

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
ХАРЧОВИХ ТЕХНОЛОГІЙ**

**В.В. САМСОНОВ, А.М. СІЛЬВЕСТРОВ,  
О.М. ТАЧИНІНА**

**МЕТОДОЛОГІЯ НАУКОВИХ  
ДОСЛІДЖЕНЬ ТА ПРИКЛАДИ ЇЇ  
ВИКОРИСТАННЯ**

**Навчальний посібник**

**Київ 2022**

**УДК 519.711**

Рекомендовано до видання кафедрою «Інформаційних систем» Національного університету харчових технологій (протокол № 16 від 23.05.2022 р.)

***Рецензент:***

**А. І. Бідюк**, доктор технічних наук, професор Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

Самсонов В.В., Сільвестров А.М., Тачиніна О.М. *Методологія наукових досліджень та приклади її використання: Навч. посібник*. К.: НУХТ, 2022. – 385 с.

ISBN

Видано в авторській редакції

Навчальний посібник призначено для вивчення та використання в лабораторних роботах студентами, науковими працівниками – в роботі по дослідженню реальних об'єктів керування в різних областях науки і техніки. Для високоякісного керування реальними об'єктами необхідно побудувати математичну модель причинно – наслідкових зв'язків. В посібнику подано матеріал, як від загального підходу, використовуючи принцип орієнтації на головну ціль, побудувати за апіорними даними і результатами натурального експерименту на об'єкті, таку математичну модель, за якої якнайкраще вирішується головна задача (управління, діагностики параметрів, прогнозування поведінки об'єкта та ін.).

Призначено для здобувачів вищої освіти спеціальності 122 «Комп'ютерні науки», а також фахівців, які досліджують технічні, економічні, соціальні та інші об'єкти реального світу.

**ISBN  
519711**

**УДК**

© В.В. Самсонов, А.М. Сільвестров, О.М. Тачиніна, 2022  
© НУХТ, 2022

## Розділ 1

# ОСНОВИ МЕТОДОЛОГІЇ НАУКОВИХ ДОСЛІДЖЕНЬ

### 1.1. Наука як система знань

Наука – це система знань, об'єктивних законів природи, суспільства, мислення, що виражається у точних категоріях і має певну структуру [3, 43, 100]. Під *системою* розуміють те, що всі тіла і предмети в світі взаємодіють, а всі процеси та явища взаємопов'язані. Як система, наука характеризується цілісною єдністю кількісного і якісного накопичення знань, класифікованих за галузями наукових досліджень, процесом формування зв'язків між ними.

Системність науки реалізується становленням та розвитком її як окремого соціального інституту, що об'єднує інтелектуальний потенціал суспільства.

Системи поділяють [43, 85, 100]:

1. *Великі системи*. Такі системи не вдається спостерігати одночасно з позиції одного спостерігача в часі або в просторі. У цих випадках систему розбивають на частини (підсистеми) і розглядають послідовно, переміщаючись з нижчого рівня на вищий.

2. *Динамічні системи*. Такі системи перебувають у постійній зміні. Будь-яку зміну, що відбувається в такій системі, називають процесом.

Динамічні системи зазвичай характеризують такими властивостями:

- рівновага – здатність повертатися до початкового стану чи поведінки, компенсуючи впливи зовнішнього середовища;
- адаптація – здатність відновлювати свою структуру або поведінку для компенсації зовнішнього впливу, а також змінювати їх, пристосовуючись до умов оточуючого середовища;
- інваріантність поведінки – те, що залишається в поведінці системи незмінним у будь-який відрізок часу.

3. *Кібернетичні або керуючі системи*. За допомогою таких систем досліджують процеси керування в технічних,

біологічних, економічних і соціальних системах. Центральною в цьому випадку є інформація як засіб впливу на поведінку системи.

Наука – це не просто система знань про навколишній світ, а точно сформульовані положення про явища та їх зв'язки, закони природи та суспільства, що виражені за допомогою конкретних наукових понять і суджень. Поняття і судження є науковими, якщо вони отримані за допомогою наукових методів (як емпіричних, так і теоретичних) і підтверджені в процесі практичної перевірки. Отже, наука – це сфера дослідницької діяльності, що спрямована на отримання нових знань про природу, суспільство і людину. Наука є результатом діяльності людства, що спрямована на розвиток суспільної практики.

Загалом наука виконує такі функції [100]:

- *соціальної пам'яті* як “*накопичення – збереження – трансляції*” досвіду попередніх епох;
- *гносеологічну* (пізнавальну), що забезпечує суспільству необхідні знання для правильного вирішення поставлених проблем;
- *нормативну*, що встановлює, організує та регулює відносини між науковими структурами за допомогою системи норм і правил поведінки та етики;
- *комунікативну*, що реалізується за допомогою наукової мови як зрозумілого і важливого засобу спілкування;
- *аксіологічну* (ціннісну), що формує в суспільстві ціннісні орієнтації, які спрямовують результати наукових досліджень на благо людства;
- *креативну* (творчу), що реалізується за допомогою створення потужного, інтелектуального потенціалу людства;
- *виховну*, що дає змогу підвищити рівень освіченості у суспільстві.

Мета науки – пізнання законів розвитку природи і суспільства, їх вплив на предмети та явища, їх властивості та відношення, що виконується за допомогою логічного та абстрактного мислення [43, 85, 100]. Процес наукового пізнання передбачає накопичення фактажу, що підлягає систематизації та узагальненню за допомогою понять, категорій, критеріїв.

Поняття є вищою формою прояву думки і відображають предмети та явища світу в їх конкретних та загальних ознаках, за допомогою яких і створюється система наукового знання. Отже, наукові знання являють собою систему взаємозалежних понять, що відбивають закономірний процес розвитку природи і суспільства. Розвиток системи наукових знань, її удосконалення, систематизація та апробація проводяться за допомогою наукового дослідження. Пошук, що спирається на емпіричний фактаж, передбачає застосування різних методів наукового дослідження і приводить до узагальнень на типологічному рівні називають *науковим*.

## 1.2. Види й етапи наукових досліджень

Від ідеї до її втілення науковий пошук проходить кілька етапів цілеспрямованого процесу пізнання, результати якого подають у вигляді наукового дослідження у розмаїтті його проявів: монографії, есе, наукові статті, звіти і доповіді, дисертації, магістерські і дипломні роботи та ін.

За цільовим призначенням виокремлюють такі види наукових досліджень [4, 43, 100]

– *фундаментальні*, що мають найвищий ступінь невідомості. Результатом цих досліджень є відкриття нових явищ і законів, які відбуваються в навколишньому середовищі, розширення наукових знань про суспільство та їх застосування в практичній діяльності;

– *прикладні*, що передбачають пошук нових або удосконалення вже відомих явищ та законів природи, мета яких полягає у використанні одержаних результатів у практичній діяльності людини і суспільства.

Наукове дослідження умовно поділяють на такі етапи [43, 85, 100]:

- емпіричний;
- теоретичний.

Емпіричний етап наукового дослідження пов'язаний із отриманням та первісним опрацюванням матеріалу, процесом накопичення фактів, описом мовою науки, класифікацію

за різними критеріями та виявленям основної залежності між ними. Саме під час такої роботи дослідник повинен:

- описати кожний факт термінами науки у межах якої ведеться дослідження;
- відібрати з усіх фактів найбільш типові;
- класифікувати факти за їх сутністю;
- з'ясувати наявні зв'язки між відібраними фактами.

Теоретичний етап дослідження пов'язаний із глибоким аналізом наукового фактажу, перевіреного, усвідомленого та зафіксованого мовою науки, проникненням у суть явищ, формулюванням його в якісній і кількісній формах, обранням принципу дії та рекомендацій щодо практичного впливу на ці явища.

Між двома етапами дослідження є постановка проблеми, що означає:

- визначення того, що є невідомим і потребує доведення;
- формулювання питання, що відображає основний зміст проблеми й обґрунтування його правильності та важливості для науки;
- виокремлення конкретних завдань, послідовність їх вирішення та методи, які застосовують.

Наукове дослідження в кожному зі своїх циклів рухається від емпірики до теорії, а від теорії – до практики, де проходить перевірку.

Цей процес має певні стадії, які відбуваються у заданій послідовності, та характерні форми, в яких існує та розвивається наукове знання, зокрема, отримання фактів, їх опис, формулювання проблем і постановка задач, висунення гіпотези, ідеї, положення, формулювання теорії та органічне внесення в неї доказових положень.

Теорія (грецьке *theoria* – розгляд, дослідження) – форма достовірного наукового знання про дійсність, що являє собою систему понять, тверджень, доказів, дає цілісне уявлення про закономірності та зв'язки у природі й у суспільстві. Теорія виникає внаслідок пізнавальної діяльності та практики і являє собою процес осмисленого відображення дійсності.

Наукова теорія як система характеризується [100]:

- предметністю;
- адекватністю;
- конкретністю;
- істинністю та достовірністю.

Наукова теорія має бути логічною, пояснювати факти і наукові конструкції. Нові теорії виникають тоді, коли існуючі знання не задовольняють пояснення експериментальних фактів.

У структуру наукової теорії входять [3, 8, 100]:

- факти – знання про об’єкти або явища, вірність яких доведена;

- категорії – загальні та фундаментальні поняття, що відображають найбільш суттєві, загальні якості явищ дійсності;

- аксіоми – істинні положення, що приймаються без логічного доведення в силу їх безпосередньої переконаності;

- постулати – твердження (судження), що приймаються науковою теорією як істинні, хоча вірність їх не доведена;

- принципи – вихідні положення будь-якої теорії, вчення, науки або світогляду; абстрактні визначення ідеї, що виникли внаслідок досягнення досвіду людства;

- поняття – думка, що узагальнює та виокремлює предмети, явища за певними ознаками, відображає суттєві його якості (загальні, одиничні, конкретні, абстрактні, відносні, абсолютні і т.д.);

- судження (висловлювання) – висловлена думка (загальна, стверджуюча, конкретна, умовна тощо), в якій відображене ставлення до її змісту, істинності або хибності;

- закони – дуже суттєві та необхідні відношення між явищами і процесами, що відображають загальні зв’язки і мають об’єктивний характер. Отже, наукова теорія – це система суттєвих ідей, підходів та логічних принципів, за допомогою яких узагальнюється досвід, отримуються достовірні знання, відображається закономірний розвиток природи, суспільства, мислення на основі зв’язків між її поняттями [100].

