів. На інтервалі $[0,2\pi)$ розподіл (8.8) має дві точки перегину.

Розподіл Мізеса. У статистичному аналізі випадкових кутів вагому роль відіграє розподілу Мізеса. Щільність розподілу ймовірностей Мізеса випадкового кута $\psi(\omega)$ визначається формулою

$$p_M(\theta \mid \mu, k) = \frac{1}{2\pi I_0(k)} e^{k\cos(\theta-\mu)},\ |\mu| < \infty,\ k > 0, \qquad (8.11)$$

де $I_0(k)$ – модифікована функція Бесселя першого роду нульового порядку

$$I_0(k) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{k\cos\theta} d\theta,$$

де μ – круговий середній напрям випадкового кута; *k* – параметр концентрації випадкового кута в околі μ.

Графіки функцій $f(\theta)$ для різних значень параметрів зображено на рис. 8.10.

Зі збільшенням параметра *k* розподіл Мізеса концентрується в околі μ (якщо *k*=2 *і* $\mu = 0{,}5\pi$*,* розподіл майже повністю зосереджений на дузі від 0 до 3 рад, а якщо $k \to 0$, то перетворюється на рівномірний).

Розподіл Мізеса одновершинний і симетричний відносно значення μ, яке є математичним сподіванням цього розподілу. Відношення значення щільності розподілу, аргументом якої є мода μ до значення щільності в антимоді $(\mu + \pi)(\mathrm{mod}\, 2\pi)$ дорівнює e^{2k}. В інтервалі $[\mu - \pi, \mu + \pi]$ щільність (8.10) має дві точки перегину – $\mu \pm \arccos\dfrac{\sqrt{1+4k^2}-1}{2k}$.

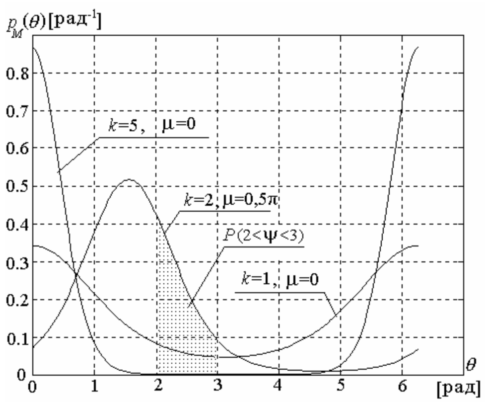


Рис. 8.10. Графіки щільності розподілу ймовірностей Мізеса для різних значень параметрів k і μ

Характеристичну функцію розподілу Мізеса визначають як

$$f_n = \alpha_n = \frac{I_n(k)}{I_0(k)}. \tag{8.12}$$

Цей розподіл має таку важливу властивість: найбільш правдоподібною оцінкою параметра μ є круговий середній напрямок.

Відповідний вибір параметрів намотаного гауссівського розподілу ймовірності дозволяє задовільно апроксимувати його розподілом Мізеса. Визначимо співвідношення для параметрів σ і k щільностей ймовірностей (8.9) і (8.11), за якого дані розподіли мають однакову кругову дисперсію випадкових кутів. Для цього прирівняємо модулі їх характеристичних функцій (8.10) і (8.12) для $u = 1$. Маємо

$$\sigma = \sqrt{-2\ln\frac{I_1(k)}{I_0(k)}}.$$

Оскільки закони задовільно апроксимують один одного, їх подібність дозволяє сподіватись, що тією чи тією мірою ці властивості притаманні обом розподілам.

Крім того, розподіл Мізеса порівняно з намотаним гауссівським розподілом має математичний запис, який приводить до простіших оцінок параметрів розподілу.

Стислу інформацію про деякі інші неперервні розподіли ймовірностей випадкових кутів зведено в табл. 8.1.

Таблиця 8.1

Розподіли ймовірностей випадкових кутів

Назва	**Щільність розподілу ймовірностей** $p(\theta)$	**Характеристична функція** f_n
Рівномірний	$\dfrac{1}{2\pi}$	$\dfrac{e^{2\pi ni}-1}{2\pi ni}=\begin{cases}1, & n=0,\\ 0, & n\neq 0\end{cases}$
Кардіоїдний	$(2\pi)^{-1}[1+2\rho\cos(\theta-\mu)]$, $\lvert\mu\rvert<\infty,\ \ \lvert\rho\rvert<0{,}5$	–
Трикутний	$\dfrac{1}{8\pi}\left[4-\pi^2\rho+2\pi\rho\lvert\pi-\theta\rvert\right]$, $\rho\le\dfrac{4}{\pi^2}$	$\alpha_{2n-1}=\dfrac{\rho}{(2n-1)^2}$, $\alpha_{2n}=0$, $\beta_n=0$
Намотаний Коші	$\dfrac{1}{2\pi}\cdot\dfrac{1-\rho^2}{1-\cos 2\rho+\rho^2}$, $\rho=e^{-a}\in[0,1]$	$\rho^{\lvert a\rvert}$

Примітка. Розподіл Коші на прямій має щільність розподілу ймовірностей

$$p(x,a)=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{a}{a^2+x^2}, \qquad x\in R,\ \ a>0 .$$

Дискретний розподіл імовірностей випадкових кутів, для якого визначено ймовірності

$$P\left[\psi\equiv\left(\nu+\frac{2\pi q}{l}\right)\mathrm{mod}\,2\pi\right]=P_q,\ q=\overline{0,l-1}, \tag{8.13}$$

дістав назву ґратчастого розподілу, а величина $2\pi/l$ – кроку ґратки. Для ймовірностей (8.13) виконується умова нормування: $\sum\limits_q P_q=1$. Цей розподіл можна вважати зосередженим у вершинах вписаного в одиничне коло правильного l-кутника. Якщо $P_q=l^{-1}$, то розподіл імовірностей перетворюється у рівномірний дискретний.

Характеристична функція ґратчастого розподілу у випадку $\nu \equiv 0 \mod 2\pi$ дорівнює

$$f_n = \sum P_q \exp\left(\frac{2\pi qni}{l}\right).$$

Для гратчастого дискретного розподілу маємо

$$f_n = \begin{cases} 1, & n \equiv 0 \mod 2\pi, \\ 0, & n \neq 0 \mod 2\pi. \end{cases}$$

8.2.3. Числові характеристики випадкового кута

Під час дослідження випадкових кутів разом із функцією розподілу, щільністю розподілу, характеристичною функцією важливу роль відіграють числові характеристики випадкового кута, які визначаються за допомогою тригонометричних моментів. Розглянемо найважливіші з них.

Тригонометричні моменти. Тригонометричні моменти випадкового кута $\Psi(\omega)$ відносно довільно вибраного напрямку $\varphi_0 \equiv \Phi_0(\mathrm{mod}\, 2\pi)$, $\varphi_0 \in [0,2\pi)$, $\Phi_0 \in R$ визначаються за формулою

$$f_n(\varphi_0) = \mathbf{M}\left\{e^{in[\Psi(\omega)-\varphi_0]}\right\} = a_n(\varphi_0) + i\beta_n(\varphi_0) = \rho_n(\varphi_0)e^{i\mu_n(\varphi_0)}. \quad (8.14)$$

У цьому випадку виконуються такі співвідношення:

$$f_n(\varphi_0) = f_n(0)e^{-in\varphi_0}, \quad \rho_n(\varphi_0) = \rho_n(0),$$
$$\mu_n(\varphi_0) \equiv (\mu_n(0) - n\varphi_0)(\mathrm{mod}\, 2\pi),$$
$$a_n(\varphi_0) = a_n(0)\cos n\varphi_0 + \beta_n(0)\sin n\varphi_0,$$
$$b_n(\varphi_0) = -a_n(0)\sin n\varphi_0 + \beta_n(0)\cos n\varphi_0.$$

Центральні тригонометричні моменти. Визначаються як тригонометричні моменти при $\rho_1(\varphi) > 0$ відносно напрямку з полярним кутом μ_1, якій знаходять з рівняння (8.14) для $n = 1$.

Центральні тригонометричні моменти визначаються за формулами:

$$f_n(\mu_1) = f_n(0)e^{-in\mu_1(0)} = a_n(\mu_1) + ib_n(\mu_1),$$
$$a_n(\mu_1) = \rho_n(0)\cos(\mu_n(0) - n\mu_1(0)),$$
$$b_n(\mu_1) = \rho_n(0)\sin(\mu_n(0) - n\mu_1(0)).$$

Для $n = 1$ маємо: $a_1(\mu_1) = \rho_1(0)$, $b_1(\mu_1) = 0$.

Кругове середнє значення випадкового кута. Синонімом назви такої характеристики випадкового кута є *круговий середній напрямок,* або *круговий середній кут,* які по суті визначають найбільш імовірне значення випадкового кута.

Круговим середнім значенням випадкового кута $\psi(\omega) \equiv \Psi(\omega)(\mathrm{mod}\, 2\pi)$ називається полярний кут

$$\mu_1(0) = Argf_1(0) = ArgM\left\{e^{i\Psi(\omega)}\right\} = Arg\left(\rho_1(0)e^{i\mu_1(0)}\right),$$

за умови, що $\mathbf{M}\left\{e^{i\Psi(\omega)}\right\} \neq 0$. Якщо ця умова не виконується, то кругове середнє значення α_1 у півінтервалі $[0,2\pi)$ однозначно не визначається.

Кругове середнє відхилення. $\delta(\nu)$ випадкового кута $\psi(\omega)$ відносно фіксованого кута ν визначається як математичне сподівання випадкового кута

$$\min\left\{\psi'(\omega),\ 2\pi - \psi'(\omega)\right\},$$

де $\psi'(\omega) \equiv (\psi(\omega) - \nu)(\mathrm{mod}\, 2\pi)$, тобто $\delta(\nu)$ задається як величина

$$\delta(\nu) = \int_0^{\pi} \theta dF(\theta + \nu) + \int_{\pi}^{2\pi} (2\pi - \theta) dF(\theta + \nu).$$

Кругова дисперсія. Величина $\upsilon = 1 - \rho_1(0) = 1 - |f_1(0)|$ називається *круговою дисперсією випадкового кута* $\psi(\omega)$. Така величина вводиться як характеристика відхилення випадкового кута $\psi(\omega) \equiv \Psi(\omega)(\mathrm{mod}\, 2\pi)$ від фіксованого кута $\varphi' \in [0,2\pi)$

$$\upsilon(\varphi') = \mathbf{M}\{1 - \cos(\psi(\omega) - \varphi')\} = 1 - \mathrm{Re}\,\mathbf{M}\{\exp i[\psi(\omega) - \varphi']\}.$$

У випадку $\rho_1(0) > 0$ маємо

$$\upsilon(\varphi') = 1 - \rho_1(0)\cos(\varphi' - \mu_1(0)) = 1 - \rho_1(0) + 2\rho_1(0)\left(\sin\frac{\varphi' - \mu_1(0)}{2}\right)^2. \quad (8.15)$$

Вираз (8.15) досягає мінімального значення, коли $\varphi' = \mu_1(0)$. Таким чином, кругова дисперсія випадкового кута $\psi(\omega)$ набуває мінімального значення, яке дорівнює величині $\upsilon(\alpha_1) = 1 - \rho_1(0)$ для $\varphi' = \mu_1(0)$, тобто коли напрямком φ' є круговий середній напрямок випадкового кута $\psi(\omega)$. Множина значень кругової дисперсії належить інтервалу $[0,1)$.

Кругова медіана. *Круговою медіаною* неперервного розподілу на колі $G(x')$, $x' \in [0,2\pi)$ випадкового кута $\psi(\omega)$ називають значення кута $\theta_m \in [0,2\pi)$, яке є одним з розв'язком рівняння

$$Q(\theta_m) = F(\theta_m + \pi) - F(\theta_m) - 0{,}5 = \int_{\theta_m}^{\theta_m + \pi} p(\theta) d\theta - 0{,}5 = 0, \qquad (8.16)$$

де $F(\theta_m)$ – значення функції розподілу випадкового кута в точці θ_m, і для якого значення $Q(\theta_m - 0{,}5\pi)$ є максимальним.

Розглянемо основні властивості кругової медіани. Для одновершинних розподілів медіана завжди визначається однозначно. Одновершинні неперервні розподіли на колі відрізняються тим, що в інтервалі $[0,2\pi)$ існують такі кути φ_1 і φ_2, що під час руху точки по одиничному колу від φ_2 до φ_1 в обох напрямках функція $p(x') = \dfrac{dF(x')}{dx}$ є монотонно неспадною.

Інша важлива властивість медіани випадкового кута стосується його кругового середнього відхилення. Відомо, що у випадку одновершинного розподілу кругове середнє відхилення досягає мінімуму в точці θ_m.

Мода. Означення моди для випадкових кутів формулюється таким чином: якщо щільність розподілу ймовірностей випадкових кутів неперервна і одновершинна, і в інтервалі $[0,2\pi)$ існують такі значення кутів θ_1 і θ_2, що зі зміною кута θ від θ_1 до θ_2 по колу в кожному з двох можливих напрямків похідна $\dfrac{dF(\theta)}{d\theta}$ поводить себе як монотонно неспадна функція, то значення θ_2 називається *модою* розподілу, а θ_1 – *антимодою*.

Якщо щільність розподілу ймовірностей $\psi(\omega)$ одновершинна і симетрична, то круговий середній напрямок, мода і медіана збігаються (за модулем 2π), а уявні частини центральних тригонометричних моментів дорівнюють нулю:

$$b_u(\nu) = M[\sin(u(\psi - \nu))] = 0, \ \ u = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots .$$

Ця властивість має винятково важливе значення для статистичної кутометрії, оскільки найчастіше розподіли ймовірностей випадкових кутів задовольняють ці умови. випадкових кутів.

Асиметрія. Для оцінки асиметрії закону розподілу ймовірностей вводиться *коефіцієнт* γ_c *асиметрії*, який визначається як

$$\gamma_c = \frac{\beta_2(\mu_1)}{v^{3/2}}.$$

Коефіцієнт γ_c характеризує асиметрію закону розподілу ймовірностей випадкового кута відносно напрямку $\theta = \mu_1$ і дорівнює нульові для симетричних розподілів ймовірностей.

Ексцес. Згладжуваність кривих розподілу ймовірностей випадкових кутів в околі їх моди характеризує *коефіцієнт ексцесу*

$$\gamma_e = \frac{\alpha_2(\mu_1) - (1 - v)^4}{v^2}.$$

Коефіцієнт γ_e порівнює криві всіх законів розподілу ймовірностей $\psi(\omega)$ з намотаним гауссівським розподілом, для якого цей коефіцієнт дорівнює нулю (коефіцієнт ексцесу близький до нуля і для розподілу Мізеса).

Результуюча довжина вектора. Величину $\rho = \rho_1 = |f_1|$ називається *результуючою довжиною вектора*, який являє собою математичне сподівання випадкового вектора $(\cos(\psi(\omega)), \ \sin(\psi(\omega)))$, що відповідає його характеристичній функції. Значення ρ використовується для характеристики розкиду значень випадкового кута відносно певного значення ν.

Кругове стандартне відхилення. Характеристична функція (8.10) дозволяє встановити зв'язок між дисперсією σ і круговою дисперсією v випадкового кута з намотаним гауссівським розподілом імовірності. Дійсно, для $n = 1$ маємо $\exp(-0{,}5\sigma^2) = \rho_1 = 1 - v$, звідки отримуємо

$$\sigma = \sqrt{-2\ln(1-\upsilon)}, \quad \sigma \in [0, \infty) .$$

Значення σ також можна використати як міру розсіювання випадкових кутів (у певному сенсі вона нагадує СКВ і, як правило, виражається в радіанах, а не у відносних одиницях довжини вектора, що для υ). Цю величину називають *круговим стандартним відхилення*м.

Для кращого розуміння особливостей статистичного оброблення результатів кутових вимірювань у табл. 8.2 порівнюються означення та основні статистики випадкових величин і кутів.

Таблиця 8.2

Означення та основні статистичні характеристики випадкових величин і випадкових кутів

Характе-ристика	**Випадкова величина**	**Випадковий кут**
Випадкові величина, кут	Дійсною випадковою величиною називається функція $\xi(\omega)$ з областю визначення $\Omega = \{\omega\}$ та областю значень $X \subset R$ така, що для довільного $x \in X$ множина тих $\omega \in \Omega$, для яких $\xi(\omega) < x$ є подією A з множини випадкових подій $\Im$, яка задана на фіксованому ймовірнісному просторі $(\Omega, \Im, P)$.	Дійсним випадковим кутом є функція $\Psi(\omega)$ з областю визначення $\Omega = \{\omega\}$ та областю значень $\Theta \subset R$ така, що для довільного $\theta \in \Theta$ дробова частина кута $\psi(\omega) = \Psi(\omega) - \left[\frac{\Psi(\omega)}{2\pi}\right]^{+} 2\pi = = \Psi(\omega) \bmod 2\pi$ є випадковою величиною.

Продовження табл. 8.2

Характе-ристика	Випадкова величина	Випадковий кут
Функція розподілу ймовірностей	Функція розподілу ймовірностей $F(x)$, $x \in R$, випадкової величини $\xi(\omega)$ визначається виразом $F(x) = P\{\omega \in \Omega : \xi(\omega) < x\}$, $-\infty < x < \infty$. **Властивості $F(x)$:** 1) монотонність (якщо $x_1 < x_2$, то $F(x_1) \le F(x_2)$); 2) неперервність зліва ($\lim\limits_{x \uparrow x_0} F(x) = F(x_0)$); $F(-\infty) = \lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$; $F(\infty) = \lim\limits_{x \to \infty} F(x) = 1$	Функція розподілу ймовірностей $F(\theta)$ випадкового кута $\Psi(\omega)$ визначається як $$F(\theta) = G(\theta') + \left[\frac{\theta}{2\pi}\right]^{+} + C,$$ $-\infty < \theta < \infty,\ 0 \preceq \theta' \prec 2\pi,$ де $G(\theta')$ – функція розподілу випадкової величини $\psi(\omega)$; θ' – дробова частина θ; C – довільна стала. **Властивості $F(\theta)$:** 1) монотонність (якщо $\theta_1 \prec \theta_2$), то $F(\theta_1 \le F(\theta_2))$; 2) $G(\theta')$ неперервна справа ($\lim\limits_{\theta' \downarrow \theta'_o} G(\theta') = G(\theta'_0)$), тому $G(2\pi) = 1$; $F(\theta + 2\pi n) - F(\theta) = n$; $n = 0,1,2,...$; $F(-\infty) = \lim\limits_{\theta \to -\infty} F(\theta) = 0$; $F(\infty) = \lim\limits_{\theta \to \infty} F(\theta) \to \infty$
Щільність розподілу ймовірностей	Якщо існує така функція $p(x)$, що за будь-яких $x \in R$ виконується співвідношення $$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(y)dy,$$ то $p(x)$ називається щільністю розподілу ймовірностей. **Властивості $p(x)$:** 1) $p(x) \ge 0$; 2) $\int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = 1$;	Якщо існує така функція $p(\theta)$, $\theta \in [0,2\pi)$, що за будь-яких θ виконується рівність $$F(\theta_2) - F(\theta_1) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} p(\theta)d\theta,$$ $(\theta_2 - \theta_1) \in [0,2\pi)$ то $p(\theta)$ називається щільністю розподілу ймовірностей на колі. **Властивості $p(\theta)$:** 1) $p(\theta) \ge 0$; 2) $p(\theta + 2\pi) \equiv p(\theta)$;

Продовження табл. 8.2

Характе-ристика	Випадкова величина	Випадковий кут
Щільність розподілу ймовірностей	3) за будь-яких a і b $P\{a \le \xi < b\} = F(b) - F(a) = = \int_a^b p(x)dx$	3) $\int_{\theta_1}^{\theta_1+2\pi} p(\theta)d\theta = 1$; 4) для будь-яких θ_1, θ_2 $P(\theta_1 < \Psi \le \theta_2) = \begin{cases} 0, \theta_2 \preceq \theta_1, \\ F(\theta_2) - F(\theta_1), \\ \theta_1 \preceq \theta_2 \preceq \theta_1 + 2\pi, \\ 1, \theta_2 \succ \theta_1 + 2\pi. \end{cases}$ 5) $p(\theta)$ періодична функція на R з періодом 2π.
Характеристична функція	Характеристичною функцією випадкової величини $\xi(\omega)$ називається математичне сподівання випадкової функції $e^{(iu\xi)}$, тобто $f(u) = \mathrm{M}e^{iu\xi} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{(iux)}dF(x),$ $u \in (-\infty, \infty).$	Характеристичною функцією випадкового кута $\Psi(\omega)$ (послідовність тригонометричних моментів відносно нульового напрямку) називається математичне сподівання функції $\exp(jp\psi)$: $f_n = \mathbf{M}e^{in\psi} = \int_0^{2\pi} \exp(in\theta')dG(\theta') = = \int_{2\pi k}^{2\pi(k+1)} \exp(in\theta)dF(\theta) = \rho_n \exp(i\mu_n),$ де k – довільне ціле число; $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.
Квантилі законів розподілу	Розв'язок рівняння $F(\alpha_\gamma) = \gamma$, де γ – задана ймовірність $(0 < \gamma < 1)$ відносно $\alpha_\gamma \in (-\infty, \ \infty)$, називається квантилем розподілу $F(x)$ рівня γ, де $\gamma = \int_{-\infty}^{\alpha_\gamma} p(x)dx$	Розв'язок рівняння $G(\theta'_\gamma) = \gamma$, де γ – задана ймовірність $(0 < \gamma < 1)$ відносно $\theta'_\gamma \in [0, 2\pi)$ називається квантилем розподілу $F(\theta)$ рівня γ, де $\gamma = \int_0^{\theta'_\gamma} p(\theta)d\theta$
Нерівність Чебишева	$P\{\xi - \mathbf{M}\xi\| \ge g\sqrt{\mathbf{D}\xi}\} \le \frac{1}{g^2}$	$P\left\{\left\|\sin\frac{\Psi - \mu_1}{2}\right\| > \varepsilon\right\} < \frac{v}{2\varepsilon^2},$ $0 < \varepsilon < 1, \ 0 < \frac{v}{2\varepsilon^2} < 1.$

Закінчення табл. 8.2

Характе-ристика	Випадкова величина	Випадковий кут
Перший початковий момент (середнє значення)	Математичним сподіванням випадкової величини $\xi(\omega)$ з функцією розподілу $F(x)$ називається число, визначене інтегралом Стілтьєса $$\mathbf{M}\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x dF(x).$$	Круговим середнім значенням випадкового кута $\Psi(\omega)$ з функцією розподілу $G(\theta')$, для якого $f_1 = \mathbf{M}e^{i\Psi} \neq 0$, називається кут $$\mu_1 = \mathrm{Arg} f_1$$
Модуль тригоному тричного моменту τ_1	—	Результуючою довжиною вектора, який являє собою математичне сподівання випадкового вектора $(\cos\Psi, \sin\Psi)$, є величина $\rho = \lvert f_1 \rvert$
Розкид значень випадкової величини і випадкового кута	Дисперсією випадкової величини $\xi(\omega)$ з функцією розподілу $F(x)$ називається математичне сподівання квадрата відхилення значення $\xi(\omega)$ від її математичного сподівання $\mathbf{M}\xi$: $$\mathbf{D}\xi = \mathbf{M}(\xi - \mathbf{M}\xi)^2 =$$ $$= \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mathbf{M}\xi)^2 dF(x).$$	Круговою дисперсією випадкового кута $\Psi(\omega)$ з функцією розподілу $G(\theta')$, називається величина $$\upsilon = 1 - \rho = 1 - \lvert f_1 \rvert,$$ яка характеризує відхилення значення випадкового кута від його середнього значення
Медіана	Медіаною неперервного розподілу $F(x)$ випадкової величини $\xi(\omega)$ називається таке значення $x = Me$, для якого однаково ймовірно, чи виявиться випадкова величина більшою чи меншою Me, тобто $$P(\xi < Me) = P(\xi > Me)$$	Круговою медіаною неперервного розподілу на колі $G(\theta')$ випадкового кута $\psi(\omega)$ називається те значення кута μ_m, яке є одним з розв'язків рівняння $$Q(\mu_m) = F(\mu_m + \pi) - F(\mu_m) - 0{,}5 =$$ $$= \int_{\mu_m}^{\mu_m + \pi} p(\theta) d\theta - 0{,}5 = 0,$$ і для якого значення $Q(\mu_m - 0{,}5\pi)$ максимальне.
Мода	Модою називається те значення Mod випадкової величини $\xi(\omega)$, для якого щільність розподілу ймовірності $p(x = \mathrm{Mod})$ має максимальне значення	Модою називається те значення Mod випадкового кута $\psi(\omega)$, для якого щільність розподілу ймовірності $p(\theta' = \mathrm{Mod})$ має максимальне значення

8.3. Вибіркові кругові характеристики розподілів випадкових кутових величин

Оцінювання числових характеристик вибірок кутів виконується шляхом визначення відповідних вибіркових кругових характеристик, основними з яких є *вибіркове кругове середнє* (ВКС) і *вибіркова кругова дисперсія* (ВКД).

