

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

БУДІВЕЛЬНА МЕХАНІКА

Практикум

*Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра за освітньою
програмою «Геоінженерія» спеціальності 184 «Гірництво»*

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2022

Будівельна механіка: Практикум [Електронний ресурс]: навч. посіб. для здобувачів ступеня бакалавра спеціальності 184 «Гірництво»/ КПІ ім. Ігоря Сікорського; уклад.: Т.В. Косенко, С.М. Стовпник, Л.В. Шайдецька. – Електронні текстові дані (1 файл: 24,5 Мбайт). – Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2022. – 68 с.

*Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського (протокол № 4 від 07.04.2022 р.)
за поданням Вченої ради навчально-наукового інституту енергозбереження та енергоменеджменту (протокол № 6 від 24.01.2022 р.)*

Електронне мережне навчальне видання

БУДІВЕЛЬНА МЕХАНІКА

Практикум

Укладачі: *Косенко Тетяна Володимирівна, ст. викладач
Стовпник Станіслав Миколайович, к.т.н., доц.
Шайдецька Любов Валентинівна, к.т.н., доц.*

Відповідальний редактор: *Гайко Г.І., д.т.н., проф. кафедри геоінженерії*

Рецензент: *Бруква О.М., Головний Інженер Проекту, ТОВ ТЕБІН.ПРО*

У представленому навчальному виданні викладено основні положення щодо виконання практичних робіт і розрахунково-графічної роботи, тематика яких обіймає розділи курсу з вивчення статично визначуваних систем. Навчальне видання до виконання робіт містить завдання до роботи, основні теоретичні відомості, порядок виконання роботи, приклади та питання для самоперевірки.

У посібнику розглянуто: основні питання щодо встановлення геометричної незмінюваності і статичної визначуваності елементів конструкцій, основні методи розрахунку статично визначуваних систем на нерухоме і рухоме навантаження, наведені приклади, які демонструють застосування теорії розрахунків до розв'язання практичних задач.

Навчальне видання призначене для здобувачів ступеня бакалавра за спеціальністю 184 «Гірництво», освітньою програмою «Геоінженерія».

ЗМІСТ

ВСТУП.....	4
1. Кінематичний аналіз плоских систем	6
2. Визначення реакцій опор двохопорних балок	12
3. Розрахунок однопрольотних статично визначуваних балок	16
4. Розрахунок багатопрольотних статично визначуваних балок.....	29
5. Розрахунок тришарнірної арки.....	41
6. Розрахунок плоских рам	52
7. Розрахунок статично визначуваної ферми.....	62
СПИСОК ПОСИЛАНЬ	68

ВСТУП

Дане навчальне видання призначене для здобувачів ступеня бакалавра за спеціальністю 184 «Гірництво» денної та заочної форми навчання відповідно до силабусу освітнього компоненту «Будівельна механіка».

Сучасне будівництво вимагає високого рівня знань та навичок. Адже це не тільки архітектурна форма або вишукане оздоблення, перш за все – це система конструкцій, яка повинна бути безпечною, міцною, жорсткою. Постійно змінюються будівельні матеріали, вдосконалюється технологія ведення робіт, урізноманітнюються проектні рішення. Та потрібно пам'ятати, що будівля чи споруда деформується під час всього строку експлуатації. Тому будівельникам необхідно знати, яка розрахункова схема системи (балка, рама, арка, ферма), які навантаження діють (зосереджені чи розподілені) та які внутрішні зусилля виникають (згинаючий момент M , поперечна Q та поздовжня N сили).

Саме такі знання дає дисципліна «Будівельна механіка», а навчальне видання «Будівельна механіка. Практикум» допомагає студентам у засвоєнні основ будівельної механіки, методів розрахунку найпростіших статично визначуваних конструкцій, у вирішенні поставлених задач завдяки наведеним прикладам.

Проте вивчення цієї дисципліни неможливе без базових знань вищої математики (диференційні рівняння), теоретичної механіки (рівняння рівноваги) та опору матеріалів (визначення зусиль Q і M для однопрольотної балки). Водночас будівельна механіка є передумовою для вивчення такої дисципліни як «Будівельні матеріали та конструкції підземних споруд. Основи розрахунку», оскільки розміри поперечних перерізів елементів підбираються або перевіряються вже прийняті на основі згинаючих моментів та поперечних сил.

Навчальне видання являє собою збірник інструкцій з виконання практичних робіт, кожна з яких складається з наступних частин: теоретичних

відомостей, де наведені основні поняття теми; порядку виконання роботи; прикладів з докладним поясненням і ілюстраціями, які необхідні для якісного виконання роботи; списку контрольних питань і завдань, які допоможуть підготуватися до захисту практичної роботи; літератури. Практична робота 4 «Розрахунок багатопрольотних статично визначуваних балок» рекомендується до виконання в якості розрахунково-графічної роботи.

Для успішного виконання практичної роботи студент повинен ознайомитися з теоретичними відомостями, прикладами і умовами виконання завдань, а потім виконувати завдання.

По завершенню роботи студент повинен оформити звіт про її виконання. Текст звіту друкується на одній стороні листа А4 з рамкою. Звіти по кожній роботі оформлюються студентами індивідуально.

1. Кінематичний аналіз плоских систем

Мета роботи: навчитися проводити кінематичний аналіз системи, встановлювати геометричну незмінюваність, статичну визначуваність системи.

Теоретичні відомості

Кінематичний аналіз – це дослідження розрахункової схеми споруди (системи), що виконується до початку розрахунку з метою визначення кінематичної якості системи (геометричної незмінюваності, миттєвої змінюваності або геометричної змінюваності), а у випадку геометричної незмінюваності системи – для виявлення її статичної визначуваності або невизначуваності.

Геометрично незмінюваною називається система, яка допускає взаємні переміщення елементів, що її складають, лише за рахунок деформації цих елементів.

Геометрично змінюваною називається система, у якій кінцеві взаємні переміщення елементів можливі без їх деформації.

Миттєво-змінюваною називається система, що допускає малі відносні переміщення своїх точок без врахування деформацій стержнів, після чого така система стає незмінюваною [1].

Елемент плоскої системи, геометрична незмінюваність якого доведена або очевидна, називається **диском**. Кожний окремий диск D геометрично незмінюваний і характеризується трьома ступенями свободи на площині. Окремий вузол U можна розглядати як диск, що володіє двома ступенями свободи. Диски з'єднують за допомогою в'язей. Основні типи в'язей плоских систем: а) стержень з шарнірними кінцями C – елементарна в'язь, що ліквідує один ступінь свободи; б) шарнір $Ш$ – в'язь, еквівалентна двом елементарним в'язям; в) припайка $П$ – в'язь, еквівалентна трьом елементарним в'язям (рис. 1.1, а-в).

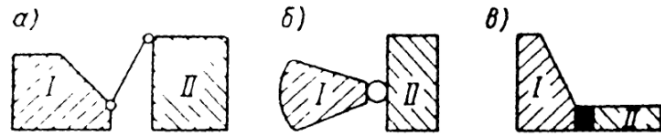


Рис. 1.1. Основні типи зв'язків плоских систем

В залежності від числа і розташування дисків і в'язей системи поділяються на незмінювані, змінювані і миттєво змінювані. Ступінь свободи плоскої системи, що складається з дисків, вузлів і в'язей, можна визначити за формулами:

- для систем, що приєднані до землі,

$$W = (3Д + 2У) - (С + 2Ш + 3П) - С_0; \quad (1.1)$$

- для свободних систем

$$W = (3Д + 2У) - (С + 2Ш + 3П) - 3, \quad (1.2)$$

де Д, У, С, Ш, П, C_0 – відповідно число дисків, вузлів, стержнів, шарнірів, припайок і опорних стержнів.

Якщо $W > 0$, то система геометрично змінювана. Якщо $W = 0$, то система має необхідну кількість в'язей для того, щоб бути незмінюваною. Якщо $W < 0$, то система має зайві в'язі і також може бути незмінюваною.

Умова $W \leq 0$ не є достатньою умовою геометричної незмінюваності системи. Судити про незмінюваність системи можна тільки після кінематичного аналізу.

На рис. 1.2, а-в, е-з показані основні види утворення незмінюваних систем з двох і трьох дисків. Системи, що зображені на рис. 1.2, г, д, и, к, є миттєво змінюваними, оскільки розташування в'язей дозволяє дискам мати безкінечно малі відносні переміщення. Тут або два диски мають єдиний миттєвий центр обертання (рис. 1.2, г, д), або три диски мають три миттєвих центра обертання, що лежать на одній прямій (рис. 1.2, и, к).

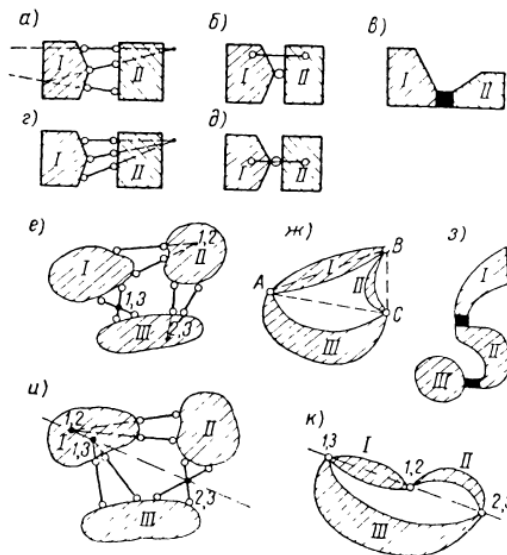


Рис. 1.2. Основні види утворення незмінюваних і миттєво змінюваних систем

Елементи, що з'єднуються (диски, вузли), і з'єднуючі елементи (в'язі) володіють властивостями двоїстості. В'язі можуть розглядатися як диски або вузли, а диски, навпаки, як в'язі [2].

Розглянемо приклад, свободну систему (рис. 1.2, ж) можна розглядати:

а) як три диска, що з'єднані шарнірами,

$$W=3Д-2Ш-3=3\cdot3-2\cdot3-3=0;$$

б) як три вузла, що з'єднані стержнями АВ, ВС і АС,

$$W=2У-С-3=2\cdot3-3-3=0;$$

в) як два диски I і II, що з'єднані шарніром В і стержнем АС,

$$W=3Д-2Ш-С-3=3\cdot2-2\cdot1-1-3=0;$$

г) як приєднання до диску III («земля») вузла В двома стержнями АВ і ВС, з'єднаних шарніром,

$$W=2У-С_0=2\cdot1-2=0.$$

Основні способи утворення геометрично незмінюваних систем, що ґрунтуються на найпростішій геометрично незмінюваній системі:

Спосіб 1. Приєднання нового вузла до геометрично незмінюваної системи двома стержнями, осі яких не лежать на одній прямій (рис. 1.3, а).

Спосіб 2. З'єднання двох дисків трьома стержнями, осі яких не паралельні й не перетинаються в одній точці (рис. 1.3,б).

Спосіб 3. З'єднання двох дисків стержнем АВ і шарніром С, який не лежить на прямій АВ (рис. 1.3,в).

Спосіб 4. З'єднання трьох дисків трьома шарнірами, що не лежать на одній прямій (рис. 1.3,г).

Спосіб 5. З'єднання трьох дисків трьома парами стержнів (рис. 1.3,д). При цьому точки перетину пар стержнів – O_{1-2} , O_{2-3} , O_{1-3} , що є миттєвими центрами обертання дисків D_1 та D_2 , D_2 та D_3 , D_1 та D_3 , не повинні розміщуватися на одній прямій.

Спосіб 6. Приєднання до системи, що має один ступінь свободи, тріади – трьох стержнів, що не лежать на одній прямій і з'єднані в одній точці шарніром (рис. 1.3,е) [3].

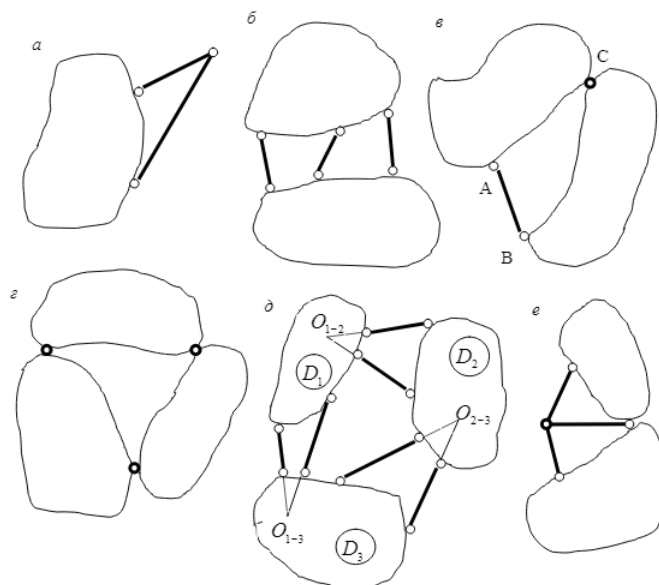


Рис.1.3. Способи утворення геометрично незмінюваних систем

Завдання до роботи

Виконати кінематичний аналіз системи, що зображена на рисунку (задається за варіантом).

Приклад рішення задачі

Задача 1. Виконати кінематичний аналіз системи, що зображена на рисунку 1.4.

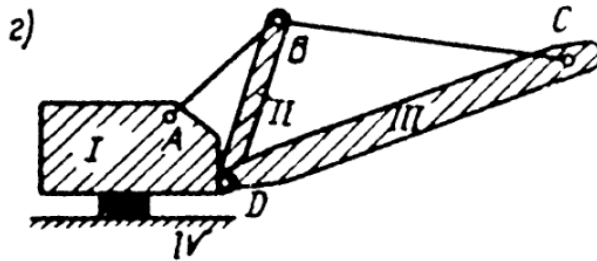


Рис.1.4. Схема до задачі 1

Рішення. В даній системі за диски прийемо заштриховані елементи і «землю». Тоді, $D=4$, $C=2$ (AB і BC), $\Pi=2$ (оскільки шарнір кратний), $\Pi=1$.

Ступінь свободи визначаємо за формулою:

$$W = (3D + 2U) - (C + 2\Pi + 3\Pi) - 3 = 3 \cdot 4 - 2 - 2 \cdot 2 - 3 \cdot 1 - 3 = 0.$$

Таким чином, система може бути геометрично незмінюваною. Для підтвердження цього розглянемо один з можливих шляхів її утворення.

Диск I з'єднаний з «землею» жорстким зв'язком (припайка) – він нерухомий; диск II з'єднаний з диском I за допомогою стержня AB і шарніра D (спосіб 3) – система залишається незмінною; диск III приєднаний до диску II за допомогою стержня BC і шарніра D (спосіб 3). Отже вся система геометрично незмінювана.

Задача 2. Виконати кінематичний аналіз системи, що зображена на рисунку 1.5.

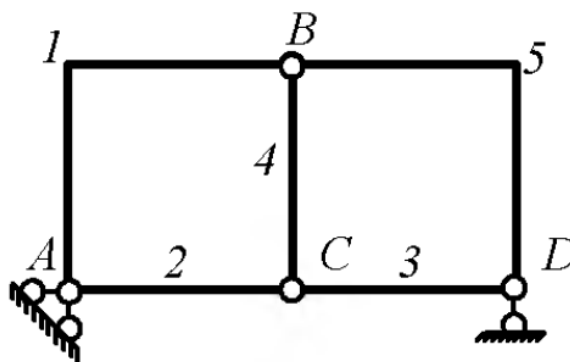


Рис. 1.5. Схема до задачі 2

Рішення. Дана система складається з п'яти дисків ($D=5$): AB, BC, AC, BD, CD; шести шарнірів: шарніри A і D – прості, шарніри B і C – триланкові,

тобто кожен з них замінює два прості шарніри; опорних стержнів – 3. Визначаємо ступінь свободи системи за формулою:

$$W = 3Д - 2Ш - C_o = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 6 - 3 = 0.$$

Система може бути геометрично незмінюваною і статично визначуваною. Для того, щоб переконатися в цьому, виконаємо аналіз її структури. Оскільки опорних стержнів 3, то вони тільки забезпечують закріплення диску до основи (землі). Залишається переконатися, що система представляє собою один диск, тобто є незмінною. Диски АВ, ВС, АС з'єднані між собою за допомогою 3-х шарнірів А, В, С, що не лежать на одній прямій і тому утворюють диск АВС (спосіб 4). До цього диску приєднаний диск ВД за допомогою шарніра В і стержня CD, який не проходить через центр шарніра В (спосіб 3). Таким чином, система утворена у відповідності з принципами утворення геометрично незмінюваних систем і є незмінюваною статично визначуваною системою [1].

Питання для самоперевірки

1. Дати визначення геометрично незмінюваних, геометрично змінюваних і миттєво змінюваних систем.
2. Що називається розрахунковою схемою споруди.
3. Що таке число ступенів свободи? Як визначити ступінь свободи плоскої системи?
4. Що таке диск?
5. Назвіть види шарнірів. Як визначити кратність шарніра?
6. Дати характеристику системи, у якої $W > 0$? $W = 0$? $W < 0$?
7. Необхідна аналітична умова геометричної незмінюваності.
8. Як здійснити геометрично незмінюване з'єднання двох дисків?
9. Як здійснити геометрично незмінюване з'єднання трьох дисків?
10. Порядок проведення кінематичного аналізу.

2. Визначення реакцій опор двохопорних балок

Мета роботи: практичне засвоєння методики розрахунку реакції опор двохопорних балок.

Теоретичні відомості

Реакція опори твердого тіла – це реакція в'язі, яка обмежує переміщення твердого тіла. Реакція в'язі ідеально гладкої поверхні спрямована перпендикулярно до дотичної до цієї поверхні, тобто вздовж нормалі. Реакція в'язі шарнірно рухомої опори спрямована перпендикулярно до поверхні, по якій опора може переміщуватися. Реакцію в'язі шарнірно нерухомої опори представляють двома взаємно перпендикулярними складовими, а реакцію в'язі жорсткого закріплення (затиснення) – трьома складовими: двома взаємно перпендикулярними силами та реактивним моментом [4].

Реакцію в'язі завжди спрямовують протилежно до того напрямку, в якому в'язь протидіє можливому переміщенню тіла.

Для рівноваги твердого тіла під дією довільної системи сил необхідно і достатньо, щоб сума проєкцій усіх сил на довільно обрані осі декартової системи координат X і Y , що лежать у площі дії сил, та сума моментів цих сил відносно довільно обраної точки A цієї площини, дорівнювали нулю:

$$\sum F_{ix} = 0; \sum F_{iy} = 0; \sum M_A = 0.$$

Одержані рівняння називають *основними рівняннями рівноваги твердого тіла при дії на нього довільної системи сил*.

Для складання рівняння суми моментів сил відносно довільно обраної точки на площині використовують правило знаків: якщо момент сили намагається повернути тіло за ходом годинникової стрілки, то цей момент вважають додатнім, якщо проти ходу годинникової стрілки – від'ємний [4].

Якщо в результаті розв'язання рівнянь рівноваги значення невідомої сили є від'ємним, то напрям цієї сили є протилежним до напрямку, показаному на рисунку.

Алгоритм рішення задач на визначення реакцій опор балок:

1. Накреслити балку і показати на рисунку діючі на неї навантаження.
2. Обрати систему координат.
3. Звільнити балку від опор, їх дію замінити силами реакцій.
4. Розглянути рівновагу балки, що перебуває під дією активних сил і реакцій опор, та записати рівняння рівноваги.
5. Розв'язати рівняння рівноваги та визначити реакції опор.
6. Виконати перевірку правильності визначення реакцій.

Завдання до роботи

Для заданої двохопорної балки необхідно визначити реакції опор балки в т. А і В, що викликаються заданими навантаженнями.

Приклад рішення задачі

Задача. Задана двохопорна балка (рис. 2.1), лінійні розміри якої становлять $a=8$ м, $b=4$ м, $c=2$ м. На балку діють зосереджена сила $F=10$ кН, що прикладена під кутом $\alpha=30^\circ$, рівномірно розподілена сила $q=10$ кН/м, реактивний момент $M=10$ кНм, місце прикладання яких показано на рисунку. Визначити реакції опор балки в т. А і В, що викликаються заданими навантаженнями.

