

МІШАНА КОНТАКТНА ЗАДАЧА ДЛЯ ПЛАСТИНКИ З КРИВОЛІНІЙНИМ ОТВОРОМ І СИСТЕМИ ШТАМПІВ З КУТОВИМИ ТОЧКАМИ

Построено систему интегрально-дифференциальных уравнений в задаче о давлении системы штампов, имеющих угловые точки, на частично подкрепленный криволинейный контур бесконечной изотропной пластинки. Исследуется напряженное состояние пластинки в зонах контакта и подкрепления.

The system of singular integral differential equations in problems of pressure of a system of punches with angular points on a partly stronger curvilinear hole in an infinite isotropic plate is built. It is exploring strained state of a plate in the interfaces and strengthening.

При розрахунках сучасних гальмівних систем для залізничного транспорту, пристроїв для закріплення фізичних приладів у свердловинах виникають задачі про силову контактну взаємодію жорстких штампів з кутковими точками і контуру криволінійного отвору нескінченної пластинки. Так, в роботах [1-3] розглянуто задачі про тиск штампа або системи штампів з кутковими точками на контур криволінійного отвору нескінченної ізотропної пластинки, де встановлено, що за межами зон контакту виникають значні кільцеві напруження, які в окремих випадках можуть перевищувати контактні напруження під штампамі.

Для зменшення концентрації напружень на контурі отвору окремі його ділянки підсилюють розімкненими тонкими пружними ребрами змінної жорсткості на розтяг (стиск). Розв'язки задач про часткове підсилення криволінійного контуру отвору в нескінченних пластинках наведено в [4].

Пропонується розв'язок мішаної контактної задачі про тиск системи N однакових симетричних штампів з кутковими точками на частково підсилений (за межами зон контакту) контур криволінійного отвору нескінченної ізотропної пластинки. Задачі про тиск одного або двох штампів з кутковими точками на частково підсилений контур криволінійного отвору нескінченної ізотропної пластинки розглянуто в [5, 6].

Постановка і математична модель задачі. Нехай нескінченна ізотропна пластинка товщиною $2h$ послаблена криволінійним отвором, контур якого Γ має вигляд правильного N -кутника із закругленими кутами. Середня площина пластинки віднесена до прямокутної (x, y) та полярної (r, δ) систем координат з полюсом в центрі отвору і суміщена із комплексною площиною $z = x + iy$. В отвір пластинки без зазору і натягу

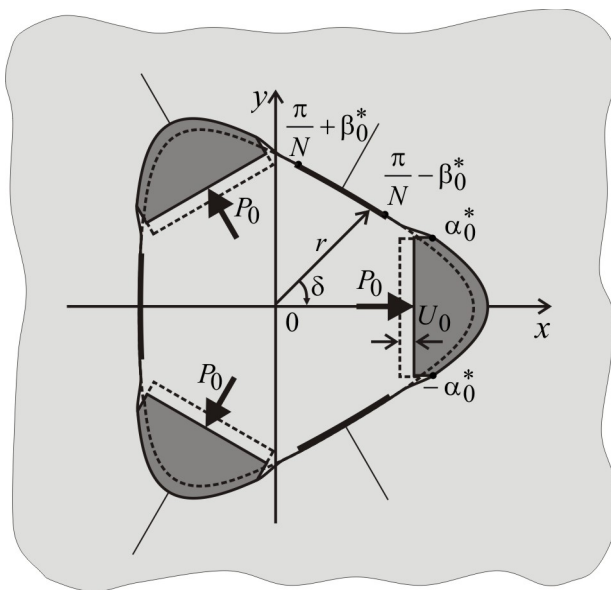


Рис. 1. Розрахункова схема пластинки

вставлено N однакових жорстких симетричних штампів з кутковими точками, які рівномірно розміщені

по контуру Γ на ділянках Γ_1 (рис.1.). Гладкий без тертя контакт між пластинкою і штампами здійснюється зрівноваженою системою сил P_0 , що діють вздовж осей симетрії штампів. Зовнішнє навантаження на пластинку відсутнє.

За межами зон контакту на ділянках Γ_2 контур Γ підсилено системою однакових тонких ребер, які моделюються пружними лініями змінної жорсткості на розтяг (стиск) $E_0 F(s)$, (E_0 – модуль Юнга матеріалу ребра, $F(s) = 2h_0 b_0(s)$, $2h_0$ – висота ребра, $b_0(s)$ – змінна його ширина); s – дуга на Γ .

