

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ  
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ  
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

**Я.І. Корнага, К.Ю. Мелкумян, М.О. Солдатова,  
О.А. Стенін, Ю.А. Тимошин**

# Стохастичне управління технічними системами

*Затверджено Вченою радою КПІ ім. Ігоря Сікорського  
як навчальний посібник для студентів,  
які навчаються за спеціальністю 126 «інформаційні системи та технології»,  
освітньої програми «Інформаційне забезпечення робототехнічних систем»*

Київ

КПІ ім. Ігоря Сікорського

2021

Рецензенти: Петро БІДЮК, д-р техн. наук, професор, професор кафедри Математичних методів системного аналізу Навчально-наукового комплексу «Інститут прикладного системного аналізу»

Сергій СТИРЕНКО, д-р техн. наук, професор, завідувач кафедри Обчислювальної техніки КПІ ім. Ігоря Сікорського

Відповідальний редактор

РОЛІК О.І., докт. техн. наук, професор, завідувач кафедри інформаційних систем та технологій КПІ ім. Ігоря Сікорського

*Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського*

*(протокол № \_\_ від \_\_ 2021 р.)*

*за поданням Вченої ради факультету інформатики та обчислювальної техніки*

*(протокол № \_\_ від \_\_ 2021 р.)*

Електронне мережне навчальне видання

*Корнага Ярослав Ігорович, д-р техн. наук, доц. доцент*

*Мелкумян Катерина Юріївна, канд. техн. наук, доцентка*

*Солдатова Марія Олександрівна, канд. техн. наук, доцентка*

*Стенін Олександр Африканович, д-р техн. наук, проф., професор*

*Тимошин Юрій Афанасійович, канд. техн. наук, доц. доцент*

## СТОХАСТИЧНЕ УПРАВЛІННЯ ТЕХНІЧНИМИ СИСТЕМАМИ

Стохастичне управління технічними системами [Електронний ресурс] : навчальний посібник для студентів спеціальності 126 «Інформаційні системи та технології», освітньої програми «Інформаційне забезпечення робототехнічних систем» / Я.І. Корнага, К.Ю.Мелкумян, М.О.Солдатова, О.А.Стенін, Ю.А.Тимошин / КПІ ім. Ігоря Сікорського. – Електронні текстові дані (1 файл: 1782 Кбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. – 149 с.

Основною метою навчального посібника є закріплення міцних теоретичних та практичних навичок з дослідження і побудови стохастичних систем автоматичного управління в різних галузях народного господарства. В навчальному посібнику викладені основні положення теорії стохастичного управління технічними системами і наведений широкий спектр прикладів вирішення конкретних задач. Для закріплення практичних навичок в кінці кожного розділу дані запитання для самостійного контролю знань. Навчальний посібник орієнтовано на студентів і магістрів технічних спеціальностей, які пов'язані з розробкою та використанням стохастичних систем автоматичного управління в самих різноманітних сферах народного господарства.

© Я.І. Корнага, К.Ю.Мелкумян, М.О.Солдатова, О.А.Стенін 2021

© КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021

# ЗМІСТ

Вступ .....	5
Розділ 1. Випадкові процеси (ВП).....	7
1.1. Поняття випадкового процесу та класифікація випадкових процесів.....	7
1.2. Закони розподілу та основні характеристики випадкових процесів .....	11
1.3. Типові випадкові процеси .....	19
1.3.1. Стаціонарний випадковий процес (СВП).....	19
1.3.2. Випадковий процес типу «білий шум».....	23
1.3.3. Стаціонарні дискретні випадкові процеси .....	25
1.3.4. Випадкові ступінчастий сигнал та сигнал з періодичною складовою .....	27
1.3.5. Марковський випадковий процес (МВП). .....	29
Запитання для самоперевірки .....	33
Розділ 2. Аналіз лінійних САУ з випадковими сигналами.....	35
2.1. Основні поняття і співвідношення .....	35
2.2. Опис траєкторій руху САУ під впливом випадкових процесів .....	37
2.3. Аналіз САУ зі стаціонарним випадковим процесом .....	40
2.4. Дія завади на замкнуту САУ .....	48
2.5. Розрахунок усталених помилок в САУ .....	49
2.6. Розрахунок лінійних САУ при випадкових впливах .....	51
2.6.1 Аналітичний метод визначення середньої квадратичної помилки.....	54
2.6.2 Графоаналітичне визначення середньої квадратичної помилки. ....	56
2.6.3.Визначення середньої квадратичної помилки при випадкових і регулярних впливах, що діють одночасно.....	58
2.7. Оптимізація параметрів системи управління .....	64
Запитання для самоперевірки .....	67
Розділ 3. Розрахунок оптимальних лінійних фільтрів на основі методу Вінера і методу Калмана - Б'юси. ....	69
3.1. Лінійний фільтр Вінера.....	69
3.2 Оцінювання параметрів і станів по методу найменших квадратів.....	73
3.2.1 Оцінювання параметрів фільтра по методу найменших квадратів. Рішення рівняння Вінера – Хопфа у дискретному просторі. ....	74
3.2.2 Рекурентне оцінювання параметрів фільтра методом найменших квадратів.....	75
3.2.3 Рекурентне оцінювання станів багатомірного об'єкту управління методом найменших квадратів. Рівняння оцінювання Калмана. ....	76
3.3. Оптимальний фільтр Калмана - Б'юси .....	79
3.4. Фільтр Калмана в просторі станів.....	89

Запитання для самоперевірки .....	93
<b>Розділ 4. Аналіз лінійних дискретних систем (ЛДС) з випадковими сигналами .....</b>	<b>94</b>
4.1. Випадкові процеси в лінійних імпульсних системах.....	94
4.2. Розрахунок математичного сподівання .....	99
4.3. Розрахунок кореляційної функції відгуку ЛДС .....	101
4.4. Взаємна кореляційна функція впливу і відгуку ЛДС .....	104
4.5. Аналіз дії на ЛДС стаціонарного випадкового процесу.....	105
Запитання для самоперевірки .....	109
<b>Розділ 5. Аналіз нелінійних САУ з випадковими сигналами. Метод статистичної лінеаризації.....</b>	<b>110</b>
5.1 Нелінійне перетворення випадкових сигналів.....	110
5.1.1. Проходження випадкового сигналу через нелінійний безінерційний елемент із зоною насичення.....	110
5.1.2. Критерії статистичної еквівалентності.....	113
5.2 Розрахунок нелінійних стохастичних САУ методом статистичної лінеаризації. ....	121
5.2.1.Розрахунок розімкнутих нелінійних систем.....	121
5.2.2.Розрахунок замкнутих нелінійних систем.....	123
5.2.3. Графоаналітичне рішення.....	126
<b>Розділ 6. Синтез лінійних систем з мінімальною середньою квадратичною помилкою. ....</b>	<b>130</b>
6.1. Характеристика загальної задачі синтезу .....	130
6.2. Синтез лінійних стохастичних САУ при заданій структурі системи .....	134
6.3. Синтез лінійних стохастичних САУ при довільній структурі системи .....	137
Запитання для самоперевірки .....	144
Література.....	145
Додатки.....	146

## Вступ

Проблеми ідентифікації та управління технічними системами при наявності випадкових сигналів займають в даний час значне місце в теорії та практиці управління такими системами. Поведінку реальної технічної системи, що функціонує в умовах природних, промислових та інших «шумів», характеризується деякою невизначеністю. Крім того, в автоматизованих системах управління складними технічними об'єктами зазвичай беруть участь люди, для яких характерна певна невизначеність поведінки. Опис таких систем за допомогою добре відомих детермінованих підходів не завжди ефективно і не відображає дійсної картини функціонування об'єкта. Не пристосовані також до вирішення завдання оптимального управління цим класом об'єктів розроблені методи для детермінованих систем. Таким чином, необхідність розробки стохастичної теорії управління технічними системами викликана нагальними потребами практики керування, і ця теорія максимально наближає формалізоване подання до дійсних умов функціонування.

Стохастична теорія управління технічними системами заснована на статистичному підході до вирішення завдань ідентифікації, прогнозування, фільтрації та оптимізації. Можливість розробки цієї теорії пов'язана з виникненням і інтенсивним розвитком теорії ймовірностей. Статистичний підхід, що намітився в 40-х роках, у вирішенні завдань аналізу і синтезу стохастичних систем управління сприяв виникненню нових підходів, теоретичних і практичних результатів, розширенню уявлень про процеси управління. У 60-х роках розвиток статистичного підходу природно призвело до постановки нових задач управління, які були пов'язані з пошуком закону керування в умовах невизначеності (відсутність повного опису об'єкта, статистична природа вхідного сигналу в ланцюзі зворотного зв'язку та ін). Отримані результати послужили основою виникнення стохастичної теорії управління, яка знаходиться ще в початковому стані, але бурхливо розвивається і знаходить все більше і більше областей застосування.

Тісний зв'язок між стохастичної теорією управління технічними системами і отриманими в останні роки широке поширення адаптивними системами, системами дуального управління та іншими очевидна і визначається відсутністю повної апріорної інформації про систему. Зміна зовнішніх впливів, а також характеристик об'єктів управління в умовах їх нормального функціонування, принципова неможливість врахування всіх впливів і інші реальні фактори зумовлюють необхідність постійного уточнення законів функціонування і управління технічної системою. Уточнення закону функціонування технічної системи дозволяє зменшити ступінь апріорної невизначеності і вибрати закон управління, що забезпечує виконання заданої мети. У зв'язку з цим функції, що виконуються системою управління, розширюються і ускладнюються. Так, в стохастичних системах управління передбачається здійснення процесів ідентифікації та управління. Обидва процеси здійснюються в замкнутій системі, в реальному масштабі часу. Досвід показує, що практична реалізація таких систем перспективна.

Зважаючи на вищевикладене, у навчальному посібнику з єдиної точки зору розглянуті завдання стохастичної теорії управління: ідентифікація (оцінювання параметрів), аналіз і синтез САУ.

Навчальний посібник представляє інтерес для читачів, що працюють в галузі управління. Його може бути також використано викладачами, аспірантами і студентами старших курсів як методичний посібник з курсу управління технічними системами.

## Розділ 1. Випадкові процеси (ВП)

### 1.1. Поняття випадкового процесу та класифікація випадкових процесів

Теорією випадкових процесів (ВП) називається математична наука, яка вивчає закономірності випадкових явищ в динаміці їх розвитку. Випадкові процеси описують багато фізичних, економічних та виробничих явищ. До них належать броунівський рух дрібної частинки, який виникає внаслідок взаємодії частинки з молекулами рідини, коливання валютних курсів, курсів акцій, ціни на певний товар, сподівана вартість грошей, банківські активи, довжина черг та кількість заявок на обслуговування в кожний момент часу з деякого проміжку часу в різних системах надання послуг тощо.

Поняття випадкового процесу є узагальненням поняття випадкової величини.

Розглянемо деяку числову множину  $T$ , елементи якої позначатимемо через  $t$  і будемо вважати їх моментами часу.

**Визначення.** Випадковим процесом називається функція  $X(t)$ ,  $t \in T$ , значення якої при будь-якому фіксованому  $t = t_0 \in T$  є випадковою величиною  $X(t_0)$ .

Випадкову величину  $X(t_0)$ , в яку перетворюється випадковий процес при  $t = t_0$ , називається перерізом випадкового процесу, що відповідає даному значенню аргументу  $t$ . Надалі, розглядаючи переріз випадкового процесу, ми не завжди відзначатимемо нульовим індексом те значення аргументу  $t$ , якому воно відповідає, а будемо інтерпретувати один і той же вираз  $X(t)$  або як випадковий процес (при змінному  $t$ ), або як випадкову величину (при фіксованому  $t$ ).

Якщо розглянути не один переріз випадкового процесу, а ряд перерізів в точках  $t_1, t_2, \dots, t_n$ , то отримаємо  $n$  – вимірний випадковий вектор  $(X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n))$ , який описує випадковий процес лише в деякому наближенні. Сукупність всіх перерізів при усіх можливих  $t_i \in T$  є випадковий процес  $X(t)$ . Отже, випадковий процес представляє не що інше, як сім'ю випадкових величин – всіх перерізів цього процесу.

Аналогічно до того, як ми записували випадкову величину у вигляді функції від елементарної події, яка є результатом досліду (стохастичного експерименту), можна і випадковий процес записати у вигляді функції від двох аргументів – часу  $t$  та елементарної події  $\omega$ :

$$X(t) = X(t, \omega), \omega \in \Omega, t \in T, \quad (1.1)$$

де  $\omega$  – елементарна подія,  $\Omega$  – простір елементарних подій,  $T$  – область (множина) значень аргументу  $t$  функції  $X(t)$ .

Якщо  $\omega = \omega_0$  – фіксоване, то  $X(t, \omega_0)$ , що розглядається як функція  $t$ ,  $t \in T$  називається реалізацією або траєкторією випадкового процесу  $X(t)$ .

**Визначення.** Реалізацією випадкового процесу  $X(t)$  називається не випадкова функція  $x(t)$ , в яку перетворюється випадковий процес  $X(t)$  внаслідок проведеного досліду.

Користуючись формулою (1.1), для  $x(t)$  можна записати рівність

$$x(t) = X(t, \omega_0), t \in T. \quad (1.2)$$

Якщо здійснити не один дослід, а декілька, внаслідок кожного з яких спостерігається реалізація випадкового процесу  $x(t)$  ( $i$  – номер досліду), то отримаємо декілька реалізацій випадкового процесу:  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t)$  ( $m$  – кількість проведених дослідів) або сім'ю реалізацій (рис 1.1).

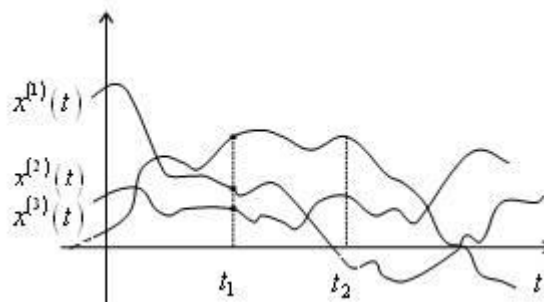


Рис.1.1. Сім'я реалізацій випадкового процесу

Сім'я реалізацій випадкового процесу – основний емпіричний матеріал, на підставі якого можна оцінити характеристики випадкового процесу (про них йтиме мова в наступному підрозділі). Сім'я реалізацій випадкового процесу аналогічна сукупності спостережуваних значень випадкової величини  $X$ , з тією різницею, що тут спостерігаються не числові значення, а функції.



Далі нам доведеться мати справу із системами різноманітної природи, зокрема, з економічними та фінансовими. Випадковий процес, який відбувається у системі  $S$ , полягає в тому, що з плином часу  $t$  система  $S$  у випадковий спосіб змінює свій стан. Якщо система  $S$  в момент  $t$  описується однією скалярною випадковою величиною  $X(t)$ , то ми маємо справу зі скалярним випадковим процесом  $X(t)$ . Якщо стан системи  $S$  в момент  $t$  описується декількома випадковими величинами  $X_1(t), X_2(t), \dots, X_k(t)$ , то ми маємо справу з векторним випадковим процесом  $X(t)$  з  $k$  складовими:  $X_1(t), X_2(t), \dots, X_k(t)$ .

В теорії випадкових процесів прийнято класифікувати їх за тими або іншими ознаками, враховуючи плавність або стрибкоподібність реалізації, фіксованість або випадковість моментів, в які можуть відбуватися стрибки, вигляд закону розподілу окремого перерізу або сукупності його перерізів і т. д. Ознайомимося з найелементарнішою класифікацією випадкових процесів – «за часом» і «за станами».

**Визначення.** Випадковий процес  $X(t)$  називається процесом з дискретним часом, якщо система  $S$ , в якій він відбувається, може змінювати свої стани тільки у визначені, наперед відомі моменти часу  $t_1, t_2, \dots, t_i, \dots$ , які називаються кроками (або етапами) цього процесу. Множина  $T$  є скінченною або зліченною.

У проміжках часу між сусідніми кроками система зберігає свої стани. Не виключається можливість, що на деяких кроках система не змінить свого стану.

Випадковий процес з дискретним часом називається також випадковою послідовністю. Якщо стан системи  $S$  описується одною випадковою величиною  $S$ , то випадковий процес представляє послідовність випадкових величин  $X_1(t), X_2(t), \dots, X_n(t), \dots$ . В якості аргументу послідовності можна вибрати значення номера моменту переходу  $k = 1, 2, \dots, n, \dots$ . Тоді випадковий процес можна представити у вигляді послідовності випадкових величин  $X(1), X(2), \dots, X(n), \dots$

**Визначення.** Випадковий процес  $X(t)$  називається процесом з неперервним часом, якщо система  $S$ , в якій він відбувається, може змінювати

свої стани в будь-які, випадкові моменти часу, що неперервно заповнюють вісь  $O_t$  (або її ділянку). Множина  $t$  є нескінченною та незліченною.

**Визначення.** Випадковий процес  $X(t)$ , який відбувається в системі  $S$ , називається процесом з дискретними станами, якщо в будь-який момент часу  $t$  множина його станів є скінченною або зліченною; іншими словами, якщо його переріз в будь-який момент  $t$  характеризується дискретною випадковою величиною  $X(t)$  – в одновимірному випадку та векторною дискретною випадковою величиною  $(X_1(t), X_2(t), \dots, X_k(t))$  – в багатовимірному випадку.

Зауважимо, що всі випадкові процеси з «якісними» станами відносяться до категорії процесів з дискретними станами; перерізом такого процесу є випадкова подія – аналог дискретної випадкової величини.

**Визначення.** Випадковий процес, який відбувається в системі  $S$ , називається процесом з неперервними станами, якщо множина можливих станів системи  $S$  незліченна; іншими словами, якщо переріз процесу в будь-який момент часу  $t$  характеризується неперервною (або змішаною) випадковою величиною – в одновимірному випадку та векторною неперервною (або змішаною) випадковою величиною – в багатовимірному випадку.

Таким чином, за вищевказаними ознаками випадкові процеси можна поділити на чотири класи:

К1. Процеси з дискретними станами та дискретним часом.

К2. Процеси з дискретними станами та неперервним часом.

К3. Процеси з неперервними станами та дискретним часом.

К4. Процеси з неперервними станами та неперервним часом.

Приклад процесу типу К1: Особа купила  $m$  білетів виграшного займу, які можуть виграти та погашатися в завчасно відомі моменти часу (тиражі)  $t_1, t_2, \dots$ . Випадковий процес  $X(t)$  – число білетів, на які припав виграш до моменту  $t$ .

Приклад процесу типу К2: технічний прилад складається з  $n$  вузлів, які можуть в ході роботи приладу відмовляти (виходити з ладу). Випадковий процес  $X(t)$  – кількість вузлів, що відмовили до моменту  $t$ .

Приклад процесу типу К3: у певні моменти часу  $t_1, t_2, \dots$  реєструється температура повітря  $X(t)$  у заданій точці простору. Послідовність значень цієї величини – випадковий процес  $X(t)$  з неперервними станами та дискретним часом.

Приклад процесу типу К4: у мікроскопі протягом проміжку часу  $[0; T]$  спостерігається переміщення малої частинки в рідині, яка здійснює броунівський рух. Координата частинки в момент  $t$  – випадковий процес  $X(t)$  з неперервними станами та неперервним часом.

## 1.2. Закони розподілу та основні характеристики випадкових процесів

Відомо, що ймовірнісні властивості випадкової величини можна вивчати за допомогою її функції розподілу  $F(x) = P\{X < x\}$ : ймовірність того, що випадкова величина  $X$  прийме значення, яке є меншим від заданого числа  $x$ . Нагадаємо також, що для дискретної випадкової величини її закон розподілу може бути заданий рядом розподілу, для неперервної випадкової величини – густиною розподілу. Аналогічно ймовірнісні властивості випадкового процесу можна вивчати за допомогою сім'ї його кінцеве-мірних розподілів. Останні отримуються так само, як і розподіл скінченної множини випадкових величин, визначених на одному і тому ж імовірнісному просторі.

Нехай маємо випадковий процес  $X(t)$ . У кожному перерізі розподіл ймовірностей випадкового процесу задається одновимірною функцією розподілу:

$$F(t, x) = P\{X(t) < x\}. \quad (1.3)$$

Якщо випадкова величина  $X(t)$  дискретна, то одновимірний закон розподілу випадкового процесу  $X(t)$  описується рядом розподілу

$$p_i(t) = P\{X(t) = x_i(t)\}, i = 1, 2, \dots, \quad (1.4)$$

де  $x_i(t)$  – значення випадкової величини  $X(t)$ . Якщо випадкова величина  $X(t)$  неперервна, то цей закон можна задати за допомогою одновимірної щільності розподілу  $f(t, x)$ , для якої при будь-яких  $t \in T$  та  $x \in (-\infty; +\infty)$  виконується рівність

$$F(t, x) = \int_{-\infty}^x f(t, u) du \quad (1.5)$$

Очевидно, в точках неперервності  $f(t, x)$  маємо

$$f(t, x) = \frac{\partial F(t, x)}{\partial x}.$$

Неважко зрозуміти, що функція  $F(t, x)$  не дає повної, вичерпної імовірнісної характеристики випадкового процесу, оскільки вона не враховує залежності випадкових величин  $X(t)$  при різних  $t$  (тобто залежності різних перерізів випадкового процесу). Більш повно ймовірнісні властивості  $X(t)$  описує  $n$ -вимірна функція розподілу – функція розподілу випадкового вектору  $(X_1(t), X_2(t), \dots, X_n(t))$  для  $n$  перерізів випадкового процесу:

$$F(t_1, x_1; t_2, x_2; \dots; t_n, x_n) = P\{X(t_1) < x_1, X(t_2) < x_2, \dots, X(t_n) < x_n\}.$$

Однак практичне застосування знаходять лише функція  $F(t, x)$  та функція розподілу другого порядку

$$F(t_1, x_1; t_2, x_2) = P\{X(t_1) < x_1, X(t_2) < x_2\} \quad (1.6)$$

Очевидно, кінцеве-мірні розподіли випадкового процесу підпорядковуються певним правилам узгодження. Наприклад, якщо  $n = 2$ , то ці умови виглядають так:

$$F(t_1, x_1; t_2, x_2) = F(t_2, x_2; t_1, x_1), \quad (1.7)$$

$$F(t_1, x_1) = \lim_{x_2 \rightarrow +\infty} F(t_1, x_1; t_2, x_2), \quad (1.8)$$

$$F(t_2, x_2) = \lim_{x_1 \rightarrow -\infty} F(t_1, x_1; t_2, x_2), \quad (1.9)$$

Якщо випадкова величина  $X(t)$  неперервна і  $f(t_1, x_1; t_2, x_2)$  – щільність розподілу функції розподілу  $F(t_1, x_1; t_2, x_2)$ , то

$$F(t_1, x_1; t_2, x_2) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} f(t_1, u_1; t_2, u_2) du_1 du_2, \quad (1.10)$$

$$f(t_1, x_1; t_2, x_2) = \frac{\partial^2 F(t_1, x_1; t_2, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2}. \quad (1.11)$$

Звідси, зокрема, випливають формули

$$f(t_1, x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t_1, x_1; t_2, u_2) du_2, \quad (1.12)$$

$$f(t_2, x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t_1, u_1; t_2, x_2) du_1, \quad (1.13)$$

які можна розглядати як еквіваленти умов узгодження (1.8), (1.9).

До важливих характеристик випадкового процесу належать поняття його математичного сподівання, дисперсії, а також кореляційної функції або коваріації, які є природними узагальненнями аналогічних понять, що були введені для випадкових величин.

**Визначення.** Математичним сподіванням випадкового процесу  $X(t)$  називається невідпадаюча функція  $m_x(t), t \in T$ , яка для кожного фіксованого значення  $t$  визначається як математичне сподівання відповідного перерізу випадкового процесу, тобто

$$m_x(t) = M[X(t)]. \quad (1.14)$$

З даного визначення випливає, що у випадку, коли переріз випадкового процесу  $X(t)$  при заданому  $t \in T$  є дискретною випадковою величиною з рядом розподілу

$x_i(t)$	$x_1(t)$	$x_2(t)$	...	$x_n(t)$
$p_i(t)$	$p_1(t)$	$p_2(t)$	...	$p_n(t)$

то його математичне сподівання можна обчислити за формулою

$$m_x(t) = M[X(t)] = \sum_{i=0}^n x_i(t)p_i(t). \quad (1.15)$$

Якщо переріз випадкового процесу  $X(t)$  при заданому  $t \in T$  є неперервною випадковою величиною з щільністю розподілу  $f(t, x)$ , то його математичне сподівання може бути обчислене за формулою

$$m_x(t) = M[X(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(t, x)dx. \quad (1.16)$$

Функція  $m_x(t)$  представляє деяку невідпадаючу «середню функцію», навколо якої групуються реалізації випадкового процесу.

**Приклад 1.1** Знайти математичне сподівання випадкового процесу  $Y(t)$ , що задається формулою  $Y(t) = X * e^{-2t}, T > 0, X \sim N(5; 1)$ , ( $X$  – випадкова величина розподілена за нормальним законом з  $M(X) = a = 5, \sigma(X) = 1$ ).

Спосіб 1. Щільність розподілу ВВ  $X$  має вигляд  $f(x) = \frac{1}{1 * \sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{(x-5)^2}{2}}$ ,

використовуючи формулу (1.16) обчислюємо:  $m_Y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x * e^{-2t} * \frac{1}{\sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{(x-5)^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} *$

$$e^{-2t} * \int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-\frac{(x-5)^2}{2}} dx = 5e^{-2t},$$

$$\text{так як } \frac{1}{\sqrt{2\pi}} * \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-\frac{(x-5)^2}{2}} dx = M(X) = 5.$$

Власне результат можна було б отримати і в спосіб 2, використовуючи властивість 2 математичного сподівання випадкового процесу:

$$m_Y(t) = M(X * e^{-2t}) = e^{-2t} * M(X).$$

Але відповідно до умови задачі  $X \sim N(5; 1)$ , тобто  $M(X) = 5$  і відповідно  $m_Y(t) = 5e^{-2t}$ .

**Визначення.** Дисперсією випадкового процесу  $X(t)$  називається не випадкова функція  $D_x(t), t \in T$ , яка для кожного фіксованого значення  $t$  визначається як дисперсія відповідного перерізу випадкового процесу, тобто

$$D_x(t) = D[X(t)] = M[X(t) - m_x(t)]^2 \quad (1.17)$$

або

$$D_x(t) = D[X(t)] = M[X(t)]^2 - m_x^2(t). \quad (1.18)$$

У випадку, коли переріз випадкового процесу  $X(t)$  при заданому  $t$  є дискретною випадковою величиною з рядом розподілу, наведеним в таблиці для (1.14), то його дисперсія обчислюється за формулою

$$D_x(t) = D[X(t)] = \sum_{i=1}^n [x_i(t) - m_x(t)]^2 p_i(t) \quad (1.19)$$

або

$$D_x(t) = D[X(t)] = \sum_{i=1}^n x_i^2(t) p_i(t) - m_x^2(t) \quad (1.20)$$

Якщо переріз випадкового процесу  $X(t)$  при заданому  $t$  є неперервною випадковою величиною з щільністю розподілу  $f(t, x)$ , то його дисперсія обчислюється за формулою:

$$D_x(t) = D[X(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} [x - m_x(t)]^2 f(t, x) dx \quad (1.21)$$

або

$$D_x(t) = D[X(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(t, x) dx - m_x^2(t) \quad (1.22)$$

Функція  $D_x(t)$  представляє не випадкову невід'ємну функцію, яка характеризує ступінь розсіювання реалізацій випадкового процесу навколо його математичного сподівання.

**Визначення.** Середнім квадратичним відхиленням  $\sigma_x(t), t \in T$  випадкового процесу називається арифметичне значення кореня квадратного з дисперсії  $D_x(t)$ :

$$\sigma_x(t) = \sigma[X(t)] = \sqrt{D_x(t)}. \quad (1.23)$$

Розмірність функції  $\sigma_x(t)$  збігається з розмірністю випадкового процесу  $X(t)$ .

Слід відзначити, що введені нами характеристики випадкового процесу  $X(t)$ , а саме: математичне сподівання  $m_x(t)$ , дисперсія  $D_x(t)$  та середнє квадратичне відхилення  $\sigma_x(t)$  визначаються тільки одновимірним законом розподілу. Якщо відома двовимірна функція розподілу випадкового процесу, то завжди для будь-яких двох перерізів випадкового процесу можна знайти їх коваріацію, яку в цьому випадку частіше називають кореляційною функцією.

**Приклад 1.2.** Використовуючи умови прикладу 1.1, знайти дисперсію та середнє квадратичне відхилення.

Знайдемо дисперсію, використовуючи властивість

$$D_Y(t) = D(X * e^{-2t}) = (e^{-2t})^2 DX = e^{-4t} * DX, \text{ за умови } X \sim N(5; 1), \text{ тобто}$$

$$DX = \sigma^2 = 1^2 = 1. \text{ Тому } D_Y(t) = e^{-4t} * 1 = e^{-4t}, \text{ відповідно } \sigma(Y) = \sqrt{e^{-4t}} = e^{-2t}.$$

**Визначення.** Кореляційною функцією випадкового процесу  $X(t)$  називається не випадкова функція  $K_x(t_1, t_2)$  двох аргументів  $t_1$  і  $t_2$ , яка при будь-яких значеннях  $t_1 \in T$  і  $t_2 \in T$  дорівнює кореляційному моменту відповідних перерізів випадкового процесу:

$$K_x(t_1, t_2) = M[(X(t_1) - m_x(t_1))(X(t_2) - m_x(t_2))] \quad (1.24)$$

або

$$K_x(t_1, t_2) = M[X(t_1)X(t_2)] - m_x(t_1)m_x(t_2). \quad (1.25)$$

Якщо, наприклад, для двох перерізів  $X(t_1)$  і  $X(t_2)$  випадкового процесу  $X(t)$  відома їх сумісна щільність розподілу  $f(t_1, x_1; t_2, x_2)$ , то формули (1.24), (1.25) набудуть вигляду:

$$K_x(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x_1 - m_x(t_1))(x_2 - m_x(t_2))f(t_1, x_1; t_2, x_2)dx_1dx_2 \quad (1.26)$$

або

$$K_x(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1x_2f(t_1, x_1; t_2, x_2)dx_1dx_2 - m_x(t_1)m_x(t_2) \quad (1.27)$$

Кореляційна функція характеризує залежність між випадковими величинами  $X(t_1)$  і  $X(t_2)$  – перерізами випадкового процесу  $X(t)$  при  $t = t_1$  і

$t = t_2$ . Чим слабший зв'язок між випадковими величинами  $X(t_1)$  і  $X(t_2)$ , тим менше значення кореляційної функції  $K_x(t_1, t_2)$ . Але чим слабший цей зв'язок, тим швидше змінюються значення, які приймає випадковий процес.

Теорія, яка вивчає випадкові процеси на підставі аналізу перших двох моментів випадкового процесу, до яких належать математичне сподівання, дисперсія та кореляційна функція називається кореляційною теорією.

Відзначимо основні властивості кореляційної функції  $K_x(t_1, t_2)$  випадкового процесу  $X(t)$ :

1. За умови рівності аргументів  $t_1 = t_2$  кореляційна функція випадкового процесу дорівнює його дисперсії. Справді,

$$K_x(t, t) = M[(X(t) - m_x(t))(X(t) - m_x(t))] = M[(X(t) - m_x(t))]^2 = D_x(t)$$

2. Кореляційна функція  $K_x(t_1, t_2)$  симетрична відносно своїх аргументів, тобто  $K_x(t_1, t_2) = K_x(t_2, t_1)$ .

Ця властивість безпосередньо випливає з означення кореляційної функції.

3. Якщо до випадкового процесу додати не випадкову функцію  $\varphi(t)$ , то кореляційна функція не зміниться.

Обґрунтуємо це твердження. Нехай випадковий процес дорівнює

$$Y(t) = X(t) + \varphi(t); m_y = M[Y(t)] = m_x(t) + \varphi(t)$$

Віднімаючи  $m_y(t)$  від  $Y(t)$ , одержимо

$$Y(t) - m_y(t) = X(t) - m_x(t)$$

Отже,

$$\begin{aligned} K_y(t_1, t_2) &= M\left[(Y(t_1) - m_y(t_1))(Y(t_2) - m_y(t_2))\right] = \\ &= M\left[(X(t_1) - m_x(t_1))(X(t_2) - m_x(t_2))\right] = K_x(t_1, t_2) \end{aligned}$$

4. Кореляційна функція випадкового процесу  $X(t)$  є невід'ємно визначеною, тобто для будь-якого натурального  $n$ , будь-яких  $t_1, t_2, \dots, t_n$  з множини  $T$  та будь-яких дійсних чисел  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  виконується нерівність

$$\sum_{i,j=1}^n K_x(t_i, t_j) \lambda_i \lambda_j \geq 0 \quad (1.28)$$



Дана властивість є простим наслідком рівності (1.24) та відомих властивостей математичного сподівання:

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^x K_x(t_i, t_j) \lambda_i \lambda_j &= \sum_{i,j=1}^x M[(X(t_i) - m_x(t_i))(X(t_j) - m_x(t_j))] \lambda_i \lambda_j = \\ M \sum_{i=1}^n \lambda_i [X(t_i) - m_x(t_i)] \sum_{j=1}^n \lambda_j [X(t_j) - m_x(t_j)] &= M \left( \sum_{i=1}^n \lambda_i [X(t_i) - m_x(t_i)] \right)^2 \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

Замість кореляційної функції може розглядатися безрозмірна нормована кореляційна функція.

**Визначення.** Нормованою кореляційною функцією випадкового процесу  $X(t)$  називається функція

$$r_x(t_1, t_2) = \frac{K_x(t_1, t_2)}{\sigma_x(t_1) \sigma_x(t_2)} = \frac{K_x(t_1, t_2)}{\sqrt{D_x(t_1) D_x(t_2)}}, \quad (1.29)$$

тобто коефіцієнт кореляції перерізів  $X(t_1)$  і  $X(t_2)$ .

Наступні властивості нормованої кореляційної функції є простими наслідками властивостей функції  $K_x(t_1, t_2)$  та коефіцієнта кореляції: 1)  $r_x(t, t) = 1$ ; 2)  $r_x(t_1, t_2) = r_x(t_2, t_1)$ ; 3)  $|r_x(t_1, t_2)| \leq 1$ .

Розглянемо систему з  $k$  випадкових процесів

$$X_1(t), X_2(t), \dots, X_k(t). \quad (1.30)$$

Кожна з функцій цієї системи характеризується математичним сподіванням і кореляційною функцією. Однак необхідно ще ввести характеристику зв'язку між окремими випадковими величинами системи (1.30). Такою характеристикою є взаємна кореляційна функція будь-яких двох випадкових процесів  $X_i(t)$  та  $X_j(t)$ , що належать системі (1.30).

**Визначення.** Взаємною кореляційною функцією випадкових процесів  $X_i(t)$  та  $X_j(t)$  називається функція

$$K_{ij}(t_1, t_2) = M[(X_i(t_1) - m_i(t_1))(X_j(t_2) - m_j(t_2))]$$

де  $i, j = 1, 2, \dots, k$ ;  $t_1, t_2 \in T$ ,  $m_i(t_1) = M[X_i(t_1)]$ ,  $m_j(t_2) = M[X_j(t_2)]$

Для того, щоб відрізнити взаємну кореляційну функцію від кореляційної функції останню називають також автокореляційною функцією.

**Визначення.** Два випадкових процеси  $X_i(t)$  та  $X_j(t)$  називають некорельованими, якщо їх взаємна кореляційна функція тотожно дорівнює нулю, тобто

$$K_{ij}(t_1, t_2) = 0. \quad (1.32)$$

У ряді випадків зручно ввести безрозмірну характеристику зв'язку між випадковими процесами – нормовану взаємну кореляційну функцію

$$R_{ij}(t_1, t_2) = \frac{K_{ij}(t_1, t_2)}{\sigma_i(t_1) * \sigma_j(t_2)} = \frac{K_{ij}(t_1, t_2)}{\sqrt{D_i(t_1) * D_j(t_2)}}, \quad (1.33)$$

де

$$D_i(t_1) = M[(X_i(t_1) - m_i(t_1))^2] = \sigma_i^2(t_1),$$

$$D_j(t_2) = M[(X_j(t_2) - m_j(t_2))^2] = \sigma_j^2(t_2).$$

Властивості функції  $R_{ij}(t_1, t_2)$  легко описати, виходячи з властивостей автокореляційної функції.

**Приклад 1.3.** Використовуючи умови прикладу 1.1, знайти кореляційну та нормовану кореляційну функцію випадкового процесу  $Y(t)$ .

Використовуючи визначення кореляційної функції випадкових процесів, отримуємо:

$$\begin{aligned} K_y(t_1, t_2) &= M((X * e^{-2t_1} - 5e^{-2t_1}) * (X * e^{-2t_2} - 5e^{-2t_2})) \\ &= M(e^{-2t_1} * e^{-2t_2} * (X - 5)^2) = e^{-2t_1 - 2t_2} M(X - 5)^2 \\ &= e^{-2t_1 - 2t_2} D(X) = e^{-2t_1 - 2t_2} * 1^2 = e^{-2t_1 - 2t_2} \end{aligned}$$

Тобто  $K_y(t_1, t_2) = e^{-2t_1 - 2t_2}$ . Відповідно  $r_y(t_1, t_2) = \frac{e^{-2t_1 - 2t_2}}{e^{-2t_1} * e^{-2t_2}} = 1$ .

**Приклад 1.4.** Знайти взаємну кореляційну функцію двох випадкових процесів  $X(t) = t^2 * Z, Y(t) = (t + 5) * Z$ , де  $Z$  – випадкова величина, для якої  $\sigma(Z) = 3$ .

Обчислимо  $m_X(t)$  та  $m_Y(t)$ :

$$\begin{aligned} m_x(t) &= M(t^2 * Z) = t^2 * M(Z) = t^2 m_z; \quad m_y(t) = M((t + 5)Z) = (t + 5)M(Z) \\ &= (t + 5)m_z \end{aligned}$$

Використовуючи визначення взаємної кореляційної функції випадкових процесів, маємо:

$$\begin{aligned} R_{XY}(t_1, t_2) &= M(t_1^2 Z - t_1^2 m_Z)((t_2 + 5)Z - (t_2 + 5)m_Z) \\ &= M(t_1^2(Z - m_Z))((t_2 + 5)(Z - m_Z)) = t_1^2 * (t_2 + 5) * M(Z - m_Z)^2 \\ &= t_1^2 * (t_2 + 5) * D(Z) = t_1^2 * (t_2 + 5) * \sigma^2(Z) = t_1^2 * (t_2 + 5) * 3^2 \\ &= 9 * t_1^2 * (t_2 + 5) \end{aligned}$$

Остаточно  $R_{XY}(t_1; t_2) = 9 * t_1^2 * (t_2 + 5)$ .

### 1.3. Типові випадкові процеси

#### 1.3.1. Стаціонарний випадковий процес (СВП)

Існують випадкові процеси, властивості яких залишаються інваріантними (незмінними) при будь-яких переміщеннях вздовж осі часу. Такі процеси називаються стаціонарними. Розрізняють два види стаціонарності: у вузькому розумінні та широкому розумінні.

**Визначення.** Випадковий процес  $X(t)$  називається стаціонарним у вузькому розумінні, якщо для будь-якого натурального  $n$  і для будь-яких  $t_i \in T, (t_i + \tau) \in T, i = 1, 2, \dots, n$ ,  $n$ -вимірна функція розподілу  $F$  процесу  $X(t)$  задовольняє умову

$$F(t_1, x_1; t_2, x_2; \dots; t_n, x_n) = F(t_1 + \tau, x_1; t_2 + \tau, x_2; \dots; t_n + \tau, x_n). \quad (1.34)$$

Умова (1.34) при  $n = 1$  приймає вигляд

$$F(t_1, x_1) = F(t_1 + \tau, x_1).$$

Покладаючи  $t_1 = 0$ , маємо

$$F(\tau, x_1) = F(0, x_1), \quad (1.35)$$

тобто всі (для будь-яких  $\tau \in T$ ) одновимірні розподіли є такі самі, як і розподіл в момент часу  $t = 0$ . Це означає, що одновимірні розподіли є незалежними від часу  $t$ .

Умова (1.35) при  $n = 2$  має вигляд

$$F(t_1, x_1; t_2, x_2) = F(t_1 + \tau, x_1; t_2 + \tau, x_2)$$

Покладаючи  $t_1 = -\tau, t_2 = t_1 + t$ , маємо

$$F(t_1, x_1; t_1 + t, x_2) = F(0, x_1; t, x_2), \quad (1.36)$$

тобто всі двовимірні розподіли (для будь-яких  $t_1, (t_1 + t) \in T$ ) є такі самі, як і двовимірний розподіл в моменти часу  $0, t$ . Отже, двовимірний розподіл при значеннях аргументів  $t_1, t_1 + t$  залежить лише від  $t$  і не залежить від  $t_1$ .

Що означає стаціонарність у вузькому розумінні з практичної точки зору? Для прикладу уявимо собі часовий ряд, який характеризує процес випуску продукції. Тут стаціонарність у вузькому розумінні означає, що систематичним змінам не підлягають ані умови виготовлення продукції, ані сировина та напівфабрикати, які постачаються ззовні, ані будь-які інші фактори, тобто існує можливість появи тільки деяких випадкових змін, і то лише таких, що їх розподіли не змінюються при будь-яких переміщеннях вздовж часової осі. З іншого боку, такі процеси, наприклад, як температура, ціна іноземної валюти, які спостерігаються протягом деякого періоду часу  $T$  є, очевидно, нестаціонарними випадковими процесами.

Припустимо тепер, що  $X(t)$  – стаціонарний у вузькому розумінні процес і  $M[X^2(t)] < \infty$ . Зауважимо, що остання умова забезпечує існування для випадкового процесу  $X(t)$  моментів першого та другого порядків. Тоді з (1.35) випливає, що

$$M[X(t)] = M[X(0)] = \text{const}, \quad (1.37)$$

а з (1.36) випливає, що

$$K_x(t_1, t_2) = K_x(0, t_2 - t_1) = K_x(t_2 - t_1). \quad (1.38)$$

Як бачимо, момент першого порядку, визначений рівністю (1.37), не залежить від  $t$ . Його можна позначити просто  $m$ . Момент другого порядку залежить лише від  $\tau = t_2 - t_1$ . Його можна назвати автоковаріацією порядку  $\tau$  (кореляційною функцією) і позначити  $k(\tau)$ . Крім цього, позначимо

$$D[X(t)] = k(0) = \sigma^2, \quad r_x(t_1, t_2) = \frac{k(\tau)}{k(0)} = p(\tau).$$

Отже, характеристики першого та другого порядків випадкового стаціонарного процесу є такі: середнє значення  $m$ , дисперсія  $\sigma^2$ , «корелограма», яка збігається з коефіцієнтом автокореляції  $p(\tau)$ .

Неважко встановити, що  $|p(\tau)| \leq 1, p(0) = 1$ .