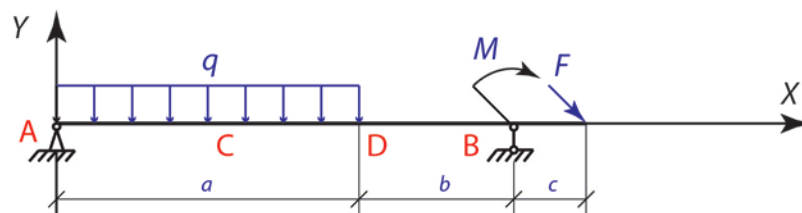


Рис.2.1. Схема двохопорної балки

Рішення:

1. Будуємо розрахункову схему (рис. 2.2)

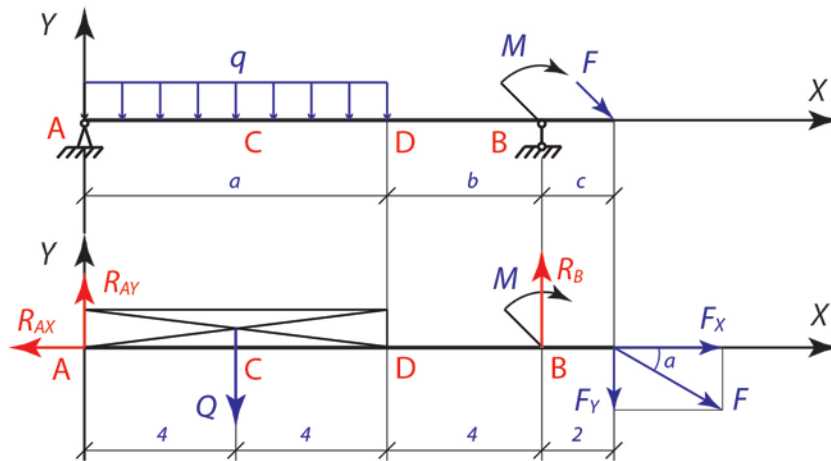


Рис. 2.2. Розрахункова схема двохопорної балки

2. Проводимо осі X і Y системи координат. Вісь X спрямовуємо горизонтально, вздовж балки, вісь Y – вертикально вгору. Початок системи координат суміщаємо з т. A .

3. Будуємо розрахункову схему. Відкидаємо опори і заміняємо їх силами реакцій. В шарнірно нерухомій опорі A розкладемо силу реакції на складові R_{Ax} і R_{Ay} вздовж осей координат. Реакція в шарнірно рухомій опорі R_B спрямована вертикально. Напрямки реакцій опор обираємо довільно. Якщо в результаті отримуємо від'ємні значення, то відповідна сила реакції повинна бути спрямована в протилежний бік.

Замінімо рівномірно розподілене навантаження q рівнодіючою Q . Абсолютне значення рівнодіючої дорівнює площі епюри:

$$Q = q \cdot |AD| = q \cdot a = 10 \cdot 8 = 80 \text{ кН.}$$

Точка прикладання рівнодіючої знаходиться в центрі тяжіння епюри. Оскільки епюра являє собою прямокутник, то її центр тяжіння знаходиться в т. C – посередині відрізка AD :

$$AC = AD = \frac{a}{2} = 4 \text{ м.}$$

Визначаємо проекції сил на осі координат. Розкладемо силу F на складові вздовж координатних осей. Визначаємо абсолютні значення складових:

$$F_x = F \cos \alpha = 10 \cos 30^\circ = 8.66 \text{ кН;}$$

$$F_y = F \sin \alpha = 10 \sin 30^\circ = 5 \text{ кН.}$$

4. Складаємо рівняння рівноваги. Необхідно визначити 3 реакції опори R_{Ax} , R_{Ay} , R_B , тому складаємо 3 рівняння рівноваги – сума проєкцій всіх сил на вісь X , сума моментів сил відносно т. A , сума моментів сил відносно т. B :

$$\sum F_x = 0; -R_{Ax} + F_x = 0,$$

звідки

$$R_{Ax} = F_x = 8.66 \text{ кН.}$$

$$\sum M_A = 0; -R_{Ay} \cdot 0 + Q \cdot 4 - R_B \cdot 12 + M + F_y \cdot 14 = 0,$$

звідки

$$R_B = \frac{Q \cdot 4 + M + F_y \cdot 14}{12} = \frac{80 \cdot 4 + 10 + 5 \cdot 14}{12} = 33.33 \text{ кН}$$

$$\sum M_B = 0; R_{Ay} \cdot 12 - Q \cdot 8 + M + F_y \cdot 2 = 0,$$

звідки

$$R_{Ay} = \frac{Q \cdot 8 - M - F_y \cdot 2}{12} = \frac{80 \cdot 8 - 10 - 5 \cdot 2}{12} = 51.67 \text{ кН.}$$

5. Щоб перевірити правильність визначення реакцій опор, знайдемо суму проєкцій сил на вісь Y . Якщо реакції знайдені правильно, вона повинна дорівнювати 0.

$$\sum F_y = 0; R_{Ay} - Q + R_B - F_y = 51.67 - 80 + 33.33 - 5 = 0; 0 = 0.$$

Умова виконується, отже рішення правильне, сили реакцій знайдені вірно.

Відповідь: $R_{Ax}=8,66$ кН, $R_{Ay}=51,67$ кН, $R_B=33,33$ кН.

Питання для самоперевірки

1. Що таке розрахункова схема споруди?
2. Принципи складання розрахункової схеми стержневої системи.
3. Що таке реакція опори твердого тіла?
4. Вказати алгоритм рішення задач на визначення реакцій опор балок.

3. Розрахунок однопрольотних статично визначуваних балок

Мета роботи: практичне засвоєння методики розрахунку статично визначуваної однопрольотної балки, побудови епюр внутрішніх силових факторів, побудови лінії впливу внутрішніх зусиль в перерізах.

Теоретичні відомості

Графіки, що показують зміну внутрішніх зусиль і моментів в перерізах по довжині балки від заданого нерухомого навантаження, називаються **епюрами зусиль і моментів**. Епюри дають картину розподілення внутрішніх силових факторів по довжині балки.

Послідовність побудови епюр внутрішніх силових факторів в статично визначуваних системах:

- проводиться кінематичний і структурний аналіз споруди;
- визначаються опорні реакції;
- розраховуються згинаючі моменти в необхідних для побудови епюри перерізах, будується епюра M ;
- визначаються поперечні сили в характерних перерізах, будується епюра Q ;
- проводиться статична перевірка правильності побудови епюр [2].

Для складання рівнянь статички відносно довільно обраної точки на площині використовують правило знаків: 1) якщо момент сили намагається повернути тіло за ходом годинникової стрілки, то цей момент вважається додатнім, якщо проти ходу годинникової стрілки – від’ємний; 2) поперечна сила вважається додатною, якщо вона намагається повернути тіло за годинниковою стрілкою, від’ємною, якщо проти; 3) поздовжня сила додатна, якщо розтягує елемент, і від’ємна, якщо стискає його.

Під час побудови епюр слід пам’ятати, що епюри згинаючих моментів завжди будуються на розтягнутих волокнах.

Під час розрахунку лінійно деформованих систем на дію рухомого навантаження застосовується метод ліній впливу [5].

Лінією впливу називається графік залежності деякого фактору (реакції опори, згинаючого моменту і т.д.) від положення на споруді одиничної сили постійного напрямку.

Завдання до роботи

Для заданої однопрольотної балки необхідно:

- побудувати епюри внутрішніх силових факторів;
- побудувати лінії впливу внутрішніх зусиль в перерізах n і k ;
- визначити зусилля в перерізах n і k по лініях впливу від заданого навантаження і порівняти їх з зусиллями на епюрах.

Приклад рішення задачі

Завдання 1: Для однопрольотної балки, зображеної на рис.3.1, побудувати епюри поперечних сил і згинаючих моментів, якщо задано: довжини ділянок балки $a=3$ м, $b=3$ м, $c=2$ м, $d=4$ м, реактивний момент $M=7$ кНм, зосереджена сила $F=8$ кН, розподілена сила $q=3$ кН/м.

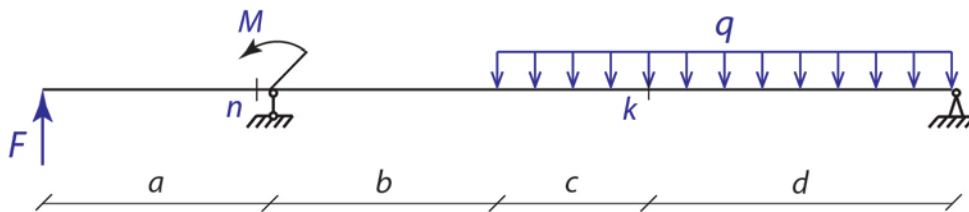


Рис.3.1. Схема однопрольотної балки

Рішення:

1.1. Проведення кінематичного аналізу

Визначаємо ступінь свободи за формулою:

$$W = 3D - 2Ш - C_0 = 3 \cdot 1 - 2 \cdot 0 - 3 = 0,$$

де $D=1$ – кількість дисків в рамі, $Ш=0$ – кількість шарнірів, $C_0=3$ – кількість опорних стержнів.

Отже, балка статично визначувана.

1.2. Розрахунок реакції опор. Для цього будемо розрахункову схему, обираємо напрямки координатних осей (рис.3.2). Напрямки реакцій опор обираємо довільно.

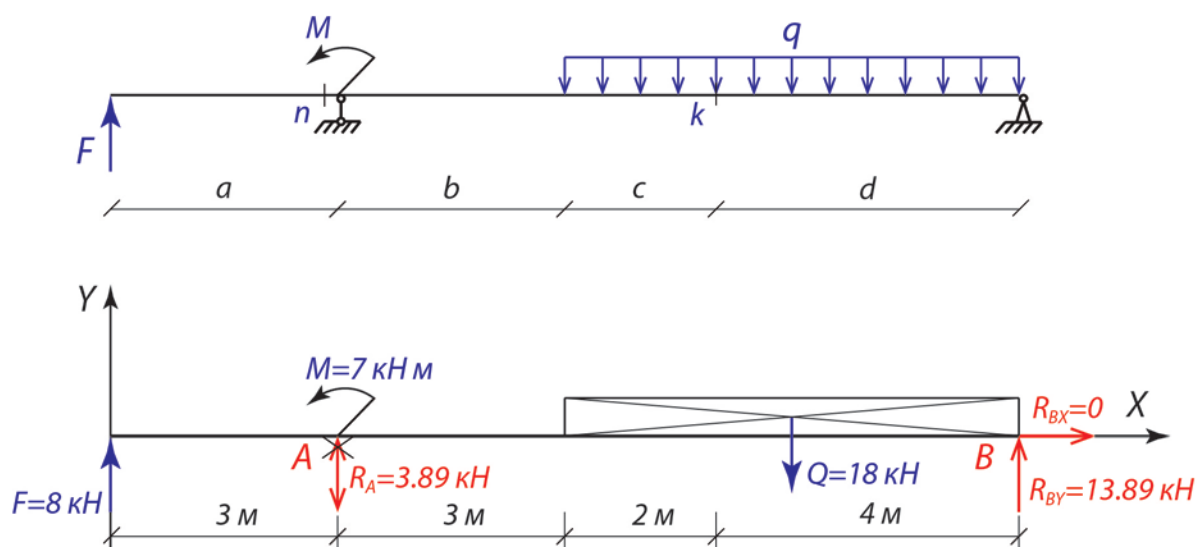


Рис. 3.2. Розрахункова схема однопрольотної балки

Складаємо рівняння рівноваги для плоскої системи. Рівняння рівноваги складаються таким чином, щоб з кожного рівняння визначалася одна складова:

$$\sum F_x = 0; R_{Bx} = 0;$$

$$\sum M_A = 0; F \cdot 3 - M + q \cdot 6 \cdot 6 - R_{By} \cdot 9 = 0,$$

звідки

$$R_{By} = \frac{F \cdot 3 - M + q \cdot 6 \cdot 6}{9} = \frac{8 \cdot 3 - 7 + 3 \cdot 6 \cdot 6}{9} = 13.89 \text{ кН}$$

$$\sum M_B = 0; F \cdot 12 + R_A \cdot 9 - M - q \cdot 6 \cdot 3 = 0,$$

звідки

$$R_A = \frac{-F \cdot 12 + M + q \cdot 6 \cdot 3}{9} = \frac{-8 \cdot 12 + 7 + 3 \cdot 6 \cdot 3}{9} = -3.89 \text{ кН}$$

Для перевірки правильності визначення реакцій опор, знайдемо суму проєкцій сил на вісь Y:

$$\sum F_y = 0; F + R_A - q \cdot 6 + R_B = 8 - 3.89 - 3 \cdot 6 + 13.89 = 0; 0 = 0.$$

Умова виконується, сили реакцій опор знайдені вірно.

Оскільки в результаті розрахунку реакція опори A має від'ємне значення, то напрямок R_A треба змінити на протилежний.

1.3. Побудова епюри згинаючих моментів і поперечних сил.

Балку ділимо на характерні ділянки. Початок новій ділянці дає: 1) кожна зміна закону розподілення навантаження; 2) кожна зміна закону розподілення площі поперечного перерізу; 3) злом.

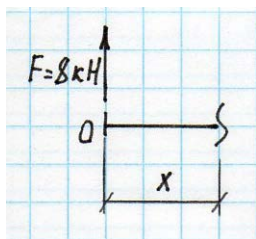
В даному випадку балка має чотири ділянки.

Методом перерізів визначаємо в межах кожної ділянки закони розподілення поперечних сил Q і згинаючих моментів M і будуємо епюри поперечних сил і згинаючих моментів (рис. 3.3).

Ділянка I:

Довільно проводимо переріз $I-I$. Відкидаємо праву частину балки. При розрахунках доцільно залишати ту частину балки, відносно якої зручніше вести розрахунок. Записуємо рівняння для згинаючих моментів і поперечних сил, застосовуючи правило знаків.

З умов рівноваги лівої частини балки запишемо рівняння для M_1 і Q_1 :



$$0 \leq x \leq 3$$

$$M_1 = F \cdot x$$

$$M(0) = 0$$

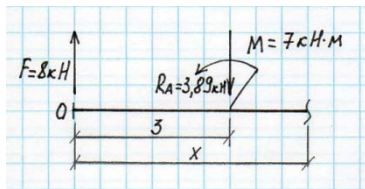
$$M(3) = 8 \cdot 3 = 24, \text{ кН} \cdot \text{м}$$

$$Q_1 = F = 8, \text{ кН}$$

Ділянка II:

Розглянемо рівновагу лівої частини балки відносно перерізу $II-II$, запишемо рівняння для M_2 і Q_2 :

$$3 \leq x \leq 6$$



$$M_2 = Fx - M - R_A(x - 3);$$

$$M(3) = 8 \cdot 3 - 7 = 17, \text{ кНм}$$

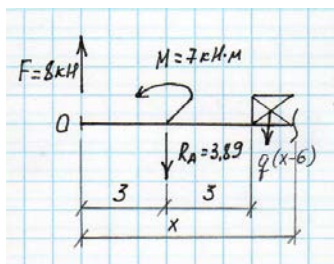
$$M(6) = 8 \cdot 6 - 7 - 3.89 \cdot 3 = 29.33, \text{ кНм}$$

$$Q_2 = F - R_A = 8 - 3.89 = 4.11, \text{ кН}$$

Ділянка III:

Розглянемо рівновагу лівої частини балки відносно перерізу III-III, запишемо рівняння для M_3 і Q_3 :

$$6 \leq x \leq 8$$



$$M_3 = Fx - M - R_A(x - 3) - q \frac{(x-6)^2}{2};$$

$$M(6) = 8 \cdot 6 - 7 - 3.89 \cdot 3 = 29.33, \text{ кНм}$$

$$M(8) = 8 \cdot 8 - 7 - 3.89 \cdot 5 - 3 \frac{2^2}{2} = 31.55,$$

$$Q_3 = F - R_A - q(x - 6);$$

$$Q(6) = 8 - 3.89 = 4.11, \text{ кН}$$

$$Q(8) = 8 - 3.89 - 3 \cdot 2 = -1.89, \text{ кН}$$

Епюра поперечних сил на ділянці III-III перетинає вісь. В цьому перерізі момент набуває екстремального значення. Необхідно визначити ординату епюри згинаючого моменту в цьому перерізі. Для цього рівняння поперечної сили на цій ділянці прирівнюємо до 0 і знаходимо координату x .

$$Q_3 = F - R_A - q(x - 6) = 0;$$

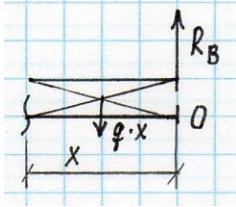
$$x = \frac{F - R_A}{q} + 6 = \frac{8 - 3.89}{3} + 6 = 7.37, \text{ м}$$

Підставляємо значення x в рівняння M_3 і отримуємо максимальне значення згинаючого моменту:

$$M(x) = 8 \cdot 7.37 - 7 - 3.89 \cdot 4.37 - 3 \cdot \frac{1.37^2}{2} = 32.14, \text{ кНм.}$$

Ділянка IV:

Розглянемо рівновагу правої частини балки відносно перерізу IV-IV, запишемо рівняння для M_4 і Q_4 (для правої частини балки знаки змінюються на протилежні):



$$0 \leq x \leq 4$$

$$M_4 = -\frac{qx^2}{2} + R_{By} \cdot x;$$

$$M(0) = 0$$

$$M(4) = -\frac{3 \cdot 4^2}{2} + 13.89 \cdot 4 = 31.56, \text{ кНм}$$

$$Q_4 = qx - R_{By}$$

$$Q(0) = -13.89, \text{ кН}$$

$$Q(4) = 3 \cdot 4 - 13.89 = -1.89, \text{ кН}$$

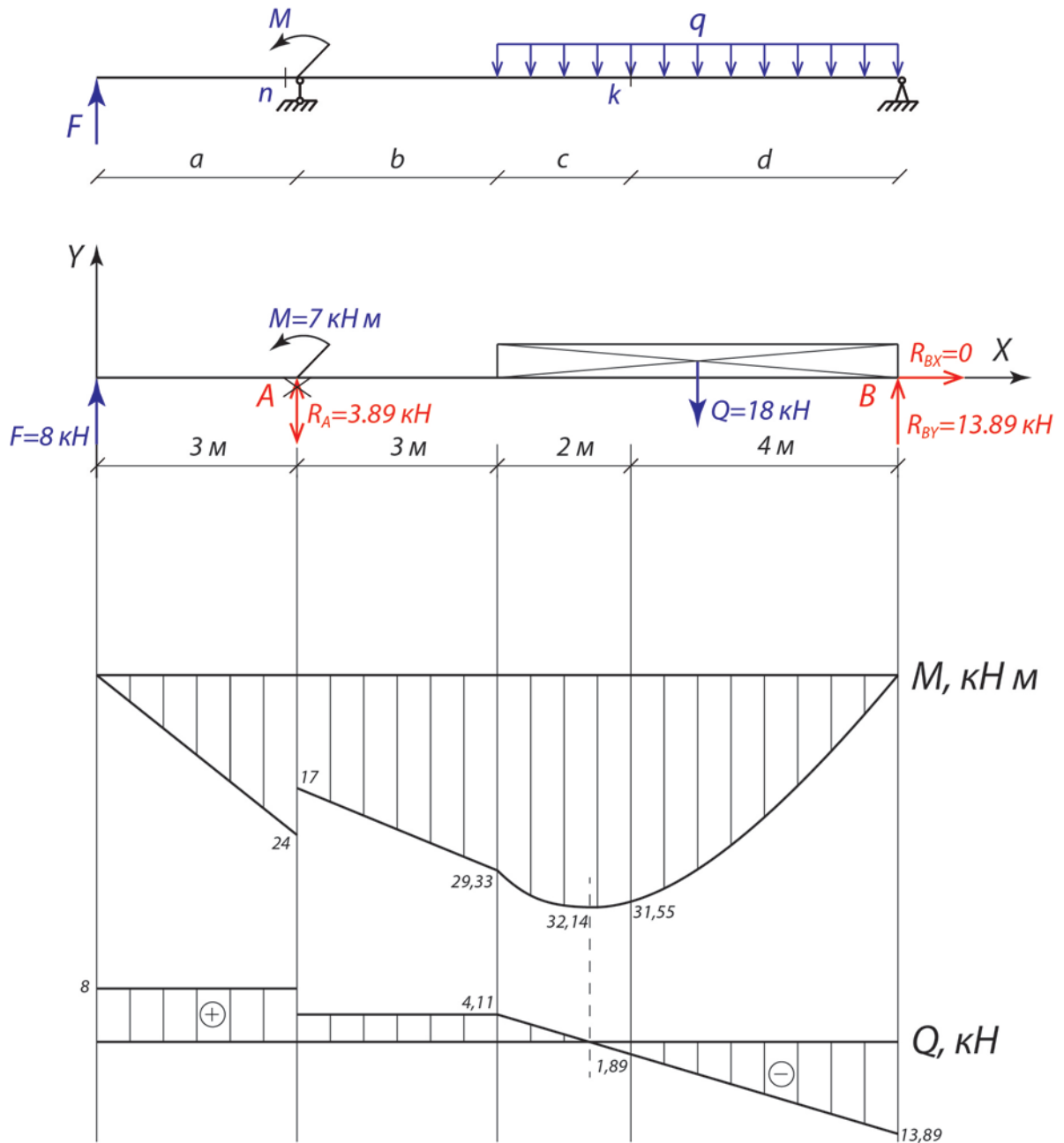


Рис. 3.3. Епюри згинаючого моменту і поперечної сили для однопрольотної балки

Проведемо аналіз окреслення епюр.