Таким чином контур Γ поділено на три частини: зони контакту $\Gamma_1 \equiv [-\alpha_0^*; \alpha_0^*] \cup [2\pi/N - \alpha_0^*; 2\pi/N + \alpha_0^*] \cup \dots \cup [2(N-1)\pi/N - \alpha_0^*; 2(N-1)\pi/N + \alpha_0^*]$, зони підсилення $\Gamma_2 \equiv [\pi/N - \beta_0^*; \pi/N + \beta_0^*] \cup [3\pi/N - \beta_0^*; 3\pi/N + \beta_0^*] \cup \dots \cup [(2N-1)\pi/N - \beta_0^*; (2N-1)\pi/N + \beta_0^*]$ і вільні від напружень ділянки Γ_3 . Тут α_0^* , β_0^* – полярні кути, які визначають відповідно зони контакту штампів і підсилень. При цьому $(\alpha_0^* + \beta_0^*) \leq \pi/N$.

Розв'язок задачі полягає у визначенні контактних T_ρ , $S_{\rho\lambda}$ та кільцевих T_λ зусиль на контурі $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$.

Нехай функція [3, 4]

$$z = \omega(\xi) = R_0 \left(\xi + \frac{\varepsilon}{\xi^{N-1}} \right), \quad (1)$$

здійснює конформне відображення зовнішності S^- одиничного кола γ в площині $\xi = \rho e^{i\lambda}$ на область, яку займає середня площина пластинки в комплексній площині z . Тут R_0 – характерний розмір отвору (без обмеження загальності вважаємо, що $R_0 = 1$); ε – параметр, який визначає відхилення контуру заданого отвору від кола; $i = \sqrt{-1}$.

Граничні умови задачі з врахуванням її періодичності в зонах контакту і на ділянках підсилення, згідно з [1,4], запишемо у вигляді:

$$U + \frac{b(\lambda)}{a(\lambda)} V = U_0; \quad S_{\rho\lambda}(\lambda) = 0, \quad \lambda \in \gamma_1; \quad (2)$$

$$T_\rho(\lambda) = \frac{\Omega(\lambda)}{K^{3/2}(\lambda)} E_0 F(s) \varepsilon_\lambda; \quad S_{\rho\lambda}(\lambda) = -\frac{K(\lambda)}{\Omega(\lambda)} \cdot \frac{\partial T_\rho(\lambda)}{\partial \lambda} - \frac{T_\rho(\lambda)(K(\lambda)(1-2N) + 3\alpha(\lambda)N)\beta(\lambda)N}{\Omega^2(\lambda)}, \quad \lambda \in \gamma_2, \quad (3)$$

де U , V – проекції вектора зміщення контурних точок пластинки на координатні осі; $a(\lambda) = \cos \lambda - \varepsilon(N-1)\cos(N-1)\lambda$; $b(\lambda) = \sin \lambda + \varepsilon(N-1)\sin(N-1)\lambda$; U_0 – поступальне зміщення штампів в напрямку осі їх симетрії; T_ρ , $S_{\rho\lambda}$ – нормальні та дотичні зусилля, які діють в середній площині пластинки; ε_λ – відносне осьове видовження контуру Γ ; $\Omega(\lambda) = K(\lambda)(1-N) + \alpha(\lambda)N$; $K(\lambda) = |\omega'(\sigma)|^2 = \alpha^2(\lambda) + \beta^2(\lambda)$; $\alpha(\lambda) = 1 - \varepsilon(N-1)\cos N\lambda$; $\beta(\lambda) = \varepsilon(N-1)\sin N\lambda$;
 $\gamma_1 \equiv [-\alpha_0; \alpha_0] \cup [2\pi/N - \alpha_0; 2\pi/N + \alpha_0] \cup \dots \cup [2(N-1)\pi/N - \alpha_0; 2(N-1)\pi/N + \alpha_0]$,
 $\gamma_2 \equiv [\pi/N - \beta_0; \pi/N + \beta_0] \cup [3\pi/N - \beta_0; 3\pi/N + \beta_0] \cup \dots \cup [(2N-1)\pi/N - \beta_0; (2N-1)\pi/N + \beta_0]$ – образи ділянок Γ_1 , Γ_2 при відображенні (1).