Особливо простий вигляд має корелограма так званого «чисто випадкового процесу», який за означенням утворюється послідовністю незалежних випадкових величин з одним і тим самим розподілом  $F(x)$ . Кінцеве-мірні розподіли цього процесу виражаються формулою

$$F(t_1, x_1; t_2, x_2; \dots; t_n, x_n) = F(x_1) * F(x_2) * \dots * F(x_n). \quad (1.39)$$

Зрозуміло, що цей процес стаціонарний, і для нього всі коефіцієнти автокореляції дорівнюють нулю (крім  $\rho(0)$ ).

Процеси, в яких всі  $\rho(\tau)$ , крім  $\rho(0)$ , дорівнюють нулю, називаються «процесами без кореляції».

В кореляційній теорії розглядаються моменти випадкових процесів тільки першого та другого порядків. Для властивостей, що залежать лише від характеристик першого та другого порядків, вимога стаціонарності, визначена умовою (1.34), є занадто жорсткою. Тому природно ввести ще одне означення стаціонарного випадкового процесу.

**Визначення.** Випадковий процес  $X(t)$ , для якого виконані співвідношення (1.37), (1.38), називається стаціонарним процесом в широкому розумінні.

Надалі під стаціонарними випадковими процесами будемо розуміти випадкові процеси, стаціонарні в широкому розумінні.

**Визначення.** Два стаціонарні випадкові процеси  $X(t)$  та  $Y(t)$  називаються стаціонарно зв'язаними, якщо їх взаємна кореляційна функція залежить тільки від різниці аргументів, тобто

$$K_{XY}(t_1, t_2) = K_{XY}(t_2 - t_1) = K_{XY}(\tau) (\tau = t_2 - t_1) \quad (1.40)$$

З означення стаціонарного в широкому сенсі випадкового процесу випливає, що його кореляційна функція є функцією одного аргументу, тобто

$$K_X(t_1, t_2) = K_X(t_2 - t_1) = K_X(\tau), \tau = t_2 - t_1.$$

Нижче сформульовані основні властивості кореляційної функції СВП.

1. Дисперсія СВП є величиною сталою і дорівнює значенню кореляційної функції в нулі, тобто

$$D_x(\tau) = K_x(0) = const.$$

2. Кореляційна функція СВП є функцією парною, тобто

$$K_x(-\tau) = K_x(\tau).$$

3. Модуль кореляційної функції СВП не перевищує її значення при  $\tau = 0$ , тобто

$$|K_x(\tau)| \leq K_x(0).$$

4. Нормована кореляційна функція СВП є не випадковою функцією аргументу  $\tau$ :

$$r_x(\tau) = \frac{K_x(\tau)}{K_x(0)} = \frac{K_x(\tau)}{\sigma_x^2}.$$

Має місце нерівність  $|r_x(\tau)| \leq 1$ .

Більшість СВП мають важливу для практики властивість ергодичності. Суть цієї властивості полягає в тому, що по одній, достатньо тривалій реалізації, можна зробити висновок про всі властивості процесу, так само як по будь-якій кількості реалізацій. Тобто окремі характеристики СВП, а саме  $m_x$ ,  $K_x(\tau)$  можуть бути визначені як відповідно середнє по часу для однієї реалізації але досить тривалої.

**Зауваження.** Ергодичні ВП є стаціонарними у вузькому сенсі, зворотне твердження взагалі неправильне.

Достатньою умовою ергодичності СВП  $X(t)$  щодо математичного сподівання та кореляційної функції є прямування до нуля його кореляційної функції при  $\tau \rightarrow +\infty$ , тобто  $\lim_{\tau \rightarrow +\infty} K_x(\tau) = 0$ .

Як оцінки характеристик ергодичних СВП приймають усереднене за часом значення

$$\begin{aligned} \tilde{m}_x(t) &= \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt, \quad \tilde{K}_x(\tau) = \\ &= \frac{1}{T-\tau} \int_0^{T-\tau} (x(t) - \tilde{m}_x(t)) * (x(t+\tau) - \tilde{m}_x(t)) dt. \end{aligned} \quad (1.41)$$

Інтеграл в правій частині (1.41) на практиці розраховують наближено.

Випадкові процеси  $X(t)$  та  $Y(t)$  називають стаціонарно пов'язаними, якщо їх взаємна кореляційна функція  $K_{XY}(t_1, t_2)$  залежить лише від  $\tau = t_2 - t_1$ .

### 1.3.2. Випадковий процес типу «білий шум»

Розглянемо СВП, кореляційна функція якого дорівнює дельта-функції, помноженої на деяку постійну величину  $\frac{N_0}{2}$

$$k(\tau) = \frac{N_0}{2} \delta(\tau). \quad (1.42)$$

Нагадаємо, що дельта-функція дорівнює нулю всюди, за винятком точки  $\tau = 0$ , де  $\delta(\tau) = \infty$ , причому інтеграл від дельта-функції на будь-якому інтервалі, що містить особливу точку  $\tau = 0$ , дорівнює одиниці. Звідси слідує, що розглянутий випадковий процес характеризується тим, що його значення в будь-які два незбіжні, але як завгодно близькі, моменти часу, некорельовані. Такий процес, що умовно можна вважати абсолютно випадковим процесом, називається білим гауссівським шумом.

Енергетичний спектр білого гауссівського шуму

$$S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} k(\tau) e^{-i2\pi f\tau} d\tau = \frac{N_0}{2} = const, S_0(f) = N_0, \quad (1.43)$$

постійний при всіх частотах. Рівномірність спектра в дуже широкому діапазоні частот і визначає назву «білого шуму» за аналогією з білим світлом, що має у видимій частині рівномірний спектр.

Для «білого шуму» має місце фізично неправдоподібний результат: дисперсія (середня потужність) такого шуму  $\delta(\tau) = \infty$  й для нього не можна аналітично записати навіть одномірну щільність ймовірності. Цей результат пояснюється тим, що «білий шум» варто розглядати як математичну модель, тому що реальні процеси завжди мають енергетичний спектр, що убуває при дуже високих частотах, і, отже, мають кінцевий час кореляції  $\tau_k \neq 0$  й обмежену середню потужність.

«Білий шум» є корисною математичною ідеалізацією, яка застосовується в тих випадках, коли в межах амплітудно-частотної характеристики, зокрема радіотехнічної системи, енергетичний спектр зовнішнього реального шуму можна приблизно вважати постійним або, інакше, коли час кореляції шуму багато менше всіх постійних часу системи, на яку впливає шум.

У якості конкретних фізичних прикладів флуктуаційних шумів, які часто розглядають як моделі «білого шуму», можна вказати дробовий шум електронних приладів і тепловий шум резисторів.

На практиці часто зустрічаються задачі аналізу впливу шуму з досить широким плавним енергетичним спектром на порівняно інерційні («вузькосмугові») системи. З метою спрощення вирішення ряду подібних задач, не роблячи при цьому великої помилки, реальний широкосмуговий шум, що впливає, можна замінити на «еквівалентний» «білий шум».

Можна вказати наступну наближену умову й правило заміни реального процесу (шуму) на «білий шум». Нехай розглядається вплив на деяку систему з постійної часу  $\tau_c$  реального стаціонарного шуму з кореляційною функцією  $k_x(\tau) = \sigma_x^2 R_x(\tau)$ , яка характеризується досить широким спектром  $S_x(f)$  і, отже, малим, але кінцевим часом кореляції  $\tau_k \ll \tau_c$ . У цьому випадку реальний шум можна розглядати як «білий шум». За значення енергетичного спектра «еквівалентного» «білого шуму» можна взяти значення  $S_x(0) = S_x(f=0)$ , що дорівнює

$$\frac{N_0}{2} = S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} k(\tau) d\tau = 2 \int_0^{\infty} k(\tau) d\tau = 2\sigma_x^2 \tau_k. \quad (1.44)$$

Іноді діють навпаки: граничний перехід до «білого шуму» здійснюють не на початковій стадії аналізу, а в кінцевих результатах. При цьому, як моделі реальних процесів, що дозволяють найбільш просто здійснити такий перехід, часто розглядають стаціонарні випадкові процеси із двома видами кореляційних функцій

$$k_x(\tau) = \sigma_x^2 e^{-\alpha|\tau|}, k_x(\tau) = \sigma_x^2 \frac{\sin(\Delta\omega\tau/2)}{\Delta\omega\tau/2} \cos\omega_0\tau$$

Варто пам'ятати, що дельта-функція має розмірність, зворотну розмірності аргументу.

Для аналізу й синтезу сучасних цифрових систем, що описуються у дискретному часі, потрібне введення дискретного «білого шуму». Тоді приймається, що дискретний шум  $n_V$  формується з неперервного  $n(t)$  за



допомогою згладжування за елементарний інтервал часу  $\Delta = t_{v+1} - t_v, v = 1, 2, \dots, \text{й}$

$$n_v = \frac{1}{\Delta} \int_{t_v}^{t_v+\Delta} n(t) dt. \quad (1.45)$$

При цьому під дискретним «білим шумом» розуміється послідовність  $\{n_v\}$  незалежних гауссівських випадкових величин з нульовим математичним сподіванням  $M\{n_v\} = 0$  і однаковою дисперсією  $D_v = M\{n_v^2\} = \frac{N}{2\Delta} = D_\Delta$ . Всі значення дискретного білого шуму мають ту саму нормальну щільність ймовірності

$$f(n_v) = (2\pi D_\Delta)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{-n_v^2}{2D_\Delta}\right). \quad (1.46)$$

Отже, під «білим шумом» розуміють випадковий процес, спектральна щільність якого постійна при всіх частотах від  $-\infty$  до  $+\infty$ , тобто  $S(\omega) = N$  (рис.1.2,а).

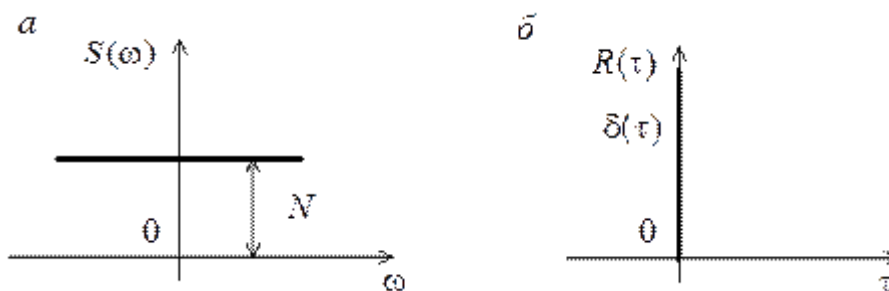


Рис. 1.2. Кореляційна функція

$$R(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty S(\omega) \cos \omega \tau d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty N \cos \omega \tau d\omega = N \delta(\tau). \quad (1.47)$$

Графік  $R(\tau)$  наведено на рис. 1.2,б.

**Приклад 1.5.** Для стаціонарного випадкового процесу з властивостями «білого шуму» в обмеженій смузі частот від  $-\omega_n$  до  $+\omega_n$  визначити дисперсію і кореляційну функцію. Маємо

$$D = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_n}^{+\omega_n} N \frac{2\omega_n}{2\pi} = \frac{\omega_n}{\pi}, R(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\omega_n} N \cos \omega \tau d\omega = \frac{N}{\pi \tau} \sin \omega_n \tau.$$

### 1.3.3. Стаціонарні дискретні випадкові процеси

Будемо розглядати стаціонарні ергодичні випадкові дискретні процеси  $x(n)$  як сукупність гратчастих реалізацій  $x_i(n)$ . Тут гратчаста реалізація  $x_i(n)$

розуміється як послідовність ординат, що збігаються з відповідними значеннями безперервної реалізації  $x_i(t)$  в дискретні моменти часу  $n = \frac{t}{T}$ , де  $T$  - період квантування (дискретизації).

За аналогією з безперервними системами вводяться статистичні характеристики імпульсних систем.

Основні характеристики стаціонарних випадкових процесів визначаються наступним чином:

Середнє значення (математичне сподівання)

$$M[x(n)] = \overline{x(n)} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N x(n) \quad (1.48)$$

де  $x(n)$  - реалізація дискретного процесу.

Дисперсія дискретного випадкового процесу

$$D(n) = D[x(n)] = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N x^2(n). \quad (1.49)$$

Кореляційна функція

$$R(n, m) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N x(n)x(n+m), \quad (1.50)$$

де  $m = 0, 1, 2, \dots$  - дискретні значення відносного часу.

При наявності двох випадкових процесів вводять взаємну кореляційну функцію.

Спектральна щільність

$$S^*(\bar{\omega}) = \sum_{N=-\infty}^N R(n, m) e^{-f\bar{\omega}n}, \quad (1.51)$$

де  $\bar{\omega} = \omega T$  - відносна частота.

Спектральна щільність  $S^*(\bar{\omega})$  дискретного випадкового процесу пов'язана зі спектральною щільністю  $S(\bar{\omega})$  відповідного безперервного випадкового процесу формулою:

$$S^*(\bar{\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} S(\bar{\omega} + 2\pi k). \quad (1.52)$$

Спектральна щільність і кореляційна функція пов'язані з дисперсією:

$$D = R(0) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} S^*(\bar{\omega}) d\bar{\omega} \quad (1.53)$$

Розрахунок імпульсних систем при випадкових впливах аналогічний розрахунку безперервних систем з урахуванням дискретних статистичних

характеристик. Найчастіше оцінюють середнє значення квадрата дискретної помилки. Якщо на вхід імпульсної системи надходять некорельовані стаціонарні корисний сигнал  $v(t)$  і завада  $f(t)$ , то спектральна щільність дискретної випадкової помилки

$$S_B^*(\bar{\omega}) = |\hat{O}_a^*(j\bar{\omega})|^2 S_v^*(\bar{\omega}) + |\hat{O}^*(j\omega)|^2 S_f^*(\bar{\omega}) \quad (1.54)$$

де  $\hat{O}_a^*(j\bar{\omega})$  та  $\hat{O}^*(j\omega)$  - частотні передавальні функції замкнутої імпульсної системи за корисним сигналом і за завадою, а  $S_v^*(\bar{\omega})$  і  $S_f^*(\bar{\omega})$  - дискретні спектральні щільності корисного сигналу і завади.

Середнє значення квадрата дискретної помилки

$$\overline{e^2(n)} = m_\sigma^2(n) + D_e, \quad (1.55)$$

де  $m_\sigma^2(n)$  - регулярна складова помилки, а  $D_e$  - дисперсія помилки.

#### 1.3.4. Випадковий ступінчастий сигнал та сигнал з періодичною складовою

У випадкового ступінчастого сигналу випадковими величинами є моменти стрибків і величини стрибків.

Кореляційна функція цього сигналу має вигляд (рис.1.3):

$$R_x(\tau) = D e^{-\alpha|\tau|} \quad (1.56)$$

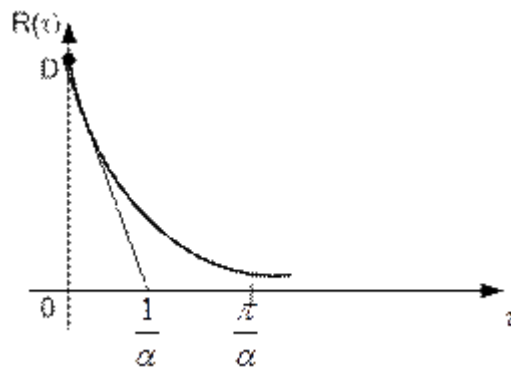


Рис.1.3.

Спектральна щільність має вигляд (рис.1.4):

$$S_x(\omega) = 2 \int_0^{-\infty} R_x(\tau) \cos(\omega\tau) d\tau = 2 \int_0^{+\infty} D e^{-\alpha|\tau|} \cos(\omega\tau) d\tau = \frac{2D\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} \quad (1.57)$$

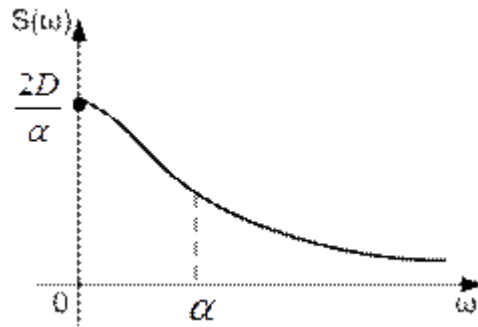


Рис.1.4.

З рис.1.4 видно, чим більше параметр  $\alpha$ , тим швидше зменшується кореляційна функція і тим ширше графік спектральної щільності. Ординати функції при збільшенні зменшуються. При розглянутій сигнал наближається до ідеального «білого шуму».

Часто випадковий сигнал містить періодичну складову (рис 1.5)

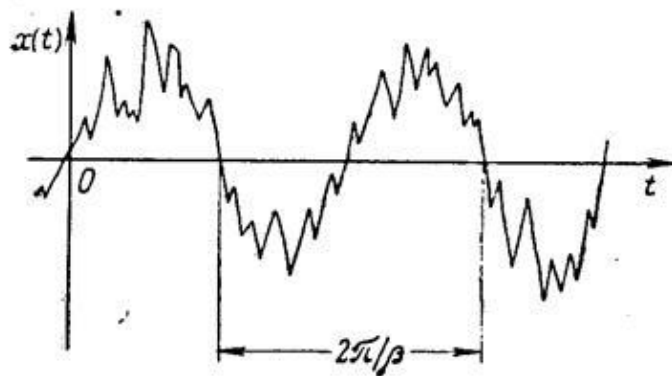


Рис. 1.5.

Такий сигнал має експоненціальну косинусну кореляційну функцію (рис.1.6):

$$R_x(\tau) = D e^{-\alpha|\tau|} \cos \beta \tau \quad (1.58)$$

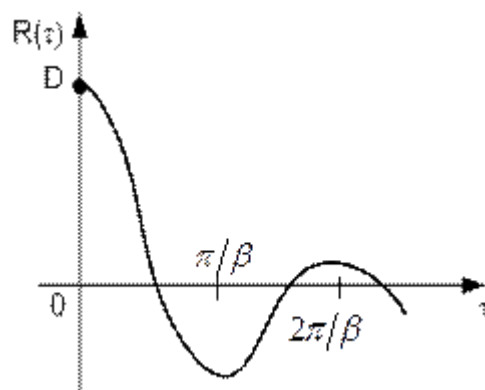


Рис.1.6.

Параметр  $\beta$  цієї функції відповідає середньому значенню «періоду» прихованої складової, а показник  $\alpha$  характеризує інтенсивність спаду експоненти. Якщо показник  $\alpha$  малий і близький до значення  $\frac{\beta}{2\pi}$ , що характеризує відносну інтенсивність інших випадкових складових, які накладені на періодичну складову. В такому випадку відносний рівень цих складових невеликий і змішаний сигнал близький до гармонічного.

Якщо показник  $\alpha$  великий і дорівнює  $(5 \div 10) \frac{\beta}{\pi}$ , то рівень випадкових складових порівнянний з "амплітудою" періодичної складової. При  $\alpha \geq 20 \frac{\beta}{\pi}$  кореляційна функція практично збігається з кореляційною функцією випадкового ступінчастого сигналу.

Випадковий сигнал, що має приховану періодичну складову, має спектральну щільність (рис.1.7):

$$\begin{aligned}
 S_x(\omega) &= 2 \int_0^{+\infty} R_x(\tau) \cos(\omega\tau) d\tau = \\
 &= 2 \int_0^{+\infty} D e^{-\alpha|\tau|} \cos(\beta\tau) \cos(\omega\tau) d\tau = \\
 &= \frac{D\alpha}{\alpha^2 + (\beta - \omega)^2} + \frac{D\alpha}{\alpha^2 + (\beta + \omega)^2} \quad (1.59)
 \end{aligned}$$

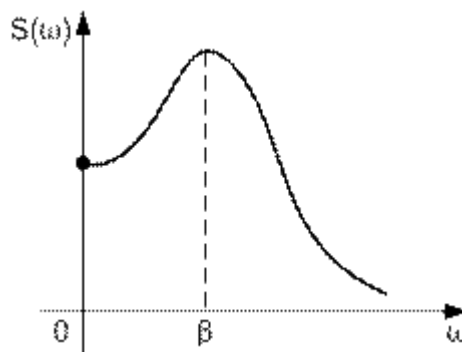


Рис.1.7.

Вищенаведена кореляційна функція має явно виражений пік при  $\omega = \beta$ .

### 1.3.5. Марковський випадковий процес (МВП).

Серед випадкових процесів особливе місце займають марковські випадкові процеси (МВП).

Розглянемо деяку фізичну систему  $S$ , в якій відбувається випадковий процес. З плином часу вона може під впливом випадкових факторів переходити з одного стану в інший.

**Визначення.** Випадковий процес називається процесом з дискретними станами, якщо множина всіх його можливих станів  $S_1, S_2, S_3, \dots, S_i, \dots$  є зліченною, а перехід з одного стану в інший відбувається стрибково, переходи можливі лише в певні моменти часу  $t_1, t_2, t_3, \dots$

Якщо переходи можливі в будь-який момент часу, тобто моменти переходу з одного стану в інший випадкові, то процес називається процесом з неперервним часом.

**Визначення.** Випадковий процес з дискретними станами називається марковським ВП (МВП), якщо для будь-якого моменту часу  $t_0$  умовна ймовірність кожного з станів системи  $S$  в майбутньому (тобто при  $t > t_0$ ) залежить лише від її стану в теперішній час (тобто при  $t = t_0$ ) і не залежить від того, коли і як система прийшла в цей стан (тобто від того, які були стани системи  $S$  в минулому  $t < t_0$ ).

Іншими словами, майбутній стан МВП залежить лише від теперішнього стану, і не залежить від минулих станів системи.

Марковський процес називають також процесом без післядії: майбутнє в ньому залежить від минулого лише через теперішнє, тобто ймовірність системи  $S$  потрапити в стан  $S_j$  в момент часу  $t_k (S(t_k) = s_j)$  залежить лише від стану  $S_i$ , в якому система знаходиться в момент часу  $t_{k-1} (S(t_{k-1}) = s_i)$ :

$$\begin{aligned} P\{S(t_k) = s_j | S(t_1) = x_1, S(t_2) = x_2, \dots, S(t_{k-i}) = s_i\} = \\ = P\{S(t_k) = s_j | S(t_{k-i}) = s_i\}, \end{aligned}$$

де  $x_1, x_2, \dots$  - це можливі стани системи  $\hat{S} = \{s_1, s_2, s_3, \dots, s_i, \dots, s_j, \dots, s_n\}$ .

Марковський процес є стохастичною математичною моделлю багатьох процесів у біології (розподіл епідемій, ріст популяцій), у фізиці (радіоактивний розпад), у теорії масового обслуговування. У теорії систем масового обслуговування множина станів системи визначається кількістю каналів (вузлів

обслуговування). Це можуть бути вузли обслуговування, кабінети лікарів, кількість кас в супермаркеті тощо. Переходи між станами системи  $S$  відбуваються під впливом вхідного потоку подій (тобто кількості заявок, пацієнтів, покупців тощо), які є найпростішими, тобто пуасонівськими. Детальніше про це у наступній лекції.

Випадкові процеси з дискретними станами зручно відобразити в формі так званого графа станів. У ньому стани системи  $\hat{S} = \{s_1, s_2, s_3, \dots, s_i, \dots, s_j, \dots, s_n\}$  зображаються в формі вершин графа, а можливі безпосередні переходи з стану в стан – орієнтованими дугами графа, що з'єднують відповідні вершини – стани.

Для описання ВП з дискретними станами використовують ймовірності станів системи  $S$ , тобто значення  $p_1(t), p_2(t), \dots, p_n(t)$ , де  $p_i(t) = P\{S(t) = s_i\}, i = \overline{1, n}$  - ймовірність того, що в момент часу  $t$  система знаходиться в стані  $s_i$ ,  $S(t)$  – випадковий стан системи  $S$  в момент часу  $t$ .

Очевидним є той факт, що для будь-якого моменту  $t$  сума ймовірностей всіх станів дорівнює 1 (як сума ймовірностей повної групи подій):

$$\sum_{i=1}^n p_i(t) = 1.$$

Нехай в деякій системі  $S$  відбувається СВП з дискретними станами  $s_1, s_2, s_3, \dots, s_i, \dots, s_n$  та дискретним часом, тобто перехід системи з одного стану в інший відбувається тільки в певні моменти часу  $t_0, t_1, t_2, \dots$ . Ці моменти називають кроками процесу (зазвичай, різниці сусідніх моментів спостережень  $t_i - t_{i-1}$  дорівнюють сталому числу – ширині кроку, що приймається за одиницю часу); початок процесу визначається моментом часу  $t_0$ .

Цей випадковий процес можна розглядати як послідовність (ланцюг) подій  $S(0), S(1), S(2), \dots$  (де  $S(0)$  – початковий стан системи, тобто перед першим кроком;  $S(1)$  – стан системи після 1-го кроку;  $S(2)$  – після 2-го кроку і т.д.). Тобто це послідовність подій виду  $\{S(k) = s_i\}, i = \overline{1, n}, k \geq 0$ .

**Визначення.** Марковський випадковий процес з дискретними станами та дискретним часом називають ланцюгом Маркова.

Ланцюг, в якому умовні ймовірності станів в майбутньому залежать лише від стану на даному, останньому кроці (і не залежать від попередніх), називають простим ланцюгом Маркова.

У даному учбовому посібнику будемо розглядати лише прості ланцюги Маркова. Основним завданням при дослідженні простих ланцюгів Маркова є обчислення ймовірностей станів системи:

$$p_i(k) = P\{S(k) = s_i\}, i = \overline{1, n}, k \geq 0,$$

де  $P\{S(k) = s_i\}$  – безумовна ймовірність того, що на  $k$ -му кроці система буде знаходитися у стані  $s_i$ .

Для обчислення безумовної ймовірності необхідно знати початковий розподіл ймовірностей  $p_1(0), p_2(0), \dots, p_n(0)$ , тобто ймовірності станів  $p_i(0)$  в момент початку процесу  $t_0 = 0$  та перехідні ймовірності  $p_{ij}(k)$  – марківського ланцюга на  $k$ -му кроці.

**Визначення.** Перехідною ймовірністю  $p_{ij}(k)$  називають умовну ймовірність переходу системи  $S$  на  $k$ -му кроці в стан  $s_j$ , якщо відомо, що на попередньому  $(k - 1)$  кроці вона була в стані  $s_i$ , тобто

$$p_{ij}(k) = P\{S(k) = s_j | S(k - 1) = s_i\}, i, j = \overline{1, n}$$

тут перший індекс визначає номер попереднього, а другий – номер наступного стану.

**Визначення.** Ланцюг Маркова називається однорідним, якщо  $p_{ij}(k) = p_{ij}$ , тобто умовні ймовірності  $p_{ij}(k)$  не залежать від номера спостереження.

Далі розглядатимемо лише однорідні ланцюги, що можуть бути задані за допомогою вектору  $(p_1(0), p_2(0), \dots, p_n(0))$  – ймовірностей станів у початковий момент часу  $t_0 = 0$  та матриці

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{n1} & p_{n2} & \dots & p_{nn} \end{pmatrix},$$

що називаються матрицею перехідних ймовірностей.



Елементи матриці  $P$  мають такі властивості:

1. Усі її елементи невід'ємні  $p_{ij} \geq 0$ .

2. Сума ймовірностей кожного рядку перехідної матриці дорівнює одиниці (як ймовірності переходу з одного стану  $s_i$  в будь-який можливий стан  $s_j$ — утворюють повну групу подій):  $\sum_{j=1}^n p_{ij} = 1, i = \overline{1, n}$ .

**Твердження.** Для матриці переходу ланцюга Маркова за  $n$  кроків, має місце формула Колмогорова-Чепмена:  $P(n) = P^n$

**Приклад 1.5.** Задано матрицю перехідних ймовірностей

$$P = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.4 & 0.5 \\ 0.3 & 0.6 & 0.1 \\ 0.7 & 0.2 & 0.1 \end{pmatrix}$$

Знайти матриці перехідних ймовірностей за два кроки, за чотири кроки.

За формулою  $P(2) = P^2$  маємо:

$$P(2) = P^2 = P * P = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.4 & 0.5 \\ 0.3 & 0.6 & 0.1 \\ 0.7 & 0.2 & 0.1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0.1 & 0.4 & 0.5 \\ 0.3 & 0.6 & 0.1 \\ 0.7 & 0.2 & 0.1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.48 & 0.38 & 0.14 \\ 0.28 & 0.50 & 0.22 \\ 0.20 & 0.42 & 0.38 \end{pmatrix}.$$

Відповідно для переходу за 4 кроки маємо:

$$P(4) = P^4 = P^2 * P^2 = P(2) * P(2) = \begin{pmatrix} 0.48 & 0.38 & 0.14 \\ 0.28 & 0.50 & 0.22 \\ 0.20 & 0.42 & 0.38 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0.48 & 0.38 & 0.14 \\ 0.28 & 0.50 & 0.22 \\ 0.20 & 0.42 & 0.38 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.3648 & 0.4312 & 0.2040 \\ 0.3184 & 0.4488 & 0.2328 \\ 0.2896 & 0.4456 & 0.2648 \end{pmatrix}.$$

### Запитання для самоперевірки

1. Яка функція називається випадковою?
2. Що таке реалізація випадкового процесу?
3. Назвіть основні статистичні характеристики випадкового процесу.
4. Як визначається математичне сподівання випадкового процесу?
5. Що таке середнє значення квадрата випадкового процесу?
6. Дайте визначення дисперсії випадкового процесу?
7. Дайте визначення кореляційної функції випадкового процесу?

8. Як визначаються математичне сподівання та кореляційна функція по реалізаціям випадкового процесу?
9. Які випадкові процеси називають ергодичними?
10. Наведіть основні властивості кореляційних функцій.
11. Як пов'язані між собою дисперсія стаціонарного випадкового процесу і кореляційна функція?
12. Що таке спектральна щільність? Поясніть її фізичний зміст.
13. Як пов'язані між дисперсія  $D_x$  і спектральна щільність  $S_x(\omega)$  випадкового процесу?
14. Наведіть основні властивості спектральної щільності.
15. Дайте визначення одновірної і двовірної функції розподілу, а також одновірної і двовірної щільності ймовірності?
16. Дайте визначення стаціонарний випадковий процес?
17. Дайте визначення стаціонарному дискретному випадковому процесу?
18. Дайте визначення випадковому процесу типу «білий шум»?
19. Охарактеризуйте випадковий ступінчастий сигнал та випадковий сигнал з періодичною складовою
20. Які випадкові процеси називаються марковськими?

## Розділ 2. Аналіз лінійних САУ з випадковими сигналами

### 2.1. Основні поняття і співвідношення

Розглянемо стійку стаціонарну лінійну САУ з передавальною функцією  $W(s)$  й імпульсною перехідною функцією  $w(t)$ . Припустимо, що на вхід цієї системи надходить стаціонарний випадковий процес  $X(t)$  із середнім значенням, що дорівнює нулю, кореляційною функцією  $R_x(\tau)$  і спектральною щільністю  $S_x(\omega)$ . Усталений вихідний сигнал  $Y(t)$  також буде стаціонарним випадковим процесом, середнє значення якого дорівнює нулю, однак, його статистичні характеристики  $R_y(\tau)$  і  $S_y(\omega)$  будуть відрізнятися від статистичних характеристик вхідного сигналу.

Зв'язок між кореляційними функціями вхідного і вихідного сигналів можна визначити за допомогою інтеграла Дюамеля:

$$R_{yx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T y(t)x(t - \tau)dt \quad (2.1)$$

Для моменту часу  $(t - \lambda)$  отримуємо:

$$\begin{aligned} R_{yx}(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t)x(t - \tau)dt \int_{-\infty}^{\infty} w(\lambda)x(t - \tau)d\lambda = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} w(\lambda)d\lambda \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t - \tau)x(t - \lambda)dt = \int_{-\infty}^{\infty} w(\lambda)R_x(t - \lambda)d\lambda \end{aligned} \quad (2.2)$$

де  $\lambda$  - нове позначення незалежної змінної інтегрування.

Кореляційна функція стаціонарного випадкового процесу  $Y(t)$  дорівнює:

$$R_y(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T y(t)y(t + \tau)dt. \quad (2.3)$$

Підставивши до (2.3) вирази (2.1) і (2.2), після перетворень отримаємо шукану залежність:

$$R_y(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} w(\lambda)d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} w(\eta)R_x(\tau + \lambda - \eta)d\eta. \quad (2.4)$$

де  $\eta$  - позначення незалежної змінної інтегрування

Вираз (2.4) дозволяє за відомою кореляційною функцією  $R_x(\tau)$  випадкового процесу на вході системи і відомою імпульсною перехідною функцією  $w(t)$  системи знайти кореляційну функцію  $R_y(\tau)$  випадкового процесу на виході системи.

На підставі (2.4) з урахуванням того, що зображенням Фур'є імпульсної перехідної функції є комплексна передавальна функція, тобто  $F\{w(t)\} = W(j\omega)$ , можна визначити зв'язок між спектральними щільностями вхідного і вихідного випадкових процесів:

$$S_y(\omega) = |W(j\omega)|^2 S_x(\omega). \quad (2.5)$$

Таким чином, спектральна щільність стаціонарного випадкового процесу на виході лінійної системи дорівнює спектральній щільності випадкового процесу на вході системи, помноженій на квадрат модуля комплексної передавальної функції цієї системи.

За виразами (2.4) і (2.5) можна розв'язувати не тільки задачу аналізу (визначення характеристик випадкової функції на виході системи), а й задачу синтезу, тобто вибирати параметри динамічної системи таким чином, щоб отримати  $R_y(\tau)$  і  $S_y(\omega)$  близькими до заданих.

Розглянемо два важливі поняття при проходженні випадкового сигналу крізь лінійну систему.

**Статистичне диференціювання.** Під час надходження випадкового сигналу до пристрою, що ідеально диференціює, з передавальною функцією  $W(s) = s$  маємо:

$$|W(j\omega)|^2 = |j\omega|^2 = \omega^2$$

Тоді спектральна щільність вихідної величини (похідної від вхідної величини) буде:

$$S_y(\omega) = \omega^2 S_x(\omega). \quad (2.6)$$

У разі подвійного диференціювання  $S_x(\omega)$  помножується на  $\omega^4$  і так далі.

Таким чином, чим більш високі частоти містить спектр випадкового сигналу, тим сильніше вони підсилюються. Це завжди необхідно мати на увазі під час уведення до системи коректувального пристрою, що диференціює. У разі значного рівня випадкових завад уведення такої ланки може не привести до поліпшення динамічних властивостей, а навіть погіршити їх.

**Статистичне інтегрування.** Під час надходження випадкового сигналу до ідеального інтегрувального пристрою з передавальною функцією  $W(s) = 1/s$  маємо:  $|W(j\omega)|^2 = \left| \frac{1}{(j\omega)} \right|^2 = \frac{1}{\omega^2}$ .

Тоді спектральна щільність вихідної величини (інтегралу від вхідної величини) буде:

$$S_y(\omega) = \frac{S_x(\omega)}{\omega^2}. \quad (2.7)$$

У разі подвійного інтегрування  $S_x(\omega)$  ділиться на  $\omega^4$  і так далі.

У даному випадку високі частоти послаблюються (відфільтровуються) інтегрувальною ланкою, на виході якої отримуємо більш згладжений сигнал.

## 2.2. Опис траєкторій руху САУ під впливом випадкових процесів

Вхідні сигнали САУ часто можуть бути представлені за допомогою типових детермінованих впливів. Наприклад, рух об'єкта з відомою постійною швидкістю визначається рівнянням  $g(t) = g_0 + vt$ . Однак зміна вхідних сигналів в часі не завжди може бути задано за допомогою відомих детермінованих функцій. У багатьох випадках для більш реалістичного опису, наприклад, траєкторії руху літака або корабля, необхідно використовувати випадкові процеси. При цьому відома детермінована складова вхідного сигналу може розглядатися як математичне сподівання  $m(t)$  випадкового процесу:

$$g(t) = m(t) + g_0(t) \quad (2.8)$$

где  $g_0(t)$  – стаціонарний випадковий процес з нульовим математичним очікуванням і кореляційною функцією  $R_g(\tau)$ .

Таким чином, другий доданок  $g_0(t)$  описує невідомий нам до експерименту вхідний сигнал САУ у вигляді реалізацій випадкового процесу. Кореляційна функція цього випадкового процесу дозволяє задати дисперсію  $\sigma_g^2 = R_g(\tau = 0)$  і «середню швидкість зміни вхідного сигналу, пов'язану з інтервалом кореляції процесу  $g_0(t)$ . На практиці наближені значення  $m(t)$  і  $R_g(\tau)$  можна отримати експериментально, якщо в розпорядженні розробника системи є велике число  $N$

записів  $g^{(k)}(t), k = 1, 2, \dots, N$  реальних вхідних сигналів. Математичне сподівання в цьому випадку оцінюється середнім арифметичним

$$m^*(t) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N g^{(k)}(t), \quad (2.9)$$

а для оцінки кореляційної функції використовується наступна формула:

$$R_g^*(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N g^{(k)}(t)g^{(k)}(t + \tau). \quad (2.10)$$

Процес  $g_0(t)$  можна вважати стаціонарним, якщо результати розрахунків за цією формулою мало залежать від вибору початку відліку часу  $t$ .

Нехай вхідний сигнал САУ заданий у вигляді суми  $g(t) = m(t) + g_0(t)$ . Для знаходження динамічних помилок, що виникають в лінійній системі управління, можна скористатися принципом суперпозиції. Величина сталої динамічної помилки за рахунок детермінованої складової зміни вхідного сигналу знаходиться за відомою формулою:

$$\varepsilon_{ст} = \lim_{p \rightarrow 0} p\varepsilon(p), \quad (2.10)$$

де  $\varepsilon(p) = H_\tau(p)m(p)$ ;  $H_\tau(p) = \frac{1}{1+H(p)}$  – передавальна функція за помилкою;  $m(p)$  – зображення  $m(t)$  по Лапласу.

Випадкова складова характеризується величиною дисперсії динамічної помилки:

$$\sigma_\tau^2 = R_\tau(\tau = 0). \quad (2.11)$$

Для знаходження кореляційної функції  $R_\tau(\tau)$  випадкової складової динамічної помилки спочатку знаходять енергетичний спектр  $G_g(\omega)$  процесу  $g_0(t)$  як перетворення Фур'є  $R_g(\tau)$ . Після цього легко знаходиться енергетичний спектр  $G_\tau(\omega) = |H_\tau(j\omega)|^2 G_g(\omega)$  і кореляційна функція динамічної помилки

$$R_\tau(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_\tau(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega. \quad (2.12)$$

Сумарний вплив детермінованого  $m(t)$  і випадкового  $g_0(t)$  вхідного сигналу  $g(t)$  може бути оцінено середнім квадратом динамічної помилки

$$M\{(g(t) - x(g))^2\} = \varepsilon_{уст}^2 + \sigma_\tau^2. \quad (2.13)$$

**Приклад 2.1.** Нехай на САУ (рис. 2.1) з одним інтегратором ( $H(p) = \frac{k}{p}$ ) поступає вхідний сигнал  $g(t) = vt + g_0(t)$ , де  $g_0(t)$  – випадковий процес з кореляційною функцією  $R_g(\tau) = \sigma_g^2 e^{-a|\tau|}$ . Визначимо у відсутності завад ( $n(t) \equiv 0$ ) середній квадрат динамічної помилки такої системи управління.

Спочатку знайдемо усталену помилку за рахунок детермінованого доданку  $m(t) = vt$  вхідного впливу. Для системи з астатизмом першого порядку  $\varepsilon_{уст} = \frac{v}{k}$ .

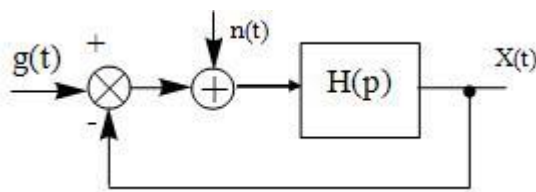


Рис.2.1.

Енергетичний спектр  $G_g(\omega)$  випадкової складової  $g_0(t)$  вхідного впливу знаходиться як перетворення Фурье кореляційної функції:

$$G_g(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_g(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \frac{2a\sigma_g^2}{\omega^2 + a^2}.$$

Зауважимо, що  $T_k = \frac{1}{a}$  є інтервалом кореляції випадкового процесу  $g_0(t)$  на рівні  $\frac{1}{e}$ . З іншого боку, параметр  $a$  дорівнює ширині енергетичного спектру випадкового процесу  $g_0(t)$  на рівні 0.5, тобто  $\frac{G_g(\omega=a)}{G_g(\omega=0)} = 0.5$ .

Після знаходження енергетичного спектра випадкової складової динамічної помилки

$$G_\tau(\omega) = |H_\tau(j\omega)|^2 G_g(\omega) = \left| \frac{1}{1 + H(j\omega)} \right|^2 G_g(\omega) = \frac{\omega^2}{(\omega^2 + k^2)} \frac{2a\sigma_g^2}{(\omega^2 + a^2)}$$

знаходимо дисперсію динамічної помилки

$$\sigma_\tau^2 = R_\tau(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_\tau(\omega) d\omega = \frac{a\sigma_g^2}{a+k}$$

Середній квадрат динамічної помилки з урахуванням детермінованої і випадкової складових визначається як сума

$$\varepsilon_{уст}^2 + \sigma_\tau^2 = \frac{v^2}{k^2} + \frac{a\sigma_g^2}{a+k}.$$

З отриманого виразу випливає, що при заданих параметрах  $a, v, \sigma_g^2$  вхідного сигналу зменшення динамічної помилки досягається при збільшенні коефіцієнта  $k$  посилення ланки САУ.

### 2.3. Аналіз САУ зі стаціонарним випадковим процесом

Під дією стаціонарного випадкового процесу на лінійну сталу ланку на виході ланки виникає також стаціонарний випадковий процес, який можна розглядати як перетворений вхідний сигнал. Перетворення вхідного сигналу проявляється в зміні його статистичних характеристик: математичного очікування, дисперсії, кореляційної функції та спектральної щільності. Якщо вхідний сигнал-центрований, то і вихідний сигнал також буде центрованим. Центровані сигнали позначаються зверху індексом у вигляді кружечка.

Для розгляду законів перетворення випадкового сигналу вводяться характеристики, що оцінюють зв'язок між випадковими сигналами: взаємно-кореляційна функція і взаємна спектральна щільність.

Розглянемо зв'язок між статистичними характеристиками двох стаціонарних випадкових процесів  $x(t)$  і  $y(t)$ , які є вхідним і вихідним сигналами лінійної динамічної системи з передавальною функцією  $W(p)$  (рис.2.2).

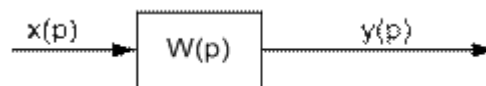


Рис. 2.2

Найбільш просто визначається зв'язок між математичними очікуваннями цих сигналів. Так як у стаціонарних сигналів математичні очікування є постійними величинами, то зв'язок між ними визначається рівнянням статистики ланки:

$$m_y = W(0)m_x \quad (2.14)$$

Перетворення вхідного сигналу  $x(t)$  у вихідний сигнал  $y(t)$  можна розглядати в тимчасовій і частотній областях.