Епюра згинаючих моментів:

- між зосередженими силами епюра M обмежена прямою (ділянка $C-A$);
- на ділянках балки з рівномірно розподіленим навантаженням епюра M обмежена параболою другого ступеню (ділянка $D-B$);
- при розподіленому навантаженні епюра M спрямована опуклістю в той бік, в який спрямоване це навантаження (ділянка $D-B$);
- точки прикладання зосереджених сил, що перпендикулярні до осі балки, відповідають переломи в епюрі M ;
- під зосередженим моментом спостерігається скачок на величину моменту (т. A – скачок на величину $M=7$ кНм) (рис.3.4);
- в перерізі, де епюра Q перетинає вісь балки, згинаючий момент приймає екстремальне значення ($M=32,14$ кН·м) (рис. 3.4).

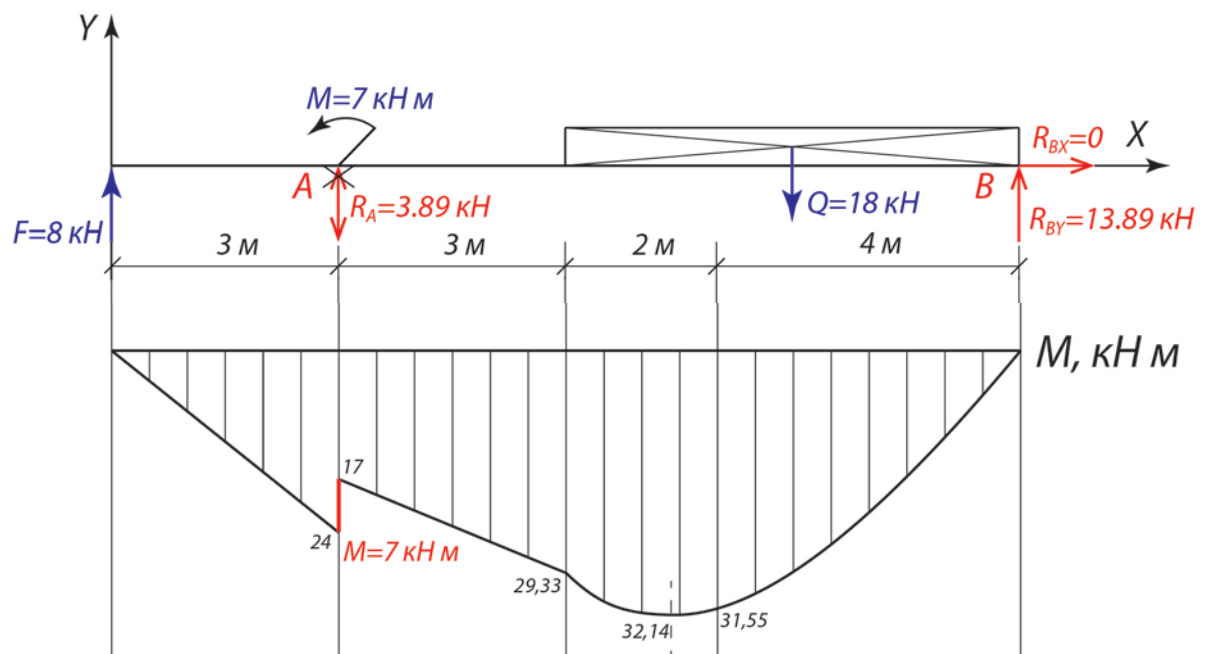


Рис. 3.4. Епюра згинаючих моментів

Епюра поперечних сил:

- між зосередженими силами епюра Q обмежена прямою горизонтальною лінією (ділянка $C-A$);
- на ділянках балки з рівномірно розподіленим навантаженням епюра Q обмежена похилою прямою;

- точкам прикладання зосереджених сил, що перпендикулярні до осі балки, відповідають скачки в епюрі Q ; коли сила спрямована вниз, то і скачок в епюрі Q при переміщенні зліва направо повинен бути вниз; коли сила спрямована вгору, то і скачок повинен бути вгору; величина скачка дорівнює величині сили (т.С – $F=8$ кН (спрямована в гору) – скачок на епюрі (+8); т.А – $R_A=3,89$ кН (спрямована вниз) – скачок в епюрі (-3,89) і т.д.) (рис.3.5)

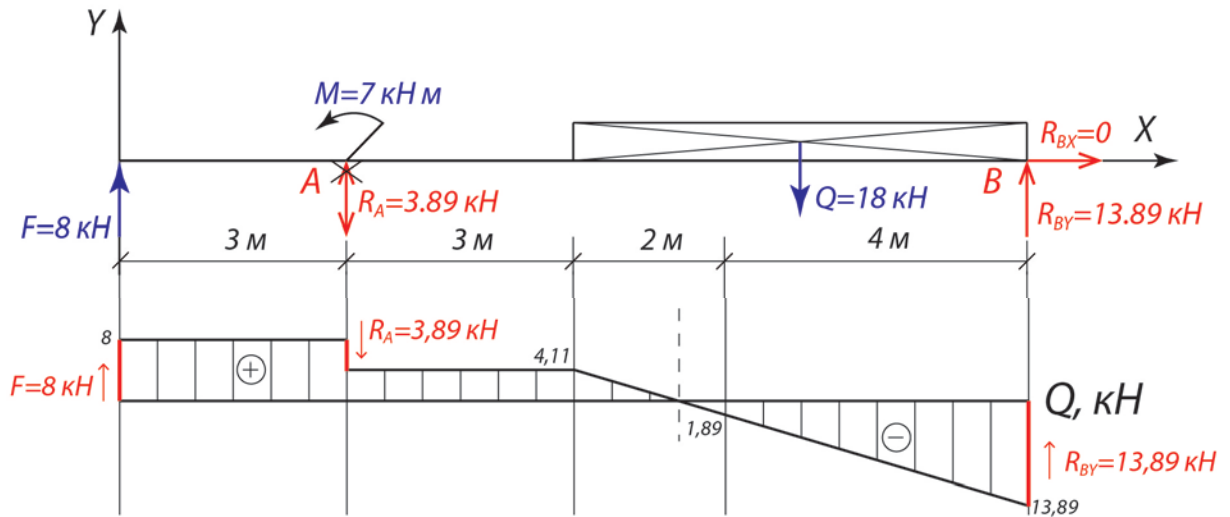


Рис.3.5. Епюра поперечних сил

Завдання 2. Побудувати лінії впливу внутрішніх зусиль в перерізах n і k .

Рішення:

Для побудови ліній впливу згинаючого моменту і поперечних сил застосовуємо статичний метод (метод перерізів).

Побудуємо лінію впливу згинаючого моменту для перерізу k , що знаходиться на відстані $a=5$ м від лівої опори і $b=4$ м – від правої, довжина прольоту $l=9$ м.

Якщо вантаж $P=1$ знаходиться лівіше перерізу k , тобто $0 \leq x \leq 5$, розглянемо рівновагу менш навантаженої (правої) частини балки, момент в перерізі k буде дорівнювати:

$$M_k = R_B \cdot b = \frac{x}{l} \cdot b$$

$$M_k(0) = 0$$

$$M_k(5) = \frac{5}{9} \cdot 4 = 2.22$$

Якщо вантаж $P=1$ знаходиться правіше перерізу k , тобто $5 \leq x \leq 9$, розглянемо рівновагу лівої частини балки, момент в перерізі k буде дорівнювати:

$$M_k = R_A \cdot a = \frac{l-x}{l} \cdot a$$

$$M_k(5) = \frac{9-5}{9} \cdot 5 = 2.22$$

$$M_k(9) = \frac{9-9}{9} \cdot 4 = 0$$

За отриманими даними наносимо лінію впливу згинаючого моменту для перерізу k на графік (рис.3.6).

Побудуємо лінію впливу поперечних сил для переізу k . Якщо вантаж $P=1$ знаходиться лівіше перерізу k , тобто $0 \leq x \leq 5$, розглянемо праву частину балки, поперечна сила в перерізі k буде дорівнювати:

$$Q_k = -R_B = -\frac{x}{l}$$

$$Q_k(0) = 0$$

$$Q_k(5) = -\frac{5}{9} = -0.55$$

Якщо вантаж $P=1$ знаходиться правіше перерізу k , тобто $5 \leq x \leq 9$, розглянемо ліву частину балки, момент в перерізі k буде дорівнювати:

$$Q_k = R_A = \frac{l-x}{l}$$

$$Q_k(5) = \frac{9-5}{9} = 0.45$$

$$Q_k(9) = \frac{9-9}{9} = 0$$

Наносимо лінію впливу поперечних сил для перерізу k на графік (рис. 3.6).

Побудову лінії впливу згинаючого моменту і поперечних сил для переізу n здійснюємо аналогічно.

Вантаж $P=1$ знаходиться зліва, $M_n = -Pc = -1 \cdot 3 = -3$.

Вантаж $P=1$ знаходиться справа, $M_n = 0$.

Вантаж $P=1$ знаходиться зліва, $Q_n = -P = -1$.

Вантаж $P=1$ знаходиться зправа, $Q_n = 0$.

Наносимо лінії впливу згинаючого моменту і поперечних сил для перерізу n на графік (рис. 3.6).

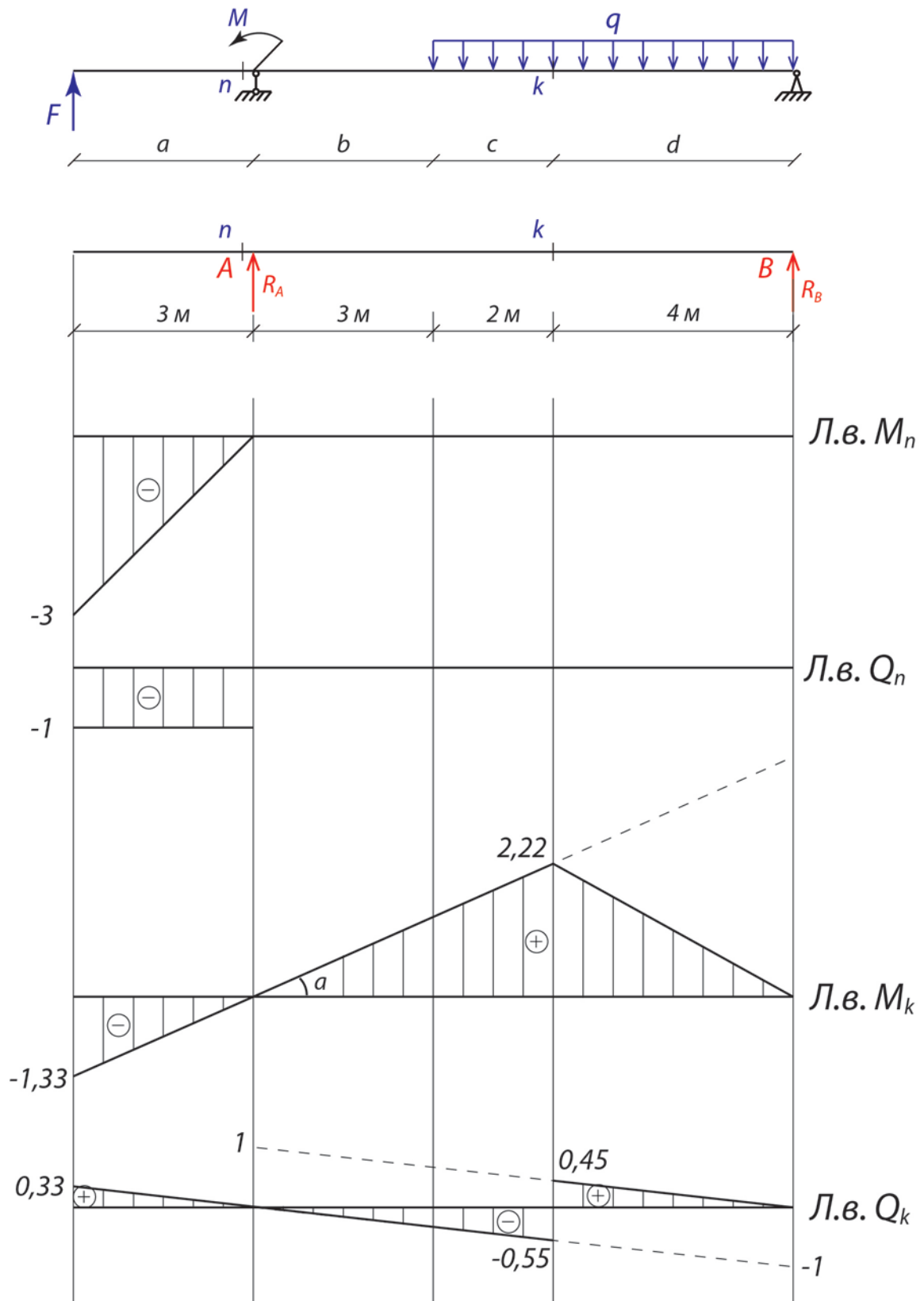


Рис.3.6. Лінії впливу згинаючих моментів і поперечних сил для перерізів n і k

Завдання 3. Визначити зусилля в перерізах n і k по лініях впливу від заданого навантаження і порівняти їх з зусиллями на епюрах.

Визначаємо внутрішні зусилля S (згинаючого моменту та поперечних сил) в перерізах n і k за формулою:

$$S = F \cdot h + q \cdot \omega + M \cdot tg\alpha,$$

де F – зосереджена сила («+» - спрямована вниз, «-» - спрямована вгору); h – ордината лінії впливу під силою; q – інтенсивність розподіленого навантаження («+» - спрямована вниз, «-» - спрямована вгору); ω – площа лінії впливу під навантаженням; M – зосереджений момент («+» – спрямований за годинниковою стрілкою, «-» – спрямований проти годинникової стрілки); α – ухил лінії впливу в місці прикладання M .

Визначаємо згинаючий момент і поперечну силу в перерізі n :

$$M_n = F \cdot h + q \cdot \omega + M \cdot tg\alpha = -8 \cdot (-3) + 3 \cdot 0 + 7 \cdot 0 = 24, \text{ кНм}$$

$$Q_n = F \cdot h + q \cdot \omega + M \cdot tg\alpha = -8 \cdot (-1) + 3 \cdot 0 + 7 \cdot 0 = 8, \text{ кН}$$

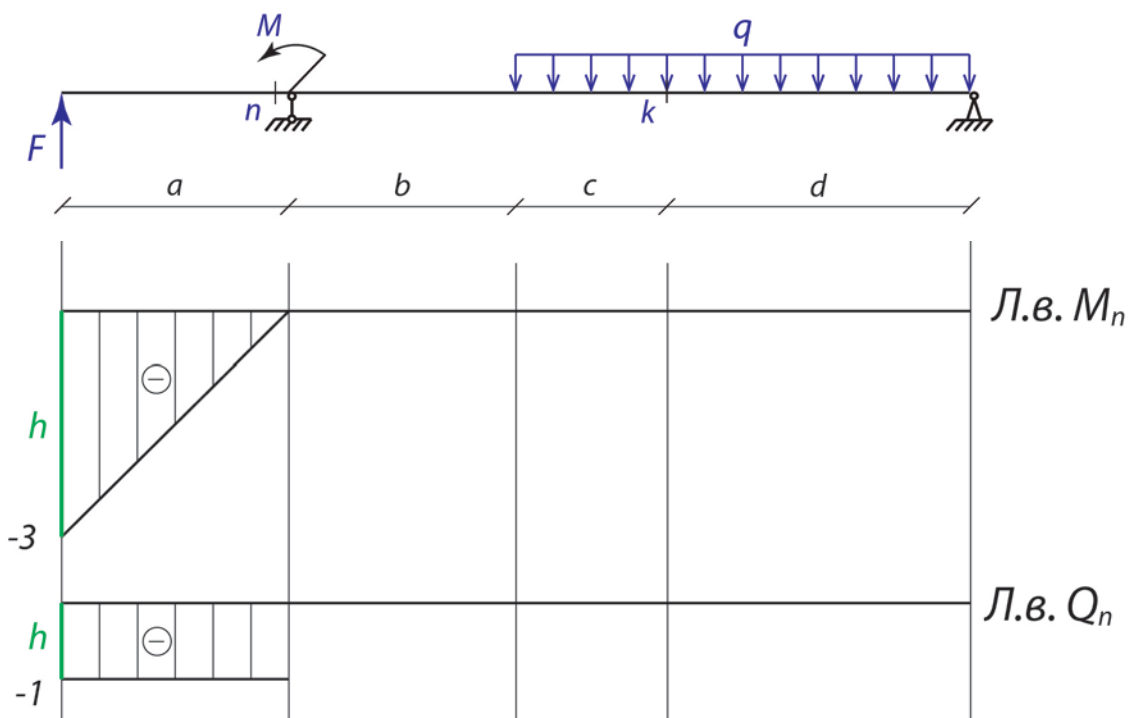


Рис. 3.7. Лінії впливу згинаючих моментів і поперечних сил для перерізу n

Визначаємо згинаючий момент і поперечну силу в перерізі k :

$$M_k = F \cdot h + q \cdot \omega + M \cdot \operatorname{tg} \alpha = -8 \cdot (-1.33) + 3 \cdot 8 - 7 \cdot \frac{1.33}{3} = 31.55, \text{ кНм}$$

$$Q_k = F \cdot h + q \cdot \omega + M \cdot \operatorname{tg} \alpha = -8 \cdot 0.33 + 3 \cdot 0 - 7 \cdot \left(-\frac{0.55}{5}\right) = -1.89, \text{ кН}$$

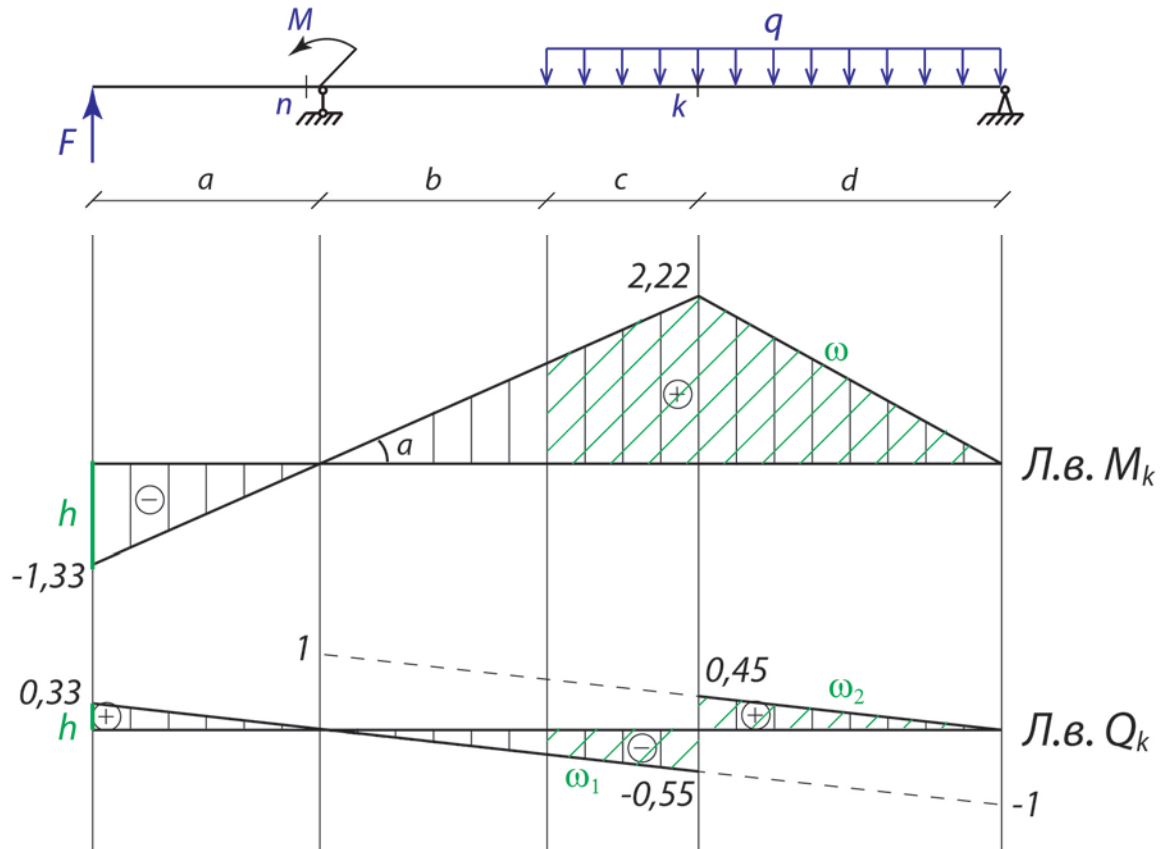


Рис. 3.8. Лінії впливу згинаючих моментів і поперечних сил для перерізу k

Значення зусиль, що отримані в результаті розрахунку, співпали з відповідними зусиллями на епюрах (рис. 3.9). Отже, розрахунок і побудова здійснені правильно.