Вибіркове кругове середнє. Нехай за результатами вимірювання випадкового кута $\psi(\omega) \in [0,2\pi)$ маємо множину його реалізацій $\{\varphi_j, j=\overline{1,M}\}$, тобто статистику або вибірку обсягу M.

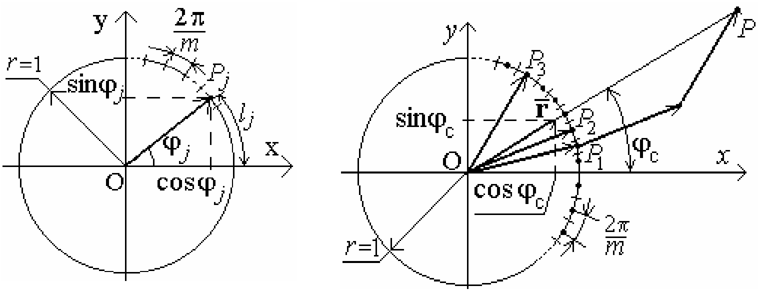
Розглянемо вибіркові характеристики для середнього кута та його дисперсії. Результат окремого вимірювання – φ_j, зображається плоским кутом φ_j такого ж розміру, якому відповідає на колі одиничного радіуса $r=1$ дуга довжиною l_j між додатною піввіссю абсцис та вектором $\overrightarrow{OP_j}$ (рис.8.11,*а*). Вектор $\overrightarrow{OP_j}$ має декартові $(\cos\varphi_j, \sin\varphi_j)$ і полярні $(1, \varphi_j)$ координати.

Вимірювання виконуються з певним кроком $\frac{2\pi}{m}$. Дискретному характеру результатів вимірювань відповідає розбиття кола на m клас-інтервалів. Тому точки P_j – це середини клас-інтервалів.

Будь-яка конструктивна характеристика L кругового середнього, за якою обробляються результати вимірювань, повинна задовольняти умову адитивності

$$\{L(\varphi_1 - \nu, \ldots \varphi_M - \nu)\}(\operatorname{mod} 2\pi) \equiv \{L(\varphi_1, \ldots \varphi_M) - \nu\}(\operatorname{mod} 2\pi),$$
$$\nu \in [0,2\pi), \tag{8.17}$$

тобто для довільного кута ν дробові частини (за модулем 2π) чисел $\{L(\varphi_1, \ldots \varphi_M) - \nu\}$ і $L(\varphi_1 - \nu, \ldots \varphi_M - \nu)$ мають збігатися. Інакше кажучи, кут, що задається характеристикою $L(\varphi_1, \ldots \varphi_M)$, має адитивно залежати від початкового кута ν. Цю вимогу задовольняє оцінка у вигляді *вибіркового кругового середнього кута*.



а *б*

Рис. 8.11. Графічне зображення на колі результату одного вимірювання (*а*) та усереднення вибірки кутів обсягу $M = 3$ (*б*)

Для множини $\{\varphi_j, j = \overline{1,M}\}$ визначимо поняття *вибіркового кругового середнього кута* як напрямок суми всіх одиничних векторів $\overrightarrow{OP}_1,..,\overrightarrow{OP}_M$. На рис. 8.11, *б* розглянуто випадок $M = 3$. Сумарний вектор $\overrightarrow{OP} = \sum_{j=1}^{3}\overrightarrow{OP}_j$ має декартові координати $\left(\sum_{j=1}^{3}\cos\varphi_j, \sum_{j=1}^{3}\sin\varphi_j\right)$ і характеризується вибірковим круговим середнім кутом φ_c. Фізичне тлумачення φ_c з точки зору механіки подається таким чином. Усі одиничні вектори закінчуються точками P_j одиничного кола. Якщо всім цим точкам приписати однакову «масу» $1/M$, то координати «центра мас» цієї системи визначатимуться як

$$C = \frac{1}{M}\sum_{j=1}^{M}\cos\varphi_j; \quad S = \frac{1}{M}\sum_{j=1}^{M}\sin\varphi_j . \tag{8.18}$$

Перерахунок координат вектора $\mathbf{r}$ з декартової системи в полярну виконується відповідно до формул

$$r = |\mathbf{r}| = \sqrt{C^2 + S^2} ,$$

$$C = r\cos\varphi_c, S = r\sin\varphi_c . \tag{8.19}$$

Величину r називають *вибірковою результуючою довжиною* (ВРД) *вектора* $\mathbf{r}$.

Вектори $\mathbf{r}$ та $\overrightarrow{OP}$ розміщені у просторі під однаковим кутом φ_c до осі Ох. Значення φ_c можна обчислити за алгоритмом

$$\varphi_c = \mathbf{L}[S,C] = arctg\frac{S}{C} + \frac{\pi}{2}\{2-(signS)(1+signC)\}, \tag{8.20}$$

де $sign(\cdot)$ – знакова функція.

Якщо $r=0$, значення φ_c в інтервалі $[0,2\pi)$ однозначно не визначається.

Покажемо, що при $r>0$ ВКС φ_c задовольняє вимогу (8.17), а r не залежить від початку відліку кутів. Якщо кожний з векторів $\overrightarrow{OP_j}$ (рис.8.11,*б*) повернути у просторі на кут $\nu\in[0,2\pi)$, це не змінить значення r, а спричинить лише поворот вектора $\mathbf{r}$ у просторі на такий самий кут ν. Після повороту вектора $\mathbf{r}$ нові координати кінця вектора визначатимуться таким чином:

$$\overline{C} = r\cos(\varphi_c-\nu), \quad \overline{S} = r\sin(\varphi_c-\nu).$$

Неважко пересвідчитись, що

$$\begin{aligned}\overline{C} &= \frac{1}{M}\sum_{j=1}^{M}\cos(\varphi_j-\nu) = r\cos(\varphi_c-\nu),\\ \overline{S} &= \frac{1}{M}\sum_{j=1}^{M}\sin(\varphi_j-\nu) = r\sin(\varphi_c-\nu)\end{aligned} \tag{8.21}$$

тобто

$$\begin{aligned}\varphi_c(\varphi_1-\nu,\ldots,\varphi_M-\nu) &\equiv \{\varphi_c(\varphi_1,\ldots,\varphi_M)-\nu\}(\mathrm{mod}2\pi),\\ r(\varphi_1-\nu,\ldots,\varphi_M-\nu) &= r(\varphi_1,\ldots,\varphi_M),\end{aligned} \tag{8.22}$$

що і доводить властивість адитивності ВКС кутів.

Якщо покласти $\nu=\varphi_c$, то з урахуванням рівнянь (8.21) отримаємо

$$\sum_{j=1}^{M}\sin(\varphi_j-\varphi_c) = 0\,. \tag{8.23}$$

Вираз (8.23) можна використати для перевірки правильності визначення φ_c.

Вибіркова кругова дисперсія. Розглянемо характеристику розсіювання випадкових кутів. Визначимо відхилення в просторі напрямку вектора $\overline{OP}_j$ від довільного напрямку, що задається кутом ν як

$$\Delta\varphi_j = \min\left\{(\varphi_j - \nu)', 2\pi - (\varphi_j - \nu)'\right\} = \pi - \left|\pi - (\varphi_j - \nu)'\right|, \ \Delta\varphi_j \geq 0,$$

де $(\varphi_j - \nu)'$ – залишок (дробова частина) визначеного за модулем 2π кута $(\varphi_j - \nu)$,

$$(\varphi_j - \nu)' = (\varphi_j - \nu) - \left[\frac{\varphi_j - \nu}{2\pi}\right] 2\pi.$$

Зручною формою подання міри характеристики розсіювання є функція $f(\Delta\varphi) = 1 - \cos\Delta\varphi = 2\sin^2\frac{\Delta\varphi}{2}$ кута відхилення $\Delta\varphi$, оскільки вона є додатною і монотонною на відрізку $(0, \ \pi]$. Тому величина

$$V(\nu) = \frac{1}{M}\sum_{j=1}^{M}\left[1 - \cos(\varphi_j - \nu)\right] = \frac{2}{M}\sum_{j=1}^{M}\sin^2\frac{\varphi_j - \nu}{2} \qquad (8.24)$$

є вибірковою характеристикою розсіювання множини кутів $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_j, \ldots \varphi_M\}$ відносно напрямку ν. Із виразу (8.24) з урахуванням рівняння (8.23) випливає, що вибіркова характеристика розсіювання відносно ВКС φ_c

$$V(\varphi_c) = \frac{1}{M}\sum_{j=1}^{M}\left\{1 - \cos(\varphi_j - \varphi_c)\right\} = 1 - \frac{1}{M}\sum_{j=1}^{M}\cos(\varphi_j - \varphi_c) = 1 - r. \quad (8.25)$$

Величину $V(\varphi_c) \in [0, \ 1]$ називають *вибірковою круговою дисперсією вибірки кутів* $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_j, \ldots \varphi_M\}$. З урахуванням виразу (8.22) можна зробити висновок про інваріантність $V(\varphi_c)$ до початку відліку кутів.

Із виразу (8.24) визначимо вибіркову характеристику розсіювання для довільного напрямку ν:

$$V(\nu) = \frac{1}{M}\sum_{j=1}^{M}\left\{1 - \cos(\varphi_j - \nu)\right\} = V(\varphi_c) + 2r\sin^2\frac{\varphi_c - \nu}{2}. \qquad (8.26)$$

З аналізу виразу (8.26) випливає, що вибір $\nu = \varphi_c$ мінімізує характеристику кругового розсіювання; останній доданок характеризує збільшення характеристики розсіювання у разі відхилення ν від φ_c.

У загальному випадку при обчисленні ВРД r (отже, і значення ВКД V) за згрупованими в клас-інтервали даними, отримуємо зсунеу в бік менших значень оцінку r. Для зменшення цієї методичної похибки необхідно застосувати до r поправку типу *поправки Шеппарда*: $r_g = rc_g$, де $c_g = \pi \Big/ m \sin\frac{\pi}{m}$. Графік функції $c_g(m)$ зображено на рис. 8.12.

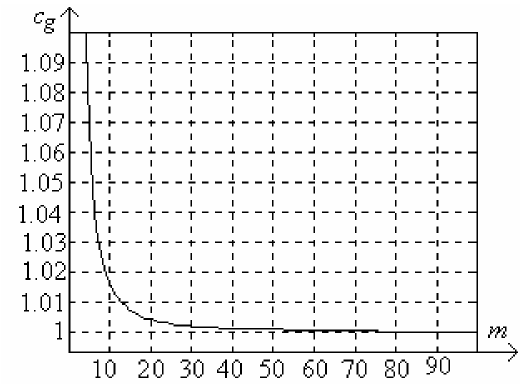


Рис. 8.12. Графік функції $c_g(m)$

З аналізу цього графіка випливає, що вже при $m > 40$ поправка не перевищує значення $c_g(40) \approx 1.001$, а отже, нею можна знехтувати (далі індексом g позначатимемо груповані в клас-інтервали дані для $m < 40$).

Характеристика $V(\varphi_c)$ має певну незручність для практичного застосування, оскільки $V(\varphi_c)$ і φ_c визначаються в різних одиницях вимірювання: перша в одиницях вимірювання довжини (метрах, або частках радіуса одиничного кола), друга в одиницях вимірювання кутів (радіанах). Однак значення r можна перевести у девіацію кута $\Delta\varphi$. Для довільного симетричного відносно φ_c закону розподілу ймовірностей $\Delta\varphi$ результуючий вектор r можна подати сумою двох векторів однакової довжини, розміщених на площині під кутами $(\varphi_c + \Delta\varphi)$ і $(\varphi_c - \Delta\varphi)$, як це графічно зображено на рис. 8.13. Тоді величину $\Delta\varphi$ можна виразити функцією вигляду $\Delta\varphi = f(r)$.

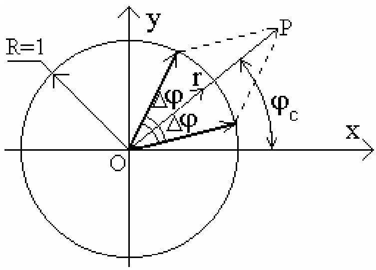


Рис.8.13. Графічне зображення перетворення значень r у $\Delta\varphi$

Для пошуку аналітичного виразу цієї функції розв'яжемо рівняння (8.18) з урахуванням формули (8.19) стосовно $\Delta\varphi$ ($M = 2$):

$$0{,}5 \cdot [\cos(\varphi_c + \Delta\varphi) + \cos(\varphi_c - \Delta\varphi)] = r\cos(\varphi_c),$$

$$0{,}5 \cdot [\sin(\varphi_c + \Delta\varphi) + \sin(\varphi_c - \Delta\varphi)] = r\sin(\varphi_c).$$

Результатом розв'язання буде:

$$\Delta\varphi = \arccos(r). \tag{8.27}$$

Область визначення функції (8.27) обмежена інтервалом $r \in (0{,}1]$, а область значень $\Delta\varphi \in [0, \pi/2)$.

Приклад 8.2 Розглянемо застосування запропонованих вибіркових характеристик для комп'ютерного моделювання задач кутових вимірювань. Для моделювання вважатимемо, що випадковий кут підпорядкований розподілу Мізеса з параметрами: k=5, $\mu = 0;\ \pm\frac{\pi}{10};\ \mp\frac{\pi}{4};\ \pm\frac{\pi}{2};\ \pm\frac{3}{4}\pi;\ \pi$. Моделювання проводять у два етапи методом оберненої функції. На першому етапі готують вихідні дані масив обсягу $1 \times M$ з M=10000), на другому – визначають кругові статистичні характеристики для вибірок.

Приклад гістограми вибірки випадкового кута з розподілом Мізеса та параметрами k=5, $\mu = 0{,}1\pi$ показано на рис. 8.14. Для побудови гістограми інтервал $[0{,}2\pi)$ поділявся на 30 однакових інтервалів.

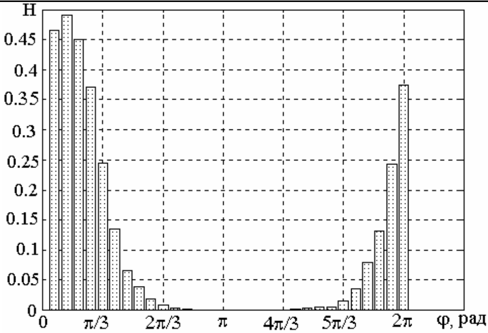


Рис. 8.14. Гістограма вибірки випадкового кута з розподілом Мізеса і параметрами k=5, $\mu = 0{,}1\pi$

Результати розрахунків вибіркових характеристик φ_c, r, $\Delta\varphi$ для різних значень μ наведено в табл. 8.3.

Таблиця 8.3

Дані розрахунків прикладу 8.2

Круговий середній кут μ, рад	Вибірковий круговий середній кут φ_c, рад	Вибіркова результуюча довжина r	Девіація кута $\Delta\varphi$, рад
0,3142	0,3094	0,8618	0,5320
0,7854	0,7857	0,8598	0,5359
1,5708	1,5632	0,8667	0,5223
2,3562	2,3525	0,8642	0,5272
3,1416	3,1435	0,8648	0,5261
3,9270	3,9235	0,8602	0,5351
4,7124	4,7158	0,8623	0,5311
5.4978	5,5005	0,8633	0,5289
5,9690	5,9683	0,8617	0,5321

З аналізу даних табл. 8.3 випливає, що ВРД r залежить лише від параметра концентрації k і не залежить від середнього кута μ. Незначний розкид значень r в околі його середнього значення $0{,}863^{+0{,}004}_{-0{,}003}$, спричинений похибками комп'ютерного моделювання.

Інші статистичні характеристики. Розглянемо характеристичні функції для $p = 1$ намотаного гауссівського розподілу ймовірності та розподілу Мізеса у вигляді

$$f_1(\sigma) = \exp\left(-0{,}5\sigma^2\right);$$

$$f_1'(\upsilon) = r = 1 - \upsilon\,. \qquad (8.28)$$

Для цих законів розподілів ймовірностей, які мають однакові характеристики розсіювання, виконується умова $f_1(\sigma) = f_1'(V)$, з якої випливає

$$\sigma = \sqrt{-2\ln(1-\upsilon)}\,. \qquad (8.29)$$

У статистичному аналізі випадкових кутів цей параметр дістав назву *кругового стандартного відхилення* (КСВ). У певному сенсі цей параметр подібний до с СКВ випадкової величини і виражається в радіанах (або градусах). Зручність подання розсіювання таким параметром пояснює його застосування і до інших розподілів імовірностей випадкових кутів. Графіки функцій $\sigma(\upsilon)$ і $\Delta\varphi(\upsilon)$ зображено на ри. 8.15. Із графіків видно, що в інтервалі $V \in (0; 0{,}3)$ розбіжність між цими функціями не перевищує 10%.

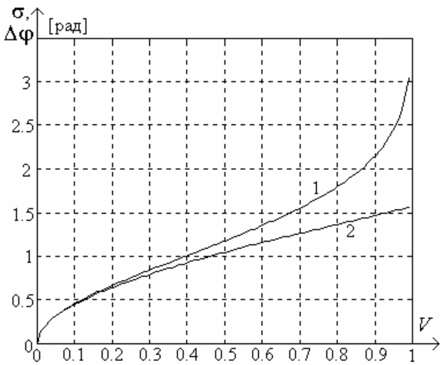


Рис. 8.15. Графіки функцій $\sigma(\upsilon)$ (1) і $\Delta\varphi(\upsilon)$ (2)

Крім основних вибіркових кругових характеристик (ВКС, ВДВ, ВКД, ВСВ) в задачах статистичного аналізу кутових даних використовують статистичні характеристики: вибіркові медіана та мода, круговий розмах, характеристики асиметрії та ексцесу (табл. 8.4).

Таблиця 8.4

Статистичні оцінки характеристик випадкових кутів для статистики обсягу M

Статистична характеристика	Скоро-чення	Розмір-ність	Зміст, формули визначення
Вибіркове кругове середнє статистики кутів	ВКС	рад	$\varphi_c = \{\mathrm{arctg}\dfrac{S}{D} + \dfrac{\pi}{2}\{2-(\mathrm{sign}S)\times$ $\times[1+\mathrm{sign}C]\}\,\mathrm{mod}\,2\pi;$ $C = \dfrac{1}{M}\sum_{j=1}^{M}\cos\varphi_j;\;\; S = \dfrac{1}{M}\sum_{j=1}^{M}\sin\varphi_j$
Вибіркова довжина результуючого вектора	ВДВ	-	$r = \sqrt{C^2 + S^2}$
Вибіркова кругова дисперсія статистики кутів	ВКД	-	$V = 1 - r$
Кругове стандартне відхилення статистики кутів	КСВ	рад	$\sigma = \sqrt{-2\ln(1-V)} = \sqrt{-2\ln r};$ $V = 1 - \exp(-0{,}5\sigma^2)$
Вибіркова кругова медіана статистики кутів	ВКМ	рад	Куту відповідає точка кола P, діаметр PQ ділить значення статистики навпіл, в околі P маємо максимальну концентрацію значень
Вибіркова мода статистики кутів	ВМ	рад	Куту відповідає точка кола, в околі якої спостерігається максимальна концентрація значень статистики
Вибірковий круговий розмах статистики кутів	ВКР	рад	Довжина найменшої дуги статистики, що визначається з варіаційного ряду $T_j = \varphi_{j+1} - \varphi_j,\, j = 1,\dots, M-1;$ $T_M = 2\pi - \varphi_M + \varphi_1;$ $W = 2\pi - \max\{T_1,\dots,T_M\}$

Закінчення табл. 8.4

Статистична характеристика	Скоро-чення	Розмір-ність	Зміст, формули визначення
Вибірковий тригонометричний момент порядку *u* відносно напрямку α (*u* – ціле число)	–	–	$T_u(\alpha)=\frac{1}{M}\sum_{j=1}^{M}e^{iu(\theta_j-\alpha)}=a_u(\alpha)+$ $+ib_u(\alpha)=r_u(\alpha)e^{im_u(\alpha)};\ u=0,1,2,...$ $a_u(\alpha)=\frac{1}{M}\sum_{j=1}^{M}\cos\left[u\left(\varphi_j-\alpha\right)\right]=$ $=a_u(0)\cos(u\alpha)+b_u(0)\sin(u\alpha);$ $b_u(\alpha)=\frac{1}{M}\sum_{j=1}^{M}\sin\left[u\left(\varphi_j-\alpha\right)\right]=$ $=-a_u(0)\sin(u\alpha)+b_u(0)\cos(u\alpha);$ $r_u(\alpha)=\sqrt{a_u^2(\alpha)+b_u^2(\alpha)}=$ $=\sqrt{a_u^2(0)+b_u^2(0)}=r_u(0);$ $m_u(\alpha)=m_u(0)-u\alpha$
Вибіркова характеристика аси-метрії статистики кутів	ВХА	–	$g_1=\frac{b_2(m)}{V^{3/2}}=\frac{r_2\sin\left[m_2(0)-2m\right]}{V^{3/2}}$
Вибіркова характеристика ексцесу статистики кутів	ВХЕ	–	$g_2=\frac{a_2(m)-(1-V)^4}{V^2}=$ $=\frac{r_2\cos m_2(0)-2n-(1-V)^4}{V^2}$

8.4. *Статистичні точкові оцінки параметрів розподілу випадкових кутових величин*

Схема вимірювального експерименту. Розглянемо неперервний випадковий кут $\psi(\omega)\in[0,2\pi)$, $\omega\in\Omega$ зі щільністю розподілу ймовірностей Мізеса $p_M\left(\theta/_{\mu,k}\right)$, $\theta\in[0,2\pi)$. Проводяться серії з M незалежних вимірювань, виконаних за незмінних умов. Модель статистичного вимірювального експерименту являє собою випадковий вектор

$$\boldsymbol{\psi}(\omega) = (\psi_1(\omega), \ldots \psi_M(\omega)), \tag{8.30}$$

з M незалежними і однаково розподіленими випадковими кутами (у математичній статистиці такий вектор розглядається як випадкова вибірка обсягом M).