Вихідний сигнал  $y(t)$  пов'язаний з вхідним сигналом  $x(t)$ :

$$y(t) = \int_0^{\infty} x(t - \tau_1)\omega(\tau_1)d\tau_1, \quad \tau_1 > 0, \quad (2.15)$$



де  $\omega(\tau_1)$  - імпульсна перехідна характеристика ланки,  $\tau_1$  - змінна інтегрування.

Визначимо взаємно-кореляційну функцію сигналів  $x(t)$  і  $y(t)$ :

$$\begin{aligned} R_{xy}(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t)y(t + \tau)dt = & (2.16) \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) \left( \int_0^\infty x(t - \tau_1)\omega(\tau_1)d\tau_1 \right) dt = \\ &= \int_0^\infty \left( \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t)x(t - \tau_1)dt \right) \omega(\tau_1)d\tau_1 = \int_0^\infty R_x(t - \tau_1)\omega(\tau_1)d\tau_1 \end{aligned}$$

Таким чином, взаємно-кореляційна функція сигналів  $x(t)$  і  $y(t)$  визначається по формулі:

$$R_{xy}(\tau) = \int_0^\infty R_x(\tau - \tau_1)\omega(\tau_1)d\tau_1 \quad (2.17)$$

Так як інтеграл (2.17) має такий же вигляд, як і (2.15), то функцію  $R_{xy}(\tau)$  можна розглядати як реакцію лінійної системи на вплив, що має форму кореляційної функції  $R_x(\tau)$ .

Визначимо кореляційну функцію  $R_y(\tau)$ :

$$\begin{aligned} R_y(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T y(t)y(t + \tau)dt = & (2.18) \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T \left\{ \int_0^\infty x(t - \tau_1)\omega(\tau_1)d\tau_1 \right\} \left\{ \int_0^\infty x(t + \tau - \tau_2)\omega(\tau_2)d\tau_2 \right\} dt = \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty \left\{ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t - \tau_1)x(t + \tau - \tau_2)dt \right\} \omega(\tau_1)d\tau_1 d\tau_2 = \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty R_x(\tau + \tau_1 - \tau_2)\omega(\tau_1)\omega(\tau_2)d\tau_1 d\tau_2 \end{aligned}$$

Таким чином, кореляційна функція вихідного сигналу  $y(t)$  визначається за формулою:

$$R_y(\tau) = \int_0^\infty \int_0^\infty R_x(\tau + \tau_1 - \tau_2)\omega(\tau_1)\omega(\tau_2)d\tau_1 d\tau_2 \quad (2.19)$$

Вираз (2.19) показує, що кореляційна функція вихідного сигналу може бути отримана дворазовим взяттям інтеграла згортки від кореляційної функції  $R_x(\tau)$  вхідного. Таким чином, перетворення лінійної системи випадкового вхідного сигналу в випадковий вихідний сигнал пов'язано з

кореляційною і взаємно-кореляційної функціями і представлено у вигляді схеми (рис. 2.3).

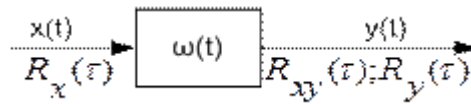


Рис.2.3.

Знайдемо зв'язок між спектральними щільностями сигналів  $x(t)$  і  $y(t)$

$$S_{xy}(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{xy}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_0^{\infty} R_x(\tau - \tau_1) \omega(\tau_1) d\tau_1 \right\} e^{-j\omega\tau} d\tau = \\ = \int_0^{\infty} \omega(\tau_1) e^{-j\omega\tau_1} d\tau_1 \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau - \tau_1) e^{-j\omega(\tau - \tau_1)} d\tau \quad (2.20)$$

Перший інтеграл являє собою передавальну функцію в частотній області  $W(j\omega)$ , а другий спектральну щільність вхідного сигналу. Таким чином, взаємна спектральна щільність вхідного і вихідного сигналів визначається:

$$S_{xy}(j\omega) = W(j\omega)S_x(\omega) \quad (2.21)$$

або

$$S_{yx}(j\omega) = W(-j\omega)S_x(\omega) \quad (2.22)$$

Для спектральної щільності вихідного сигналу справедливо наступне:

(2.23)

$$S_y(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_y(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} R_x(\tau + \tau_1 - \tau_2) \omega(\tau_1) \omega(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \right\} e^{-j\omega\tau} d\tau = \\ = \int_0^{\infty} \omega(\tau_1) e^{-j\omega\tau_1} d\tau_1 \int_0^{\infty} \omega(\tau_2) e^{-j\omega\tau_2} d\tau_2 \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau + \tau_1 - \tau_2) e^{-j\omega(\tau + \tau_1 - \tau_2)} d\tau$$

Замінюючи перший і другий інтеграли функціями  $W(j\omega)$  і  $W(-j\omega)$ , а третій спектральної щільністю  $S_x(\omega)$ , отримуємо

$$S_y(\omega) = W(j\omega)W(-j\omega)S_x(\omega) \quad (2.24)$$

або

$$S_y(\omega) = |W(j\omega)|^2 S_x(\omega) \quad (2.25)$$

Вираз (2.25) показує, що спектральна щільність вихідного сигналу дорівнює спектральній щільності вхідного сигналу, помноженої на квадрат амплітудної частотної характеристики системи. Фазова характеристика системи не впливає на спектральну щільність вихідного сигналу. Таким чином, перетворення лінійної системи випадкового вхідного сигналу в випадковий вихідний сигнал у частотній області пов'язано з спектральними та взаємною спектральною щільності і може бути представлено у вигляді схеми (рис. 2.4).

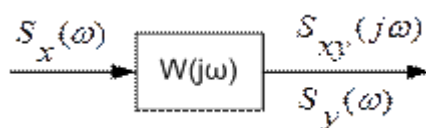


Рис. 2.4.

Дисперсія вихідного сигналу  $y(t)$  може бути визначена за формулою:

$$D_y = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_y(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |W(j\omega)|^2 S_x(\omega) d\omega \quad (2.26)$$

**Приклад 2.2.** Обчислити дисперсію на виході аперіодичної ланки, якщо на вході діє білий шум з обмеженою спектральною щільністю.

Дисперсія вихідного сигналу згідно (2.25) має вигляд:

$$\begin{aligned} D_y &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |W(j\omega)|^2 S_x(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{K}{1+j\omega T} \right|^2 S_0 d\omega \approx \\ &\approx \frac{S_0}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{K^2}{1+\omega^2 T^2} d\omega = \frac{S_0 K^2}{\pi T} \arctg \omega T \Big|_0^{\infty} = \frac{S_0 K^2}{2T} \end{aligned}$$

З отриманого виразу видно, що  $D_y$  тим менше, чим менше інтенсивність  $S_0$  вхідного сигналу і чим більше постійна часу  $T$ .

Розглянемо наступну САУ (рис.2.5)

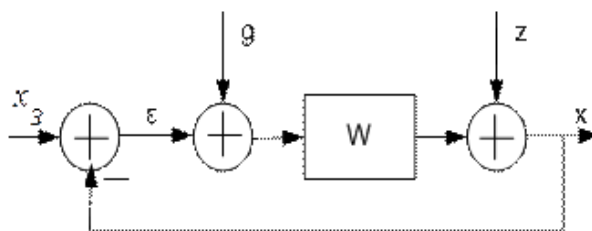


Рис. 2.5.

На систему діють випадкові обурення  $g$  і  $z$  з відомими спектральними щільностями  $S_g(\omega)$  і  $S_z(\omega)$ . Заданий вплив  $x_3$  також є випадковим сигналом зі спектральною щільністю  $S_x$ . Нехай всі три впливи - центровані сигнали. Тоді і сигнал помилки  $\varepsilon$  теж буде центрованим. Якщо зовнішні впливи не корельовані між собою, то сигнал помилки, що виникає в системі, може розглядатися як сума трьох незалежних складових (рис.2.6):

$$\varepsilon = \varepsilon_x + \varepsilon_g + \varepsilon_z \quad (2.27)$$

Складова  $\varepsilon_x$  обумовлена неточним відтворенням задає впливу, а складові  $\varepsilon_g$  і  $\varepsilon_z$  - неповним придушенням збурень  $g$  і  $z$ . Відповідно дисперсія сигналу помилки буде визначатися як:

$$D_\varepsilon = D_x + D_g + D_z \quad (2.27)$$

Дисперсія випадкового сигналу згідно (2.25) залежить від амплітудної

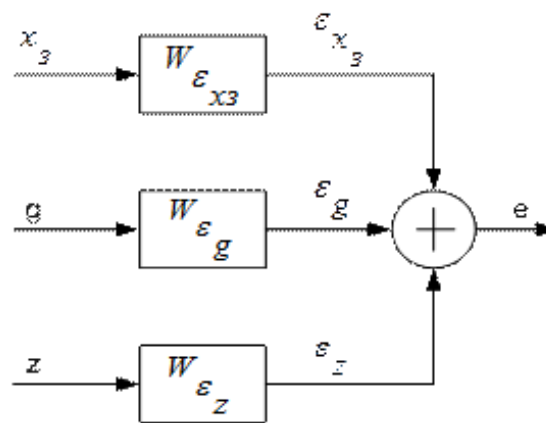


Рис. 2.6.

частотної характеристики  $|W(j\omega)|$ , яка визначається на основі передавальної функції  $W(p)$ .

Передавальні функції  $W_{\varepsilon x}(p) = \frac{\varepsilon}{x_3}$ ,  $W_{\varepsilon g}(p) = \frac{\varepsilon}{g}$ ,  $W_{\varepsilon z}(p) = \frac{\varepsilon}{z}$  можуть бути обчислені за схемами (рис 2.7) и (рис 2.8):

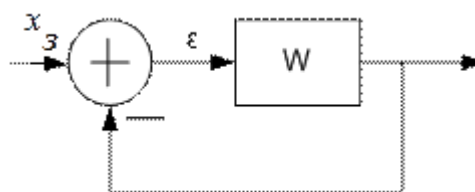


Рис. 2.7

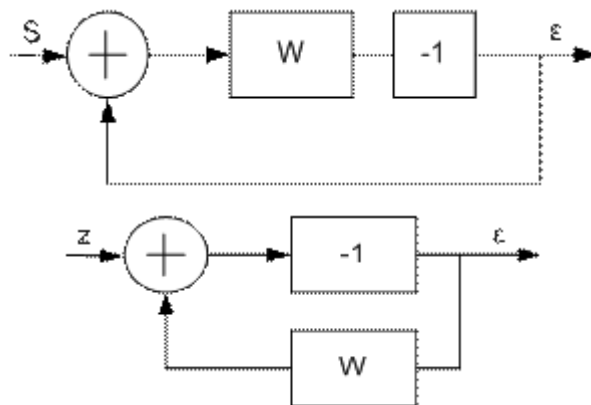


Рис. 2.8

$$W_{\varepsilon x}(p) = \frac{\varepsilon}{x_3} = \frac{1}{1+W} \quad (2.28)$$

$$W_{\varepsilon g}(p) = \frac{\varepsilon}{g} = \frac{-W}{1+W} \quad (2.29)$$

$$W_{\varepsilon z}(p) = \frac{\varepsilon}{z} = \frac{-1}{1+W} \quad (2.30)$$

Кожна із дисперсій  $D_{\varepsilon x}, D_{\varepsilon g}, D_{\varepsilon z}$  визначається за формулами:

$$D_{\varepsilon x} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |W_{\varepsilon x}(j\omega)|^2 S_x(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{1}{1+W(j\omega)} \right|^2 S_x(\omega) d\omega \quad (2.31)$$

$$D_{\varepsilon g} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |W_{\varepsilon g}(j\omega)|^2 S_g(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{-W(j\omega)}{1+W(j\omega)} \right|^2 S_g(\omega) d\omega \quad (2.32)$$

$$D_{\varepsilon z} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |W_{\varepsilon z}(j\omega)|^2 S_z(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{-1}{1+W(j\omega)} \right|^2 S_z(\omega) d\omega \quad (2.33)$$

При підстановці у формули (2.31)-(2.33) конкретних значень  $W(j\omega)$  і  $S(\omega)$  виходять досить складні вирази, інтегрування яких звичайними методами важко. Тому використовують наступний прийом. Підінтегральний вираз представляють в типовій формі - у вигляді відносини двох поліномів від змінної  $\omega$ :

$$D_g = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G(\omega)}{|H(j\omega)|^2} d\omega \quad (2.34)$$

де

$$\begin{aligned} H(j\omega) &= d_0(j\omega)^n + d_1(j\omega)^{n-1} + \dots + d_n \\ G(j\omega) &= c_0(\omega)^{2(n-1)} + c_1(\omega)^{2(n-2)} + \dots + c_{n-1} \end{aligned} \quad (2.35)$$

Поліном  $G(\omega)$  завжди має ступінь нижче  $2n$ , і містить тільки парні ступеня. Якщо в чисельнику виявляться непарні ступені, їх можна відкинути.

У поліномі  $H(j\omega)$  у вигляді співмножника входить характеристичне рівняння замкнутої системи. Тому при наближенні системи до межі стійкості інтеграл (2.34) різко зростає.

Інтеграли виду (2.34) для різних ступенів  $n$  обчислені заздалегідь і наведені в довідниках з теорії управління. Для ступенів  $n \leq 4$  інтеграли рівні:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{для } n = 1 \\ D_z = \frac{c_0}{2d_0d_1} \\ \text{для } n = 2 \\ D_g = \frac{d_2c_0 + d_0c_1}{2d_0d_1d_2} \\ \text{для } n = 3 \\ D_z = \frac{d_2d_3c_0 + d_0d_3c_1 + d_0d_1c_2}{2d_0d_2(d_1d_2 - d_0d_3)} \\ \text{для } n = 4 \\ D_g = \frac{c_0d_4(d_2d_3 - d_1d_4) + d_0d_3d_4c_1 + d_0d_1d_4c_2 + d_0c_3(d_1d_2 - d_0d_3)}{2d_0d_4(d_1d_2d_3 - d_0d_3^2 - d_1^2d_4)} \end{array} \right. \quad (2.36)$$

Представлення інтегралів (2.31)-(2.33) в формі (2.34) можливі практично для будь-якої реальної системи, що не містить запізнювання. Отримавши таким чином аналітичне значення дисперсії помилки, отримуємо функцію від параметрів системи:

$$D_\tau = f(k_1, T_1), \quad (2.37)$$

де  $k_1, T_1$  - параметри системи. Мінімізуючи вираз (2.37) по параметрам  $k_1$  і  $T_1$ , можна визначити їх оптимальні значення.

**Приклад 2.3.** Визначити оптимальне значення передавального коефіцієнта з передавальною функцією  $W(p) = \frac{k}{p}$ . На вході системи діє заданий вплив  $x_3$  зі спектральною щільністю  $S_x(\omega) = \frac{2D\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}$ . На систему діє обурення  $g$  у вигляді білого шуму з обмеженою спектральною щільністю  $S_g(\omega) = S_{g_0}$  при  $|\omega| \leq \omega_\Pi$ , де  $\omega_\Pi$  - частота смуги пропускання САУ. Зовнішній вплив  $z$  відсутній.

Таким чином, дисперсія сигналу помилки визначається:

$$D_z = D_x + D_g$$

Дисперсія, обумовлена неточним відтворенням заданого впливу, має вигляд:

$$D_x = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{1}{1+W(j\omega)} \right|^2 S_x(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{1}{1+\frac{k}{j\omega}} \right|^2 \frac{2D\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2D\alpha |j\omega|^2}{|\alpha + j\omega|^2 |k + j\omega|^2} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2D\alpha |j\omega|^2}{|(j\omega)^2 + (\alpha + k)j\omega + \alpha k|^2} d\omega$$

Порівнюючи вираз з типовою формою запису інтеграла (2.34), можна отримати:

$$n = 2, d_0 = 1, d_1 = \alpha + k, d_2 = \alpha k, c_0 = 2D\alpha, c_1 = 0.$$

Остаточно дисперсія має вигляд:

$$D_z = \frac{d_0 c_1 + d_2 c_0}{2d_0 d_1 d_2} = \frac{d\alpha}{\alpha + k}$$

Звідки неважко помітити, що чим більше коефіцієнт  $k$ , тим менше дисперсія  $D_z$ , тобто тим точніше система відтворює на виході задає вплив.

Дисперсія, обумовлена неповною компенсацією обурення  $g$

$$D_g = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |W_\varepsilon(j\omega)|^2 S_g(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{k/j\omega}{1 + k/j\omega} \right|^2 S_{g0} d\omega \approx$$

$$\approx \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{g0} \frac{k^2}{|k + j\omega|^2} d\omega$$

У цього інтеграла:  $n = 1, d_0 = 1, d_1 = k, c_0 = S_{g0} k^2$ .

Остаточно дисперсія має вигляд:

$$D_g = \frac{c_0}{2d_0 d_1} = \frac{S_{g0} k}{2}$$

Чим більше коефіцієнт  $k$ , тим більше помилка через проходження обурення  $g$  на вихід системи. Сумарна дисперсія сигналу помилки:

$$D_\Sigma = D_x + D_g = \frac{d\alpha}{\alpha + k} + \frac{S_{g0} k}{2}$$

Оптимальне значення коефіцієнта посилення  $k$  знайдемо з умови:

$$\frac{dD_\Sigma}{dk} = -\frac{D\alpha}{(\alpha + k)^2} + \frac{S_{g0}}{2} = 0$$

Звідси маємо:

$$k_{\text{опт}} = \sqrt{\frac{2D\alpha}{S_{g0}}} - \alpha.$$

Оптимальне значення передавального коефіцієнта системи залежить від співвідношення рівнів заданого впливу і впливу, що збурює.

## 2.4. Дія завади на замкнуту САУ

Розглянемо вплив завади  $n(t)$  на замкнуту лінійну систему управління (рис. 2.9). Будемо припускати, що нам відомий енергетичний спектр  $G_n(\omega)$  завади.

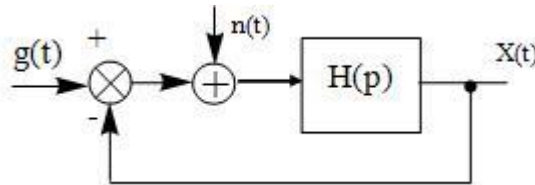


Рис. 2.9.

Знайдемо дисперсію помилки, що виникає при дії завади  $n(t)$ .

Для цього спочатку визначимо енергетичний спектр на виході системи

$$G_{\text{вих}} = |W(p)|^2 G_n(\omega),$$

де  $W(p) = \frac{H(p)}{1+H(p)}$  – передавальна функція замкнутої системи управління. Після цього за допомогою зворотного перетворення Фур'є можна знайти кореляційну функцію завади на виході системи:

$$R_{\text{вих}}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_{\text{вих}}(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega.$$

Нарешті, враховуючи, що дисперсія  $\sigma_{\text{вих}}^2 = R_{\text{вих}}(0)$ , отримуємо остаточний вираз для дисперсії помилки системи управління:

$$\sigma^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_{\text{вих}}(\omega) d\omega \quad (2.38)$$

**Приклад 2.4.** Нехай на вході системи, що містить один інтегратор діє широкопasmовою завада з енергетичним спектром  $G_n(\omega) = N_0$ . Передавальна функція системи з одним інтегратором  $H(p) = \frac{k}{p}$ . Визначити дисперсію помилки, викликану дією завади.

Для цього спочатку залишемо вираз для передавальної функції замкнутої системи

$$W(p) = \frac{H(p)}{1+H(p)} = \frac{k}{p+k}$$

и знайдемо квадрат її модуля:

$$|W(p)|^2 = \frac{k}{\omega^2 + k^2}$$



Енергетичний спектр завади на виході розглянутої системи

$$G_{\text{вих}} = |W(p)|^2 G_n(\omega) = \frac{k^2}{\omega^2 + k^2} N_0$$

Таким чином, дисперсія помилки САУ, викликаной дією завади, знаходиться за формулою

$$\sigma_{\text{вих}}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k^2 N_0}{\omega^2 + k^2} d\omega = \frac{k N_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{z^2 + 1} = -\frac{1}{2} k N_0.$$

## 2.5. Розрахунок усталених помилок в САУ

Замкнута система автоматичного керування може знаходитись під впливом випадкової керуючої дії  $U(t)$  із відомими  $R_U(\tau)$  і  $S_U(\omega)$  та випадкового збурення  $F(t)$  із відомими  $R_F(\tau)$  і  $S_F(\omega)$  (рис. 2.1). Необхідно знайти кореляційні функції й спектральні щільності вихідної величини  $Y(t)$  і помилки  $E(t)$ .

Розглянемо спочатку випадок, коли  $U(t)$  є випадковим стаціонарним процесом, а  $F(t) = 0$ . Комплексна передавальна функція за помилкою для замкнутої системи має вигляд:

$$W_{U\varepsilon}(j\omega) = \frac{1}{1 + W(j\omega)}$$

Тоді спектральна щільність помилки буде:

$$S_\varepsilon(\omega) = |W_{U\varepsilon}(j\omega)|^2 S_U(\omega) = \frac{S_U(\omega)}{|1+W(j\omega)|^2} \quad (2.39)$$

Визначимо дисперсію  $D_\varepsilon$  і середнє квадратичне відхилення  $\sigma_\varepsilon$  за умови  $\tau = 0$ :

$$D_\varepsilon = R_\varepsilon(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_\varepsilon(\omega) d\omega, \quad \sigma_\varepsilon = \sqrt{D_\varepsilon} \quad (2.40)$$

У випадку, коли  $U(t) = 0$ , а  $F(t)$  – випадковий стаціонарний процес, маємо:

$$S_\varepsilon(\omega) = |W_{f\varepsilon}(j\omega)|^2 S_f(\omega) = \left| \frac{W(j\omega)}{1+W(j\omega)} \right|^2 S_f(\omega) \quad (2.41)$$

Припускаємо, що збурення діє на вході системи у місці прикладення керуючої дії. Якщо це не так, то в чисельнику  $W_{f\varepsilon}(j\omega)$  буде стояти відповідна передавальна функція  $W_{fy}(j\omega)$ , а знаменник не зміниться.

У загальному випадку, коли  $U(t)$  і  $F(t)$  діють одночасно, спектральну щільність помилки  $S_\varepsilon(\omega)$  за умови, що керуючий сигнал і сигнал збурення є корельованими, можна визначити за формулою:

$$S_\varepsilon(\omega) = |W_{U\varepsilon}(j\omega)|^2 S_U(\omega) + W_{U\varepsilon}(-j\omega)W_{f\varepsilon}(j\omega)S_{Uf}(\omega) + \\ + W_{U\varepsilon}(j\omega)W_{f\varepsilon}(-j\omega)S_{fU}(\omega) + |W_{f\varepsilon}(j\omega)|^2 S_f(\omega) \quad (2.42)$$

де  $S_{Uf}(\omega)$ ,  $S_{fU}(\omega)$  – взаємні спектральні щільності між  $U(t)$  і  $F(t)$ .

За відсутності кореляції між процесами  $U(t)$  і  $F(t)$  їх взаємні спектральні щільності дорівнюють нулю і вираз для спектральної щільності помилки спрощується:

$$S_\varepsilon(\omega) = |W_{U\varepsilon}(j\omega)|^2 S_U(\omega) + |W_{f\varepsilon}(j\omega)|^2 S_f(\omega) \quad (2.43)$$

Дисперсія помилки, що визначається за (2.40), у загальному випадку містить такі складові:

$$D_\varepsilon = D_\varepsilon^U + D_\varepsilon^{Uf} + D_\varepsilon^{fU} + D_\varepsilon^f \quad (2.44)$$

Середнє значення квадрата помилки дорівнює:

$$\bar{\varepsilon}^2(t) = D_\varepsilon(t) + m_\varepsilon^2(t) \quad (2.45)$$

де  $m_\varepsilon(t)$  – регулярна складова (математичне сподівання) помилки, що визначається за формулою:

$$m_\varepsilon(t) = W_{U\varepsilon}(s)m_U(t) + W_{f\varepsilon}(s)m_f(t) = m_\varepsilon^U(t) + m_\varepsilon^f(t) \quad (2.46)$$

Тут  $m_U(t)$  і  $m_f(t)$  – еквівалентні регулярні складові керуючого сигналу і збурення, що містять математичне сподівання відповідного випадкового процесу і відповідний регулярний сигнал.

У випадку, коли зовнішні дії не містять регулярних складових ( $m_\varepsilon(t) = 0$ ) як критерій динамічної точності системи можна взяти дисперсію помилки або середнє квадратичне відхилення помилки:

$$\bar{\varepsilon}^2 = D_\varepsilon, \sigma_\varepsilon = \sqrt{D_\varepsilon} \quad (2.47)$$

Аби за відомою спектральною щільністю знайти дисперсію помилки, необхідно обчислити інтеграл (2.40), що є складною задачею. Тому на практиці

це обчислення виконують або аналітичним методом за допомогою табличних інтегралів, або методом графоаналітичного інтегрування.

## 2.6. Розрахунок лінійних САУ при випадкових впливах

Розглянемо замкнуту лінійну систему (рис.2.10), призначену для можливо більш точного відтворення випадкового корисного сигналу  $G(t)$ , що діє на вході системи, за наявності випадкової завади  $F(t)$ , прикладеної в довільній точці системи. Зовнішні впливи зазвичай задаються кореляційними функціями  $R_g(\tau)$  і  $R_f(\tau)$  або спектральними щільностями  $S_g(\omega)$  і  $S_f(\omega)$ . Якщо корисний сигнал і завада корельовані, то задається також взаємна кореляційна функція  $R_{gf}(\tau)$  або задається взаємна спектральна щільність  $S_{gf}(j\omega)$ .

Якщо зовнішні впливи  $G(t)$  і  $F(t)$  є стаціонарними випадковими процесами, то в стійкій лінійній системі з постійними параметрами в сталому режимі всі координати системи (наприклад, регульована змінна  $X(t)$ , помилка  $E(t)$  і так далі.) також будуть стаціонарними випадковими процесами. Однак, тут знаходять не миттєві значення координат системи, а їх статистичні характеристики.

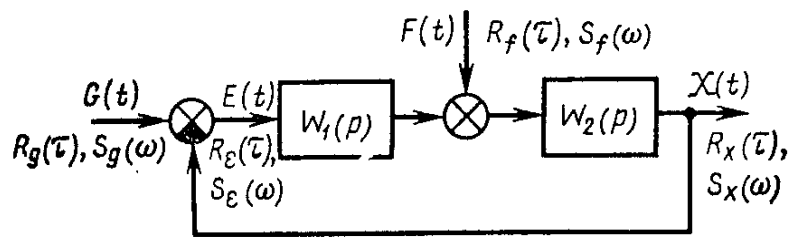


Рис. 2.10.

При розрахунку САУ з випадковими впливами спочатку по заданим кореляційним функціям або спектральним щільностям зовнішніх впливів визначають кореляційні функції або спектральні щільності змінних системи, а потім, використовуючи їх, знаходять математичне сподівання, дисперсію і ін.

Зв'язок між кореляційними функціями вхідних впливів  $R_g(\tau)$ ,  $R_f(\tau)$  і  $R_{gf}(\tau)$  і кореляційними функціями шуканої змінної, наприклад кореляційної функцією  $R_x(\tau)$  змінної  $X(t)$ , може бути знайдена на основі (2.19). Знаючи кореляційну

функцію  $R_x(\tau)$ , можна визначити наступні статистичні характеристики випадкової регульованої в наведеної на рис. 2.10 САУ змінної  $x$ :

середнє значення регульованої змінної системи управління

$$\bar{x} = \sqrt{R_x(\infty)};$$

середнє значення квадрата регульованої змінної системи управління

$$\bar{x}^2 = R_x(0);$$

дисперсію регульованої змінної системи управління

$$D_x = R_{\dot{x}(0)} = R_x(0) - R_x(\infty)$$

середньоквадратичне відхилення регульованої змінної системи управління

$$\sigma_x = \sqrt{D_x} = \sqrt{R_x(0) - R_x(\infty)}.$$

Спектральні щільності шуканих змінних визначають по заданим спектральним щільностям зовнішніх впливів  $S_g(\omega)$ ,  $S_f(\omega)$  і  $S_{gf}(j\omega)$  на основі (2.25) або (2.39). Після того як буде визначена, наприклад, спектральна щільність регульованої величини, середнє значення квадрата регульованої змінної системи управління може бути знайдено за формулою

$$\bar{x}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} S_x(\omega) d\omega \quad (2.48)$$

При розрахунках систем автоматичного управління часто цікавляться динамічної точністю системи, яка при стаціонарних випадкових впливах визначається середнім значенням квадрата випадкової помилки системи, рівної

$$\bar{\varepsilon}^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \varepsilon^2(t) dt, \quad (2.49)$$

де  $\varepsilon(t)$  - будь-яка реалізація випадкової помилки;  $T$ -інтервал спостереження.

Середнє значення квадрата випадкової помилки може бути визначено через спектральну щільність помилки за формулою, аналогічною (2.48), тобто

$$\bar{\varepsilon}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_g(\omega) d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} S_g(\omega) d\omega. \quad (2.50)$$

Середня квадратична помилка регульованої змінної системи управління

$$\varepsilon_{с.к} = \sqrt{\bar{\varepsilon}^2}$$

Зрозуміло, статистичні характеристики випадкової помилки можна визначати і за кореляційної функції помилки, проте в практичних розрахунках

найчастіше користуються формулою (2.50), яка швидше і простіше призводить до мети. Вхідну в (2.50) спектральну щільність помилки для даної системи (рис.2.10) при корельованих корисному сигналі і заваді згідно формули (2.42) обчислюють за формулою

$$S_{\varepsilon}(\omega) = |W_{g\varepsilon}(j\omega)|^2 S_g(\omega) + W_{g\varepsilon}(-j\omega)W_{f\varepsilon}(j\omega)S_{gf}(j\omega) + \quad (2.51)$$

$$+ W_{g\varepsilon}(j\omega)W_{f\varepsilon}(-j\omega)S_{fg}(j\omega) + |W_{f\varepsilon}(j\omega)|^2 S_f(\omega)$$

де  $S_g(\omega)$ ,  $S_f(\omega)$  - спектральні щільності корисного сигналу і завади;

$S_{gf}(\omega)$ ,  $S_{fg}(\omega)$  - взаємні спектральні щільності між корисним сигналом і завадою;

$W_{g\varepsilon}(j\omega) = \frac{1}{1+W(j\omega)}$  - частотна передавальна функція, що зв'язує помилку  $\varepsilon(t)$  і корисний сигнал  $g(t)$ ;

$W_{f\varepsilon}(j\omega) = \frac{W_2(j\omega)}{1+W(j\omega)}$  - частотна передатна функція, що зв'язує помилку  $\varepsilon(t)$  і заваду  $f(t)$ ;

$W(j\omega) = W_1(j\omega)W_2(j\omega)$  - частотна передатна функція розімкнутої системи;

$W_2(j\omega)$  - частотна передавальна функція частини розімкнутої системи між точкою докладання завади і виходом системи.

За відсутності кореляції між корисним сигналом і завадою їх взаємні спектральні щільності дорівнюють нулю і вираз для спектральної щільності помилки системи управління значно спрощується:

$$S_{\varepsilon}(\omega) = |W_{g\varepsilon}(j\omega)|^2 S_g(\omega) + |W_{f\varepsilon}(j\omega)|^2 S_f(\omega) \quad (2.52)$$

Середнє значення квадрата помилки системи в загальному випадку складається з окремих складових, що визначаються доданками (2.52), тобто

$$\bar{\varepsilon}^2 = \bar{\varepsilon}_g^2 + \bar{\varepsilon}_{gf}^2 + \bar{\varepsilon}_{fg}^2 + \bar{\varepsilon}_f^2 \quad (2.53)$$

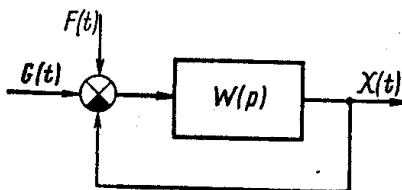


Рис. 2.11

В окремому випадку, коли завада діє на вході в місці додатка керуючого впливу (рис.2.11) і кореляція між корисним сигналом і перешкодою відсутня, вираз (2.52) можна записати у вигляді

$$S_g(\omega) = \left| \frac{1}{1+W(j\omega)} \right|^2 S_g(\omega) + \left| \frac{W(j\omega)}{1+W(j\omega)} \right|^2 S_f(\omega) \quad (2.54)$$

Зауважимо, що (2.50), (2.51) і (2.54) для спектральної щільності помилки  $S_\varepsilon(\omega)$  можуть бути легко переписані для спектральної щільності регульованої змінної  $S_g(\omega)$ , якщо в них замінити частотну передавальну функцію для помилки  $W_{g\varepsilon}(j\omega)$  на частотну передавальну функцію замкненої системи управління  $W_{gx}(j\omega)$ , яка наведена на рис.2.11.

Щоб знайти середнє значення квадрата помилки системи управління при випадкових впливах, необхідно, знаючи спектральну щільність помилки  $S_\varepsilon(\omega)$ , обчислити інтеграл (2.50). Обчислення цього інтеграла досить складно, тому на практиці його виконують двоюко: або аналітичним методом за допомогою табличних інтегралів, або методом графоаналітичного інтегрування.

### 2.6.1 Аналітичний метод визначення середньої квадратичної помилки.

Цей метод заснований на припущенні, що як спектральні щільності, так і частотні передавальні функції, що входять в (2.50), є дробово-раціональними функціями від  $\omega$ . Тоді (2.50) для спектральної щільності помилки складається з доданків

$$S_i(j\omega) = \frac{|B(j\omega)|^2}{|H(j\omega)|^2}, \quad (2.55)$$

де  $B(j\omega)$ ,  $H(j\omega)$  - деякі поліноми від комплексної змінної  $j\omega$ .

Обчислення окремих складових середнього значення квадрата помилки наведеної на рис.2.11 системи управління зводиться до визначення інтегралів:

$$J_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_i(j\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|B(j\omega)|^2}{|H(j\omega)|^2} d\omega \quad (2.56)$$

Для зручності інтегрування (2.56) зазвичай представляють в наступному вигляді:

$$J_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{M(j\omega)}{H(j\omega)H(j-\omega)} d\omega \quad (2.57)$$

де

$$\left. \begin{aligned} H(j\omega) &= a_0(j\omega)^n + a_1(j\omega)^{n-1} + \dots + a_n; \\ M(j\omega) &= b_0(j\omega)^{2(n-1)} + b_1(j\omega)^{2(n-2)} + \dots + b_{n-1}. \end{aligned} \right\} \quad (2.58)$$

Поліном  $M(j\omega)$  містить лише парні степені  $(j\omega)$ , а поліном  $H(j\omega)$  для стійкої системи має всі корені, розташовані у верхній півплощині коренів.

Якщо прийняти найвищу степінь знаменника підінтегрального виразу (2.58) інтегралу (2.57) дорівнює  $2n$ , тоді найвища степінь чисельника буде не вище  $2(n - 1)$ . Інтеграли виду (2.57) обчислюються звичайно за допомогою теорії відрахувань і можуть бути для стійкої системи при будь-якому  $n$  представлені у вигляді

$$J_n = \frac{Q_n}{2a_0\Delta_n},$$

де

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \vdots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \vdots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \vdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & a_n \end{vmatrix}$$

збігається зі старшим визначником Гурвіца, складеним з коефіцієнтів  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$  полінома  $H(j\omega)$ ;

$$Q_n = \begin{vmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & \vdots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \vdots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \vdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & a_n \end{vmatrix};$$

збігається зі старшим визначником Гурвіца, в якому перший рядок змінити на  $b_0, b_1, \dots, b_{n-1}$ .

Є таблиці значень інтегралів  $J_n$  у вигляді формул, що залежать від коефіцієнтів  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$  і  $b_0, b_1, \dots, b_{n-1}$  для значень  $n$  від 1 до 7. Табличні значення інтегралів  $J_n$  для  $n$  від 1 до 5 наведені в додатку 1.

Таким чином, при аналітичному методі розрахунку середньої квадратичної помилки спочатку визначають спектральну щільність помилки, представляючи її в загальному випадку з доданків виду (2.55), і знаходять коефіцієнти  $a_i$ ; та  $b_i$ ,

поліномів  $H(j\omega)$  і  $M(j\omega)$ . Після цього, користуючись табличними інтегралами  $J_n$ , визначають окремі складові середнього значення квадрата помилки наведеної вище системи управління.

### 2.6.2 Графоаналітичне визначення середньої квадратичної помилки.

Для систем автоматичного управління при  $p > 4$  аналітичний метод знаходження середньої квадратичної помилки стає досить громіздким. Тому в інженерній практиці в таких випадках широко застосовують графоаналітичний метод. Цей метод особливо зручний у тому випадку, коли спектральні щільності корисного сигналу і завади, а також амплітудно-частотні характеристики замкнутої системи управління (рис.2.11) задані графічно.

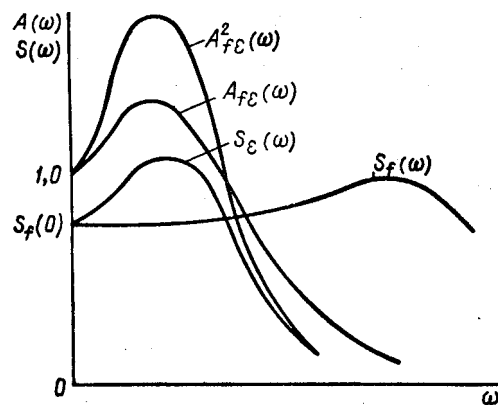


Рис.2.12

Пояснимо сутність цього методу стосовно до обчислення складової помилки від дії завади. Розглянемо, наприклад, рис.2.12, на якому наведені амплітудно-частотна характеристика замкнутої системи  $A_f(\omega) = |W_{f\varepsilon}(j\omega)|$ , що зв'язує помилку з завадою, і графік спектральної щільності завади  $S_f(\omega)$ .

Зводячи в квадрат ординати кривої  $A_{f\varepsilon}(\omega)$ , будемо графік кривої  $A_{f\varepsilon}^2(\omega)$  (рис. 2.12). Перемножуючи потім ординати  $A_{f\varepsilon}^2(\omega)$  і  $S_f(\omega)$  при одних і тих же частотах  $\omega$ , отримаємо графік спектральної щільності помилки замкнутої системи управління  $S_\varepsilon(\omega)$ .

Після цього можемо визначати значення інтеграла

$$\bar{\varepsilon}_f^2 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi S_\varepsilon(\omega) d\omega. \quad (2.59)$$



Для цього підраховують величину площі, укладеної між кривою  $S_\varepsilon(\omega)$  і віссю абсцис. Складову середнього значення квадрата помилки від дії завади  $\varepsilon^2$  визначають шляхом ділення одержаної площі на  $\pi$ .

Аналогічно можна знайти інші складові середнього значення квадрата помилки. Підсумовуючи ці складові, знаходимо відповідно середнє значення квадрата помилки  $\varepsilon^2$ , а потім визначаємо середню квадратичну помилку.

Як видно з рис.2.12, величина складової середнього значення квадрата помилки  $\varepsilon_f^2$  залежить від взаємного розташування графіків  $A_{f\varepsilon}^2(\omega)$  і  $S_f(\omega)$ . При збігу максимумів цих характеристик величина площі між кривою  $S_\varepsilon(\omega)$  і віссю абсцис, а отже, і величина складової помилки  $\varepsilon_f^2$  виявляється дуже великою і, навпаки, рознесення цих максимумів вибором відповідних значень параметрів системи управління (рис.2.11) призводить до зменшення помилки.

Таким чином, графоаналітичний метод, відрізняючись простотою і наочністю, і дозволяє відповідною зміною частотних характеристик замкнутих систем управління при заданих спектральних щільностях зовнішніх впливів суттєво зменшити середнє значення квадрата помилки системи.

Якщо при розрахунку системи автоматичного управління користуються логарифмічними частотними характеристиками, то складова спектральної щільності помилки, відповідна, наприклад, перешкоді  $\varepsilon_f^2$ , в цьому випадку може бути обчислена таким чином.

За відомими ЛАХ і ЛФХ розімкнутої системи знаходять ЛАХ замкнутої системи  $L_0(\omega)$ , потім її значення подвоюють, тобто визначають  $2L_0(\omega)$ . Значення  $2L_0(\omega)$  підсумовують з величиною  $L_f(\omega) = 20\lg S_f(\omega)$ .

Після цього обчислюють спектральну щільність помилки за формулою:

$$S_\varepsilon(\omega) = |W_{f\varepsilon}(j\omega)|^2 S_f(\omega) = \text{Antilg} \frac{2L_0(\omega) + L_f(\omega)}{20} \quad (2.60)$$

За отриманим згідно (2.60) значенням спектральної щільності  $S_\varepsilon(\omega)$  помилки визначають потім складову середнього значення квадрата помилки  $\varepsilon_f^2$ . Аналогічно визначають інші складові середнього значення квадрата помилки.

### 2.6.3. Визначення середньої квадратичної помилки при випадкових і регулярних впливах, що діють одночасно.

Зовнішні впливи  $G(t)$  або  $F(t)$  можуть довільно змінюватися в часі. При цьому на ці регулярні сигнали можуть бути накладені стаціонарні випадкові процеси:

$$\begin{aligned} G(t) &= m_g(t) + \overset{\circ}{G}(t), \\ F(t) &= m_f(t) + \overset{\circ}{F}(t). \end{aligned} \quad (2.61)$$

де  $m_g(t)$ ,  $m_f(t)$  - еквівалентні регулярні складові зовнішніх впливів, що включають в себе як математичне очікування випадкового процесу, так і регулярний зовнішній сигнал;  $\overset{\circ}{G}(t)$ ,  $\overset{\circ}{F}(t)$  - центровані випадкові складові корисного сигналу і завади відповідно.

Будь-яку шукану змінну системи управління можна представити у вигляді двох складових: регулярної складової (математичного сподівання) і центрованої випадкової складової. Наприклад, помилку системи  $E(t)$  можна записати у вигляді

$$E(t) = m_\varepsilon(t) + \overset{\circ}{E}(t). \quad (2.62)$$

Таким чином, перебування випадкової помилки  $E(t)$  може бути зведене до знаходження її математичного сподівання  $m_\varepsilon(t)$  (регулярної складової помилки) і центрованої випадкової складової  $\overset{\circ}{E}(t)$ . При цьому в лінійній системі на підставі принципу суперпозиції  $m_\varepsilon(t)$  і  $\overset{\circ}{E}(t)$  складаються зі складових від дії корисного сигналу і завади. При цьому важливо те, що їх можна знаходити порізно.

Математичне сподівання  $m_\varepsilon(t)$  можна розглядати як реакцію лінійної системи на регулярні зовнішні впливи  $m_g(t)$  і  $m_f(t)$  і визначати через передавальні функції системи:

$$m_\varepsilon(t) = W_{g\varepsilon}(p)m_g(t) + W_{f\varepsilon}(p)m_f(t), \quad (2.63)$$

де  $W_{g\varepsilon}(p) = \frac{1}{1+W(p)}$  - передавальна функція замкнутої системи, що зв'язує помилку і керуючий сигнал,  $W_{f\varepsilon}(p) = \frac{W_2(p)}{1+W(p)}$  - передавальна функція замкнутої системи, що зв'язує помилку і заваду.