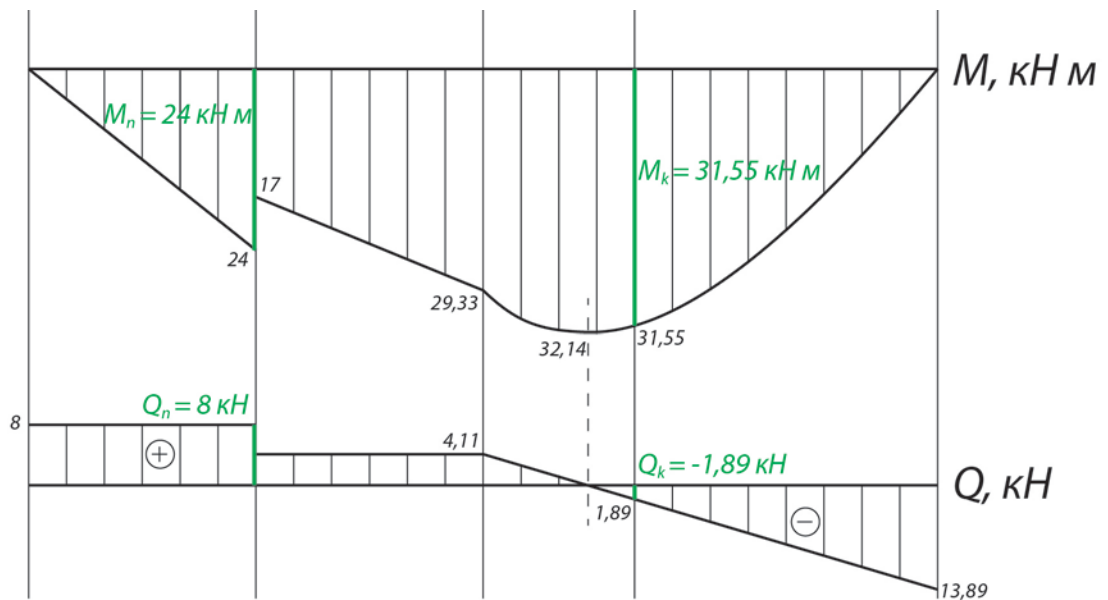


Рис.3.9. Перевірка розрахованих зусиль

Питання для самоперевірки

1. Назвіть основні типи балок.
2. Дати визначення та класифікацію опор
3. Дати визначення понять: поздовжня сила, поперечна сила, згинаючий момент
4. Дати визначення ліній впливу.
5. Що показує кожна ордината лінії впливу?
6. В чому основна відмінність лінії впливу від епюри?
7. Визначення зусиль за допомогою ліній впливу. Визначення зусиль від рівномірно розподіленого навантаження.
8. Визначення зусиль за допомогою ліній впливу. Визначення зусиль від зосереджених сил.
9. Чим відрізняються способи побудови ліній впливу зусиль в міжопорному і консольному перерізі балки?

4. Розрахунок багатопрольотних статично визначуваних балок

Мета роботи: практичне засвоєння методики розрахунку статично визначуваної багатопрольотної балки, побудови епюр внутрішніх силових факторів, побудови лінії впливу внутрішніх зусиль в перерізах.

Теоретичні відомості

Багатопрольотною статично визначуваною балкою називається геометрично незмінювана статично визначувана система, що складається з однопрольотних балок, з'єднаних між собою ідеальними шарнірами.

Необхідна кількість шарнірів повинна бути розташована таким чином, щоб система в усіх своїх частинах була геометрично незмінюваною і статично визначуваною.

Існують три способи розташування шарнірів в прольотах балки: по одному шарніру в прольоті; по два шарніри через прольот; комбінована постановка шарнірів.

Розрахунок багатопрольотної статично визначуваної балки проводиться із застосуванням поповерхової схеми. Для її побудови потрібно всю систему умовно поділити по шарнірним з'єднанням на окремі балки і визначити умови їх спираючості. При цьому виявляється, що окремі балки мають або два опорних закріплення, або затиснені на одному кінці. Такі балки відносять до *головних* (або залежних) і на схемі зображуються на самому нижньому ярусі (балки ABC (рис. 4.1, а), AB і CDE (рис. 4.1, б)). Елементи поповерхової схеми, що спираються на головні балки або мають лише по одній опорі на основу (землю»), називають *другорядними* (або незалежними) балками (балки CDE і EF (рис. 4.1, а), BC (рис. 4.1, б)). Такі балки на поповерховій схемі розташовуються вище балок, на які вони шарнірно спираються [2].

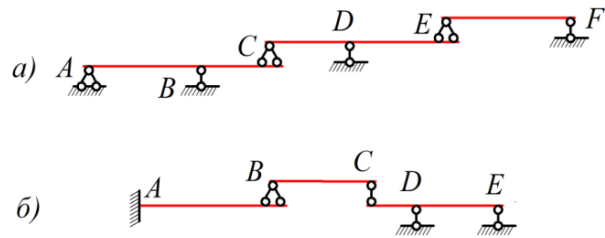


Рис. 4.1. Поповерхові схеми багатопрольотних балок

В поповерховій схемі взаємодія елементів здійснюється за принципом: зусилля можуть передаватися тільки з вищележачих балок на нижчележачі, але не передаються в зворотному напрямку. Опорні реакції другорядних балок – це сили, з якими нижній поверх діє на верхній. За третім законом Ньютона *сила, з якою верхня балка діє на нижню дорівнює за величиною реакції верхньої балки і має протилежний напрямок.*

Розрахунок багатопрольотної балки виконується в наступній послідовності:

1. Виконується кінематичний аналіз, встановлюється геометрична незмінюваність і статична визначуваність.
2. Будується поповерхова схема, виділяються головні і другорядні балки.
3. Розраховується незалежна балка самого верхнього поверху: визначаються опорні реакції і будуються епюри згинаючих моментів M і поперечних сил Q .
4. Послідовно розраховуються балки нижніх поверхів на своє навантаження і на силу, що передається з верхнього поверху, будуються епюри.
5. В єдиному масштабі будуються епюри M і Q для всієї балки.
6. Здійснюється статична перевірка правильності побудови епор [5].

Завдання до роботи

Для заданої багатопрольотної балки необхідно:

- побудувати епюри внутрішніх силових факторів;

- побудувати лінії впливу внутрішніх зусиль в перерізі k ;
- визначити зусилля в перерізі k по лініях впливу від заданого навантаження і порівняти їх з зусиллями на епюрах.

Приклад рішення задачі

Завдання 1: Для багатопрольотної балки, зображеної на рис. 4.2, побудувати епюри згинаючих моментів і поперечних сил, якщо задано: довжини ділянок балки $l=2$ м, реактивний момент $M=4$ кНм, зосереджена сила $F=2$ кН, розподілена сила $q=2$ кН/м.

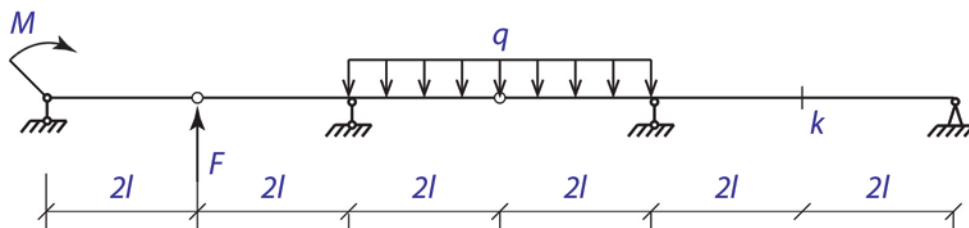


Рис. 4.2. Схема багатопрольотної балки

Рішення:

1.1. Проведення кінематичного аналізу

Визначаємо ступінь свободи за формулою:

$$W = 3D - 2Ш - C_0 = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 2 - 5 = 0,$$

де $D=3$ – кількість дисків в рамі, $Ш=2$ – кількість шарнірів, $C_0=5$ – кількість опорних стержнів.

Геометрична незмінюваність багатопрольотної балки витікає з аналізу її поперечної схеми. Усі диски на цій схемі мають необхідну кількість правильно встановлених в'язей. Отже, багатопрольотна балка є статично визначуваною системою.

1.2. Будуємо поперехову схему, виділяємо залежні балки ($B-D$ і $D-F$) і незалежну ($A-B$) (рис. 4.3, б).

1.3. Проводимо розрахунок для кожної простої балки. Розрахунок починається з верхньої (незалежної) балки. Розрахунок проводиться аналогічно розрахунку однопрольотної балки (див. п. 3).

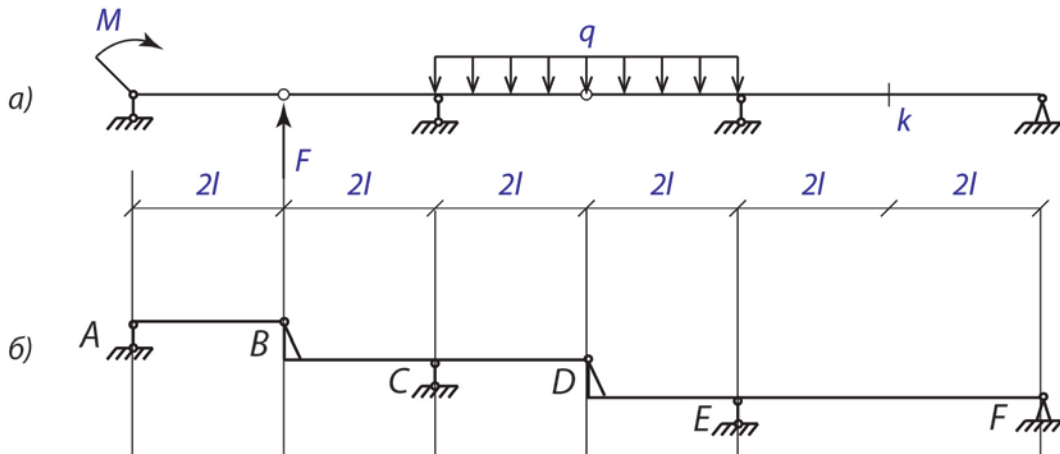


Рис. 4.3. Розрахункова схема багатопрольотної балки

Балка А-В. Балка А-В є незалежною.

Розраховуємо опорні реакції (рис.4.4)

$$\sum F_x = 0;$$

$$\sum M_A = 0; M - R_B \cdot 4 = 0; R_B = \frac{M}{4} = 1, \text{кНм};$$

$$\sum M_B = 0; R_A \cdot 4 + M = 0; R_A = -\frac{M}{4} = -1, \text{кНм}.$$

Перевірка:

$$\sum F_y = 0; R_A + R_B = 1 - 1 = 0; 0 = 0$$

Умова виконується, сили реакцій опор знайдені вірно.

Оскільки в результаті розрахунку реакція опори А має від'ємне значення, то напрямок R_A треба змінити на протилежний.

Розраховуємо згинаючі моменти та поперечні сили в характерних перерізах і будемо епюри (рис.4.4)

Переріз I-I: $0 \leq x < 4$

$$M_{A-B} = M - R_A x$$

$$M(0) = 4, \text{кНм}$$

$$M(4) = 4 - 1 \cdot 4 = 0$$

$$Q_{A-B} = -R_A = -1, \text{кН}$$

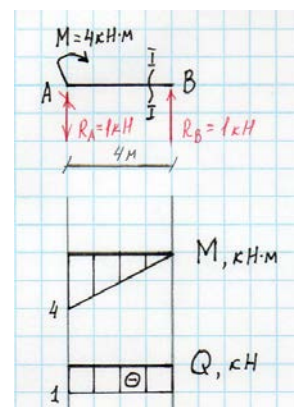


Рис.4.4.

Балка В-D

Балка В-D є залежною. На неї діє місцеве навантаження (зосереджена сила $F=2$ кН, розподілена сила $q=2$ кН/м) і тиск R_B' , що передається з балки А-В. Цей тиск рівний за величиною реакції R_B (балка А-В) і протилежний за напрямком (рис. 4.5).

Розраховуємо опорні реакції

$$\sum F_x = 0;$$

$$\sum M_C = 0; F \cdot 4 - R_B' \cdot 4 + q \cdot 4 \cdot 2 - R_D \cdot 4 = 0; R_D = \frac{2 \cdot 4 - 1 \cdot 4 + 2 \cdot 4 \cdot 2}{4} = 5, \text{ кНм};$$

$$\sum M_D = 0; F \cdot 8 - R_B' \cdot 8 + R_C \cdot 4 - q \cdot 4 \cdot 2 = 0; R_C = \frac{-2 \cdot 8 + 1 \cdot 8 + 2 \cdot 4 \cdot 2}{4} = 2, \text{ кНм}.$$

Перевірка:

$$\sum F_y = 0; F - R_B' + R_C + R_D - q \cdot 4 = 2 - 1 + 2 + 5 - 2 \cdot 4 = 0; 0 = 0.$$

Умова виконується, сили реакцій опор знайдені вірно.

Розраховуємо згинаючі моменти та поперечні сили в характерних перерізах і будуємо епюри (рис.4.5)

Переріз II-II: $0 \leq x \leq 4$

$$M_{B-D} = F \cdot x - R_B' x$$

$$M(0) = 0,$$

$$M(4) = 2 \cdot 4 - 1 \cdot 4 = 4, \text{ кНм}$$

$$Q_{B-D} = F - R_B' = 2 - 1 = 1, \text{ кН}$$

Переріз III-III: $4 \leq x \leq 8$

$$M_{B-D} = F \cdot x - R_B' x + R_C(x - 4) - \frac{q(x - 4)^2}{2}$$

$$M(4) = 2 \cdot 4 - 1 \cdot 4 = 4, \text{ кНм}$$

$$M(8) = 2 \cdot 8 - 1 \cdot 8 + 2 \cdot 4 - \frac{2 \cdot 4^2}{2} = 0, \text{ кНм}$$

$$Q_{B-D} = F - R_B' + R_C - q(x - 4)$$

$$Q(4) = 2 - 1 + 2 = 3, \text{ кН}$$

$$Q(8) = 2 - 1 + 2 - 2 \cdot 4 = -5, \text{ кН}$$

Епюра поперечних сил на ділянці $C-D$ перетинає вісь. В цьому перерізі момент набуває екстремального значення. Необхідно визначити ординату епюри згинаючого моменту в цьому перерізі. Для цього рівняння поперечної сили на цій ділянці прирівнюємо до нуля і знаходимо координату x .

$$Q_{B-D} = F - R_B' + R_C - q(x - 4) = 0;$$

$$x = \frac{F - R_B' + R_C}{q} + 4 = \frac{2 - 1 + 2}{2} + 4 = 5.5, \text{ м.}$$

Для точки екстремума ($x=5,5$ м) знаходимо згинаючий момент:

$$M(5.5) = F \cdot x - R_B' x + R_C(x - 4) - \frac{q(x - 4)^2}{2} =$$

$$= 2 \cdot 5.5 - 1 \cdot 5.5 + 2(5.5 - 4) - \frac{2(5.5 - 4)^2}{2} = 6.25, \text{ кНм.}$$

Будуємо епюри згинаючих моментів і поперечних сил для балки $B-D$ (рис. 4.5).

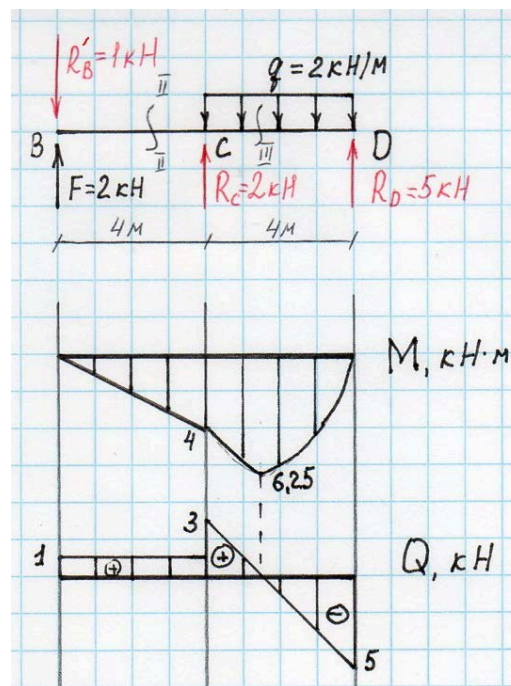


Рис. 4.5. Епюра згинаючого моменту і поперечних сил для балки $B-D$

Балка D-F

Балка $D-F$ є залежною. На неї діє місцеве навантаження (розподілена сила $q=2$ кН/м) і тиск R_D' , що передається з балки $B-D$. Цей тиск рівний за величиною реакції R_D (балка $B-D$) і протилежний за напрямком (рис. 4.6).

Розраховуємо опорні реакції

$$\sum F_x = 0;$$

$$\sum M_E = 0; -R_D' \cdot 4 - q \cdot 4 \cdot 2 - R_F \cdot 8 = 0; R_F = \frac{-5 \cdot 4 - 2 \cdot 4 \cdot 2}{8} = -4.5, \text{кНм}$$

$$\sum M_F = 0; -R_D' \cdot 12 + R_E \cdot 8 - q \cdot 4 \cdot 10 = 0; R_E = \frac{5 \cdot 12 + 2 \cdot 4 \cdot 10}{8} = 17.5, \text{кНм}$$

Перевірка:

$$\sum F_y = 0; -R_D' + R_E + R_F - q \cdot 4 = -5 + 17.5 - 4.5 - 2 \cdot 4 = 0; 0 = 0$$

Умова виконується, сили реакцій опор знайдені вірно.

Оскільки в результаті розрахунку реакція опори F має від'ємне значення, то напрямок R_F треба змінити на протилежний.

Розраховуємо згинаючі моменти та поперечні сили в характерних перерізах і будуємо епюри (рис.4.6)

Переріз IV-IV: $0 \leq x \leq 4$

$$M_{D-F} = -R_D' x - \frac{qx^2}{2}$$

$$M(0) = 0;$$

$$M(4) = -5 \cdot 4 - \frac{2 \cdot 4^2}{2} = -36, \text{кНм}$$

$$Q_{D-F} = -R_D' - qx$$

$$Q(0) = -5, \text{кН}$$

$$Q(4) = -5 - 2 \cdot 4 = -13, \text{кН}$$

Переріз V-V: $4 \leq x \leq 12$

$$M_{D-F} = -R_D' x + R_E(x - 4) - q \cdot 4(x - 2)$$

$$M(4) = -5 \cdot 4 - 2 \cdot 4 \cdot 2 = -36, \text{кНм}$$

$$M(12) = -5 \cdot 12 + 17.5 \cdot 8 - 2 \cdot 4 \cdot 10 = 0$$

$$Q_{D-F} = -R_D' - q \cdot 4 + R_E = -5 - 2 \cdot 4 + 17.5 = 4.5, \text{кН}$$

Епюри згинаючих моментів і поперечних сил для балки $D-F$ зображені на рис. 4.6.