Для випадкового вектора $\boldsymbol{\psi}(\omega)$ сумісний розподіл щільності ймовірності

$$p_M\left(\theta_1,\ldots\theta_M \big/ \mu, k\right) = \prod_{i=1}^{M} p_M\left(\theta_i \big/ \mu, k\right), \ \theta_i \in [0, 2\pi). \tag{8.31}$$

Для дискретних кутових вимірювань розглядається параметрична сім’я вкладених у $\boldsymbol{\psi}(\omega)$ випадкових величин зі скінченною множиною значень, що утворюється після розбиття неперервного інтервалу $[0,\ 2\pi)$ на m рівномірних півінтервалів (секторів) розміром $\dfrac{2\pi}{m}$. Потраплянню значення $\boldsymbol{\psi}(\omega)$ у j-й сектор, тобто випадковій події $\dfrac{2\pi}{m}\left(j-\dfrac{1}{2}\right) \preceq \varphi \prec \dfrac{2\pi}{m}\left(j+\dfrac{1}{2}\right)$, ставиться у відповідність (приписується) тільки одне значення кута – $\theta(j) = \dfrac{2\pi}{m} j, \ \ j = \overline{0,(m-1)}$. Таким чином, замість первинної неперервної випадкової величини $\psi(\omega)$ маємо дискретну випадкову величину $\psi_{\text{Д}}(\omega) \in \left\{0, \ldots \dfrac{2\pi}{m} j, \ldots \dfrac{2\pi}{m}(m-1)\right\}$ з імовірностями

$$P_j = P\left\{\omega \in \Omega : \ \psi(\omega) = \frac{2\pi}{m} j\right\} = \int\limits_{\frac{2\pi}{m}(j-0,5)}^{\frac{2\pi}{m}(j+0,5)} p_M\left(\theta \big/ \mu, k\right) d\theta .$$

Проведення серії M незалежних вимірювань за незмінних умов породжує випадковий вектор (8.62) з областю значень

$$\Theta_{\text{д}} = \left\{(\theta_1, ..\theta_i, \ldots \theta_M): \ \theta_i = \frac{2\pi}{m} j, \ \ j = \overline{0,(m-1)}\right\}.$$

Розбиття неперервного інтервалу $[0, 2\pi)$ на m секторів потенційно задає точність кутових вимірювань. Нижче розглядаються лише дискретні вимірювання, тому для спрощення виразів індекс «д» у позначенні випадкових векторів не наводиться.

Необхідно визначити оцінки параметрів розподілу $p_M\left(\theta/\mu,k\right)$ за критерієм максимуму функції правдоподібності.

Найбільш правдоподібна оцінка параметра μ**.** Ураховуючи формули (8.31) та (8.11), подано логарифм функції правдоподібності як

$$\ln L(\mu,k) = -M\ln 2\pi - M\ln I_0(k) + k\sum_{i=1}^{M}\cos(\theta_i-\mu) \tag{8.32}$$

і продиференціюємо його за μ:

$$\frac{\partial \ln L(\mu,k)}{\partial\mu} = k\sum_{i=1}^{M}\sin(\theta_i-\mu). \tag{8.33}$$

Дорівнявши до нуля похідну (8.33), отримаємо

$$\cos\mu\sum_{i=1}^{M}\sin\theta_i = \sin\mu\sum_{i=1}^{M}\cos\theta_i\ .$$

Отже, найбільш правдоподібною оцінкою $\hat{\mu}$ параметра μ є середнє кругове значення, яке в інтервалі $[0,2\pi)$ визначається за формулою (8.20).

Найбільш правдоподібна оцінка параметра k **.**

Диференціюванням формули (8.31) за k отримаємо

$$\frac{\partial \ln L(\hat{\mu},k)}{\partial k} = -M\,\frac{I_0'(k)}{I_0(k)} + \sum_{i=1}^{M}\cos(\theta_i-\hat{\mu}).$$

Із теорії функцій Бесселя відомо, що $I_0'(k) = I_1(k)$. Урахувавши це, а також дорівнявши похідну (8.15) до нуля, дістанемо

$$\frac{I_1(k)}{I_0(k)} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}\cos(\theta_i-\hat{\mu}) = r = \sqrt{C^2+S^2}\ .$$

Графік залежності $r = f(k)$ зображено на рис. 8.16.

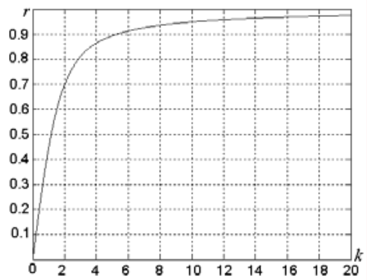


Рис. 8.16. Графік залежності $r = f(k)$

Для наближених аналітичних розрахунків використовують такі вирази:

$$\hat{k} \approx \frac{1}{6} r\left(12 + 6r^2 + 5r^4\right), \quad r < 0{,}45;$$

$$\hat{k} = \frac{1}{2(1-r) - (1-r)^2 - (1-r)^3}, \quad r > 0{,}8.$$

Для значних обсягів статистики M (M >10000) отримані оцінки $\hat{\mu}$ і $\hat{k}$ розподілено за гауссівськими розподілами ймовірності з дисперсіями відповідно

$$\sigma^2(\hat{\mu}) = \frac{I_0(k)}{MkI_1(k)}; \tag{8.34}$$

$$\sigma^2(\hat{k}) = \frac{k}{M\left(k - k\left(\frac{I_1(k)}{I_0(k)}\right)^2 - \frac{I_1(k)}{I_0(k)}\right)}. \tag{8.35}$$

З аналізу виразу (8.34) випливає, що дисперсія оцінки середнього кута залежить не лише від обсягу статистики M, але й від параметра k концентрації розподілу ймовірності Мізеса – зі збільшенням k значення $\sigma^2(\hat{\mu})$ зменшується. Для малих значень k маємо наближення $\sigma^2(\hat{\mu}) \approx \frac{2}{Mk^2}$, а для великих значень k – $\sigma^2(\hat{\mu}) \approx \frac{1}{Mk}$. Така залежність дисперсії оцінки середнього кута від параметра концентрації k є природною: за малих k розподіл імовірностей Мізеса наближається до рівномірного. Отже, середнє значення випадкового кута оцінюється з низькою точністю.

8.5. Статистичні інтервальні оцінки випадкових кутів із гауссівським намотаним розподілом імовірностей

Загальна постановка задачі визначення інтервальних оцінок кутів формулюється таким чином. Нехай проводиться серія із M незалежних вимірювань випадкового кута $\psi(\omega) \in [0,2\pi)$ зі щільністю розподілу ймовірностей $p(x)$. Вимірювання проводиться за незмінних умов. Відбувається рівномірне квантування значень кутів з кроком $\frac{2\pi}{m}$. Результатом вимірювань є вибірка (статистика) значень кута $\{\varphi_i, i = \overline{1, M}\}$ обсягу M, яка розглядається як реалізація випадкового вектора $(\psi_1(\omega), \ldots \psi_M(\omega))$ з M незалежними випадковими компонентами. За наявною статистикою необхідно оцінити довірчий інтервал, який із заданою довірчою імовірністю $P_{\text{дов}}$ містить найбільш імовірне значення кута (передбачається, що систематичної складової похибки вимірювання немає).

Проілюструємо визначення інтервальних оцінок кутів рядом прикладами.

Приклад 8.3 Для випадкового кута $\psi(\omega)$, який має намотаний гауссівський закон розподілу ймовірностей з параметрами $\sigma = 1$, $\mu = 0{,}5\pi$, задано вибірку (статистика) значень обсягом $M = 10000$. Для отриманої статистики розрахуємо значення вибіркових кутових середнього, дисперсії та стандартного відхилення.

Перші 100 ($M' = 100$) реалізацій кута наведено в табл. 8.5.

Таблиця 8.5

Реалізація випадкового кута з намотаним гауссівським законом розподілу ймовірності

№	φ_j	№	φ_j	№	φ_j	№	φ_j	№	φ_j
1	3,4696	21	5,9295	41	3,1598	61	2,0819	81	2,9086
2	1,9766	22	1,6034	42	2,2346	62	0,3085	82	2,0651
3	0,6104	23	1,5623	43	1,2327	63	2,8270	83	2,3815
4	0,1437	24	0,7495	44	0,5723	64	1,1211	84	2,0802
5	1,2718	25	0,7369	45	1,9731	65	1,3443	85	2,0246
6	2,1725	26	0,9106	46	1,6277	66	2,3228	86	1,4168

7	2,3693	27	2,5676	47	2,6744	67	1,7719	87	1,9867
8	1,0780	28	3,4477	48	3,5766	68	0,2342	88	1,9164
9	1,5416	29	3,2433	49	2,0942	69	0,7855	89	3,5771
10	3,0048	30	6,0785	50	3,4766	70	2,3876	90	2,6703
11	5,8776	31	2,3857	51	0,3448	71	1,5325	91	2,0576
12	2,2714	32	2,7073	52	2,9323	72	5,5778	92	3,5380
13	2,3607	33	1,1987	53	1,5276	73	0,9192	93	2,2925
14	1,2744	34	6,0318	53	0,6217	74	1,9777	94	2,6546
15	1,1501	35	1,0464	55	0,8426	75	1,7993	95	1,3688
16	2,2632	36	1,0460	56	2,4173	76	1,5668	96	0,8209
17	2,4925	37	2,8130	57	1,4158	77	1,4307	97	2,4914
18	0,4850	38	6,2273	58	1,7216	78	0,7659	98	0,8912
19	1,5876	39	2,3422	59	1,3449	79	2,7634	99	0,6091
20	1,7842	40	2,6624	60	1,3576	80	0,9542	100	0,8216

За виконаними за формулами (8.20), (8.21) розрахунками маємо:

$$C = \frac{1}{100}\sum_{j=1}^{100}\cos\varphi_j \approx 0{,}0879,\ S = \frac{1}{100}\sum_{j=1}^{100}\sin\varphi_j \approx 0{,}5964,$$

$$\varphi_c = \mathbf{L}(S, C) \approx 1{,}7172 \text{ рад.}$$

Перевіривши умову (8.23), дістанемо $\sum_j \sin(\varphi_j - \varphi_c) \approx 10^{-14}$, що підтверджує правильність визначення φ_c. Результати розрахунків характеристик ВДВ, ВКД та КСВ заданої статистики:

$$r = \sqrt{C^2 + S^2} = \sqrt{(-0{,}0879)^2 + 0{,}5964^2} \approx 0{,}6028,$$

$$V = 1 - r \approx 1 - 0{,}6028 \approx 0{,}3972,$$

$$\sigma = \sqrt{-2\ln r} \approx \sqrt{-2\ln 0{,}6028} \approx 1{,}0061 \text{ рад.}$$

Приклад 8.3 ілюструє обчислення ВКС φ_c і ВКД σ одиничного результату. Диспрессія усередненого (на колі) результату повинна бути значно меншою за дисперсію одиничного результату. Визначимо ВКД V_c для ВКС φ_c.

Вибіркове кругове середнє є випадковою кутовою величиною, розподіленою за певним законом. Відомо, що внаслідок властивості відтворюваності арифметичне середнє M незалежних випадкових величин з гауссівським законом розподілу ймовірності $(\mu,\ \sigma)$ є випадковою величиною з тим же типом розподілу і параметрами (μ, σ_c), де $\sigma_c = \sigma/\sqrt{M}$. Перевіримо, чи зберігається ця властивість для усереднення на колі методом комп’ютерного моделювання.

Приклад 8.4 Скористаємось вихідними даними прикладу 8.3. Розіб’ємо статистику φ_j, $j=\overline{1{,}10000}$ на $n_г=100$ груп, кожна з яких має обсяг $\dfrac{M}{n_г}=100$. Для кожної q-ї групи розрахуємо $\varphi_{с,q}$. Для отриманої нової множини $\left\{\varphi_{с,q}, q=\overline{1,n_г}\right\}$ виконаємо розрахунки, як у прикладі 8.3:

$$C=\frac{1}{n_г}\sum_{q=1}^{n_г}\cos\varphi_{с,q}=\frac{1}{100}\sum_{q=1}^{100}\cos\varphi_{с,q}=0{,}5438;$$

$$S=\frac{1}{n_г}\sum_{q=1}^{n_г}\sin\varphi_{с,q}=\frac{1}{100}\sum_{q=1}^{100}\sin\varphi_{с,q}=99{,}4685;$$

$$\varphi_с=\mathbf{L}(S,C)=1{,}5653\ \text{рад};\ r=\sqrt{C^2+S^2}=0{,}9947\ ;$$

$$\sigma=\sqrt{-2\ln(r)}=0{,}1031\ \text{рад}.$$

Отже, для вихідної послідовності маємо КСВ $\sigma=1$ рад, а для ВКС $\varphi_с$ – $\sigma\approx 0{,}1\,0$ рад, тобто

$$\sigma=\frac{\sigma}{\sqrt{M}}\ . \tag{8.36}$$

Отже, результатами моделювання підтверджено, що в разі усереднення на колі M статистично незалежних результатів вимірювання випадкового кута значення КСВ вибіркового середнього зменшується в $\sqrt{M}$ разів.

Цей результат можна розповсюдити на характеристики r і V. З урахуванням виразів (8.35), (8.36) маємо

$$\ln(1-V)=n\ln(1-V_с),$$

звідки отримаємо

$$V_с=1-\sqrt[M]{1-V}\ , \tag{8.37}$$

$$r_{ср}=\sqrt[M]{r}\ .$$

Для оцінювання довірчого інтервалу для φ_c розглянемо значення кута $\overset{\circ}{\varphi}_j=\varphi_j-\mu+\pi$, $j=\overline{1,n}$, зведені до центра інтервалу $[0,2\pi)$. Через незалежність ВПД від початкового напряму цей кут підпорядкований намотаному гауссівському розподілу ймовірності з параметрами (π, σ). Після усереднення на колі розподіл випадкового кута $\overset{\circ}{\alpha} = \varphi_c - \mu + \pi$, який характеризує розкид значень φ_c в околі заданого значення кута μ, також підпорядкований намотаному гауссівському закону, який має параметри (π, σ_c). Для $n > 100$ маємо $\sigma_c << \sigma$, що дозволяє апроксимувати намотаний гауссівський закон розподілу гауссівським розподілом з тими ж параметрами $(\pi,\ \sigma)$ і визначити довірчий інтервал через інтеграл Лапласа за стандартною методикою оброблення випадкових величин.

Приклад 8.5 Для даних прикладу 8.3 необхідно знайти довірчий інтервал $\alpha_{дов}$ для ймовірності $P_{дов} = 0{,}95$ і подати результати статистичного оброблення кутів.

З таблиць функції Лапласа маємо $\dfrac{\alpha_{дов}}{\hat{\sigma}} = 1{,}97$, звідки $\alpha_{дов} = 0{,}197 \approx 0{,}20$ рад. Отже, остаточно маємо результат:

– нижня межа – $\varphi_н = (\varphi - \alpha_{дов}) \mathrm{mod} 2\pi \approx 1{,}72 - 0{,}20 \approx 1{,}52$ рад;

– верхня межа – $\varphi_в = (\varphi_c + \alpha_{дов}) \mathrm{mod} 2\pi \approx 1{,}72 + 0{,}20 \approx 1{,}92$ рад;

– довірча ймовірність – $P_{дов} = 0{,}95$.

Визначений інтервал містить дійсне значення $\mu = 0{,}5\pi \approx 1{,}57$ рад.

У випадку формування інтервальної оцінки кута за повною вибіркою ($M = 10000$) слід ВКС брати рівним $\varphi_c = 1{,}5653$ рад (приклад 8.3), а КСВ визначати як $\dfrac{\sigma}{\sqrt{M}} \approx \dfrac{1{,}0061}{100} \approx 0{,}010$ рад. Тоді

– нижня межа – $\varphi_н \approx 1{,}57 - 0{,}01 \approx 1{,}56$ рад;

– верхня межа – $\varphi_в \approx 1{,}57 + 0{,}01 \approx 1{,}58$ рад;

– довірча ймовірність – $P_{дов} = 0{,}95$.

Узагальнюючи приклад 8.5 можна подати методику статистичного оброблення кутових вимірювань послідовністю таких етапів.

1. Розрахунок сум C і за виразами S (8.18).

2. Розрахунок ВКС $\varphi_c = \mathbf{L}[S, C]$ за алгоритмом (8.20).

3. Перевірка виконання умови (8.23) для підтвердження правильності визначення φ_c.

4. Визначення ВКД $V = 1 - r$ одного кутового вимірювання. У разі потреби значення ВРД r коригують поправкою c_g.

5. Розрахунок КСВ σ.

6. Визначення КСВ σ кругового середнього вибірки обсягу M.

7. Розрахунок границі $\alpha_{дов}$ довірчого інтервалу за обраною $P_{дов}$ і функцією Лапласа.

8. Формування результату оброблення:

– нижня межа довірчого інтервалу – $(\varphi_c - \alpha_{дов}) \bmod 2\pi$;

– верхня межа довірчого інтервалу – $(\varphi_c + \alpha_{дов}) \bmod 2\pi$;

– довірча ймовірність – $P_{дов}$.

Таким чином, під час усереднення на колі суми M статистично незалежних випадкових кутів КСВ кругового середнього кута зменшується в $\sqrt{M}$ разів.

8.6. Статистичні інтервальні оцінки випадкових кутів для довільних законів розподілу їх ймовірностей

У численних задачах кутових вимірювань за умов обмежених статистик кутів експериментально перевірити гіпотезу щодо належності закону розподілу випадкового кута до гауссівського неможливо, а логічні обґрунтування цієї гіпотези непереконливі і суперечливі.

Скористаємось загальною постановкою задачі визначення результату вимірювання (див. підрозд. 8.11) з тією відмінністю, що щільність розподілу ймовірностей випадкового кута $\Psi(\omega) \in [0, 2\pi)$ невідома.

За умов невідомого розподілу ймовірностей вимірюваних кутів і наявності статистик обмежених обсягів оцінку довірчого інтервалу $\alpha_{дов}$ (довірчої ймовірності $P_{дов}$) виконують на основі використання аналога нерівності Чебишева на колі:

$$P\left\{\left|\sin\frac{\psi-\mu_1}{2}\right|>\varepsilon\right\}<\frac{\upsilon}{2\varepsilon^2},\ 0<\varepsilon<1,\ 0<\frac{v}{2\varepsilon^2}<1, \qquad (8.38)$$

де $\upsilon = 1-\rho_1$ – кругова дисперсія випадкового кута $\psi(\omega)$, $0 \le \upsilon \le 1$, μ_1 – кругове середнє значення кута, яке обраховується з тригонометричного моменту першого порядку стосовно нульового напрямку $\dot{\tau}_1 = \rho_1 e^{i\mu_1}$, тобто $\mu_1 = \arg(\dot{\tau}_1)$.

Нерівність (8.38) виконується, якщо $\rho_1 > 0$. Її можна інтерпретувати таким чином: імовірність події $\left|\sin\frac{\psi-\mu_1}{2}\right|>\varepsilon$ за довільної функції розподілу ймовірностей випадкового кута $\psi(\omega)$ не перевищує значення $\frac{\upsilon}{2\varepsilon^2}$.

Для формування $\alpha_{\text{дов}}$ зручнішою є інша форма цієї нерівності:

$$P\left\{\left|(\theta-\mu_1+\pi)\bmod 2\pi-\pi\right| \succ 2\arcsin\left(\varepsilon_1\sqrt{\frac{\upsilon}{2}}\right)\right\}<\frac{1}{\varepsilon_1^2},\ 0<\varepsilon_1<\sqrt{\frac{2}{\upsilon}}\,. \qquad (8.39)$$

Із формули (8.39) маємо

$$\alpha_{\text{дов}}(\upsilon) = 2\arcsin\left(\varepsilon_1\sqrt{\frac{\upsilon}{2}}\right), \qquad (8.40)$$

Імовірності $P(\cdot)$ у формулі (8.39) відповідає ймовірність $1-P_{\text{дов}}$. Зміст параметрів $\alpha_{\text{дов}}$ та $P_{\text{дов}}$ на прикладі заданої щільності $p(\theta)$ ілюструє рис.8.14. Інтервал довжиною $2\alpha_{\text{дов}}$ з центром в точці $\theta=\mu_1$ охоплює ту ділянку розподілу, в якій зосереджено основну частину (з ймовірністю $P_{\text{ДОВ}}$) можливих значень випадкового кута. Якщо у вираз (8.40) підставити граничне значення $\varepsilon_1 = (1-P_{\text{дов}})^{-0.5}$, отримаємо залежність

$$\alpha_{\text{дов}}(\upsilon) = 2\arcsin\left(\sqrt{\frac{\upsilon}{2(1-P_{\text{дов}})}}\right). \qquad (8.41)$$

Графіки функції (8.41) для різних значень $P_{\text{дов}}$ показано на рис. 8.15.