Стале значення (математичне очікування) помилки  $m_\varepsilon(t)$  при повільно мінливих регулярних функціях  $m_g(t)$  і  $m_f(t)$  зазвичай визначають методом коефіцієнтів помилок.

Якщо регулярні зовнішні впливи постійні (або відсутні), а випадкові впливи представляють собою стаціонарні випадкові процеси, то  $m_g(t) = const$  і  $m_f(t) = const$ . У цьому випадку помилка  $E(t)$  буде стаціонарним випадковим процесом, математичне сподівання якого  $m_\varepsilon$  визначається через рівняння статистики системи:

$$m_\varepsilon(t) = \dot{W}_{g\varepsilon}(0)m_g + W_{f\varepsilon}(0)m_f = const. \quad (2.64)$$

Центровані випадкові складові будь-якої координати системи, наприклад центровану випадкову складову помилки системи  $\overset{\circ}{E}(t)$ , можна розглядати як реакцію системи на центровані випадкові складові керуючого сигналу  $\overset{\circ}{G}(t)$  і завади  $\overset{\circ}{F}(t)$ . Оскільки  $\overset{\circ}{E}(t)$  являє собою випадковий процес, то знаходять не миттєві значення  $\overset{\circ}{E}(t)$ , а її статистичні характеристики: дисперсію та ін.

Центровані випадкові складові зовнішніх впливів  $\overset{\circ}{G}(t)$  і  $\overset{\circ}{F}(t)$  можуть бути задані або центрованими кореляційними функціями  $\overset{\circ}{R}_g(\tau)$ ,  $\overset{\circ}{R}_f(\tau)$  і  $\overset{\circ}{R}_{gf}(\tau)$ , або центрованими спектральними щільностями  $\overset{\circ}{S}_g(\tau)$ ,  $\overset{\circ}{S}_f(\tau)$  і  $\overset{\circ}{S}_{gf}(\tau)$ , знаючи які можна визначити або центровану кореляційну функцію помилки  $\overset{\circ}{R}_\varepsilon(\tau)$  або можна визначити центровану спектральну щільність помилки  $\overset{\circ}{S}_\varepsilon(\omega)$ .

Зазвичай простіше знаходити центровану спектральну щільність помилки:

$$S_\varepsilon^\circ(\omega) = |W_{g\varepsilon}(j\omega)|^2 S_g^\circ(\omega) + W_{g\varepsilon}(-j\omega)W_{f\varepsilon}(j\omega)S_{gf}^\circ(j\omega) + \quad (2.65)$$

$$+W_{g\varepsilon}(j\omega)W_{f\varepsilon}(-j\omega)S_{fg}^{\circ\circ}(j\omega) + |W_{f\varepsilon}(j\omega)|^2 S_f^{\circ}(\omega)$$

де  $S_{gf}^{\circ\circ}(j\omega)$ ,  $S_{fg}^{\circ\circ}(j\omega)$  - взаємні спектральні щільності між  $G(t)$  і  $F(t)$ .

За відсутності кореляції між корисним сигналом і завадою їх взаємні спектральні щільності дорівнюють нулю і центрована спектральна щільність помилки

$$S_{\varepsilon}^{\circ}(\omega) = |W_{g\varepsilon}(j\omega)|^2 S_g^{\circ}(\omega) + |W_{f\varepsilon}(j\omega)|^2 S_f^{\circ}(\omega) \quad (2.66)$$

Дисперсія

$$D_{\varepsilon} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{\varepsilon}^{\circ}(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\omega} S_{\varepsilon}^{\circ}(\omega) d\omega \quad (2.67)$$

Знаходження дисперсії пов'язано з обчисленням інтеграла (2.67), який визначають аналогічно інтегралу (2.56). Середнє значення квадрата помилки

$$\bar{\varepsilon}^2 = m_{\varepsilon}^2(t) + D_{\varepsilon} \quad (2.68)$$

де  $m_{\varepsilon}(t)$  - математичне сподівання помилки, що визначається за (2.64), а  $D_{\varepsilon}$  - дисперсія помилки, яка визначається згідно формули (2.67).

Знаючи  $\varepsilon^2$ , можна обчислити також середню квадратичну помилку:

$$\varepsilon_{с.к}(t) = \sqrt{\bar{\varepsilon}^2(t)} = \sqrt{m_{\varepsilon}^2(t) + D_{\varepsilon}} \quad (2.69)$$

Зауважимо, що якщо математичне сподівання помилки, що визначається за (2.63), постійно

$$\bar{\varepsilon}^2 = m_{\varepsilon}^2 + D_{\varepsilon} = const \quad (2.70)$$

і в цьому випадку середнє значення квадрата помилки, що визначається за формулою (2.70), повністю збігається з середнім значенням квадрата помилки.

В окремому випадку, коли зовнішні впливи не містять регулярних складових, а являють собою центровані стаціонарні випадкові процеси,  $m_{\varepsilon} = 0$  і критерієм динамічної точності системи можна вважати дисперсію помилки

$$\bar{\varepsilon}^2 = D_{\varepsilon}, \quad (2.71)$$

або

$$\sigma_{\varepsilon} = \sqrt{D_{\varepsilon}}. \quad (2.72)$$

**Приклад 2.5.** На вході замкнутої системи з одиничною зворотним зв'язком (рис.2.10) діють випадковий корисний сигнал  $G(t)$ , що має спектральну щільність  $S_g(\omega) = \frac{2D_g T_g}{1+\omega^2 T_g^2}$ , і випадкова завада  $F(t)$  типу «білий шум», спектральна щільність якої  $S_g(\omega) = N$ ,  $S_f(\omega) = N$ . Вважаємо, що кореляція між корисним сигналом і перешкодою відсутня.

Передавальна функція розімкнутої системи  $W(p) = \frac{K/p}{1+pT}$ . Визначити середню квадратичну помилку системи при  $D_g = 100$  В;  $T_g = 20$  с;  $N = 0,01$  В<sup>2</sup> / Гц;  $T = 0,1$  с;  $K = 5$  1/с.

1. Знаходимо передавальні функції замкнутої системи помилково і регульованою величиною:

$$W_{g\varepsilon}(p) = \frac{1}{1+W(p)} = \frac{p(1+T_p)}{T_p^2+p+K};$$

$$W_{gx}(p) = W_{f\varepsilon}(p) = \frac{W(p)}{1+W(p)} = \frac{K}{T_p^2+p+K}.$$

2. Спектральна щільність помилки і відповідно до (2.60)

$$S_g(\omega) = \left| \frac{j\omega(1+j\omega T)}{T(j\omega)^2+(j\omega)+K} \right|^2 S_g(\omega) + \left| \frac{K}{T(j\omega)^2+(j\omega)+K} \right|^2 S_f(\omega)$$

3. Знаходимо складову середнього квадрата помилки, обумовлену корисним сигналом:

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_g^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{j\omega(1+j\omega T)}{T(j\omega)^2+(j\omega)+K} \right|^2 \frac{2D_g T_g}{1+\omega^2 T_g^2} d\omega = 2D_g T_g \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega^2(1+\omega^2 T^2) d\omega}{|T(j\omega)^2+j\omega+K|^2 |1+j\omega T_g|^2} = \\ &= 2D_g T_g \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[T^2(j\omega)^4-(j\omega)^2] d\omega}{|TT_g(j\omega)^3+(T+T_g)(j\omega)^2+(1+KT_g)(j\omega)+K|^2} = 2D_g T_g J_3. \end{aligned}$$

Порівнюючи отриманий вираз з видом подинтегральної функції (2.56), Можна виписати поліноми  $H(j\omega)$  і  $M(j\omega)$ , тобто

$$H(j\omega) = a_0(j\omega)^n + a_1(j\omega)^{n-1} + \dots + a_n = TT_g(j\omega)^3 + (T + T_g)(j\omega)^2 + (1 + KT_g)(j\omega) + K.$$

Отже, коефіцієнти  $a_i$  рівні:

$$a_0 = TT_g; a_1 = T + T_g; a_2 = 1 + KT_g; a_3 = K.$$

Поліном  $M(j\omega)$  повинен бути записаний у вигляді

$$M(j\omega) = b_0(j\omega)^{2(n-1)} + b_1(j\omega)^{2(n-2)} + \dots + b_{n-1}$$

З довідкової літератури для  $n = 3$  знаходимо значення табличного інтеграла  $J_3$  .т. е.

$$J_3 = \frac{-a_2 b_0 + a_0 b_1 - \frac{(a_0 a_1 + b_2)}{a_3}}{2a_0(a_0 a_3 - a_1 a_2)} = \frac{1}{2T_g} \frac{T+T_g+KTT_g}{T+T_g+KT_g^2}$$

$$\varepsilon_{с.к.} = \sqrt{\bar{\varepsilon}^2} = 1,22 \text{ В.}$$

Остаточо отримуємо

$$\bar{\varepsilon}_g^2 = 2D_g T_g J_3 = D_g \frac{T+T_g+KTT_g}{T+T_g+KT_g^2}$$

4. Знаходимо складову середнього квадрата помилки, обумовлену завадою

$$\bar{\varepsilon}_f^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K^2 N}{|T(j\omega)^2 + (j\omega) + K|^2} d\omega = K^2 N J_2.$$

Порівнюючи останній вираз з (2.58), виписуємо поліноми  $H(j\omega)$  і  $M(j\omega)$ , тобто

$$H(j\omega) = a_0(j\omega)^n + a_1(j\omega)^{n-1} + \dots + a^n = T(j\omega)^2 + (j\omega) + K.$$

Отже, коефіцієнти  $a_i$  рівні:  $a_0 = T$ ;  $a_1 = 1$ ;  $a_2 = K$ . Поліном  $M(j\omega)$  повинен бути записаний у вигляді

$$M(j\omega) = b_0(j\omega)^{2(n-1)} + b_1(j\omega)^{2(n-2)} + \dots + b_{n-1}$$

$$M(j\omega) = b_0(j\omega)^2 + b_1 = 1$$

У даному випадку  $n = 2$ , тому і коефіцієнти  $b_i$  рівні:  $b_0 = 0$ ;  $b_1 = 1$ .

З довідкової літератури для  $n = 2$  знаходимо  $J_2 = \frac{-b_0 + \frac{a_0 b_1}{a_2}}{(2a_0 + a_1)} = 1/2K$ .

Остаточно отримуємо

$$\bar{\varepsilon}_f^2 = K^2 N J_2 - KN/2.$$

5. Знаходимо результуюче значення середнього квадрата помилки:

$$\bar{\varepsilon}^2 = \bar{\varepsilon}_g^2 + \bar{\varepsilon}_f^2 = \frac{D_g(T+T_g+KTT_g)}{T+T_g+KT_g^2} + \frac{KN}{2}.$$

Підставляючи чисельні значення параметрів, отримуємо

$$\bar{\varepsilon}^2 = 100 \frac{0,1+20+5*0,1*20}{0,1+20+5*20^2} + \frac{5*0,01}{2} = 1,5.$$

Середня квадратична помилка

$$\varepsilon_{с.к.} = \sqrt{\bar{\varepsilon}^2} = 1,21 \text{ В.}$$

**Приклад 2.6.** Вирішити попередню задачу графоаналітичним методом.

1. Знаходимо вираз для спектральної щільності помилки:

$$S_\varepsilon(\omega) = \left| \frac{j\omega(1+j\omega T)}{T(j\omega)^2 + (j\omega) + K} \right|^2 \frac{2D_g T_g}{1+\omega^2 T_g} + \left| \frac{K}{T(j\omega)^2 + (j\omega) + K} \right|^2 N = \frac{2D_g T_g T \omega^4 + (2D_g T_g + K^2 N T_g) \omega^2 + K^2 N}{|T^2 \omega^4 + (1-2KT) \omega^2 + K^2| (1+\omega^2 T_g^2)}.$$

Підставляючи чисельні значення параметрів, отримуємо

$$S_\varepsilon(\omega) = (40\omega^4 + 400\omega^2 + 0,25) / [(0,01\omega^4 + 25)(400\omega^2 + 1)]$$

Задаючи різні значення  $\omega$  в межах від 0 до 20, обчислюємо  $S_\varepsilon(\omega)$  і записуємо результати:

$\omega$ ...	0	0,1	1	2	3	6	8	10	15	20
$S_\varepsilon(\omega)$ ...	0,01	0,32	0,4	0,425	0,425	0,4	0,25	0,16	0,06	0,03

2. Будуємо графік  $S_\varepsilon(\omega)$  (рис.2.13), розбиваючи який на типові фігури (прямокутники, трикутники, трапеції) знаходимо величину площі  $P_\varepsilon$ , обмеженої кривою  $S_\varepsilon(\omega)$  і віссю абсцис:

$$P_\varepsilon = \int_0^\infty S_\varepsilon(\omega) d\omega \cong 4,6.$$

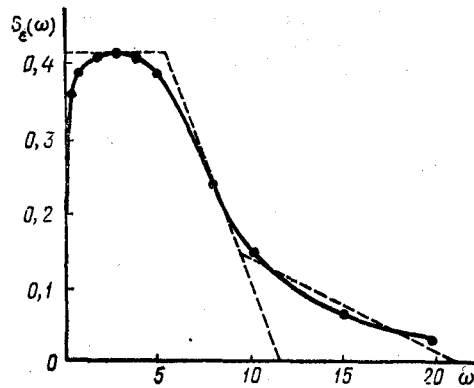


Рис 2.13.

3. Визначаємо середнє значення квадрата помилки:

$$\bar{\varepsilon}^2 = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty S_\varepsilon(\omega) d\omega \cong \frac{P_\varepsilon}{\pi} = \frac{4,6}{\pi} = 1,47$$

і середню квадратичну помилку:

$$\varepsilon_{с.к.} = \sqrt{\bar{\varepsilon}^2} = 1,21 \text{ В.}$$

Слід зазначити, що розглянута вище завдання швидше і простіше вирішується аналітичним методом, який до того ж дозволяє встановити аналітичну зв'язок між величиною середньої квадратичної помилки і параметрами системи. Наближений графоаналітичний метод інтегрування спектральної щільності доцільно застосовувати лише при значеннях  $n > 4$ , коли аналітичний метод виявляється занадто громіздким.

**Приклад 2.7.** Вирішити попередню задачу за умови, що на вході системи діє регулярний корисний сигнал  $g(t) = a + V_t$ , де  $a = 10 \text{ В}$ ;  $V = 1 \text{ В/с}$ . Корисний сигнал змішаний з випадковою завадою  $F(t)$  типу «білий шум», спектральна щільність якої  $S_f(\omega) = N$ .

1. Оскільки корисний сигнал  $g(t)$  - регулярна функція часу, то середнє значення квадрата помилки

$$\bar{\varepsilon}^2 = m_\varepsilon^2(t) + D_\varepsilon = m_\varepsilon^2(t) + \bar{\varepsilon}_f^2,$$

де  $m_\varepsilon(t) = W_{g\varepsilon}(p)g(t)$  - динамічна складова помилки, обумовлена регулярним корисним сигналом  $g(t)$ ;  $\varepsilon_f^2 = D_\varepsilon$  - середнє значення квадрата випадкової складової помилки, обумовлене випадковою завадою  $F(t)$ . Величина  $\varepsilon_f^2$  була визначена в прикладі 2.5, вона дорівнює  $\varepsilon_f^2 = \frac{KN}{2}$ . Визначимо сталі значення регулярної складової помилки  $g(t)$  методом коефіцієнтів помилок:

$$m_\varepsilon(t) = c_0 g(t) + c_1 \frac{dg(t)}{dt} + \frac{c_2}{2!} \frac{d^2 g(t)}{dt^2} + \dots$$

2. Для знаходження коефіцієнтів помилок  $c_0, c_1, c_2 \dots$  розкладемо передавальну функцію  $W_{g\varepsilon}(p) = \frac{1}{1+W(p)}$ , що зв'язує корисний сигнал і заваду, в ряд по зростаючим ступеням  $p$ , що зручно. Це можна, наприклад, зробити, розділивши чисельник виразу для  $W_{g\varepsilon}(p)$  на його знаменник:

$$W_{g\varepsilon}(p) = \frac{p+Tp^2}{p^2T^2+p-K} = \frac{1}{K}p + \frac{KT-1}{K^2}p^2 + \dots c_0 + c_1p + \frac{c_2}{2!}p^2 + \dots$$

Отже,  $c_0 = 0$ ;  $c_1 = \frac{1}{K}$ ,  $c_2 = \frac{KT-1}{K^2}$ .

У нашому випадку  $\frac{dg(t)}{dt} = V$ , а всі наступні похідні від корисного сигналу дорівнюють нулю. Тому остаточно отримуємо

$$m_\varepsilon(t) = 0 * g(t) + c_1 \frac{dg(t)}{dt} + \frac{c_2}{2!} 0 = \frac{c_1 dg(t)}{dt} = V/K.$$

3. Знаходимо результуюче значення середнього квадрата помилки:

$$\bar{\varepsilon}^2 = m_\varepsilon^2(t) + \bar{\varepsilon}_f^2 = (V / K)^2 + KN/2.$$

Підставляючи чисельні значення коефіцієнтів, отримуємо

$$\bar{\varepsilon}^2 = (1 / 5)^2 + (5 * 0.01)/2 = 0.065.$$

## 2.7. Оптимізація параметрів системи управління

Динамічні помилки при описі вхідного сигналу детермінованими функціями  $g(p)$  в сталому режимі визначаються за формулою:

$$\varepsilon_{уст} = \lim_{p \rightarrow 0} H_\tau(p)g(p), \quad (2.73)$$

де  $H_\tau(p) = \frac{1}{1+H(p)}$ ;  $H(p)$  - передавальна функція розімкнутої САУ. При описі вхідного сигналу реалізацій випадкового процесу  $g_0(t)$  динамічні помилки характеризуються величиною дисперсії передавальна функція розімкнутої САУ.

$$\sigma_\tau^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H_\tau(j\omega)|^2 G_g(\omega) d\omega, \quad (2.74)$$

де  $G_g(\omega)$  - енергетичний спектр вхідного сигналу  $g_0(t)$ .

При наявності детермінованих  $m(t)$  і випадкових  $g_0(t)$  складових вхідного сигналу  $g(t) = m(t) + g_0(t)$  величину динамічних помилок доцільно оцінювати середнім квадратом сумарної помилки  $\varepsilon_{уст}^2 + \sigma_\tau^2$ .

Крім динамічних, в САУ є помилки, які викликані дією завад  $n(t)$ . Вплив перешкод можна характеризувати дисперсією  $\sigma_{вих}^2$  вихідного сигналу САУ

$$\sigma_{вих}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |W_n(j\omega)|^2 G_n(\omega) d\omega, \quad (2.75)$$



де  $W_n(j\omega)$  - передавальна функція по заваді;  $G_n(\omega)$  - енергетичний спектр завади. Зазвичай, завади в САУ можуть бути представлені білим шумом з постійним на всіх частотах енергетичним спектром  $G_n(\omega) = N_0$ .

Крім того, завади часто діють на вхід системи і тоді передавальна функція по заваді  $W_n(j\omega)$  співпадає з передавальною функцією  $W(j\omega) = \frac{H(j\omega)}{1+H(j\omega)}$  замкнутої САУ.

У всіх сучасних САУ присутні як динамічні помилки, так і помилки за рахунок дії завад. Для характеристики якості системи управління при наявності динамічних і випадкових помилок використовують середній квадрат сумарної помилки:

$$\varepsilon_c^2 = \varepsilon_{уст}^2 + \sigma_\tau^2 + \sigma_{вих}^2,$$

який залежить від параметрів  $\bar{a} = (a_1, a_2, \dots, a_m)^T$  системи. Параметри  $\bar{a}$  зазвичай вибираються таким чином, щоб забезпечити умову мінімуму квадрата сумарної помилки  $\min_{\bar{a}} \varepsilon^2$ . У цьому випадку говорять про оптимізацію параметрів системи управління за критерієм мінімуму квадрата сумарної помилки.

**Приклад 2.8.** Розглянемо систему приводу антени або рулів літального апарату, що знаходиться під впливом завад (рис. 2.14).

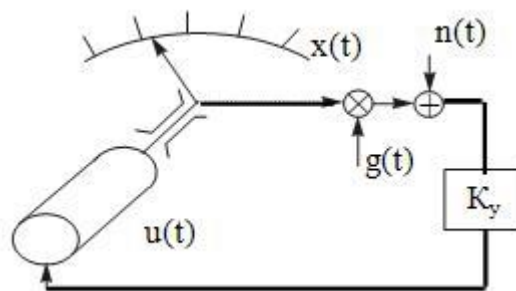


Рис. 2.14.

У такій системі кут повороту  $x(t)$  валу двигуна повинен повторювати задану траєкторію руху – вхідний сигнал  $g(t)$ . Завада  $n(t)$  в даному випадку описує похибки вимірювання  $x(t)$ .

Спрощена еквівалентна схема такої системи представлена на рис.2.15,

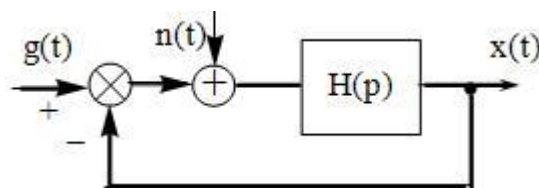


Рис.2.15.

Тут  $H(p) = \frac{k}{p(1+pT)}$ ,  $k = \frac{k_y}{k_{дв}}$  - коефіцієнт передачі системи,  $T$  - постійна часу двигуна.

Припустимо, що задана траєкторія руху описується лінійною функцією  $g(t) = V_t$ . Тоді усталені динамічні помилки системи з одним інтегратором визначаються за формулою  $\varepsilon = \frac{V}{k}$ . Чим вище коефіцієнт посилення  $k$ , тим менше величина динамічної помилки в сталому режимі. Будемо апроксимувати заваду білим шумом зі спектральною щільністю  $G_n(\omega) = N_0$ . Тоді  $G_{вих}(\omega) = \left[ \frac{H(j\omega)}{1+H(j\omega)} \right]^2$  і після перетворень знаходимо:

$$\sigma_{\tau}^2 = \frac{N_0 K}{2}.$$

З цієї формули випливає, що для зменшення впливу завад необхідно знижувати коефіцієнт посилення  $k$ , тобто підвищувати інерційність системи управління.

Квадрат сумарної помилки визначається наступним виразом:

$$\varepsilon_c^2 = \varepsilon_{уст}^2 + \sigma_{вих}^2 = \frac{V^2}{k^2} + \frac{N_0 K}{2}.$$

На основі цієї формули можна побудувати графік залежності  $\varepsilon^2 = \varepsilon^2(k)$  (рис.2.16).

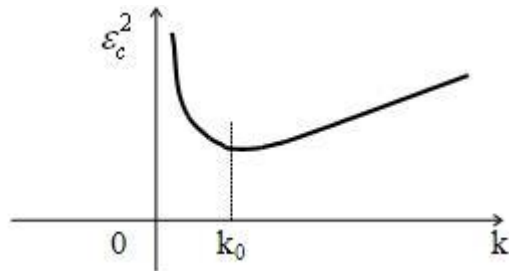


Рис.2.16.

Очевидно, існує оптимальне значення  $k_0$  параметру  $k$ , яке забезпечує мінімум сумарної помилки. Після диференціювання  $\varepsilon_c^2$  і прирівнювання до нуля похідної знаходимо:

$$\frac{d\varepsilon^2}{dk} = -\frac{2V^2}{k^3} + \frac{N_0}{2} = 0 \quad \text{звідки} \quad k_0 = \sqrt[3]{\frac{4V^2}{N_0}}.$$

Таким чином, вибираючи  $k = k_0$ , вирішуємо задачу оптимізації системи управління по параметру  $k$ .

**Приклад 2.9.** Припустимо, що траєкторія руху (приклад 2.8) замість детермінованої функції описується за допомогою реалізацій випадкового процесу  $g(t)$ , яке має нульове середнє і кореляційну функцію  $R_g(\tau) = \sigma_g^2 e^{-a|\tau|}$ .

Динамічні помилки системи визначаються величиною дисперсії:

$$\sigma_{\tau}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H_{\tau}(j\omega)|^2 G_g(\omega) d\omega.$$

Для системи з одним інтегратором

$$H_\tau(j\omega) = \frac{1}{1+k/j\omega}.$$

Враховуючи також, що

$$G_g(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_g(\tau) e^{-a|\tau|} e^{-j\omega\tau} d\tau = \frac{2a\sigma_g^2}{\omega^2+a^2}.$$

отримаємо дисперсію динамічної помилки в наступному вигляді

$$\sigma_\tau^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2a\sigma_g^2\omega^2}{(\omega^2+a^2)(\omega^2+k^2)} d\omega = \frac{a\sigma_g^2}{a+k}$$

Як вже було показано в прикладі 2.8, дисперсія помилки за рахунок дії завад визначається по формулі

$$\sigma_{\text{вих}}^2 = \frac{N_0 k}{2}.$$

Треба звернути увагу на те, що динамічні помилки зменшуються при збільшенні коефіцієнта посилення  $k$  системи управління. Разом з тим вплив завад при збільшенні  $k$  зростає. Узагальненим показником якості для даної системи служить середній квадрат помилки

$$\varepsilon_c^2 = \sigma_\tau^2 + \sigma_{\text{вих}}^2 = \frac{a\sigma_g^2}{a+k} + \frac{N_0 k}{2}$$

Залежність  $\varepsilon_c^2$  від параметра  $k$  носить характер, близький до графіку на рис.2.16. Разом з тим певною відмінністю є кінцеве значення  $\varepsilon_c^2(k=0)$ .

Дійсно, якщо  $k=0$ , то вихідний сигнал системи і дисперсія динамічної помилки скінченна:

$$\sigma_\tau^2 = M\{(x(t) - g(t))^2\} = \sigma_g^2.$$

Після диференціювання  $\varepsilon_c^2$  по параметру  $k$  можна визначити точку мінімуму середнього квадрата помилки з умови

$$\frac{d\varepsilon_c^2}{dk} = 0.$$

Отримане при цьому оптимальне значення  $k_0$  забезпечує найкращі умови функціонування розглянутої САР при заданих моделях зміни вхідного сигналу і завад.

### Запитання для самоперевірки

1. Як пов'язані між собою спектральні щільності стаціонарного випадкового процесу на вході й виході лінійної системи?
2. Як пов'язані між собою спектральні щільності стаціонарного випадкового процесу на вході й виході лінійної системи при статистичному диференціюванні? Статистичному інтегруванні?

3. Яким чином здійснюється опис траєкторій руху об'єктів управління під впливом випадкових процесів?
4. Дія стаціонарного випадкового процесу на лінійну сталу ланку об'єкта управління.
5. Вплив завади на замкнуту лінійну систему управління.
6. Як здійснюється розрахунок усталених помилок в автоматичних системах управління?
7. Розрахунок СУ з випадковими впливами по заданим кореляційним функціям або спектральним щільностям зовнішніх впливів.
8. Аналітичний метод визначення середньої квадратичної помилки.
9. Графоаналітичне визначення середньої квадратичної помилки.
10. Визначення середньої квадратичної помилки при випадкових і регулярних впливах, що діють одночасно.
11. Оптимізація параметрів системи управління.

### Розділ 3. Розрахунок оптимальних лінійних фільтрів на основі методу Вінера і методу Калмана - Б'юси.

Одним з наріжних каменів стохастичної теорії управління є теорія фільтрації, розроблена Вінером і Колмогоровим. Ця теорія дає можливість виділяти сигнал на тлі перешкод. Однак у теорії Вінера—Колмогорова необхідно вирішувати інтегральне рівняння (рівняння Вінера — Хопфа), що звужує область її застосування. В реальних задачах рівняння Вінера — Хопфа рідко має аналітичне рішення, а рішення чисельними методами являє собою громіздку трудомістку процедуру.

Значний внесок у вирішення проблеми фільтрації зробили Калман і Б'юси. У їх теорії завдання попередження і фільтрації вирішуються рекурентними методами, що дозволяє використовувати цифрові обчислювальні машини. Результати Калмана і Б'юсі поширюються і на нестационарні процеси. На підставі теорії Калмана — Б'юси прогноз дається у вигляді вихідної змінної лінійної динамічної системи, коли управління здійснюється за спостереженнями.

#### 3.1. Лінійний фільтр Вінера

У тих випадках, коли на вході системи автоматичного управління діють корисний сигнал  $G(t)$  і завада  $F(t)$ , які є корельованими між собою стаціонарними випадковими процесами з рівними нулю середніми значеннями, оптимальна імпульсна перехідна функція системи  $k_{\text{опт}}(t)$ , що задовольняє умові її фізичної реалізованості, тобто  $k(t) = 0$  при  $t < 0$  і забезпечує мінімум середньоквадратичної помилки, повинна задовольняти наступному інтегрального рівняння:

$$\int_{-\infty}^{\infty} k_{\text{опт}}(\lambda) R_u(\tau - \lambda) d\lambda - R_{zu}(\tau) = 0, \tau \geq 0. \quad (3.1)$$

Рівняння (3.1) було отримано Н. Вінером в 1949 р. і називається інтегральним рівнянням Вінера-Хопфа.

На основі рішення рівняння (3.1) Н. Вінером була запропонована загальна формула для знаходження реалізованої оптимальної частотної передавальної функції (оптимального фільтра Вінера)

$$W_{3.опт}(j\omega) = \frac{1}{2\pi\Psi(j\omega)} \int_0^{\infty} e^{-j\omega t} dt \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_{zu}(j\omega)}{\psi(-j\omega)} e^{j\omega t} d\omega, \quad (3.2)$$

де  $S_{zu}(j\omega) = S_{zg}(j\omega) + S_{zf}(j\omega)$  - взаємна спектральна щільність відтвореного вихідного сигналу  $Z(t)$  і сумарного вхідного сигналу  $U(t)$ .

Слід звернути увагу на те, що в (3.2) нижня межа зовнішнього інтеграла має дорівнювати нулю.

Якщо кореляція між керуючим сигналом і перешкодою відсутня, то при застосуванні (3.2) слід врахувати, що

$$S_{gf}(j\omega) = S_{fg}(j\omega) = S_{zf}(j\omega) = 0. \quad (3.3)$$

При визначенні оптимальної частотної передавальної функції вибір формули (3.2) залежить від конкретного завдання.

На основі загальної формули (3.2) як приватні випадки можуть бути отримані вирази для оптимальних частотних передавальних функцій системи управління (оптимальних фільтрів), які здійснюють за наявності завад відтворення корисного сигналу, статистичне прогнозування, диференціювання та інші лінійні перетворення.

Наприклад, якщо розглядають задачу відтворення корисного сигналу при наявності завад, то оператор  $H(p) = 1$ , і тоді

$$\begin{aligned} Z(t) &= G(t), \quad S_u(\omega) = S_g(\omega) + S_f + S_{gf}(j\omega) + S_{fg}(j\omega), \\ S_{zu}(j\omega) &= S_{gu}(j\omega) = S_g(\omega) + S_{gf}(j\omega) \end{aligned} \quad (3.4)$$

У цьому випадку (3.2) може бути представлено у простішому вигляді:

$$W_{3.опт}(j\omega) = \frac{B(j\omega)}{\psi(j\omega)}. \quad (3.5)$$

Щоб знайти чисельник виразу (3.5), розкладемо  $S_{gu}(j\omega)/\psi(-j\omega)$  на прості дроби:

$$\frac{S_{gu}(j\omega)}{\Psi(-j\omega)} = \sum_{i=1}^q \frac{a_i}{\omega - \lambda_i} + \sum_{i=1}^q \frac{b_i}{\omega - \eta_i} + \sum_{i=1}^{\mu} \frac{c_i}{\omega + \gamma_i} \quad (3.6)$$

де  $\lambda_i$  - полюси  $S_{gu}(j\omega)$ , розташовані у верхній півплощині;  $\eta_i$  - Полюси  $S_{gu}(j\omega)$ , розташовані в нижній півплощині;  $\gamma_i$  - нулі  $\Psi(-j\omega)$ .

Потім, відкидаючи доданки, що мають полюси в нижній півплощині, отримаємо

$$B(j\omega) = \sum_{i=1}^q \frac{a_i}{(\omega - \lambda_i)} \quad (3.7)$$

де коефіцієнти  $a_i$ , визначають за формулою

$$a_i = \left[ (\omega - \lambda_i) \frac{S_{gu}(j\omega)}{\Psi(-j\omega)} \right]_{\omega=\lambda_i}. \quad (3.8)$$

Формули (3.7) і (3.8) використовуються, коли відношення  $S_{gu}(j\omega)/\Psi(-j\omega)$  не має кратних полюсів. Якщо це відношення має кратні полюси, то методика визначення  $B(j\omega)$  залишається колишньою, але при цьому наведені вище формули розкладу  $S_{gu}(j\omega)/\Psi(-j\omega)$  на прості дроби будуть іншими.

Частковим, але вельми важливим і поширеним на практиці є випадок, коли завада є білим шумом з спектральною щільністю  $S_f(j\omega) = S_f(0) = const.$  а спектральна щільність керуючого сигналу  $S_g(\omega)$  описується дробоворациональною функцією

$$S_g(\omega) = G_1(\omega^2)/G_2(\omega^2), \quad (3.9)$$

де порядок  $G_2(\omega^2)$  перевищує порядок  $G_1(\omega^2)$

Корисно запам'ятати, що в цьому випадку оптимальна частотна передавальна функція може бути визначена таким чином:

$$W_{з.опт}(j\omega) = 1 - \sqrt{S_f(0)}/\psi(j\omega). \quad (3.10)$$

**Приклад 3.1** На вході системи діє випадковий корисний сигнал  $G(t)$ , що має спектральну щільність

$$S_g(\omega) = 2D_g T_g / (1 + \omega^2 T_g^2) = S_g(0) / (1 + \omega^2 T_g^2),$$

де  $S_g(0) = 2D_g T_g$  - значення спектральної щільності корисного сигналу на нульовій частоті. На корисний сигнал накладена випадкова завада  $F(t)$  типу «білий шум», спектральна щільність якої дорівнює  $S_f(\omega) = S_f(0) = N$ , де  $S_f(0)$  - значення спектральної щільності завади на нульовій частоті. Середні значення корисного сигналу і завади дорівнюють нулю, кореляція між ними відсутня. Визначити оптимальну частотну передавальну функцію системи.

Оскільки спектральна щільність завади

$$S_f(\omega) = S_f(0) = N = const$$

а спектральна щільність корисного сигналу

$$S_g(\omega) = S_g(0)/(1 + \omega^2 T_g^2) = 2D_g T_g / (1 + \omega^2 T_g^2),$$

то оптимальна частотна передатна функція може бути визначена за (3.10):

$$W_{3.опт}(j\omega) = 1 - \sqrt{S_f(0)}/\Psi(j\omega).$$

Підставляючи у вираз для  $W_{3.опт}(j\omega)$  значення

$$\Psi(j\omega) = \sqrt{S_g(0) + S_f(0) (1 + j\omega\alpha)/(1 + j\omega T_g)}$$

отримуємо

$$W_{3.опт}(j\omega) = 1 - \frac{\sqrt{S_f(0)}}{\sqrt{S_g(0)+S_f(0)}} \frac{1+j\omega T_g}{1+j\omega\alpha} = \frac{\sqrt{S_g(0)+S_f(0)} + \sqrt{S_f(0)}}{\sqrt{S_g(0)+S_f(0)}(1+j\omega\alpha)} + j\omega \frac{\alpha \sqrt{S_g(0)+S_f(0)} - T_g \sqrt{S_f(0)}}{\sqrt{S_g(0)+S_f(0)}(1+j\omega\alpha)}.$$

Оскільки

$$\alpha = T_g \sqrt{S_f(0)} / \sqrt{S_g(0) + S_f(0)},$$

то друге уявне доданок дорівнює нулю і тому оптимальна частотна передатна функція системи

$$W_{3.опт}(j\omega) = \frac{\sqrt{S_g(0)+S_f(0)} - \sqrt{S_f(0)}}{\sqrt{S_g(0)+S_f(0)}(1+j\omega\alpha)} = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+p}}\right) \frac{1}{1+j\omega\alpha}$$

де  $\rho = S_g(0)/S_f(0)$ .

Основоположні результати Н. Вінера були отримані для випадку, коли до входу лінійної системи прикладені стаціонарні випадкові впливи з рівними нулю середніми значеннями (центровані випадкові процеси).

У результаті подальшого розвитку й узагальнення методів синтезу динамічних систем при випадкових впливах були розроблені, наприклад, методи синтезу при випадкових впливах, прикладених в різних точках системи; методи синтезу при одночасному впливі на систему регулярних і випадкових сигналів; методи синтезу систем з обмеженою тривалістю перехідного процесу (з «кінцевої пам'яттю»); методи синтезу систем, що містять випадкові параметри; методи синтезу систем при нестационарних випадкових впливах; методи синтезу нелінійних систем, в тому числі із застосуванням цифрових обчислювальних машин.



### 3.2 Оцінювання параметрів і станів по методу найменших квадратів

При застосуванні комп'ютерів для обчислення задач фільтрації застосовується дискретизація сигналів, які вимірюються на вході та виході об'єкту управління, в результаті чого безперервні сигнали замінюються послідовностями з кусково-постійною апроксимацією, а оцінювання безперервної імпульсної функції  $k_{\text{опт}}(t)$  ця задача параметризується і замінюється оцінюванням кінцевої множини параметрів  $k_0, k_{-1}, \dots, k_{-N_s}$ , яка називається дискретною імпульсною перехідною функцією і має вигляд

$$z_i = \sum_{j=0}^{N_m-1} k_j x_{i-j} \Delta + n_i \quad (3.11)$$

де:  $i = 0, 1, \dots, N_m - 1$ ;

$j = 0, 1, \dots, N_s - 1$ ;

$T_s = N_s \Delta$  – час встановлення об'єкту управління;

$T_m = N_m \Delta$  – час вимірювання виходу  $z_i$ ;

$t = i \Delta$ .

На Рис. 3.1 показано спосіб заміни безперервного сигналу послідовностями сигналу з кусково-постійною апроксимацією.

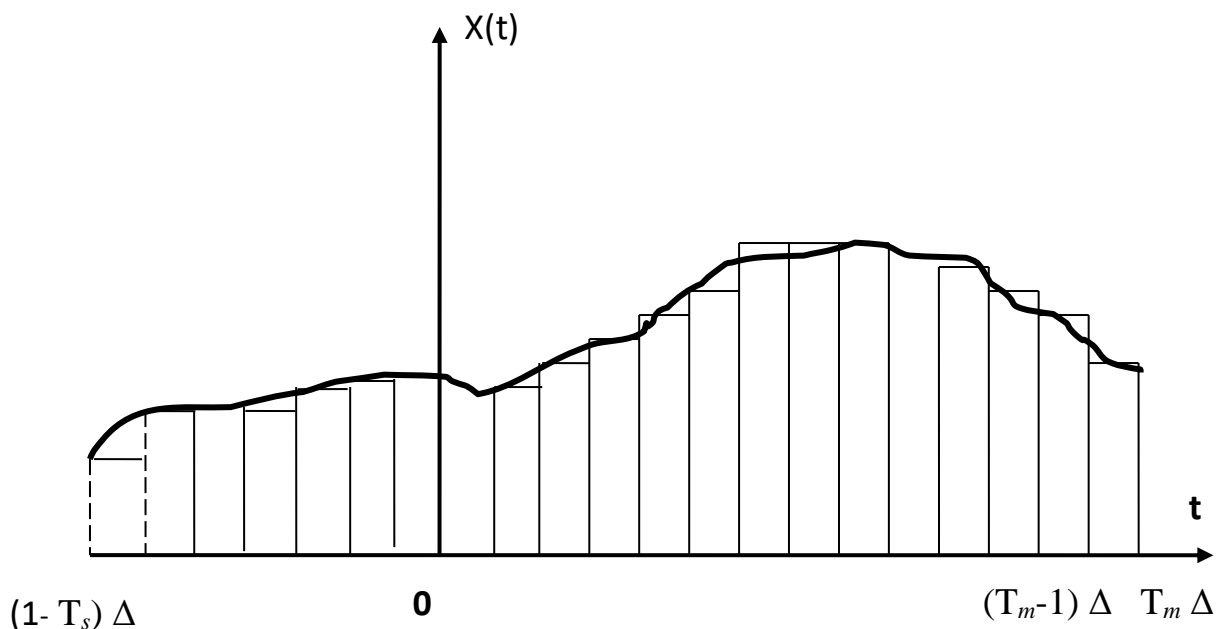


Рисунок 3.1 – Приклад кусково-постійної апроксимації

На Рис.3.2 показана узагальнена схема вимірювання в дискретному часі.

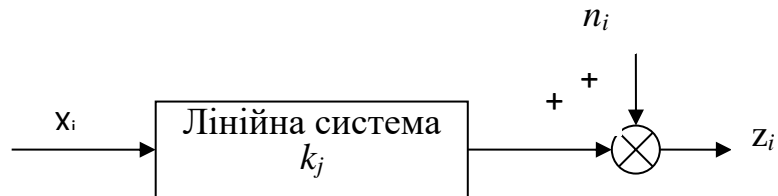


Рисунок 3.2 – Схема вимірювання сигналів у дискретному часі

Для спрощення наступного представлення запишемо рівняння (3.11) у векторно-матричному вигляді

$$z = A\beta + n \quad (3.12)$$

де:

$z$  – вектор вимірювань  $z = [z_0, \dots, z_{N_m-1}]$ ;

$n$  – вектор шумів  $n = [n_0, \dots, n_{N_m-1}]$ ;

$\beta$  – вектор параметрів  $\beta = [k_0\Delta, \dots, k_{N_s-1}\Delta]$

$A$  – матриця заданого вхідного сигналу

$$A = \begin{pmatrix} x_0 & \cdots & x_{-N_s \pm 1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{N_m-1} & \cdots & x_{N_m-N_s} \end{pmatrix}.$$

### 3.2.1 Оцінювання параметрів фільтра по методу найменших квадратів.

#### Рішення рівняння Вінера – Хопфа у дискретному просторі.

Задача зводиться до оцінювання вектору параметрів  $\beta$  при заданій матриці  $A$  і векторі вимірювань  $z$ . Критерієм є вибір такого вектора  $\beta^*$ , який мінімізує суму квадратів нев'язок на інтервалі вимірювання. Положимо, що

$$J = \sum_{i=0}^{N_m-1} n_i^2 \quad (3.13)$$

У матричному вигляді тоді

$$J = n^t n \quad (3.14)$$

Підставляючи (3.12) у (3.14) отримаємо

$$J = (z - A\beta)^T (z - A\beta) \quad (3.15)$$

Тоді для  $\beta^*$  оцінка задовольняє рівнянню

$$J^* = \min J |_{\beta=\beta^*} \quad (3.16)$$

Важливою якістю оцінок методом найменших квадратів є те, що існує один і тільки один локальний мінімум, який співпадає з глобальним мінімумом, що дає єдину оцінку.