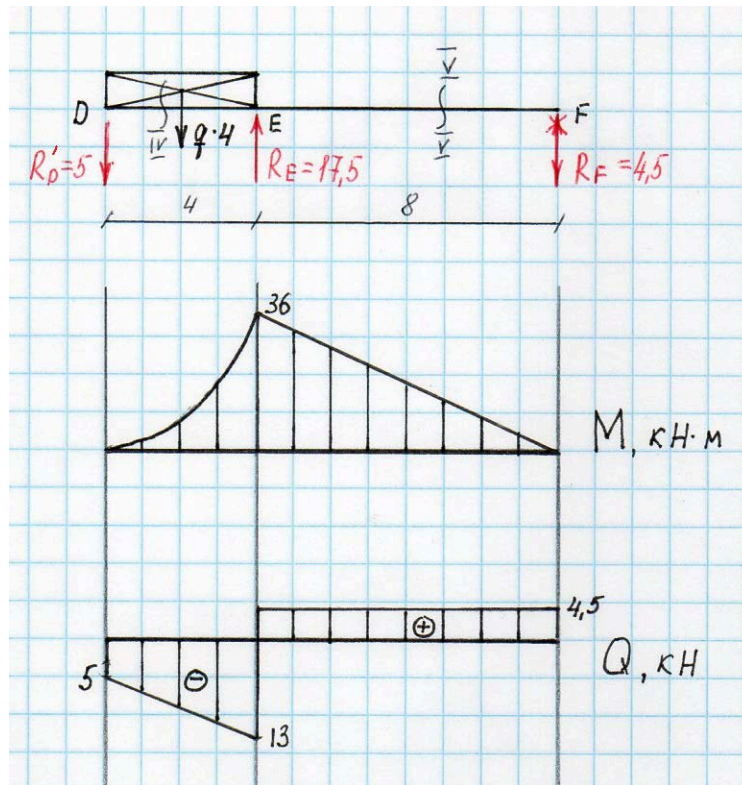


Рис. 4.6. Епюра згинаючого моменту і поперечних сил для балки D-F

1.4. Будуємо епюри згинаючих моментів і поперечних сил в заданій багатопрольотній балці від заданого навантаження, для чого суміщаємо на одній осі всі побудовані раніше епюри (рис. 4.7).

1.5. Виконуємо перевірку рівноваги всієї балки. Для цього складаємо рівняння проєкцій усіх сил на вісь Y:

$$\sum F_y = 0;$$

$$-R_A + F + R_C - q \cdot 8 + R_E - R_F = -1 + 2 + 2 - 16 + 17.5 - 4.5 = 0$$

Умова виконується. Розрахунок і побудова епюр здійснені правильно.

Завдання 2. Побудувати лінії впливу внутрішніх зусиль для перерізу k , що знаходиться на відстані 4 м від опор, довжина прольоту 9 м.

Лінії впливу внутрішніх силових факторів для заданих перерізів будуються на тій балці, на якій знаходиться переріз, а потім добудовуються на всі допоміжні балки.

Будуємо лінію впливу згинаючого моменту в перерізі k . Видаляємо в'язь, що сприймає згинаючий момент, і замінюємо її вплив додатнім згинаючим моментом M . Придаємо точкам прикладання M безкінечно мале

кутове переміщення $\delta=1$, будемо графік можливих переміщень, які будуть являти собою лінію впливу згинаючого моменту M (рис. 4.8, в)

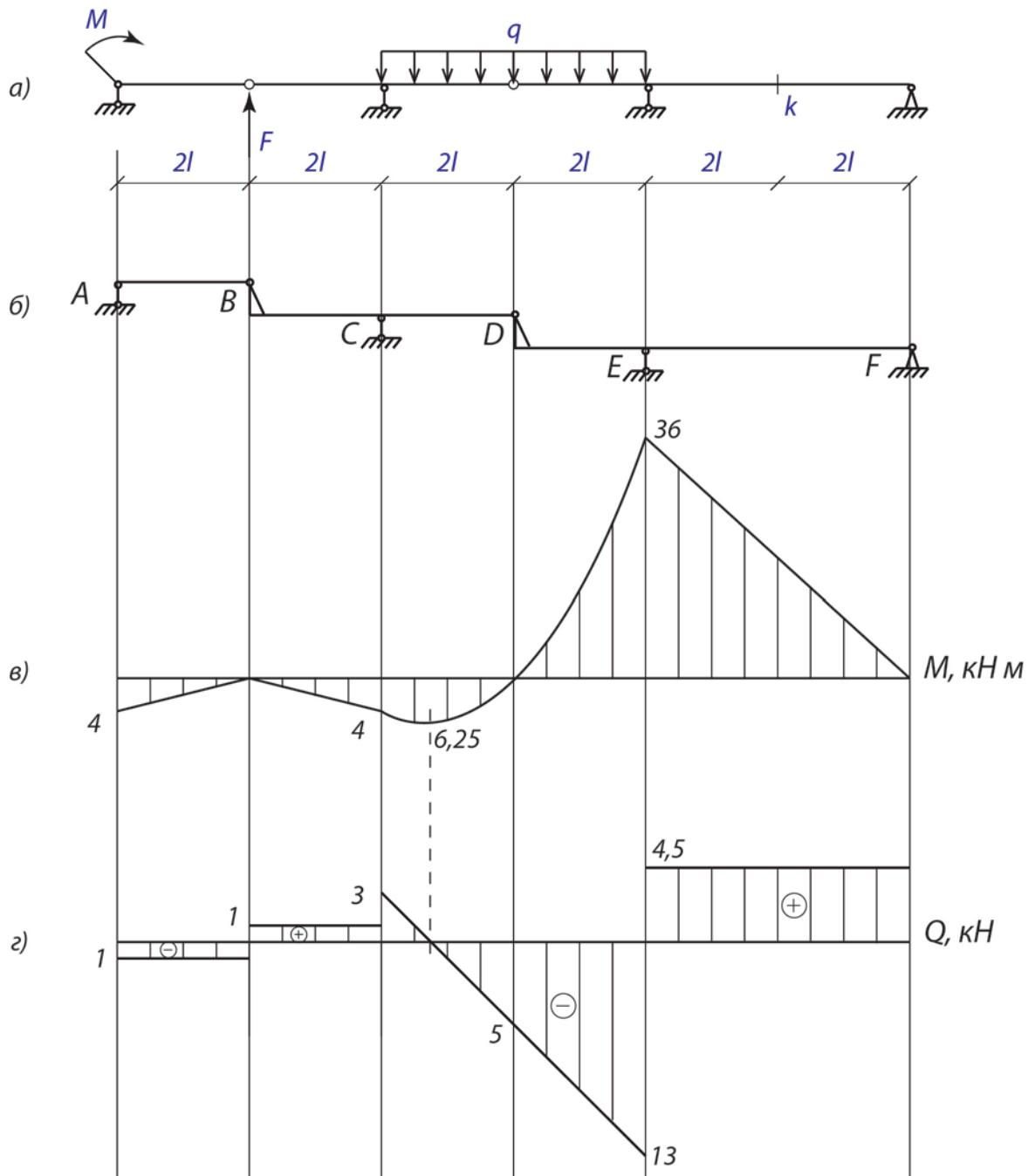


Рис. 4.7. Епюра згинаючого моменту і поперечних сил для багатопрольотної балки

Будемо лінію впливу поперечної сили в перерізі k . Видаляємо в'язь, що сприймає поперечну силу, і замінюємо її вплив поперечною силою Q . Надаємо точці прикладання Q безкінечно мале переміщення $\delta=1$, будемо графік можливих переміщень, який буде являти собою лінію впливу поперечної сили Q (рис. 4.8, г).

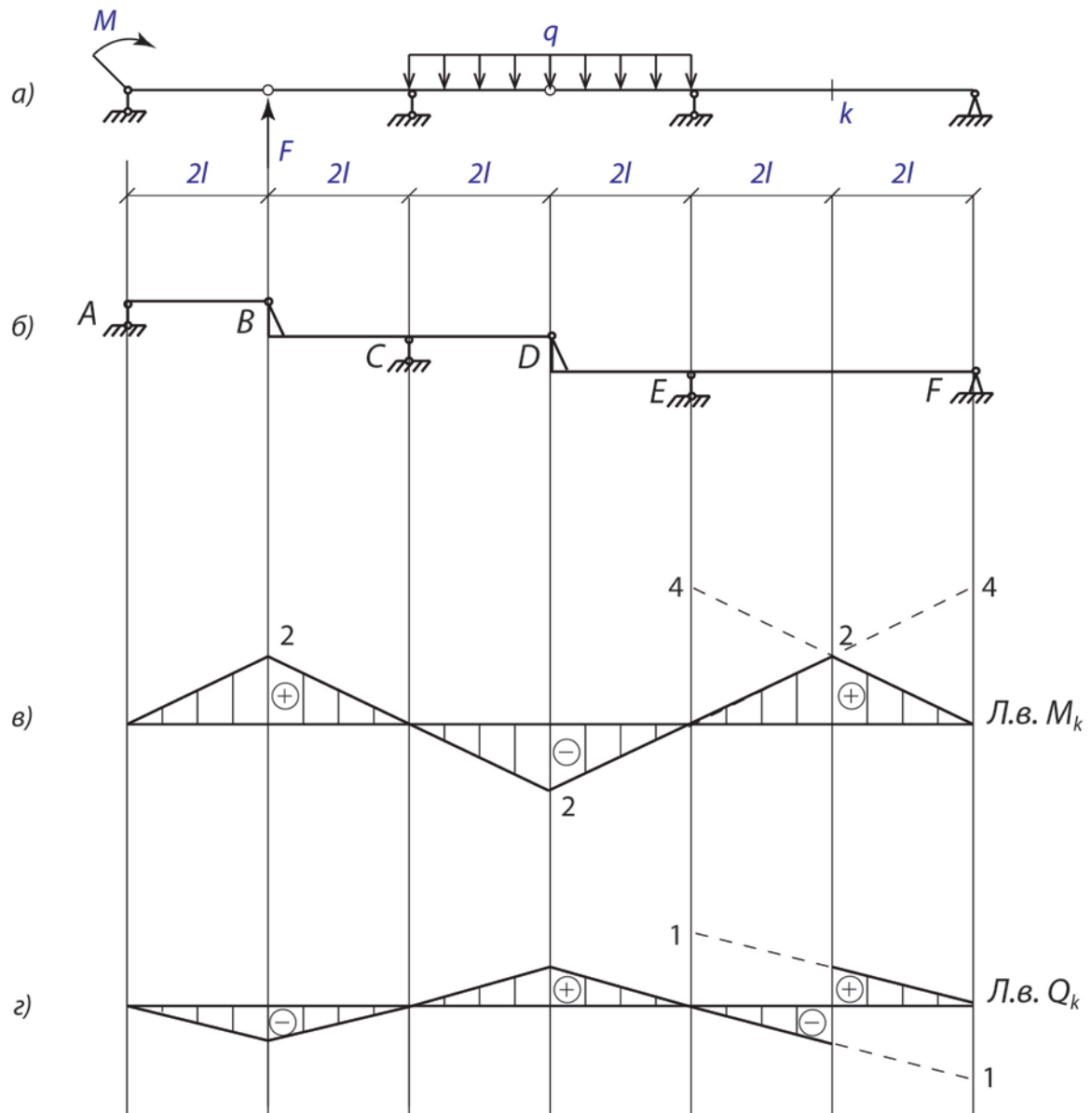


Рис. 4.8. Лінії впливу згинаючих моментів і поперечних сил для перерізу k

Завдання 3. Визначити зусилля в перерізі k по лініях впливу від заданого навантаження і порівняти їх з зусиллями на епюрах.

Внутрішні зусилля S (згинаючого моменту та поперечних сил) в визначаємо за формулою:

$$S = F \cdot h + q \cdot \omega + M \cdot tg\alpha,$$

де F – зосереджена сила («+» - спрямована вниз, «-» - спрямована вгору); h – ордината лінії впливу під силою; q – інтенсивність розподіленого навантаження («+» - спрямована вниз, «-» - спрямована вгору); ω – площа лінії впливу під навантаженням; M – зосереджений момент («+» –

спрямований за годинниковою стрілкою, «←» – спрямований проти годинникової стрілки); α – ухил лінії впливу в місці прикладання M .

Визначасмо згинаючий момент і поперечну силу в перерізі k :

$$M_k = F \cdot h + q \cdot \omega + M \cdot \operatorname{tg} \alpha = -2 \cdot 2 + 2 \cdot (-8) + 4 \cdot \frac{2}{4} = -18, \text{ кНм}$$

$$Q_k = F \cdot h + q \cdot \omega + M \cdot \operatorname{tg} \alpha = -2 \cdot (-0.5) + 2 \cdot 2 + 4 \cdot (-0.5/4) = 4.5, \text{ кН}$$

Значення зусиль, що отримані в результаті розрахунку, збіглися з відповідними зусиллями на епюрах (рис. 4.9). Отже, розрахунок і побудова здійснені правильно.

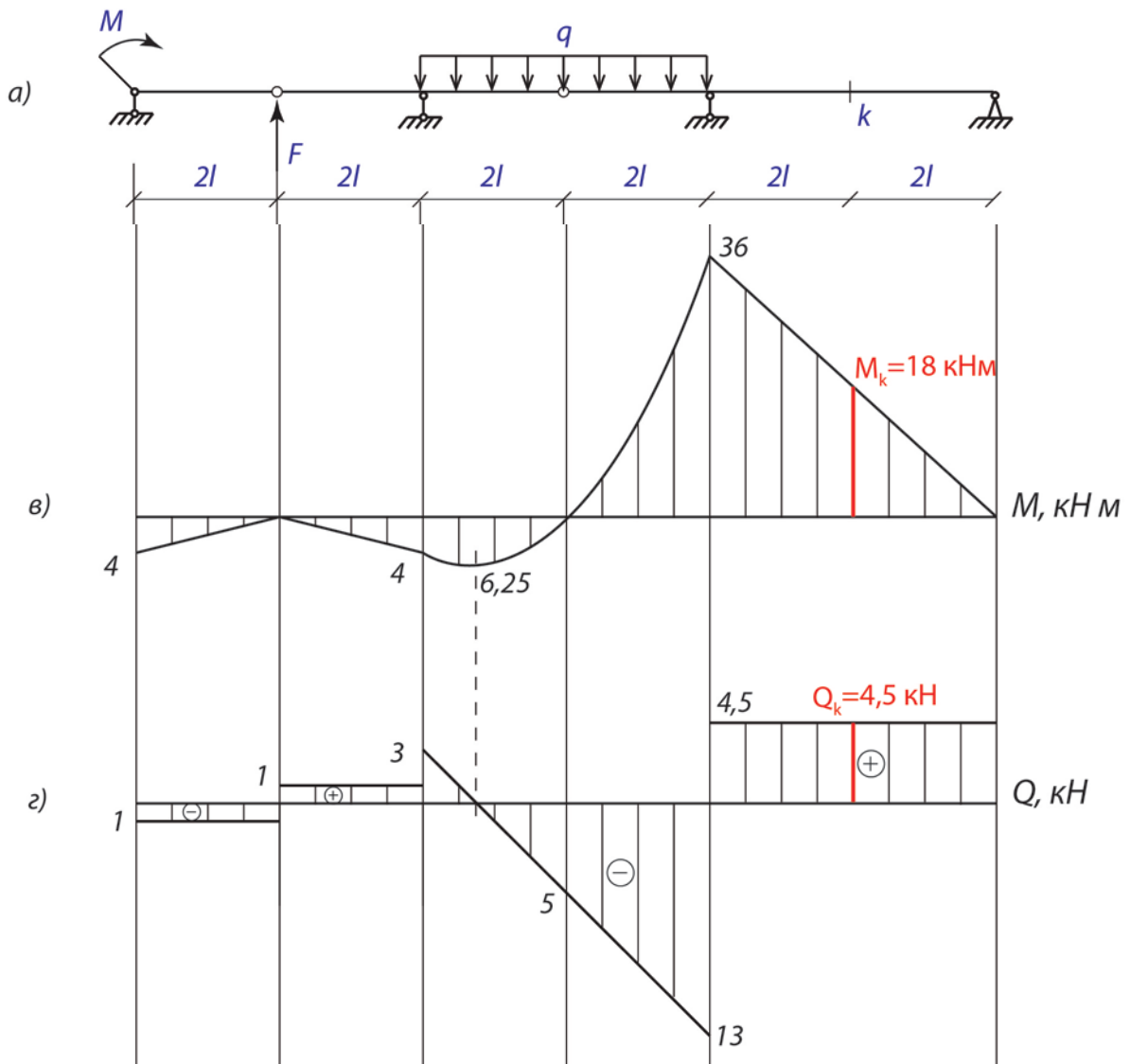


Рис. 4.9. Епюра згинаючого моменту і поперечних сил для багатопрольотної балки

Питання для самоперевірки

1. Розкрити поняття багатопрольотної статично визначуваної балки.
2. Правила встановлення шарнірів в багатопрольотних балках. Навести схеми.
3. В чому різниця між головними і другорядними балками?
4. Принципи побудови поперечної схеми.
5. В чому перевага розрахунку з використанням поперечної схеми?
6. Послідовність побудови ліній впливу для багатопрольотних балок.
7. Побудова епюр внутрішніх зусиль. Навести рисунки.
8. Визначення зусиль в багатопрольотних статично визначуваних балках від нерухомого навантаження.
9. Принципи побудови ліній впливу для багатопрольотних статично визначуваних балок

5. Розрахунок тришарнірної арки

Мета роботи: практичне засвоєння методики розрахунку розпирних конструкцій.

Теоретичні відомості

Арочними називаються системи криволінійного або ламаного обертання, в опорах яких від вертикального навантаження виникають похилі реакції, спрямовані всередину прольоту. Горизонтальна складова такої похилої реакції називається *розпором*. Арка, показана на рис.5.1, називається *тришарнірною*.

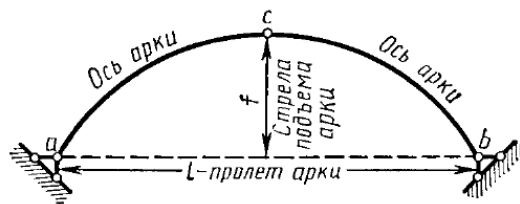


Рис. 5.1. Схема тришарнірної арки

Тришарнірна арка є системою геометрично незмінюваною і статично визначуваною.

При дії зовнішнього навантаження на тришарнірну арку (рис.2,а) в кожній її опорі виникають по дві реакції: вертикальні реакції – V_a і V_b , горизонтальні – H_a і H_b (рис. 2,б).

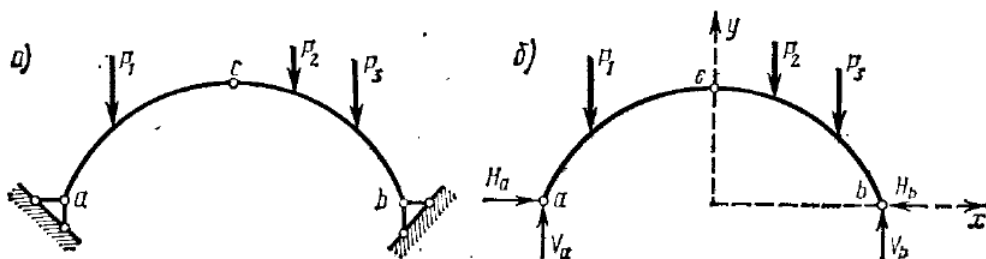


Рис. 5.2. Опорні реакції тришарнірної арки

Крім трьох рівнянь рівноваги, які дає статика для системи сил, розташованих в одній площині, для розрахунку тришарнірної арки потрібно скласти четверте рівняння, основане на тому, що рівнодіюча усіх сил, що

прикладені до лівої (правої) половині арки, повинна пройти через середній шарнір c . Четверте рівняння статички можна сформулювати наступним чином: алгебраїчна сума моментів сил, що діють на ліву або праву половину арки відносно точки c (середнього шарніра), дорівнює нулю, тобто

$$\sum M_{\text{лів.сил}}^c = 0$$

або

$$\sum M_{\text{прав.сил}}^c = 0$$

Таким чином, при розрахунку тришарнірної арки можна скласти наступні чотири рівняння:

$$\sum X = 0$$

(всі сили, що діють на арку, проецируються на вісь X);

$$\sum Y = 0$$

(всі сили, що діють на арку, проецируються на вісь Y);

$$\sum M = 0$$

(складається сума моментів всіх сил, що діють на арку, відносно довільної точки; зручно в якості такої точки приймати точку a або b):

$$\sum M_{\text{лів.сил}}^c = 0$$

або

$$\sum M_{\text{прав.сил}}^c = 0$$

Розрахунок внутрішніх зусиль тришарнірної арки при вертикальному та довільному навантаженні розглянемо на прикладі рішення задач [3].