### 1.3. Методологія наукового дослідження

Незважаючи на те, що будь-яке наукове дослідження, починаючи від його творчого задуму та постановки проблеми і закінчуючи висновками та оформленням звіту, відбувається за індивідуальним планом дослідника, можна виокремити деякі загальні підходи його проведення, які зазвичай називають методологією. Під *методологією наукового дослідження* розуміють сукупність принципів, засобів і методів вирішення конкретного завдання або поставленої проблеми .

Методологія наділена апаратом дослідження, до якого відносять [100]:

- принципи організації та проведення наукового дослідження;
- різні методи наукового дослідження та способи його проведення;
- понятійно-категоріальну основу наукового дослідження, зокрема: актуальність, проблематика, об'єкт, предмет, мета, завдання, наукова новизна, евристична цінність, теоретична і практична значущість.

Усі складові елементи наукового дослідження є основою методологічного апарату і сукупно являють собою інструментарій цілеспрямованого пізнання об'єктів, явищ і процесів. Результати наукових досліджень здебільшого виражають у вигляді системи понять, закономірностей, законів і теорій.

*Методологія* в широкому значенні являє собою систему принципів і способів організації й побудови теоретичної та практичної діяльності, а також вчення про цю систему [85, 100]. *Методологія науки* дає характеристику компонентів наукового дослідження, його об'єкта, предмета, сукупності засобів, необхідних для вирішення завдань дослідження, а також формує послідовність дій дослідника у процесі вирішення завдання. Близьке до цього поняття *методологія наукового пізнання* як вчення про систему методів наукового пізнання [85]. Головною *метою методології* є вивчення тих засобів, методів та прийомів наукового дослідження, за допомогою яких суб'єкт наукового пізнання (вчений, дослід-



ник) одержує нові знання про реальну дійсність. Предмет її вивчення – це поняття і методи науки, їхня сфера застосування. Методологія науки пов'язана з розвитком методів наукового дослідження.

#### 1.4. Методи наукового дослідження

Метод – це спосіб досягнення мети. Метод *об'єктивний*, тому що в розробленій теорії дозволяє відображати дійсність та її взаємозв'язки. Таким чином, метод є програмою побудови і практичного застосування теорії. Метод (*від грецької methodos – спосіб пізнання*) у широкому розумінні слова – «шлях до чогось», шлях пізнання, спосіб досягнення певного результату, здійснення певної діяльності. Стосовно наукового дослідження метод визначається як сукупність визначених правил, прийомів, способів і норм пізнання певного об'єкта чи явища [8, 85, 100].

Спосіб – це дія або система дій, що застосовуються під час виконання будь-якої роботи, при здійсненні чого-небудь [85].

Методика – це фіксована сукупність прийомів практичної діяльності, що призводить до заздалегідь визначеного результату. У науковому пізнанні методика відіграє значну роль в емпіричних дослідженнях (спостереженні та експерименті). *На відміну від методу у завдання методики* не входить теоретичне обґрунтування отриманого результату, вона концентрується на технічній стороні експерименту [8, 85, 100].

З загальної точки зору методи дослідження поділяються на *загальні філософські, окремо наукові, загальнонаукові, дисциплінарні та міждисциплінарні* [85].

*Загальні методи* – це система принципів, прийомів, що мають загальний, універсальний характер, є абстрактними, суворо не регламентовані, не піддаються формалізації та математизації і не замінюють спеціальних методів (методів окремих наук).

*Методи окремих наук* – це сукупність способів та принципів пізнання, прийомів і процедур дослідження, що застосовуються в науці.

*Загальнонаукові методи* дослідження можна класифікувати залежно від *рівнів пізнання* – *емпіричного* або *теоретичного*. На *емпіричному рівні* переважає живе споглядання (чуттєве пізнання), раціональний момент тут наявний, але має підпорядковане значення. Тому досліджуваний об'єкт відображається переважно з боку зовнішніх зв'язків та проявів, що доступні живому спогляданню. На *емпіричному рівні* проводять *збір фактів* (зафіксовані події, явища властивості, відносини), їх первинний опис, одержання статистичних даних на основі спостережень, виміру, експерименту і їх узагальнення, систематизація та класифікація.

До основних *методів*, які використовуються на *емпіричному рівні* дослідження, відносяться: *спостереження, порівняння, моделювання, експеримент*.

*Спостереження* – це цілеспрямоване, систематичне, планомірне, активне вивчення предметів та явищ реальної дійсності, що знаходяться в природному стані або в умовах наукового експерименту. Під *спостереженням* також розуміють апробацію, обґрунтування висунутих *гіпотез* або проміжних результатів дослідження. Вчений використовує спостереження з метою збору *наукових фактів* для винайдення способу розв'язання проблеми. *Наукові факти* – відбиті свідомістю факти дійсності, причому перевірені, осмислені та зафіксовані мовою науки у вигляді *емпіричних суджень*.

*Порівняння* – один із найбільш поширених методів пізнання, який дозволяє встановити подібність та розбіжність предметів та явищ. Недарма говорять, що «все пізнається в порівнянні». У результаті порівняння виявляється те загальне, що притаманне ряду об'єктів.

Різновидом *порівняння* є *аналогія*. *Аналогія* – метод наукового дослідження; завдяки якому досягається пізнання одних предметів і явищ на основі їх подібності з іншими. Одним із різновидів методу аналогій є метод *моделювання* – метод наукового пізнання, що ґрунтується на заміні предмета або явища, що досліджуються, на їх аналог – *модель*, що міс-

тять істотні риси оригіналу. Розрізняють *фізичне* та *математичне моделювання*. При *фізичному моделюванні* фізика явищ в об'єкті й моделі та їхніх математичних залежностях однакова. При *математичному моделюванні* фізика явищ може бути різною, а математичні залежності однаковими. При побудові *моделі* сам об'єкт і його властивості звичайно спрощують, узагальнюють. Модель має бути ближче до оригіналу. *Моделі* можуть бути *фізичні, математичні, натурні*. *Фізичні моделі* дозволяють наочно представляти процеси, що відбуваються у природі. *Математичні моделі* дозволяють кількісно досліджувати явища, що важко піддаються вивченню на фізичних моделях. *Натурні моделі* являють собою масштабно змінювані об'єкти, що дозволяють найбільш повно досліджувати процеси у натурних умовах.

*Вимірювання* – це метод дослідження, за допомогою якого визначається числове значення деякої величини з використанням одиниці вимірювання об'єкта.

*Експеримент* – метод емпіричного дослідження, що базується на цілеспрямованому втручанні суб'єкта у процес наукового пізнання явищ реальної дійсності шляхом створення контрольованих та керованих умов, що дозволяють виділяти визначені якості, зв'язки в об'єкті, що досліджується, та багатократно їх відтворювати.

До основних *методів*, які використовуються на теоретичному рівні дослідження, відносяться: *аналіз і синтез, індукція і дедукція, ідеалізація, формалізація, абстрагування, конкретизація, метод сходження від абстрактного до конкретного*.

*Аналіз* – метод дослідження, що полягає в уявному або практичному розчленуванні цілого на складові частини, кожна з яких аналізується окремо у межах єдиного цілого.

*Синтез* – метод вивчення об'єкта у його цілісності, в єдиному взаємному зв'язку його частин. Синтез пов'язаний з аналізом, оскільки дає змогу поєднати частини, розчленованого в процесі аналізу, встановити їх зв'язок і пізнати об'єкт як єдине ціле.

Аналіз і синтез взаємопов'язані. Розрізняють наступні види аналізу та синтезу:

– прямий, або емпіричний, метод (використовують для виокремлення окремих частин об'єкта, знаходження його властивостей, найпростіших вимірювань тощо);

– зворотний або елементарно-теоретичний метод (який базується на уявленнях про причинно-наслідкові зв'язки різних явищ);

– структурно-генетичний метод (містить вичленення у складному явищі таких елементів, які мають вирішальний вплив на всю решту сторін об'єкта).

*Індукція* – метод дослідження, при якому загальний висновок про ознаки множини елементів виводиться на основі вивчення цих ознак у частини елементів однієї множини.

*Дедуція* – метод логічного висновку від загального до часткового, тобто спочатку досліджують стан об'єкта в цілому, а потім його складові елементи.

*Метод ідеалізації* – уявне конструювання об'єктів, які практично нездійсненні (наприклад: ідеальний газ, абсолютно тверде тіло, тощо). Внаслідок ідеалізації реальні об'єкти позбуваються деяких властивих їм характеристик і набувають гіпотетичних властивостей.

*Формалізація* – метод вивчення різноманітних об'єктів шляхом відображення їхньої структури у знаковій формі за допомогою штучних мов, наприклад, мовою математики (побудова математичної моделі об'єкта).

*Абстрагування* – метод, який дає змогу переходити від конкретних питань до загальних понять і законів розвитку. Цей метод, як правило, здійснюється протягом двох етапів. На першому етапі визначаються несуттєві властивості, зв'язки тощо. На другому етапі – досліджуваний об'єкт замінюють іншим, простішим, який являє собою спрощену модель, що зберігає головні властивості.

## 1.5. Етапи наукового дослідження

Будь-яка наукова робота починається із *задуму дослідження* – тобто основної ідеї, що визначає порядок проведення дослідження, його основні етапи

*Задум дослідження* визначає і його *етапи*. Зазвичай, дослідження складається з *трьох робочих етапів* [85].

*Перший етап* містить у собі:

- вибір наукової проблеми та теми дослідження;
- визначення об'єкта та предмета дослідження, мети і основних завдань.

*Другий етап* роботи містить:

- вибір методів і розробку методики проведення дослідження;
- безпосередньо спеціальні процеси самого наукового дослідження.

*Третій (заклучний) етап* містить обґрунтування та формулювання заключних висновків і практичних рекомендацій.

Перший етап складається з вибору області сфери дослідження, причому цей досить важливий вибір обумовлений як об'єктивними факторами (актуальністю, новизною, перспективністю, цінністю і т.і.), так і суб'єктивними (досвідом дослідника, його науковим і професійним інтересом, здатностями, схильностями, складом розуму тощо).

При формулюванні проблеми передбачають такі *кроки*:

- *постановка проблеми* (на основі вивчення літературних джерел, ознайомлення з тими питаннями, які вже вирішені, ознайомлення з

Науковими роботами, які дають уявлення про галузь дослідження);

- *визначення актуальності проблеми*;
- *розроблення структури проблеми* (її конкретизація на основі уточнення мети дослідження; уточнення змісту проблеми; виділення підпроблем; визначення конкретних завдань; вибору методів дослідження).

Оскільки наукова проблема є сукупністю складних питань, то в процесі дослідження проблему поділяють на складові компоненти – *теми*.