Величини ε_λ , U , V на контурі Γ , визначаються за формулами [1,5], які можна перетворити до вигляду

$$\varepsilon_\lambda = \frac{1}{2EhK(\lambda)} \left[(1-\nu)K(\lambda)T_\rho(\lambda) - \frac{N}{\pi} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} R(\lambda, t) T_\rho^0(t) dt - \frac{N}{\pi} \int_{\beta_1}^{\beta_2} R(\lambda, t) \tilde{T}_\rho(t) dt + \frac{N}{\pi} \int_{\beta_1}^{\beta_2} Q(\lambda, t) \tilde{S}_{\rho\lambda}(t) dt + \right.$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{\pi} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} Q(\lambda, t) \operatorname{ctg} \frac{\lambda-t}{2} T_{\rho}^0(t) dt + \frac{1}{\pi} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} Q(\lambda, t) D(\lambda, t) T_{\rho}^0(t) dt + \frac{1}{\pi} \int_{\beta_1}^{\beta_2} Q(\lambda, t) \operatorname{ctg} \frac{\lambda-t}{2} \tilde{T}_{\rho}(t) dt + \\
 & + \frac{1}{\pi} \int_{\beta_1}^{\beta_2} Q(\lambda, t) D(\lambda, t) \tilde{T}_{\rho}(t) dt + \frac{1}{\pi} \int_{\beta_1}^{\beta_2} R(\lambda, t) \operatorname{ctg} \frac{\lambda-t}{2} \tilde{S}_{\rho\lambda}(t) dt + \frac{1}{\pi} \int_{\beta_1}^{\beta_2} R(\lambda, t) D(\lambda, t) \tilde{S}_{\rho\lambda}(t) dt \Big]; \\
 U = & \frac{1}{2Eh} \left[(1-\nu) \int_0^{\lambda} f_1'(t) dt + \frac{2}{\pi} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} f_2'(t) \ln \left| \sin \frac{\lambda-t}{2} \right| dt + \frac{2}{\pi} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} \sum_{k=1}^{N-1} D_1(t) \ln \left| \sin \left(\frac{\lambda-t}{2} - \frac{k\pi}{N} \right) \right| dt + \right. \\
 & \left. + \frac{2}{\pi} \int_{\beta_1}^{\beta_2} \tilde{f}_2'(t) \ln \left| \sin \frac{\lambda-t}{2} \right| dt + \frac{2}{\pi} \int_{\beta_1}^{\beta_2} \sum_{k=1}^{N-1} D_1(t) \ln \left| \sin \left(\frac{\lambda-t}{2} - \frac{k\pi}{N} \right) \right| dt \right]; \\
 V = & \frac{1}{2Eh} \left[(1-\nu) \int_0^{\lambda} f_2'(t) dt - \frac{2}{\pi} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} f_1'(t) \ln \left| \sin \frac{\lambda-t}{2} \right| dt - \frac{2}{\pi} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} \sum_{k=1}^{N-1} D_2(t) \ln \left| \sin \left(\frac{\lambda-t}{2} - \frac{k\pi}{N} \right) \right| dt - \right. \\
 & \left. - \frac{2}{\pi} \int_{\beta_1}^{\beta_2} \tilde{f}_1'(t) \ln \left| \sin \frac{\lambda-t}{2} \right| dt - \frac{2}{\pi} \int_{\beta_1}^{\beta_2} \sum_{k=1}^{N-1} D_2(t) \ln \left| \sin \left(\frac{\lambda-t}{2} - \frac{k\pi}{N} \right) \right| dt \right], \quad \lambda \in [-\pi, \pi]. \quad (4)
 \end{aligned}$$

Тут введено позначення

$$\beta_1 = \frac{\pi}{N} - \beta_0; \quad \beta_2 = \frac{\pi}{N} + \beta_0; \quad f_1 + if_2 = i \int_0^{\lambda} (T_{\rho}(t) + iS_{\rho\lambda}(t)) \omega'(\tau) e^{it} dt; \quad \tau = e^{it};$$

$$T_{\rho}(\lambda) = \begin{cases} T_{\rho}^0(\lambda), & \lambda \in \gamma_1; \\ \tilde{T}_{\rho}(\lambda), & \lambda \in \gamma_2; \\ 0, & \lambda \in \gamma_3; \end{cases} \quad S_{\rho\lambda}(\lambda) = \begin{cases} 0, & \lambda \in \gamma_1; \\ \tilde{S}_{\rho\lambda}(\lambda), & \lambda \in \gamma_2; \\ 0, & \lambda \in \gamma_3; \end{cases} \quad f_j'(\lambda) = \begin{cases} f_j'(\lambda), & \lambda \in \gamma_1; \\ \tilde{f}_j'(\lambda), & \lambda \in \gamma_2; \\ 0, & \lambda \in \gamma_3; \end{cases} \quad j = 1, 2;$$