Щодо рівняння Вінера - Хопфа, то необхідною умовою обрахування значення  $J$  є виконання умови досягнення екстремума (3.15)

$$0 = \partial J / \partial \beta |_{\beta = \beta^*} = -2A^T (z - A\beta^*) \quad (3.17)$$

На основі (3.17) можна отримати

$$\partial / \partial \beta (\partial J / \partial \beta)^T |_{\beta = \beta^*} = 2A^T A \quad (3.18)$$

Матриця  $A^T A$  буде позитивно визначеною, якщо вона не особлива. Оскільки права частина (3.18) не залежить від  $\beta$ , умова екстремуму (3.17) є необхідною та достатньою для мінімуму. Перепишемо (3.17) у вигляді

$$A^T A \beta^* = A^T z \quad (3.19)$$

Тоді у дискретному вигляді рішення рівняння Вінера – Хопфа еквівалентно рішенням (3.19), а саме

$$\beta^* = (A^T A)^{-1} A^T z \quad (3.20)$$

### 3.2.2 Рекурентне оцінювання параметрів фільтра методом найменших квадратів

Положимо, що маємо якусь кількість вимірювань і що система (3.12) має і скалярних рівнянь таких, які дають можливість записати її у формі

для  $(i - 1)$ -го моменту

$$z_{i-1} = A_{i-1} \beta_i + n_{i-1} \quad (3.21)$$

а для  $i$ -го моменту

$$z_i = A_i \beta_{i+1} + n_i \quad (3.22)$$

З рівняння (3.20) витікає

$$\beta_i^* = P_i A_{i-1}^T z_{i-1} \quad (3.23)$$

$$\beta_{i+1} = P_{i+1} A_i^T z_i \quad (3.24)$$

де

$$P_{i+1} = (A_{i-1}^T A_{i+1})^{-1}$$

а для  $i$ -го моменту

$$P_i = (A_i^T A_i)^{-1} = (A_{i-1}^T A_{i-1} + a_i a_i^T)^{-1} = (P_i^{-1} + a_i a_i^T)^{-1} \quad (3.26)$$

причому треба відмітити, що  $a_i$  являється вектором стовпцем, тому (3.26) може бути представлено у вигляді

$$P_{i+1} = P_i - P_i a_i (a_i^T P_i a_i + 1)^{-1} a_i^T P_i \quad (3.27)$$

Рівняння (3.26) та (3.27) є рекурсивними, але краще користуватися (3.27) тому, що  $(a_i^T P_i a_i + 1)$  – це скаляр, який може бути обернено тривіально просто на відміну від матриці  $P_i$ . З (3.24) можна отримати ще одне рекурентне рівняння

$$\beta_{i+1} = P_{i+1} A_i^T z_i = \beta_{i+1} + P_{i+1} a_i (z_i - a_i^T \beta_i) \quad (3.28)$$

Формули (3.27) та (3.28) дають можливість знайти нову оцінку параметра  $\beta_{i+1}$ , якщо відома попередня оцінка  $\beta_i$  та оцінка  $P_i$ , а також інформація про  $a_i^T$  і  $z_i$ .

Описаний вище підхід дає можливість реалізувати задачу фільтрації – отримання оцінок на ковзаючому інтервалі оцінювання для задач управління в реальному часі при наявності початкової інформації про процес  $z_i$ , або в процесі накопичення такої інформації в процесі самого оцінювання.

Слід зауважити, що окрім задачі фільтрації (оцінювання станів у даний момент) існує задача згладжування (оцінювання станів в минулому), що відповідає оцінюванню в реальному часі та після проведення вимірювань відповідно.

Наведені вище рівняння стосуються об'єктів з одним входом та одним виходом.

### **3.2.3 Рекурентне оцінювання станів багатомірного об'єкту управління методом найменших квадратів. Рівняння оцінювання Калмана.**

Тепер розглянемо оцінювання станів багатомірного об'єкту, на вхід якого поступає білий шум.

Нехай наша система спостереження за станом багато параметричного об'єкту управління описується набором рівнянь виду

$$\dot{x}_{i+1} = F_i \dot{x}_i + w_i \quad (3.29)$$

$$z_i = H_i \dot{x}_i + v_i \quad (3.30)$$

де:  $\dot{x}_i$  – вектор станів об’єкту;

$F_i$  - матриця параметрів системи спостереження;

$H_i$  - матриця вимірювання з позитивними діагональними членами;

$w_i$  - вектор білого шуму, який діє на вході об’єкту;

$v_i$  - вектор білого шуму, який описує випадковий вплив системи вимірювання.

Відповідно білий шум має нульове середнє та нульову автокореляцію, що відповідає умовам

$$E[w_i] = 0, \quad (3.31)$$

$$E[w_i w_j] = Q_i \text{ при } j = i, \quad (3.32)$$

$$E[w_i w_j] = 0 \text{ в інших випадках,} \quad (3.33)$$

а також

$$E[v_i] = 0 \quad (3.34)$$

$$E[v_i v_j] = R_i \text{ при } j = i \quad (3.35)$$

$$E[v_i v_j] = 0 \text{ в інших випадках.} \quad (3.36)$$

Матриці  $Q_i$  та  $R_i$  - задані діагональні матриці, діагональні елементи яких є рівними дисперсіям відповідних шумів  $w_i$  та  $v_i$ , а вони самі – ортогональні між собою

$$E[w_i v_j] = 0 \text{ для всіх } i \text{ та } j. \quad (3.37)$$

Для квадратичного критерія якості

$$J_{i+1} = E[(\dot{x}_{i+1} - \dot{x}_{i+1}^*)^T W_{i+1} (\dot{x}_{i+1} - \dot{x}_{i+1}^*)], \quad (3.38)$$

де:  $W$  – діагональна матриця з позитивними вагами.

За умов ортогональності помилки оптимального лінійного оцінювання  $\dot{x}$  та вектора вимірювань  $z$  виходить

$$E[(\dot{x}_{i+1} - \dot{x}_{i+1}^*) z_j^0] = 0, j = 0, 1, \dots, i. \quad (3.39)$$

Можливо обрати таку оптимальну лінійну оцінку  $\dot{x}_{i+1}^*$ , яка задовольняє рівнянню виду

$$\dot{x}_{i+1}^* = B_i \dot{x}_i^* + K_i z_i, \quad (3.40)$$

де

$$B_i = F_i - K_i H_i \quad (3.41)$$

$$K_i = F_i P_i H_i^T (H_i P_i H_i^T + R_i)^{-1} \quad (3.42)$$

та  $P_i$  – коваріаційна матриця помилок

$$e_i = \dot{x}_i - \dot{x}_i^* \quad (3.43)$$

ТАКИМ ЧИНОМ

$$P_i = E[e_i e_i^T] \quad (3.44)$$

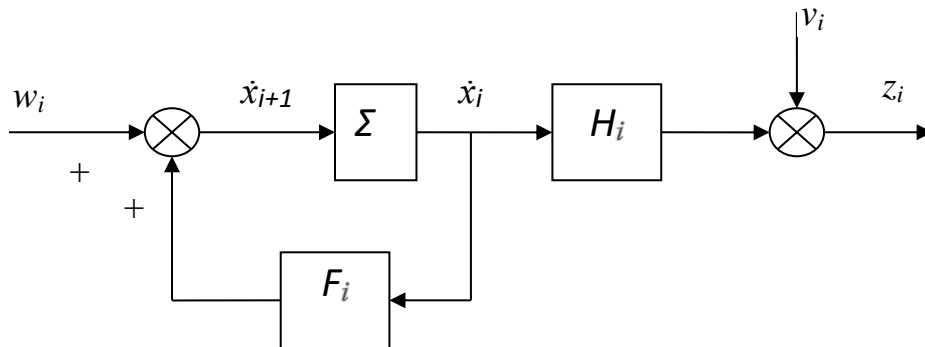


Рисунок 3.3 - Схема багатомірного об'єкту управління з білим шумом на вході

Підставляючи (3.41) в (3.40) можливо знайти рекурентну оцінку стану багатомірного об'єкту, який описується системою (3.29) та (3.30)

$$\dot{x}_{i+1}^* = F_i \dot{x}_i^* + K_i (z_i^0 - H_i \dot{x}_i^*) \quad (3.45)$$

де  $\varepsilon_i = (z_i - H_i \dot{x}_i^*)$  – помилка (нев'язка) вимірювання у (3.30), а схема фільтра тоді відповідає рис.3.4.

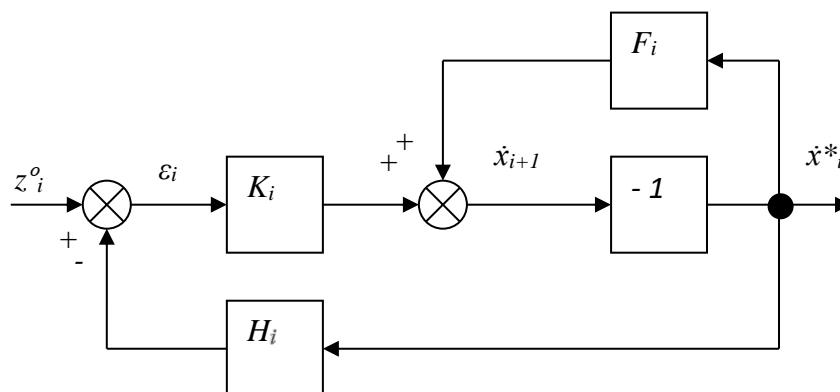


Рисунок 3.4. - Схема рекурентного оцінювання стану багатомірного об'єкту у дискретному просторі

Блок з позначкою «-1» показує затримку сигналу  $\dot{x}_{i+1}$  на один такт для формування оптимальної оцінки  $\dot{x}_i^*$ .

Схема рис. 3.4. демонструє варіант вирішення задачі оптимальної фільтрації сигналу  $\dot{x}_i^*$  по результатах вимірювання  $z_i^0$ . Коефіцієнт фільтрації  $K_i(z_i^0)$  можна вирахувати за формулою (3.42). При умові взаємної незалежності сигналів вимірювання для різних параметрів оцінювання, матриця  $H_i$  є з одиничними діагональними членами, що забезпечує ортогональність цих сигналів і значно спрощує потрібні обчислювальні ресурси для отримання оцінки оберненої матриці  $(H_i P_i H_i^T + R_i)^{-1}$  відповідно (3.42).

Для обчислення оцінки станів  $\dot{x}_i^*$  треба вміти обчислювати коваріаційну матрицю помилок  $P_i$ . Із формул (3.42) та (3.36) слідує, що другий член в (3.42) можна прийняти рівним нулю. Тоді можна записати

$$P_{i+1} = (F_i - K_i H_i) P_i F_i + Q_i \quad (3.46)$$

Початкова умова для (3.46) мають вигляд

$$P_0 = E[\dot{x}_0 \dot{x}_0^T] \quad (3.47)$$

При відсутності апріорної інформації елементи коваріаційної матриці  $P_0$  прагнуть у нескінченість. При програмуванні обґрунтовано можна вважати

$$P_0 = c^2 I \text{ при } c^2 \rightarrow \infty$$

Рівняння (3.45) та (3.46) відомі як рівняння оцінювання Калмана.

Останнім часом при розрахунку систем, що знаходяться під впливом випадкових (у тому числі і нестационарних) процесів, широке застосування знайшла теорія оптимальних фільтрів, розроблена Р. Калманом і Р. Б'юси.

### 3.3. Оптимальний фільтр Калмана - Б'юси

Знаходження оптимального фільтра Вінера ґрунтувалося на використанні інтегрального рівняння Вінера - Хопфа, при вирішенні якого стаціонарні випадкові процеси розглядалися в частотній області. У 1960 р. Р. Калман і Р. Б'юси розглянули проблему лінійної фільтрації в тимчасовій області і, використовуючи концепцію «простору станів», запропонували новий ефективний метод синтезу оптимальних систем за критерієм мінімуму

математичного сподівання квадрата випадкової помилки, застосовний як для стаціонарних, так і для нестаціонарних марковських випадкових процесів. Так як в основі використовуваної Калманом і Бьюкс концепції «простору станів» лежить припущення про те, що випадковий процес є марковським, тому їх підхід до синтезу оптимальних лінійних систем іноді називають *марковськiй теорiєю оптимальної лінійної фільтрації*.

Описуючи всі випадкові процеси не за допомогою кореляційних функцій або спектральних густин, а за допомогою диференціальних рівнянь або рівнянь стану, Калман і Б'юси показали, що при випадкових впливах оптимальна лінійна система (оптимальний фільтр Калмана - Б'юси) повинна задовольняти деякій системі неоднорідних лінійних диференціальних рівнянь. Знаходження оптимальної системи за цими диференціальним рівнянням набагато легше, ніж з інтегральних рівнянь Вінера - Хопфа, особливо у випадку нестаціонарних випадкових процесів.

Виведення рівнянь оптимального фільтра був виконаний Калманом і Б'юси для багатовимірних випадкових процесів. Познайомимося з основною ідеєю методу Калмана-Б'юси на прикладі більш простих, але часто зустрічаються на практиці одновимірних фільтрів.

Припустимо, що синтезуєма система повинна відтворювати деякий сигнал  $Z(t)$ , що представляє собою в загальному випадку нестаціонарний випадковий процес. Нехай на вході системи крім цього сигналу діє також завада  $F(t)$ , що представляє собою в загальному випадку нестаціонарний випадковий процес типу «білий шум» з нульовим середнім значенням. Таким чином, сумарний вхідний сигнал

$$U(t) = Z(t) + F(t) \quad (3.48)$$

Для виведення рівняння одновимірного оптимального фільтра Калмана - Б'юси істотним є те, що випадковий процес  $Z(t)$  повинен бути спочатку представлений диференціальним рівнянням першого порядку такого вигляду:

$$dZ(t)|dt = A(t) Z(t) + V(t). \quad (3.49)$$



де  $A(t)$  - деяка функція часу, що залежить від статистичних характеристик випадкового процесу  $Z(t)$ ;  $V(t)$  - нестационарний випадковий процес типу «білий шум» з нульовим середнім значенням. Кореляційні функції нестационарних випадкових процесів  $V(t)$  і  $F(t)$  мають вигляд:

$$\begin{cases} R_{vv}(t, \tau) = M|V(t)V(\tau)| = L(t)\delta(t - \tau); \\ R_{ff}(t, \tau) = M|F(t)F(\tau)| = N(t)\delta(t - \tau); \\ R_{vf}(t, \tau) = 0, \end{cases} \quad (3.50)$$

де  $L(t)$  і  $N(t)$  - безперервні, безперервно диференціюються функції часу, причому  $L(t) \geq 0$ ;  $N(t) > 0$ .

В окремому випадку для стаціонарних випадкових процесів  $V(t)$  і  $F(t)$  їх кореляційні функції:

$$R_v(\tau) = L\delta(\tau); R_f(\tau) = N\delta(\tau); R_{vf}(\tau) = 0, \quad (3.51)$$

де  $L = const$ ,  $N = const$ .

Якщо випадковий процес на виході системи дорівнює  $X(t)$ , то випадкова помилка системи  $E(t)$ , що дорівнює різниці між відтвореним сигналом  $Z(t)$  і вихідним сигналом  $X(t)$ , має вигляд

$$E(t) = Z(t) - X(t) \quad (3.52)$$

Калман і Б'юси показали, що оптимальна система (оптимальний фільтр Калмана-Б'юси), яка забезпечує в будь-який момент часу  $t > t_0$  відтворення сигналу  $Z(t)$  при мінімумі математичного очікування квадрата випадкової помилки, повинна описуватися неоднорідним диференціальним рівнянням виду

$$\frac{dX(t)}{dt} = Q(t)X(t) + C(t)U(t). \quad (3.53)$$

Таким чином, при синтезі оптимального фільтра Калмана-Б'юси завдання зводиться до знаходження таких функцій часу  $Q(t)$  і  $C(t)$  в диференціальному рівнянні (3.53), при яких забезпечувався б мінімум математичного сподівання квадрата випадкової помилки, тобто

$$M\{|E(t)\}^2| = M\{|Z(t) - X(t)\}^2| = min. \quad (3.54)$$

Припускаючи, що випадковий процес  $Z(t)$  представлений у вигляді (3.49), наведемо без доведення формули для знаходження функцій  $Q(t)$  і  $C(t)$ , при яких забезпечується мінімум (3.54).

Перш ніж визначити функції  $Q(t)$  і  $C(t)$ , знаходять деяку функцію часу  $r(t)$ , рівну математичному очікуванню квадрата випадкової помилки (дисперсії помилки):

$$r(t) = M\{E(t)\}^2, \quad (3.55)$$

яка визначається як рішення наступного диференціального рівняння Риккати:

$$\frac{dr(t)}{dt} = L(t) + 2A(t)r(t) - r^2(t)|N(t) \quad (3.56)$$

Для вирішення (3.56) потрібно знати початкове значення  $r(t_0)$  при  $t_0 = 0$ . Зазвичай  $X(t_0) = 0$ , тому

$$\begin{aligned} E(t_0) &= Z(t_0) - X(t_0) = X(t_0); \\ r(t_0) &= M\{E(t_0)\}^2 = M\{Z(t_0)\}^2 = R_{zz}(t_0, t_0) \end{aligned} \quad (3.57)$$

Після знаходження функції  $r(t)$  визначають функцію  $C(t)$  за формулою

$$C(t) = r(t)|N(t) \quad (3.58)$$

і функцію  $Q(t)$  за формулою

$$Q(t) = A(t) - C(t). \quad (3.59)$$

Найбільш складним етапом синтезу оптимальних фільтрів методом Калмана-Б'юси є рішення рівняння Риккати (3.56). У загальному випадку воно вимагає застосування комп'ютерних обчислень.

Важливе самостійне значення мають також питання дослідження існування розв'язку рівняння (3.56), його єдиності рішення та стійкості.

Рівняння оптимального фільтра Калмана-Б'юси іноді записують у наступному вигляді:

$$\frac{dX(t)}{dt} = A(t)X(t) - C(t)[U(t) - X(t)]. \quad (3.60)$$

Диференціальному рівнянню (3.53) відповідає структурна схема оптимального фільтра, показана на рис. 3.5а; диференціальному рівнянню (3.60) відповідає структурна схема, показана на рис. 3.5б. Таким чином, оптимальний фільтр Калмана-Б'юси можна розглядати як деяку динамічну систему зі зворотним зв'язком, що має структурну схему, наведену або на рис. 3.5а, або на рис. 3.5б. Природно, що обидві ці структурні схеми еквівалентні.

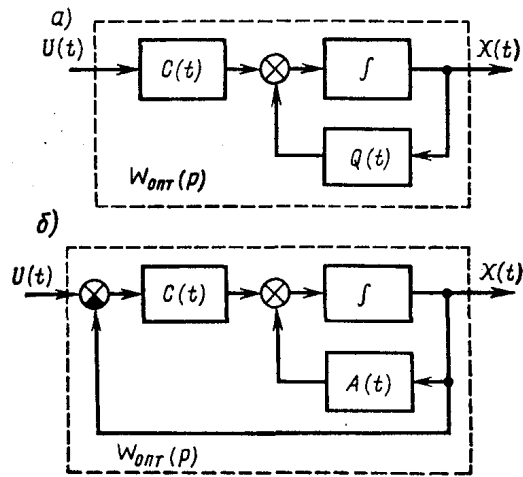


Рис. 3.5

Для нестационарних випадкових процесів функції  $A(t)$ ;  $C(t)$ ,  $Q(t)$  залежать від часу і оптимальний фільтр Калмана-Б'юси виходить *нестационарним*.

Для стаціонарних випадкових процесів функції  $A(t) = A$ , а також в сталому режимі функції  $C(t) = C$ ;  $Q(t) = Q = A - C$  не залежать від часу, тому оптимальний фільтр Калмана-Б'юси в цьому випадку є *стаціонарним*, визначеним диференціальним рівнянням з постійними коефіцієнтами

$$\frac{dX(t)}{dt} = (A - C)X(t) + CU(t). \quad (3.61)$$

Система, описувана (3.61), буде в сталому режимі відтворювати на своєму виході стаціонарний випадковий сигнал  $Z(t)$  з мінімальною середньою квадратичною помилкою. Природно, що для стаціонарних процесів результати, отримані методом Калмана - Б'юси і методом Вінера, збігаються.

Рівняння (3.61), отримане в тимчасовій області, еквівалентно оптимальному фільтру Вінера, який визначається в частотній області рівнянням (3.2).

Зупинимося коротко на дуже істотному для фільтрів Калмана - Б'юси питанні про можливість представлення випадкового процесу  $Z(t)$  у вигляді диференціального рівняння (3.49).

Знаходження (3.49) пов'язане із завданням визначення *формуючого фільтра* (стаціонарного або нестационарного), який при впливі на його вхід білого шуму  $V(t)$  дозволяє отримати на свій вихід заданий випадковий процес  $Z(t)$ . Структурна схема такого формуючого фільтра відповідно до (3.49) може бути представлена таким чином, як показано на рис.3.6.

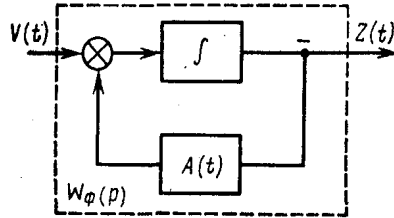


Рис.3.6

Для стаціонарних випадкових процесів методи визначення параметрів формуючих фільтрів розроблені добре. У цих випадках формуючий фільтр можна описати звичайним диференціальним рівнянням з постійними коефіцієнтами або відповідної передавальної функцією формуючого фільтра  $W_\phi(p)$ . Особливо просто знаходиться передавальна функція формуючого фільтра в тому випадку, коли вираз для спектральної щільності  $S_z(\omega)$  стаціонарного випадкового процесу  $Z(t)$  має вигляд дробово-раціональної функції частоти, тобто, коли вираз для спектральної щільності може бути представлено у вигляді добутку двох комплексно-сполучених множників:

$$S_z(\omega) = S_1(j\omega)S_1(-j\omega). \quad (3.62)$$

Нехай на вході формуючого фільтра діє стаціонарний випадковий сигнал  $V(t)$  типу «білий шум», що має спектральну щільність  $S_v(\omega) = L$ , тоді спектральна щільність сигналу на виході формуючого фільтра

$$S_z(\omega) = |W_\phi(j\omega)|^2 S_v(\omega) = W_\phi(j\omega)W_\phi(-j\omega)S_v(\omega). \quad (3.63)$$

Враховуючи (3.62), можна записати

$$S_1(j\omega)S_1(-j\omega) = [\sqrt{S_v(\omega)}W_\phi(j\omega)][\sqrt{S_v(\omega)}W_\phi(-j\omega)], \quad (3.64)$$

звідки частотна передатна функція формуючого фільтра

$$W_\phi(j\omega) = \frac{S_1(j\omega)}{\sqrt{S_v(\omega)}} = \frac{S_1(j\omega)}{\sqrt{L}}. \quad (3.65)$$

Підставляючи в останній вираз  $p = j\omega$ , отримуємо вираз для передавальної функції формуючого фільтра

$$W_\phi(p) = \frac{S_1(p)}{\sqrt{L}} \quad (3.66)$$

Знаючи передавальну функцію формуючого фільтра, знаходимо диференціальне рівняння виду (3.33), що зв'язує випадкові процеси  $Z(t)$  і  $V(t)$ .

Якщо спектральна щільність  $S_z(\omega)$  не є дрібно-раціональною функцією частоти або отримана експериментально, то для знаходження формуючого фільтра її потрібно спочатку апроксимувати дрібно-раціональною функцією частоти.

На закінчення слід зазначити, що якщо вхідні дії є стаціонарними випадковими процесами, то метод Калмана - Б'юси не має переваг перед методом синтезу оптимальних фільтрів Вінера. Цей метод в основному застосовують для синтезу оптимальних нестаціонарних лінійних фільтрів.

Він дозволяє також досить просто знаходити структуру і параметри оптимального фільтра і в тому випадку, коли відтворений сигнал  $Z(t)$  описується поліномом з випадковими коефіцієнтами:

$$Z(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n, \quad (3.67)$$

де  $a_0, a_1, \dots, a_n$  - випадкові величини з відомими статистичними характеристиками.

Синтез оптимальних лінійних фільтрів Калмана - Б'юси, проведений спочатку для завади у вигляді білого шуму, був надалі розвинений на більш загальні випадки, наприклад на випадок корельованих завад, що мають нерівномірну спектральну щільність, на випадок нелінійної фільтрації та ін.

Зауважимо, нарешті, що оптимальні фільтри Калмана - Б'юси, як і оптимальні фільтри Вінера, дозволяють вирішувати не тільки завдання оптимального відтворення сигналу на тлі перешкод (фільтрації), але і статистичного прогнозування, статистичного інтегрування і диференціювання та ін.

**Приклад 3.2.** На вході лінійної стежить системи діє стаціонарний випадковий процес  $G(t)$ , спектральна щільність якого

$$S_g(\omega) = \frac{S_g(0)}{1+\omega^2 T_g^2} = \frac{2D_g T_g}{1+\omega^2 T_g^2}$$

і випадкова завада  $F(t)$  типу «білий шум», що має спектральну щільність

$$S_f(\omega) = S_f(0) = N$$

Чисельні значення коефіцієнтів рівні:

$$D_g = 100B^2; T_g = 20c; N = 0,01 \frac{B}{Гц}$$

Визначити методом Калмана-Б'юси оптимальну передавальну функцію системи, що забезпечує мінімум середньоквадратичної помилки.

1. Оскільки система призначена для відтворення корисного сигналу  $G(t)$ , то  $H(p) = 1$ , відтворений сигнал  $Z(t) = G(t)$  і  $S_z(\omega) = S_g(\omega)$ .

Відповідно до (3.35) представляємо вираз для спектральної щільності  $S_g(\omega)$  у вигляді перемножування комплексно-сполучених співмножників:

$$S_g(\omega) = S_1(j\omega)S_1(-j\omega) = \frac{\sqrt{S_g(0)}}{1+j\omega T_g} \frac{\sqrt{S_g(0)}}{1-j\omega T_g}$$

і знаходимо

$$S_1(j\omega) = \frac{\sqrt{S_g(0)}}{1+j\omega T_g}$$

2. Розглядаючи заданий стаціонарний випадковий процес  $G(t)$  як реакцію деякого формуючого фільтра на стаціонарний випадковий процес  $V(t)$  типу «білий шум», що має спектральну щільність  $S_v(\omega) = L$ , знаходимо частотну передавальну функцію цього формуючого фільтра :

$$W_\phi(j\omega) = \frac{S_1(j\omega)}{\sqrt{S_v(\omega)}} = \sqrt{\frac{S_g(0)}{L}} \frac{1}{1+j\omega T_g}$$

3. Знаходимо передавальну функцію формуючого фільтра:

$$W_\phi(p) = \frac{G(t)}{V(t)} = \sqrt{\frac{S_g(0)}{L}} \frac{1}{1+pT_g}$$

4. Отриманою передавальною функцією формуючого фільтра відповідає наступне диференціальне рівняння, що зв'язує випадкові процеси

$$T_g \frac{dG(t)}{dt} + G(t) = \sqrt{\frac{S_g(0)}{L}} V(t)$$

$$\frac{dG(t)}{dt} = -\frac{1}{T_g} G(t) + \sqrt{\frac{S_g(0)}{LT_g^2}} V(t)$$

Щоб привести останнє диференціальне рівняння до виду (3.64), прийемо, що спектральна щільність білого шуму дорівнює  $S_v(\omega) = L = 2D_g / T_g$ , тоді

$$\sqrt{\frac{S_g(0)}{LT_g^2}} = 1$$

і остаточно випадковий процес  $G(t)$  може бути представлений як

$$\frac{dG(t)}{dt} = AG(t) + V(t)$$

де  $A = -1 / T_g$ .

Відповідна цього диференціального рівняння структурна схема формуючого фільтра показана на рис. 3.5а.

5. Рівняння (3.56) для дисперсії помилки в даному випадку має вигляд

$$\frac{dr(t)}{dt} = L + 2Ar(t) - \frac{r^2(t)}{N}$$

При постійних значеннях коефіцієнтів  $A$ ,  $L$  і  $N$  це диференціальне рівняння є рівнянням із перемінними і приводиться до наступного вигляду:

$$\int \frac{dr}{(L+2Ar(t)-\frac{r^2}{N})} - \int dt = 0$$

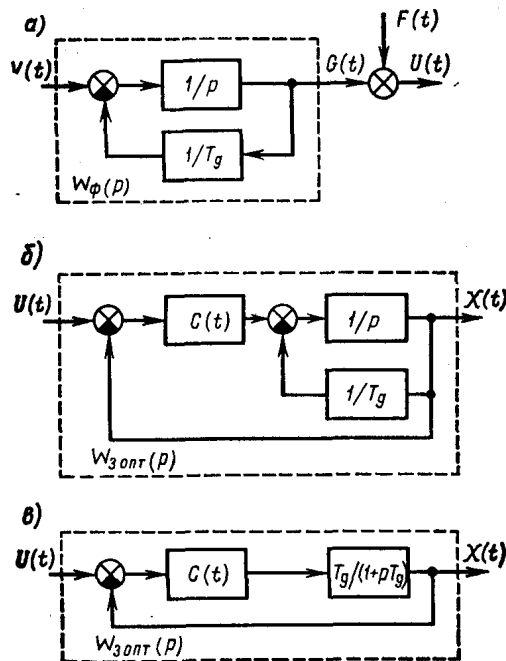


Рис. 3.7

Інтегруючи за загальними правилами, отримуємо

$$\frac{1}{\sqrt{A^2 + \frac{L}{N}}} \ln \left[ \frac{-\frac{r}{N} + A - \sqrt{A^2 + \frac{L}{N}}}{-\frac{r}{N} + A + \sqrt{A^2 + \frac{L}{N}}} \right] - t = \ln C_1$$

де  $C_1$  - постійна інтегрування.

Останній вираз можна переписати таким чином:

$$\ln \frac{-\frac{r}{N} + A - \sqrt{A^2 + \frac{L}{N}}}{\left(-\frac{r}{N} + A + \sqrt{A^2 + \frac{L}{N}}\right) C} = t \sqrt{A^2 + \frac{L}{N}}$$

Нову постійну інтегрування  $C$  знаходять з початкових умов при  $t = t_0 = 0$ . Відповідно до (3.57) початкове значення дисперсії помилки

$$r(t_0) = R_{gg}(t_0, t_0) = R_g(0) = D_g$$

тому постійна інтегрування виходить рівної

$$C = \frac{-\frac{D_g}{N} + A - \sqrt{A^2 + \frac{L}{N}}}{-\frac{D_g}{N} + A + \sqrt{A^2 + \frac{L}{N}}}$$

Таким чином, можна записати

$$\frac{\left(-\frac{r}{N}+A-\sqrt{A^2+\frac{L}{N}}\right)\left(-\frac{D_g}{N}+A+\sqrt{A^2+\frac{L}{N}}\right)}{\left(-\frac{r}{N}+A+\sqrt{A^2+\frac{L}{N}}\right)\left(-\frac{D_g}{N}+A-\sqrt{A^2+\frac{L}{N}}\right)} = e^{t\sqrt{A^2+\frac{L}{N}}}$$

Враховуючи, що  $L = 2D_g/T_g$ ,  $A = -1/T_g$ , і виробляючи відповідні перетворення, остаточно отримуємо

$$r(t) = \frac{N}{T_g} \frac{0,5p(1-\sqrt{1+p})-0,5p(1+\sqrt{1+p})e^{\beta t}}{(1+0,5p-\sqrt{1-p})-(1+0,5p+\sqrt{1+p})e^{\beta t}}$$

де  $\rho = S_g(0)/S_f(0)$  - відношення спектральних густин відтвореного сигналу і завади на нульовій частоті.

Підставляючи  $\beta = \frac{\sqrt{1+p}}{T_g}$  при  $t \rightarrow \infty$ , знаходимо вираз для дисперсії помилки в сталому режимі:

$$r = D_g = \frac{N}{T_g} \frac{0,5p(1+\sqrt{1+p})}{1+0,5p+\sqrt{1+p}} = \frac{2D_g}{\sqrt{1+p}+1}$$

6. Відповідно до (3.58) знаходимо функцію  $C(t)$ :

$$C(t) = \frac{r(t)}{N} = \frac{1}{T_g} \frac{0,5p(1-\sqrt{1+p})-0,5p(1+\sqrt{1+p})e^{\beta t}}{(1+0,5p-\sqrt{1-p})-(1+0,5p+\sqrt{1+p})e^{\beta t}}$$

Із останнього виразу знаходимо початкове значення коефіцієнта  $C(0)$  (при  $t = t_0 = 0$ ), тобто

$$C(0) = \frac{p}{2T_g} = \frac{D_g}{N}$$

і значення коефіцієнта  $C(\infty)$  в сталому режимі (при  $t \rightarrow \infty$ )

$$C(\infty) = \frac{p}{T_g(1+\sqrt{1+p})}$$

7. Диференціальне рівняння оптимального фільтра Калмана-Б'юси відповідно до (3.60) має вигляд

$$\frac{dX(t)}{dt} = -\frac{X(t)}{T_g} + C(t)[U(t) - X(t)]$$

Структурна схема, відповідна цьому диференціальному рівнянню, наведена на рис. 3.3б. Замінюючи інтегруюча ланка, охоплене зворотним зв'язком інерційним ланкою, можна уявити структурну схему так, як показано на рис. 3.3в.

Використовуючи цю структурну схему і значення передавальних функцій окремих її динамічних ланок, визначаємо для усталеного режиму передавальну функцію замкненої оптимальної системи:

$$W_{s.опт}(p) = \frac{\left[\frac{C(\infty)T_g}{(1+pT_g)}\right]}{\left[\frac{1+C(\infty)T_g}{(1+pT_g)}\right]} = \frac{K}{(1+Tp)}$$

$$K = \frac{C(\infty)T_g}{1+C(\infty)T_g} = \frac{p}{1+p+\sqrt{1+p}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{1+p}}$$



$$T = \frac{C(\infty)T_g}{1+C(\infty)T_g} = \frac{T_g}{1+\frac{p}{(1+\sqrt{1+p})}} = \frac{T_g}{\sqrt{1+p}} \quad )$$

Слід зауважити, що отриманий вираз для передавальної функції оптимального фільтра Калмана - Б'юси повністю збігається з виразом для передавальної функції фільтра Вінера.

Слід звернути увагу також на те, що навіть при стаціонарних випадкових впливах в перехідному режимі оптимальний фільтр Калмана - Б'юси є нестаціонарним, оскільки коефіцієнт  $C(t)$  змінюється в часі.

### 3.4. Фільтр Калмана в просторі станів

Досліджується модель об'єкта управління у вигляді

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax = Bu + Gw \\ y_v = Cx + Du + Hw + v \end{cases} \quad (3.68)$$

з відомими входами  $u$  і збуреннями по входах  $w$  і вимірам  $v$ , які є "білим" шумом з наступними характеристиками:

$$\begin{aligned} M\{w\} &= M\{v\} = 0, \\ M\{w(t)w(\tau)^T\} &= Q\delta(t - \tau) \\ M\{v(t)w(\tau)\} &= R\delta(t - \tau) \\ M\{v(t)v(\tau)^T\} &= N\delta(t - \tau) \end{aligned} \quad (3.69)$$

Потрібно виконати синтез спостерігача для оцінювання вектора змінних стану об'єкта, який мінімізує сталу помилку оцінювання

$$P = \lim_{t \rightarrow \infty} M\{(x - \hat{x})(x - \hat{x})^T\} \quad (3.70)$$

Нехай багатовимірна система визначається як система з  $l$ -входами і  $n$ -виходами, у якій перетворення "вхід-вихід" задано у вигляді матричної імпульсної перехідної функції  $K(t, \tau)$ .

Нехай  $U(t)$  –  $l$ -мірний вектор входу фільтра, а  $\hat{X}(t)$  –  $n$ -мірний вектор виходу. Тоді зв'язок між векторами  $\hat{X}(t)$  та  $Y(t)$  визначений інтегралом

$$\hat{X}(t) = \int_{t_0}^t K(t, \tau)Y(\tau) d\tau, \hat{X}(t_0) = 0$$

Нехай  $Y(t)$  – дійсний випадковий процес з нульовим математичним очікуванням і кореляційною функцією  $R_{YY}(t, \tau)$ . Позначимо норму довільної квадратної матриці  $B$  через  $\|B\|$  і визначимо її наступним чином:

$$\|B\| = \sqrt{\text{tr}(BB^T)}$$

де  $\text{tr}(\cdot)$  – слід, тобто сума діагональних елементів матриці.

Нехай на вхід багатовимірної фільтри надходить спотворений сигнал як сума корисного сигналу т.ч.  $M(t)$  и завади  $N(t)$ ,

$$Y(t) = M(t) + N(t)$$

где  $M(t)$  и  $N(t) - l$  – мірні вектори з відомими кореляційними функціями  $R_{MM}(t, \tau)$  и  $R_{NN}(t, \tau)$ .

Припустимо, що існує ідеальний вхід  $X(t)$  деякої системи, який визначає бажаний вихід і пов'язаний з корисним сигналом співвідношенням

$$X(t) = \int_{t_0}^t K_{ID}(t, \tau)M(\tau)d\tau$$

де  $K_{ID}(t, \tau)$  – матриця імпульсної передавальної функції ідеальної системи.

Розглянемо вектор помилок

$$X_{\sigma}(t) = X(t) - \hat{X}(t)$$

Завдання полягає в тому, щоб вибрати таку фізичну реалізовану матричну імпульсну перехідну функцію  $K^*(t, \tau)$  так, щоб математичне сподівання квадрата норми помилок було мінімальним

$$M\{\|X_{\sigma}(t)\|^2\} = \min_{K(t, \tau)} \quad (3.71)$$

де  $K(t, \tau) = 0$ .

Залежно від того, яке завдання стоїть: прогнозування, фільтрації або згладжування, визначається  $K_{ID}(t, \tau)$  ідеальної системи. В задачі фільтрації  $X(t) = M(t)$ , т.е.  $K_{ID}(t, \tau) = E^* \delta(t - \tau)$ . При такій постановці завдання мінімум середньоквадратичної помилки (3.71) визначається МПФ  $K^*(t, \tau)$ , одержуваної з узагальненого рівняння Вінера-Хопфа для багатовимірних систем

$$R_{MY}(t, \tau) = \int_0^t K^*(t, s)R_{YY}(s, \tau)ds$$

Відомо, що якщо на вхід системи надходить випадковий сигнал  $Y(t)$ , що є стаціонарним, в широкому сенсі, випадковим процесом, оптимальну матричну передавальну функцію  $W^*(s)$  багатомірної фільтри можна отримати факторизації раціональної матриці спектральних площин. У разі нестационарного випадкового процесу рішення інтегрального рівняння Вольтерра 1-го роду навіть для скалярного випадку представляє серйозні труднощі, не кажучи вже про векторному.

Калман в своїх роботах модифікував постановку задачі багатовимірної фільтрації Вінера, надавши їй форму проблеми простору стану. В результаті такої модифікації був отриманий фільтр Калмана, який здійснює процедуру рекурсивного оцінювання, коли підлягає оцінюванню сигнал що є вхідним сигналом лінійної нестационарної динамічної системи.

Розглянемо безперервну модель об'єкта управління

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax = Bu + Gw \\ y_v = Cx + Du + Hw + v \end{cases}$$

з відомими входами  $u$  і збуреннями по входах  $w$  і вимірам  $v$ , які є "білим" шумом з наступними характеристиками:

$$\begin{aligned} M\{w\} &= M\{v\} = 0, M \\ M\{w(t)w(\tau)^T\} &= Q\delta(t - \tau) \\ M\{v(t)v(\tau)^T\} &= R\delta(t - \tau) \\ M\{v(t)w(\tau)^T\} &= N\delta(t - \tau) \end{aligned}$$

Потрібно виконати синтез спостерігача для оцінювання вектора змінних стану об'єкта, який мінімізує сталу помилку оцінювання

$$P = \lim_{t \rightarrow \infty} M\{(x - \hat{x})(x - \hat{x})^T\}$$

Оптимальним рішенням є фільтр Калмана, який описується рівняннями

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y_v - C\hat{x} - Du) \\ \begin{bmatrix} \dot{y}_v \\ \hat{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ I \end{bmatrix} \hat{x} + \begin{bmatrix} C \\ 0 \end{bmatrix} u + Hw + v \end{cases}$$

де матриця коефіцієнтів зворотних зв'язків  $L$  визначається на основі рішення алгебраїчного матричного рівняння Риккати. Наприклад, при  $N = 0$  дисперсія  $P$  визначається з рівняння

$$AP + PA^T - (PC^T + GN)R^{-1}(CP + N^T G^T) + GQG^T = 0,$$

матриця  $L$

$$L = APC^T(N + CPC^T)^{-1}.$$

Спостерігач (рис. 3.8) об'єднує фільтр Калмана і об'єкт управління.

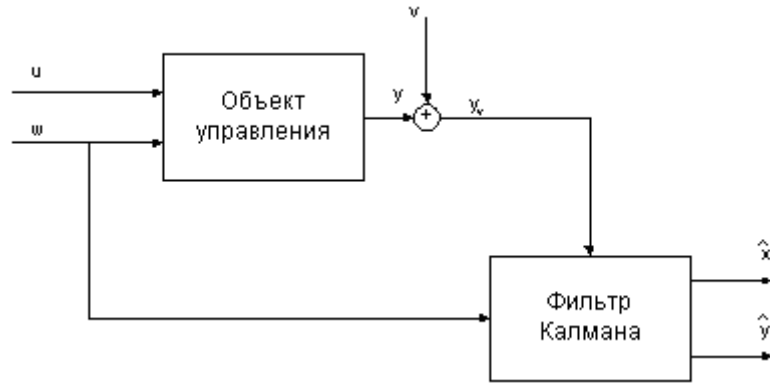


Рис.3.8. Спостерігач Калмана

Спостерігач використовує відомі входи  $u$  і результати вимірювань  $y_v$ , спотворені випадковими завадами, для того, щоб обчислити оцінки вектора змінних стану  $\hat{x}$  і виходів  $\hat{y}$ .

Нехай задана дискретна модель об'єкта управління

$$\begin{cases} x[n+1] = Ax[n] + B[n] + Gw[n] \\ y_v[n] = Cx[n] + Du[n] + Hw[n] + v[n] \end{cases}$$

з відомими входами  $u$  і збуреннями по входах  $w$  і вимірам  $v$ , які є "білим" шумом з наступними характеристиками:

$$\begin{aligned} M\{w\} &= M\{v\} = 0, \\ M\{w[n]w[m]^T\} &= Q\delta_{nm} \\ M\{v[n]v[m]^T\} &= R\delta_{nm} \\ M\{v[n]w[m]^T\} &= N\delta_{nm} \end{aligned}$$

Потрібно виконати синтез спостерігача для оцінювання вектора змінних стану об'єкта управління, який мінімізує сталу помилку оцінювання,

$$P = \lim_{t \rightarrow \infty} M\{(x - \hat{x})(x - \hat{x})^T\}$$

У цьому випадку фільтр Калмана, описується рівняннями

$$\begin{cases} \hat{x}[n+1] = A\hat{x}[n] + Bu[n] + L(y_v - C\hat{x}[n]) - Du[n] \\ \begin{bmatrix} \hat{x}[n] \\ \hat{y}[n] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C(I-MC) \\ I-MC \end{bmatrix} \hat{x}[n] + \begin{bmatrix} (I-CM)D & CM \\ -MD & M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u[n] \\ y_v[n] \end{bmatrix} \end{cases}$$

де матриця коефіцієнтів зворотних зв'язків  $L$  і нова матриця коефіцієнтів зворотних зв'язків  $M$  визначаються на основі рішення матричного алгебраїчного рівняння Риккати.