*Тема* – частина наукової проблеми, яка охоплює одне або декілька питань дослідження, яке спрямоване на вирішення конкретного питання [85]. Це відображення наукової проблеми в її характерних рисах, тому формулювання теми

уточнює проблему, окреслює межі дослідження, конкретизує основний задум. Вдале формулювання теми уточнює проблему, окреслює рамки дослідження, конкретизує основний задум, створюючи тим самим передумови успіху роботи в цілому.

Процес формування теми дослідження включає такі *етапи*:

- формулювання назви теми;
- обґрунтування, уточнення та конкретизація теми.

Розглянемо окремі етапи формування теми дослідження. При *виборі теми* наукового дослідження можна скористатися такими прийомами: дослідити стан наукових розробок; ознайомитись з новими результатами досліджень у суміжних областях науки; оцінити стан розроблення методів дослідження; здійснити перегляд відомих наукових рішень за допомогою нових методів, з нових теоретичних позицій, під новим кутом зору, на більш високому рівні з урахуванням нових, істотних наукових фактів.

При *обґрунтуванні (уточненні) і конкретизації теми* необхідно враховувати такі критерії: *актуальність* теми; її *новизна* і перспективність; *ефективність* розроблення, *наявність теоретичної бази*; *відповідність теми* спрямованості наукової роботи відповідного закладу (установи); здійсненість розроблення в умовах конкретного дослідження.

Під *актуальністю* (від лат. *actualis* – фактично існуючий, сучасний) теми розуміється її значущість, тобто необхідність та невідкладність її розгляду для потреб розвитку економіки держави, галузі, підприємства [43, 85, 100].

*Актуальність* – це значущість, важливість досліджуваної проблеми в суспільному житті й обґрунтування причин, за якими обрана дана тема

*Актуальність* – обов'язкова вимога до будь-якого наукового дослідження, тому воно й повинно починатися з *обґрунтування актуальності* обраної теми. Те, як автор вміє вибрати тему й наскільки правильно він цю тему розуміє й оцінює з погляду сучасності і соціальної значущості, характеризує його наукову зрілість і професійну підготовленість.

Головне – показати суть проблемної ситуації, з чого й буде видна актуальність теми, головним критерієм якої виступає можливість забезпечення найбільшого ефекту.

Тема має вирішувати таке наукове завдання, яке ще не розроблялось, тобто необхідно виключити дублювання.

*Новизна розробки* повинна бути науковою, тобто принципово новою. Все, що вже відомо, не може бути предметом наукового дослідження.

Тема повинна бути *економічно ефективною* і *значимою*. Будь-яка тема прикладних досліджень має забезпечити отримання економічного ефекту для народного господарства. Це одна з важливих вимог. На стадії вибору теми очікуваний економічний ефект може бути визначений орієнтовно.

При *розробці теоретичних досліджень* вимога економічності може замінитись вимогою значимості. Значимість як основний критерій теми, має місце при проведенні досліджень, які визначають престиж вітчизняної науки, або є фундаментом для прикладних наук.

Важливою характеристикою теми є її практичне застосування, якщо це неможливо здійснити, то розробка теми є неефективною. На стадії формування теми наукового дослідження визначають її назву – *змістовний заголовок*. Назву наукової роботи формулюють за допомогою такого правила: в назві теми наукової роботи повинна бути відображена спрямованість (проблема) дослідження (мета або укрупнене завдання), галузь використання, об'єкт дослідження, предмет дослідження.

Із предмета дослідження випливають *мета* й *завдання* дослідження. *Мета дослідження* – це те основне, що намагається зробити дослідник, вона формулюється лаконічно, коротко й гранично точно. *Мета* – це очікуваний кінцевий результат, який зумовлює загальну спрямованість і логіку теоретичного або прикладного дослідження. Мета визначається відповіддю на запитання: «Для чого проводиться дослідження?». Чітке формулювання конкретної мети – одна з найважливіших методологічних вимог до програми наукового дос-

лідження. Мета дослідження полягає у вирішенні наукової проблеми шляхом удосконалення вибраної сфери діяльності конкретного об'єкта. Поставленої мети треба обов'язково досягти, на завершальному етапі досліджень необхідно перевірити, чи відповідають висновки поставленій меті. Мета конкретизується та розвивається у завданнях дослідження. Їх визначають для того, щоб більш конкретно реалізувати його мету.

*Завдання дослідження* повинні розглядатись як основні етапи і, як правило, можуть бути *проранжовані* в такому вигляді [43, 85, 100]:

– виявлення, уточнення, поглиблення, методологічне обґрунтування сутності, природи, структури досліджуваного об'єкта;

– аналіз реального стану предмета дослідження, динаміки, внутрішніх протиріч розвитку в часі й просторі;

– вирішення теоретичних питань, які пов'язані з проблемою дослідження (введення до наукового обігу нових понять, розкриття їх сутності і змісту; розроблення нових критеріїв і показників;

– розроблення принципів, умов і факторів застосування окремих методик і методів);

– виявлення шляхів та засобів удосконалення явища, процесу, що досліджується (практичні аспекти роботи);

– експериментальна перевірка розроблених пропозицій щодо розв'язання проблеми, підготовка методичних рекомендацій для їхнього використання на практиці.

Частіше за все формулювання таких завдань здійснюється у вигляді певного набору підпитань, у формі їхнього перерахування (наприклад, «виявити...», «розробити...», «експериментально перевірити...» тощо). Визначення завдань дослідження – один з найважливіших творчих етапів розв'язання проблеми. Формулювання цих завдань необхідно робити як можна більш ретельно, оскільки опис їхнього вирішення повинен скласти зміст розділів дослідницької роботи. Це важливо також тому, що заголовки таких розділів визначаються із завдань дослідження. Таким чином, *мета і завдання дослідження* повинні бути чітко викладені, передба-



чати розроблення нових напрямків розвитку або удосконалення існуючої методології чи створення нових методик.

Другий етап дослідження носить яскраво виражений індивідуалізований характер. Необхідно обґрунтовано обрати методику дослідження, оскільки з її допомогою можлива технічна реалізація різних методів. У дослідженні мало ставити перелік методів, необхідно їх сконструювати й організувати в систему. Методика залежить від характеру об'єкта вивчення, методології, мети дослідження, застосованих методів, загального рівня кваліфікації дослідника. Завдяки добре продуманій методиці дослідження забезпечується одержання необхідного фактичного матеріалу, на основі аналізу якого й робляться наукові *теоретичні й практичні висновки*, що містять відповіді на розв'язувані в дослідженні завдання. Це становить третій (заключний) етап роботи.

*Наукові висновки* повинні відповідати таким *методичним вимогам*: – бути всебічно аргументовані, узагальнюючі підсумки дослідження; – впливати з накопиченого матеріалу. При формулюванні висновків дослідникові дуже важливо уникнути двох нерідко, що зустрічаються, *помилко*: 1) коли з великого і ємного емпіричного матеріалу робляться досить поверхневі висновки; 2) коли з незначного фактичного матеріалу робляться неправомірно широкі висновки.

### **1.6. Визначення предмета та об'єкта дослідження**

Наукове дослідження предмета пізнання здійснюється, з одного боку, як єдиного цілого, а з іншого – як частини більшої системи (об'єкта), в якій аналізований (досліджуваний) предмет перебуває з іншими предметами пізнання в певних відносинах. Тому в кожному науковому дослідженні виділяються *об'єкт і предмет дослідження*.

*Об'єктом дослідження* прийнято називати те, на що спрямована пізнавальна діяльність дослідника. Це процес, система або явище, яке породжує проблемну ситуацію і обране для дослідження. Об'єкт відносно автономний і має чіткі межі. Виділяють об'єкти природні, соціальні, ідеалізовані.

Досліджувати можна емпіричні та теоретичні об'єкти. На емпіричному рівні вчений має справу з природними і соціальними об'єктами, теорія оперує виключно ідеалізованими об'єктами.

Слід враховувати особливості *об'єкта дослідження*, які впливають на

організацію й ефективність дослідної роботи, а саме:

– обов'язковість непізнаних якостей об'єкта на час виникнення

«проблемної ситуації»;

– динамічність об'єкта дослідження;

– подільність об'єкта.

Визначення: *Об'єкт дослідження* – це процес, система або явище, що породжує проблемну ситуацію і обирається для вивчення.

*Предметом дослідження* є досліджувані з певною метою властивості, характерні для даного об'єкта. Предмет дослідження включає тільки ті зв'язки й відносини, які підлягають безпосередньому вивченню. Предмет пізнання деталізує область дослідження. Предметом дослідження можуть бути причини виникнення процесу або явища, його різноманітні властивості, закономірності розвитку.

Визначення: *Предмет дослідження* – явище або процес, що знаходиться в межах об'єкта та розглядається як елемент або частина об'єкта дослідження.

*Об'єкт і предмет дослідження*, як категорії наукового процесу співвідносяться між собою, як загальне і часткове. В об'єкті виділяється його частина, яка є предметом дослідження. Саме на нього спрямована основна увага науковця, оскільки предмет дослідження визначає тему наукового дослідження. В таблиці 2. наведено приклад об'єкта і предмета дослідження.

Таблиця 1.1

## Об'єкт і предмет дослідження

Об'єкт	Предмет
Процес вимірювання кутової швидкості за допомогою коріолісового вібраційного гіроскопу	Методи підвищення точності вібраційного гіроскопу
Процес оптимального просторового руху безпілотного літального апарату	Метод синтезу оптимального за енерговитратам закону керування
Процес оптимального керування динамічними системами.	Методи оптимального керування динамічними системами із розгалуженими траєкторіями руху.

**1.7. Мета і завдання дослідження**

Одним із важливих творчих етапів вирішення проблеми є визначення мети та завдань наукового дослідження.

*Метою наукового дослідження* є всебічне, достовірне вивчення об'єкта, явища або процесу, їх структури, зв'язків на основі розроблених у науці принципів і методів пізнання; здобуття і впровадження у практику корисних і необхідних для суспільства результатів [8].

*Мета дослідження* – це кінцевий результат, на досягнення якого воно спрямоване. Вона має адекватно відобразитись у темі роботи, містити в узагальненому вигляді очікувані результати та наукові завдання. Чітке формулювання конкретної мети – одна з найважливіших методологічних вимог до програми наукового дослідження. Мета дослідження полягає у вирішенні наукової проблеми шляхом удосконалення вибраної сфери діяльності конкретного об'єкта [85, 8].

*Мета конкретизується* та розвивається у завданнях дослідження. *Завдання* повинні розглядатись як основні етапи наукового дослідження. Завдання підпорядковуються основній меті і спрямовані на послідовне її досягнення. Вони не

можуть формулюватись як «вивчення», «ознайомлення», «дослідження» тощо, оскільки таким чином вказують не на результат наукової розробки, а на окремі технологічні процеси. Завдання дослідження визначають для того, щоб більш конкретно реалізувати його мету.