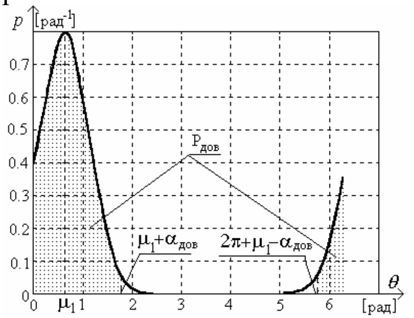


Рис. 8.14. Графік щільності розподілу ймовірностей кутів $p(\theta)$ з визначеними параметрами $\Delta\varphi_{\text{дов}}$ і $P_{\text{дов}}$.

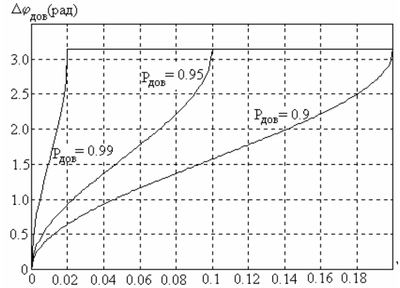


Рис. 8.15. Графік функцій $\Delta\varphi_{\text{дов}} = f(\upsilon)$ для $P_{\text{дов}} = 0{,}9;\ 0{,}95;\ 0{,}99$

Необхідні оцінки значень μ_1 та υ для визначення $\alpha_{\text{дов}}$ та $P_{\text{дов}}$ для формули (8.41) отримують з вибірки $\{\varphi_j, j = \overline{1,M}\}$ як ВКС φ_{c} і ВКД $V \in [0,1]$.

У випадку, коли довжина результуючого вектора обчислюється за результатами групованих у клас-сектори кутових даних, необхідно застосовувати поправку на групування даних типу поправки Шеппарда c_g, тобто визначають довжину результуючого вектора як $r_g = rc_g$. Величина $\bar{V}_g \in [0,\ 1]$ для кутів множини $\{\varphi_1,...\varphi_i,...\varphi_M\}$ та кута φ_{c} у випадку згрупованих даних визначається відповідно як

$$V_g = 1 - r_g;$$

$$\vec{V}_g = 1 - \sqrt[M]{r_g}.$$

Нерівність (8.39) з використанням вибіркових характеристик φ_{c} і $\bar{V}_g$ можна подати таким чином:

$$P\left\{\left|(\psi - \varphi_{\text{c}} + \pi)\bmod 2\pi - \pi\right| \succ 2\arcsin\left(\varepsilon_1\sqrt{\frac{\bar{V}_g}{2}}\right)\right\} < \frac{1}{\varepsilon_1^2}, 0 < \varepsilon_1 < \sqrt{\frac{2}{\bar{V}_g}}. \quad (8.42)$$

На основі нерівності (8.42), користуючись експериментальними даними, можна оцінити $\alpha_{дов}$. Послідовність операцій обчислень значень φ_c і $\alpha_{дов}$ показано на рис.8.16.

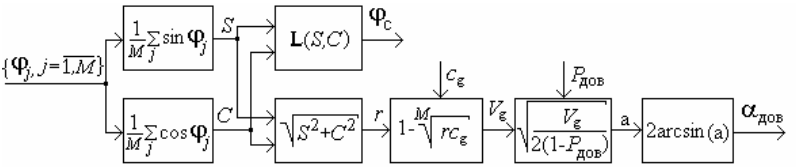


Рис. 8.16. Послідовність обчислень значень φ_c і $\alpha_{дов}$

Особливість визначення $\alpha_{дов}$ на колі пов'язана з тим, що в межах інтервалу $[0,2\pi)$ розподіли можуть мати скінченні ненульові значення щільності розподілу ймовірностей в околі антимоди. Тому навіть за помітного групування кутів в околі моди для значних $P_{дов}$ довірчий інтервал прямує до своєї межі, тобто $2\alpha_{дов} \to 2\pi$. Це твердження ілюструє рис. 8.17, на якому зображено графіки щільності намотаних гауссівських законів розподілу ймовірностейі випадкових кутів зі значенням параметрів $\mu = \pi$ і $\sigma = 0{,}5;\ 1{,}0;\ 1{,}5$. Цим розподілам за умови незмінного значення $P_{дов}$ відповідають довірчі інтервали $2\alpha_{дов.1}$, $2\alpha_{дов.2}$, $2\alpha_{дов.3}$, які зі збільшенням σ займають дедалі більшу частину інтервалу $[0,2\pi)$.

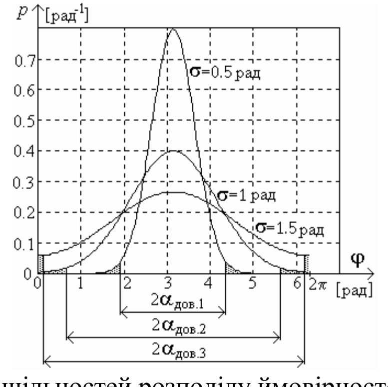


Рис. 8.17. Графіки щільностей розподілу ймовірностей, що ілюструють процес визначення довірчих інтервалів

Методика опрацювання кутових спостережень за апріорно невідомого закону розподілу ймовірності кутів складається з наступних етапів.

1. Розрахунок сум C та S (8.18).

2. Розрахунок вибіркового кругового середнього $\varphi_{\text{c}} = \mathbf{L}[S, C]$ (8.20).

3. Перевірка виконання умови (8.23), що підтверджує коректність визначення φ_{c}.

4. Визначення ВКД V_g для згрупованих даних.

5. Розрахунок межі $\alpha_{\text{дов}}$ довірчого інтервалу для обраної ймовірності $P_{\text{дов}}$, якщо $v = V_g$.

6. Формування результату обробки:

– нижня межа довірчого інтервалу – $(\varphi_{\text{c}} - \alpha_{\text{дов}}) \bmod 2\pi$;

– верхня межа довірчого інтервалу – $(\varphi_{\text{c}} + \alpha_{\text{дов}}) \bmod 2\pi$;

– довірча ймовірність – $P_{\text{дов}}$.

Приклад 8.6 Для даних прикладу 8.3, для яких отримано значення $r = 0{,}6028$; $V = 0{,}005$, отримано резільтат розрахунку довірчого інтервалу за формулою (8.23) для довірчої ймовірності $P_{\text{дов}} = 0{,}95$: $\alpha_{\text{дов}} \approx 0{,}45$ рад.

Довірчий інтервал для тих самих вхідних даних за умови заданого виду розподілу ймовірності випадкового кута (наприклад, намотаного гауссівського розподілу) дорівнює $\alpha_{\text{дов}} = 1{,}96\sigma$, тобто

$$\alpha_{\text{дов}} = 1{,}96 \frac{\sigma}{\sqrt{M'}} = 1{,}96 \frac{1}{\sqrt{100}} \approx 0{,}2 \text{ рад.}$$

Отже, в умовах апріорно невідомого закону розподілу ймовірностей розрахунки $\alpha_{\text{дов}}$ за наведеною методикою мають дещо завищені значення, які не можуть бути скориговані без додаткових відомостей про закон розподілу ймовірностей.

8.7. Статистичне опрацювання результатів нерівноточних кутових вимірювань

Одним з важливих завдань статистичного опрацювання кутових даних є спільне оброблення результатів нерівноточних вимірювань одного й того ж випадкового кута, зокрема наприклад, результатів вимірювань, виконаних різними приладами з різними характеристиками точності, різними методами, у різних лабораторіях. Основна мета спільного оброблення – підвищення точності результату вимірювання.

Розглянемо загальну схему утворення статистики вимірювання випадкових кутів $\psi(\omega)\in[0, 2\pi)$ з КСВ $\sigma << 2\pi$. Об'єкт вимірювань описується випадковим кутом $\psi(\omega)$, який має довільний розподіл щільності ймовірності. Вважатимемо, що результати проведення M незалежних вимірювань утворюють випадковий вектор $(\psi_1(\omega),...,\psi_M(\omega))$, де $\{\psi_j(\omega), j=\overline{1,M}\}$ – послідовність незалежних, однаковим і невідомим законом розподілу ймовірностей кутів. Ця множина упорядкована за j і неупорядкована за $\omega\in\Omega$.

Нехай результати незалежних вимірювань випадкового кута $\psi(\omega)$ є послідовністю m векторів значень кутів, кожний вектор $\left(\varphi_{i,j} > 2\pi,\ \ j=\overline{1,M}\right)$, $\ i=\overline{1,m}$. Результати оброблення кутів векторами можна вважати більш зручним з огляду на подальше оброблення сукупних кутових вимірювань, оскільки вектор містить інформацію і про кут, і про розсіювання в околі найімовірнішого значення кута. Кругове стандартне відхилення σ можна перерахувати у ВДВ r за формулами (8.28), (8.29). По суті, підсумовування на колі – це вагове оброблення: результати, які мають більшу дисперсію (а отже, менше значення r), повинні давати менший внесок у результуючий вектор. Це твердження узгоджується з геометричною інтерпретацією процесу оброблення результатів нерівноточних кутових вимірювань, показаною на рис. 8.18. На рисунку зображено процес усереднення результатів вимірювання двох незалежних кутів φ_1, φ_2 з різними дисперсіями, які відображаються на одиничному колі відповідно векторами $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$.

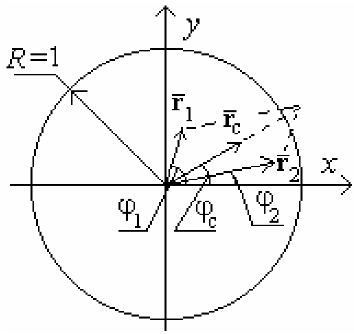


Рис. 8.18. Графік, що ілюструє сумісне оброблення результатів нерівноточних кутових вимірювань

Значенню кута φ_2, що має меншу дисперсію, відповідає вектор $\mathbf{r}_2$ більшої довжини $r_2 = |\mathbf{r}_2|$. Сумарний вектор $\mathbf{r}_c$, який містить інформацію про кут φ_c і його дисперсію, розміщений ближче до вектора $\mathbf{r}_2$:

$$r_c = |\mathbf{r}_c| = 0{,}5 \cdot \sqrt{C_1^{'2} + S_2^{'2}}\ , \quad \varphi_c = \mathbf{L}\left(S', C'\right), \qquad (8.43)$$

де $S_1^{'} = 0{,}5 \cdot \left(r_1 \sin\varphi_1 + r_2 \sin\varphi_2\right),\ C_2^{'} = 0{,}5 \cdot \left(r_1 \cos\varphi_1 + r_2 \cos\varphi_2\right)$. (8.44)

Із формули (8.44) випливає, що кут φ_2, що має меншу дисперсію, враховується в результаті відповідно з більшою вагою.

Визначивши з формули (8.43) r_c, можна знайти вВКД кута φ_c як $V = 1 - r_c$, а з формули (8.41) – його довірчий інтервал.

8.8. Використання концепції невизначеності для статистичного опрацювання і подання результатів кутових вимірювань

Концепція невизначеності як показника якості вимірювань розроблена для випадкових величин. Результати вимірювань випадкових кутів також мають містити показники точності, виражені в термінах концепції невизначеності.

Скористаємось загальною постановкою задачі формування результату вимірювання (див. підрозд. 8.11) з тією відмінністю, що необхідно визначити стандартну та розширену невизначеність результату кутових вимірювань за типом **А** та подати результат вимірювання у встановленій формі.

Як відомо, для кутових вимірювань найкращими оцінками найбільш імовірного значення випадкового кута та його розкиду є відповідно його ВКС і ВКД. Ці характеристики отримують шляхом векторного підсумовування експериментальних даних на одиничному колі.

Вибірковий круговий середній кут в інтервалі $[0,2\pi)$ та вибіркова дисперсія визначаються відповідно за формулами (8.20) та (8.25). Кругове стандартне відхилення σ (у радіанах) пов'язано з V наведеним зі співвідношенням $\sigma = \sqrt{-2\ln(1-V)} = \sqrt{-2\ln r}$, з урахуванням якого стандартна невизначеність типу А результату вимірювання визначається як

$$u(\varphi_i) = \sigma = \sqrt{-2\ln(1-V)},$$

а для середнього кута φ_c вона становить:

$$u(\varphi_\text{c}) = \sigma_\text{c} = \sqrt{-2\ln(1-V_\text{c})}, \qquad (8.45)$$

де значення V_c визначається за формулою (8.77).

Розширена невизначеність визначається в загальному вигляді як $U(\varphi_\text{c}) = Ku(\varphi_\text{c})$, де K – фактор покриття, який відповідає рівню довіри (довірчій ймовірності) $P_\text{дов}$ і визначається за певним розподілом імовірності випадкового кута.

Методика розрахунку та представлення результату вимірювання випадкового кута включає такі етапи.

1. Розрахунок сум C і S за виразами (8.18).

2. Розрахунок ВКС φ_c за алгоритмом (8.20).

3. Перевірка правильності визначення φ_c за умовою (8.23).

4. Визначення ВКД V_c та стандартної невизначеності $u(\varphi_\text{c})$ згідно з формулою (8.45). Для $M < 30...50$ для зменшення методичних похибок рекомендується визначати r з урахуванням поправок на групування типу поправок Шеппарда.

5. Визначення фактора покриття K за заданим рівнем довіри $P_\text{дов}$ для обґрунтованої щільності ймовірностей випадкового кута.

6. Розрахунок розширеної невизначеності $U(\varphi_\text{c})$ для обраної ймовірності $P_\text{дов}$.

7. Подання результату вимірювання: для обраного рівня довіри $P_\text{дов}$ більша частина значень кутів належить інтервалу

$$\left(\varphi_c - U\left(\varphi_c\right)\right)\bmod 2\pi \preceq \varphi \preceq \left(\varphi_c + U\left(\varphi_c\right)\right)\bmod 2\pi,$$

Отже, стандартна та розширена невизначеність результатів кутових вимірювань типу **А** визначаються на основі характеристик ВКС, ВКД та КСВ.

Невизначеність результату за типом **В** обчислюється за апріорними даними і стосується, в основному оцінки складової невизначеності, що пов'язана з класом точності засобів кутових вимірювань. Оскільки інструментальні похибки вимірювань значно менші за значення 2π, їх розподіл імовірності повністю зосереджений на напівінтервалі, значно меншому за інтервал $\left[-\pi, \pi\right)$ і наближається до гауссівського розподілу. Тому внесок складових типу **В** може бути оцінений, як і тип **А**.

Контрольні запитання та завдання

1. Назвіть відомі вам одиниці вимірювання кутів.
2. Які криві використовують для графічного зображення результатів кутових вимірювань?
3. У чому полягають відмінності вимірювання випадкових кутів і випадкових величин.
4. Наведуть визначення та основні властивості функції розподілу ймовірності випадкового кута.
5. Наведуть визначення та основні властивості щільності розподілу ймовірностей випадкового кута.
6. Наведуть визначення та основні властивості характеристичної функції і випадкового кута.
7. Наведіть приклади розподілів імовірностей випадкових кутів.
8. Назвіть відомі вам числові характеристики випадкових кутів та поясніть їх зміст.
9. Розкрийте сутність та наведіть основні властивості вибіркової кругової дисперсії.
10. Дайте визначення та геометричну інтерпретацію вибіркового кругового розмаху статистики кутів.
11. У чому полягає особливість формування інтервальних оцінок результатів кутових вимірювань?
12. Наведіть геометричну інтерпретацію процесу оброблення результатів нерівноточних кутових вимірювань на колі.
13. Для даних вимірювань різниці фаз (табл. Д2.5, дод.2) визначте точкові та інтервальні статистичні характеристики центра та розсіювання.

Додаток 1

Довідкові таблиці

Таблиця Д1.1

Значення функції стандартного закона розподілу Гаусса

z	$\Phi(z)$	$\Phi(0{,}5+z)$	$\Phi(1+z)$	$\Phi(1{,}5+z)$	$\Phi(2+z)$	$\Phi(2{,}5+z)$	$\Phi(3+z)$
0,00	0,50000	0,69146	0,84134	0,93319	0,97725	0,99379	0,99865
0,01	0,50399	0,69497	0,84375	0,93448	0,97778	0,99396	0,99869
0,02	0,50798	0,69847	0,84614	0,93574	0,97831	0,99413	0,99874
0,03	0,51197	0,70194	0,84850	0,93699	0,97882	0,99430	0,99878
0,04	0,51595	0,70540	0,85083	0,93822	0,97932	0,99446	0,99882
0,05	0,51994	0,70884	0,85314	0,93943	0,97982	0,99461	0,99886
0,06	0,52392	0,71226	0,85543	0,94062	0,98030	0,99477	0,99889
0,07	0,52790	0,71566	0,85769	0,94179	0,98077	0,99492	0,99893
0,08	0,53188	0,71904	0,85993	0,94295	0,98124	0,99506	0,99896
0,09	0,53586	0,72240	0,86214	0,94408	0,98169	0,99520	0,99900
0,10	0,53983	0,72575	0,86433	0,94520	0,98214	0,99534	0,99903
0,11	0,54380	0,72907	0,86650	0,94630	0,98257	0,99547	0,99906
0,12	0,54776	0,73237	0,86864	0,94738	0,98300	0,99560	0,99910
0,13	0,55172	0,73565	0,87076	0,94845	0,98341	0,99573	0,99913
0,14	0,55567	0,73891	0,87286	0,94950	0,98382	0,99585	0,99916
0,15	0,55962	0,74215	0,87493	0,95053	0,98422	0,99598	0,99918
0,16	0,56356	0,74537	0,87698	0,95154	0,98461	0,99609	0,99921
0,17	0,56750	0,74857	0,87900	0,95254	0,98500	0,99621	0,99924
0,18	0,57142	0,75175	0,88100	0,95352	0,98537	0,99632	0,99926
0,19	0,57535	0,75490	0,88298	0,95449	0,98574	0,99643	0,99929
0,20	0,57926	0,75804	0,88493	0,95543	0,98610	0,99653	0,99931
0,21	0,58317	0,76115	0,88686	0,95637	0,98645	0,99664	0,99934
0,22	0,58706	0,76424	0,88877	0,95728	0,98679	0,99674	0,99936
0,23	0,59095	0,76731	0,89065	0,95818	0,98713	0,99683	0,99938
0,24	0,59483	0,77035	0,89251	0,95907	0,98745	0,99693	0,99940
0,25	0,59871	0,77337	0,89435	0,95994	0,98778	0,99702	0,99942
0,26	0,60257	0,77637	0,89617	0,96080	0,98809	0,99711	0,99944
0,27	0,60642	0,77935	0,89796	0,96164	0,98840	0,99720	0,99946
0,28	0,61026	0,78230	0,89973	0,96246	0,98870	0,99728	0,99948
0,29	0,61409	0,78524	0,90147	0,96327	0,98899	0,99736	0,99950
0,30	0,61791	0,78814	0,90320	0,96407	0,98928	0,99744	0,99952
0,31	0,62172	0,79103	0,90490	0,96485	0,98956	0,99752	0,99953
0,32	0,62552	0,79389	0,90658	0,96562	0,98983	0,99760	0,99955
0,33	0,62930	0,79673	0,90824	0,96638	0,99010	0,99767	0,99957

Продовження таблиці Д1.1

z	$\Phi(z)$	$\Phi(0{,}5+z)$	$\Phi(1+z)$	$\Phi(1{,}5+z)$	$\Phi(2+z)$	$\Phi(2{,}5+z)$	$\Phi(3+z)$
0,34	0,63307	0,79955	0,90988	0,96712	0,99036	0,99774	0,99958
0,35	0,63683	0,80234	0,91149	0,96784	0,99061	0,99781	0,99960
0,36	0,64058	0,80511	0,91308	0,96856	0,99086	0,99788	0,99961
0,37	0,64431	0,80785	0,91466	0,96926	0,99111	0,99795	0,99962
0,38	0,64803	0,81057	0,91621	0,96995	0,99134	0,99801	0,99964
0,39	0,65173	0,81327	0,91774	0,97062	0,99158	0,99807	0,99965
0,40	0,65542	0,81594	0,91924	0,97128	0,99180	0,99813	0,99966
0,41	0,65910	0,81859	0,92073	0,97193	0,99202	0,99819	0,99968
0,42	0,66276	0,82121	0,92220	0,97257	0,99224	0,99825	0,99969
0,43	0,66640	0,82381	0,92364	0,97320	0,99245	0,99831	0,99970
0,44	0,67003	0,82639	0,92507	0,97381	0,99266	0,99836	0,99971
0,45	0,67364	0,82894	0,92647	0,97441	0,99286	0,99841	0,99972
0,46	0,67724	0,83147	0,92785	0,97500	0,99305	0,99846	0,99973
0,47	0,68082	0,83398	0,92922	0,97558	0,99324	0,99851	0,99974
0,48	0,68439	0,83646	0,93056	0,97615	0,99343	0,99856	0,99975
0,49	0,68793	0,83891	0,93189	0,97670	0,99361	0,99861	0,99976

Примітки. z – значення аргумента u від 0,00 до 0,49. Значення аргументу u від 0,50 та вище знаходять як суму z і значень 0,5; 1,0 тощо.

В таблиці Д1.1 приведені значення функції стандартного гауссівського закону розподілу $\Phi(u)$, що розраховується за формулою:

$$\Phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{u} t^{-\frac{1}{2}t^2} dt, \qquad (Д1.1)$$

тобто значення площі під кривою, що розраховується за формулою:

$$y(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} t^{-\frac{1}{2}t^2} \qquad (Д1.2)$$

Приклад: для u = 1,86 = (1,5 + 0,36) знаходимо $\Phi(1{,}86) = 0{,}96856$.

Значення функції $\Phi(u)$ для негативних значень аргументу u розраховуються за формулою:

$$\Phi(-u) = 1 - \Phi(u). \qquad (Д1.3)$$

Значення квантиля u_α рівня α знаходять як значення аргументу u відповідного значенню функції $\Phi(u) = \alpha$.

Приклад: Значенню $\alpha = 0{,}99$ відповідає найближче табличне значення $\Phi = 0{,}99010$. За таблицею Д1.1 для цього значення функції знаходять значення аргументу u: $u = 2{,}0 + 0{,}33 = 2{,}33$.