Оновлена матриця коефіцієнтів зворотних зв'язків  $M$  застосовується для того, щоб уточнити прогноз  $x[n]$  на основі вимірювання  $y_v[n]$

$$\hat{x}[n+1] = \hat{x}[n] + M(y_v[n] - C\hat{x}[n]) - Du[n]$$

Спостерігач об'єднує фільтр Калмана і об'єкт управління. Він використовує відомі входи  $u[n]$  і результати вимірювань, спотворені випадковими завадами, для того, щоб обчислити оцінки вектора змінних стану  $x[n]$  і виходів  $y[n]$ .

### Запитання для самоперевірки

1. Наведіть інтегральне рівняння Вінера-Хопфа
2. Частотна передавальна функція оптимального фільтра Вінера
3. Умови фізичної реалізованості фільтра Вінера
4. Наведіть часткові випадки фільтра Вінера
5. Оцінювання параметрів і станів по методу найменших квадратів, основні співвідношення
6. Оцінювання параметрів фільтра Вінера по методу найменших квадратів
7. Наведіть рішення рівняння Вінера – Хопфа у дискретному просторі.
8. Як здійснюється рекурентне оцінювання параметрів фільтра методом найменших квадратів
9. Як здійснюється рекурентне оцінювання станів багатомірного об'єкту управління методом найменших квадратів.
10. Наведіть рівняння оцінювання Калмана
11. Оптимальний фільтр Калмана – Б'юси, основні співвідношення
12. Фільтр Калмана в просторі станів, рівняння Риккати
13. Порівняльна характеристика фільтрів Вінера і фільтров
14. Загальні задачі фільтрів в САУ

## Розділ 4. Аналіз лінійних дискретних систем (ЛДС) з випадковими сигналами

### 4.1. Випадкові процеси в лінійних імпульсних системах

Аналогом безперервної реалізації  $x_i(t)$  випадкового процесу  $X(t)$  для імпульсних систем є дискретна (решітчаста) реалізація  $X_i[n]$  (рис. 19.1, а), що є послідовність ординат, співпадаючих з відповідним значенням безперервної реалізації  $X_i(t)$  в дискретні моменти відносного часу  $t = \frac{1}{T} = n$ , де  $T$  - період квантування.

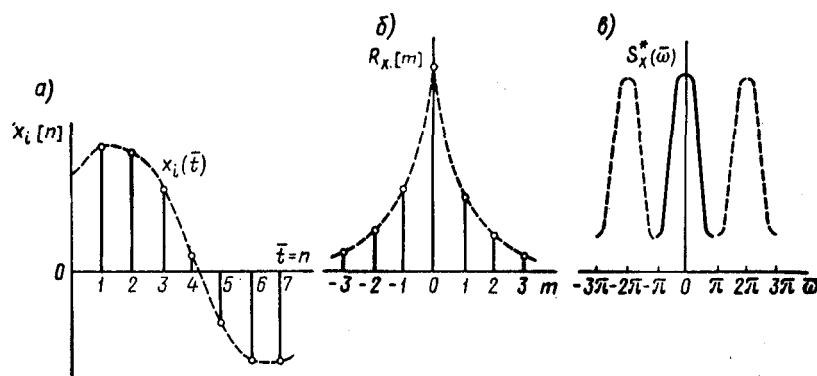


Рис.4.1 Приклади решітчастих функцій

Сукупність решітчастих реалізацій  $x_i[n]$  називають дискретним (решітчастим) випадковим процесом  $X[n]$ . Дискретні випадкові процеси за аналогією з безперервними випадковими процесами можуть характеризуватися такими статистичними характеристиками, як математичне сподівання (момент першого порядку), кореляційна функція (момент другого порядку) і т. д.

Математичне сподівання і кореляційна функція (а також будь-які моменти  $n$ -го порядку) дискретного випадкового процесу рівні математичного очікуванню і кореляційної функції (моменту  $n$ -го порядку) відповідного безперервного випадкового процесу, узятим в дискретні моменти часу  $t = n$ .

Надалі будемо розглядати стаціонарні дискретні випадкові процеси, припускаючи, що вони володіють ергодичним властивістю. У цьому випадку середнє значення дискретного випадкового процесу по безлічі дорівнює середньому значенню за часом, яке визначається наступною сумою:

$$\overline{x[n]} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N x[n], \quad (4.1)$$

де  $x[n]$  - будь-яка реалізація дискретного випадкового процесу.

Кореляційної функцією стаціонарного дискретного випадкового процесу  $X[n]$  є не випадкова дискретна (решітчаста) функція, обумовлена виразом

$$R_x[m] = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N x[n]x[n+m], \quad (4.2)$$

де  $n = 0, 1, 2, \dots$  - дискретні значення відносного часу.

Дискретна кореляційна функція має такими основними властивостями:

1. Початкове значення дискретної кореляційної функції (при  $m = 0$ ) дорівнює середньому значенню квадрата дискретної випадкової процесу:

$$R_x[0] = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N x^2[n] = \overline{x^2[n]}. \quad (4.3)$$

2. Дискретна кореляційна функція при  $m = 0$  досягає найбільшого значення:

$$R_x[0] \geq R_x[m]. \quad (4.4)$$

3. Дискретна кореляційна функція є парною:

$$R_x[m] = R_x[-m]. \quad (4.5)$$

За наявності двох дискретних випадкових процесів,  $X[n]$  і  $G[n]$ , вводять поняття взаємної кореляційної функції

$$R_{xg}[m] = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N x[n]g[n+m], \quad (4.6)$$

властивості якої схожі з властивостями взаємної кореляційної функції для безперервних випадкових процесів. Так, наприклад,

$$R_{xg}[m] = R_{gx}[-m], \quad (4.7)$$

а в разі, якщо  $X[n]$  і  $G[n]$  статистично незалежні (взаємно некорреліровані), маємо

$$R_{xg}[m] = R_{gx}[-m] = 0. \quad (4.8)$$

Спектральна щільність дискретного випадкового процесу за аналогією зі звичайною спектральною щільністю знаходиться як дискретне перетворення Фур'є від ординат дискретної кореляційної функції:

$$S_x^*(\bar{\omega}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_x[m] e^{-j\bar{\omega}m}, \quad (4.9)$$

де  $\bar{\omega} = \omega T$  - Відносна кругова частота.

Спектральна щільність  $S_x^*(\bar{\omega})$  дискретного випадкового процесу пов'язана з спектральною щільністю  $S_x(\omega)$  відповідного йому безперервного випадкового процесу:

$$S_x^*(\bar{\omega}) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} S_x(\bar{\omega} + 2\pi r). \quad (4.10)$$

З (4.10) видно, що спектральна щільність дискретного випадкового процесу є періодичною функцією частоти  $\omega$ .

Графіки типовою кореляційної функції  $R_x[m]$  дискретного стаціонарного випадкового процесу (з рівним нулю середнім значенням) і відповідної йому спектральної щільності  $S_x^*(\omega)$  наведено на рис. 4.1 б, в.

Взаємну спектральну щільність двох дискретних випадкових процесів можна визначити через взаємну кореляційну функцію

$$S_{xg}^*(j\bar{\omega}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_{xg}[m] e^{-j\bar{\omega}m}. \quad (4.11)$$

Кореляційні функції та спектральні щільності дискретного випадкового процесу зв'язані наступними залежностями:

$$R_x[m] = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} S_x^*(\bar{\omega}) \cos \bar{\omega} m d\bar{\omega}; \quad (4.12)$$

$$R_{xg}[m] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_{xg}^*(j\bar{\omega}) e^{j\bar{\omega}m} d\bar{\omega}. \quad (4.13)$$

На підставі (4.12) вважаючи  $m = 0$ , отримуємо

$$\overline{x^2[n]} = R_x[0] = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} S_x^*(\bar{\omega}) d\bar{\omega}. \quad (4.14)$$

Середнє значення квадрата випадкової величини при рівності нулю її математичного сподівання називають дисперсією. З (4.14) видно, що дисперсія дискретної випадкової функції пропорційна значенню інтеграла від 0 до  $\pi$  від її спектральної щільності.

Методи розрахунку імпульсних систем автоматичного управління при випадкових впливах аналогічні методам розрахунку безперервних систем. За аналогією з безперервними системами найчастіше при практичних розрахунках використовують залежності між спектральними щільностями дискретних випадкових вхідний  $G[n]$  і вихідний  $X[n]$  величин.



Нехай на вхід лінійної імпульсної системи автоматичного управління з відомою дискретної передавальної функцією  $W(z)$  надходить випадковий вплив  $G(t)$ , для якого відома спектральна щільність  $S_g(\omega)$ , а отже, може бути визначена за (4.10) дискретна спектральна щільність  $S_g(\omega)$ . Тоді дискретна спектральна щільність  $S_x^*(\omega)$  сигналу на виході імпульсної системи

$$S_x^*(\bar{\omega}) = |W_{gx}(j\bar{\omega})|^2 S_g^*(\bar{\omega}) \quad (4.15)$$

де  $W_{gx}(j\bar{\omega}) = W_{gx}(z)|_{z=e^{j\bar{\omega}}}$  - частотна передатна функція замкнутої імпульсної системи.

Стале середнє значення квадрата вихідної величини (дисперсію)  $\overline{x^2[n]}$  можна визначити за (4.14).

Розрахунок дисперсії за формулою (4.14) істотно спрощується в тих випадках, коли випадкова функція  $G(t)$  являє собою центрований випадковий процес, ефективний час кореляції якого менше періоду квантування. У цьому випадку вважають, що

$$R_g[m] = 0 \text{ при } |\tau| \geq T, \quad (4.16)$$

і являють випадковий процес як білий шум з кореляційної функцією

$$R_g[m] = R_g[0]\delta_0[m], \quad (4.17)$$

де  $R_g[0] = D_g$  - дисперсія вхідного впливу, а  $\delta_0[m]$  - одинична решітчаста імпульсна функція, що дорівнює одиниці при  $m = 0$  і рівна нулю при  $m \neq 0$ . Цьому білому шуму відповідає спектральна щільність

$$S_g^*(\bar{\omega}) = R[0] = D_g \quad (4.18)$$

При розрахунку замкнутих імпульсних систем, на які одночасно впливають корисний сигнал і завада, часто цікавляться точністю системи, що характеризується середнім значенням квадрата дискретної випадкової помилки і визначається за формулами, аналогічним за своєю структурою відповідними формулами для безперервних стаціонарних систем.

Наприклад, якщо на вхід імпульсної системи надходять випадкові стаціонарні статистично не зв'язані (некорельовані) корисний сигнал  $G(t)$  і завада  $F(t)$ , то спектральна щільність  $S_{\varepsilon}^*(\omega)$  дискретної випадкової помилки

$$S_{\varepsilon}^*(\bar{\omega}) = |W_{g\varepsilon}(j\bar{\omega})|^2 S_g^*(\bar{\omega}) + |W_{f\varepsilon}(j\bar{\omega})|^2 S_f^*(\bar{\omega}), \quad (4.19)$$

де  $S_g^*(\bar{\omega}), S_f^*(\bar{\omega})$  - дискретні спектральні щільності вхідного сигналу і завади;  $W_{g\varepsilon}(j\bar{\omega}), W_{f\varepsilon}(j\bar{\omega})$  - частотні передавальні функції замкнутої імпульсної системи, що зв'язують відповідно корисний сигнал і заваду з помилкою.

Квадрат усталеної дискретної випадкової помилки (дисперсію помилки) визначають через спектральну щільність:

$$\bar{\varepsilon}^2[n] = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} S_{\varepsilon}^*(\bar{\omega}) d\bar{\omega}. \quad (4.20)$$

Аналітичні обчислення за (4.20), так само як і по (4.14), в загальному випадку є досить трудомісткими, однак за певних умов їх можна звести до обчислення табличного інтеграла, за допомогою якого, аналогічно тому, як це робиться для безперервних систем, можна висловити значення дисперсії помилки через параметри імпульсної системи і дискретних спектральних густин зовнішніх впливів.

Наведені вище формули записані для дискретних відносних моментів часу (моментів квантування), що відповідають значенням  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Однак вони можуть бути записані не тільки для моментів квантування, а й для будь-якого моменту часу між ними  $(n + \xi)$ , де  $0 < \xi < 1$ . В останньому випадку розглядають зміщені дискретні (рішотчасті) функції  $x[n, \xi], \varepsilon[n, \xi]$  і відповідні передавальні функції імпульсної системи  $W_{g\varepsilon}(j\bar{\omega}, \xi), W_{f\varepsilon}(j\bar{\omega}, \xi)$  і кореляційні функції.

Є також аналітичні методи вирішення завдань оптимізації імпульсних систем при випадкових випадкового сигналу впливах, які аналогічні методам оптимізації для безперервних систем, однак вони застосовні тільки для обмеженого класу систем і досить громіздкі. Тому на практиці в більшості випадків дослідження імпульсних систем при випадкових впливах проводять методами моделювання.

## 4.2. Розрахунок математичного сподівання

Розглянемо ЛДС (рис. 4.2), на вході якої діє дискретний випадковий процес  $\xi(n), n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , де  $n$  - нормований відносно інтервалу дискретизації час. Відомі розподіли ймовірностей вхідного процесу  $\xi(n)$  та імпульсна характеристика  $h(n, m)$  ЛДС.

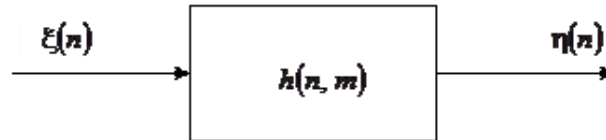


Рис. 4.2. Лінійна дискретна система

Потрібно знайти моментні функції (математичне сподівання, дисперсію, кореляційну функцію) процесу на виході  $\eta(n)$ . Таке дослідження процесу на виході ЛДС називають аналізом в рамках кореляційної теорії.

Спочатку розглянемо знаходження математичного сподівання процесу на виході ЛДС. Формально можемо записати для відгуку ЛДС

$$\eta(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(n, m) \xi(m). \quad (4.21)$$

Візьмемо тепер математичне сподівання лівої і правої частин співвідношення (4.1). Маємо

$$M\eta(n) = M[\sum_{m=-\infty}^{\infty} h(n, m) \xi(m)].$$

Введемо у розгляд наступні позначення для математичних сподівань:  $M\eta(n) = a_{\xi}(n)$  і  $M\eta(n) = a_{\eta}(n)$ . Тепер остаточно запишемо

$$a_{\eta}(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(n, m) a_{\xi}(m), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (4.22)$$

Отже, згідно зі співвідношенням (4.22), математичне сподівання відгуку ЛДС у певний момент часу  $n$  дорівнює зваженій сумі значень математичного сподівання вхідного процесу. Роль вагових коефіцієнтів відіграють відповідні значення імпульсної характеристики ЛДС.

Зазначимо, що згідно з умовою фізичної можливості  $h(n, m) = 0$ , коли  $m > n$ . Тому в (4.22) всі доданки з  $m > n$  дорівнюють нулеві, тобто можна записати

$$a_{\eta}(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(n, m)a_{\xi}(m), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (4.23)$$

**Приклад 4.1.** На нерекурсивну ЛДС з імпульсною характеристикою

$$h(n, m) = \begin{cases} \frac{1}{m+1} e^{-0,1n}, & n \geq m \\ 0, & n < m \end{cases}$$

діє дискретній випадковий сигнал  $\xi(n)$ ,  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  математичне сподівання якого  $M\xi(n) = a_{\xi}(n) = \sigma(n)e^{-0,2n}$ , де  $\sigma(n)$  - дискретний одиничний стрибок. Знайти математичне сподівання  $a_{\eta}(n) = M\eta(n)$ , де  $\eta(n)$  - процес на виході ЛДС.

Згідно з умовою задачі та формулою (4.3) можемо записати

$$a_{\eta}(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{m+1} e^{-0,1n} \sigma(m) e^{-0,2m} = e^{-0,1n} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m+1} e^{-0,2m}$$

Якщо ЛДС є стаціонарною, тобто коефіцієнти різницевого рівняння не залежать від часу, то її імпульсна характеристика залежить лише від одного дискретного часового аргументу  $n$  (рис. 4.2) і тоді співвідношення (4.21) запишеться у такому вигляді:

$$\eta(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(n - m)\xi(m) \quad (4.24)$$

Тоді, розмірковуючи аналогічно, для математичного сподівання можемо записати

$$a_{\eta}(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(n - m)a_{\xi}(m), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (4.25)$$

Таким чином, для стаціонарної ЛДС математичне сподівання відгуку на її виході при дії на вході випадкового процесу представляє собою дискретну згортку імпульсної характеристики системи і математичного сподівання впливу.

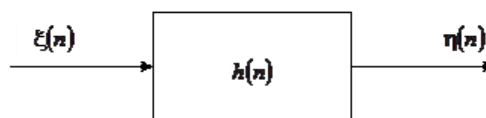


Рис. 4.2. Стаціонарна лінійна дискретна система

В реальній практиці для фізично існуючих стаціонарних ЛДС імпульсна характеристика  $h(n) = 0$  коли  $n < 0$ , і тому (4.25) можна записати так:

$$a_{\eta}(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(n - m)a_{\xi}(m), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (4.26)$$

Для випадкових дискретних сигналів, що існують лише на додатній вісі  $\xi(n)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , співвідношення (4.23) і (4.26) можна записати так:

$$a_{\eta}(n) = \sum_{m=0}^{\infty} h(n, m) a_{\xi}(m), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

і

$$a_{\eta}(n) = \sum_{m=0}^{\infty} h(n - m) a_{\xi}(m), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

### 4.3. Розрахунок кореляційної функції відгуку ЛДС

Перейдемо тепер безпосередньо до розгляду кореляційної функції процесу на виході ЛДС. При цьому дисперсію зможемо знайти як частинний випадок кореляційної функції коли зсув між значеннями відгуку дорівнює нулеві.

Оскільки при знаходженні кореляційної функції випадкового процесу використовується процедура центрування останнього, то спершу розглянемо представлення центрованого процесу на виході ЛДС. Центрований дискретний процес на виході ЛДС позначимо так:

$$\overset{\circ}{\eta}(n), n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

де  $\overset{\circ}{\eta}(n) = \eta(n) - a_{\eta}(n)$ . Тепер, використовуючи співвідношення (4.21) і (4.22), можемо записати

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\eta}(n) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(n, m) \xi(m) - \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(n, m) a_{\xi}(m) = \eta(n) - a_{\eta}(n) = \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(n, m) [\xi(m) - a_{\xi}(m)] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(n, m) \overset{\circ}{\xi}(m) \end{aligned} \quad (4.27)$$

$$n = 0, \quad \pm 1, \pm 2, \dots$$

де позначено центрований вхідний процес  $\overset{\circ}{\xi}(n) = \xi(n) - a_{\xi}(n)$ .

Отже, при проходженні через ЛДС центрованого процесу на виході також отримаємо центрований випадковий процес. Іншими словами, якщо на вході ЛДС діє випадковий процес з нульовим математичним сподіванням, то і на виході отримаємо процес з нульовим математичним сподіванням.

Тоді, враховуючи означення, наведені вище і співвідношення (4.27), можемо записати для кореляційної функції відгуку ЛДС

$$\begin{aligned} R_{\eta}(n_1, n_2) &= M \left[ \overset{\circ}{\eta}(n_1) \overset{\circ}{\eta}(n_2) \right] = \\ &= M \left[ \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(n_1, m) \overset{\circ}{\xi}(m) \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(n_2, m) \overset{\circ}{\xi}(m) \right] = \\ &= \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} \sum_{m_2=-\infty}^{\infty} h(n_1, m_1) h(n_2, m_2) M \left[ \overset{\circ}{\xi}(m_1) \overset{\circ}{\xi}(m_2) \right]. \end{aligned}$$

Зазначимо тепер, що

$$M \left[ \overset{\circ}{\xi}(m_1) \overset{\circ}{\xi}(m_2) \right] = R_{\xi}(m_1, m_2)$$

є кореляційна функція процесу на вході ЛДС. Враховуючи це, остаточно отримаємо

$$\begin{aligned} R_{\eta}(n_1, n_2) &= \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} \sum_{m_2=-\infty}^{\infty} h(n_1, m_1) h(n_2, m_2) R_{\xi}(m_1, m_2), \quad (4.28) \\ n_1, n_2 &= 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned}$$

Таким чином, кореляційна функція процесу на виході ЛДС повністю визначається кореляційною функцією процесу на вході та імпульсною характеристикою системи.

Розглянемо тепер стаціонарну ЛДС. Тоді, оскільки для такої системи імпульсна характеристика не залежить від моменту подачі тестуючого одиничного імпульсу, для кореляційної функції отримаємо

$$\begin{aligned} R_{\eta}(n_1, n_2) &= \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} \sum_{m_2=-\infty}^{\infty} h(n_1 - m_1) h(n_2 - m_2) R_{\xi}(m_1, m_2), \quad (4.29) \\ n_1, n_2 &= 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned}$$

Аналогічно, як і для математичного сподівання, з урахуванням умов фізичної можливості ЛДС в термінах імпульсної характеристики, нескінченні верхні межі підсумовування в правих частинах співвідношень (4.28) і (4.29) можуть бути замінені на поточні значення нормованих часових аргументів кореляційних функцій, тобто

$$\begin{aligned} R_{\eta}(n_1, n_2) &= \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} \sum_{m_2=-\infty}^{\infty} h(n_1, m_1) h(n_2, m_2) R_{\xi}(m_1, m_2), \quad (4.30) \\ n_1, n_2 &= 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned}$$

для нестаціонарних ЛДС, і

$$R_{\eta}(n_1, n_2) = \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} \sum_{m_2=-\infty}^{\infty} h(n_1 - m_1)h(n_2 - m_2) R_{\xi}(m_1, m_2), \quad (4.31)$$

$$n_1, n_2 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

для стаціонарних ЛДС.

Для дискретного випадкового сигналу, що починається у момент часу  $n = 0$ , тобто відмінний від нуля лише на додатній вісі, обчислення кореляційних функцій відгуків фізично існуючих ЛДС (нестаціонарних і стаціонарних відповідно) виконується за наступними виразами:

$$R_{\eta}(n_1, n_2) = \sum_{m_1=0}^{\infty} \sum_{m_2=0}^{\infty} h(n_1, m_1)h(n_2, m_2) R_{\xi}(m_1, m_2), \quad (4.32)$$

$$n_1, n_2 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

і

$$R_{\eta}(n_1, n_2) = \sum_{m_1=0}^{\infty} \sum_{m_2=0}^{\infty} h(n_1 - m_1)h(n_2 - m_2) R_{\xi}(m_1, m_2), \quad (4.33)$$

$$n_1, n_2 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Нагадаємо тепер, що коли для кореляційної функції  $R_{\eta}(n_1, n_2)$  деякого дискретного процесу покласти  $n_1 = n_2 = n$ , то отримуємо дисперсію цього процесу  $D(n)$ . Таким чином, використовуючи отримані вище вирази (4.28) – (4.33) для кореляційної функції, можемо записати співвідношення для дисперсії відгуку ЛДС. Так, для нестаціонарної ЛДС дисперсія процесу на виході

$$D_{\eta}(n) = \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} \sum_{m_2=-\infty}^{\infty} h(n_1, m_1)h(n_2, m_2) R_{\xi}(m_1, m_2), \quad (4.34)$$

$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Співвідношення (4.34) вказує на те, що значення дисперсії  $D_{\eta}(n)$  відгуку ЛДС у будь-який момент часу  $n$  є зваженою сумою не лише значень дисперсії вхідного процесу  $D_{\xi}(m) = R_{\xi}(m, m)$   $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , а і значень кореляційної функції впливу  $R_{\xi}(m_1, m_2)$ , коли  $m_1, m_2 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , але  $m_1 \neq m_2$ . При цьому роль вагових коефіцієнтів відіграють відповідні значення імпульсної характеристики ЛДС.

У разі стаціонарності ЛДС співвідношення для дисперсії відгуку отримаємо із формули (4.29)

$$D_{\eta}(n) = \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} \sum_{m_2=-\infty}^{\infty} h(n - m_1)h(n - m_2) R_{\xi}(m_1, m_2), \quad (4.35)$$

$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

З урахуванням умов фізичної можливості, тобто, коли ЛДС при формуванні сигналу на виході «враховує» лише нинішні та минулі значення вхідного процесу і «не враховує» майбутні значення, формули (4.24) і (4.25) запишуться відповідно так:

$$D_{\eta}(n) = \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} \sum_{m_2=-\infty}^{\infty} h(n, m_1) h(n, m_2) R_{\xi}(m_1, m_2),$$

$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

і

$$D_{\eta}(n) = \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} \sum_{m_2=-\infty}^{\infty} h(n - m_1) h(n - m_2) R_{\xi}(m_1, m_2)$$

$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

Ці ж формули для дискретного випадкового сигналу, що відмінний від нуля лише на додатній вісі набудуть такого вигляду:

$$D_{\eta}(n) = \sum_{m_1=0}^{\infty} \sum_{m_2=0}^{\infty} h(n, m_1) h(n, m_2) R_{\xi}(m_1, m_2),$$

$$n = 0, 1, 2, \dots$$

(для нестационарної ЛДС), і

$$D_{\eta}(n) = \sum_{m_1=0}^{\infty} \sum_{m_2=0}^{\infty} h(n - m_1) h(n - m_2) R_{\xi}(m_1, m_2),$$

$$n = 0, 1, 2, \dots$$

(для стаціонарної ЛДС).

#### 4.4. Взаємна кореляційна функція впливу і відгуку ЛДС

Знову розглянемо ЛДС (рис.4.2). Використовуючи зображення центрованого відгуку системи  $\overset{\circ}{\eta}(n)$ , представленого правою частиною співвідношення (4.1), можемо записати для взаємної кореляційної функції вхідного процесу  $\xi(n), n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  і процесу на виході ЛДС  $\eta(n), n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  у такому вигляді:

$$R_{\xi\eta}(n_1, n_2) = M \left[ \overset{\circ}{\xi}(n_1) \overset{\circ}{\eta}(n_2) \right] = M \left[ \overset{\circ}{\xi}(n_1) \sum_{m=-x}^{\infty} h(n_2, m) \overset{\circ}{\xi}(m) \right].$$



Оскільки перший співмножник в квадратних дужках у правій частині не залежить від індексу підсумовування, то його можна внести під знак суми і записати

$$\begin{aligned}
 R_{\xi\eta}(n_1, n_2) &= M \left[ \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(n_2, m) \overset{\circ}{\xi}(n_1) \overset{\circ}{\xi}(m) \right] = \\
 &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(n_2, m) M \left[ \overset{\circ}{\xi}(n_1) \overset{\circ}{\xi}(m) \right] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(n_2, m) R_{\xi}(n_1, m) \\
 n_1, n_2 &= 0, \pm 1, \pm 2, \dots
 \end{aligned} \tag{4.36}$$

Із отриманого співвідношення (4.36) випливає, що взаємна кореляційна функція  $R_{\xi\eta}(n_1, n_2)$  двох процесів, вхідного  $\xi(n)$  і вихідного  $\eta(n)$  залежить лише від автокореляційної функції впливу і імпульсної характеристик ЛДС. Отже отримуємо, що вихідний процес  $\eta(n)$  в явному вигляді не входить у праву частину співвідношення (4.36) для визначення взаємної кореляційної функції. Таке положення обумовлено тим, що сам процес  $\eta(n)$  повністю визначається вхідним впливом і імпульсною характеристикою системи (див. формулу (4.21)).

#### 4.5. Аналіз дії на ЛДС стаціонарного випадкового процесу

Розглянемо дію на ЛДС випадкового процесу, який задовольняє умовам стаціонарності. Оскільки ми розглядаємо стохастичний аналіз в рамках кореляційної теорії, то обмежимося стаціонарністю у широкому розумінні.

Отже нехай на нестаціонарну ЛДС з імпульсною характеристикою  $h(n, m)$  діє стаціонарний у широкому розумінні дискретний випадковий процес  $\xi(n)$ ,  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  (див. рис. 4.1). На виході маємо відгук  $\eta(n)$ ,  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  Потрібно знайти його математичне сподівання  $a_{\eta}(n)$ , дисперсію  $D_{\eta}(n)$  та кореляційну функцію  $R_{\eta}(n_1, n_2)$ .

**Математичне сподівання.** Для знаходження математичного сподівання скористаємось формулою (4.2), в якій врахуємо те, що для стаціонарного процесу його математичне сподівання не залежить від часу, тобто  $a_{\xi}(n) = M\xi(n) = a_{\xi} = const.$  . Тоді можемо записати

$$a_{\eta}(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(n, m) a_{\xi} = a_{\xi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(n, m), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (4.37)$$

Отже, як бачимо, математичне сподівання відгуку залежить від часу. Таким чином, якщо на нестационарну ЛДС діє стаціонарний процес, то на виході отримуємо відгук у вигляді нестационарного процесу.

Далі ми не будемо переписувати співвідношення (4.37) з урахуванням фізичної реалізованості ЛДС та відсутності ненульових відліків вхідного процесу на від'ємній вісі часу. Ці співвідношення читач легко може отримати самостійно на основі формули (4.37), замінивши в останній відповідним чином межі підсумовування.

**Приклад 4.2.** На ЛДС з імпульсною характеристикою, поданою у вигляді табл. 4.1, діє стаціонарний дискретний випадковий процес  $\xi_n, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  з математичним сподіванням  $M_{\xi}(n) = 0,7; n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Таблиця 4.1

$n$	1	2	3
$h(n)$	0,5	0,25	0,125

Знайти математичне сподівання процесу  $\eta(n), n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  на виході ЛДС.

Оскільки імпульсна характеристика  $h(n)$  є скінченою і залежить лише від поточного часу  $n$ , то ми маємо справу з нерекурсивною стаціонарною ЛДС. Тому для математичного сподівання процесу на виході системи можемо записати:

$$M_{\eta}(n) = a_{\xi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(n - m) = a_{\xi} \sum_{m=n-3}^{\infty} h(n - m),$$

де нижня границя підсумовування  $m = n - 3$  у зв'язку з тим, що імпульсна характеристика має лише 4 ненульових значення, починаючи з моменту часу  $n = 0$ . Дійсно, при  $m = n$  під знаком суми маємо значення імпульсної характеристики  $h(n - m) = h(0) = 1$ . При  $m = n - 1$  отримуємо значення імпульсної характеристики  $h(n - m + 1) = h(1) = 0.5$ .

Коли  $m = n - 2$  маємо  $h(n - m + 2) = h(2) = 0.25$ . Для  $m = n - 3$  маємо  $h(n - m + 3) = h(3) = 0.125$ . Нарешті, якщо  $m = n - 4$ , то отримуємо нульове значення імпульсної характеристики, тобто  $h(n - m + 4) = h(4) = 0$ . Такі ж нульові значення маємо і при інших значеннях  $m > n - 4$ .

Підставляючи дані із табл. 4.1 в отриману вище формулу, знаходимо,

$$M_{\eta}(n) = 0,7(0,125 + 0,25 + 0,5 + 1) = 1,3125, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Математичне сподівання процесу на виході стаціонарної ЛДС, як і на вході, не залежить від часу.

**Кореляційна функція.** Спершу введемо такі позначення: для центрованого стаціонарного процесу на вході ЛДС

$$\overset{\circ}{\xi}(n) = \xi(n) - a_{\xi}, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

і для процесу на виході

$$\overset{\circ}{\eta}(n) = \eta(n) - a_{\eta}, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Тоді, враховуючи зв'язок між центрованими процесами на вході і виході ЛДС (4.27), кореляційна функція процесу на виході

$$\begin{aligned} R_{\eta}(n_1, n_2) &= M \left[ \overset{\circ}{\eta}(n_1) \overset{\circ}{\eta}(n_2) \right] = M \left[ \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(n_1, m) \overset{\circ}{\xi}(m) \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(n_2, m) \overset{\circ}{\xi}(m) \right] = \\ &= \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} \sum_{m_2=-\infty}^{\infty} h(n_1, m_1) h(n_2, m_2) M \left[ \overset{\circ}{\xi}(m_1) \overset{\circ}{\xi}(m_2) \right]. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Оскільки для стаціонарного процесу кореляційна функція залежить лише від різниці моментів часу, тобто

$$M \left[ \overset{\circ}{\xi}(m_1) \overset{\circ}{\xi}(m_2) \right] = R_{\xi}(m_2 - m_1) = R_{\xi}(\tau), \tau = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

то (4.17) можна записати у такому вигляді

$$R_{\eta}(n_1, n_2) = \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} \sum_{m_2=-\infty}^{\infty} h(n_1, m_1) h(n_2, m_2) R_{\xi}(m_2 - m_1).$$

Отже якщо на вході нестаціонарної ЛДС діє стаціонарний процес, то на виході маємо нестаціонарний відгук.

У тому випадку, коли випадковий сигнал описується ергодичним випадковим процесом, то достатньо мати лише одну реалізацію, але на досить значному часовому інтервалі.

**Приклад 4.3.** Розглянемо розрахунок середньоквадратичної помилки на прикладі системи, структурна схема якої має вигляд, зображений на рис.4.3.

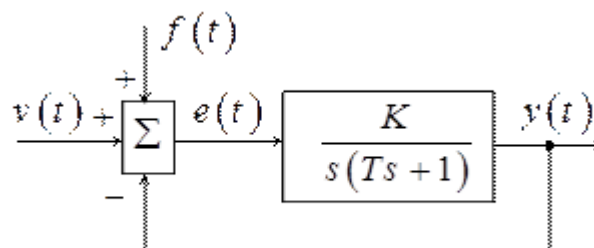


Рис. 4.3. Структурна схема САУ

Нехай на вхід системи надходять регулярний сигнал  $v(t) = 1 + t$  і завада  $f(t)$  типу "білий шум" з спектральною щільністю  $S_f(\omega) = N = 0,01 \frac{B^2}{\text{Гц}}$ . Параметри передавальної функції:  $k = 10$  1/с,  $T = 0,1$  с.

Необхідно визначити середньоквадратичну помилку. Середній квадрат помилки  $\overline{e^2} = e_p^2 + \overline{e_c^2}$ , де  $e_p^2$  - квадрат регулярної складової помилки, а  $\overline{e_c^2}$  - середній квадрат випадкової складової помилки.

Складова  $\overline{e_c^2}$  равна

$$e_p = c_0 v(t) + c_1 v^{(1)}(t) + \frac{c_2}{2!} v^{(2)}(t) + \dots$$

Коефіцієнти помилок  $c_i$  визначаються при розкладанні в ряд Маклорена передавальної функції системи за похибкою  $\hat{O}_\varepsilon = \frac{1}{1+W(s)}$ . В нашому випадку  $\hat{O}_\varepsilon =$

$$\frac{s+Ts^2}{Ts^2+s+K} = \frac{1}{K} s + \frac{KT-1}{K^2} s^2 + \dots = c_0 + c_1 s + \frac{c_2}{2!} s^2 + \dots$$

Так як  $v(t) = 1 + t$ , в такому випадку треба обчислити лише першу похідну  $v^{(2)}(t) = 1$ .

Отже  $e_p = 0 * v(t) + \frac{1}{K} v^{(1)}(t) + 0 * v^{(2)}(t)$ . При обліку чисельних значень  $e_p = 0,1B$ , а  $e_p^2 = 0,01B^2$ .

Визначимо середнє значення квадрата випадкової складової  $\overline{e_c^2}$  як

$$\overline{e_c^2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{O}(j\omega)|^2 S_f(\omega) d\omega$$

Для подолання труднощів при обчисленні даного інтеграла, його представляють у вигляді:

$$J_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|B(j\omega)|^2}{|H(j\omega)|^2} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{M(j\omega)}{H(j\omega)H(-j\omega)} d\omega, \quad (3.19)$$

де  $M(j\omega) = b_0(j\omega)^{2(n-1)} + b_1(j\omega)^{2(n-2)} + \dots + b_{n-1}$ ;

$$H(j\omega) = a_0(j\omega)^{2(n)} + a_1(j\omega)^{2(n-1)} + \dots + a_n$$

Формули для обчислення інтегралів за коефіцієнтами  $a_i$  та  $b_i$  для відповідних значень  $n$  зведено в таблиці [17]. Наведемо їх для  $n$  від 1 до 3:

$$n = 1; J_1 = b_0/2a_0a_1;$$

$$n = 2; J_2 = (-b_0 + \frac{a_0b_1}{a_2})/2a_0a_1;$$

$$n = 3; J_3 = (-a_2b_0 + a_0b_1 + \frac{a_0a_1b_2}{a_3})/[2a_0(a_0a_3 - a_1a_2)].$$

В нашому випадку

$$\overline{e_c^2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K^2 N}{|T(j\omega)^2 + j\omega + K|^2} d\omega;$$

$$M(\omega) = K^2 N; H(j\omega) = T(j\omega)^2 + j\omega + K.$$

Коефіцієнти:  $a_0 = T$ ,  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = K$ ,  $b_0 = 0$ ,  $b_1 = K^2 N$ .

$$\text{Інтеграл } J_2 = \frac{-0 + \frac{TK^2N}{K}}{2T} = \frac{KN}{2} = \frac{10 \cdot 0,01}{2} = 0,05B^2.$$

Середньоквадратична похибка  $e_{с.к.0} = \sqrt{e^2}$ . З урахуванням чисельних значень  
 $e_{с.к.0} = \sqrt{0,01 + 0,05} = 0,245 \text{ В}$ .

### Запитання для самоперевірки

1. Математичне сподівання і кореляційна функція випадкових процесів в лінійних імпульсних системах, Основні співвідношення
2. Охарактеризуйте основні властивості дискретної кореляційної функції.
3. Наведіть рівняння спектральної щільності дискретного випадкового процесу
4. Наведіть рівняння спектральної щільності взаємної спектральної щільності двох дискретних випадкових процесів в загальному випадку
5. Як здійснюється розрахунок дисперсії помилки на виході САУ
6. Наведіть рівняння спектральної щільності дискретної випадкової помилки, якщо випадкові стаціонарні процеси статистично не зв'язані (некорельовані)

## Розділ 5. Аналіз нелінійних САУ з випадковими сигналами. Метод статистичної лінеаризації

### 5.1 Нелінійне перетворення випадкових сигналів

Нелінійні елементи в загальному випадку викликають спотворення вхідного перетворення Фур'є від ординат дискретної кореляційної функції:

У нелінійних системах принцип суперпозиції непридатний, тому при одночасному впливі на систему, наприклад, корисного регулярного сигналу і випадкової завади через нелінійного перетворення цих сигналів завада може значно зменшити ефект дії корисного сигналу.

#### 5.1.1. Проходження випадкового сигналу через нелінійний безінерційний елемент із зоною насичення.

Припустимо, що на вхід нелінійного елемента надходить випадковий сигнал

$$Y(t) = m_y(t) + \overset{\circ}{Y}(t) \quad (5.1)$$

де  $m_y(t)$  - математичне сподівання (середнє значення) вхідного впливу;

$\overset{\circ}{Y}(t)$  - центрована випадкова складова вхідного впливу.

Припускаючи, що випадковий процес є стаціонарним, тобто  $m_y(t) = const$ , розглянемо, як буде спотворюватися вхідний випадковий сигнал при проходженні його, наприклад, через нелінійний безінерційний елемент із зоною насичення (рис. 5.1).

При малому рівні перешкод, коли вхідний вплив не виходить за межі лінійного робочого ділянки, що має кут нахилу  $\alpha$ , вихідний сигнал дорівнює

$$X(t) = kY(t) = k \left[ m_y + \overset{\circ}{Y}(t) \right] = m_x + \overset{\circ}{X}(t) \quad (5.2)$$

де  $k = tg \alpha$  - коефіцієнт посилення елемента;

$m_x = km_y$  - математичне очікування сигналу на виході елемента;

$\overset{\circ}{X}(t) = k\overset{\circ}{Y}(t)$  - центрована випадкова складова сигналу на виході елемента.

У цьому випадку середнє значення вихідного сигналу  $m_x$  пропорційне середньому значенню вхідного сигналу  $m$ .

З ростом рівня перешкод, коли вхідний вплив виходить за межі лінійної ділянки, середнє значення вихідного сигналу зменшується і при дуже великому рівні перешкод виявляється близьким до нуля.

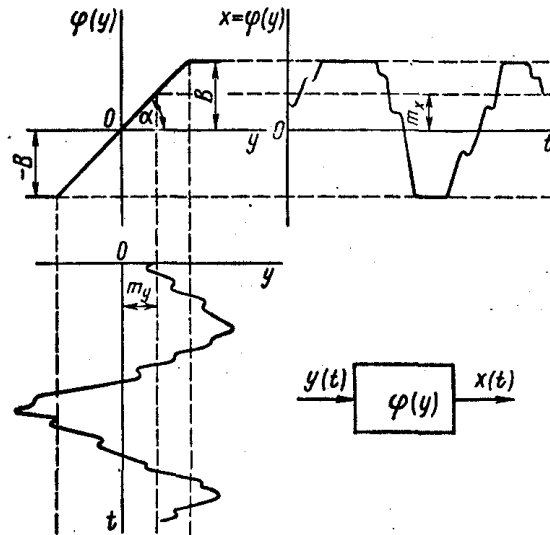


Рис. 5.1

Таким чином, збільшення рівня перешкод, обумовленого дисперсією випадкового вхідного сигналу, зменшує корисний сигнал на виході нелінійного елемента, що еквівалентно зменшенню коефіцієнта перетворення нелінійного елемента.

Одночасно з цим вихідний сигнал збагачується як високочастотними, так і низькочастотними гармоніками, тобто відбувається зміна спектрального складу вихідного випадкового процесу порівняно зі спектральним складом вхідного випадкового процесу.

Припустимо, наприклад, що на нелінійний елемент типу насичення надходить випадковий сигнал, середнє значення якого  $m_y$ , а щільність ймовірності  $\omega(y)$  відповідає нормальному закону розподілу (рис. 5.2),

Лінійна ділянка характеристики в межах  $\pm b$  не робить впливу на форму кривої щільності ймовірності, тобто  $\omega(x) = \omega(y)$  при  $|y| < b$ .

Вихідний сигнал нелінійного елемента не може перевищувати рівня насичення  $B$ , тому ймовірність появи сигналу, більшого по абсолютній величині, ніж  $B$ , дорівнює нулю, тобто  $\omega(x) = 0$  при  $|y| > b$ .

Всім значенням вхідного сигналу  $y > b$  ( $y < -b$ ) відповідатиме значення вихідного сигналу  $x = B$  ( $x = -B$ ), тому ймовірність отримання величини  $B$  ( $-B$ ) на виході нелінійного елемента сильно зростає і стає рівною величині заштрихованої площі під ділянкою кривої щільності ймовірності вхідного сигналу, що лежить в межах від  $y = b$  до  $y = \infty$ . Це виразиться в тому, що щільність ймовірності вихідного сигналу  $\omega(x)$  в точках  $y = \pm b$  буде являти собою  $\delta$ -функції, тобто імпульси нескінченно великої величини і нескінченно малої ширини, площа  $S$  яких дорівнює заштрихованої площі під відповідним (правим або лівим) ділянкою кривої щільності ймовірності вхідного сигналу.