*Завдання наукового дослідження*, як правило, полягають у [8]:

- вирішенні теоретичних питань, які пов'язані з проблемою дослідження (введення до наукового обігу нових понять, розкриття їх сутності і змісту; розроблення нових критеріїв і показників; розроблення принципів, умов і факторів застосування окремих методик і методів);

- виявленні, уточненні, поглибленні, методологічному обґрунтуванні суттєвості, природи, структури об'єкта, що вивчається; виявленні тенденцій і закономірностей процесів; аналізі реального стану предмета дослідження, динаміки, внутрішніх протиріч розвитку;

- виявленні шляхів та засобів удосконалення явища, процесу, що досліджується (практичні аспекти роботи);

- обґрунтуванні системи заходів, необхідних для вирішення прикладних завдань;

- експериментальній перевірці розроблених пропозицій щодо розв'язання проблеми, підготовці методичних рекомендацій для їх використання на практиці.

Отже, визначення мети і завдань дослідження – важливий етап розв'язання наукової проблеми.

### **Види типових завдань**

Науковий напрям досліджень у будь-якій галузі виробництва визначається колом типових завдань, спрямованих на розвиток певної галузі [8].

*Фізичне завдання* – виявлення закономірностей механічних, електричних, хімічних, теплових явищ, що впливають на якість технологічних процесів, енерговитрати, матеріали.

*Завдання з ідентифікації (опису)* – математичний опис причинних зв'язків між вхідними, змінними і вихідними характеристиками різноманітних процесів.

*Завдання з оптимізації* – знаходження оптимального співвідношення вхідних змінних для забезпечення заданих вимог до процесу.

*Пошукове завдання* – знаходження найбільш ефективного шляху, що веде до задоволення вимог, які виникають.

*Виробничі завдання* – випробування нових конструкцій обладнання; знаходження оптимальних міжремонтних періодів під час експлуатації обладнання та ін.

*Фундаментальні дослідження* – спрямовані на розв'язання фізичних задач, які дозволяють відкрити нові явища і закономірності під час проведення досліджуваних процесів.

*Пошукові дослідження* – пошук шляхів створення нової технології й техніки та нових способів, запропонованих на основі фундаментальних досліджень.

*Прикладні дослідження* – розв'язують завдання ідентифікації та оптимізації й спрямовані на досягнення конкретної, раніше визначеної, практичної мети.

*Промислові дослідження* – виконуються безпосередньо на виробництві. Коли з числа наведених вище завдань визначено тип завдання науково-дослідної роботи, тоді можна ґрунтовно розробляти план послідовного виконання досліджень.

## **1.8. Моделювання як метод наукового дослідження**

Моделювання як метод наукового дослідження виникло і набуло широкого застосування у зв'язку з тим, що у ряді випадків з об'єктивних причин безпосереднє дослідження об'єкта чи системи часто буває не-можливим (коли об'єкт буває малодоступним по своїй природі, коли він ще не існує і треба вибрати найкращий варіант для його створення, коли до-слідження об'єкта вимагає багато часу, економічно не вигідне і т.д). В таких випадках моделювання дозволяє отримати знання про об'єкт, явище або систему, що досліджується, не шляхом безпосереднього вивчення, а шляхом вивчення аналогічного явища на моделі.

Тобто, *моделювання* - це вивчення об'єкта шляхом створення та дослідження його копії (моделі), яка за своїми властивостями відтворює властивості об'єкта,

*Моделью* називається об'єкт, який у деяких відношеннях збігається з оригіналом, і який є засобом подання, пояснення та/або прогнозування його поведінки.

*Модель* – це відтворення чи відображення об'єкту, що відображає, імітує, відтворює принципи внутрішньої організації або функціонування, певні властивості, ознаки чи/та характеристики об'єкта дослідження чи оригіналу.

Класифікація моделей може здійснюватися за різними критеріями і носить умовний характер. Моделі поділяються на два великих класи: реальні (матеріальні, експериментальні) та абстрактні (ідеальні, теоретичні).

Реальні моделі є реальними об'єктами, які у тому чи іншому відношенні можуть замішувати об'єкти-оригінали. При цьому вони відтворюють ті характеристики та властивості останніх, що цікавлять дослідника, і є більш зручними для дослідження. Прикладами таких моделей можуть бути моделі літаків, призначені для аерогідродинамічних випробувань, макети архітектурних споруд, еквівалентні електричні схеми напівпровідникових приладів тощо. Ще одним прикладом реальних моделей є макетні моделі – це реально існуючі моделі, що відтворюють модельовану систему в певному масштабі.

Абстрактні (ідеальні) моделі описують б'єкт дослідження за допомогою певної мови. Абстрактність цих моделей проявляється в тому, що компонентами моделі є поняття (образи, креслення, схеми, графіки, рівняння, алгоритми), а не фізичні елементи. Ці моделі мають форму функціональних залежностей між групами параметрів досліджуваного об'єкту. За ступенем абстрагування математичні моделі знаходяться на найвищому рівні ієрархії.

### **Класифікація математичних моделей**

Стрімкий розвиток методів математичного моделювання і багатогранність галузей їх використання призвели до по-

яви великої кількості моделей різного типу. Тому, виникла необхідність у класифікації математичних моделей. Під класифікацією математичних моделей розуміють їх поділ на види, групи, класи на підставі певних ознак (наприклад, математичних засобів, що використовуються; основних параметрів математичної моделі, змістовної побудови), хоча чіткої межі між окремими ознаками не існує.

Так, формально класифікацію математичних моделей можна здійснювати в залежності від [43]:

- характеру відображуваних властивостей об'єкта (за змістовною побудовою);
- способу побудови моделі;
- складності об'єкта моделювання;
- оператора моделі;
- вхідних та вихідних параметрів;
- мети моделювання оптимізаційної моделі;
- способу дослідження моделі.

***Класифікація в залежності від характеру відображуваних властивостей об'єкта.*** В залежності від характеру відображуваних властивостей об'єкта розрізняють: *структурні* та *функціональні* моделі.

*Структурні* моделі представляють об'єкт як систему зі своєю структурою і механізмом функціонування.

*Функціональні* моделі відображають тільки зовні сприйману поведінку (функціонування) об'єкту. В їх граничному виразі вони називаються також моделями «*чорної скрині*». В такому випадку описують з відомою точністю зв'язок між входами і виходом системи на основі експериментальних даних без аналізу внутрішньої структури системи, яку можна розглядати як «чорну скриню».

***Класифікація в залежності від способу побудови моделі.*** В залежності від способу побудови моделі розрізняють *теоретичні* і *емпіричні*.

*Теоретичні моделі* виводяться математично на основі знання первинних законів класичної механіки, теорії автоматичного керування електродинаміки, хімії і т.д.

*Емпіричні моделі*, одержані з реального життя на основі статистичної обробки результатів спостережень. Емпіричні

моделі є результатом обробки в алгоритмічній або аналітичній формі вхідних та вихідних даних експерименту. Тобто побудова емпіричної математичної моделі зводиться до розв'язування задач ідентифікації. На основі статистичного аналізу експериментальних даних або спостережень можна будувати регресійні моделі.

**Класифікація в залежності від складності об'єкта моделювання.** Об'єктом моделювання може виступати як деяке матеріальне тіло так і природний технічний процес або явище. Тому всі об'єкти моделювання можна розподілити на дві групи: *прості* та *об'єкти-системи*.

Для *простого об'єкта* при моделюванні не розглядається внутрішня будова об'єкта, по виділяються його складові елементи, наприклад, простим об'єктом є матеріальна точка у класичній механіці.

Для *складних систем* характерна наявність великої кількості взаємодіючих між собою елементів і водночас з оточуючим середовищем вони взаємодіють як єдине ціле. системи.

Моделі об'єкти-систем, які враховують властивості та поведінку окремих елементів, а також зв'язки між ними, називаються структурними.

*Структурні динамічні моделі* виділяють в окремий клас - імітаційні моделі, при цьому системи складаються зі скінченної кількості елементів зі скінченною кількістю станів та скінченною кількістю зв'язків. Моделювання взаємодій елементів системи здійснюється за допомогою алгоритму, що реалізується на ЕОМ.

**Класифікація в залежності від оператора моделі.** Математичні моделі можуть бути як *алгоритмічними*, так і *аналітичними*, тобто оператор може бути алгоритмом або записуватися у вигляді деяких функціональних співвідношень і логічних умов. Якщо зв'язки між параметрами об'єкта можна виразити в аналітичній формі, то маємо *аналітичні* математичні моделі.

При *алгоритмічному* підході сам об'єкт розбивається на деякі елементи. У цьому випадку система математичних співвідношень для об'єкта-системи в цілому не записується, а



замінюється деяким алгоритмом, який моделює поведінку системи через взаємодію моделей окремих елементів системи. Алгоритм, на основі вхідних даних, дозволяє відтворити реальні явища в системі й узнати поведінку складної системи в конкретній ситуації.

Застосування алгоритмічних моделей можливе лише при наявності ЕОМ, а їх використання аналогічне проведенню експериментів із реальним об'єктом, тільки замість експерименту з реальним об'єктом проводять обчислювальний експеримент із алгоритмічною моделлю.

### **Запитання**

1. Що спільного і в чому різниця між «великими», «динамічними» і «кібернетичними» системами?
2. Яка різниця між фундаментальними і прикладними дослідженнями?
3. Надайте визначення поняття методології.
4. В чому різниця методу і алгоритму?
5. Які етапи наукового дослідження?
6. Надайте визначення предмету і об'єкту дослідження.
7. Поясніть зв'язок мети і завдання дослідження, моделі і моделювання.
8. За якими ознаками надано класифікацію моделей?

## Розділ 2

# ВИКОРИСТАННЯ СИСТЕМНОГО ПІДХОДУ ДЛЯ ДОСЛІДЖЕННЯ ДИНАМІЧНИХ ОБ'ЄКТІВ

### 2.1. Визначення системи

Першим кроком розв'язання задачі дослідження динамічного об'єкту (ДО) є її формалізація. На цьому етапі необхідно поставити задачу. Постановка полягає у відображенні невизначеної ситуації, що пов'язана з реальним об'єктом, у формалізовану задачу, визначену на множині кількісно порівнянних елементів. Такими елементами є система, процеси, що в ній протікають, критерії (цілі) і стратегії їх оптимізації (досягнення цілей).