Таблиця Д1.2

Значення квантилів розподілу Стьюдента $t_P(\nu)$ з ν степінями вільності

ν	довірча імовірність P ($P=1-\alpha$, де α – рівень значущості)									
	0,6	**0,65**	**0,7**	**0,75**	**0,8**	**0,85**	**0,9**	**0,95**	**0,975**	**0,99**
1	0,325	0,510	0,727	1,000	1,376	1,963	3,078	6,314	12,71	31,82
2	0,289	0,445	0,617	0,816	1,061	1,386	1,886	2,920	4,303	6,965
3	0,277	0,424	0,584	0,765	0,978	1,250	1,638	2,353	3,182	4,541
4	0,271	0,414	0,569	0,741	0,941	1,190	1,533	2,132	2,776	3,747
5	0267	0,408	0,559	0,727	0,920	1,156	1,476	2,015	2,571	3,365
6	0,265	0,404	0,543	0,718	0,906	1,134	1,440	1,943	2,447	3,143
7	0,263	0,402	0,549	0,711	0,896	1,119	1,415	1,895	2,365	2,998
8	0,262	0,399	0,546	0,706	0,889	1,108	1,397	1,860	2,306	2,896
9	0,261	0,3S8	0,543	0,703	0,883	1,100	1,383	1,833	2,262	2,821
10	0,260	0,397	0,542	0,700	0,879	1,093	1,372	1,812	2,228	2,764
11	0,260	0,396	0,540	0,697	0,876	1,088	1,363	1,796	2,201	2,718
12	0,259	0,395	0,539	0,695	0,873	1,083	1,356	1,782	2,179	2,681
13	0,259	0,394	0,538	0,694	0,870	1,079	1,350	1,771	2,160	2,650
14	0,258	0,393	0,537	0,692	0,868	1,076	1,345	1,761	2,145	2,624
15	0,258	0,393	0,536	0,691	0,866	1,074	1,341	1,753	2,131	2,602
16	0,258	0,392	0,535	0,690	0,865	1,071	1,337	1,746	2,120	2,583
17	0,257	0,392	0,534	0,689	0,863	1,069	1,333	1,740	2,110	2,567
18	0,257	0,392	0,534	0,688	0,862	1,067	1,330	1,734	2,101	2,552
19	0,257	0,391	0,533	0,688	0,861	1,066	1,328	1,729	2,093	2,539
20	0,257	0,391	0,533	0,687	0,860	1,064	1,325	1,725	2,086	2,528
25	0,256	0,390	0,531	0,684	0,856	1,058	1,316	1,708	2,060	2,485
30	0,256	0,389	0,530	0,683	0,854	1,055	1,310	1,697	2,042	2,457
40	0,255	0,388	0,529	0,681	0,851	0,050	1,303	1,684	2,021	2,423
60	0,254	0,387	0,527	0,679	0,848	0,046	1,296	1,671	2,000	2,390
120	0,254	0,386	0,526	0,677	0,845	0,041	1,289	1,658	1,980	2,358
∞	0,253	0,385	0,524	0,674	0,842	0,036	1,282	1,645	1,960	2,326

Примітки. Квантилі рівня $\alpha=0{,}5$ при будь-якому ν дорівнюють нулеві.

Квантилі рівня $P<0{,}5$ визначаються за формулою:

$$t_P(\nu)=-t_{1-P}(\nu). \qquad (Д1.4)$$

Для проміжних значень P, що лежать між двома сусідніми табличними значеннями P_1 і P_2, тобто $P_1<P<P_2$, значення квантиля $t_P(\nu)$ може бути визначено методом лінійної інтерполяції:

$$t_P(\nu)=(P-P_1)\frac{t_{P_2}-t_{P_1}}{P_2-P_1}+t_{P_1}. \qquad (Д1.5)$$

Таблиця Д1.3

Значення квантилів F-розподілу Фішера рівня $\alpha = 0{,}9$

f_2	степіні вільності f_1														
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**20**	**40**	**60**	**120**	∞
1	39,86	49,50	53,59	55,83	57,24	58,20	58,91	59,44	59,86	60,19	61,74	62,53	62,79	63,06	63,33
2	8,526	9,000	9,162	9,243	9,293	9,325	9,349	9,367	9,380	9,392	9,441	9,466	9,475	9,483	9,491
3	5,538	5,462	5,391	5,343	5,309	5,285	5,266	5,252	5,240	5,230	5,184	5,159	5,151	5,142	5,134
4	4,545	4,325	4,191	4,107	4,051	4,009	3,979	3,955	3,936	3,919	3,844	3,803	3,789	3,775	3,761
5	4,060	3,779	3,619	3,520	3,453	3,404	3,368	3,339	3,316	3,297	3,206	3,157	3,140	3,122	3,105
6	3,776	3,463	3,289	3,181	3,108	3,055	3,014	2,983	2,958	2,936	2,836	2,781	2,762	2,742	2,722
7	3,589	3,257	3,074	2,960	2,883	2,827	2,785	2,752	2,725	2,702	2,594	2,535	2,514	2,492	2,471
8	3,459	3,113	2,924	2,806	2,726	2,668	2,624	2,589	2,561	2,538	2,424	2,361	2,339	2,316	2,293
9	3,360	3,006	2,813	2,693	2,611	2,551	2,505	2,469	2,440	2,416	2,298	2,232	2,208	2,184	2,159
10	3,285	2,924	2,728	2,605	2,522	2,461	2,414	2,377	2,347	2,322	2,201	2,131	2,107	2,081	2,055
11	3,225	2,859	2,660	2,536	2,451	2,389	2,342	2,304	2,273	2,248	2,123	2,051	2,026	1,999	1,972
12	3,176	2,807	2,605	2,480	2,394	2,331	2,283	2,245	2,213	2,187	2,059	1,986	1,959	1,932	1,904
13	3,136	2,763	2,560	2,434	2,347	2,283	2,234	2,195	2,164	2,137	2,007	1,931	1,904	1,875	1,846
14	3,102	2,726	2,522	2,395	2,307	2,243	2,193	2,154	2,122	2,095	1,962	1,885	1,857	1,828	1,797
15	3,073	2,695	2,489	2,361	2,273	2,208	2,158	2,118	2,086	2,059	1,924	1,845	1,816	1,786	1,755
16	3,048	2,668	2,462	2,333	2,244	2,178	2,128	2,088	2,055	2,028	1,891	1,810	1,781	1,750	1,718
17	3,026	2,645	2,437	2,308	2,218	2,152	2,102	2,061	2,028	2,001	1,862	1,780	1,750	1,719	1,686
18	3,007	2,624	2,416	2,286	2,196	2,129	2,078	2,038	2,005	1,977	1,836	1,753	1,723	1,691	1,657
19	2,989	2,606	2,397	2,266	2,176	2,109	2,058	2,017	1,984	1,955	1,814	1,729	1,698	1,665	1,631
20	2,975	2,589	2,380	2,249	2,158	2,091	2,039	1,998	1,965	1,936	1,793	1,708	1,676	1,643	1,607
40	2,835	2,440	2,226	2,091	1,997	1,927	1,872	1,829	1,793	1,762	1,714	1,662	1,605	1,506	1,467
60	2,791	2,393	2,177	2,041	1,946	1,875	1,819	1,775	1,738	1,707	1,657	1,603	1,543	1,437	1,395
120	2,748	2,347	2,130	1,992	1,896	1,824	1,767	1,722	1,684	1,652	1,601	1,545	1,482	1,368	1,320
∞	2,705	2,303	2,084	1,945	1,847	1,774	1,717	1,670	1,631	1,598	1,545	1,487	1,420	1,295	1,240

Продовження таблиці Д1.3

f_2	Квантилі F-розподілу рівня $\alpha = 0,95$ для степінів вільності f_1														
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**20**	**40**	**60**	**120**	∞
1	161,45	199,50	215,71	224,58	230,16	233,99	236,77	238,88	240,54	241,88	248,01	251,14	252,20	253,25	254,32
2	18,51	19,00	19,16	19,24	19,29	19,33	19,35	19,37	19,38	19,39	19,44	19,47	19,47	19,48	19,49
3	10,12	9,552	9,276	9,117	9,013	8,940	8,886	8,845	8,812	8,785	8,660	8,594	8,572	8,549	8,526
4	7,708	6,944	6,591	6,388	6,256	6,163	6,094	6,041	5,998	5,964	5,802	5,717	5,687	5,658	5,628
5	6,607	5,786	5,409	5,192	5,050	4,950	4,875	4,818	4,772	4,735	4,558	4,463	4,431	4,398	4,365
6	5,987	5,143	4,757	4,533	4,387	4,283	4,206	4,146	4,099	4,060	3,874	3,774	3,739	3,704	3,668
7	5,591	4,737	4,346	4,120	3,971	3,866	3,787	3,725	3,676	3,636	3,444	3,340	3,304	3,267	3,229
8	5,317	4,459	4,066	3,837	3,687	3,580	3,500	3,438	3,388	3,347	3,150	3,042	3,005	2,966	2,927
9	5,117	4,256	3,862	3,633	3,481	3,373	3,292	3,229	3,178	3,137	2,936	2,825	2,787	2,747	2,706
10	4,964	4,102	3,708	3,478	3,325	3,217	3,135	3,071	3,020	2,978	2,774	2,660	2,621	2,580	2,537
11	4,844	3,982	3,587	3,356	3,203	3,094	3,012	2,948	2,896	2,853	2,646	2,530	2,490	2,448	2,404
12	4,747	3,885	3,490	3,259	3,105	2,996	2,913	2,848	2,796	2,753	2,543	2,425	2,384	2,341	2,296
13	4,667	3,805	3,410	3,179	3,025	2,915	2,832	2,766	2,714	2,671	2,458	2,339	2,296	2,252	2,206
14	4,600	3,738	3,343	3,112	2,958	2,847	2,764	2,698	2,645	2,602	2,387	2,266	2,223	2,177	2,130
15	4,543	3,682	3,287	3,055	2,901	2,790	2,706	2,640	2,587	2,543	2,327	2,204	2,160	2,114	2,065
16	4,494	3,633	3,238	3,006	2,852	2,741	2,657	2,591	2,537	2,493	2,275	2,150	2,105	2,058	2,009
17	4,451	3,591	3,196	2,964	2,810	2,698	2,614	2,548	2,494	2,449	2,230	2,104	2,058	2,010	1,960
18	4,413	3,554	3,159	2,927	2,772	2,661	2,576	2,510	2,456	2,411	2,190	2,062	2,016	1,968	1,916
19	4,380	3,521	3,127	2,895	2,740	2,628	2,543	2,476	2,422	2,377	2,155	2,026	1,979	1,930	1,878
20	4,351	3,492	3,098	2,866	2,710	2,599	2,514	2,447	2,392	2,347	2,124	1,993	1,946	1,896	1,843
40	4,084	3,231	2,838	2,606	2,445	2,335	2,240	2,180	2,124	2,077	1,838	1,692	1,637	1,576	1,508
60	4,001	3,150	2,758	2,525	2,368	2,254	2,166	2,097	2,040	1,992	1,748	1,594	1,534	1,467	1,389
120	3,920	3,071	2,680	2,447	2,290	2,175	2,086	2,016	1,958	1,910	1,658	1,495	1,429	1,351	1,253
∞	3,841	2,995	2,604	2,371	2,214	2,098	2,009	1,938	1,879	1,830	1,570	1,394	1,318	1,221	1,000

Продовження таблиці Д1.3

f_2	Квантилі F-розподілу рівня $\alpha = 0{,}975$ для степінів вільності f_1														
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**20**	**40**	**60**	**120**	∞
1	647,79	799,50	864,16	899,58	921,85	937,11	948,22	956,66	963,28	968,63	993,10	1005,6	1009,8	1014,0	1018,3
2	38,50	39,00	39,16	39,24	39,29	39,33	39,35	39,37	39,38	39,39	39,44	39,47	39,48	39,49	39,49
3	17,44	16,04	15,43	15,10	14,88	14,73	14,62	14,54	14,47	14,41	14,16	14,03	13,99	13,94	13,90
4	12,21	10,64	9,979	9,604	9,364	9,197	9,074	8,979	8,904	8,843	8,559	8,411	8,360	8,309	8,257
5	10,01	8,433	7,763	7,387	7,146	6,977	6,853	6,757	6,681	6,619	6,328	6,175	6,122	6,069	6,015
6	8,813	7,259	6,598	6,227	5,987	5,819	5,695	5,599	5,523	5,461	5,168	5,012	4,958	4,904	4,849
7	8,072	6,541	5,889	5,522	5,285	5,118	4,994	4,899	4,823	4,761	4,466	4,308	4,254	4,198	4,142
8	7,571	6,059	5,416	5,052	4,817	4,651	4,528	4,433	4,357	4,295	3,999	3,839	3,784	3,727	3,670
9	7,209	5,714	5,078	4,718	4,484	4,319	4,197	4,102	4,026	3,963	3,666	3,505	3,449	3,391	3,332
10	6,936	5,456	4,825	4,468	4,236	4,072	3,949	3,854	3,779	3,716	3,418	3,255	3,198	3,139	3,079
11	6,724	5,255	4,630	4,275	4,044	3,880	3,758	3,663	3,587	3,525	3,226	3,061	3,003	2,944	2,882
12	6,553	5,095	4,474	4,121	3,891	3,728	3,606	3,511	3,435	3,373	3,072	2,906	2,847	2,787	2,724
13	6,414	4,965	4,347	3,995	3,766	3,604	3,482	3,388	3,312	3,249	2,947	2,779	2,720	2,659	2,595
14	6,297	4,856	4,241	3,891	3,663	3,501	3,379	3,285	3,209	3,146	2,843	2,674	2,614	2,551	2,487
15	6,199	4,765	4,152	3,804	3,576	3,414	3,293	3,198	3,122	3,060	2,755	2,585	2,524	2,461	2,395
16	6,115	4,686	4,076	3,729	3,502	3,340	3,219	3,124	3,048	2,986	2,680	2,508	2,447	2,383	2,316
17	6,042	4,618	4,011	3,664	3,437	3,276	3,155	3,061	2,984	2,922	2,615	2,442	2,380	2,315	2,247
18	5,978	4,559	3,953	3,608	3,382	3,220	3,099	3,005	2,929	2,866	2,559	2,384	2,321	2,255	2,186
19	5,921	4,507	3,903	3,558	3,332	3,171	3,050	2,956	2,880	2,817	2,508	2,332	2,269	2,203	2,133
20	5,871	4,461	5,858	3,514	3,289	3,128	3,007	2,912	2,836	2,773	2,464	2,287	2,223	2,156	2,08
40	5,423	4,051	3,463	3,126	2,903	2,744	2,623	2,528	2,451	2,388	2,C67	1,875	1,802	1,724	1,637
60	5,285	3,925	3,342	3,007	2,786	2,627	2,506	2,411	2,334	2,270	1,944	1,744	1,666	1,581	1,482
120	5,152	3,804	3,227	2,894	2,674	2,515	2,394	2,299	2,221	2,157	1,824	1,614	1,529	1,432	1,310
∞	5,023	3,688	3,116	2,785	2,566	2,408	2,287	2,191	2,113	2,048	1,708	1,483	1,388	1,268	1,000

Продовження таблиці Д1.3

f_2	Квантилі F-розподілу рівня $\alpha = 0{,}99$ для степінів вільності f_1														
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**20**	**40**	**60**	**120**	∞
1	4052,2	4999,5	5403,3	5624,6	5763,7	5859,0	5928,3	5981,1	6022,5	6055,8	6234,6	6286,8	6313,0	6339,4	6366,0
2	98,50	99,00	99,16	99,24	99,29	99,33	99,35	99,37	99,38	99,39	99,45	99,47	99,48	99,49	99,49
3	34,11	30,81	29,45	28,71	28,23	27,91	27,67	27,48	27,34	27,22	26,59	26,41	26,31	26,22	26,12
4	21,19	18,00	16,69	15,97	15,52	15,20	14,97	14,79	14,65	14,54	13,92	13,74	13,65	13,55	13,46
5	16,25	13,27	12,06	11,39	10,96	10,67	10,67	10,28	10,15	10,05	9,466	9,291	9,202	9,111	9,020
6	13,74	10,92	9,779	9,148	8,745	8,466	8,260	8,101	7,976	7,874	7,312	7,143	7,056	6,969	6,886
7	12,24	9,546	8,451	7,846	7,460	7,191	6,992	6,840	6,718	6,620	6,074	5,908	5,823	5,737	5,649
8	11,25	8,649	7,591	7,006	6,631	6,370	6,177	6,028	5,910	5,814	5,279	5,115	5,031	4,946	4,858
9	10,56	8,021	6,991	6,422	6,056	5,801	5,612	5,467	5,351	5,256	4,729	4,566	4,483	4,397	4,310
10	10,04	7,559	6,552	5,994	5,636	5,385	5,200	5,056	4,942	4,849	4,326	4,165	4,081	3,996	3,909
11	9,646	7,205	6,216	5,668	5,316	5,069	4,886	4,744	4,631	4,539	4,020	3,859	3,776	3,690	3,602
12	9,330	6,926	5,952	5,411	5,064	4,820	4,639	4,499	4,387	4,296	3,780	3,619	3,535	3,449	3,360
13	9,073	6,701	5,739	5,205	4,861	4,620	4,441	4,302	4,191	4,100	3,586	3,425	3,341	3,254	3,165
14	8,861	6,514	5,563	5,035	4,695	4,455	4,277	4,139	4,029	3,939	3,427	3,265	3,181	3,094	3,004
15	8,683	6,358	5,417	4,893	4,555	4,318	4,141	4,004	3,894	3,804	3,294	3,131	3,047	3,299	2,868
16	8,531	6,226	5,292	4,772	4,437	4,201	4,025	3,889	3,780	3,690	3,180	3,018	2,933	3,844	2,752
17	8,399	6,112	5,185	4,669	4,335	4,101	3,926	3,791	3,682	3,593	3,083	2,920	2,834	2,745	2,653
18	8,285	6,012	5,091	4,579	4,247	4,014	3,840	3,705	3,597	3,508	2,999	2,835	2,749	2,659	2,566
19	8,185	5,925	5,010	4,500	4,170	3,938	3,765	3,630	3,522	3,433	2,924	2,760	2,674	2,583	2,489
20	8,096	5,848	4,938	4,430	4,102	3,871	3,698	3,564	3,456	3,368	2,859	2,694	2,607	2,516	2,421
40	7,314	5,178	4,312	3,828	3,513	4,291	3,123	2,993	2,887	2,800	2,288	2,114	2,019	1,917	1,804
60	7,077	4,977	4,125	3,649	3,338	3,118	2,953	2,823	2,718	2,631	2,115	1,936	1,836	1,726	1,600
120	6,851	4,786	3,949	3,479	3,173	2,955	2,791	2,662	2,558	2,472	1,950	1,762	1,655	1,533	1,380
∞	6,634	4,605	3,781	3,319	3,017	2,802	2,639	2,511	2,407	2,320	1,790	1,592	1,473	1,324	1,000

Примітки. В таблиці Д1.3 знаходяться значення квантилів $F_\alpha(f_1, f_2)$ для заданих рівнів α і різних поєднань степінів вільності f_1 і f_2. Кожна таблиця відповідає одному рівню α, значення якого вказане в заголовку таблиці, і різним значенням f_1 та f_2.

Для визначення квантилів рівня α менше 0,5 слід використовувати співвідношення:

$$F_\alpha(f_1, f_2) = \frac{1}{F_{1-\alpha}(f_2, f_1)} \tag{Д1.6}$$

Для проміжних значень α, що лежать між двома сусідніми табличними значеннями α_1 і α_2, тобто $\alpha_1 < \alpha < \alpha_2$, значення квантиля F_α може бути визначено наближено за формулою (метод лінійної інтерполяції):

$$F_\alpha = (\alpha - \alpha_1)\left(\frac{F_{\alpha 2} - F_{\alpha 1}}{\alpha_2 - \alpha_1}\right) + F_{\alpha 1}. \tag{Д1.7}$$

Для проміжних значень f_1 і f_2, що лежать між двома сусідніми табличними значеннями f_1' і f_1'' або f_2' і f_2'', тобто $f_1' < f_1 < f_1''$ або $f_2' < f_2 < f_2''$, значення квантилів $F_\alpha(f_1)$ і $F_\alpha(f_2)$ можуть бути наближено визначені за формулами:

$$F_\alpha(f_1) = (f_1 - f_1')\left(\frac{F_\alpha(f_1'') - F_\alpha(f_1')}{f_1'' - f_1'}\right) + F_\alpha(f_1'), \tag{Д1.8}$$

$$F_\alpha(f_2) = (f_2 - f_2')\left(\frac{F_\alpha(f_2'') - F_\alpha(f_2')}{f_2'' - f_2'}\right) + F_\alpha(f_2'). \tag{Д1.9}$$

Таблиця Д1.4

Значення квантилів розподілу χ^2 Пірсона
для v степінів вільності та рівня імовірності P

v	***P***									
	0,005	**0,01**	**0,025**	**0,05**	**0,1**	**0,9**	**0,95**	**0,975**	**0,99**	**0,995**
1	$3{,}9\cdot10^{-5}$	$1{,}5\cdot10^{-4}$	0,001	0,004	0,016	2,706	3,841	5,024	6,635	7,879
2	0,010	0,020	0,051	0,103	0,211	4,605	5,991	7,378	9,210	10,597
3	0,072	0,115	0,216	0,352	0,584	6,251	7,815	9,348	11,345	12,838
4	0,207	0,297	0,484	0,711	1,064	7,779	9,488	11,143	13,277	14,860
5	0,412	0,554	0,831	1,145	1,610	9,236	11,070	12,833	15,086	16,750
6	0,676	0,872	1,237	1,635	2,204	10,645	12,592	14,449	16,812	18,548
7	0,989	1,239	1,690	2,167	2,833	12,017	14,067	16,013	18,475	20,278
8	1,344	1,646	2,180	2,733	3,490	13,362	15,507	17,535	20,090	21,955
9	1,735	2,088	2,700	3,325	4,168	14,684	16,919	19,023	21,666	23,589
10	2,156	2,558	3,247	3,940	4,865	15,987	18,307	20,483	23,209	25,188
11	2,603	3,053	3,816	4,575	5,578	17,275	19,675	21,920	24,725	26,757
12	3,074	3,571	4,404	5,226	6,304	18,549	21,026	23,337	26,217	28,300
13	3,565	4,107	5,009	5,892	7,042	19,812	22,362	24,736	27,688	29,819
14	4,075	4,660	5,629	6,571	7,790	21,064	23,685	26,119	29,141	31,319
15	4,601	5,229	6,262	7,261	8,547	22,307	24,996	27,488	30,578	32,801
16	5,142	5,812	6,908	7,962	9,312	23,542	26,296	28,845	32,000	34,267
17	5,697	6,408	7,564	8,672	10,085	24,769	27,587	30,191	33,409	35,718
18	6,265	7,015	8,231	9,390	10,865	25,989	28,869	31,526	34,805	37,156
19	6,844	7,633	8,907	10,117	11,651	27,204	30,144	32,852	36,191	38,582
20	7,434	8,260	9,591	10,851	12,443	28,412	31,410	34,170	37,566	39,997
21	8,034	8,897	10,283	11,591	13,240	29,615	32,671	35,479	38,932	41,401
22	8,643	9,542	10,982	12,338	14,041	30,813	33,924	36,781	40,289	42,796
23	9,260	10,196	11,689	13,091	14,848	32,007	35,172	38,076	41,638	44,181
24	9,886	10,856	12,401	13,848	15,659	33,196	36,415	39,364	42,980	45,559
25	10,520	11,524	13,120	14,611	16,473	34,382	37,652	40,646	44,314	46,928
26	11,160	12,198	13,844	15,379	17,292	35,563	38,885	41,923	45,642	48,290
27	11,808	12,879	14,573	16,151	18,114	36,741	40,113	43,195	46,963	49,645
28	12,461	13,565	15,308	16,928	18,939	37,916	41,337	44,461	48,278	50,993
29	13,121	14,256	16,047	17,708	19,768	39,087	42,557	45,722	49,588	52,336
30	13,787	14,953	16,791	18,493	20,599	40,256	43,773	46,979	50,892	53,672
31	14,458	15,655	17,539	19,281	21,434	41,422	44,985	48,232	52,191	55,003
32	15,134	16,362	18,291	20,072	22,271	42,585	46,194	49,480	53,486	56,328
33	15,815	17,074	19,047	20,867	23,110	43,745	47,400	50,725	54,776	57,648