$$\begin{aligned}
 R(\lambda, t) &= \alpha(\lambda)\alpha(t) + \beta(\lambda)\beta(t); \quad Q(\lambda, t) = \alpha(\lambda)\beta(t) - \beta(\lambda)\alpha(t); \quad D(\lambda, t) = \sum_{k=1}^{N-1} \operatorname{ctg} \left(\frac{\lambda-t}{2} - \frac{k\pi}{N} \right); \\
 D_1(t) &= f_2'(t) \cos \frac{2k\pi}{N} + f_1'(t) \sin \frac{2k\pi}{N}; \quad D_2(t) = f_1'(t) \cos \frac{2k\pi}{N} - f_2'(t) \sin \frac{2k\pi}{N}; \quad (5)
 \end{aligned}$$

E, ν – модуль Юнга і коефіцієнт Пуассона матеріалу пластинки.

Підставляючи співвідношення (4), (5) в граничні умови (2), (3), після певних перетворень отримаємо систему інтегрально-диференціальних рівнянь з ядрами Гільберта та логарифмічними ядрами для визначення зусиль $T_{\rho}^0, \tilde{T}_{\rho}, \tilde{S}_{\rho\lambda}$ в зонах контакту і на ділянках підсилення

$$\begin{aligned}
 & \left[(1-\nu) \int_0^{\lambda} f_1'(t) dt + \frac{2}{\pi} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} f_2'(t) \ln \left| \sin \frac{\lambda-t}{2} \right| dt + \frac{2}{\pi} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} \sum_{k=1}^{N-1} D_1(t) \ln \left| \sin \left(\frac{\lambda-t}{2} - \frac{k\pi}{N} \right) \right| dt + \frac{2}{\pi} \int_{\beta_1}^{\beta_2} \tilde{f}_2'(t) \ln \left| \sin \frac{\lambda-t}{2} \right| dt + \right. \\
 & \left. + \frac{2}{\pi} \int_{\beta_1}^{\beta_2} \sum_{k=1}^{N-1} D_1(t) \ln \left| \sin \left(\frac{\lambda-t}{2} - \frac{k\pi}{N} \right) \right| dt \right] + \frac{b(\lambda)}{a(\lambda)} \left[(1-\nu) \int_0^{\lambda} f_2'(t) dt - \frac{2}{\pi} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} f_1'(t) \ln \left| \sin \frac{\lambda-t}{2} \right| dt - \right. \\
 & \left. - \frac{2}{\pi} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} \sum_{k=1}^{N-1} D_2(t) \ln \left| \sin \left(\frac{\lambda-t}{2} - \frac{k\pi}{N} \right) \right| dt - \frac{2}{\pi} \int_{\beta_1}^{\beta_2} \tilde{f}_1'(t) \ln \left| \sin \frac{\lambda-t}{2} \right| dt - \frac{2}{\pi} \int_{\beta_1}^{\beta_2} \sum_{k=1}^{N-1} D_2(t) \ln \left| \sin \left(\frac{\lambda-t}{2} - \frac{k\pi}{N} \right) \right| dt \right] =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2EhU_0; \quad f_1'(\lambda) + \frac{b(\lambda)}{a(\lambda)} f_2'(\lambda) = 0, \quad \lambda \in \gamma_1; \\
\tilde{T}_\rho(\lambda) &= \frac{\Omega(\lambda)E_0F(s)}{2EhK^{5/2}(\lambda)} \left[(1-\nu)K(\lambda)\tilde{T}_\rho(\lambda) - \frac{N}{\pi} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} R(\lambda, t)T_\rho^0(t)dt - \frac{N}{\pi} \int_{\beta_1}^{\beta_2} R(\lambda, t)\tilde{T}_\rho(t)dt + \frac{N}{\pi} \int_{\beta_1}^{\beta_2} Q(\lambda, t)\tilde{S}_{\rho\lambda}(t)dt + \right. \\
&+ \frac{1}{\pi} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} Q(\lambda, t)ctg \frac{\lambda-t}{2} T_\rho^0(t)dt + \frac{1}{\pi} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} Q(\lambda, t)D(\lambda, t)T_\rho^0(t)dt + \frac{1}{\pi} \int_{\beta_1}^{\beta_2} Q(\lambda, t)ctg \frac{\lambda-t}{2} \tilde{T}_\rho(t)dt + \\
&\left. + \frac{1}{\pi} \int_{\beta_1}^{\beta_2} Q(\lambda, t)D(\lambda, t)\tilde{T}_\rho(t)dt + \frac{1}{\pi} \int_{\beta_1}^{\beta_2} R(\lambda, t)ctg \frac{\lambda-t}{2} \tilde{S}_{\rho\lambda}(t)dt + \frac{1}{\pi} \int_{\beta_1}^{\beta_2} R(\lambda, t)D(\lambda, t)\tilde{S}_{\rho\lambda}(t)dt \right]; \\
\tilde{S}_{\rho\lambda}(\lambda) &= -\frac{K(\lambda)}{\Omega(\lambda)} \cdot \frac{\partial \tilde{T}_\rho(\lambda)}{\partial \lambda} - \frac{\tilde{T}_\rho(\lambda)(K(\lambda)(1-2N) + 3\alpha(\lambda)N)\beta(\lambda)N}{\Omega^2(\lambda)}, \quad \lambda \in \gamma_2. \quad (6)
\end{aligned}$$