З умов фізичної реалізованості подані у праці [20] фундаментальні визначення стаціонарної, дискретної, безперервної, скінченновимірної, лінійної, гладкої та динамічної систем з точки зору їх зовнішньої поведінки. Для гладких (а реальні системи всі гладкі) систем доведено теорему про те, що перехідна функція стану, тобто відображення

$$\mathbf{T} \times \mathbf{T} \times \mathbf{X} \times \mathbf{\Omega} \rightarrow \mathbf{X}$$

водночас є розв'язком диференціального рівняння

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, u), \quad (2.1)$$

де  $x \in X$ ,  $u(t) = \omega(t) \in \Omega$ ;  $t \in T$ ;  $T$  — впорядкована множина моментів часу;  $\Omega, X$  — множина вхідних впливів і змінних стану.

*Стан системи* — це та мінімальна інформація про минуле, яка необхідна для повного опису майбутньої поведінки (тобто вихідних змінних) системи, якщо поведінка її вхідних змінних відома, починаючи з поточного часу  $t_0$ .

Якщо множина  $X$  належить скінченновимірному простору, то модель (2.1) являє собою скінченновимірну систему нелінійних нестационарних диференціальних рівнянь першого порядку. Із системи (2.1) за певних припущень можуть бу-

ти отримані системи лінійних і (або) стаціонарних рівнянь (2.2). Чим вужча область визначення змінних  $\{X, \Omega, T\}$ , тим ближче в просторі  $X$  буде спрощена модель (2.2) до повної (2.1).

Для гладкої системи (2.1) справедливе існування таких  $X_1 \subset X, \omega_1 \subset \Omega, T_1 \subset T$ , що (з точністю до наперед заданої малої похибки  $\varepsilon$ ) системі (2.1) буде еквівалентна система лінійних диференціальних рівнянь із матрицями  $A$  і  $B$  постійних коефіцієнтів:

$$\dot{x}_1(t) = Ax_1(t) + Bu_1(t); \quad y_1(t) = Cx_1(t), \quad (2.2)$$

де  $\dot{x}_1(t)$  — вектор-функція похідних  $\{\dot{x}_{1i}(t)\}$ ,  $i = \overline{1, n}$ ;  $x_1(t)$  — вектор-функція  $\{x_{1i}(t)\}$ ,  $i = \overline{1, n}$ ;  $u_1(t)$  — вектор-функція  $\{u_{1j}(t)\}$ ,  $j = \overline{1, m}$ ;  $y_{1i}(t)$  — вектор-функція вимірювань  $\{y_i(t)\}$ ,  $i = \overline{1, r}$ ;  $A, B, C$  — матриці розміру  $(n \times n), (n \times m), (r \times n)$  відповідно.

Структура і рангові властивості матриць  $A, B, C$  визначають умови *керуваності, спостережуваності й ідентифікаційності* системи (2.2) [41].

*Критерій оптимальності або мета*, поставлена системою більш високого рівня ієрархії, може мати «розмитий» характер. Однак у багатьох випадках формалізація критерію (мети) досягається шляхом завдання функціонала, який однозначно визначає ефективність поведінки системи. Мета системи — забезпечення екстремального значення цього функціонала. Під функціоналом  $I$  розуміють відображення

$$\mathbf{T} \times \mathbf{T} \times \mathbf{X} \times \Omega \rightarrow \mathbf{R},$$

де  $R$  — множина дійсних чисел.

Системі (2.1) для фіксованих початкових  $t_0 \in T$  і кінцевих  $t_1 \in T$  моментів часу, станів  $x_0 \in X, x_1 \in X$ , поведінки системи  $x(t)$ , викликані не нульовими початковими умовами

та керувальним впливом  $u(t)$ , відповідає конкретне дійсне число  $I$  з множини  $R$ .

Керувальний вплив  $u^*(t)$  оптимальний, якщо число  $I$  з урахуванням початкових умов, рівняння (2.1) та інших обмежень на  $x(t)$  і  $u(t)$  приймає екстремальне (мінімальне або максимальне) значення, де  $I^* \in R$ .

Для знаходження оптимальної стратегії управління  $u^*(t)$  ре-альним об'єктом необхідна його модель (2.1), тобто структура і параметри функціонального відображення  $f$ .

Визначення відображення  $f$  у рівнянні (2.1) за результатами вимірів  $x(t)$ ,  $u(t)$  є завданням ідентифікації. Оптимальність моделі  $\hat{f}$  відображення  $f$  оцінюється критерієм якості ідентифікації  $J$ , який також є функціоналом, що відображає множини реалізацій або конкретні реалізації  $x(t)$  і  $x_m(t)$  в дійсне число  $J$ , де  $x_m(t)$  є розв'язком рівняння моделі

$$\frac{dx_1}{dt} = \hat{f}(t, x_1, u) \quad (2.3)$$

для спільного з об'єктом вхідного впливу  $u(t)$ .

Оскільки в загальному випадку  $\hat{f} \neq f$ , то оптимальне для моделі (2.3) значення  $\hat{I}^*$  отримане при керувальному впливі на об'єкт  $u(t)$ , буде дещо гірше істинного оптимального значення  $I^*$ .

Модель (2.3), побудовану з урахуванням не тільки функціонала  $J$ , але і  $I$ , назвемо цілеорієнтованою [69, 70].

Якщо на множині  $\{f_i\}$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) допустимих відображень відображення  $\hat{f}$  (2.3) для фіксованого управління  $u(t)$  дає екстремальне значення  $\hat{I}^*$ , тобто

$$\hat{f} = \underset{\hat{f}_i \in \{\hat{f}_i\}}{\arg \text{extr}} I,$$

то таку модель назвемо цілеорієнтованою оптимальною.

Близькість моделі до цілеорієнтованої оптимальної визначається близькістю вимірюваних змінних  $\hat{x}(t), \hat{u}(t)$  до дійсних змінних  $x(t)$  і  $u(t)$  реального об'єкта. При вирішенні задачі ідентифікації в (2.3) і в  $J(x, x_m)$  підставляють не  $x(t)$  і

$u(t)$ , а їх оцінки  $\hat{x}(t), \hat{u}(t)$ , формування яких є задачею ідентифікації сигналів об'єкта. Оцінки  $\hat{x}(t), \hat{u}(t)$  сигналів  $x(t)$  і  $u(t)$  в (2.1) отримують за допомогою фільтрів  $f_\Phi$ :

$$\frac{d\hat{z}}{dt} = f_\Phi(t, \hat{z}, z), \quad (2.4)$$

де  $z(t)$  — вектор-функція вимірних первинними перетворювачами сигналів  $x(t), u(t)$ ,  $z = \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} N_x \\ N_u \end{bmatrix}$ ,  $N_x, N_u$  — похибки вимірювання  $x$  і  $u$  відповідно.

Оптимальність фільтрів (2.4) оцінюється критерієм якості фільтрації  $J_\Phi$  — функціоналом від сигналів  $\hat{z}, z$  або їх спектральних характеристик.

Оскільки  $f_\Phi$  не дає ідеального перетворення  $z$  у  $(x, u)$ , то від критерію  $J_\Phi$  в задачі ідентифікації сигналів  $\hat{z}, z$  буде залежати значення критерію  $J$  в задачі ідентифікації відображення  $\hat{f}$  в (2.3), від якого (у свою чергу) залежить значення критерію  $I$  якості управління реальним об'єктом. Так само як і для моделі (2.3), для фільтра (2.4) введемо поняття цілеорієнтованості та оптимальності. Фільтр (2.4) *цілеорієнтований*, якщо при його побудові певним чином бралася до уваги задача ідентифікації  $\hat{f}$  в (2.3). Якщо на множині припустимих відображень  $\{f_{\Phi_i}\}$  відображення  $f_\Phi$  в (2.4) за фіксованого  $\hat{f}$  забезпечує екстремальне значення  $J^*$ , тобто

$$f_{\Phi_i} = \arg \underset{f_{\Phi_i} \in \{f_{\Phi_i}\}}{\text{extr}} J,$$

то фільтр (2.4) буде *цілеорієнтованим оптимальним*.

Оптимізація функціоналів  $I, J, J_\Phi$  пов'язана з поняттям *релаксаційного процесу* [39]. Множина  $\{Q_k\}$ ,  $k \geq 0$ , кожен елемент якої належить деякій (зазвичай опуклій) області  $G$  нормованого простору, називають *релаксаційним процесом* (РП) щодо оптимізуємої функції  $F(Q_k)$ , якщо послідовність  $F(Q_k)$ , для упорядкованого за значенням  $k$  також впорядко-

вана. Так, в задачі мінімізації послідовність  $F(Q_k)$  така, що  $F(Q_0) \geq F(Q_1) \geq F(Q_2) \geq \dots$ . РП збігається за функціоналом, якщо

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (F(Q_k) - F(Q^*)) = 0,$$

і просто збігається, якщо

$$\lim_{k \rightarrow \infty} Q_k = Q^*,$$

де  $Q^*$  — істинне значення.

Надалі визначення РП поширимо на випадок, якщо елементи  $Q_k$  належать області  $G$  простору, у якому не задано поняття норми або відстані, знак  $\geq$  розуміється як символ відношення порядку. Так, наприклад, в задачі ідентифікації при введенні підмножини структур  $\Sigma$  моделей і множин методів  $Opt$  оцінювання вектора  $\beta$  параметрів моделі  $(\Sigma, \beta)$  РП не є строго релаксаційним. Множину  $\{Q_k\}$ ,  $k \geq 0$ , назвемо РП щодо  $F(Q_k)$ , якщо для будь-якого  $k > 0$ , існує таке значення  $j > 0$ , що  $F_{k+j} \leq F_k$ . Такий РП не є релаксаційним, і збіжність його за функціоналом  $F$  або за  $Q_k$  залежить від розмірності і впорядкованості підмножини ненормованих елементів (у нашому випадку це  $\{\Sigma, Opt\}$ ).