продовження таблиці Д1.4

v	P									
	0,005	**0,01**	**0,025**	**0,05**	**0,1**	**0,9**	**0,95**	**0,975**	**0,99**	**0,995**
34	16,501	17,789	19,806	21,664	23,952	44,903	48,602	51,966	56,061	58,964
35	17,192	18,509	20,569	22,465	24,797	46,059	49,802	53,203	57,342	60,275
36	17,887	19,233	21,336	23,269	25,643	47,212	50,998	54,437	58,619	61,581
37	18,586	19,960	22,106	24,075	26,492	48,363	52,192	55,668	59,892	62,883
38	19,289	20,691	22,878	24,884	27,343	49,513	53,384	56,896	61,162	64,181
39	19,996	21,426	23,654	25,695	28,196	50,660	54,572	58,120	62,428	65,476
40	20,707	22,164	24,433	26,509	29,051	51,805	55,758	59,342	63,691	66,766
41	21,421	22,906	25,215	27,326	29,907	52,949	56,942	60,561	64,950	68,053
42	22,138	23,650	25,999	28,144	30,765	54,090	58,124	61,777	66,206	69,336
43	22,859	24,398	26,785	28,965	31,625	55,230	59,304	62,990	67,459	70,616
44	23,584	25,148	27,575	29,787	32,487	56,369	60,481	64,201	68,710	71,893
45	24,311	25,901	28,366	30,612	33,350	57,505	61,656	65,410	69,957	73,166
46	25,041	26,657	29,160	31,439	34,215	58,641	62,830	66,617	71,201	74,437
47	25,775	27,416	29,956	32,268	35,081	59,774	64,001	67,821	72,443	75,704
48	26,511	28,177	30,755	33,098	35,949	60,907	65,171	69,023	73,683	76,969
49	27,249	28,941	31,555	33,930	36,818	62,038	66,339	70,222	74,919	78,231
50	27,991	29,707	32,357	34,764	37,689	63,167	67,505	71,420	76,154	79,490
100	67,328	70,065	74,222	77,929	82,358	118,498	124,342	129,561	135,807	140,169

Таблиця Д1.5

Граничні значення для критерію Кохрена

p	***n* = 2**		***n* = 3**		***n* = 4**		***n* = 5**		***n* = 6**	
	1%	**5%**	**1%**	**5%**	**1%**	**5%**	**1%**	**5%**	**1%**	**5%**
2	-	-	0,995	0,975	0,979	0,939	0,959	0,906	0,937	0,877
3	0,993	0,967	0,942	0,871	0,883	0,798	0,834	0,746	0,793	0,707
4	0,968	0,906	0,864	0,768	0,781	0,684	0,721	0,629	0,676	0,590
5	0,928	0,841	0,788	0,684	0,696	0,598	0,633	0,544	0,588	0,506
6	0,883	0,781	0,722	0,616	0,626	0,532	0,564	0,480	0,520	0,445
7	0,833	0,727	0,664	0,561	0,568	0,480	0,508	0,431	0,466	0,397
8	0,794	0,680	0,615	0,516	0,521	0,438	0,463	0,391	0,423	0,360
9	0,754	0,638	0,573	0,478	0,481	0,403	0,425	0,358	0,387	0,329
10	0,718	0,602	0,536	0,445	0,447	0,373	0,393	0,331	0,357	0,303
12	0,653	0,541	0,475	0,392	0,392	0,326	0,343	0,288	0,310	0,262
15	0,575	0,471	0,407	0,335	0,332	0,276	0,288	0,242	0,259	0,220
20	0,480	0,389	0,330	0,270	0,265	0,220	0,229	0,192	0,205	0,174
30	0,363	0,293	0,241	0,198	0,191	0,159	0,164	0,138	0,145	0,124
40	0,294	0,237	0,192	0,158	0,151	0,126	0,128	0,108	0,114	0,097

5%							
	n						
p	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**17**	**37**
2	0,853	0,833	0,816	0,801	0,788	0,734	0,660
3	0,677	0,653	0,633	0,617	0,603	0,547	0,475
4	0,560	0,537	0,518	0,502	0,488	0,437	0,372
5	0,478	0,456	0,439	0,424	0,412	0,365	0,307
6	0,418	0,398	0,382	0,368	0,357	0,314	0,261
7	0,373	0,354	0,338	0,326	0,315	0,276	0,228
8	0,336	0,319	0,304	0,293	0,283	0,246	0,202
9	0,307	0,290	0,277	0,266	0,257	0,223	0,182
10	0,282	0,267	0,254	0,244	0,235	0,203	0,166
12	0,244	0,230	0,219	0,210	0,202	0,174	0,140
15	0,203	0,191	0,182	0,174	0,167	0,143	0,114
20	0,160	0,150	0,142	0,136	0,130	0,111	0,088
24	0,137	0,129	0,122	0,116	0,111	0,094	0,074
30	0,114	0,106	0,100	0,096	0,092	0,077	0,060
40	0,089	0,083	0,078	0,075	0,071	0,060	0,046

p – кількість груп даних

n – кількість результатів вимірювань в групі

Таблиця Д1.6

Критичні значення для критерію Граббса

p	Одне найбільше або найменше значення		Два найбільших або найменших значення	
	α		α	
	1%	5%	1%	5%
3	1,155	1,155	-	-
4	1,496	1,481	0,000	0,000
5	1,764	1,715	0,001	0,009
6	1,973	1,887	0,011	0,035
7	2,139	2,020	0,030	0,071
8	2,274	2,126	0,056	0,110
9	2,387	2,215	0,085	0,149
10	2,482	2,290	0,115	0,186
11	2,564	2,355	0,145	0,221
12	2,636	2,412	0,174	0,254
13	2,699	2,462	0,202	0,284
14	2,755	2,507	0,228	0,311
15	2,806	2,549	0,253	0,337
16	2,852	2,585	0,277	0,360
17	2,894	2,620	0,299	0,382
18	2,932	2,651	0,320	0,402
19	2,968	2,681	0,339	0,421
20	3,001	2,709	0,358	0,439
21	3,031	2,733	0,376	0,456
22	3,060	2,758	0,393	0,471
23	3,087	2,781	0,408	0,485
24	3,112	2,802	0,423	0,499
25	3,135	2,822	0,437	0,512
26	3,157	2,841	0,451	0,524
27	3,178	2,859	0,464	0,536
28	3,199	2,876	0,476	0,547
29	3,218	2,893	0,487	0,557
30	3,236	2,908	0,498	0,567
32	3,270	2,938	0,519	0,586
34	3,301	2,965	0,538	0,602
36	3,330	2,991	0,555	0,617
38	3,356	3,014	0,571	0,632
40	3,381	3,036	0,586	0,644

p – кількість порівнюваних математичних сподівань;

Таблиця Д1.7

Коефіцієнти a_i критерію Манн-Фертига-Шуєра для розподілу Вейбула

n	***i***	a_i	***n***	***i***	a_i	***n***	***i***	a_i
3	1	1,216395	**10**	4	0,324470	**13**	12	0,363582
	2	0,863046		5	0,286163	**14**	1	1,037513
4	1	1,150727		6	0,269493		2	0,540059
	2	0,706698		7	0,271645		3	0,376352
	3	0,679596		8	0,300869		4	0,296496
5	1	1,115718		9	0,405316		5	0,250650
	2	0,645384	**11**	1	1,048411		6	0,222377
	3	0,532445		2	0,552769		7	0,204885
	4	0,583273		3	0,391410		8	0,195165
6	1	1,093929		4	0,314705		9	0,192209
	2	0,612330		5	0,273245		10	0,196679
	3	0,474330		6	0,251386		11	0,211875
	4	0,442920		7	0,243928		12	0,248409
	5	0,522759		8	0,251548		13	0,353334
7	1	1,079055		9	0,283879	**15**	1	1,034894
	2	0,591158		10	0,389071		2	0,537085
	3	0,442789	**12**	1	1,044137		3	0,372934
	4	0,387289		2	0,547721		4	0,292518
	5	0,387714		3	0,385338		5	0,255180
	6	0,480648		4	0,307221		6	0,216712
8	1	1,068252		5	0,263737		7	0,197893
	2	0,577339		6	0,238797		8	0,186266
	3	0,422889		7	0,226264		9	0,180266
	4	0,356967		8	0,224477		10	0,180072
	5	0,334089		9	0,235630		11	0,180072
	6	0,349907		10	0,269966		12	0,186347
	7	0,449338		11	0,375356		13	0,239842
9	1	1,060046	**13**	1	1,040515		14	0,344309
	2	0,566942		2	0,543556	**16**	1	1,032617
	3	0,409157		3	0,380417		2	0,534521
	4	0,337763		4	0,301300		3	0,370021
	5	0,304777		5	0,256437		4	0,289169
	6	0,297949		6	0,229515		5	0,242049
	7	0,322189		7	0,213966		6	0,212103
	8	0,424958		8	0,207205		7	0,192338
10	1	1,053606		9	0,209131		8	0,179407
	2	0,559013		10	0,222667		9	0,171667
	3	0,399100		11	0,258323		10	0,168476

продовження табл. Д1.7

n	**i**	a_i	**n**	**i**	a_i	**n**	**i**	a_i
16	11	0,170026	**19**	2	0,528594	**21**	4	0,278117
	12	0,177619		3	0,363389		5	0,229551
	13	0,194859		4	0,281692		6	0,197821
	14	0,232350		5	0,233535		7	0,175815
	15	0,336283		6	0,202291		8	0,160009
17	1	1,030618		7	0,180882		9	0,148471
	2	0,532290		8	0,165807		10	0,140087
	3	0,367507		9	0,155189		11	0,134200
	4	0,286765		10	0,147984		12	0,130451
	5	0,238765		11	0,143650		13	0,128702
	6	0,208278		12	0,142012		14	0,129025
	7	0,187813		13	0,143250		15	0,131756
	8	0,173951		14	0,148031		16	0,137659
	9	0,164928		15	0,157921		17	0,148341
	10	0,159891		16	0,176611		18	0,167481
	11	0,158624		17	0,214520		19	0,205352
	12	0,161559		18	0,316666		20	0,306285
	13	0,170132	**20**	1	1,0,25866	**22**	1	1,023439
	14	0,188005		2	0,527046		2	0,524405
	15	0,225729		3	0,361682		3	0,358790
	16	0,329085		4	0,279798		4	0,276618
18	1	1,028850		5	0,231417		5	0,278950
	2	0,530332		6	0,199905		6	0,195983
	3	0,365314		7	0,178167		7	0,173760
	4	0,283846		8	0,162684		8	0,157692
	5	0,235958		9	0,151549		9	0,145834
	6	0,205051		10	0,143674		10	0,137052
	7	0,184055		11	0,138448		11	0,130662
	8	0,169504		12	0,135580		12	0,126260
	9	0,159564		13	0,135306		13	0,123640
	10	0,153263		14	0,137120		14	0,122763
	11	0,150176		15	0,142527		15	0,123763
	12	0,150333		16	0,152861		16	0,127019
	13	0,154313		17	0,171810		17	0,133316
	14	0,163630		18	0,209721		18	0,144273
	15	0,181971		19	0,311257		19	0,163552
	16	0,219825	**21**	1	1,024594		20	0,201355
	17	0,322580		2	0,525657		21	0,301693
19	1	1,027277		3	0,360159			

закінчення табл. Д1.7

n	i	a_i	n	i	a_i	n	i	a_i
23	1	1,022380	**24**	1	1,021431	**25**	1	1,020551
	2	0,523269		2	0,522233		2	0,521285
	3	0,357557		3	0,356436		3	0,355415
	4	0,275268		4	0,274051		4	0,272945
	5	0,226417		5	0,225086		5	0,223885
	6	0,194351		6	0,192892		6	0,191578
	7	0,171948		7	0,170330		7	0,168899
	8	0,155666		8	0,153877		8	0,152286
	9	0,143549		9	0,141549		9	0,139789
	10	0,134451		10	0,132195		10	0,130219
	11	0,127667		11	0,125099		11	0,122871
	12	0,122768		12	0,119811		12	0,117274
	13	0,119503		13	0,116054		13	0,113132
	14	0,117764		14	0,113677		14	0,110268
	15	0,117577		15	0,112638		15	0,108598
	16	0,119120		16	0,113007		16	0,108124
	17	0,122799		17	0,114990		17	0,108944
	18	0,129416		18	0,119014		18	0,111289
	19	0,140590		19	0,125889		19	0, 115596
	20	0,159966		20	0,137235		20	0,122683
	21	0,197679		21	0,156679		21	0,134165
	22	0,297435		22	0,194285		22	0,153650
				23	0,293473		23	0,191137
							24	0,289773

Таблиця Д1.8

Граничні значення $K_P(r,n)$ критерію Манн-Фертига-Шуєра для розподілу Вейбула

n	**r**	**P**			**n**	**r**	**P**			**n**	**r**	**P**		
		0,90	**0,95**	**0,99**			**0,90**	**0,95**	**0,99**			**0,90**	**0,95**	**0,99**
3	3	0,90	0,95	0,99	**10**	9	0,71	0,76	0,85	**14**	5	0,80	0,86	0,94
4	3	0,90	0,95	0,99		10	0,64	0,69	0,79		6	0,68	0,74	0,86
	4	0,67	0,76	0,89	**11**	3	0,90	0,95	0,99		7	0,75	0,81	0,89
5	3	0,90	0,95	0,99		4	0,68	0,77	0,90		8	0,66	0,73	0,82
	4	0,68	0,77	0,89		5	0,80	0,86	0,94		9	0,72	0,77	0,85
	5	0,79	0,96	0,94		6	0,68	0,75	0,86		10	0,65	0,70	0,79
6	3	0,90	0,95	0,99		7	0,75	0,81	0,89		11	0,69	0,74	0,82
	4	0,68	0,76	0,89		8	0,66	0,72	0,82		12	0,64	0,68	0,77
	5	0,80	0,86	0,94		9	0,71	0,77	0,85		13	0,67	0,72	0,79
	6	0,66	0,73	0,84		10	0,64	0,70	0,79		14	0,62	0,67	0,75
7	3	0,90	0,95	0,99		11	0,69	0,74	0,82	**15**	3	0,90	0,95	0,99
	4	0,68	0,77	0,89	**12**	3	0,90	0,95	0,99		4	0,69	0,78	0,90
	5	0,80	0,86	0,94		4	0,68	0,78	0,89		5	0,80	0,86	0,94
	6	0,67	0,74	0,85		5	0,80	0,86	0,94		6	0,67	0,75	0,86
	7	0,74	0,80	0,80		6	0,67	0,74	0,85		7	0,75	0,81	0,89
8	3	0,90	0,95	0,99		7	0,75	0,81	0,89		8	0,66	0,72	0,82
	4	0,68	0,77	0,90		8	0,66	0,72	0,82		9	0,72	0,77	0,85
	5	0,80	0,88	0,94		9	0,71	0,77	0,85		10	0,65	0,70	0,79
	6	0,67	0,74	0,85		10	0,65	0,70	0,79		11	0,69	0,74	0,82
	7	0,74	0,80	0,89		11	0,69	0,74	0,82		12	0,64	0,68	0,77
	8	0,65	0,71	0,81		12	0,63	0,68	0,76		13	0,67	0,72	0,79
9	3	0,90	0,95	0,99	**13**	3	0,90	0,95	0,99		14	0,63	0,67	0,75
	4	0,68	0,77	0,89		4	0,68	0,77	0,89		15	0,66	0,70	0,77
	5	0,80	0,86	0,94		5	0,80	0,86	0,94	**16**	3	0,90	0,95	0,99
	6	0,67	0,75	0,86		6	0,68	0,75	0,86		4	0,69	0,78	0,89
	7	0,74	0,80	0,89		7	0,75	0,81	0,90		5	0,80	0,86	0,94
	8	0,66	0,72-	0,82		8	0,66	0,72	0,82		6	0,68	0,75	0,86
	9	0,71	0,76	0,85		9	0,72	0,77	0,85		7	0,75	0,81	0,89
10	3	0,90	0,95	0,99		10	0,65	0,70	0,79		8	0,66	0,72	0,82
	4	0,68	0,77	0,90		11	0,69	0,74	0,82		9	0,72	0,77	0,85
	5	0,80	0,86	0,94		12	0,64	0,68	0,76		10	0,65	0,71	0,79
	6	0,68	0,75	0,85		13	0,67	0,72	0,79		11	0,69	0,74	0,82
	7	0,75	0,81	0,89	**14**	3	0,90	0,95	0,99		12	0,64	0,69	0,77
	8	0,66	0,72	0,81		4	0,68	0,77	0,90		13	0,68	0,72	0,80

продовження табл. Д1.8

n	***r***	***P***		
		0,90	**0,95**	**0,99**
16	14	0,63	0,67	0,75
	15	0,66	0,70	0,77
	16	0,62	0,66	0,73
17	3	0,90	0,95	0,99
	4	0,69	0,78	0,90
	5	0,80	0,87	0,94
	6	0,68	0,74	0,85
	7	0,75	0,80	0,89
	8	0,66	0,72	0,81
	9	0,72	0,77	0,85
	10	0,65	0,70	0,79
	11	0,69	0,74	0,82
	12	0,64	0,69	0,77
	13	0,67	0,72	0,80
	14	0,63	0,68	0,75
	15	0,66	0,70	0,77
	16	0,62	0,66	0,74
	17	0,65	0,69	0,75
18	3	0,90	0,95	0,99
	4	0,68	0,77	0,90
	5	0,80	0,86	0,94
	6	0,67	0,75	0,86
	7	0,75	0,81	0,89
	8	0,66	0,73	0,82
	9	0,72	0,77	0,85
	10	0,65	0,71	0,80
	11	0,69	0,74	0,82
	12	0,64	0,69	0,77
	13	0,68	0,72	0,80
	14	0,63	0,67	0,76
	15	0,66	0,70	0,78
	16	0,62	0,66	0,74
	17	0,65	0,69	0,76
	18	0,62	0,65	0,71

n	***r***	***P***		
		0,90	**0,95**	**0,99**
19	3	0,90	0,95	0,99
	4	0,69	0,78	0,90
	5	0,81	0,86	094
	6	0,68	0,75	0,86
	7	0,75	0,81	0,89
	8	0,67	0,72	0,82
	9	0,72	0,77	0,85
	10	0,65	0,71	0,80
	11	0,69	0,74	0,82
	12	0,64	0,69	0,77
	13	0,68	0,72	0,80
	14	0,63	0,68	0,76
	15	0,66	0,70	0,78
	16	0,62	0,66	0,74
	17	0,65	0,69	0,76
	18	0,61	0,65	0,72
	19	0,64	0,67	0,74
20	3	0,90	0,95	0,99
	4	0,68	0,78	0,90
	5	0,80	0,86	0,91
	6	0,67	0,73	0,86
	7	0,75	0,81	0,89
	8	0,66	0,73	0,82
	9	0,72	0,77	0,85
	10	0,65	0,71	0,80
	11	0,69	0,74	0,83
	12	0,64	0,69	0,77
	13	0,68	0,72	0,80
	14	0,63	0,68	0,76
	15	0,66	0,71	0,78
	16	0,62	0,67	0,74
	17	0,65	0,69	0,76
	18	0,62	0,66	0,72
	19	0,64	0,68	0,74
	20	0,61	0,65	0,71

n	***r***	***P***		
		0,90	**0,95**	**0,99**
21	3	0,90	0,95	0,99
	4	0,69	0,78	0,90
	5	0,80	0,86	0,94
	6	0,67	0,74	0,85
	7	0,75	0,80	0,89
	8	0,66	0,73	0,82
	9	0,72	0,77	0,85
	10	0,65	0,70	0,80
	11	0,69	0,74	0,82
	12	0,64	0,69	0,77
	13	0,68	0,72	0,79
	14	0,63	0,67	0,75
	15	0,66	0,70	0,78
	16	0,63	0,67	0,74
	17	0,65	0,69	0,76
	18	0,62	0,66	0,73
	19	0,64	0,68	0,75
	20	0,61	0,65	0,72
	21	0,63	0,67	0,73
22	3	0,90	0,95	0,99
	4	0,68	0,77	0,90
	5	0,80	0,86	0,94
	6	0,68	0,75	0,85
	7	0,75	0,81	0,89
	8	0,66	0,72	0,82
	9	0,72	0,77	0,85
	10	0,65	0,70	0,80
	11	0,69	0,74	0,82
	12	0,64	0,69	0,78
	13	0,68	0,72	0,80
	14	0,63	0,68	0,75
	15	0,67	0,71	0,78
	16	0,62	0,67	0,74
	17	0,65	0,69	0,76
	18	0,62	0,66	0,73