Завдання до роботи

Визначити для трьохшарнірної арки:

- опорні реакції від вертикального, рівномірно розподіленого, похилого навантаження;

- внутрішні зусилля в арці при вертикальному навантаженні;
- внутрішні зусилля в арці при довільному навантаженні.

Приклад рішення задачі

Задача 1. Для тришарнірної арки, наведеної на рис. 5.3, визначити опорні реакції від вертикального навантаження

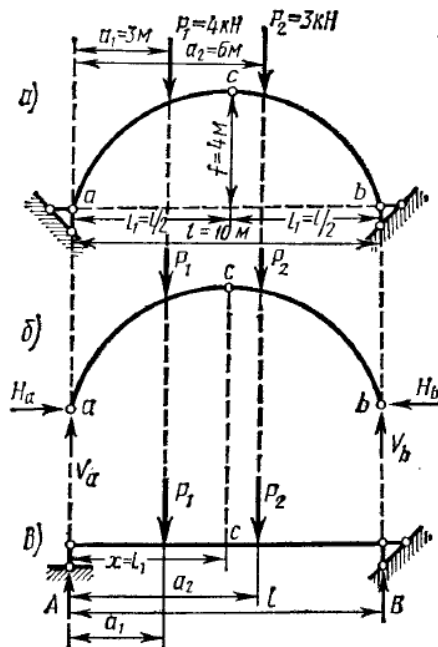


Рис. 5.3. Рисунок до задачі 1

Рішення:

Відкинемо опори і замінимо їх опорними реакціями V_a , H_a і V_b , H_b . Для визначення опорної реакції V_a складемо рівняння суми моментів усіх сил, що діють на арку, відносно точки b :

$$\sum M_b = 0; V_a l - P_1(l - a_1) - P_2(l - a_2) = 0;$$

$$V_a \cdot 10 - 4 \cdot 7 - 3 \cdot 4 = 0;$$

$$V_a = \frac{40}{10} = 4 \text{ кН},$$

де M_b – момент зовнішнього активного навантаження відносно правого опорного шарніра.

Для визначення правої вертикальної реакції V_b складемо рівняння суми моментів усіх сил, що діють на арку, відносно точки a :

$$\sum M_a = 0; P_1 a_1 + P_2 a_2 - V_b l = 0;$$

$$4 \cdot 3 + 3 \cdot 6 - V_b \cdot 10 = 0;$$

$$V_b = \frac{30}{10} = 3 \text{ кН},$$

де M_a – момент зовнішнього активного навантаження відносно лівого опорного шарніра.

Отримані для V_a і V_b формули показують, що при дії на арку вертикального навантаження вертикальні складові опорних реакцій відповідно дорівнюють опорним реакціям простої двохопорної балки з прольотом, рівним прольоту арки (рис. 5.3,в).

Складемо рівняння суми проекцій усіх сил на вісь X :

$$\sum F_x = H_a - H_b = 0;$$

$$H_a = H_b = H.$$

Для визначення числової величини розпору H прирівнюємо до нуля суму моментів усіх сил, що діють на ліву частину балки відносно шарніру c :

$$\sum M_{\text{лів}}^c = 0; V_a \frac{l}{2} - P_1 \left(\frac{l}{2} - a_1 \right) - Hf = 0;$$

$$4 \cdot 5 - 4 \cdot 2 - H \cdot 4 = 0;$$

$$H = \frac{12}{4} = 3 \text{ кН}.$$

Відповідь: опорні реакції арки $V_a=4$ кН, $V_b=3$ кН, $H=3$ кН [3].

Задача 2. Визначити розпір арки, зображеної на рис. 5.4, від рівномірно розподіленого навантаження, якщо $l=10$ м, $q=2$ кН/м, $f=5$ м.

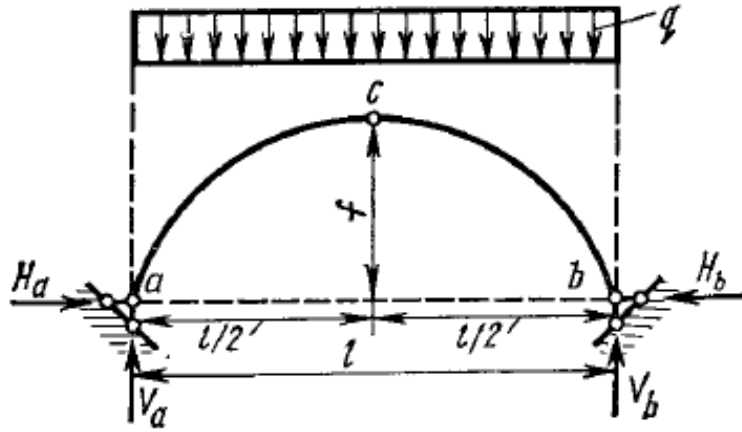


Рис. 5.4. Рисунок до задачі 2

Визначаємо вертикальні опорні реакції з рівнянь статики:

$$\sum M_b = 0; V_a \cdot l - q \cdot l \cdot \frac{l}{2} = 0;$$

$$V_a = q \cdot \frac{l}{2} = 2 \cdot \frac{10}{2} = 10 \text{ кН};$$

$$\sum M_a = 0; -V_b \cdot l + q \cdot l \cdot \frac{l}{2} = 0;$$

$$V_b = q \cdot \frac{l}{2} = 2 \cdot \frac{10}{2} = 10 \text{ кН}.$$

Визначаємо розпір арки з рівняння суми моментів сил, що діють на ліву половину арки, відносно шарніру c:

$$\sum M_{\text{лів}}^c = 0; V_a \cdot \frac{l}{2} - Hf - q \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{l}{4} = 0;$$

$$H = \frac{V_a \cdot \frac{l}{2} - q \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{l}{4}}{f} = \frac{10 \cdot 5 - 2 \cdot 5 \cdot 2.5}{5} = 5 \text{ кН}.$$

Відповідь: розпір арки $H=5$ кН [3].

Задача 3. Визначити опорні реакції від похилої сили $P=5$ кН, що діє на арку (рис. 5.5), якщо $\cos \alpha=0,6$, $\sin \alpha=0,8$.

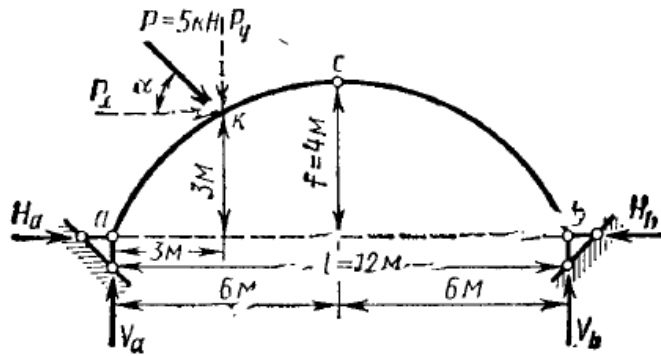


Рис. 5.5. Рисунок до задачі 3

1) Розкладаємо силу P на вертикальну і горизонтальну складові:

$$P_y = P \sin \alpha = 5 \cdot 0.8 = 4 \text{ кН};$$

$$P_x = P \cos \alpha = 5 \cdot 0.6 = 3 \text{ кН}.$$

2) Визначаємо опорні реакції V_a і V_b :

$$\sum M_b = V_a \cdot 12 - P_y \cdot 9 + P_x \cdot 3 = 0;$$

$$V_a \cdot 12 - 4 \cdot 9 + 3 \cdot 3 = 0;$$

$$V_a = \frac{27}{12} = 2.25 \text{ кН};$$

$$\sum M_a = P_y \cdot 3 - V_b \cdot 12 + P_x \cdot 3 = 0;$$

$$4 \cdot 3 - V_b \cdot 12 + 3 \cdot 3 = 0;$$

$$V_b = \frac{21}{12} = 1.75 \text{ кН}.$$

3) Для визначення горизонтальної реакції H_a складемо рівняння для моменту усіх сил, що діють на ліву половину арки, відносно шарніра c :

$$\sum M_{\text{лів}}^c = V_a \cdot 6 - P_y \cdot 3 - H_a \cdot 4 - P_x(4 - 3) = 0;$$

$$2,25 \cdot 6 - 4 \cdot 3 - H_a \cdot 4 - 3 \cdot 1 = 0;$$

$$H_a = -\frac{1,5}{4} = -0.375 \text{ кН}.$$

Знак мінус вказує на те, що в даному випадку сила H_a спрямована вліво.

Для визначення H_b складемо суму проєкцій усіх сил на горизонтальну вісь X :

$$\sum X = H_a + P_x - H_b = 0;$$

$$H_b = H_a + P_x = -0.375 + 3 = 2,625 \text{ кН.}$$

Відповідь: опорні реакції балки $V_a=2,25$ кН, $V_b=1,75$ кН, $H_a=0,375$ кН, $H_b=2,625$ кН [3].

Задача 4. В перерізі k арки (рис. 5.6) визначити значення згинаючого моменту M_k , поперечної сили Q_k і поздовжньої сили N_k від дії навантаження, якщо прольот арки $l=12$ м, стріла підйому $f=4$ м, абсциса перерізу k $x_k=3$ м. Арка окреслена по параболі, рівняння якої:

$$y = \frac{4f}{l^2} (l - x) \cdot x.$$

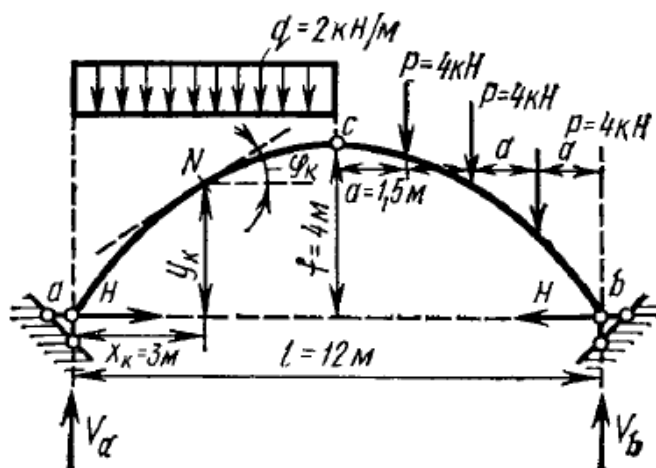


Рис. 5.6. Рисунок до задачі 4

Рішення:

1) Визначаємо ординату перерізу k :

$$y = \frac{4f}{l^2} (l - x) \cdot x = \frac{4 \cdot 4}{12^2} (12 - 3) \cdot 3 = 3 \text{ м.}$$

2) Визначаємо опорні реакції V_a і V_b :

$$\sum M_b = V_a \cdot l - q \cdot \frac{l}{2} (l - 3) - P \cdot 4,5 - P \cdot 3 - P \cdot 1,5 = 0;$$

$$V_a \cdot 12 - 2 \cdot 6 \cdot 9 - 4 \cdot (4,5 + 3 + 1,5) = V_a \cdot 12 - 144 = 0;$$

$$V_a = \frac{144}{12} = 12 \text{ кН;}$$

$$\sum M_a = q \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{l}{4} + P(7,5 + 9 + 10,5) - V_b \cdot l = 0;$$

$$2 \cdot 6 \cdot 3 + 4 \cdot 27 - V_b \cdot 12 = 144 - V_b \cdot 12 = 0;$$

$$V_b = \frac{144}{12} = 12 \text{ кН.}$$

3) Визначаємо розпір H з рівняння:

$$\sum M_{\text{лів}}^c = V_a \cdot \frac{l}{2} - q \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{l}{4} - Hf = 12 \cdot 6 - 2 \cdot 6 \cdot 3 - H \cdot 4 = 0;$$

$$H = \frac{36}{4} = 9 \text{ кН.}$$

4) Визначаємо згинаючий момент в перерізі k за формулою:

$$M_k = M_k^0 - Hy_k = 27 - 9 \cdot 3 = 0,$$

де M_k^0 – згинаючий момент простої балки:

$$M_k^0 = V_a x_k - q \cdot \frac{x_k^2}{2} = 12 \cdot 3 - 2 \cdot \frac{9}{2} = 27 \text{ кН} \cdot \text{м.}$$

Момент в перерізі k дорівнює 0.

5) Визначаємо поперечну силу за формулою:

$$Q_k = Q_k^0 \cos \varphi_k - H \sin \varphi_k,$$

де Q_k^0 – поперечна сила простої балки:

$$Q_k^0 = V_a - qx_k = 12 - 2 \cdot 3 = 6 \text{ кН.}$$

Тангенс кута нахилу дотичної в т.К до горизонту визначається як перша похідна від y по x :

$$y' = \left[\frac{4f}{l^2} (lx - x^2) \right]' = \frac{4f}{l^2} (l - 2x) = \frac{4 \cdot 4}{12^2} (12 - 2x) = \frac{12}{9} - \frac{2x}{9};$$

$$\operatorname{tg} \varphi_k = y'_{x=x_k} = \frac{12}{9} - \frac{2 \cdot 3}{9} = \frac{2}{3};$$

$$\varphi_k = \operatorname{arctg} \frac{2}{3} = 33,69^\circ;$$

$$\sin 33,69^\circ = 0,555;$$

$$\cos 33,69^\circ = 0,832.$$

Отже

$$Q_k = 6 \cdot 0,832 - 9 \cdot 0,555 \approx 0.$$

б) Визначаємо поздовжню силу за формулою:

$$N_k = -Q_k^0 \sin \varphi_k - H \cos \varphi_k = -6 \cdot 0,555 - 9 \cdot 0,832 = -10,82 \text{ кН.}$$

Відповідь: згинаючий момент $M_k=0$, поперечна сила $Q_k=0$, поздовжня сила $N_k=-10,82$ кН [3].

Задача 5. Для арки, зображеної на рис. 5.7, визначити опорні реакції, згинаючий момент, поперечну і поздовжню сили в перерізі k з абсцисою $x=l/4$. Арка окреслена по параболі, рівняння якої:

$$y = \frac{4f}{l^2} (l-x)x = \frac{4 \cdot 4}{12^2} (12-x)x = \frac{(12-x)x}{9}$$

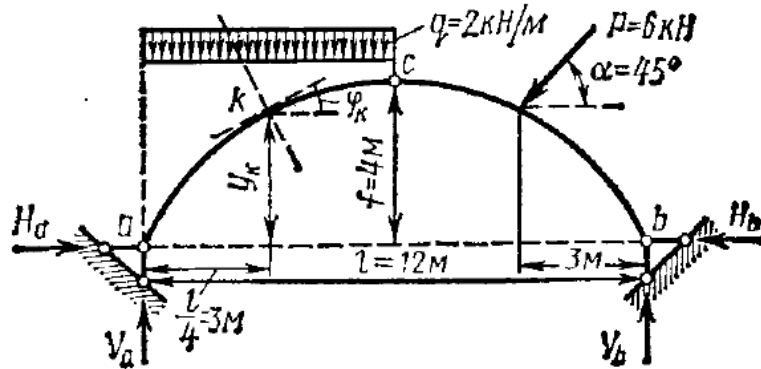


Рис. 5.7. Рисунок до задачі 5

Рішення:

1) Визначаємо ординату перерізу k :

$$y_{x=3} = \frac{(12-3) \cdot 3}{9} = 3 \text{ м.}$$

2) Визначаємо тангенс кута нахилу дотичної до горизонту:

$$\operatorname{tg} \varphi_x = y' = \frac{12-2x}{9}.$$

При $x=3$ $y'=\operatorname{tg} \varphi_x=2/3$

$\varphi_x = \arctg 2/3 = 33,69^\circ$

3) Визначаємо опорні реакції V_a і V_b , H_a за формулами:

$$\begin{aligned} \sum M_b &= V_a \cdot l - q \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{3l}{4} - P \sin \alpha \cdot \frac{l}{4} - P \cos \alpha \cdot y_{x=3} = \\ &= V_a \cdot 12 - 2 \cdot 6 \cdot 9 - 6 \sin 45 \cdot 3 - 6 \cos 45 \cdot 3 = V_a \cdot 12 - 133,45 = 0; \end{aligned}$$

$$V_a = \frac{133,45}{12} = 11,12 \text{ кН};$$

$$\begin{aligned} \sum M_a &= q \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{l}{4} + P \sin \alpha \cdot \frac{3}{4} l - P \cos \alpha \cdot y_{x=3} - V_b \cdot l = \\ &= 2 \cdot 6 \cdot 3 + 6 \cdot \sin 45 \cdot 9 - 6 \cdot \cos 45 \cdot 3 - V_b \cdot 12 = 61,45 - V_b \cdot 12 = 0; \end{aligned}$$

$$V_b = \frac{61,45}{12} = 5,12 \text{ кН};$$

$$\begin{aligned} \sum M_{\text{лів}}^c &= V_a \cdot \frac{l}{2} - q \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{l}{4} - H_a \cdot f = 11,12 \cdot 6 - 2 \cdot 6 \cdot 3 - H_a \cdot 4 = \\ &= 30,72 - H_a \cdot 4 = 0; \end{aligned}$$

$$H_a = \frac{30,74}{4} = 7,68 \text{ кН}.$$

4) Визначаємо згинаючий момент в перерізі k :

$$M_k = V_a x_k - H_a y_k - q \cdot x_k \cdot \frac{x_k}{2} = 11,12 \cdot 3 - 7,68 \cdot 3 - 2 \cdot 3 \cdot 1,5 = 1,32 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

5) Визначаємо поперечну силу в перерізі k :

$$\begin{aligned} Q_k &= V_a \cos \varphi_k - H_a \sin \varphi_k - q \cdot 3 \cos \varphi_k = \\ &= 11,12 \cdot \cos 33,69 - 7,68 \sin 33,69 - 2 \cdot 3 \cdot \cos 33,69 \approx 0. \end{aligned}$$

6) Визначаємо поздовжню силу в перерізі k :

$$\begin{aligned} N_k &= V_a \sin \varphi_k + H_a \cos \varphi_k - q \cdot 3 \sin \varphi_k = \\ &= 11,12 \cdot \sin 33,69 + 7,68 \cos 33,69 - 2 \cdot 3 \cdot \sin 33,69 = 9,23 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Відповідь: опорні реакції $V_a=11,12$ кН, $V_b=5,12$ кН, $H_a=7,68$ кН, згинаючий момент $M_k=1,35$ кН м, поперечна сила $Q_k=0$, поздовжня сила $N_k=9,23$ кН [3].

Задача 6. При дії на тришарнірну арку вертикального рівномірно розподіленого навантаження інтенсивністю q потрібно встановити раціональне окреслення осі арки, якщо задані її прольот l , стріла підйому f , координата середнього шарніра $x=l/2$.

Рішення:

Для рішення задачі застосуємо формулу:

$$y = \frac{M_x^o}{H},$$

де M_x^o – згинаючий момент в простій балці, в даному випадку дорівнює:

$$M_x^o = V_a \cdot \frac{l}{2} - q \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{l}{4} = V_a x - q \cdot \frac{x^2}{2}.$$

Визначаємо опорну реакцію V_a :

$$\sum M_b = V_a \cdot l - q \cdot l \cdot \frac{l}{2} = 0;$$

$$V_a = \frac{ql}{2}.$$

Підставляємо в формулу M_x^o :

$$M_x^o = \frac{ql}{2} \cdot x - q \frac{x^2}{2} = \frac{qx}{2} (l - x).$$

Визначаємо розпір H :

$$H = \frac{M_c^o}{f} = \left(\frac{ql}{2} \cdot \frac{l}{2} - \frac{ql}{2} \cdot \frac{l}{4} \right) \cdot \frac{1}{f} = \frac{ql^2}{8f}.$$

Підставляємо в початкову формулу:

$$y = \frac{\frac{qx}{2} (l - x) \cdot 8f}{ql^2} = \frac{4f}{l^2} (l - x).$$

Відповідь: раціональне окреслення осі арки $y = \frac{4f}{l^2} (l - x)$ [3].

Питання для самоперевірки

1. Що називається розпірною системою?
2. Що називається тришарнірною аркою?
3. Основні параметри тришарнірних арок.
4. Дати визначення арки з затяжкою.
5. Опорні реакції в тришарнірній арці від вертикального навантаження.
6. Внутрішні зусилля в арці.
7. Порівняти внутрішні зусилля в арці і балці однакового прольоту.
8. Що таке раціональні вісь арки? Рівняння раціональної осі.

6. Розрахунок плоских рам

Мета роботи: практичне засвоєння методики розрахунку статично визначуваних плоских рам, побудови епюр внутрішніх силових факторів.