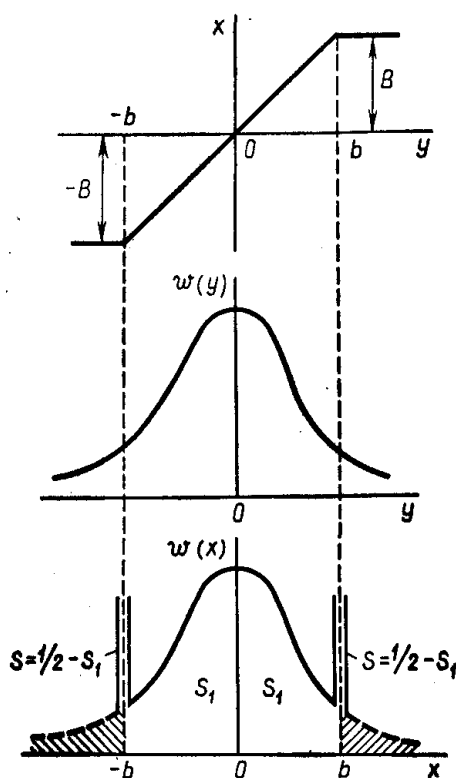


Рис. 5.2

Таким чином, вираз для щільності ймовірності вихідного сигналу може бути записано таким чином:



$$\omega(x) = \begin{cases} \omega(y) & \text{при } |y| < b \\ \delta(y \mp b) & \text{при } |y| = b \\ 0 & \text{при } |y| > b \end{cases} \quad (5.3)$$

Загальна площа під кривою щільності ймовірності вихідного сигналу, природно, залишається рівною одиниці, тобто

$$\int_{-\infty}^{\infty} \omega(x) dx = 1 \quad (5.4)$$

Дослідження нелінійних систем, що знаходяться під впливом випадкових процесів, значно складніше, ніж лінійних систем.

Загальних точних методів дослідження подібних систем немає, і для вивчення систем в цьому випадку зазвичай використовують наближені методи.

Найбільше поширення в практиці розрахунку нелінійних систем при випадкових впливах отримав наближений метод, званий *методом статистичної лінеаризації*. Цей метод був розроблений в 1954 р. одночасно І. Є. Козаковим в СРСР і Р. Бутоном в США.

### 5.1.2. Критерії статистичної еквівалентності

Ідея методу заснована на наближеній заміні нелінійних перетворень процесів, що відбуваються в системі, статистично еквівалентними їм лінійними перетвореннями, при цьому нелінійний елемент замінюється статистично еквівалентним лінійним елементом. У результаті такої заміни система в цілому лінеаризується і для її дослідження можна застосовувати апарат лінійної теорії.

Можливі різні критерії статистичної еквівалентності, які можуть бути покладені в основу методу статистичної лінеаризації. У тих випадках, коли лінеаризують безінерційний нелінійний елемент, у якого нелінійна залежність між вхідним  $y(t)$  і вихідним  $x(t)$  сигналами має вигляд

$$x(t) = \varphi[y(t)], \quad (5.5)$$

де  $\varphi$  - статична характеристика нелінійного елемента, застосовують такі два критерії:

1. Критерій рівності математичного сподівання і дисперсії випадкового процесу на виході нелінійного елемента і еквівалентного йому лінійного елемента.

2. Критерій мінімуму математичного сподівання квадрата різниці випадкових процесів на виході нелінійного елемента і еквівалентного йому лінійного елемента

Познайомимося з цими критеріями, обмежуючись розглядом тільки однозначних нелінійних характеристик, які можуть бути або непарними, або парними.

Нагадаємо, що для непарних і парних характеристик відповідно справедливі співвідношення

$$\begin{aligned}\varphi(-y) &= -\varphi(y), \\ \varphi(-y) &= \varphi(y)\end{aligned}\tag{5.6}$$

Випадкові процеси на вході і виході нелінійного елемента можуть бути представлені таким чином:

$$\begin{aligned}Y(t) &= m_y(t) + \overset{\circ}{Y}(t) \\ X(t) &= m_x(t) + \overset{\circ}{X}(t)\end{aligned}\tag{5.7}$$

де  $m_y(t)$ ,  $m_x(t)$ - математичні очікування вхідного і вихідного сигналів відповідно, включають повільно мінливі регулярні складові;  $\overset{\circ}{Y}(t)$ ,  $\overset{\circ}{X}(t)$  - центровані випадкові складові процесів на вході і виході нелінійного елемента відповідно .

Зауважимо, що для парних нелінійних характеристик, що володіють розпрямлюючими властивостями, математичне сподівання  $m_x(t)$  відмінно від нуля навіть при  $m_y(t) = 0$ .

У загальному випадку для однозначної нелінійної функції  $\varphi(t)$  довільного виду сигнал на виході еквівалентного лінеаризованих елемента

$$U(t) = \varphi_0(m_y) + k_1 \overset{\circ}{Y}(t) = m_u(t) + \overset{\circ}{U}(t)\tag{5.8}$$

де  $\varphi_0(m_y)$  - математичне сподівання нелінійної функції  $\varphi(y)$ ;  $k_1$  - еквівалентний статистичний коефіцієнт посилення за випадковою центрованою складовою.

Таким чином, у загальному випадку нелінійний безінерційний елемент (рис. 5.3,а) замінюють двома безінерційними елементами: нелінійним з математичного очікування і лінійним за випадковою центрованою складовою (рис.5.3,б).

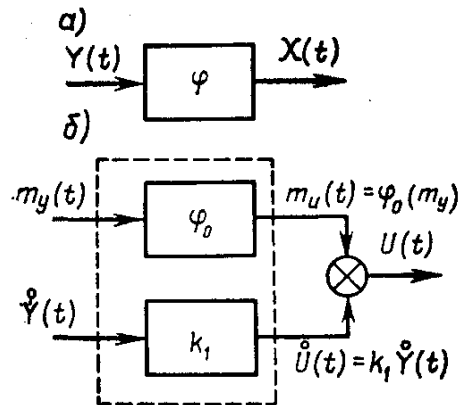


Рис. 5.3. Нелінійний безінерційний елемент і його еквівалентна заміна

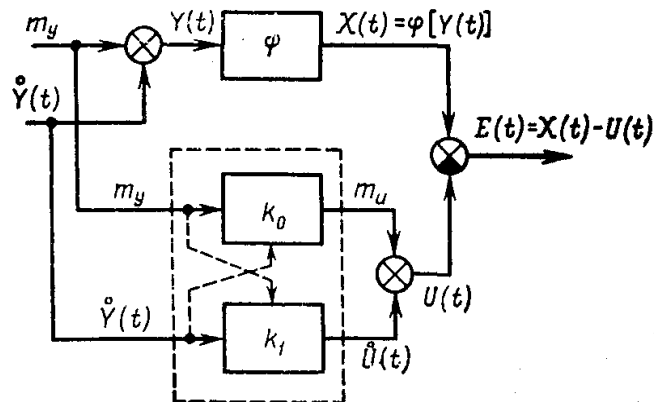


Рис. 5.4. Еквівалентна заміна нелінійного елемента двома лінійними

В окремому випадку, коли нелінійний безінерційний елемент має непарну характеристику, функція  $\varphi_0$  може бути представлена у вигляді

$$\varphi_0 = k_0 m_y(t) \quad (5.9)$$

де  $k_0$  - еквівалентний статистичний коефіцієнт посилення нелінійного елемента з математичного очікування (по середній складової)

У цьому випадку нелінійний елемент можна еквівалентно замінити двома лінійними елементами з коефіцієнтами посилення  $k_0$  і  $k_1$  (рис. 5.4). Чисельні значення цих коефіцієнтів при заданій нелінійній залежності  $\varphi$  визначаються

значеннями математичного сподівання і дисперсії випадкового сигналу на вході нелінійного елемента.

Покажемо спочатку, як знаходять коефіцієнти  $\varphi_0$ ,  $k_0$ ,  $k_1$  у разі статистичної лінеаризації, заснованої на першому критерії статистичної еквівалентності, що складається у виконанні рівності математичного сподівання і дисперсії випадкового процесу на виході нелінійного елемента і еквівалентного йому лінійного елемента, тобто коли

$$\begin{aligned} m_x(t) &= m_u(t) \\ D_x(t) &= D_u(t) \end{aligned} \quad (5.10)$$

В даному випадку

$$\varphi_0 = m_u(t) = m_x(t) \quad (5.11)$$

Для непарних нелінійностей отримаємо

$$k_0 = \frac{m_x(t)}{m_y(t)} \quad (5.12)$$

статистично еквівалентний коефіцієнт  $k_l$  через дисперсію перепишемо наступним чином:

$$D_x(t) = D_u(t) = M[\{U(t)\}^2] = M\left[\left\{k_1 \overset{\circ}{Y}(t)\right\}^2\right] = k_1^2 D_y(t) \quad (5.13)$$

звідки

$$k_1 = k_1^{(1)} = \sqrt{D_x(t)/D_y(t)} = \pm \sigma_x(t)/\sigma_y(t) \quad (5.14)$$

Позначення  $k_1^{(1)}$  показує, що коефіцієнт  $k_1$  знайдений за першим критерієм еквівалентності.

Статистичні коефіцієнти  $\varphi_0$ ,  $k_0$  і  $k_1^{(1)}$  можна також виразити через нелінійну залежність  $\varphi$  і щільність ймовірності  $\omega(y)$  випадкового сигналу  $Y(t)$  на вході нелінійного елемента:

$$\varphi_0 = m_x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y) \omega(y) dy \quad (5.15)$$

$$k_0 = \frac{m_x(t)}{m_y(t)} = \frac{1}{m_y(t)} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y) \omega(y) dy \quad (5.16)$$

$$k_1^{(1)} = \pm \frac{1}{\sqrt{D_y(t)}} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^2(y) \omega(y) dy - m_x^2(t) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (5.17)$$

Знаки слід вибрати такими, щоб знаки  $X(t)$  і  $U(t)$  збігалися.

Другий критерій статистичної еквівалентності вимагає виконання умови мінімуму математичного сподівання квадрата різниці процесів на виході нелінійного елемента і еквівалентного лінійного елемента, тобто

$$\overline{\varepsilon^2} = M[\{X(t) - U(t)\}^2] = \min \quad (5.18)$$

або

$$\overline{\varepsilon^2} = M \left[ \left\{ m_x(t) + \overset{\circ}{X}(t) - \varphi_0 - k_1 \overset{\circ}{Y}(t) \right\}^2 \right] = \min \quad (5.19)$$

Після виконання операції зведення в квадрат і обчислення математичного сподівання маємо

$$\overline{\varepsilon^2} = m_x^2(t) + D_x(t) + \varphi_0^2 + k_1 D_y(t) - 2\varphi_0 m_x(t) - 2k_1 R_{xy}(0) = \min, \quad (5.20)$$

де  $m_x(t)$  - математичне сподівання випадкового процесу на виході нелінійного елемента;

$$D_y(t) = M \left[ \left\{ \overset{\circ}{Y}(t) \right\}^2 \right], D_x(t) = M \left[ \left\{ \overset{\circ}{X}(t) \right\}^2 \right] - \text{дисперсія центрованого}$$

випадкового процесу на вході і виході нелінійного елемента відповідно;

$R_{xy}(0) = D_{xy}(t) = M \left[ X(t) \overset{\circ}{Y}(t) \right]$  - математичне сподівання (середнє значення) від перемноження двох випадкових функцій  $X(t)$  і  $Y(t)$ , яке дорівнює початковому значенню взаємної кореляційної функції  $R_{xy}(0)$ .

При заданих значеннях  $m_x(t)$ ,  $D_y(t)$ ,  $D_x(t)$ ,  $R_{xy}(0)$  величина  $\varepsilon^2$  є функцією параметрів  $\varphi_0$  і  $k_1$ .

Значення  $\varphi_0$  і  $k_1$  при яких виконується (5.5), знайдемо, якщо прирівняємо нулю приватні похідні функції  $\varepsilon^2$  за параметрами  $\varphi_0$  і  $k_1$ . Маємо

$$\frac{\partial \varepsilon^2}{\partial \varphi_0} = 2\varphi_0 - 2m_x(t) = 0 \quad (5.21)$$

звідки

$$\varphi_0 = m_x(t) \quad (5.22)$$

У разі непарної нелінійної характеристики  $\varphi$  отримуємо такий вираз для коефіцієнта  $k_1$  :

$$k_0 = \frac{m_x(t)}{m_y(t)} \quad (5.23)$$

Значення коефіцієнта  $k_1$  знаходимо з

$$\frac{\partial \bar{\varepsilon}^2}{\partial k_1} = 2k_1 D_y(t) - 2R_{xy}(0) = 0 \quad (5.24)$$

звідки

$$k_1 = k_1^{(2)} = \frac{R_{xy}(0)}{D_y(t)} = \frac{R_{xy}(0)}{R_{\dot{y}}(0)} \quad (5.25)$$

Позначення  $k_1^{(2)}$  показує, що коефіцієнт  $k_1$ , знайдений за другим критерієм еквівалентності.

Статистичний коефіцієнт  $k_1^{(2)}$  можна виразити також через щільність ймовірності  $\omega(y)$  вхідного випадкового сигналу  $Y(t)$  і нелінійну залежність  $\varphi$ , тобто

$$k_1^{(2)} = \frac{1}{D_y(t)} \int_{-\infty}^{\infty} (y - m_y) \varphi(y) \omega(y) dy \quad (5.26)$$

де

$$\int_{-\infty}^{\infty} (y - m_y) \varphi(y) \omega(y) dy = \overline{x(t)\dot{y}(t)} = D_{x\dot{y}} = R_{x\dot{y}}(0) \quad (5.27)$$

Зазвичай значення коефіцієнта  $k_1^{(1)}$ , отримане з першого критерію є дещо завищеним, а  $k_1^{(2)}$ , з другого критерію - дещо заниженим, тому при розрахунках рекомендується брати їх середньоарифметичне значення, тобто

$$k_1 = \frac{(k_1^{(1)} + k_1^{(2)})}{2} \quad (5.28)$$

**Приклад 5.1.** На вході нелінійного елемента, що має статичну квадратичну залежність  $x = \varphi(y) = ky^2$  між вхідним і вихідним сигналом, діє випадковий сигнал  $Y(t) = m_y + \overset{\circ}{Y}(t)$ , що має нормальний закон розподілу. Визначити еквівалентні статистичні коефіцієнти підсилення  $\varphi_0$  і  $k_1^{(2)}$ .

1. Оскільки характеристика нелінійного елемента є парною, то функція  $\varphi_0$  дорівнює

$$\varphi_0 = m_x = M[X(t)] = M[k\{Y(t)\}^2] = M\left[k\left\{m_y + \overset{\circ}{Y}(t)\right\}^2\right] = k(m_y^2 + D_y) = kD_y\left(1 + \frac{m_y^2}{D_y}\right)$$

2. Диференціюючи отриманий вираз для  $\varphi_0$ , визначаємо коефіцієнт  $k_1^{(2)}$

$$k_1^{(2)} = \frac{d\varphi_0}{dm_y} = 2km_y$$

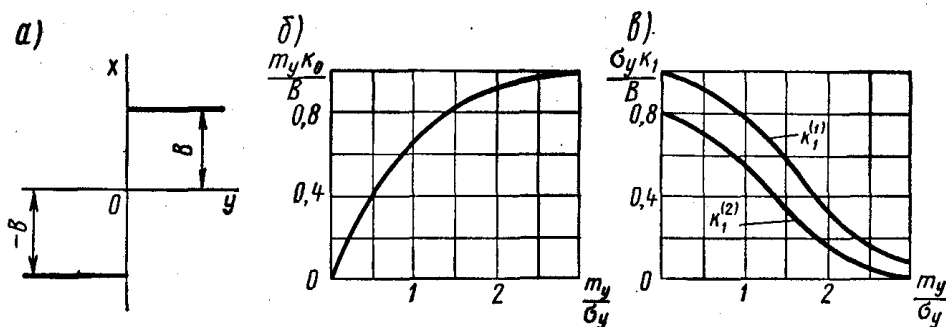


Рис. 5.5 Нелінійний елемент типу ідеального реле і графіки статистичної лінеаризації

**Приклад 5.2.** На вході нелінійного елемента типу ідеального реле з характеристикою

$$x = \varphi(y) = B \operatorname{sign} y = \begin{cases} B & \text{при } y > 0 \\ -B & \text{при } y < 0 \end{cases}$$

діє випадковий сигнал  $Y(t) = m_y(t) + \overset{\circ}{Y}(t)$ , що має нормальний закон розподілу. Визначити еквівалентні статистичні коефіцієнти підсилення нелінійного елемента  $k_0, k_1^{(1)}, k_1^{(2)}$ .

1. Визначаємо еквівалентний статистичний коефіцієнт посилення по математичному сподіванню

$$k_0 = \frac{1}{m_y} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(y)}{\sqrt{2\pi D_y}} e^{-(y-m_y)^2/2D_y} dy =$$

$$- \frac{B}{m_y \sqrt{2\pi D_y}} \int_{-\infty}^0 e^{-(y-m_y)^2/2D_y} dy + \frac{B}{m_y \sqrt{2\pi D_y}} \int_0^{\infty} e^{-(y-m_y)^2/2D_y} dy$$

Вводячи позначення

$$\frac{y-m_y}{\sqrt{D_y}} = z$$

отримуємо

$$k_0 = \frac{B}{m_y} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-m_y/\sqrt{D_y}}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-m_y/\sqrt{D_y}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \right\} = \frac{2B}{m_y} [\Phi(m_y/\sqrt{D_y})]$$

де

$$\Phi\left(\frac{m_y}{\sqrt{D_y}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-m_y/\sqrt{D_y}}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \frac{y-m_y}{\sqrt{D_y}} = z$$

2. Визначаємо еквівалентний статистичний коефіцієнт посилення  $k_1^{(1)}$  за випадковою складовою по першому критерію:

$$k_1^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{D_y}} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^2(y) \omega(y) dy - m_x^2 \right]^{1/2}$$

Враховуючи, що

$$\int_{-\infty}^{\infty} \omega(y) dy = 1, \quad m_x = k_0 m_y = 2B \Phi\left(\frac{m_y}{\sqrt{D_y}}\right), \quad \varphi^2 = B^2,$$

отримуємо

$$k_1^{(1)} = \frac{B}{\sqrt{D_y}} [1 - 4\Phi^2(m_y/\sqrt{D_y})]^{1/2}$$

3. Визначаємо еквівалентний статистичний коефіцієнт посилення випадкової складової по другому критерию :

$$\begin{aligned} k_1^{(2)} &= \frac{1}{D_y} \int_{-\infty}^{\infty} (y - m_y) \frac{\varphi(y)}{\sqrt{2\pi D_y}} e^{-(y-m_y)^2/2D_y} dy \\ &= -\frac{B}{D_y \sqrt{2\pi D_y}} \int_{-\infty}^0 (y - m_y) e^{-\frac{(y-m_y)^2}{2D_y}} dy + \frac{B}{D_y \sqrt{2\pi D_y}} \int_0^{\infty} (y - m_y) e^{-\frac{(y-m_y)^2}{2D_y}} dy \end{aligned}$$

або

$$k_1^{(2)} = \frac{B}{D_y \sqrt{2\pi}} \left\{ \int_{-m_y/\sqrt{D_y}}^{\infty} z e^{-\frac{z^2}{2}} dz - \int_{-\infty}^{-m_y/\sqrt{D_y}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \right\} = \frac{2B}{D_y \sqrt{2\pi}} e^{-m_y^2/(2D_y)}$$

При нормальному законі розподілу коефіцієнти  $k_0$ ,  $k_1^{(1)}$  і  $k_1^{(2)}$  виражаються через функцію Крампа (нормований інтеграл щільності імовірності)

$$\Phi(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right) \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

Отже, для обчислення коефіцієнтів статистичної лінеаризації досить знати математичне сподівання  $m_y$  і дисперсію  $D_y$  випадкового процесу на вході нелінійного елемента і значення функції Крампа для аргументів, що визначаються через  $m_y$  і  $D_y$ .

Побудовані графіки коефіцієнтів статистичної лінеаризації ідеального реле наведено на рис. 5.5б) і 5.5в). З цих графіків видно, що релейний елемент по відношенню до середнього значення вхідного сигналу  $m_y$  поводить себе як лінійне ланка, коефіцієнт підсилення якого  $k_0$  залежить від величини  $m_y/\sqrt{D_y}$

Таким чином, випадкова складова вхідного сигналу створює ефект лінеаризації нелінійного елемента для регулярної складової (середнього значення) сигналу. Метод статистичної лінеаризації формально схожий на метод вібраційної лінеаризації нелінійного елемента коливаннями високої частоти постійної амплітуди.

У свою чергу регулярна складова вхідного сигналу впливає на проходження випадкової складової. Так, наприклад, для розглянутого нелінійного елемента типу ідеального реле передача випадкової складової послаблюється за рахунок насичення нелінійного елемента регулярної складової сигналу, оскільки коефіцієнти  $k_1^{(1)}$  і  $k_1^{(2)}$  зменшуються із зростанням  $m_y$ .

Слід відмітити, що обмеження у використанні методу статистичної лінеаризації обумовлені вимогами нормального закону розподілу випадкового



процесу на вході нелінійного елемента, що виконується досить добре, якщо лінійна частина системи буде мати властивості низькочастотного фільтра.

## 5.2 Розрахунок нелінійних стохастичних САУ методом статистичної лінеаризації.

При розрахунку нелінійних стохастичних САУ ставиться завдання визначення в стаціонарному режимі статистичних характеристик будь-якої координати системи (регульованої величини  $X(t)$ , помилки  $E(t)$  та ін) за відомими статистичними характеристиками вхідного випадкового сигналу. Вхідний сигнал  $G(t)$  в даному випадку може являти собою або корисний сигнал, або лінійну комбінацію корисного сигналу і завади. При цьому повинні бути задані передавальна функція лінійної частини системи  $W(p)$  і характеристика нелінійного елемента.

Розглянемо застосування методу статистичної лінеаризації для розрахунку як розімкнутих, так і замкнутих систем, що містять один безінерційний нелінійний елемент.

### 5.2.1. Розрахунок розімкнутих нелінійних систем

Структурна схема розімкнутої САУ, що має в розімкнутому контурі нелінійний елемент з відомою характеристикою  $\varphi$  і лінійну частину з передавальною функцією  $W(p)$ , показана на рис. 22.1, а.

Нехай на вході нелінійного елемента діє стаціонарний випадковий процес  $G(t)$  з нормальним законом розподілу

$$G(t) = m_g + \overset{\circ}{G}(t) \quad (5.29)$$

де  $m$  - математичне сподівання вхідного сигналу;

$\overset{\circ}{G}(t)$  - центрована складова випадкового вхідного сигналу.

Шукана вихідна величина системи  $X(t)$  представлятиме собою також стаціонарний випадковий процес

$$X(t) = m_x + \overset{\circ}{X}(t), \quad (5.30)$$

На основі методу статистичної лінеаризації вихідну структурну схему (рис.5.6а) можна еквівалентно замінити двома структурними схемами: для розрахунку математичного сподівання вихідної величини  $m_x$  (рис.5.6б) і для розрахунку центрованої складової випадкового процесу на виході системи  $X(t)$  (рис.5.6в).

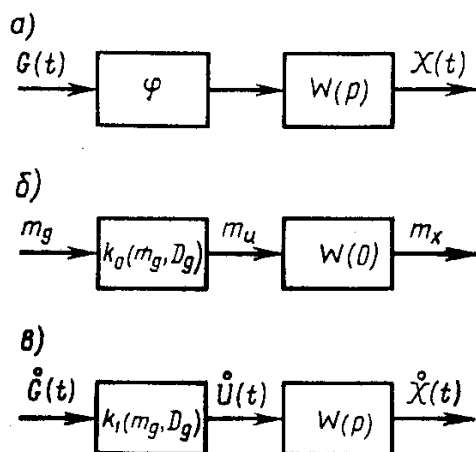


Рис. 5.6. Структурні схеми САУ

Використовуючи наведені схеми, можна знайти математичне сподівання випадкового процесу на виході системи:

$$m_x = m_g k_0(m_g, D_g) W(0) \quad (5.31)$$

і центровану складову випадкового процесу на виході системи:

$$\overset{\circ}{X}(t) = \overset{\circ}{G}(t) k_1(m_g, D_g) W(p) \quad (5.32)$$

де  $k(m_g, D_g)$  - еквівалентний статистичний коефіцієнт посилення нелінійного елемента з математичного очікування;

$k_1(m_g, D_g)$ - еквівалентний статистичний коефіцієнт посилення нелінійного елемента за випадковою складовою;

$W(0) = W(p)|_{p=0}$  - коефіцієнт передачі лінійної частини системи.

Центрована складова  $\overset{\circ}{G}(t)$  випадкового процесу на вході системи зазвичай задається своїми статистичними характеристиками: центрованої кореляційної функцією  $R_g(\tau)$  або центрованої спектральної площиною  $S_g(\omega)$ , знаючи які

можна знайти центровану кореляційну функцію  $R_{\dot{g}}(\tau)$  і центровану спектральну щільність  $S_{\dot{x}}(\omega)$  випадкового процесу  $X(t)$  на вході системи:

$$R_{\dot{x}}(\tau) = k_1^2(m_g, D_g) \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} k(\lambda)k(\eta)R_{\dot{g}}(\tau + \lambda - \eta)d\eta;$$

$$S_{\dot{x}}(\omega) = |W(j\omega)|^2 [k_1(m_g, D_g)]^2 S_{\dot{g}}(\omega), \quad (5.33)$$

де  $k(\lambda)$  і  $k(\eta)$  - імпульсна перехідна функція (функція ваги) лінійної частини системи;  $W(j\omega)$  - частотна передавальна функція лінійної частини системи.

Дисперсія  $D_x$  центрованої складової  $X(f)$  випадкового процесу на виході системи

$$D_x = R_{\dot{x}}(0) = \left(\frac{1}{\pi}\right) \int_0^{\infty} S_{\dot{x}}(\omega)d\omega \quad (5.34)$$

### 5.2.2. Розрахунок замкнутих нелінійних систем.

Структурна схема замкнутої системи автоматичного керування з одним нелінійним безінерційним елементом завжди може бути приведена до вигляду, показаному на рис.5.7.

Припустимо, що вхідний сигнал  $G(t)$ , який в загальному випадку може представляти собою лінійну комбінацію корисного сигналу і завади, є стаціонарним випадковим процесом з нормальним законом розподілу

$$G(t) = m_g + \overset{\circ}{G}(t) \quad (5.35)$$

У результаті розрахунку потрібно по заданих статистичних характеристиках вхідного сигналу визначити математичне сподівання, дисперсію або інші статистичні характеристики будь-якої цікавить нас координати системи, наприклад помилки  $E(t)$ , регульованої величини  $X(t)$  і т. п.

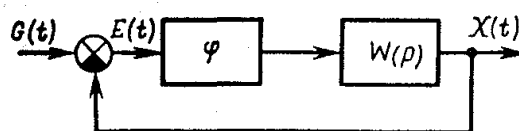


Рис.5.7. Структурна схема замкнутої САУ

Розглянемо метод розрахунку замкнутих систем на прикладі визначення статистичних характеристик помилки  $E(t)$  системи. Зауважимо, що закон розподілу випадкового сигналу на виході нелінійного елемента в загальному

випадку відрізняється від нормального закону розподілу, однак, проходячи через лінійну частину системи, що володіє в більшості випадків властивістю низькочастотного фільтра, він нормалізується і, таким чином, закон розподілу вихідного сигналу  $X(t)$  буде близький до нормального. На основі цього можна вважати, що випадкова помилка  $E(t)$  на вході нелінійного елемента також має нормальний закон розподілу. Тому при розрахунках можна користуватися формулами і графіками еквівалентних статистичних коефіцієнтів підсилення  $k_0$  і  $k_1$ .

Помилка системи буде представляти собою стаціонарний випадковий процес

$$E(t) = m_\varepsilon + \overset{\circ}{E}(t) \quad (5.36)$$

де  $m_\varepsilon$  - математичне сподівання (середнє значення) помилки;

$\overset{\circ}{E}(t)$  - центрована складова випадкової помилки.

Для простоти будемо вважати, що нелінійний елемент має однозначну непарну характеристику  $i = \varphi(\varepsilon)$ . У цьому випадку на основі методу статистичної лінеаризації сигнал на виході нелінійного елемента приблизно може бути записаний таким чином:

$$U(t) = m_u + \overset{\circ}{U}(t) = k_0(m_\varepsilon, D_\varepsilon)m_\varepsilon + k_1(m_\varepsilon, D_\varepsilon)\overset{\circ}{E}(t), \quad (5.37)$$

де  $m_u$  - математичне очікування сигналу на виході нелінійного елемента;

$\overset{\circ}{U}(t)$  - центрована складова випадкового процесу на виході нелінійного елемента;

$k_0(m_\varepsilon, D_\varepsilon)$  - еквівалентний статистичний коефіцієнт, посилення нелінійного елемента з математичного очікування;

$k_1(m_\varepsilon, D_\varepsilon)$  - еквівалентний статистичний коефіцієнт посилення нелінійного елемента за випадковою складовою.

В результаті статистичної лінеаризації нелінійний елемент еквівалентно замінюється двома лінійними безінерційними елементами: один з них з коефіцієнтом посилення  $k_0$  і другий - з коефіцієнтом посилення  $k_1$ . При цьому

вихідна нелінійна замкнута система (рис.5.7) еквівалентно замінюється двома замкнутими пов'язаними лінеаризованими системами (рис.5.8): з математичного сподівання; по центрованої випадкової складової.

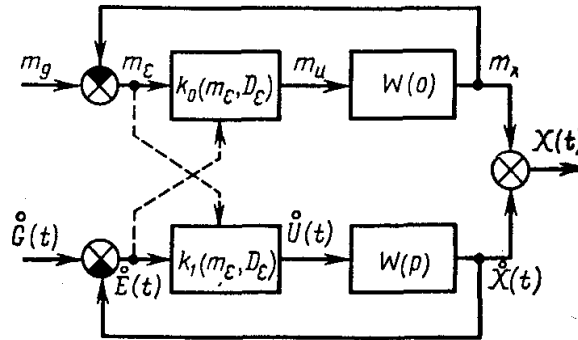


Рис.5.8.Еквівалентна схема САУ

Передавальні функції розімкннутих лінеаризованих систем рівні: з математичного сподівання

$$W_{m_\varepsilon}(p) = k_0(m_\varepsilon, D_\varepsilon)W(p), \quad (5.38)$$

по центрованої випадкової складової

$$W_\varepsilon(p) = k_1(m_\varepsilon, D_\varepsilon)W(p). \quad (5.39)$$

Передавальні функції замкннутих лінеаризованих систем відносно помилки рівні: з математичного сподівання

$$W_{m_g m_\varepsilon}(p) = \frac{1}{1+W_{m_\varepsilon}(p)} = \frac{1}{1+k_0(m_\varepsilon, D_\varepsilon)W(p)}; \quad (5.40)$$

по центрованої випадкової складової

$$W_{\dot{g}\dot{\varepsilon}}(p) = \frac{1}{1+W_\varepsilon(p)} = \frac{1}{1+k_1(m_\varepsilon, D_\varepsilon)W(p)} \quad (5.41)$$

Передавальні функції (5.38) і (5.39) взаємопов'язані через коефіцієнти  $k_0$  і  $k_1$ , які є функціями поки невідомих величин  $m_\varepsilon$  і  $D_\varepsilon$ .

Зауважимо, що отримані таким чином дві пов'язані лінеаризовані системи будуть лінійними тільки за певних постійних значеннях  $m_\varepsilon$  і  $D_\varepsilon$ , тобто при стаціонарному режимі системи. При нестационарному режимі система

залишається нелінійною, так як коефіцієнти  $k_0$  і  $k_1$ , залежні від  $m_\varepsilon$  і  $D_\varepsilon$ , будуть змінними.

Якщо випадковий процес  $G(t)$  на вході системи стаціонарний, то  $m_g = const$ . У цьому випадку математичне сподівання  $m_\varepsilon$  помилки пов'язано з математичним сподіванням  $m_g$  вхідного сигналу таким співвідношенням:

$$m_\varepsilon = W_{m_g m_\varepsilon}(0) m_g = \frac{1}{1+k_0(m_\varepsilon, D_\varepsilon)W(0)} m_g \quad (5.42)$$

Дисперсія помилки

$$D_\varepsilon = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{\dot{\varepsilon}}(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |W_{\dot{g}\dot{\varepsilon}}(j\omega)|^2 S_{\dot{g}}(\omega) d\omega \quad (5.43)$$

де  $S_{\dot{g}}(\omega)$  - спектральна щільність центрованої випадкової складової вхідного сигналу;

$S_{\dot{\varepsilon}}(\omega) = |W_{\dot{g}\dot{\varepsilon}}(j\omega)|^2 S_{\dot{g}}(\omega)$  - спектральна щільність центрованої випадкової складової помилки

Рівняння (5.42) і (5.43) утворюють систему алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} m_\varepsilon - \frac{1}{1+k_0(m_\varepsilon, D_\varepsilon)W(0)} m_g = 0 \\ D_\varepsilon - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{1}{1+k_1(m_\varepsilon, D_\varepsilon)W(j\omega)} \right|^2 S_{\dot{g}}(\omega) d\omega = 0 \end{cases} \quad (5.44)$$

Система рівнянь (5.44) містить два невідомих  $m_\varepsilon$  і  $D_\varepsilon$  і коефіцієнти  $k_0$  і  $k_1$  що є функціями цих невідомих. Вирішуючи систему рівнянь, можна знайти математичне сподівання  $m_\varepsilon$  і дисперсію  $D_\varepsilon$  помилки в сталому режимі. Рішення системи рівнянь (5.44) можна провести або методом послідовних наближень, або графоаналітичним методом.

### 5.2.3. Графоаналітичне рішення

При вирішенні *методом послідовних наближень* задаються спочатку деякими значеннями коефіцієнтів  $k_0$  і  $k_1$  і по (5.42) і (5.43) знаходять  $m_\varepsilon$  і  $D_\varepsilon$  в першому наближенні. За знайденим значенням  $m_\varepsilon$  і  $D_\varepsilon$  уточнюють величини  $k_0$  і  $k_1$ . Потім весь цикл обчислень коефіцієнтів  $k_0$  і  $k_1$  повторюється багато разів до тих пір, поки в процесі наближень наступні значення коефіцієнтів не будуть з достатньою точністю збігатися з попередніми значеннями.

Рішення графоаналітичним методом проводиться зазвичай тоді, коли рівняння системи (5.44) мають складний вид. У цьому випадку в координатах  $m_\varepsilon - D_\varepsilon$  будують криві (рис.5.9), відповідні обом рівнянням системи (5.44); точка перетину цих кривих дає рішення зазначеної системи рівнянь.

Графоаналітичне рішення системи рівнянь (5.44) доцільно проводити в такій послідовності:

1. Будують сімейство функцій  $F_1 = F_1(m_\varepsilon)$  (рис.5.9а), використовуючи перше рівняння системи (5.44) для різних фіксованих значень  $D_{\varepsilon i} = const$ .

2. Проводять пряму з початку координат під кутом  $45^\circ$  і по точках перетину її з кривими сімейства  $F_1$  будують графік  $D_\varepsilon = f_1(m_\varepsilon)$  (рис.5.9в).

3. Будують сімейство функцій  $F_2 = F_2(D_\varepsilon)$  (рис.5.9б), використовуючи друге рівняння системи (5.44) для різних фіксованих значень  $m_\varepsilon = const$ .

4. Проводять пряму з початку координат під кутом  $45^\circ$  і по точках перетину її з кривими сімейства  $F_2$  будують графік  $m_\varepsilon = f_2(D_\varepsilon)$  (рис.5.9в).

Точки перетину кривих  $D_\varepsilon = f_1(m_\varepsilon)$  і  $m_\varepsilon = f_2(D_\varepsilon)$  визначають математичне сподівання  $m_{\varepsilon \text{ вуст}}$  і дисперсію  $D_{\varepsilon \text{ вуст}}$  помилки в сталому (рівноважному) стані нелінійної системи.

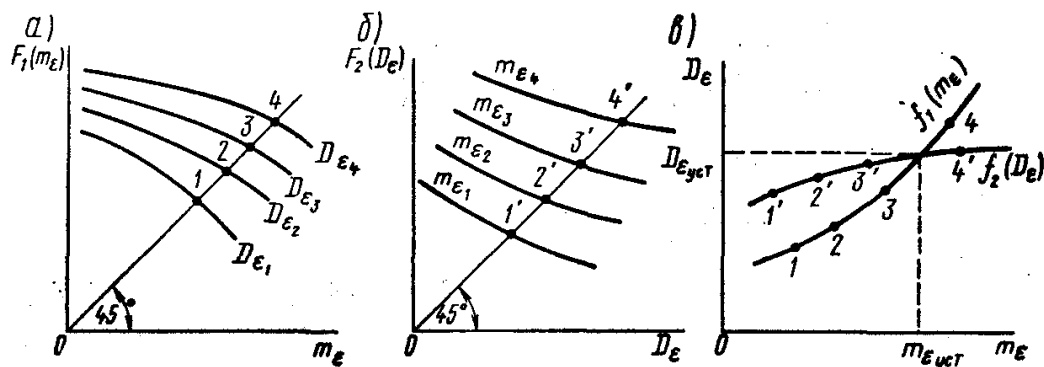


Рис. 5.9 Графоаналітичне рішення

Після того як будуть визначені математичне сподівання і дисперсія помилки, з відомих методів лінійної теорії можна при необхідності розрахувати математичне сподівання і дисперсію випадкового сигналу в будь-якій точці системи.

На закінчення слід зазначити, що метод статистичної лінеаризації може бути застосований і до систем з декількома нелінійними елементами. Якщо кілька нелінійних елементів включені послідовно один з одним, то вони можуть бути замінені одним нелінійним елементом з результируючою нелінійною характеристикою, побудованою за характеристиками окремих нелінійних елементів. Після цього проводять статистичну лінеаризацію результируючого нелінійного елемента і методом, викладеним вище, знаходять математичне сподівання і дисперсію в будь-якій точці системи.

Якщо нелінійні елементи розділені один від одного інерційними лінійними ланками, то кожен з нелінійних елементів замінюється статистично еквівалентним лінійним елементом. Оскільки для кожного лінійного елемента потрібно визначити два статистично еквівалентних коефіцієнта  $k_0$  і  $k_1$ , то в результаті, щоб знайти всі коефіцієнти лінійних елементів, доводиться вирішувати систему рівнянь, що містить  $q$  рівнянь, де  $q$  - число нелінійних елементів в системі. В результаті, природно, розрахунки значно ускладнюються.

Хоча метод статистичної лінеаризації і є наближеним, він знайшов широке застосування при інженерних розрахунках нелінійних систем автоматичного управління, описуваних диференціальними рівняннями високого порядку. Точність методу статистичної лінеаризації тим вище, чим вже смуга пропускання лінійної частини систем і чим більше щільність ймовірності на вході нелінійного елемента наближається до нормальної.

### **Запитання для самоперевірки**

1. Охарактеризуйте особливості проходження випадкового сигналу через нелінійний безінерційний елемент із зоною насичення.
2. Охарактеризуйте вплив типових нелінійностей на проходження випадкового сигналу через лінійну динамічну систему
3. Охарактеризуйте найбільш відомі критерії статистичної еквівалентності
4. У чому полягає суть методу статистичної лінеаризації
5. Особливості використання першого і другого критеріїв статистичної еквівалентності
6. Наведіть основні співвідношення розрахунку розімкнутих нелінійних систем



7. Наведіть основні співвідношення розрахунку замкнутих нелінійних систем
8. Графоаналітичне рішення рівнянь методу статистичної лінеаризації

## Розділ 6. Синтез лінійних систем з мінімальною середньою квадратичною помилкою.

### 6.1. Характеристика загальної задачі синтезу

Розглянемо систему автоматичного управління з передавальної функцією  $W_3(p)$ , що служить для посилення і перетворення керуючого корисного сигналу  $G(t)$  за наявності випадкової завади  $F(t)$ . Це перетворення в загальному випадку проводиться відповідно з деяким заданим оператором (алгоритмом перетворення)  $H(p)$  (рис. 6.1). У загальному випадку система повинна можливо більш точно відтворювати на свій вихід не саме управління вплив  $G(t)$ , а деяку функцію від керуючого впливу, тобто

$$Z(t) = H(p)G(t) \quad (6.1)$$

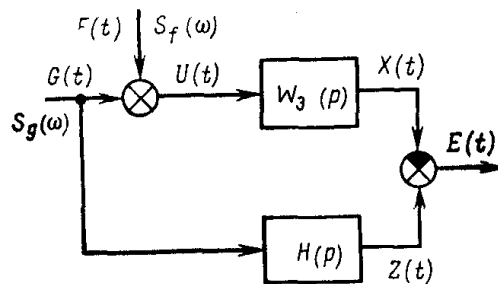


Рис. 6.1. Структурна схема САУ

У системах, що знаходяться під впливом випадкового (або регулярного) корисного сигналу і випадкової завади, виникає завдання відділення корисного сигналу від завади і придушення (фільтрації) останньої. Це завдання в учбових посібниках називають також завданням *фільтрації* або *згладжування*. Вданому учбовому посібнику воно розглядається в розділі 3.

Введення перетворюючого оператора  $H(p)$  узагальнює завдання не тільки на звичайні, що стежать, у яких  $Z(t) = G(t)$ , тобто  $H(p) = 1$ , але і на інші класи систем, що виконують різні перетворення керуючого сигналу. Залежно від виду оператора  $H(p)$  завдання фільтрації поєднується з іншими операціями, наприклад, з операцією диференціювання [якщо  $H(p) = p$ ] та ін. У загальному випадку, в залежності від цілей управління, оператор  $H(p)$  може бути довільним.

Ідеальне перетворення корисного сигналу відповідно до (6.1) неможливо через наявність динамічних помилок системи, а також через наявність збурюючих впливів (завад). Тому вихідний сигнал (регульована величина)  $X(t)$  буде суттєво відрізнятися від очікуваного, який повинен мати вигляд відтвореного сигналу  $Z(t)$ .

Різницю

$$E(t) = Z(t) - X(t) \quad (6.2)$$

називають випадковою помилкою системи.

Синтез систем при випадкових впливах полягає у визначенні динамічних характеристик системи, які найкращим чином забезпечують виконання деякого статистичного критерію оптимальності. Слід зазначити, що в цьому сенсі існують різні статистичні критерії оптимальності. Однак найбільш часто за статистичний критерій оптимальності беруть критерій мінімуму середньоквадратичної помилки

$$\varepsilon_{c.k} = \min \sqrt{\bar{\varepsilon}^2} = \sqrt{\lim_{T \rightarrow \infty} (1/2T) \int_{-T}^T \varepsilon^2(t) dt}, \quad (6.3)$$

де  $\varepsilon(t)$  - будь-яка реалізація випадкової помилки.