закінчення табл. Д1.8

n	r	P			n	r	P			n	r	P		
		0,90	**0,95**	**0,99**			**0,90**	**0,95**	**0,99**			**0,90**	**0,95**	**0,99**
22	19	0,64	0,68	0,75	**23**	23	0,63	0,66	0,72	**25**	3	0,90	0,95	0,99
	20	0,61	0,65	0,72	**24**	3	0,90	0,95	0,99		4	0,69	0,78	0,91
	21	0,64	0,67	0,73		4	0,69	0,78	0,90		5	0,81	0,87	0,94
	22	0,61	0,64	0,70		5	0,81	0,86	0,94		6	0,68	0,75	0,86
23	3	0,90	0,95	0,99		6	0,68	0,75	0,85		7	0,75	081	0,89
	4	0,68	0,77	0,89		7	0,75	0,81	0,89		8	0,66	0,72	0,82
	5	0,80	0,86	0,94		8	0,67	0,73	0,83		9	0,72	0,77	0,85
	6	0,68	0,76	0,86		9	0,72	0,77	0,86		10	0,65	0,70	0,80
	7	0,76	0,82	0,89		10	0,66	0,71	0,80		11	0,70	0,75	0,82
	8	0,67	0,73	0,83		11	0,70	0,75	0,83		12	0,64	0,69	0,78
	9	0,72	0,78	0,86		12	0,64	0,70	0,78		13	0,68	0,73	0,81
	10	0,66	0,71	0,80		13	0,68	0,73	0,80		14	0,63	0,68	0,76
	11	0,70	0,75	0,82		14	0,64	0,68	0,76		15	0,66	0,71	0,78
	12	0,64	0,69	0,78		15	0,67	011	0,78		16	0,63	0,67	0,74
	13	0,68	0,73	0,80		16	0,63	0,67	0,74		17	0,65	0,69	0,76
	14	0,63	0,68	0,76		17	0,65	0,69	0,76		18	0,62	0,66	0,73
	15	0,67	0,71	0,78		18	0,62	0,66	0,73		19	0,64	0,68	0,75
	16	0,63	0,67	0,75		19	0,64	0,68	0,75		20	0,61	0,65	0,72
	17	0,65	0,69	0,77		20	0,61	0,65	0,72		21	0,63	0,67	0,74
	18	0,62	0,66	0,73		21	0,64	0,67	0,73		22	0,61	0,64	0,71
	19	0,64	0,68	0,75		22	0,61	0,64	0,71		23	0,63	0,66	0,72
	20	0,61	0,65	0,72		23	0,63	0,66	0,72		24	0,60	0,63	0,70
	21	0,63	0,67	0,73		24	0,60	0,64	0,69		25	0,62	0,65	0,71
	22	0,60	0,64	0,70										

Таблиця Д.1.9

Значення k для визначення меж одностороннього довірчого інтервалу для обсягу вибірки від 5 до 100 елементів

n	Значення k для рівня довіри, %								**n**	Значення k для рівня довіри, %							
	80	**90**	**95**	**98**	**99**	**99,5**	**99,8**	**99,9**		**80**	**90**	**95**	**98**	**99**	**99,5**	**99,8**	**99,9**
5	2	1	1	*	*	*	*	*									
6	2	1	1	1	*	*	*	*	**36**	15	14	13	12	11	10	10	9
7	2	2	1	1	1	*	*	*	**37**	16	15	14	12	11	11	10	9
8	3	2	2	1	1	1	*	*	**38**	16	15	14	13	12	11	10	10
9	3	3	2	2	1	1	1	*	**39**	17	16	14	13	12	12	11	10
10	4	3	2	2	1	1	1	1	**40**	17	16	15	14	13	12	11	10
11	4	3	3	2	2	1	1	1	**41**	18	16	15	14	13	12	11	11
12	5	4	3	3	2	2	1	1	**42**	18	17	16	14	14	13	12	11
13	5	4	4	3	2	2	2	1	**43**	19	17	16	15	14	13	12	12
14	5	5	4	3	3	2	2	2	**44**	19	18	17	15	14	14	13	12
15	6	5	4	4	3	3	2	2	**45**	20	18	17	16	15	14	13	12
16	6	5	5	4	3	3	2	2	**46**	20	19	17	16	15	14	13	13
17	7	6	5	4	4	3	3	2	**47**	21	19	18	17	16	15	14	13
18	7	6	6	5	4	4	3	3	**48**	21	20	18	17	16	15	14	13
19	8	7	6	5	5	4	3	3	**49**	22	20	19	17	16	16	15	14
20	8	7	6	5	5	4	4	3	**50**	22	20	19	18	17	16	15	14
21	9	8	7	6	5	5	4	4	**51**	22	21	20	18	17	16	15	15
22	9	8	7	6	6	5	4	4	**52**	23	21	20	19	18	17	16	15
23	9	8	8	7	6	5	5	4	**53**	23	22	21	19	18	17	16	15
24	10	9	8	7	6	6	5	5	**54**	24	22	21	19	19	18	17	16
25	10	9	8	7	7	6	5	5	**55**	24	23	21	20	19	18	17	16
26	11	10	9	8	7	7	6	5	**56**	25	23	22	20	19	18	17	17
27	11	10	9	8	8	7	6	6	**57**	25	24	22	21	20	19	18	17
28	12	11	10	9	8	7	7	6	**58**	26	24	23	21	20	19	18	17
29	12	11	10	9	8	8	7	6	**59**	26	25	23	22	21	20	19	18
30	13	11	11	9	9	8	7	7	**60**	27	25	24	22	21	20	19	18
31	13	12	11	10	9	8	8	7	**61**	27	25	24	23	21	21	19	19
32	14	12	11	10	9	9	8	7	**62**	28	26	25	23	22	21	20	19
33	14	13	12	11	10	9	8	8	**63**	28	26	25	23	22	21	20	19
34	15	13	12	11	10	10	9	8	**64**	29	27	25	24	23	22	21	20
35	15	14	13	11	11	10	9	9	**65**	29	27	26	24	23	22	21	20

закінчення таблиці Д1.9

n	Значення k для рівня довіри, %								***n***	Значення k для рівня довіри, %							
	80	**90**	**95**	**98**	**99**	**99,5**	**99,8**	**99,9**		**80**	**90**	**95**	**98**	**99**	**99,5**	**99,8**	**99,9**
66	30	28	26	25	24	23	21	21	**86**	39	37	35	33	32	31	30	29
67	30	28	27	25	24	23	22	21	**87**	40	38	36	34	33	32	30	29
68	31	29	27	26	24	23	22	21	**88**	40	38	36	34	33	32	31	30
69	31	29	28	26	25	24	23	22	**89**	41	38	37	35	34	32	31	30
70	31	30	28	26	25	24	23	22	**90**	41	39	37	35	34	33	31	30
71	32	30	29	27	26	25	23	23	**91**	41	39	38	36	34	33	32	31
72	32	31	29	27	26	25	24	23	**92**	42	40	38	36	35	34	32	31
73	33	31	29	28	27	26	24	23	**93**	42	40	39	37	35	34	33	32
74	33	31	30	28	27	26	25	24	**94**	43	41	39	37	36	35	33	32
75	34	32	30	29	27	26	25	24	**95**	43	41	39	38	36	35	34	33
76	34	32	31	29	28	27	26	25	**96**	44	42	40	38	37	35	34	33
77	35	33	31	30	28	27	26	25	**97**	44	42	40	38	37	36	34	33
78	35	33	32	30	29	28	26	25	**98**	45	43	41	39	38	36	35	34
79	36	34	32	30	29	28	27	26	**99**	45	43	41	39	38	37	35	34
80	36	34	33	31	30	29	27	26	**100**	46	44	42	40	38	37	36	35
81	37	35	33	31	30	29	28	27									
82	37	35	34	32	31	29	28	27									
83	38	36	34	32	31	30	28	28									
84	38	36	34	33	31	30	29	28									
85	39	37	35	33	32	31	29	28									

* Довірчі границі не можуть бути визначені для даного рівня довіри та даного обсягу вибірки.

Таблиця Д.1.10

Значення k для визначення границь двостороннього довірчого інтервалу для обсягу вибірки від 5 до 100 елементів

n	Значення k для рівня довіри, %								***n***	Значення k для рівня довіри, %							
	80	**90**	**95**	**98**	**99**	**99,5**	**99,8**	**99,9**		**80**	**90**	**95**	**98**	**99**	**99,5**	**99,8**	**99,9**
5	1	1	*	*	*	*	*	*									
6	2	1	1	1	*	*	*	*	**36**	14	13	12	11	10	10	9	8
7	2	2	1	1	1	*	*	*	**37**	15	14	13	11	11	10	9	9
8	3	2	2	1	1	1	*	*	**38**	15	14	13	12	11	10	10	9
9	3	3	2	2	1	1	1	*	**39**	16	14	13	12	12	11	10	9
10	4	3	2	2	1	1	1	1	**40**	16	15	14	13	12	11	10	10
11	3	3	2	2	1	1	1	1	**41**	16	15	14	13	12	12	11	10
12	4	3	2	2	2	1	1	1	**42**	17	16	15	14	13	12	11	11
13	4	4	2	3	2	2	1	1	**43**	17	16	15	14	13	12	12	11
14	5	4	3	3	2	2	2	1	**44**	18	17	16	14	14	13	12	11
15	5	4	3	4	3	2	2	2	**45**	18	17	16	15	14	13	12	12
16	5	5	4	3	3	3	2	2	**46**	19	17	16	15	14	14	13	12
17	6	5	5	4	3	3	2	2	**47**	19	18	17	16	15	14	13	12
18	6	6	5	4	4	3	3	2	**48**	20	18	17	16	15	14	13	13
19	7	6	5	5	4	4	3	3	**49**	20	19	18	16	16	15	14	13
20	7	6	6	5	4	4	3	3	**50**	20	19	18	17	16	15	14	14
21	8	7	6	5	5	4	4	3	**51**	21	20	19	17	16	16	15	14
22	8	7	6	6	5	5	4	4	**52**	21	20	19	18	17	16	15	14
23	8	8	7	6	5	5	4	4	**53**	22	21	19	18	17	16	15	15
24	9	8	7	6	6	5	5	4	**54**	22	21	20	19	18	17	16	15
25	9	8	8	7	6	6	5	5	**55**	23	21	20	19	18	17	16	15
26	10	9	8	7	7	6	5	5	**56**	23	22	21	19	18	18	17	16
27	10	9	8	8	7	6	6	5	**57**	24	22	21	20	19	18	17	16
28	11	10	9	8	7	7	6	6	**58**	24	23	22	20	19	18	17	17
29	11	10	9	8	8	7	6	6	**59**	25	23	22	21	20	19	18	17
30	11	11	10	9	8	7	7	6	**60**	25	24	22	21	20	19	18	17
31	12	11	10	9	8	8	7	7	**61**	25	24	23	21	21	20	19	18
32	12	11	10	9	9	8	7	7	**62**	26	25	23	22	21	20	19	18
33	13	12	11	10	9	9	8	7	**63**	26	25	24	22	21	20	19	19
34	13	12	11	10	10	9	8	8	**64**	27	25	24	23	22	21	20	19
35	14	13	12	11	10	9	9	8	**65**	27	26	25	23	22	21	20	19

закінчення табл. Д1.10

n	Значення k для рівня довіри, %								**n**	Значення k для рівня довіри, %							
	80	**90**	**95**	**98**	**99**	**99,5**	**99,8**	**99,9**		**80**	**90**	**95**	**98**	**99**	**99,5**	**99,8**	**99,9**
66	28	26	25	24	23	22	21	20	**86**	37	35	34	32	31	30	29	28
67	28	27	26	24	23	22	21	20	**87**	38	36	34	33	32	30	29	28
68	29	27	26	24	23	23	21	21	**88**	38	36	35	33	32	31	30	29
69	29	28	26	25	24	23	22	21	**89**	38	37	35	34	32	31	30	29
70	30	28	27	25	24	23	22	21	**90**	39	37	36	34	33	32	30	30
71	30	29	27	26	25	24	23	22	**91**	39	38	36	34	33	32	31	30
72	31	29	28	26	25	24	23	22	**92**	40	38	37	35	34	33	31	30
73	31	29	28	27	26	25	23	23	**93**	40	39	37	35	34	33	32	31
74	31	30	29	27	26	25	24	23	**94**	41	39	38	36	35	33	32	31
75	32	30	29	27	26	25	24	23	**95**	41	39	38	36	35	34	33	32
76	32	31	29	28	27	26	25	24	**96**	42	40	38	37	35	34	33	32
77	33	31	30	28	27	26	25	24	**97**	42	40	39	37	36	35	33	32
78	33	32	30	29	28	27	25	25	**98**	43	41	39	38	36	35	34	33
79	34	32	31	29	28	27	26	25	**99**	43	41	40	38	37	36	34	33
80	34	33	31	30	29	28	26	25	**100**	44	42	40	38	37	36	35	34
81	35	33	32	30	29	28	27	26									
82	35	34	32	31	29	28	27	26									
83	36	34	33	31	30	29	28	27									
84	36	34	33	31	30	29	28	27									
85	37	35	33	32	31	30	28	27									

* Довірчі границі не можуть бути визначені для даного рівня довіри та даного обсягу вибірки.

Додаток 2

Варіанти для контрольних завдань

Таблиця Д2.1

Варіанти завдань для розділів 1, 2 та 5

№ вар	x_i								
1	4,6	4,3	4,5	4,0	4,3	5,0	4,9	5,6	7,2
2	7,2	7,0	7,1	6,8	4,7	6,1	5,1	6,8	5,8
3	6,0	6,3	7,8	6,7	7,1	8,8	6,0	7,0	8,6
4	3,4	4,5	8,3	7,0	6,1	8,3	9,2	8,5	8,0
5	8,3	7,8	8,8	10,8	9,0	9,9	10,3	9,0	9,5
6	10,9	9,0	8,6	16,1	9,4	7,6	11,5	9,2	7,6
7	11,0	13,1	11,6	12,1	11,5	9,5	7,4	14,1	13,1
8	12,3	14,1	11,2	9,1	8,6	10,6	10,8	12,1	10,6
9	14,4	13,6	14,1	10,0	10,1	11,9	10,1	9,6	5,6
10	16,2	14,4	11,2	11,4	11,5	14,8	12,9	15,6	11,2
11	16,3	20,3	13,1	16,7	19,6	13,1	18,9	11,9	16,4
12	12,0	17,4	9,9	15,6	17,3	20,7	12,1	14,8	17,5
13	17,7	18,8	19,8	20,2	20,1	17,9	14,6	18,6	16,5
14	25,6	13,6	16,5	19,4	12,9	16,5	21,1	16,0	14,7
15	23,2	19,1	14,2	21,4	16,2	21,1	21,5	21,1	19,6
16	21,3	21,0	19,3	23,2	21,2	20,6	16,3	23,2	22,9
17	24,4	23,6	20,0	20,6	23,9	24,4	22,5	20,1	20,3
18	25,8	30,6	22,3	24,5	24,7	30,3	28,5	24,7	24,9
19	20,8	23,4	29,8	24,6	23,4	31,7	27,5	27,0	33,0
20	29,6	19,3	26,4	26,2	31,1	29,6	30,3	26,4	19,3
21	21,9	22,2	23,6	22,7	26,3	23,1	23,6	31,4	26,0
22	17,9	26,4	28,2	34,5	29,2	17,9	18,9	38,5	29,8
23	22,4	21,5	28,2	21,3	33,0	32,1	31,1	21,3	24,8
24	28,1	26,1	25,4	30,2	30,8	27,6	28,1	30,4	23,7
25	30,5	31,2	38,7	23,7	33,6	28,3	28,7	33,2	30,7
26	28,4	24,2	22,0	27,6	23,9	26,4	35,7	34,8	22,0
27	35,2	34,2	29,5	22,5	26,1	27,2	29,5	26,1	38,0
28	28,1	24,7	28,6	30,0	31,1	25,8	30,2	29,7	24,7
29	40,2	22,9	34,8	35,7	25,9	25,1	27,0	38,4	40,2
30	31,9	36,1	35,2	33,8	30,8	32,3	28,2	36,1	28,2

Таблиця Д.2.2

Варіанти завдань для розділів 2 – 4

№ вар	x_i															
1	2,8	1,5	3,8	3,0	2,8	4,3	0,3	3,6	0,7	0,1	2,2	1,5	0,5	2,4	3,2	2,8
2	1,7	3,0	2,8	1,0	3,3	3,5	2,7	0,9	4,3	3,2	2,4	2,7	1,4	2,7	3,3	3,6
3	2,6	2,5	0,8	2,8	2,4	2,1	2,3	3,4	1,7	1,7	2,2	1,3	3,4	2,3	1,6	1,4
4	1,0	2,9	1,8	2,8	2,5	0,9	3,5	1,3	1,4	3,5	3,9	5,0	1,4	3,1	2,4	0,2
5	2,8	1,1	2,3	3,0	2,2	2,0	0,5	1,1	3,5	2,2	1,3	1,2	2,8	2,3	2,3	2,1
6	2,8	3,2	2,4	2,7	2,6	0,1	3,5	0,8	3,0	2,7	0,0	1,5	1,6	3,9	2,9	4,2
7	2,7	2,2	0,4	3,1	2,9	2,4	2,5	4,3	3,9	2,8	1,1	1,4	2,2	2,9	2,6	2,6
8	3,2	0,8	1,4	1,4	1,7	2,2	2,3	2,4	0,8	1,7	2,4	3,1	2,7	3,0	2,3	1,3
9	1,0	2,9	5,1	4,2	2,2	3,1	0,5	4,3	4,6	2,8	2,6	3,9	3,5	1,8	4,7	0,6
10	2,1	1,9	2,2	2,8	2,4	3,1	3,7	0,5	3,4	2,7	2,6	3,1	1,7	2,0	3,8	4,2
11	3,2	1,2	3,6	3,8	2,6	0,7	2,2	3,5	2,1	4,1	2,8	2,3	2,7	2,1	3,2	5,0
12	2,5	3,1	2,9	1,6	0,0	3,9	2,5	1,5	2,5	2,7	1,6	3,1	1,0	4,6	2,7	2,9
13	2,7	2,2	0,5	2,7	2,6	5,3	4,9	4,6	2,5	2,8	3,6	5,1	4,3	4,0	4,0	2,1
14	2,6	3,8	4,1	2,0	2,8	1,5	5,0	2,1	2,9	2,9	2,0	2,5	3,4	3,6	3,1	0,8
15	4,0	5,1	1,2	4,0	3,7	3,8	5,5	2,8	4,2	2,0	5,7	5,7	2,8	5,4	2,3	4,1
16	2,8	4,7	4,3	3,3	3,7	2,5	0,0	1,8	1,8	2,9	4,4	5,5	4,5	3,3	3,4	4,6
17	4,1	1,9	2,7	3,6	2,8	4,1	2,1	2,7	3,6	2,6	0,7	5,8	4,9	5,0	4,5	4,9
18	3,8	1,6	4,0	4,2	2,1	3,2	3,6	5,6	0,5	2,9	2,3	2,8	4,1	3,0	3,3	6,1
19	3,9	4,4	2,7	5,3	5,8	3,4	1,2	5,3	3,7	6,6	6,7	1,9	4,0	3,6	4,5	6,2
20	5,3	5,5	3,4	3,7	3,2	2,5	3,8	4,9	4,3	4,1	5,3	2,2	3,2	4,0	0,2	2,2
21	4,7	7,2	5,1	6,3	3,3	5,5	5,2	4,2	4,5	4,5	0,9	2,2	6,3	2,3	2,2	2,7
22	5,7	3,5	5,2	1,6	3,9	3,1	3,5	5,7	4,2	6,6	3,3	5,9	6,0	4,5	4,5	3,1
23	5,5	3,9	2,3	5,7	4,1	5,3	3,5	4,9	5,8	6,0	3,2	7,7	5,4	4,9	8,2	4,9
24	0,1	2,7	3,4	5,5	2,8	4,0	5,6	5,6	3,9	5,3	4,2	3,9	3,8	4,4	2,9	5,0
25	3,9	2,8	3,3	5,5	2,3	3,9	7,9	4,4	3,2	6,0	2,1	1,3	8,6	2,8	4,9	2,9
26	3,2	2,2	4,3	5,1	5,2	4,4	4,4	6,2	6,1	1,6	5,2	4,4	6,1	7,4	5,8	7,6
27	5,1	4,7	6,1	8,2	5,0	6,3	3,1	3,2	5,0	5,0	4,2	7,8	4,0	1,8	2,2	7,6
28	6,1	3,8	4,1	2,1	5,9	3,3	3,5	5,2	4,6	2,6	3,9	2,5	1,7	6,0	4,7	5,6
29	2,3	6,6	7,5	4,7	2,5	3,3	4,7	4,3	2,9	4,3	8,9	4,3	6,9	3,6	4,3	7,4
30	1,5	5,9	3,1	6,2	4,7	9,0	3,9	3,4	5,6	1,8	9,4	5,1	5,0	5,1	3,1	1,6

Таблиця Д.2.3

Варіанти завдань для регресійного аналізу (розділ 6)

№ вар.	y_i									
1	1,00	1,02	1,04	1,06	1,08	1,10	1,12	1,14	1,16	1,18
2	1,25	1,24	1,17	1,10	1,12	1,10	1,06	0,98	0,94	0,86
3	1,59	1,58	1,57	1,62	1,69	1,88	1,83	1,83	1,91	2,02
4	1,81	1,74	1,46	1,49	1,57	1,49	1,20	1,20	1,02	0,93
5	2,19	2,26	2,24	2,23	2,21	2,48	2,52	2,57	2,79	2,92
6	2,22	2,09	2,02	1,79	1,58	1,53	1,37	1,42	1,43	1,25
7	2,55	2,46	2,72	2,74	3,28	3,40	3,12	3,55	3,78	3,54
8	2,91	2,90	2,56	2,30	2,06	1,74	1,84	1,46	1,54	1,56
9	2,79	3,50	2,98	3,76	3,71	4,23	4,16	4,53	4,61	4,56
10	3,65	2,83	2,56	2,95	2,40	2,15	2,50	1,43	2,06	1,24
11	3,58	3,42	3,63	4,42	4,73	4,33	5,00	4,80	4,78	5,80
12	3,57	3,10	3,80	2,64	3,04	2,70	2,15	1,75	2,28	1,75
13	3,59	4,53	4,95	5,19	4,55	5,60	5,71	5,96	5,97	6,72
14	3,64	4,04	3,70	3,80	2,51	2,98	2,00	2,05	2,16	2,07
15	4,91	5,24	5,17	5,45	6,29	5,68	6,24	7,14	6,42	7,19
16	5,10	5,00	3,95	3,11	2,74	3,81	3,52	3,06	1,84	2,20
17	5,11	5,19	5,68	6,21	6,89	6,64	6,48	8,03	7,56	8,30
18	6,10	4,82	5,05	4,02	4,35	2,88	3,59	3,17	2,50	2,73
19	5,39	5,98	5,85	6,19	7,46	7,38	7,65	8,27	9,36	9,12
20	5,13	4,45	4,87	4,61	5,08	3,00	3,02	2,49	1,63	2,42
21	5,96	6,62	5,97	7,52	7,58	7,67	7,93	9,16	10,00	9,96
22	7,22	6,11	4,80	5,37	3,87	5,02	2,70	3,52	2,92	1,71
23	7,01	7,85	7,80	7,59	8,43	8,67	9,52	8,96	9,72	11,12
24	6,90	5,71	5,53	4,24	5,01	3,30	4,20	3,63	2,37	3,43
25	7,50	6,91	9,18	8,34	7,94	10,08	10,54	11,03	11,50	11,96
26	7,28	7,85	6,08	4,86	5,34	3,59	4,86	4,51	1,89	2,35
27	7,49	9,07	7,88	9,67	10,22	9,69	11,47	12,48	12,59	11,18
28	6,60	7,81	7,13	6,72	5,63	4,10	5,64	5,06	3,33	3,34
29	8,01	7,67	9,68	9,05	11,05	10,43	10,58	13,40	13,15	11,91
30	7,73	6,24	6,27	6,01	7,17	5,13	4,84	3,39	3,25	1,85