Величини f_1' , f_2' , \tilde{f}_1' , \tilde{f}_2' через контактні зусилля T_ρ^0 , \tilde{T}_ρ , $\tilde{S}_{\rho\lambda}$ визначаються за формулами

$$\begin{aligned}
f_1'(\lambda) &= -b(\lambda)T_\rho^0(\lambda); \quad f_2'(\lambda) = a(\lambda)T_\rho^0(\lambda), \quad \lambda \in \gamma_1; \\
\tilde{f}_1'(\lambda) &= -b(\lambda)\tilde{T}_\rho(\lambda) - a(\lambda)\tilde{S}_{\rho\lambda}(\lambda); \quad \tilde{f}_2'(\lambda) = a(\lambda)\tilde{T}_\rho(\lambda) - b(\lambda)\tilde{S}_{\rho\lambda}(\lambda), \quad \lambda \in \gamma_2. \quad (7)
\end{aligned}$$

Крім системи (6), (7), повинні виконуватися умови рівноваги кожного штампа і підсилювального ребра [1,4]

$$\int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} f_2'(t)dt = -P_0; \quad T_\rho(\beta_1) = T_\rho(\beta_2) = 0. \quad (8)$$

Перша з умов (8) служить для визначення сталої U_0 , а інша визначає структуру контактних зусиль на торцях ділянки підсилення.

Якщо величини T_ρ^0 , \tilde{T}_ρ , $\tilde{S}_{\rho\lambda}$ стануть відомі, то кільцеві зусилля T_λ на контурі Γ можна визначити за формулою [5]

$$T_\lambda = \nu T_\rho + 2Eh\varepsilon_\lambda. \quad (9)$$

Співвідношення (6) - (9) визначають математичну модель задачі про тиск системи N жорстких штампів з кутовими точками на частково підсиленій криволінійній контур нескінченної ізотропної пластинки.

Розглянемо окремі часткові випадки задачі (6) - (9):

- якщо в (6) - (9) прийняти $E_0 = 0$ (відсутнє пружне підсилення), то отримаємо розв'язок задачі для системи N жорстких штампів з кутовими точками, які діють на контур вільного криволінійного отвору нескінченної ізотропної пластинки [3].
- при $\alpha_0 \rightarrow 0$ штамп з кутовими точками вироджується в клиноподібний і система (6) - (9) визначає розв'язок задачі про тиск N зосереджених сил на контур частково підсиленого криволінійного отвору в ізотропній пластинці. При відсутності підсилень така задача розглянута в [3].
- покладаючи в (6) - (9) $\varepsilon = 0$, знаходимо розв'язок відповідної контактної задачі для кругового отвору.

Результати числових розрахунків. Точний розв'язок системи (6) - (8) знайти не вдається. Враховуючи, що ця система має таку ж характеристичну частину, як і відповідна система в задачі для одного штампа і одного підсилення [5], її наближений розв'язок можна реалізувати мішаним методом механічних квадратур і колокації.