*Системою ідентифікації в загальному вигляді* будемо називати прямий добуток підмножин  $\{\Sigma, \beta\}$ ,  $\{Opt, \alpha\}$ ,  $\{J\}$ ,  $\{I\}$ ,  $\{T\}$ , що позначається як  $\{\{\Sigma, \beta\}, \{Opt, \alpha\}, \{J\}, \{I\}, \{T\}\}$  і наділений структурою, яка дозволяє реалізувати релаксаційний процес  $Q_k$  відносно показника  $F$ , такий що  $F_{k+j} \leq F_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ ;  $j > 0$ ;  $Q_k \in \{\{\Sigma, \beta\}, \{Opt, \alpha\}\}$ ,  $F_k \in \{\{J\}, \{I\}\}$ . Тут  $\{\Sigma, \beta\}$  — підмножина моделей;  $\{Opt, \alpha\}$  — підмножина методів оцінювання вектора  $\beta$  параметрів моделей  $\{\Sigma, \beta\}$ ;  $\alpha$  — вектор параметрів методу  $Opt$ ;  $\{J\}$  — підмножина оптимізуємих за  $\beta$  методами  $\{Opt, \alpha\}$  функціоналів від  $\varepsilon(\beta, t)$ ;  $\varepsilon(\beta, t)$  — різниця вимірюваних координат реального об'єкта  $\Sigma_\infty$  і

моделі;  $\{I\}$  — підмножина основних функціоналів, що визначають якість вирішення основної задачі для реальної системи  $\Sigma_\infty$  з використанням моделі  $\{\Sigma, \beta\}$ ;  $\{T\}$  — підмножина моментів  $t_k$  часу, на якому реальну систему  $\Sigma_\infty$  представлено набором даних  $\{u(t_k), y(t_k)\}$  у вигляді системи з точки зору її зовнішнього поведіння [20].

У практичному застосуванні система ідентифікації тим ефективніше, чим менше потрібно для її роботи апріорної інформації. Забезпечення необхідної якості ідентифікації досягається адаптацією [26, 27, 69, 70], що полягає в цілеспрямованій зміні одного, декількох або всіх елементів підмножини  $\{Q_k\}$  з метою досягнення екстремуму головного показника  $F$ . За інших рівних умов, чим краще алгоритм адаптації, тим ефективніше система. Якщо не враховувати фактор складності, то при адаптації  $\{Q_k\}$  результат тим ефективніший, чим ширша підмножина  $\{Q_k\}$ . У разі врахування в показнику  $F$  складності системи існує оптимальна за  $F$  потужність підмножини  $\{Q_k\}$ .

Зазвичай в адаптивних системах ідентифікації підмножина  $\{Opt, \alpha\}$  за типом методу  $Opt$  одноелементна. Спільним для всіх видів систем ідентифікації є наявність РП  $\{\beta_k\}$  щодо показника  $J$ , різним — склад підмножин  $\{Q_k\}$  і  $\{F_k\}$ . У табл. 2.1 визначено різні за  $\{Q_k\}$  і  $\{F_k\}$  системи ідентифікації.

1. Системи ідентифікації у вузькому сенсі (сі) реалізують РП  $\{\beta_k\}$  щодо  $J$  за постійних  $\Sigma$ ,  $Opt$ ,  $\alpha$  і порожній множині  $I$ , тобто  $Q_k = \{\beta_k\}$ ,  $F = J$ . Тут задача ідентифікації є еквівалентною задачі оптимізації функції  $J(\beta_k)$ , яка, залежно від виду  $J$ , може бути вирішена методами теорії лінійного або нелінійного оцінювання або алгоритмами математичного програмування.

Таблиця 2.1

## Систематизація систем ідентифікації

№ з/п	Тип сигналу	$\{Q_k\}$				$\{F_k\}$	
		$\beta$	$\Sigma$	$\alpha$	$Opt$	$J$	$I$
1	сі	$\{\beta_k\}$	$\Sigma$	$\alpha$	$Opt$	$J$	–
2	СІ	$\{\beta_k\}$	$\{\Sigma\}$	$\alpha$	$Opt$	$J$	–
3	асі	$\{\beta_k\}$	$\Sigma$	$\{\alpha_k\}$	$Opt$	$J$	–
4	АСІ	$\{\beta_k\}$	$\{\Sigma\}$	$\{\alpha_k\}$	$Opt$	$J$	–
5	басі	$\{\beta_k\}$	$\Sigma$	$\{\alpha_k\}$	$\{Opt\}$	$\{J_k\}$	$I$
6	БАСі	$\{\beta_k\}$	$\{\Sigma\}$	$\{\alpha_k\}$	$\{Opt\}$	$\{J_k\}$	$I$
7	СС	$\{\beta_k\}$	$\{\Sigma\}$	$\{\alpha_k\}$	$\{Opt\}$	$\{J_k\}$	$\{I_q\}$

2. Системи ідентифікації в широкому сенсі (СІ) реалізують РП  $\{\Sigma_k, \beta_k\}$  щодо  $J$  за постійних  $Opt$   $\alpha$ , і порожній множині  $I$ , тобто  $Q_k = \{\Sigma_k, \beta_k\}$ ,  $F = J$ . Наприклад, у працях [67, 69, 70] розглянуто динамічні ортогональні, ноніусні або регресійні моделі з вектором  $\beta_k$  змінної розмірності, для яких оптимальна по  $J$  пара  $\{\Sigma^*, \beta^*\}$  визначається за умови

$$\{\Sigma^*, \beta^*\} = \arg \min_{\{\Sigma_k, \beta_k\}} J\{\Sigma_k, \beta_k\}.$$

3. Адаптивні системи ідентифікації у вузькому сенсі (асі) реалізують РП  $\{\beta_k, \alpha_k\}$  щодо  $J$  при постійному  $Opt$  і порожній множині  $I$ , тобто  $Q_k = \{\beta_k, \alpha_k\}$ ,  $F = J$ .

Так, системи [21, 2, 61], що використовують прискорений градієнтний спуск  $\{\beta_k\}$  по  $J$ , як  $\alpha_k$  мають параметр регуляризації, що оптимізується за допоміжної умови мінімуму різниці середньоквадратичних значень похибок для двох однотипних моделей, що налаштовуються однаковими алгоритмами  $Opt$ , але відрізняються параметром  $\alpha$ : для першого  $\alpha = \alpha_k$ , для другого  $\alpha = \alpha_k + \Delta$ , де  $\Delta > 0$ ,  $\alpha_k > 0$ .



4. Адаптивні системи ідентифікації в широкому сенсі (АСІ) реалізують РП  $\{\Sigma_k, \beta_k, \alpha_k\}$  щодо показника  $J$  при постійному  $Opt$  і порожній множині  $I$ , тобто  $Q_k = \{\Sigma_k, \beta_k, \alpha_k\}$ ,  $F = J$ . Наприклад, системи вибору «найкращої регресії», при оцінюванні вектора  $\beta$ , який розширюється за розмірністю, із застосуванням регуляризувального параметра  $\alpha$ , який підбирається за алгоритмом гребеневої регресії [15].

5. Багаторазово адаптивні системи ідентифікації у вузькому сенсі (басі) реалізують щодо основного показника  $I$  РП  $\{\beta_k, Opt_k, \alpha_k\}$  у вигляді композиції двох РП:

а) РП  $\{\beta_{kn}\}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , щодо  $J_k$ ;

б) РП  $\{Opt_k, \alpha_k, I_k\}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , щодо  $I$ ; тобто  $Q_k = \{\beta_k, Opt_k, \alpha_k\}$ ,  $F = \{\{I_k\}, \{I\}\}$ . Поняття багаторазовості пов'язано з повторенням РП  $\{\beta_{kn}\}$  для кожного елемента  $\{Opt_k, \alpha_k, I_k\}$  РП більш високого рангу.

Часто кожному показнику  $J_k$  відповідає конкретний метод  $Opt$  або для евристичних алгоритмів показник  $J_k$  взагалі відсутній, тоді відносно  $I$  оптимізується пара «метод — його параметри»  $\{Opt_k, \alpha_k\}$ .

Прикладом може слугувати система «БАСІ-1» [6]; [20], у якій для заданої за одним із п'яти показників  $I$  (або їх зваженої суми), що включають критерії регулярності та незміщеності [15], точності прогнозування по моделі і т. ін., із семи методів  $\{Opt_k\}$  і їх параметрів  $\{\alpha_k\}$  — визначався оптимальний елемент  $\{\beta^*, Opt^*, \alpha^*\}$  згідно з пп. 5, а і б.

6. Багаторазові адаптивні системи ідентифікації в широкому сенсі [25] (БАСІ) реалізують відносно головного показника  $I$  РП  $\{\Sigma_k, \beta_k, Opt_k, \alpha_k\}$  у вигляді композиції двох РП:

а) РП  $\{\beta_{kn}\}$   $n = 1, 2, \dots$ , щодо  $J_k$ ;

б) РП  $\{\Sigma_k, Opt_k, \alpha_k, I_k\}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , щодо  $I$ , тобто  $Q_k = \{\Sigma_k, \beta_k, Opt_k, \alpha_k\}$ ,  $F = \{\{I_k\}, I\}$ , де  $I$  — показник більш високого рівня.

Прикладом БАСІ (для одноелементної множини  $\{Opt\}$ ) є системи, побудовані на основі методу групового обліку аргументів [15], у яких структуру  $\Sigma$  і параметри  $\beta$  підбирають з умови екстремуму  $I$ . За інших рівних умов обґрунтоване [20] розширення множини  $\{Opt_k\}$  дозволить отримати моделі, більш ефективні за критерієм  $I$ .

Якісною відмінністю систем за пп. 5, 6 є їх цілеорієнтація на показник  $I$ , який регулює і оптимізує задачу вибору  $\{\Sigma^*, \beta^*, Opt^*, \alpha^*\}$ . У багаторазово адаптивних системах знімається традиційне для систем за пп. 1–4 питання: *як оцінити якість моделі, отриманої в результаті ідентифікації* [98]? Якість моделі оцінюють за показником  $I$ . Це найбільш об'єктивна оцінка, оскільки найкраща та модель, застосування якої дає найкраще рішення основної задачі, якість якої визначено показником  $I$ .

7. Системи керування, що самоорганізуються (СС) реалізують щодо деякого показника  $\Lambda(I)$  РП  $\{\Sigma_k, \beta_k, Opt_k, \alpha_k, J_k, I_k\}$ , у вигляді композиції трьох РП:

а) РП,  $\{\beta_{qkn}\}$ ,  $n = 1, 2, \dots$  ( $q$  і  $k$  постійні), щодо  $J_{qk}$  зі стаціонарною точкою

$$\beta_{qk} = \arg \text{extr}_{\beta_{qkn}} J_{qk}(\beta_{qkn}, \Sigma_q, Opt_{qk}, \alpha_{qk}) = \arg J_{qk}^*;$$

б) РП  $\{J_{qk}^*(\beta_{qk}, \Sigma_{qk}, Opt_{qk}, \alpha_{qk})\}$ ,  $k = 1, 2, \dots$  ( $q$  постійне), щодо  $I_q$  зі стаціонарною точкою

$$J_q^* = J_q(\beta_q, \Sigma_q, Opt_q, \alpha_q) = \arg \text{extr}_{I_q} (J_{qk}^*) = \arg I_q^*;$$

в) РП  $\{J_q^*(\beta_q, \Sigma_q, Opt_q, \alpha_q)\}$ ,  $q = 1, 2, \dots$ , щодо показника  $\Lambda$  більш високого рівня зі стаціонарною точкою

$$I^* = \arg \text{extr } \Lambda(I_q^*) = \arg \Lambda^*,$$

тобто  $Q_k = \{\Sigma_k, \beta_k, Opt_k, \alpha_k\}$ ,  $F = \{J, I_k\}$ .