Таблиця Д.2.4

Варіанти завдань для дисперсійного аналізу (розділ 7)

В.1	Фактор				
А1			А1		
Б1	Б2	Б3	Б1	Б2	Б3
9,81	10,93	12,55	10,41	14,91	15,83
9,30	10,32	13,46	11,98	15,09	14,20
10,55	9,62	12,28	12,23	15,67	16,24
11,26	11,60	12,43	12,20	16,23	14,18
10,22	11,11	14,30	12,12	15,35	15,02

В.2	Фактор				
А1			А1		
Б1	Б2	Б3	Б1	Б2	Б3
9,55	12,90	14,45	12,92	14,85	18,30
9,96	12,56	11,70	11,76	14,25	17,68
10,47	10,63	13,54	10,65	14,47	17,30
8,83	11,01	11,37	13,12	16,10	16,36
10,26	11,01	11,63	12,38	16,13	15,36

В.3	Фактор				
А1			А1		
Б1	Б2	Б3	Б1	Б2	Б3
14,95	15,41	16,94	15,81	17,45	17,90
14,96	15,28	16,60	16,26	17,48	17,95
14,65	15,48	16,50	15,89	17,28	17,49
15,39	16,07	16,61	16,06	17,25	17,97
14,91	15,53	16,33	16,05	16,89	17,90

В.4	Фактор				
А1			А1		
Б1	Б2	Б3	Б1	Б2	Б3
15,16	15,83	16,93	16,23	17,30	17,48
14,73	15,31	16,71	16,57	17,61	18,16
15,33	15,49	16,05	15,94	17,79	17,95
14,96	15,20	16,70	15,76	17,63	17,83
14,83	15,62	16,12	15,92	17,73	17,45

В.5	Фактор				
А1			А1		
Б1	Б2	Б3	Б1	Б2	Б3
20,19	20,88	21,79	21,58	22,67	22,31
19,58	20,26	20,51	20,63	21,85	22,75
19,91	21,91	21,34	20,39	22,45	23,00
20,09	19,94	20,95	20,98	22,65	22,97
20,88	20,77	22,28	20,54	22,01	22,96

В.6	Фактор				
А1			А1		
Б1	Б2	Б3	Б1	Б2	Б3
19,64	20,67	21,78	21,32	22,49	23,27
19,54	20,47	21,62	20,11	22,43	23,18
20,28	19,86	21,17	21,15	23,33	24,05
19,36	20,14	20,78	20,86	22,27	22,92
19,87	20,71	21,65	20,65	22,31	22,60

В.7	Фактор				
А1			А1		
Б1	Б2	Б3	Б1	Б2	Б3
7,15	10,26	10,87	16,63	17,29	19,90
10,42	11,42	16,51	11,50	19,47	17,58
12,03	13,24	12,29	12,89	21,31	21,21
10,16	13,01	14,51	13,93	19,03	21,42
9,40	16,64	14,74	16,12	16,63	20,38

В.8	Фактор				
А1			А1		
Б1	Б2	Б3	Б1	Б2	Б3
8,13	13,60	14,39	13,81	19,81	17,30
12,12	8,35	12,30	13,99	17,68	20,35
9,55	11,35	14,19	9,79	18,50	20,59
15,00	12,60	16,97	13,12	14,41	16,97
10,18	9,59	14,63	14,85	17,93	21,94

В.9	Фактор				
А1			А1		
Б1	Б2	Б3	Б1	Б2	Б3
10,22	17,77	23,46	20,57	21,28	28,02
16,64	14,45	19,45	18,57	24,67	24,95
14,91	16,15	25,24	19,27	24,67	30,73
15,42	16,79	19,51	14,59	21,05	28,70
14,77	15,46	20,42	17,49	23,25	23,34

В.10	Фактор				
А1			А1		
Б1	Б2	Б3	Б1	Б2	Б3
16,50	13,85	24,20	15,62	21,54	25,85
15,10	20,04	20,19	17,68	22,44	23,93
17,21	12,73	20,46	14,93	25,60	28,16
14,32	15,14	19,47	20,88	23,35	25,07
15,22	18,97	19,10	15,00	22,23	29,21

продовження табл. Д.2.4

В.11	Фактор				
А1			А1		
Б1	Б2	Б3	Б1	Б2	Б3
23,44	25,39	29,37	30,61	34,25	34,34
24,13	27,74	31,47	27,36	31,11	33,33
27,71	29,79	34,16	26,06	35,88	36,53
24,37	28,38	29,76	29,12	34,92	35,77
26,67	29,40	31,25	26,47	31,92	34,09

В.12	Фактор				
А1			А1		
Б1	Б2	Б3	Б1	Б2	Б3
24,90	27,74	33,38	25,70	36,78	31,37
26,26	27,62	32,31	27,86	38,32	34,26
28,35	30,00	33,61	27,88	31,21	35,35
23,07	28,26	29,53	26,75	30,28	36,79
25,21	28,89	30,96	26,32	32,26	38,49

В.13	Фактор				
А1			А1		
Б1	Б2	Б3	Б1	Б2	Б3
30,49	32,33	37,06	31,38	35,59	37,48
31,63	32,09	36,66	31,96	37,20	38,67
30,35	32,07	36,48	32,34	36,49	36,99
30,83	31,01	35,76	30,98	35,01	36,42
30,62	33,82	35,98	33,35	34,17	37,26

В.14	Фактор				
А1			А1		
Б1	Б2	Б3	Б1	Б2	Б3
29,99	31,89	36,86	32,47	37,17	38,92
30,05	32,36	35,75	31,23	35,26	37,49
30,37	30,65	35,10	32,92	35,47	38,00
31,14	33,24	34,07	31,07	35,29	38,99
30,50	31,85	37,30	32,83	36,87	37,62

В.15	Фактор				
А1			А1		
Б1	Б2	Б3	Б1	Б2	Б3
36,45	35,52	39,05	36,42	39,41	41,17
36,60	36,41	38,61	36,75	39,92	39,91
35,31	34,35	35,52	38,55	41,03	42,48
34,04	36,23	38,62	38,82	38,76	41,72
33,61	36,37	37,06	35,41	40,86	41,75

В.16	Фактор				
А1			А1		
Б1	Б2	Б3	Б1	Б2	Б3
36,31	35,19	38,86	36,14	38,04	40,44
34,37	36,57	37,67	37,90	40,67	39,58
35,21	35,79	37,07	36,90	40,78	41,00
35,17	36,25	38,52	36,60	41,30	42,66
36,46	36,94	38,38	35,35	42,15	40,65

В.17	Фактор				
А1			А1		
Б1	Б2	Б3	Б1	Б2	Б3
40,50	41,69	42,80	42,30	43,66	44,34
40,70	41,66	43,87	38,67	42,78	45,23
39,41	43,30	43,17	41,28	43,39	43,92
40,89	39,05	43,56	41,10	42,87	45,40
40,67	41,94	42,03	39,99	43,01	44,01

В.18	Фактор				
А1			А1		
Б1	Б2	Б3	Б1	Б2	Б3
40,26	42,31	43,00	41,92	41,32	45,27
41,29	41,98	44,03	40,13	43,11	45,17
40,55	42,80	43,05	40,73	43,27	44,04
40,43	40,97	42,76	40,53	44,47	44,91
40,68	40,90	44,01	41,13	42,45	43,21

В.19	Фактор				
А1			А1		
Б1	Б2	Б3	Б1	Б2	Б3
46,28	46,63	47,15	45,63	48,74	49,35
46,42	44,64	47,97	45,00	48,51	47,39
45,50	45,12	47,97	47,32	49,36	48,81
44,48	47,44	48,23	46,70	49,15	48,40
44,47	47,03	47,31	44,10	48,63	49,51

В.20	Фактор				
А1			А1		
Б1	Б2	Б3	Б1	Б2	Б3
45,42	46,13	48,98	45,03	47,03	49,07
44,89	46,65	48,08	44,13	48,85	49,88
44,28	46,64	46,96	45,88	48,25	50,19
45,49	46,08	45,51	46,29	47,71	49,09
45,42	46,35	47,27	45,16	47,92	48,52

закінчення табл. Д.2.4

В.21	Фактор				
А1			А1		
Б1	Б2	Б3	Б1	Б2	Б3
50,14	51,99	53,05	51,02	51,26	55,39
48,95	51,07	53,99	51,00	51,43	54,26
50,62	50,49	51,84	48,86	52,84	54,11
49,84	51,56	53,94	51,43	53,88	55,88
49,32	52,57	53,25	50,67	51,76	53,65

В.22	Фактор				
А1			А1		
Б1	Б2	Б3	Б1	Б2	Б3
50,16	50,80	53,12	51,33	53,73	54,48
49,11	52,90	53,27	51,84	52,53	54,18
49,96	51,11	51,67	50,76	52,95	52,36
49,44	51,27	52,53	52,69	53,07	53,35
50,02	49,50	54,83	51,27	52,03	54,16

В.23	Фактор				
А1			А1		
Б1	Б2	Б3	Б1	Б2	Б3
50,16	49,51	55,51	52,53	56,34	56,86
49,11	53,17	54,83	51,13	57,04	56,56
49,96	52,57	58,84	51,77	55,01	57,23
49,44	49,87	57,19	52,80	56,71	58,08
50,02	52,02	56,14	52,33	55,20	57,30

В.24	Фактор				
А1			А1		
Б1	Б2	Б3	Б1	Б2	Б3
51,50	52,17	55,78	51,69	55,21	57,63
49,54	51,40	55,59	52,15	56,55	56,97
51,95	51,33	56,25	52,48	56,32	57,62
49,72	53,49	55,79	51,94	57,55	58,34
50,79	51,32	55,70	51,66	55,36	58,17

В.25	Фактор				
А1			А1		
Б1	Б2	Б3	Б1	Б2	Б3
54,29	57,77	60,13	57,61	59,35	60,83
53,53	56,43	60,14	53,75	61,19	62,36
54,17	56,80	62,22	56,15	62,00	63,81
55,86	57,67	61,62	57,39	61,62	63,81
55,43	54,77	61,46	58,46	59,67	61,99

В.26	Фактор				
А1			А1		
Б1	Б2	Б3	Б1	Б2	Б3
56,52	56,21	59,74	57,55	59,28	61,47
55,18	57,65	62,95	55,27	59,84	65,18
54,93	57,54	60,34	58,29	61,15	63,76
54,27	54,90	61,91	59,60	61,90	64,22
54,72	57,44	61,24	56,33	62,56	61,81

В.27	Фактор				
А1			А1		
Б1	Б2	Б3	Б1	Б2	Б3
18,68	23,46	27,69	21,20	26,78	25,75
21,76	21,53	25,88	20,20	24,97	30,06
22,77	22,87	27,03	22,24	24,95	29,49
19,76	21,25	24,50	22,90	27,53	26,55
20,12	19,78	25,34	19,86	27,60	26,95

В.28	Фактор				
А1			А1		
Б1	Б2	Б3	Б1	Б2	Б3
22,64	21,24	24,14	22,99	26,36	24,04
22,34	22,90	26,25	18,38	24,22	27,13
24,03	20,75	26,91	22,51	26,65	30,51
19,67	25,05	26,39	23,76	25,36	27,55
19,04	22,54	24,60	26,22	26,86	30,05

В.29	Фактор				
А1			А1		
Б1	Б2	Б3	Б1	Б2	Б3
26,97	30,52	33,73	30,72	35,62	38,28
29,61	28,86	33,06	28,98	29,79	33,65
24,56	30,44	35,25	33,20	35,06	33,26
24,99	29,34	31,88	31,59	31,69	37,18
28,27	28,76	32,66	28,73	32,88	40,16

В.30	Фактор				
А1			А1		
Б1	Б2	Б3	Б1	Б2	Б3
24,54	29,61	32,08	32,21	35,53	36,60
26,58	27,80	32,31	29,52	38,72	36,45
32,90	29,38	32,06	29,13	35,83	38,30
29,12	29,88	34,54	29,72	35,02	38,95
30,00	26,29	32,79	30,34	30,01	35,86

Таблиця Д.2.5

Варіанти завдань для аналізу кутових випадкових величин (розділ 8)

№ вар.	x_i, град.									
1	50,5	49,3	49,4	51,1	50,5	48,9	50,2	50,5	49,3	49,4
2	59,4	58,8	60,9	59,8	60,2	59,3	59,8	59,8	59,8	60,8
3	69,2	71,5	69,6	70,8	70,6	67,8	70,9	68,0	69,8	70,1
4	81,8	80,6	77,6	80,2	77,5	80,2	78,5	80,4	80,5	81,4
5	90,1	87,6	89,2	90,2	89,9	90,8	90,1	88,9	87,5	89,7
6	101,1	100,7	99,5	98,9	98,6	100,7	99,9	100,2	102,8	100,3
7	107,1	110,7	112,6	109,0	109,6	110,5	108,5	109,7	108,9	112,3
8	120,7	120,6	122,5	123,1	118,1	120,3	118,3	118,8	118,9	122,0
9	130,9	128,2	128,2	129,8	129,6	127,6	126,0	129,6	132,2	129,3
10	137,9	139,2	139,1	140,5	142,9	137,1	142,8	138,4	139,8	141,3
11	152,8	151,9	147,5	152,5	148,9	150,9	152,7	152,0	151,5	149,4
12	161,6	157,4	163,1	158,7	160,4	163,1	157,0	160,2	160,1	158,7
13	170,6	170,9	170,3	167,5	171,5	167,6	172,5	168,4	170,5	164,6
14	183,9	181,2	176,5	178,8	178,5	176,8	174,6	178,2	179,4	180,7
15	186,4	189,3	187,0	187,0	192,6	193,3	189,9	193,6	190,9	186,2
16	201,1	193,9	197,8	197,9	198,7	200,3	204,3	195,0	197,7	194,5
17	210,6	209,5	207,2	208,9	213,6	211,2	209,7	211,3	212,2	207,3
18	218,4	217,8	220,1	218,3	219,1	222,0	220,1	224,2	215,4	223,3
19	230,5	233,6	231,1	225,5	233,3	232,1	228,1	230,2	231,9	229,7
20	238,2	239,0	238,1	237,1	240,8	235,7	240,5	244,1	240,3	235,5
21	257,0	252,4	247,7	250,7	250,1	252,6	252,8	248,8	251,3	245,4
22	256,2	252,8	256,9	255,2	260,9	266,2	261,5	257,8	263,2	258,6
23	273,6	269,7	271,1	271,0	266,5	270,6	269,1	267,5	266,9	272,9
24	284,0	281,7	282,9	278,3	276,7	282,7	283,5	279,8	281,0	279,2
25	293,6	295,2	286,1	292,8	283,6	292,4	292,8	292,7	289,6	289,8
26	302,5	303,3	291,2	298,9	306,6	295,5	297,3	301,3	295,4	295,8
27	304,5	304,1	310,9	306,0	308,1	310,8	306,7	312,1	305,9	308,3
28	319,4	315,3	320,8	317,9	320,7	321,9	323,2	320,8	324,3	319,2
29	332,2	329,8	335,0	329,1	332,2	330,5	331,2	327,1	321,4	326,0
30	331,3	340,6	335,7	331,7	334,5	336,1	344,3	341,6	336,3	345,9

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Статистика. Словник термінів і познаки. Частина 1. Загальні статистичні терміни та терміни теорії ймовірностей (ISO 3534-1:2006, IDT): ДСТУ ISO 3534-1:2008. – [чин. від 2010-01-01]. – К.: Держспоживстандарт України, 2010. – 42 с.

2. Статистика. Словник термінів і позначень. Частина 2. Прикладна статистика (ISO 3534-2: 2006, IDT): ДСТУ ISO 3534-2:2008. – [чин. від 2010-01-01]. — К.: Держспоживстандарт України, 2010. – 43 с.

3. Державна система забезпечення єдності вимірювань. Метрологія. Терміни та визначення: ДСТУ 2681–94. – [чин. від 1994-07-26].– К.: Держстандарт України, 1994. – 68 с.

4. Рекомендации по межгосударственной стандартизации. Метрология. Основные термины и определения: РМГ 29–99. – [введ. 2001-01-01]. – М.: ИПК Изд-во стандартов, 2000. – 46 с.

5. Точність (правильність і прецизійність) методів та результатів вимірювання. Частина 1 . Основні положення та визначення (ГОСТ ИСО 5725-1–2003, IDT): ДСТУ ГОСТ ИСО 5725-1:2005. – [чин. від 2007-07-01]. – К.: Держспоживстандарт України, 2007. – 23 с.

6. Точність (правильність і прецизійність) методів та результатів вимірювання. Частина 2. Основний метод визначення повторюваності і відтворюваності стандартного методу вимірювання (ГОСТ ИСО 5725-2-2003, IDT) : ДСТУ ГОСТ ИСО 5725-2:2005. – [чин. від 2006-07-01]. – К.: Держспоживстандарт України, 2006. – 59 с.

7. Основні одиниці фізичних величин міжнародної системи одиниць. Основні положення, назви та позначення: ДСТУ 3651.0-9 .– [чин. від 2010-01-01]. – К.: Держстандарт України, 1998. –9 с.

8. Рекомендация. Градуировочные характеристики средств измерений. Методы построения, оценивание погрешностей: МИ 2175-91. – Спб, ВНИИМ им. Д.И.Менделеева, 1994. – 55 с.

9. Рекомендации по метрологии. Определение характеристик математических моделей зависимостей между физическими величинами при решении измерительных задач. Основные положения: Р 50.2.004–2000 . – [введ. 2000-08-01].– М.: ИПК Изд-во стандартов, 2000.-11с.

10. Статистичне опрацювання даних. Частина 7. Медіана. Оцінювання і довірчі інтервали: ДСТУ ISO 16269-7:2006.– [чин. від 2000-09-25].– К.: Держспоживстандарт України, 2008. – 19 с.

11. Прямые измерения с многократными наблюдениями. Методы обработки результатов наблюдений. Основные положения: ГОСТ 8.207–76. ГСИ. – [введ. 1977-01-01.]. – М.: Изд-во стандартов, 1978. – 11 с.

12. Рекомендации по стандартизации. Прикладная статистика. Правила проверки согласия опытного распределения с теоретическим. Часть I. Критерии типа хи-квадрат: Р 50.1.033-2001. – [введ. 2002-07-01]. – М.: ИПК Издательство стандартов, 2002 – 91 с.

13. Рекомендации по стандартизации. Прикладная статистика. Правила проверки согласия опытного распределения с теоретическим. Часть II. Непараметрические критерии: Р 50.1.037-2002. – [введ. 2002-07-01]. – М.: ИПК Издательство стандартов, 2002 – 139 с.

14. Методика установления вида математической модели распределения погрешностей: МИ 199-79 . – М.: Издательство стандартов, 1981. – 37 с.

15. Статистические методы. Правила определения и методы расчета статистических характеристик по выборочным данным (ISO 2854:76): ГОСТ Р 50779.21-2004. – [введ. 2004-06-01]. – М.: ИПК Издательство стандартов, 2004. – 47 с.

16. Статистические методы. Проверка отклонения распределения вероятностей от нормального распределения (ISO 5479-97, IDT): ГОСТ Р ISO 5479-2002. – [введ. 2002-07-01]. – М.: ИПК Издательство стандартов, 2002. – 47 с.

17. Бабак В.П. Статистична обробка даних: Монографія. / В.П.Бабак, А.Я.Білецький, П.О.Приставка, О.П. Приставка – К.: МІВВЦ, 2001. – 388 с.

18. Бабак В.П. Теорія ймовірностей, випадкові процеси та математична статистика / В.П. Бабак, Б.Г. Марченко, М.Є. Фриз. – К.: Техніка, 2004. – 288 с.

19. Большев Л.Н. Таблицы математической статистики / Л.Н. Большев, Н.В.Смирнов – М.: Наука, 1983. – 416 с.

20. Володарський Є.Т. Статистична обробка даних: навч. посібник / Є.Т. Володарський, Л.О. Кошева. –К.: Книжкове видавництво НАУ, 2008. – 308 с.

21. Гаскаров Д.В. Малая выборка / Д.В. Гакаров, В.И. Шаповалов. – М.: Статистика, 1978. – 248 с.

22. Грановский В.А. Методы обработки экспериментальных данных при измерениях / В.А. Грановский, Т.Н. Сирая. – Л.: Энергоатомиздат, 1990. – 288 с.

23. Дорожовець М. Опрацювання результатів вимірювань: навч. посібник / М. Дорожовець. – Львів: Видавництво Національного університету “Львівська політехніка”, 2007. – 624 с.

24. Захаров И.П. Теория неопределенности в измерениях: учеб. пособие / И.П. Захаров, В.Д. Кукуш. – Харьков: Консум, 2002. – 256 с.

25. Кендалл М. Теория распределений / М. Кендалл, А. Стюарт. – М.: Наука, 1966. – 587 с.

26. Кобзарь А. И. Прикладная математическая статистика. Для инженеров и научных работников. / А.И. Кобзар. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. – 816 с.

27. Куц Ю.В. Статистична фазометрія: Монографія / Ю.В. Куц, Л.М. Щербак – Тернопіль: Вид-во Тернопільського державного університету ім. І. Пулюя, 2009. – 383 с.

28. Мардиа К. Статистический анализ угловых наблюдений. К.Мардиа – М.: Глав. ред. физ.-мат. лит. изд-ва “Наука”, 1978. –240 с.

29. Новицкий П.В. Оценка погрешностей результатов измерений / П.В. Новицкий, И. А. Зограф. – Л.: Энергоатомиздат. Ленингр. Отд-ние, 1985. – 248 с.

30. Опря А.Т. Статистика (з програмованою формою контролю знань). Математична статистика. Теорія статистики: навч. посібник / А.Т. Опря. – К.: Центр навчальної літератури, 2005. – 472 с.

31. Фрумкин В.Д. Теория вероятностей и статистика в метрологии и измерительной технике / В.Д. Фрумкин, Н.А. Рубичев. – М.: Машиностроение, 1987. – 168 с.

32. Хан Г. Статистические модели в инжинерных задачах / Г.Хан, С.Шапиро. – М.: Мир, 1969. – 395 с.

33. Хьюбер П. Робастные методы в статистике / П. Хьюбер. – М.: Мир, 1985. – 202 с.

34. Ціделко В.Д. Невизначеність вимірювання. Обробка даних та подання результату вимірювання: Монографія / В.Д. Ціделко, Н.А. Яремчук. – К.: ІВЦ “Видавництво «Політехніка»”, 2002. –176 с.

35. Шеффе Г. Дисперсионный анализ / Г. Шеффе. – [2-е изд.]. – М.: Наука, 1980. – 512 с.