У цьому випадку завдання синтезу полягає в тому, щоб знайти таку фізично реалізовану оптимальну передавальну функцію замкненої системи  $W_{3\text{опт}}(p)$ , при якій було б мінімальним середнє значення квадрата помилки

$$\bar{\varepsilon}^2 = \overline{\{Z(t) - X(t)\}^2} = \min. \quad (6.4)$$

Згідно з критерієм середньої квадратичної помилки, оцінка точності системи проводиться залежно від середнього, а не миттєвого значення помилки, що не завжди є достатнім, наприклад тоді, коли потрібно, щоб помилка не виходила за задані межі. Застосування цього критерію може виявитися нераціональним і в тих випадках, коли вимоги до величини помилки в різні моменти часу неоднакові.

Однак, незважаючи на те, що цей критерій, втім, як і всякий інший непрямий критерій, не є універсальним, він завдяки своїй простоті отримав широке практичне застосування

При впливі на систему некорельованих між собою стаціонарного випадкового сигналу і завади відповідно до схеми (рис.6.1) середнє значення квадрата помилки складається з двох складових:

$$\bar{\varepsilon}^2 = \bar{\varepsilon}_g^2 + \bar{\varepsilon}_f^2 \quad (6.5)$$

Якби до системи було докладено тільки один зовнішній вплив, або корисний сигнал  $G(t)$ , або завада  $F(t)$ , то теоретично відповідним вибором параметрів передавальної функції (смуги пропускання) системи можна було б забезпечити будь-яку точність систем. Однак при одночасній дії корисного сигналу і завади точність системи не може бути будь-який.

Це наочно видно з рис. 6.2, де зображені типові графіки залежності складових помилки  $\bar{\varepsilon}_g^2$  і  $\bar{\varepsilon}_f^2$  від величини коефіцієнта посилення розімкненої системи  $K$ . Для кращого відтворення керуючого сигналу  $G(t)$ , т. е. зменшення складової помилки  $\bar{\varepsilon}_g^2$  система повинна мати можливо більший коефіцієнт підсилення. Однак, для того щоб краще придушувати заваду  $F(t)$ , тобто зменшити складову помилки  $\bar{\varepsilon}_f^2$  система, навпаки, повинна мати можливо менший коефіцієнт  $K$ . Тому, коли на систему діють одночасно корисний сигнал і завада, існує деяке компромісне (оптимальне) рішення та відповідні йому оптимальні параметри системи (у даному випадку  $K_{\text{опт}}$ ), при яких середнє значення квадрата помилки буде мінімальним, менше якого його, при заданих статистичних характеристиках керуючого сигналу і завади, ніякою зміною параметрів системи автоматичного управління даної структури зробити не можна.

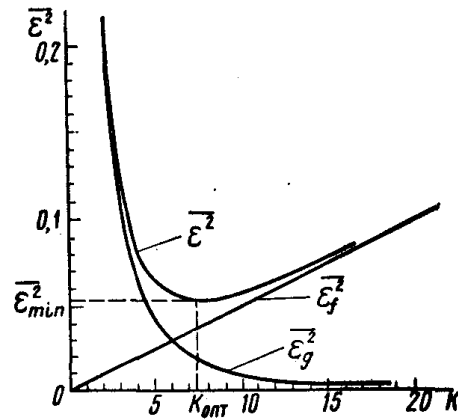


Рис.6.2. Типові графіки залежності складових помилки  $\varepsilon_g^2$  і  $\varepsilon_f^2$

Залежно від виду графіків спектральної щільності керуючого сигналу і завади способи вирішення задачі синтезу при випадкових впливах можуть бути різні.

У простому випадку, коли спектри частот корисного сигналу  $S_g(\omega)$  і завади  $S_f(\omega)$  не накладаються один на одного (рис.6.3,а), амплітудно-частотну характеристику замкнутої системи  $A(\omega)$  вибирають досить широкою для забезпечення необхідної точності відтворення керуючого сигналу і в той же час досить вузької для того, щоб система менше реагувала на заваду.

Якщо керуючий сигнал має спектр частот, дуже швидко убуває із зростанням частоти, а спектр перешкод близький до «білого шуму» (рис. 6.3,б), то в цьому випадку форма амплітудно-частотної характеристики  $|W(j\omega)|$  розімкнутої системи повинна вибиратися при низьких частотах, де  $|W(j\omega)| \gg 1$  і сконцентрована основна енергія сигналу, що управляє, можливо більш близькою до форми спектральної щільності керуючого сигнал  $S_g(\omega)$ , а потім повинна швидко спадати, по можливості слідуючи за спадною характеристикою  $S(\omega)$ . Найбільш загальним є випадок, коли спектри частот корисного сигналу і завади накладаються один на одного і мають довільну форму (рис. 6.3, в).

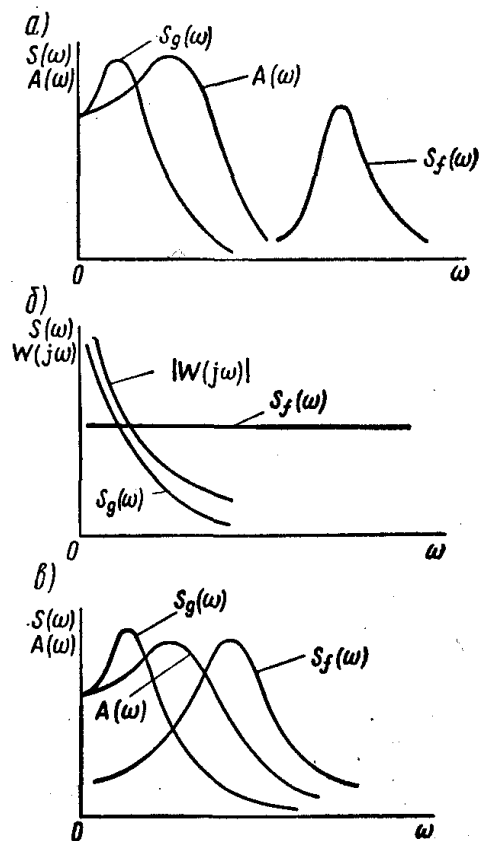


Рис. 6.3. Частотні характеристики

В останньому випадку при довільних впливах розрізняють два види завдань:

1. Синтез при заданій структурі системи управління, коли домагаються мінімуму середньоквадратичної помилки, вибираючи оптимальні параметри коригувальних ланок системи на підставі відомих заздалегідь статистичних характеристик корисного сигналу і завади автоматичної системи управління.

2. Синтез при довільній структурі системи управління, коли по заданих статистичних характеристиках корисного сигналу і завади визначають оптимальну структуру і параметри системи, при яких забезпечується мінімум середньоквадратичної помилки.

## 6.2. Синтез лінійних стохастичних САУ при заданій структурі системи

У цьому випадку завдання синтезу формулюється наступним чином.

Задані: статистичні характеристики корисного сигналу і завади, наприклад спектральні щільності  $S_g(\omega)$  і  $S_f(\omega)$ ; структура системи та її передавальна функція

$W(p) = W(p, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ , де  $\beta_i$  - невідомі параметри автоматичної системи управління.

Потрібно знайти оптимальні параметри системи  $\beta_{1\text{опт}}, \beta_{2\text{опт}}, \dots, \beta_{n\text{опт}}$  при яких в системі управління забезпечується мінімум середньоквадратичної помилки.

Це завдання вирішується таким чином: знаючи спектральні щільності  $S_g(\omega)$  і  $S_f(\omega)$  і передавальну функцію системи, визначають спектральну щільність помилки  $S_\varepsilon(\omega)$ , а потім, користуючись табличними інтегралами (додаток 1), знаходять аналітичний вираз середнього значення квадрата помилки  $\bar{\varepsilon}^2$ , яке виходить залежних від параметрів системи:

$$\bar{\varepsilon}^2 = F(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n). \quad (6.6)$$

Диференціюючи (6.6) по  $\beta_i$ , де  $(i = 1, 2, \dots, n)$  і прирівнюючи нулю приватні похідні, знаходять  $n$  рівнянь, з яких визначають оптимальні параметри системи  $\beta_{1\text{опт}}, \beta_{2\text{опт}}, \dots, \beta_{n\text{опт}}$ , що забезпечують мінімум середньоквадратичної помилки.

Як правило, більшість параметрів системи змінювати важко або неможливо, так як вони визначаються заданими технічними або конструктивними міркуваннями. Тому зазвичай варіюють два-три параметри, наприклад постійні часу коригувальних ланок, коефіцієнт посилення розімкнутої системи та ін. Якщо кількість змінних  $n$  невелика, то відшукування екстремуму функції не викликає труднощів. При великій кількості  $n$ , коли явне вираження середнього значення квадрата помилки через параметри системи визначити важко, або воно занадто громіздко, використовують наближені методи відшукування мінімуму виразу (6.6) шляхом числового завдання параметрів, які нас цікавлять, і побудованих до заданої низки їх фіксованих значень відповідних графіків.

Параметри системи, обрані за критерієм мінімуму середньоквадратичної помилки, оцінюють потім виходячи з можливості їх технічної реалізації та допустимих динамічних показників системи (часу регулювання, коливання, перерегулювання та ін.).

Зауважимо, що зазначена вище методику вибору оптимальних параметрів системи може застосовуватися і при одночасному впливі на систему регулярних і випадкових сигналів в автоматичній системі управління.

**Приклад 6.1.** На вході замкнутої системи з одиничним зворотним зв'язком (рис.2.10) діють випадковий корисний сигнал  $G(t)$ , що має спектральну щільність  $S_g(\omega) = \frac{2D_g T_g}{1+\omega^2 T_g^2}$ , і випадкова завада  $F(t)$  типу «білий шум», спектральна щільність якої  $S_f(\omega) = N$ . Вважаємо, що кореляція між корисним сигналом і перешкодою відсутня.

Передавальна функція розімкнутої системи  $W(p) = \frac{K/p}{1+pT}$ .

Потрібно визначити оптимальне значення коефіцієнта посилення розімкнутої системи  $K_{\text{опт}}$ , відповідне мінімуму середньоквадратичної помилки, і обчислити середню квадратичну помилку для  $K = K_{\text{опт}}$  при  $D_g = 100 \text{ В}$ ;  $T_g = 20 \text{ с}$ ;  $N = 0,01 \text{ В}^2 / \text{Гц}$ ;  $T = 0,1 \text{ с}$ ;  $K = 5 \text{ 1/с}$ .

Раніше у **прикладі 2.5** було отримано вираз для середнього значення квадрата помилки

$$\bar{\varepsilon}^2 = \bar{\varepsilon}_g^2 + \bar{\varepsilon}_f^2 = \frac{D_g(T+T_g+kTT_g)}{(T+T_g+KT_g^2)} + \frac{KN}{2}.$$

Для дослідження на мінімум середньоквадратичної помилки необхідно прирівняти нулю похідну від цього виразу за коефіцієнтом посилення розімкнутої системи. В результаті отримуємо

$$\frac{d\bar{\varepsilon}^2}{dK} = -D_g[T_g(T_g^2 - T^2)]/[T + T_g + KT_g^2]^2 + N/2$$

З останнього рівняння визначаємо оптимальне значення коефіцієнта посилення розімкнутої системи:

$$K_{\text{опт}} = \sqrt{2D_g(T_g^2 - T^2)/(NT_g^3)} - (T_g + T)/T_g^2.$$

Підставляючи чисельні значення параметрів, отримуємо

$$K_{\text{опт}} = \sqrt{2 * 100(20^2 - 0,1^2)/(0,01 * 20^3)} - (20 + 0,1)/20^2 \approx 30 \text{ 1/с}.$$

Підставляючи  $K_{\text{опт}}$  в вираз для середнього значення квадрата помилки, отримуємо

$$\bar{\varepsilon}_{\text{min}}^2 = 100(0,1 + 20 + 30 * 0,1 * 20)/(0,1+20+30*20^2)+30*0,01/2=0,816.$$

Середня квадратична помилка, відповідна  $K_{\text{опт}}$

$$\varepsilon_{\text{с.к min}} = \sqrt{\bar{\varepsilon}_{\text{min}}^2} = \sqrt{0,816} = 0,904 \text{ В}.$$

**Приклад 6.2** Умови завдання такі ж, як і в прикладі 6.1. Потрібно визначити оптимальне значення коефіцієнта посилення розімкнутої системи  $K_{\text{опт}}$  і обчислити середню квадратичну помилку при  $K = K_{\text{опт}}$ . Вираз для середнього значення квадрата помилки має вигляд

$$\bar{\varepsilon}^2 = m_\varepsilon^2(t) + \bar{\varepsilon}_f^2 = \bar{\varepsilon}_g^2 + \bar{\varepsilon}_f^2 = (V/K)^2 + KN/2.$$



Прирівнюємо нулю похідну від цього виразу за коефіцієнтом посилення розімкнутої системи:

$$\frac{d\bar{\varepsilon}^2}{dK} = -2V^2/K^3 + N/2 = 0.$$

З останнього виразу визначаємо

$$K_{\text{опт}} = \sqrt[3]{4V^2/N}.$$

Підставляючи чисельні значення параметрів, отримуємо

$$K_{\text{опт}} = \sqrt[3]{4/0,01} = \sqrt[3]{400} = 7,38 \text{ 1/}\tilde{n}.$$

Середнє значення квадрата помилки, відповідне  $K_{\text{опт}}$

$$\bar{\varepsilon}_{\text{min}}^2 (1/7,38)^2 + 7,38 * 0,01/2 = 0,055.$$

Середня квадратична помилка

$$\varepsilon_{\text{с.к min}} = \sqrt{\bar{\varepsilon}_{\text{min}}^2} = \sqrt{0,055} = 0,234B.$$

### 6.3. Синтез лінійних стохастичних САУ при довільній структурі системи

Розглянемо завдання синтезу САУ при довільній структурі системи. Нехай на систему діють корисний сигнал  $G(t)$  і завада  $F(t)$ , які прикладені до одного і того ж входу ( рис. 6.1) і є стаціонарними випадковими процесами з рівними нулю середніми значеннями. Якщо корисний сигнал і завада прикладені до різних входів, то їх завжди можна привести до одного входу.

Таким чином, сумарний сигнал на вході системи буде дорівнювати

$$U(t) = G(t) + F(t). \quad (6.7)$$

Вихідний сигнал системи  $X(t)$  пов'язаний з вхідним сигналом  $U(t)$  рівнянням

$$X(t) = W_3(p)U(t) = W_3(p)[G(t) + F(t)], \quad (6.8)$$

де  $W_3(p)$  - передавальна функція замкнутої системи.

Припустимо, що система повинна відтворювати деяку функцію від керуючого сигналу

$$Z(t) = H(p)G(t) \quad (6.9)$$

Помилка відтворення дорівнює

$$E(t) = Z(t) - X(t) \quad (6.10)$$

Завдання синтезу у разі довільної структури лінійної системи полягає в тому, щоб при відомих статистичних характеристиках корисного сигналу і завади знайти таку фізично реалізовану оптимальну передавальну функцію замкненої системи  $W_{3\text{опт}}(p)$ , при якій середнє значення квадрата сумарною помилки було б мінімально, іншими словами

$$\bar{\varepsilon}^2 = \overline{\{Z(t) - X(t)\}^2} = \min. \quad (6.11)$$

Розглянемо завдання синтезу оптимальної передавальної функції  $W_{3\text{опт}}(p)$  вважаючи, що нам задані спектральні щільності корисного сигналу  $S_g(\omega)$  і завади  $S_f(\omega)$ ; а також перетворює оператор (алгоритм перетворення)  $H(p)$ . Рішення проведемо для спрощеного, але часто зустрічається випадку, коли корисний сигнал і завада некорельовані.

Вираз для будь-якої реалізації випадкової сумарною помилки можна записати наступним чином:

$$\varepsilon(t) = z(t) - x(t) = H(p)g(t) - W_3(p)u(t) = |H(p) - W_3(p)|g(t) - W_3(p)/(t) \quad (6.12)$$

Вираз для спектральної щільності помилки

$$S_\varepsilon(\omega) = |H(j\omega) - W_3(j\omega)|^2 S_g(\omega) + |W_3(j\omega)|^2 S_f(\omega) \quad (6.13)$$

а середнє значення квадрата помилки

$$\bar{\varepsilon}^2 = (1/2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} \{|H(j\omega) - W_3(j\omega)|^2 S_g(\omega) + |W_3(j\omega)|^2 S_f(\omega)\} d\omega \quad (6.14)$$

Для мінімізації помилки  $\varepsilon^2$  необхідно вибрати відповідну частотну передавальну функцію системи  $W_{3\text{опт}}(j\omega)$ .

Основні труднощі в мінімізації виразу (6.14) пов'язана з урахуванням умов фізичної здійсненності передавальної функції системи  $W_{3\text{опт}}(p)$ . Знайдемо спочатку  $W_{3\text{опт}}(p)$  без урахування цієї умови, а потім на основі отриманого рішення побудуємо кращу з фізично реалізованих систем.

Записавши частотні передавальні функції  $H(j\omega)$  і  $W_3(j\omega)$  у вигляді

$$\begin{aligned} H(j\omega) &= H(\omega)e^{j\psi(\omega)} = H(\omega)\cos\psi(\omega) + jH(\omega)\sin\psi(\omega) \\ W_3(j\omega) &= A(\omega)e^{j\varphi(\omega)} = A(\omega)\cos\varphi(\omega) + jA(\omega)\sin\varphi(\omega) \end{aligned} \quad (6.15)$$

обчислимо

$$|H(j\omega) - W_3(j\omega)|^2 = H^2(\omega) + A^2(\omega) - 2H(\omega)A(\omega)\cos[\psi(\omega) - \varphi(\omega)] \quad (6.16)$$

Тоді (6.14) набирає вигляду

$$\bar{\varepsilon}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \{H^2(\omega) + A^2(\omega) - 2H(\omega)A(\omega)\cos[\psi(\omega) - \varphi(\omega)]\} S_g(\omega) + A^2(\omega)S_f(\omega) \} d\omega \quad (6.17)$$

З (6.17) необхідно знайти такі значення  $A(\omega)$  і  $\phi(\omega)$ , при яких виконувалося б умова  $\varepsilon^2 = \min$ . Це типова варіаційна завдання, яке вирішується, наприклад, за допомогою рівнянь Ейлера.

Враховуючи, що  $H(\omega)$ ,  $A(\omega)$ ,  $S_g(\omega)$  і  $S_f(\omega)$  є позитивними при будь-якому значенні  $\omega$ , для мінімізації  $\varepsilon^2$  необхідно, щоб негативний член  $2H(\omega)A(\omega)\cos[\psi(\omega) - \phi(\omega)]$  був найменшим, тобто щоб

$$\psi(\omega) = \varphi(\omega) \quad (6.18)$$

Тоді (6.17) прийме вигляд

$$\bar{\varepsilon}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \{H^2(\omega) + A^2(\omega) - 2H(\omega)A(\omega)[S_g(\omega) + A^2(\omega)S_f(\omega)]\} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Q d\omega \quad (6.19)$$

Оскільки всі члени в останньому підінтегральному виразі позитивні, то мінімум середнього значення квадрата помилки буде при мінімальному значенні функції  $Q$ .

Прирівнюючи  $dQ/dA(\omega) = 0$ , отримуємо

$$[2A(\omega) - 2H(\omega)]S_g(\omega) + 2A(\omega)S_f(\omega) = 0 \quad (6.20)$$

звідки знаходимо вираз для оптимальної амплітудно-частотної характеристики замкнутої системи:

$$A_{\text{опт}}(\omega) = \frac{S_g(\omega)}{S_g(\omega) + S_f(\omega)} H(\omega)$$

$$W_{\text{з. опт}}(j\omega) = \frac{S_g(\omega)}{S_g(\omega) + S_f(\omega)} H(j\omega) \quad (6.21)$$

Як впливає з (6.21), єдиними статистичними характеристиками корисного сигналу і завади, необхідними для визначення оптимальної частотної передавальної функції замкнутої системи, є їх спектральні щільності.

Однак оптимальна частотна передатна функція, обумовлена (6.21), виявляється в загальному випадку фізично нездійсненною. Це можна показати на приватному простому прикладі. Нехай вирішується завдання відтворення, тобто  $H(j\omega) = 1$ , і нехай завада являє собою одиничний «білий шум», тобто  $S_f(\omega) = 1$ . Тоді

$$W_{3.опт}(j\omega) = \frac{S_g(\omega)}{S_g(\omega) + S_f(\omega)} H(j\omega) = \frac{S_g(\omega)}{S_g(\omega) + 1} \quad (6.22)$$

і, оскільки  $1 + S_g(\omega)$  - позитивна величина, вона розкладається на комплексні множники, один з яких завжди буде мати полюси в нижній півплощині коренів. Імпульсна перехідна функція  $k(t)$ , знайдена для такої частотної передавальної функції, буде існувати і для від'ємних значень часу  $t < 0$ , тобто до початку перехідного процесу (до додатка обурення). Це і свідчить про те, що в даному випадку отримати  $W_{3.опт}(j\omega)$  не можливо.

Умовою фізичної реалізованості є виконання рівності  $k(t) = 0$  при  $t < 0$ ; в цьому випадку  $W_{3.опт}(j\omega)$  матиме всі полюси у верхній півплощині коренів, а відповідна їй передавальна функція  $W_{3.опт}(p)$  буде мати тільки ліві коріння.

Оптимальна частотна передавальна функція, обумовлена (6.21), виявилася фізично нездійсненною тому, що в реальних системах завжди існує зв'язок між амплітудно-частотною  $A(\omega)$  і фазочастотною  $\phi(\omega)$  характеристиками, який не був врахований при виведенні формули (6.21).

Для того щоб реалізувати функцію, найбільш близьку до оптимальної, необхідно з  $W_{3.опт}(j\omega)$  виділити фізично реалізовану частину з полюсами, що знаходяться у верхній півплощині коренів, а інші члени відкинути.

Для цього, користуючись методикою, запропонованої Г. Боде і К. Шенноном, розкладають спочатку знаменник виразу (6.21) на комплексні множники (операція «факторизації»):

$$S_g(\omega) + S_f(\omega) = |\Psi(j\omega)|^2 = \Psi(j\omega)\Psi(-j\omega) \quad (6.23)$$

де  $\Psi(j\omega)$  - функція, всі нулі і полюси якої лежать у верхній півплощині комплексної змінної  $j\omega$ ;  $\Psi(-j\omega)$  - функція, комплексно-сполучена з  $\Psi(j\omega)$ , всі нулі і полюси якої лежать в нижній напівплощині комплексного змінного  $j\omega$ .

Потім проводять поділ  $W_{3.опт}(j\omega)$  на такі, що можуть бути реалізовані і подальше реалізуються (операція «розщеплення»):

$$W_{3.опт}(j\omega) = \frac{1}{\Psi(j\omega)} \left[ \frac{S_g(\omega)H_g(\omega)}{\Psi(-j\omega)} \right]_+ + \frac{1}{\Psi(j\omega)} \left[ \frac{S_g(\omega)H_g(\omega)}{\Psi(-j\omega)} \right]_- \quad (6.24)$$

причому реалізована частина відзначається знаком плюс, а нереалізована-знаком мінус.

Відкидаючи члени, відповідні нездійсненню частини, умова оптимальності з урахуванням фізичної реалізованості записують таким чином:

$$W_{з.опт}(j\omega) = \frac{1}{\psi(j\omega)} \left[ \frac{S_g(\omega)H_g(\omega)}{\psi(-j\omega)} \right]_+ \quad (6.25)$$

Фізично реалізована частотна передавальна функція виявляється вже неоптимальною в колишньому розумінні, але серед фізично реалізованих функцій у відповідності з прийнятим критерієм вона є найкращою.

Таким чином, коли корисний сигнал і завада некорельовані, знаходження оптимальної фізично реалізованої частотної передавальної функції  $W_{з.опт}(j\omega)$  проводиться в наступному порядку:

1. Обчислюємо сумарну спектральну щільність керуючого сигналу і завади і представляємо цю суму у вигляді двох комплексних співмножників:

$$S_u(\omega) = S_g(\omega) + S_f(\omega) = \Psi(j\omega)\Psi(-j\omega) \quad (6.26)$$

2. Виділяємо складову  $1/\psi(j\omega)$ .

3. Розкладаємо на найпростіші складові вираз

$$S_g(\omega)H(j\omega)/\Psi(-j\omega) = M_1(j\omega)/P(j\omega) + M_2(j\omega)/P(-j\omega) \quad (6.27)$$

і, відкидаючи члени з полюсами, розташованими в нижній півплощині коренів, тобто  $M_2(j\omega)/P(-j\omega)$ , виділяємо з нього фізично реалізовану частину  $M_1(j\omega)/P(j\omega)$ .

4. Визначаємо оптимальну фізично реалізовану частотну передавальну функцію системи:

$$W_{з.опт}(j\omega) = M_1(j\omega)/\Psi(j\omega)P(j\omega) \quad (6.28)$$

Можна показати, що при наявності взаємної кореляції корисного сигналу і завади оптимальна частотна передатна функція

$$W_{з.опт}(j\omega) = \frac{1}{\psi(j\omega)} \left[ \frac{S_g(\omega)H_g(\omega)}{\psi(-j\omega)} H(j\omega) \right] \quad (6.29)$$

$$\Psi(j\omega)\Psi(-j\omega) = S_u(\omega) = S_g(\omega) + S_{gf}(j\omega) + S_{fg}(j\omega) + S_f(\omega); S_{gf}(j\omega)$$

$S_{fg}(j\omega)$  - взаємні спектральні щільності керуючого сигналу і завади.

Оптимальну передавальну функцію  $W_{з.опт}(p)$  отримують по знайденій оптимальній частотній передавальній функції  $W_{з.опт}(j\omega)$ , підставляючи в останню  $p$  замість  $(j\omega)$ . Потім відповідно до отриманої передавальної функцією  $W_{з.опт}(p)$  вибирають елементи системи. Якщо частина елементів задана, і змінити їх параметри не представляється можливим, то в таких випадках завдання зводиться до вибору параметрів коригувальних ланцюгів при знайденій оптимальній передавальній функції системи управління в цілому і відомих передавальних функціях окремих заданих елементів системи автоматичного управління.

У системі, що має оптимальну передавальну функцію, виходить теоретично досяжний мінімум середнього квадрата помилки:

$$\bar{\varepsilon}_{min}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \{ |H(j\omega)|^2 S_g(\omega) - |W_{з.опт}(j\omega)|^2 S_u(\omega) \} d\omega \quad (6.30)$$

**Приклад 6.3.** На вході системи, яка стежить, діє випадковий корисний сигнал  $G(t)$ , що має спектральну щільність

$$S_g(\omega) = 2D_g T_g / (1 + \omega^2 T_g^2) = S_g(0) / (1 + \omega^2 T_g^2) \quad ($$

де  $S_g(0) = 2D_g T_g$  - значення спектральної щільності корисного сигналу на нульовій частоті.

На корисний сигнал накладена випадкова завада  $F(t)$  типу «білий шум», спектральна щільність якої дорівнює  $S_f(\omega) = S_f(0) = N$ , де  $S_f(0)$  - значення спектральної щільності завади на нульовій частоті.

Середні значення корисного сигналу і завади дорівнюють нулю; кореляція між ними відсутній.

Потрібно визначити оптимальну передавальну функцію, яка стежить за корисним сигналом системи і відповідну їй дисперсію сумарною помилки.

1. Обчислюємо спектральну щільність сумарного вхідного сигналу  $U(t) = G(t) + F(t)$  і представляємо її у вигляді твору комплексних співмножників:

$$S_u(\omega) = S_g(\omega) + S_f(\omega) = \frac{S_g(0) + S_f(0)/(1 + \omega^2 T_g^2)}{1 + \omega^2 T_g^2} = \Psi(j\omega)\Psi(-j\omega)$$

2. Визначаємо  $\Psi(j\omega)$  і  $\Psi(-j\omega)$  для чого розкладаємо отриманий вираз на комплексно-зв'язані множники:

$$\frac{S_g(0) + S_f(0)/(1 + \omega^2 T_g^2)}{1 + \omega^2 T_g^2} = |S_g(0) + S_f(0)| \frac{(1 + j\omega a)(1 - j\omega a)}{(1 + \omega T_g)(1 - \omega T_g)}$$

$$\text{де } a = \frac{T_g}{\sqrt{1+p}} \quad p = S_g(0)/S_f(0)$$

$$\Psi(j\omega) = \sqrt{S_g(0) + S_f(0)} + \frac{(1+j\omega a)}{(1+j\omega T_g)}$$

$$\Psi(-j\omega) = \sqrt{S_g(0) + S_f(0)} + \frac{(1-j\omega a)}{(1-j\omega T_g)}$$

3. Знаходимо складову

$$\frac{S_g(\omega)}{\Psi(-j\omega)} H(j\omega)$$

У нашому випадку для системи, яка стежить за корисним сигналом,  $H(j\omega) = 1$ , тому отримуємо

$$\frac{S_g(\omega)}{\Psi(-j\omega)} H(j\omega) = \frac{S_g(0)(1-j\omega T_g)}{(1+\omega^2 T_g^2) \sqrt{S_g(0)+S_f(0)}(1-j\omega a)} = \frac{S_g(0)}{\sqrt{S_g(0)+S_f(0)}(1+j\omega T_g)(1-j\omega a)}$$

4. Розкладаємо останній вираз на прості доданки:

$$\frac{S_g(\omega)}{\Psi(-j\omega)} H(j\omega) = \frac{S_g(0)}{\sqrt{S_g(0)+S_f(0)}} \left( \frac{T_g}{a+T_g} \right) \left( \frac{1}{1+j\omega T_g} \times \frac{a}{1+T_g} + \frac{1}{1-j\omega a} \right) = \frac{M_1(j\omega)}{P(j\omega)} + \frac{M_2(j\omega)}{P(-j\omega)}$$

і, відкидаючи члени з полюсами, розташованими в правій півплощині, виділимо фізично реалізовану частину:

$$\frac{M_1(j\omega)}{P(j\omega)} = \frac{S_g(0)}{\sqrt{S_g(0)+S_f(0)}} \times \frac{T_g}{a+T_g} \times \frac{1}{1+j\omega T_g}$$

5. Знаходимо оптимальну частотну передавальну функцію фізично реалізованої системи:

$$W_{3,\text{опт}}(j\omega) = \frac{1}{\Psi(j\omega)} \frac{M_1(j\omega)}{P(j\omega)} = \frac{S_g(0)}{S_g(0)+S_f(0)} \times \frac{T_g}{a+T_g} \times \frac{1}{1+j\omega a} = \frac{K}{1+j\omega a}$$

де коефіцієнт посилення замкнутої оптимальної системи

$$K = \frac{S_g(0)}{S_g(0)+S_f(0)} \frac{T_g}{a+T_g} = \frac{p}{(1+p)(1/\sqrt{1+p})} = 1 - 1/\sqrt{1+p}$$

постійна часу замкнутої оптимальної системи.

$$T = a = T_g/\sqrt{1+p}$$

6. Підставляючи в останній вираз  $p$  замість  $j\omega$ , знаходимо оптимальну передавальну функцію замкнутої системи:

$$W_{3,\text{опт}}(p) = K/(1+pT)$$

Підставляючи чисельні значення коефіцієнтів, отримуємо:

$$K = 1 - \frac{1}{\sqrt{1+2 \times 100 \times \frac{20}{0,01}}} = 1 - 0,00156 \approx 1 \text{ 1/c}$$

$$T = 20\sqrt{1+2 \times 100 \times 20/0,01} = 0,032 \text{ c}$$

Отже, в нашому випадку оптимальна передавальна функція замкнутої системи

$$W_{3,\text{опт}}(p) = 1/(1+pT)$$

7. Визначаємо оптимальну передавальну функцію розімкнутої системи:

$$W_{\text{опт}}(p) = W_{3.\text{опт}}(p)/|1 - W_{3.\text{опт}}(p)| = 1/(pT)$$

8. Визначаємо передавальну функцію замкненої системи помилково:

$$W_{g\varepsilon.\text{опт}}(p) = 1/[1 + W_{\text{опт}}(p)] = pT/(1 + pT)$$

9. Визначаємо спектральну щільність помилки:

$$S_{\varepsilon}(\omega) = |W_{g\varepsilon.\text{опт}}(j\omega)|^2 S_g(\omega) + |W_{3.\text{опт}}|^2 S_f(\omega) = |T^2\omega^2/(1 + \omega^2T^2)| \times \left[ \frac{2D_gT_g}{1 + \omega^2T^2} \right] + \frac{N}{2T} (1 + \omega^2T^2) \quad (6.47)$$

10. Визначаємо дисперсію помилки:

$$D_{\varepsilon} = \left( \frac{1}{2\pi} \right) \int_{-\infty}^{\infty} S_{\varepsilon}(\omega) d\omega = \frac{D_gT}{T+T_g} + \frac{N}{2T} = 100 \times \frac{0.032}{0.032+20} + \frac{0.01}{2 \times 0.032} = 0,316$$

Середня квадратична помилка, що збігається в даному випадку із середнім квадратичним відхиленням, дорівнює

$$\varepsilon_{с.к} = \sigma_{\varepsilon} = \sqrt{D_{\varepsilon}} = \sqrt{0,316} = 0,562B$$

### Запитання для самоперевірки

1. Охарактеризуйте загальну задачу синтезу лінійних систем з мінімальною середньою квадратичною помилкою.
2. Наведіть формулу критерія середньої квадратичної помилки.
3. Задача синтезу лінійних стохастичних САУ при заданій структурі системи. Основні співвідношення.
4. Які фактори впливають на вибір оптимальних параметрів САУ?
5. Задача синтезу лінійних стохастичних САУ при довільній структурі системи. Основні співвідношення.
6. Як можна із передавальної функції замкнутої САУ  $W_{3.\text{опт}}(j\omega)$  виділити фізично реалізовану частину? Методика Г. Боде і К. Шеннона.



## Література

1. Брайсон А., Хо Ю-ши. Прикладная теория оптимального управления. Оптимизация, оценка и управление. – М.: Мир, 1972. -544с.
2. Острем К. Введение в стохастическую теорию управления. М.: Мир, 1973. -324с.
3. Пантелеев А.В., Бортакровский А.С. Теория управления в примерах и задачах. – М.: Высшая школа, 2003. -582 с.
4. Пантелеев А.В., Рыбаков К.А. Методы и алгоритмы синтеза оптимальных стохастических систем управления. – М.: Изд-во МАИ, 2012. -159 с.
5. Попович М.Г., Ковальчук О.В. Теорія автоматичного керування. – К. Либідь, 2007. -656 с.
6. Пугачев В.С. Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления. М.: Физматгиз, 1962. -887 с.
7. Прикладные методы теории случайных функций: учебное пособие / А. А. Свешников. - Изд. 3-е, стер. - Санкт-Петербург [и др.]: Лань, 2011. - 463 с.
8. Семенов В.В., Пантелеев А.В., Руденко Е.А. Математическое описание и синтез нелинейных систем. Учебное пособие. – М.: Изд-во МАИ, 1990. - 102 с.
9. Купер Дж., Макгиллем К. Вероятностные методы анализа сигналов и систем. М.: Мир, 1989. -385 с.
10. Вентцель, Е.С. Теория случайных процессов и ее инженерные приложения: Учеб. пособие для студентов вузов / Е. С. Вентцель, Л. А. Овчаров. - 2. изд., стер. - М.: Высшая школа, 2000. - 383 с.
11. Круглов, В. М. Случайные процессы в 2 ч. Часть 2. Основы стохастического анализа: учебник - 2-е изд., перераб. и доп., Москва: Издательство Юрайт, 2016. — 280 с.
12. С.А.Кабанов Оптимизация динамики систем при действии возмущений. – Москва: Физматлит, 2008. - 200 с.
13. Рощин А.В. Синтез систем управления для стохастических объектов: Учебное пособие. - М.: МГУПИ, 2008. - 87 с.
14. Головченко А.В. Теория управления стохастическими системами. Учебное пособие. – Харьков: Национальный аэрокосмический университет „ХАИ”, 2017. – 68 с.
15. Соколов Ю.Н. Конспект лекций по курсу "Статистическая динамика систем управления". МВ и ССО СССР. ХАИ - Харьков: 1974. – 172 с.
16. Синтез систем управления для стохастических объектов. Учебное пособие/ А.В.Рощин. – М.: МГУПИ, 2008. – 87 с.: ил.
17. Х.Джеймс, Н.Никольс, Р.Филлипс «Теория следящих систем», 1953, прил.1, с. 454

## **Додатки**

Нижче наведена таблиця інтегралів наступного вигляду:

$$I_n = \frac{1}{2\pi j} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g_n(x)}{h_n(x)h_n(-x)} dx,$$

де

$$h_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n,$$

$$g_n(x) = b_0x^{2n-2} + b_1x^{2n-4} + \dots + b_{n-1}$$

і всі корні  $h_n(x)$  лежать у верхній напівплощині. Таблиця дає інтеграли  $I_n$  для значень  $n$  від 1 до 7 включно<sup>1</sup>.

$$I_1 = \frac{b_0}{2a_0a_1},$$

$$I_2 = \frac{-b_0 + \frac{a_0b_1}{a_2}}{2a_0a_1},$$

$$I_3 = \frac{-a_2b_0 + a_0b_1 - \frac{a_0a_1b_2}{a_3}}{2a_0(a_0a_3 - a_1a_2)},$$

$$I_4 = \frac{b_0(-a_1a_4 + a_2a_3) - a_0a_3b_1 + a_0a_1b_2 + \frac{a_0b_3}{a_4}(a_0a_3 - a_1a_2)}{2a_0(a_0a_3^2 + a_1^2a_4 - a_1a_2a_3)},$$

$$I_5 = \frac{M_5}{2a_0\Delta_5},$$

$$M_5 = b_0(-a_0a_4a_5 + a_1a_4^2 + a_2^2a_5 - a_2a_3a_4) + a_0b_1(-a_2a_5 + a_3a_4) + a_0b_2(a_0a_5 - a_1a_4) +$$

$$+ a_0b_3(-a_0a_3 + a_1a_2) + \frac{a_0b_4}{a_5}(-a_0a_1a_5 + a_0a_3^2 + a_1^2a_4 - a_1a_2a_3),$$

$$\Delta_5 = a_0^2a_5^2 - 2a_0a_1a_4a_5 - a_0a_2a_3a_5 + a_0a_3^2a_4 + a_1^2a_4^2 + a_1a_2^2a_5 - a_1a_2a_3a_4,$$

$$I_6 = \frac{M_6}{2a_0\Delta_6},$$

$$M_6 = b_0(-a_0a_3a_5a_6 + a_0a_4a_5^2 - a_1^2a_6^2 + 2a_1a_2a_5a_6 + a_1a_3a_4a_6 - a_1a_4^2a_5 - a_2^2a_5^2 - a_2a_3^2a_6 +$$

$$+ a_2a_3a_4a_5) + a_0b_1(-a_1a_5a_6 + a_2a_5^2 + a_3^2a_6 - a_3a_4a_5) + a_0b_2(-a_0a_5^2 - a_1a_3a_6 + a_1a_4a_5) +$$

$$+ a_0b_3(a_0a_3a_5 + a_1^2a_6 - a_1a_2a_5) + a_0b_4(a_0a_1a_5 - a_0a_3^2 - a_1^2a_4 + a_1a_2a_3) + \frac{a_0b_5}{a_6}(a_0^2a_5^2 +$$

$$+ a_0a_1a_3a_6 - 2a_0a_1a_4a_5 - a_0a_2a_3a_5 + a_0a_3^2a_4 - a_1^2a_2a_6 + a_1^2a_4^2 + a_1a_2^2a_5 - a_1a_2a_3a_4),$$

$$\Delta_6 = a_0^2a_5^3 + 3a_0a_1a_3a_5a_6 - 2a_0a_1a_4a_5^2 - a_0a_2a_3a_5^2 - a_0a_3^3a_6 + a_0a_3^2a_4a_5 + a_1^3a_6^2 -$$

$$- 2a_1^2a_2a_5a_6 - a_1^2a_3a_4a_6 + a_1^2a_4^2a_5 + a_1a_2^2a_5^2 + a_1a_2a_3^2a_6 - a_1a_2a_3a_4a_5,$$

$$I_7 = \frac{M_7}{2a_0\Delta_7},$$

$$M_7 = b_0m_0 + a_0b_1m_1 + a_0b_2m_2 + \dots + a_0b_6m_6,$$

<sup>1</sup>Ця таблиця була розрахована Мак-Леном

## Додаток 1 (продовження)

$$\begin{aligned} m_0 = & a_0^2 a_6 a_7^2 - 2a_0 a_1 a_6^2 a_7 - 2a_0 a_2 a_4 a_7^2 + a_0 a_2 a_5 a_6 a_7 + a_0 a_3 a_5 a_6^2 + a_0 a_4^2 a_5 a_7 - \\ & - a_0 a_4 a_5^2 a_6 + a_1^2 a_6^3 + 3a_1 a_2 a_4 a_6 a_7 - 2a_1 a_2 a_5 a_6^2 - a_1 a_3 a_4 a_6^2 - a_1 a_4^3 a_7 + a_1 a_4^2 a_5 a_6 + a_2^3 a_7^2 - \\ & - 2a_2^2 a_3 a_6 a_7 - a_2^2 a_4 a_5 a_7 + a_2^2 a_5^2 a_6 + a_2 a_3 a_4^2 a_7 - a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 - a_2 a_3^2 a_6^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_1 = & a_0 a_4 a_7^2 - a_0 a_5 a_6 a_7 - a_1 a_4 a_6 a_7 + a_1 a_5 a_6^2 - a_2^2 a_7^2 + 2a_2 a_3 a_6 a_7 + a_2 a_4 a_5 a_7 - a_2 a_5^2 a_6 - \\ & - a_3^2 a_6^2 - a_3 a_4^2 a_7 + a_3 a_4 a_5 a_6, \end{aligned}$$

$$m_2 = a_0 a_2 a_7^2 - a_0 a_3 a_6 a_7 - a_0 a_4 a_5 a_7 + a_0 a_5^2 a_6 - a_1 a_2 a_6 a_7 + a_1 a_3 a_6^2 + a_1 a_4^2 a_7 - a_1 a_4 a_5 a_6,$$

$$\begin{aligned} m_3 = & -a_0^2 a_7^2 + 2a_0 a_1 a_6 a_7 + a_0 a_3 a_4 a_7 - a_0 a_3 a_5 a_6 - a_1^2 a_6^2 - a_1 a_2 a_4 a_7 - a_0 a_1 a_5 a_6 - \\ & - a_0 a_2 a_3 a_7 + a_0 a_3^2 a_6 + a_1^2 a_4 a_6 + a_1 a_2^2 a_7 - a_1 a_2 a_3 a_6, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_5 = & a_0^2 a_3 a_7 - a_0^2 a_5^2 - a_0 a_1 a_2 a_7 - a_0 a_1 a_3 a_6 + 2a_0 a_1 a_4 a_5 + a_0 a_2 a_3 a_5 - a_0 a_3^2 a_4 + a_1^2 a_2 a_6 - \\ & - a_1^2 a_4^2 - a_1 a_2^2 a_5 + a_1 a_2 a_3 a_4. \end{aligned}$$