**Приклад 2.1.** Задача вдосконалення процесу автоматизованого керування складним енергетичним агрегатом.

Нехай  $\Lambda$  — показник ефективності підприємства  $\{I_q\} = \{I_1, I_2\}$ ;  $I_1$  — показник якості стабілізації технологічних змінних  $x$  агрегату в області робочих режимів  $x_0$ , що задаються експертами (технологами);  $I_2$  — показник якості роботи агрегату;  $\{J_{qk}\}$  — множина показників якості ідентифікації локальними моделями  $\{\Sigma_{q1}, \beta_{q1}\}$ , що відображають перетворення управління  $u$  в  $x$  ( $k = 1$ ), і моделями якості  $\{\Sigma_{q2}, \beta_{q2}\}$ , що відображають перетворення  $u$  в  $I_2$  ( $k = 2$ ).

На першому етапі автоматизації ( $I_q = I_1$ ) за  $J_{1k}$  визначають локальні моделі  $\{\Sigma_{1k}, \beta_{1k}\}$  за допомогою найпростіших методів ідентифікації  $\{Opt_{1k}, \alpha_{1k}\}$ . За моделями  $\{\Sigma_{1k}, \beta_{1k}\}$  підбирають локальні регулятори, стабілізуючі  $x$  в області  $x_0$  за критерієм мінімуму  $I_2$ . Згідно РП пп. 7а, 7б визначають оптимальний по  $I_1$  елемент.

На другому етапі, після автоматизації процесу збирання і обробки інформації, переходять до побудови більш повної моделі  $\{\Sigma_{q2}, \beta_{q2}\}$ , що пов'язує  $I_2$  зі змінними  $x$ ,  $u$ . По моделям  $\{\Sigma_{q2}, \beta_{q2}\}$ , які містять в собі моделі  $\{\Sigma_{q1}, \beta_{q1}\}$ , уточнюють параметри локальних регуляторів та оптимальне значення  $x_0^*$  робочих режимів  $x_0$ .

Далі оптимальний (вже за  $I_2$ ) елемент  $\{\Sigma_2^*, \beta_2^*, Opt_2^*, \alpha_2^*\}$  визначають уже за результатом РП пп. 7а, 7б. Таким чином, перехід від  $\Sigma_1$  до  $\Sigma_2$  привів до заміни (згідно РП п. 7в) основного показника  $I_1^*$  на  $I_2^*$ .

## 2.2. Багаторівнева декомпозиція систем ідентифікації об'єкту

Декомпозиція є зручним прийомом, що дозволяє точно або наближено представити систему великої розмірності зі складною мережею прямих і зворотних зв'язків системою більш простих підсистем, які краще піддаються формалізації. Уявімо (рис. 2.1) завдання проектування системи і саму систему оптимального адаптивного управління реальним об'єктом у вигляді трьох підзадач і відповідних їм підсистем:

- оптимального управління реальним об'єктом;
- ідентифікації відображення вхід—вихід об'єкту;
- ідентифікації сигналів об'єкту.

Елементи всередині кожної підсистеми утворюють замкнену за місцевим показником якості систему оптимізації, працюючу за алгоритмом систем зі зворотнім зв'язком:

- видача керуючого впливу на об'єкт ;
- вимір або розрахунок реакції об'єкту ;
- оцінка оптимальності підсистеми за критерієм її

рівня.

Між собою підсистеми об'єднані прямими (знизу вгору) і зворотними (згори вниз) зв'язками. Крайні підсистеми об'єднані такими самими зв'язками з не розглянутими тут системами більш низького та високого рівнів. Наведемо позначення і фізичний зміст елементів, внутрішніх і зовнішніх прямих і зворотних зв'язків.

*Підсистема ідентифікації сигналів об'єкту* має такі елементи та зв'язки:

$J_\Phi$  — формувач показника якості ідентифікації (фільтрації) вектора  $x$  сигналів об'єкта;

$\Sigma_\Phi$  — фільтр, що перетворює сигнал виходу первинного перетворювача  $X_{\text{пн}}$  в його оцінку  $\hat{X}$  ;

*Opt*  $J_\Phi$  — оптимізатор по  $J_\Phi$  структури  $\Sigma_\Phi$  і вектора  $\beta_\Phi$  параметрів фільтра;

$\Sigma_{\text{пн}}$ ,  $\beta_{\text{пн}}$  — інформація про структуру і параметри первинних перетворювачів (датчиків) фізичних змінних об'єкта

$\Sigma_{\infty}$  — передаточна функція датчика, статична (тарувальна) характеристика і т. д.;

$\delta X_{\text{ин}}$  — інформація про похибки датчиків: систематичні, випадкові, часові, частотні та ймовірнісні характеристики (закон розподілу, його параметри, кореляційні функції і т. д.);

$J, J_{\phi}$  — інформація про критерії оптимальності систем ідентифікації об'єкта і його сигналів:  $J$  надходить по каналу зворотного зв'язку в дану підсистему,  $J_{\phi}$  — в підсистему первинних перетворювачів.

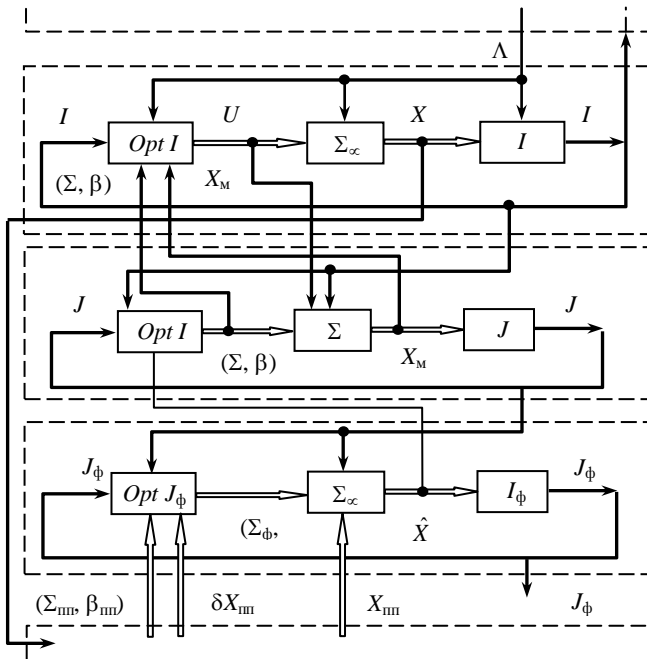


Рис. 2.2. Три рівні оптимізації в багаторівневій системі

*Підсистема ідентифікації об'єкта* містить:

$J$  — формувач показника якості ідентифікації об'єкта;

$\Sigma, \beta$  — модель об'єкта зі структурою  $\Sigma$  і вектором  $\beta$  параметрів;

$Opt J$  — оптимізатор за показником  $J$  структури  $\Sigma$  і вектора  $\beta$  параметрів моделі;

$\Sigma_\infty, \beta_\infty, \hat{X}$  — інформація про фільтр і оцінку  $\hat{X}$  сигналу  $X$ , отриману з сигналу  $X_{\text{пн}}$  первинного перетворювача;

$\Sigma, \beta, X_m$  — інформацію про модель  $(\Sigma, \beta)$  об'єкта управління і оцінку  $X_m$  сигналу  $X$ , отриману за сигналом  $\hat{X}$  фільтра;

$I, J$  — коригувальні зворотні зв'язки з системи управління в систему ідентифікації і з системи ідентифікації об'єкта в систему ідентифікації сигналів.

*Підсистема оптимального управління об'єктом містить:*

$I$  — формувач показника якості управління;

$\Sigma_\infty$  — реальний об'єкт (його вхідні і вихідні змінні  $u$  і  $x$ );

$Opt I$  — оптимізатор показника  $I$  по керуючому впливу  $u$ ;

$x$  — вихід об'єкту — вхід підсистеми первинних перетворювачів;

$u$  — вхід об'єкту і моделі;

$\Lambda, I$  — коригувальні зворотні зв'язки із системи більш високого рівня в систему управління і з системи управління в систему ідентифікації відповідно.

Кожен елемент (оптимізатор, модель, формувач критерію) має три складові:

– безпосередньо елемент, зав'язаний на розв'язанні своєї задачі;

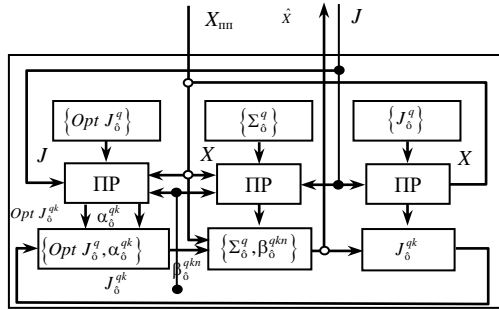
– множину таких елементів, упорядкованих за їх властивостями;

– проєктор (ПР), що вибирає з множини елементів опти-мальний за показником якості системи більш високого рангу.

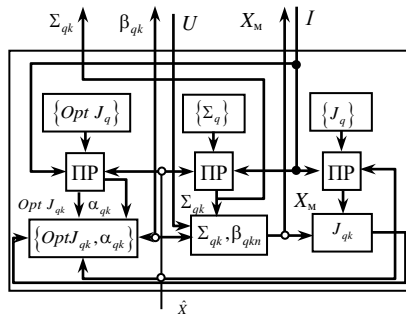
На рис. 2.2 подано схеми задач проектування і самі системи I, II і III рівнів. Індекси  $q, qk, qkn$  відповідають позначенням кроків композиційного релаксаційного процесу оптимізації системи. Наприклад,  $q$  — номер ітерації зміни виду показника  $I$ ;  $qk$  — відповідно зміни  $J$ ;  $qkn$  — номер кроку в оптимізації  $\beta$  в системі ідентифікації об'єкта.