Рис. 2., 3. ілюструють результати дослідження впливу величини зони контакту на розподіл зусиль по контуру отвору при $\varepsilon = \pm 0.2$; $\nu = 0.3$; $\beta_0 = 20^\circ$; $b_0/\rho_0 = 0.05$; $h_0/h = 1$; $E_0/E = 5$; $N = 3$.

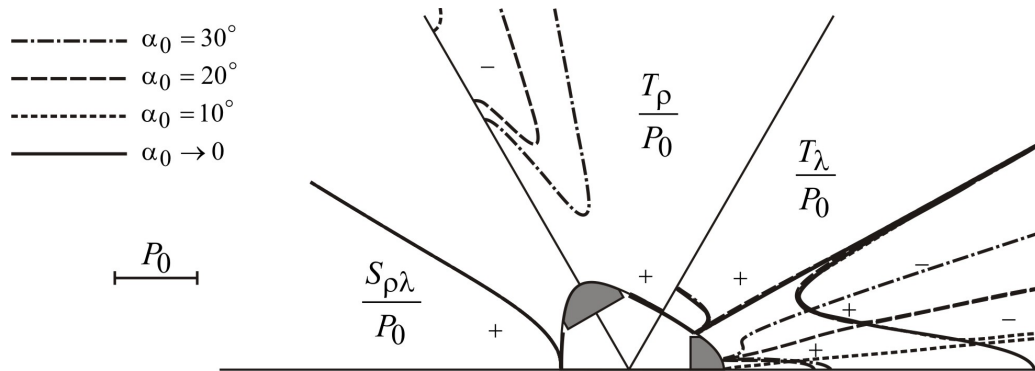


Рис. 2. Розподіл контактних і кільцевих зусиль на контурі отвору

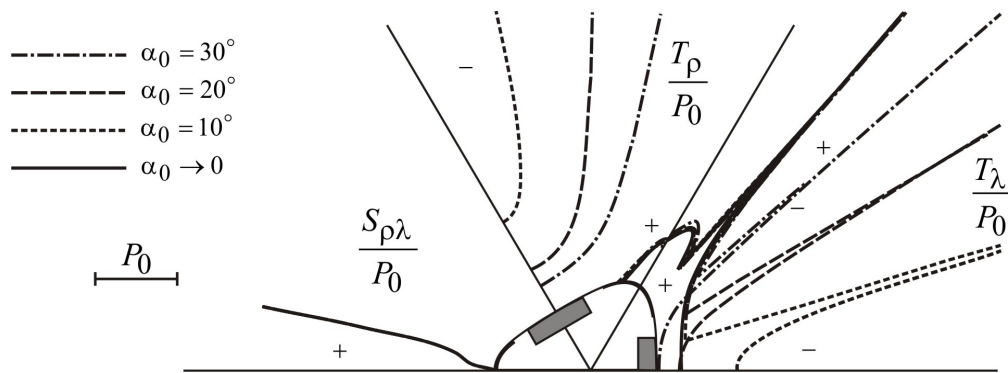


Рис. 3. Розподіл контактних і кільцевих зусиль на контурі отвору

Вплив відносної жорсткості підсилення на розподіл зусиль по контуру отвору при $\varepsilon = \pm 0.2$; $\nu = 0.3$; $\alpha_0 = 30^\circ$; $\beta_0 = 20^\circ$; $b_0/\rho_0 = 0.05$; $h_0/h = 1$; $N = 3$. досліджується на рис.4.,5.