Теоретичні відомості

Рами – це системи, що складаються з прямолінійних або криволінійних стержнів, жорстко або шарнірно зв'язаних між собою. Вертикальні та похилі елементи рам називаються *стійками*, горизонтальні та близькі до них – *ригелями*. Рами бувають *несполучені*, тобто такі, що складаються з одного диска, нерухомо закріпленого на площині, і *сполучені*, що складаються з двох або декількох дисків, з'єднаних між собою шарнірами. В залежності від способів утворення і видів опорних закріплень рами можуть бути *балочними* (безрозпірними) або *арочними* (розпірними) системами. Розрахунок плоских статично визначуваних рам виконується за допомогою рівнянь рівноваги статички і зводиться до визначення згинаючих моментів, поперечних і поздовжніх сил в перерізах і побудові епюр внутрішніх зусиль.

Епюрою називається графік зміни величини, що вивчається, в різних перерізах від заданого нерухомого навантаження. Визначення внутрішніх зусиль в перерізах рами виконується статичним способом вирізання вузлів і простих перерізів. В аналітичному рішенні чисельні значення зусиль визначаються для кожного перерізу з умов рівноваги відсічених частин рами. Графічне рішення зручно використовувати при побудові епюр згинаючих моментів для найпростіших випадків навантаження [2].

Аналітичний розрахунок статично визначуваних рам зводиться до наступного:

1. Встановлюється геометрична незмінюванність і статична визначуваність.
2. Розраховуються опорні реакції і здійснюється перевірка правильності їх визначення.

3. Визначаються внутрішні зусилля – згинаючий момент, поперечні і поздовжні сили в характерних перерізах рами.

4. Будуються епюри згинаючих моментів, поперечних і поздовжніх сил.

Завдання до роботи

Для заданої рами необхідно:

- виконати кінематичний аналіз;
- визначити реакції опор, включаючи сили взаємодії в шарнірах;
- побудувати епюри внутрішніх силових факторів.

Приклад рішення задачі

Завдання: Для рами, зображеної на рис. 5.1, побудувати епюри згинаючих моментів, поперечних і поздовжніх сил, якщо задано зосереджена сила $F=5$ кН, рівномірно розподілена сила $q_1=2$ кН/м, рівномірно розподілена сила $q_2=5$ кН/м, розміри $h=3$ м, $l=3$ м.

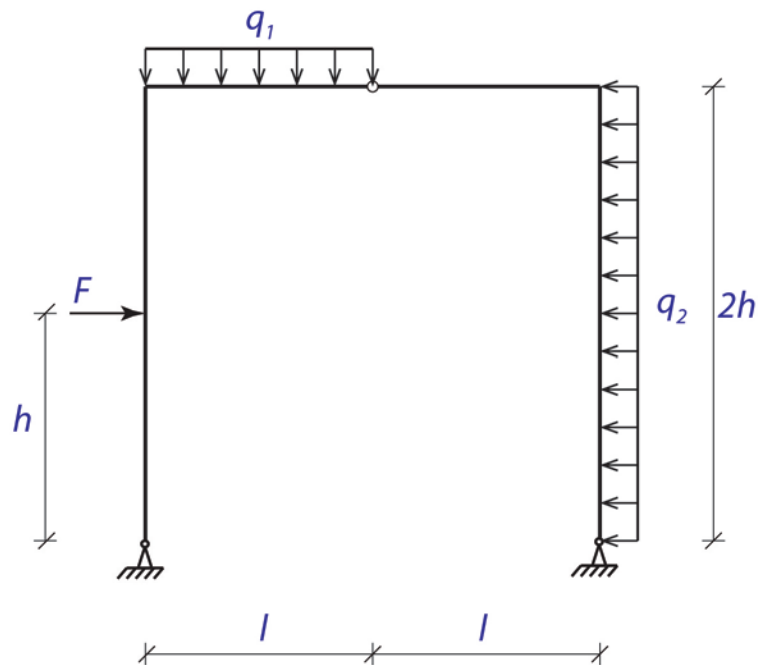


Рис. 6.1. Схема тришарнірної рами

Рішення:

1. Встановлення геометричної незмінюваності і статичної визначуваності (кінематичний аналіз рами).

Визначаємо ступінь свободи за формулою:

$$W = 3D - 2Ш - C_0 = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 1 - 4 = 0,$$

де $D=2$ – кількість дисків в рамі, $Ш=1$ – кількість шарнірів, $C_0=4$ – кількість опорних стержнів.

Рама являє собою незмінювану фігуру, що складається з трьох дисків (AEC , $СКВ$ і «земля»), з'єднаних між собою шарніром C і двома шарнірно-нерухомими опорами. Отже, рама є геометрично незмінюваною і статично визначуваною.

2. Розрахунок опорних реакцій і перевірка правильності їх визначення.

Перед початком рішення задачі перенесемо на розрахункову схему числові дані навантажень і позначимо характерні точки рами літерами A , B , C , D , E , K (рис. 6.2).

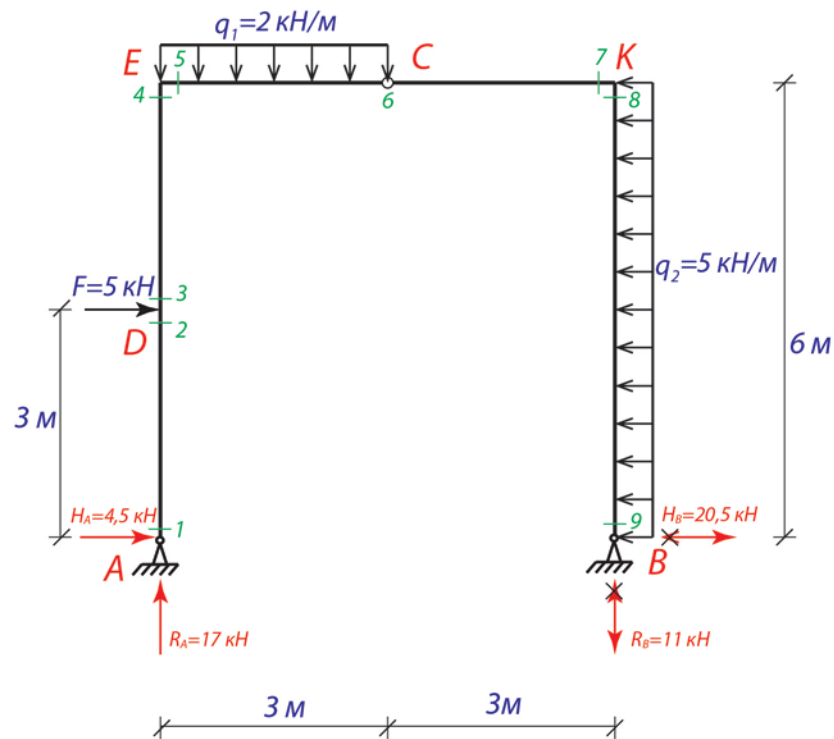


Рис. 6.2. Розрахункова схема рами

Опорні реакції будемо визначати з умов рівноваги плоскої системи сил.

В шарнірно-нерухомих опорах (т.А і т.В) виникають дві складові реакції – горизонтальна H і вертикальна R . Надамо цим реакціям на даному етапі довільний напрямок.

Для визначення вертикальних складових реакцій R_A і R_B запишемо рівняння суми моментів відносно опорних точок, які повинні дорівнювати нулю:

$$\sum M_A = 0; F \cdot 3 + q_1 \cdot 3 \cdot 1.5 - q_2 \cdot 6 \cdot 3 - R_B \cdot 6 = 0$$

звідки

$$R_B = \frac{F \cdot 3 + q_1 \cdot 3 \cdot 1.5 - q_2 \cdot 6 \cdot 3}{6} = \frac{5 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 1.5 - 5 \cdot 6 \cdot 3}{6} = -11 \text{ кН}$$

$$\sum M_B = 0; R_A \cdot 6 + F \cdot 3 - q_1 \cdot 3 \cdot 4.5 - q_2 \cdot 6 \cdot 3 = 0$$

звідки

$$R_A = \frac{-F \cdot 3 + q_1 \cdot 3 \cdot 1.5 + q_2 \cdot 6 \cdot 3}{6} = \frac{-5 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4.5 + 5 \cdot 6 \cdot 3}{6} = 17 \text{ кН}$$

Знак «-» реакції R_B говорить про те, що довільно прийнятий напрямок виявився невірним, і R_B необхідно спрямувати в протилежний бік, одночасно змінивши знак на протилежний.

Проміжна перевірка правильності визначення вертикальних реакцій проводиться складанням рівняння суми проекцій всіх сил на вертикальну вісь Y , яка повинна дорівнювати нулю.

$$\sum F_y = 0; R_A - R_B - q_1 \cdot 3 = 0;$$

$$17 - 11 - 2 \cdot 3 = 0; 0 = 0.$$

Умова виконується. Вертикальні складові опорних реакцій знайдені вірно.

Для визначення горизонтальної складової H_A складемо рівняння моментів відносно шарніра C для лівої частини рами, для визначення H_B складемо рівняння суми проекцій всіх сил на горизонтальну вісь X :

$$\sum M_C^{\text{лів}} = 0; R_A \cdot 3 - H_A \cdot 6 - F \cdot 3 - q_1 \cdot 3 \cdot 1.5 = 0,$$

звідки

$$H_A = \frac{R_A \cdot 3 - F \cdot 3 - q_1 \cdot 3 \cdot 1.5}{6} = \frac{17 \cdot 3 - 5 \cdot 3 - 2 \cdot 3 \cdot 1.5}{6} = 4.5 \text{ кН};$$

$$\sum F_x = 0; H_A + F - H_B - q_2 \cdot 6 = 0,$$

звідки

$$H_B = H_A + F - q_2 \cdot 6 = 4.5 + 5 - 5 \cdot 3 = -20.5 \text{ кН.}$$

Змінюємо попередньо прийнятий напрямок H_B на протилежний.

Загальна перевірка правильності визначення опорних реакцій:

$$\begin{aligned} \sum M_C^{\text{пр}} &= 0; -R_B \cdot 3 + H_B \cdot 6 - q_2 \cdot 6 \cdot 3 = 0; \\ -11 \cdot 3 + 20.5 \cdot 6 - 5 \cdot 6 \cdot 3 &= 0; 0 = 0. \end{aligned}$$

Умова виконується. Реакції опор визначені вірно. Рама знаходиться в стані рівноваги.

3. Визначення величини поперечної сили. Побудова епюри поперечних сил.

Визначення внутрішніх зусиль в перерізах рами виконуємо способом простих перерізів. Визначаємо значення поперечних сил в характерних перерізах рами, розглядаючи рівновагу відсічених частин рами.

Стойка А-Е:

переріз 1: $Q_1^{\text{лів}} = -H_A = -4.5 \text{ кН};$

переріз 2: $Q_2^{\text{лів}} = -H_A = -4.5 \text{ кН};$

переріз 3: $Q_3^{\text{лів}} = -H_A - F = -4.5 - 5 = -9.5 \text{ кН};$

переріз 4: $Q_4^{\text{лів}} = -H_A - F = -4.5 - 5 = -9.5 \text{ кН.}$

Ригель Е-К:

переріз 5: $Q_5^{\text{лів}} = R_A = 17 \text{ кН};$

переріз 6: $Q_6^{\text{лів}} = R_A - q_1 \cdot 3 = 17 - 2 \cdot 3 = 11 \text{ кН};$

переріз 7: $Q_7^{\text{лів}} = Q_6^{\text{лів}} = 11 \text{ кН.}$

Стойка В-К:

переріз 9: $Q_9^{\text{пр}} = -H_B = -20.5 \text{ кН};$

переріз 8: $Q_8^{\text{пр}} = -H_B + q_2 \cdot 6 = -20.5 + 5 \cdot 6 = 9.5 \text{ кН.}$

За отриманими даними будуємо епюру поперечних сил з використанням правила знаків (рис. 6.3).

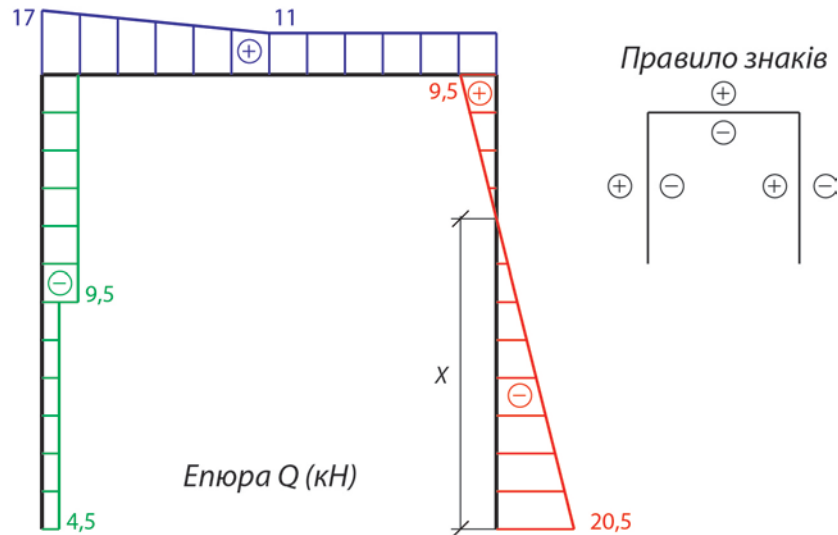


Рис. 6.3. Еюра поперечних сил рами

Слід звернути увагу, що значення поперечних сил на границях ділянки $B-K$ мають протилежні знаки, тобто еюра Q на даній ділянці перетинає базову лінію, отже, на еюрі моментів в цьому перерізі буде екстремум. Необхідно визначити відстань X , для цього складаємо рівняння:

$$Q_x = -H_B + q_2 \cdot x = 0,$$

звідки

$$x = \frac{H_B}{q_2} = \frac{20.5}{5} = 4.1 \text{ м.}$$

4. Визначення величини згинаючих моментів. Побудова еюри згинаючих моментів.

Визначаємо значення згинаючих моментів в характерних перерізах рами.

Стойка А-Е:

переріз 1: $M_1^{\text{лів}} = 0;$

переріз 2, 3: $M_2^{\text{лів}} = M_3^{\text{лів}} = -H_A \cdot 3 = -4.5 \cdot 3 = -13.5 \text{ кНм};$

переріз 4: $M_4^{\text{лів}} = -H_A \cdot 6 - F \cdot 3 = -4.5 \cdot 6 - 5 \cdot 3 = -42 \text{ кНм.}$

Ригель Е-К:

переріз 5: $M_5^{\text{лів}} = -H_A \cdot 6 - F \cdot 3 = -4.5 \cdot 6 - 5 \cdot 3 = -42 \text{ кНм};$

переріз 6: $M_6^{\text{лів}} = R_A \cdot 3 - H_A \cdot 6 - F \cdot 3 - q_1 \cdot 3 \cdot 1.5 =$
 $= 17 \cdot 3 - 4.5 \cdot 6 - 5 \cdot 3 - 2 \cdot 3 \cdot 1.5 = 0;$

переріз 7: $M_7^{ліВ} = R_A \cdot 6 - H_A \cdot 6 - F \cdot 3 - q_1 \cdot 3 \cdot 4.5 =$
 $= 17 \cdot 6 - 4.5 \cdot 6 - 5 \cdot 3 - 2 \cdot 3 \cdot 4.5 = 33 \text{ кНм.}$

Стойка В-К:

переріз 9: $M_9^{пр} = 0;$

переріз 8: $M_8^{пр} = H_B \cdot 6 - q_2 \cdot 6 \cdot 3 = 20.5 \cdot 6 - 5 \cdot 6 \cdot 3 = 33 \text{ кНм;}$

переріз х: $M_x^{пр} = H_B \cdot 4.1 - q_2 \cdot 4.1 \cdot 2.05 = 20.5 \cdot 4.1 - 5 \cdot 4.1 \cdot 2.05 = 42 \text{ кНм.}$

За отриманими даними будемо епюру згинаючих моментів з використанням правила знаків (рис. 6.4).

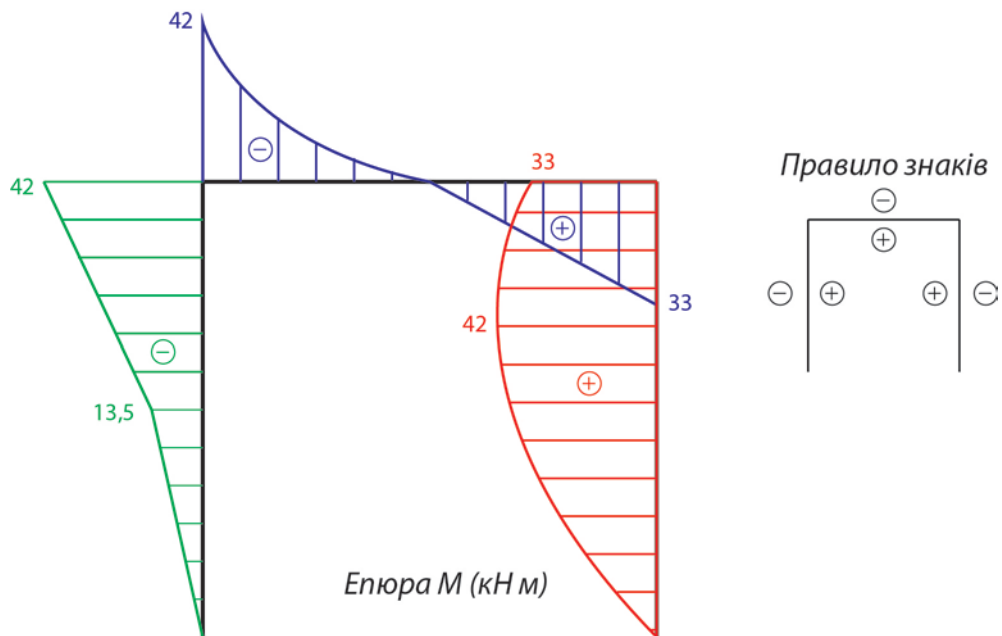
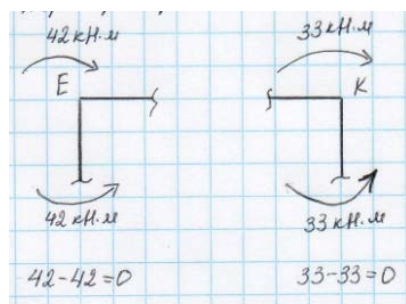


Рис. 6.4. Епюра згинаючих моментів рами

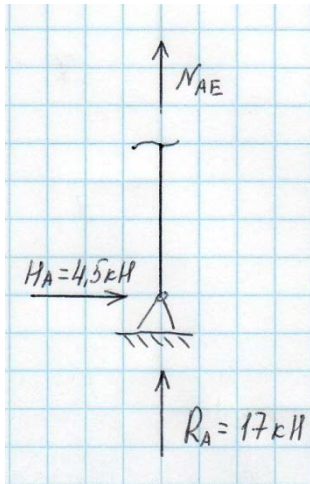
Перевірка рівноваги жорстких вузлів:



5. Визначення величини поздовжніх сил. Побудова епюри поздовжніх сил.

Визначення поздовжніх сил в перерізах рами виконуємо способом вирізання вузлів.

Вирізаємо вузол А:



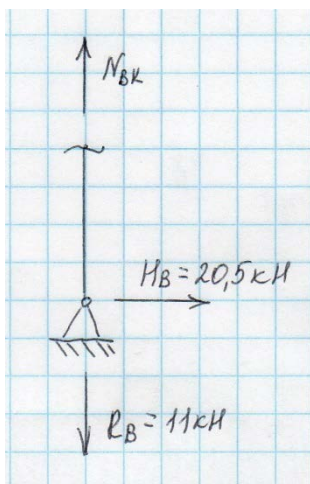
Сума поздовжніх сил в стійці А-Е дорівнює:

$$\sum F_y = 0; N_{AE} + R_A = 0,$$

звідки

$$N_{AE} = -R_A = -17 \text{ кН (стержень стиснутий)}$$

Вирізаємо вузол В:



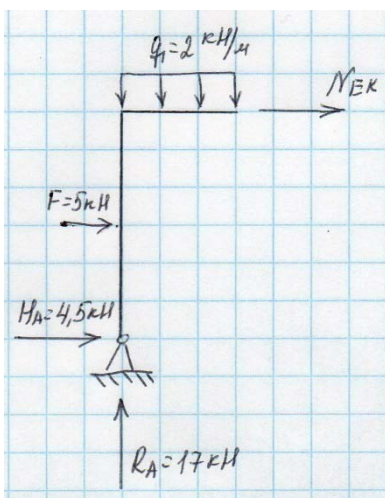
Сума поздовжніх сил в стійці В-К дорівнює:

$$\sum F_y = 0; N_{BK} - R_B = 0,$$

звідки

$$N_{BK} = R_B = 11 \text{ кН (стержень розтягнутий)}$$

Ригель (розглядаємо ліву частину):



Сума поздовжніх сил в ригелі дорівнює:

$$\sum F_x = 0; N_{EK} + F + H_A = 0,$$

звідки

$$N_{EK} = -F - H_A = -5 - 4.5 = -9.5 \text{ кН}$$

(ригель стиснутий)

За отриманими даними будуємо епюру поздовжніх сил (рис. 6.5).