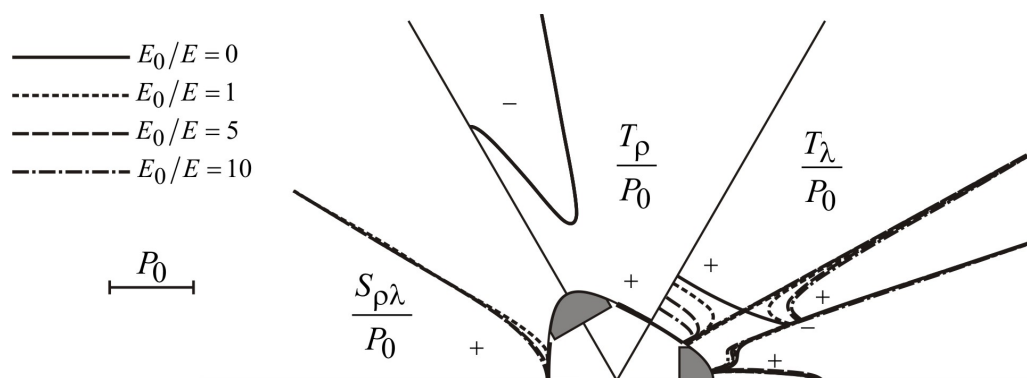


Рис. 4. Розподіл контактних і кільцевих зусиль на контурі отвору

Висновки. Числовим експериментом встановлено, що із зменшенням величини зон контакту в їх центрі спостерігається збільшення нормальних T_ρ і зменшення кільцевих T_λ зусиль. При цьому на торцях цих зон як T_ρ , так і T_λ необмежені. Зусилля на ділянках підсилення практично не залежать від величин зон контакту.

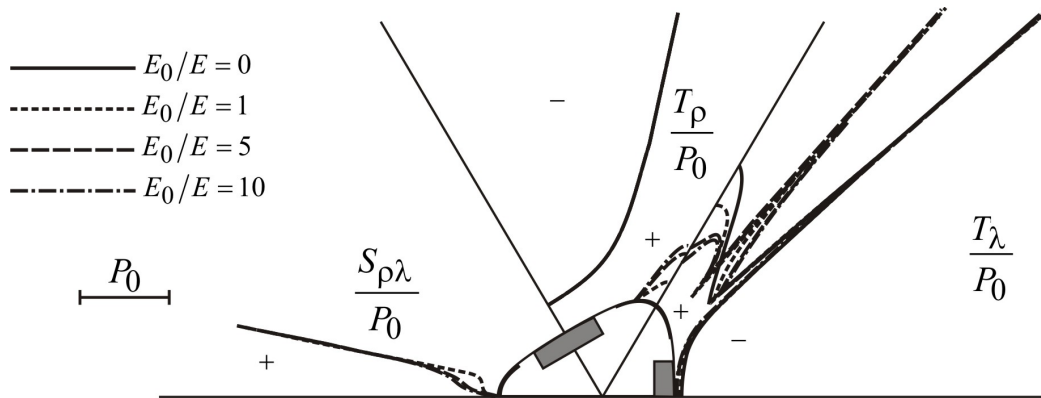


Рис. 5. Розподіл контактних і кільцевих зусиль на контурі отвору

Відносна жорсткість підсилення практично не впливає на величину контактних зусиль під штампами. В центрі зон підсилення кільцеві зусилля зменшуються із збільшенням E_0/E .

Запропонована методика може бути використана при розв'язуванні задач для підсилення із закругленими торцями, які дозволяють добитися обмеженості зусиль на ділянках підсилення і вільних ділянках.

Список літератури

1. Сяський А.О. Тиск жорсткого штампа з кутовими точками на еліптичний отвір в ортотропній пластинці / А.О. Сяський // Волинський математичний вісник. – Рівне, 1997. – Вип.4. – С.153-156.
2. Шваб'юк В.І. Контактна взаємодія двозв'язних штампів з кутовими точками і криволінійного отвору в нескінченних пластинках / Шваб'юк В.І., Сяський В.А. // Ресурсоекономні матеріали, конструкції, будівлі та споруди: Збірник наукових праць. – Рівне, 2009. – Вип.19. – С.269-275.
3. Шваб'юк В.І. Контактна задача для пластинки з трикутним отвором і системи двох жорстких штампів з кутовими точками / В. Шваб'юк, В. Сяський // Вісник Тернопільського державного технічного університету – Тернопіль, 2009. – Т.14, №3. – С.65-71.
4. Сяський А. Часткове симетричне підсилення криволінійного отвору в нескінченній пластинці / А. Сяський, Ю. Батишкіна // Вісник Тернопільського державного технічного університету – Тернопіль, 2004. – Т.9, №2. – С.5-12.
5. Трохимчук О. Тиск жорсткого штампа з кутовими точками на частково підсиленій контур криволінійного отвору в нескінченній ізотропній пластинці / О. Трохимчук, А. Сяський // Вісник Тернопільського державного технічного університету – Тернопіль, 2009. – Т.14, №2. – С.30-36.
6. Трохимчук О. Мішана контактна задача для системи двох жорстких штампів з кутовими точками і ортотропної пластинки з частково підсиленням еліптичним отвором / Олена Трохимчук, Андрій Сяський // Обчислювальна математика і математичні проблеми механіки. – Львів: Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України. – 2009. – С.213-214.