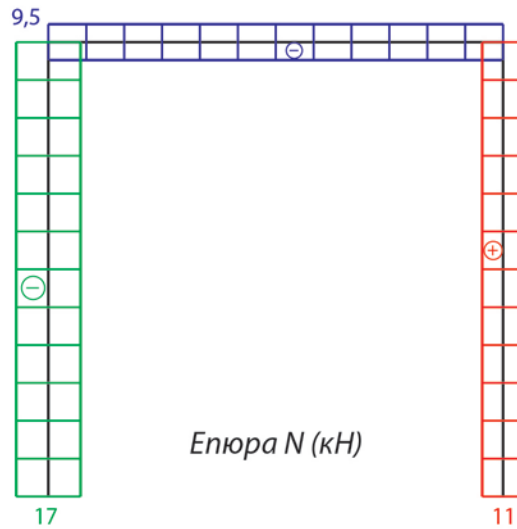


Рис. 6.5. Епюра поздовжніх сил рами

6. Статична перевірка правильності розрахунку

Статичну перевірку правильності розрахунку проводимо на прикладі вузла Е.

$$\sum F_x = 0; H_A + H_B + F - q_2 \cdot 6 = 4.5 + 20.5 + 5 - 5 \cdot 6 = 0;$$

$$\sum F_y = 0; R_A - q_1 \cdot 3 - R_B = 17 - 2 \cdot 3 - 11 = 0;$$

$$\begin{aligned} \sum M_E = 0; -H_A \cdot 6 - F \cdot 3 + q_1 \cdot 3 \cdot 1.5 + q_2 \cdot 6 \cdot 3 + R_B \cdot 6 - H_B \cdot 6 = \\ = -4.5 \cdot 6 - 5 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 1.5 + 5 \cdot 6 \cdot 3 + 11 \cdot 6 - 20.5 \cdot 6 = 0. \end{aligned}$$

Умова виконується. Розрахунок виконаний вірно.

7. Будуємо епюри згинаючих моментів, поперечних і поздовжніх сил в заданій рамі від заданого навантаження в єдиному масштабі, для чого суміщаємо всі побудовані раніше епюри (рис. 6.6).

Питання для самоперевірки

1. Дати визначення рами.
2. Назвіть основні типи рам.
3. Визначення вертикальних і горизонтальних опорних реакцій.
4. Побудова епюр внутрішніх силових факторів.
5. Розрахунок зусиль способом вирізання вузлів.

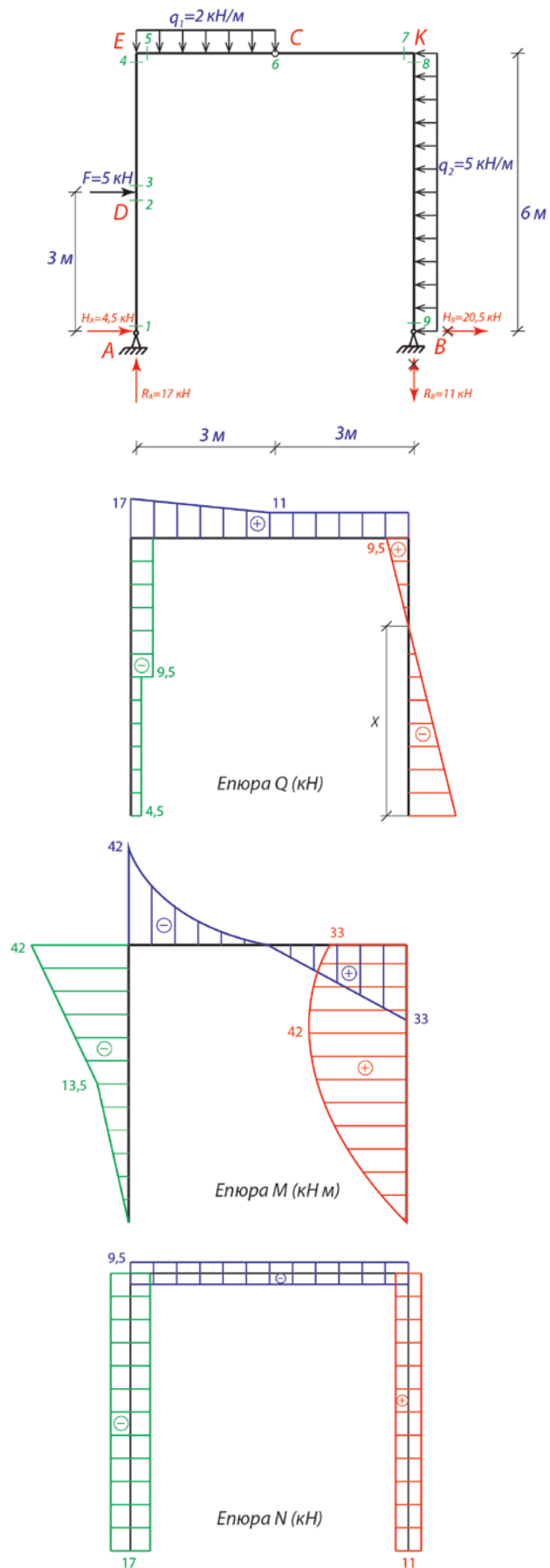


Рис. 6.6. Еюра згинаючих моментів, поперечних і поздовжніх сил рами

7. Розрахунок статично визначуваної ферми

Мета роботи: практичне засвоєння методики розрахунку статично визначуваної ферми.

Теоретичні відомості

Ферми, утворені з шарнірного трикутника шляхом послідовного приєднання вузлів за допомогою 2-х стержнів, що не лежать на одній прямій, називаються найпростішими. Такі ферми статично визначувані і геометрично незмінювані.

Розрахунок ферм полягає у визначенні зусиль в її стержнях. Зазвичай попередньо знаходять реакції опор, розглядаючи ферму в цілому. Далі для визначення зусиль у її стержнях застосовують *метод перерізів*. Визначення зусиль в стержнях ферми статичним методом виконується за допомогою модифікації загального методу перерізів: способу вирізання вузлів, наскрізних перерізів, сумісних перерізів [3].

Завдання до роботи

Визначити зусилля в стержнях ферми, наведеної на рис. 7.1, від заданого навантаження способом вирізання вузлів

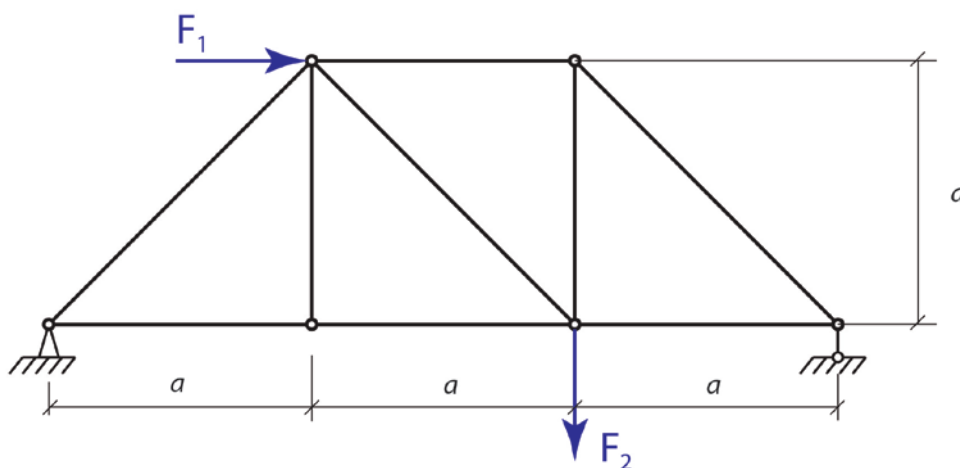


Рис. 7.1. Схема ферми

Приклад рішення задачі

Завдання: Визначити зусилля в стержнях ферми (рис. 7.1) способом вирівняння вузлів, якщо задано $F_1=2$ кН, $F_2=5$ кН.

Рішення:

1. Позначаємо літерами всі вузли ферми і нумеруємо стержні (рис. 7.2).

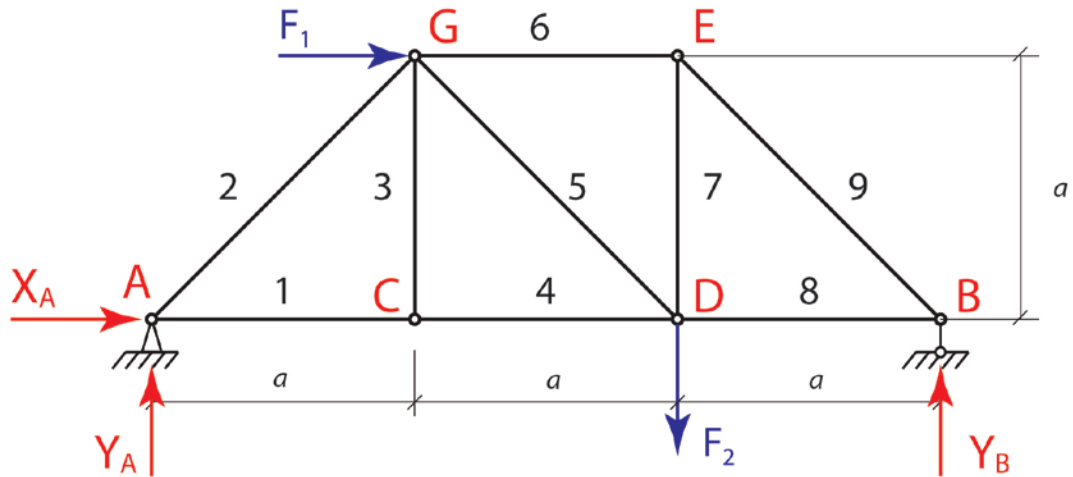


Рис. 7.2. Розрахункова схема ферми

2. Визначаємо опорні реакції. Для цього розглядається рівновага всієї ферми в цілому:

$$\sum F_x = 0; X_A + F_1 = 0;$$

$$X_A = -F_1 = -2, \text{кН}$$

$$\sum M_A = 0; F_1 \cdot a + F_2 \cdot 2a - Y_B \cdot 3a = 0;$$

$$Y_B = \frac{F_1 \cdot a + F_2 \cdot 2a}{3 \cdot a} = \frac{2 \cdot 1 + 5 \cdot 2}{3} = 4, \text{кН}$$

$$\sum F_y = 0; Y_A - F_2 + Y_B = 0;$$

$$Y_A = F_2 - Y_B = 5 - 4 = 1, \text{кН}$$

Для перевірки отриманих результатів складаємо рівняння моментів відносно такої точки, відносно якої всі розраховані сили реакцій створюють ненульові моменти:

$$\sum M_E = -X_A \cdot a + Y_A \cdot 2a - Y_B \cdot a = 2 \cdot a + 1 \cdot 2a - 4 \cdot a = 0$$

Умова виконується, сили реакцій опор знайдені вірно.

3. Визначаємо зусилля в стержнях способом вирізання вузлів.

Метод вирізання вузлів полягає в тому, що розглядається рівновага кожного вузла. На кожний вузол діє пласка система збіжних сил, що складається з прикладених до даного вузла активних сил і реакцій стержнів, приєднаних до даного вузла (рис. 7.3).

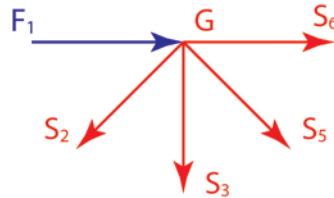


Рис. 7.3. Схема розподілення сил у вузлі G

Для такої системи сил можна скласти тільки два рівняння рівноваги:

$$\sum F_x = 0; \sum F_y = 0.$$

Тому рівновагу вузлів треба розглядати в певній послідовності, яка дозволяє на кожному кроці рішення задачі визначати дві чергові невідомі, тобто у кожному новому вузлі повинно бути не більше двох невідомих зусиль.

Вирізаємо вузол **B** і розглядаємо його рівновагу (рис. 7.4):

$$\sum F_y = 0; Y_B + S_9 \sin 45^\circ = 0;$$

$$S_9 = -\frac{Y_B}{\sin 45^\circ} = -\frac{4}{\sqrt{2}/2} = -4\sqrt{2}, kH$$

$$\sum F_x = 0; -S_8 - S_9 \cos 45^\circ = 0;$$

$$S_8 = -S_9 \cos 45^\circ = 4\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 4, kH$$

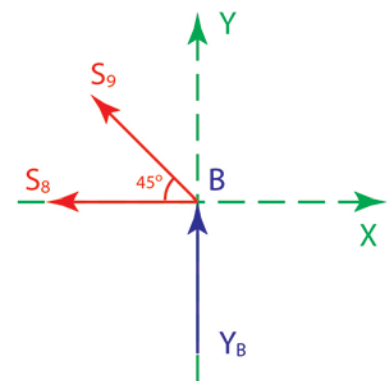


Рис. 7.4. Рівновага сил у вузлі B

Вирізаємо **вузол Е** і розглядаємо його рівновагу (рис. 7.5):

$$\sum F_x = 0; -S_6 + S_9 \cos 45^\circ = 0;$$

$$S_6 = S_9 \cos 45^\circ = -4\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -4, kH$$

$$\sum F_y = 0; -S_7 - S_9 \sin 45^\circ = 0;$$

$$S_7 = -S_9 \sin 45^\circ = 4\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 4, kH$$

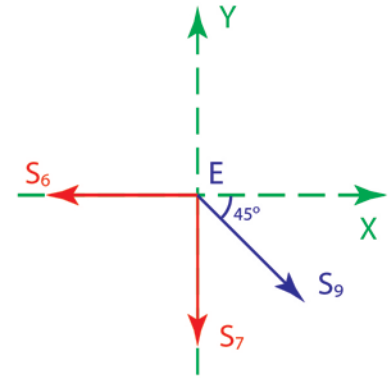


Рис. 7.5. Рівновага сил у вузлі Е

Вирізаємо **вузол D** і розглядаємо його рівновагу (рис. 7.6):

$$\sum F_y = 0; S_5 \sin 45^\circ + S_7 - F_2 = 0;$$

$$S_5 = \frac{F_2 - S_7}{\sin 45^\circ} = (5 - 4)\sqrt{2} = \sqrt{2}, kH$$

$$\sum F_x = 0; -S_4 - S_5 \cos 45^\circ + S_8 = 0;$$

$$S_4 = -S_5 \cos 45^\circ + S_8 = -\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 4 = 3, kH$$

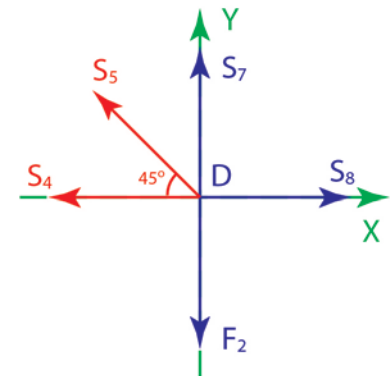


Рис. 7.6. Рівновага сил у вузлі D

Вирізаємо **вузол С** і розглядаємо його рівновагу (рис. 7.7):

$$\sum F_x = 0; -S_1 + S_4 = 0;$$

$$S_1 = S_4 = 3, kH$$

$$\sum F_y = 0; S_3 = 0$$

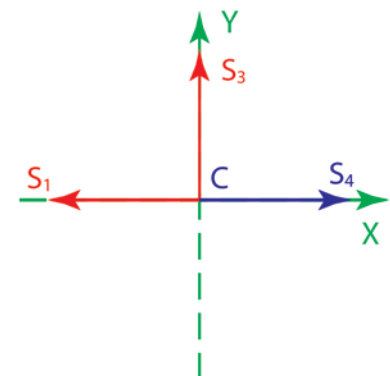


Рис. 7.7. Рівновага сил у вузлі С

Вирізаємо **вузол А** і розглядаємо його рівновагу (рис. 7.8):

$$\sum F_y = 0; S_2 \sin 45^\circ + Y_A = 0;$$

$$S_2 = -\frac{Y_A}{\sin 45^\circ} = -\sqrt{2}, \text{ кН}$$

В якості перевірки застосовуємо рівняння:

$$\sum F_x = 0;$$

$$X_A + S_1 + S_2 \cos 45^\circ = -2 + 3 - \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0;$$

$$0 = 0$$

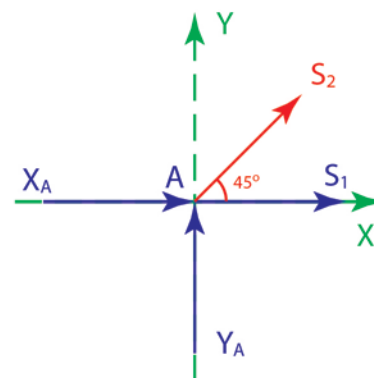


Рис. 7.8. Рівновага сил у вузлі А

Вирізаємо **вузол G** і перевіряємо правильність розрахунків (рис. 7.9):

$$\sum F_x = 0;$$

$$F_1 + S_6 - S_2 \cos 45^\circ + S_5 \cos 45^\circ =$$

$$= 2 - 4 + \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0;$$

$$0 = 0$$

$$\sum F_y = 0;$$

$$-S_2 \sin 45^\circ - S_5 \sin 45^\circ = \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

$$0 = 0$$

Умова виконується, розрахунки виконані вірно.

Результати розрахунку заносимо до таблиці:

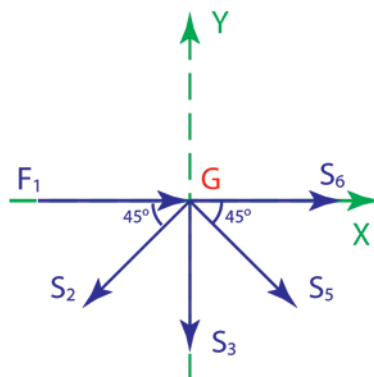


Рис. 7.9. Рівновага сил у вузлі G

№ стержня	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Зусилля, кН	3	$-\sqrt{2}$	0	3	$\sqrt{2}$	-4	4	4	$-4\sqrt{2}$

Питання для самоперевірки

1. Що називається фермою?
2. Які зусилля виникають в стержнях ферм і чому?
3. Які елементи розрізняють у фермах?

4. За якими ознаками класифікують ферми?
5. В чому полягає спосіб вирізання вузлів? У чому переваги й недоліки цього способу?
6. В якому випадку раціонально визначати зусилля способом моментної точки? Як знайти моментну точку?
7. В якому випадку доцільно застосовувати спосіб проєкцій?
8. Як змінюються зусилля в розкосах балочної ферми вздовж її прогону?

СПИСОК ПОСИЛАНЬ

1. Попович П.С., Давидчак О.Р. Будівельна механіка статично визначених стержневих систем: Навчальний посібник. – Львів: Видавництво НУ «Львівська політехніка», 2007. – 196 с.
2. Лампси Б.Б. Сборник задач и упражнений по строительной механике. Часть I. Статически определимые системы [Текст]: учебное пособие для вузов/ Лампси Б.Б., Трянина Н.Ю., Юдников С.Г., Половец И.В. – Нижний Новгород: ННГАСУ, 2015. – 132 с. ISBN 5 - 87941-254-7.
3. Дарков А.В., Шапошников Н.Н. Строительная механика: Учеб. для строит. спец. вузов. – М.: Высшая школа, 1986. – 607 с.
4. Методичні вказівки та завдання для виконання розрахунково-графічної роботи з курсу «Теоретична механіка». Частина I. Статика / Бондар Г.Й., Воробець В.С., Дзюба Л.Ф., Ольховий І.М. – Львів: ЛДУБЖД, 2012. – 31 с.
5. Мельчаков А.П., Никольский И.С. Сборник задач по строительной механике: Учебное пособие. – Челябинск: Изд-во ЮУрГУ, 2004. – 58 с.