Уся система складається з 27 елементів, серед яких елементи  $\{Opt J_0^q\}$ ,  $\{Opt J_q\}$ ,  $\{Opt I_q\}$  — множини методів оптимізації, критеріїв  $\{J_0^q\}$ ,  $\{J_q\}$ ,  $\{I_q\}$  і моделей  $\{\Sigma_0^q\}$ ,  $\{\Sigma_q\}$ ,  $\{\Sigma_\infty^q\}$ , складаються з множин наявних упорядкованих елементів. Для конкретного критерію теоретично існує єдиний оптимальний набір цих елементів і їх параметрів. Завдання полягає у виборі «відповідного» (близького за  $I_q$  до оптимального) набору за обмежених витрат на його пошук в системі. Для повної апіорної невизначеності про всі елементи системи та їх властивості проблема знаходження «підходящого» набору може здійснюватися методом перебирання варіантів. Повне перебирання гарантує відшукування оптимального набору, якщо в критерій оптимальності не входять витрати на пошук оптимуму. Якщо ці витрати істотні, то вони впливають на оптимальність рішення. Тому, для того щоб дана декомпозиція не призвела до ускладнень, необхідний ретельний аналіз підсистем та їх елементів, який дозволяє з допомогою проєкторів ПР систем кожного рівня (рис. 2.2) істотно звузати вихідні множини елементів до обмежених підмножин претендентів на оптимальні для конкретної ситуації.

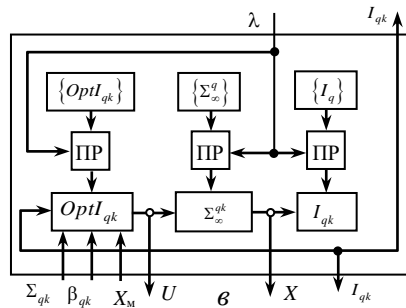
*Принцип декомпозиції* ефективний для складних систем та їх елементів. Так, неможливість одним функціоналом сформулювати всі вимоги до створюваної системи призвела до розв'язання на практиці задачі декомпозиції цього неформалізованого критерію на множини критеріїв, які піддаються чіткій формалізації, і розв'язанням багатокритеріальної задачі оптимізації. Таке розв'язання не дає єдиного результату. Воно лише дозволяє виділити обмежену область (підмножина Парето) у просторі критеріїв-функціоналів від оптимізованих змінних. Остаточний варіант розв'язання, що обирається проєктувальником, належить цій під-множині.



*a*



*б*



*в*

Рис. 2.2. Цілеорієнтована підсистема:  
*a* — ідентифікації сигналів; *б* — ідентифікації об'єкта;  
*в* — оптимального адаптивного керування об'єктом

Найпоширеніші принципи декомпозиції для методів оптимізації об'єкту:



— метод покоординатної оптимізації  $I$  (метод Гаусса–Зейделя), а також метод групової релаксації реалізують декомпозицію простору оптимізованих змінних і почергової покоординатної або групової оптимізації;

— для лінійних оптимальних за квадратичним функціоналом стохастичних систем управління об'єктом декомпозиція загальної задачі на підзадачі оптимального оцінювання станів та пошуку оптимальної стратегії управління [97] дозволяє суттєво спростити складну задачу дуального [93] управління;

— для задачі спільного оцінювання параметрів і станів стохастичних об'єктів (розширений фільтр Калмана [87], метод квазілінеаризації і інваріантного занурення [97]), поділ (декомпозиція) на незалежні підзадачі оцінювання сигналів, їх коваріаційних матриць, а далі параметрів, дозволяє отримати рішення, близьке до оптимального, досить простими алгоритмами.

Особливу зацікавленість являє задача декомпозиції моделі (2.1) об'єкту, яка описана системою нелінійних нестационарних рівнянь

$$\dot{x}_g(t) = f_g(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m), \quad g = \overline{1, n}, \quad (2.5)$$

множиною лінійних систем (2.2), що описують з необхідною точністю поведінку системи (2.1) в обмежених областях визначення змінних  $t, x, u$ . Ці локальні моделі виду (2.2) дають змогу у межах лінійно-пропорційних систем легко розв'язувати задачі аналізу, синтезу і реалізації оптимальних стратегій керування та ідентифікації.

За локальними моделями об'єкту можна розв'язати задачу ідентифікації структури невідомої нелінійної залежності  $F$  моделі (2.1). Уведемо в (2.5) позначення вектора  $v$  з компонентами  $v_i$ :

$$v_i = \begin{cases} x_i, i = \overline{1, n}; \\ u_i, i = \overline{n+1, n+m}; \\ t, i = n+m+1 = s. \end{cases} \quad (2.6)$$

У силу безперервності і  $l$ -кратної диференційованості залежності (2.1) залежність (2.5) може бути подана кратним рядом Тейлора:

$$y(v(t)) = y(v_0) + \sum_{i=1}^s \frac{\partial y}{\partial v_i} \Big|_{v_0} \Delta v_i(t) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s \frac{\partial^2 y}{\partial v_i \partial v_j} \Big|_{v_0} \Delta v_i \Delta v_j + \\ + \frac{1}{6} \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^s \frac{\partial^3 y}{\partial v_i \partial v_j \partial v_k} \Big|_{v_0} \Delta v_i \Delta v_j \Delta v_k + \dots + R_l(v), \quad (2.7)$$

де  $\Delta v_i(t) = v_i(t) - v_{i0}$ ;  $v \in G$ ;  $v_0 \in G$ .

$\text{Sup } R_l(v) \leq \delta$ ;  $\delta$  — допустима похибка апроксимації залежності (2.1) рядом (2.7).

Розіб'ємо область  $G$  завдання змінних  $v$  на підобласті  $G_r$  так, що

$$\text{а) } \bigcup_{r=0}^m G_r = G, v_{r0} \in G_r, G_r \cap G_{r'} = \emptyset, r \neq r';$$

$$\text{б) } (\forall G_r) \left( \exists \beta_r = \arg \min_{\beta_r \in R} \left( \sup_{v_{r0} \in G_r} \left\| \frac{dy}{dx} \right\|_{v_{r0}} \beta_r < h \right) \right),$$

де  $\beta_r$  — вектор параметрів лінійної моделі

$$\Delta y_1(t) = \beta_r^T \Delta v(t), \quad (2.8)$$

де  $i$ -а компонента  $\beta_{ri}$  якого є оцінка з точністю до  $h$  коефіцієнта  $\frac{\delta y}{\delta v} \Big|_{v_0}$ , розкладання (2.7) навколо центру  $v_{r0}$ .

Для області  $G_0$ , яка містить глобальний центр  $v_0$  розкладання (2.7) за моделлю (2.8) і даними  $y_1(t)$ ,  $v(t)$ , знайдемо вектор  $\beta_r$ , який дорівнює (з точністю до  $h$ ) вектору  $\frac{\delta y}{\delta v} \Big|_{v_0}$ , тоб-

то отримаємо оцінки перших похідних у  $\frac{\delta y}{\delta v} \Big|_{v_0}$  (2.7).

Аналогічно обчислимо вектори  $\beta_r$  часткових моделей (2.8) для решти областей  $G_r \in G$ . Тепер за значеннями  $\beta_r$  і  $v_{r0}$  можна оцінити похідні більш високих порядків.

Так, якщо об'єднати сусідні з  $G_0$  підобласті в розширену  $G_{01} = \bigcup_{r=1}^{m_1} G_r$ ,  $m_1 \geq s$ , (для простоти позначень будемо вважати, що області перенумеровані з віддаленням від «центральної»  $G_0$ ), таку, що

$$\sup_{v \in G_{0j}} R_3(v) \leq \delta,$$

то розклад (2.7), з точністю до  $\delta$ , буде містити члени не вище другого порядку.

Продиференціюємо (2.7) в області  $G_{01}$  по  $v_j$ , тоді (з точністю до  $\partial R_3(v) / \partial v_j$ )

$$\frac{\partial y(v(t))}{\partial v_j} = \frac{\partial y}{\partial y_j} \Big|_{v_0} + \sum_{i=1}^s \frac{\partial^2 y}{\partial v_i \partial v_j} \Big|_{v_0} \Delta v_i, \quad (2.9)$$

де  $\frac{\delta y}{\delta v} \Big|_{v_0}$  визначено з (2.8) для підобласті  $G_0$ .

Якщо різниця  $\Delta v_i = v_{r0i} - v_{0i}$ , то їй наближено відповідає похідна

$$\frac{\partial y(v(t))}{\partial v_j} \Big|_{v_{r0}} \approx \beta_{rj}.$$

Отже, вираз (2.9) можна подати у вигляді

$$\beta_{rj} = \beta_{0j} + \sum_{i=1}^s \frac{\partial^2 y}{\partial v_i \partial v_j} \Big|_{v_0} (v_{r0i} - v_{0i}). \quad (2.10)$$

Звідси для  $r \geq s$  і, за умови лінійної незалежності хоча б  $s$  з  $r$  векторів  $(v_{r0} - v_0)$  однозначно визначають  $s$  других

похідних  $\left. \frac{\partial^2 y}{\partial v_i \partial v_j} \right|_{v_0}$ ,  $i = 1, 2, \dots, s$ .

Для знаходження всіх коефіцієнтів  $\left. \frac{\partial^3 y}{\partial v_i \partial v_j \partial v_k} \right|_{v_0}$  ряду

(2.7) необхідно мати не менше  $s$  розширених навколо  $G_{r1}^*$  підобластей  $G_{r1}^*$ , подібних  $G_{01}$  (число таких центральних підобластей повинно бути не менше  $s$ ).

Для кожної  $G_{r1}^*$  із рівняння (2.10) (у якому замість  $\beta_{0j}$  і  $v_{0i}$  взято значення, отримані для центральної підобласті  $G_{r^*}$ )

знаходять другі похідні  $\left. \frac{\partial^2 y}{\partial v_i \partial v_j} \right|_{v_{r^*0}}$ . Двічі диференціюючи (2.7),

отримаємо

$$\left. \frac{\partial^2 y(t)}{\partial v_i \partial v_j} \right|_{v_{r^*0}} = \left. \frac{\partial^2 y}{\partial v_i \partial v_j} \right|_{v_0} + \sum_{k=1}^s \left. \frac{\partial^3 y}{\partial v_i \partial v_j \partial v_k} \right|_{v_0} (v_{r^*0k} - v_{0k}).$$

Звідси для  $r^* \geq s$  і за умови лінійної незалежності хоча б  $s$  векторів  $(v_{r^*k} - v_k)$  однозначно визначають треті похідні.

Аналогічно отримують всі похідні ряду (2.7) і тим самим визначають його структуру.

За недостатньої кількості підобластей  $G_r$  можливо відновлення частини структури з тих  $v_j$ , які змінюються від області до області.

Під час проведення активного експерименту мінімізація числа областей  $G_r$  і оптимізація точності оцінок похідних в (2.7) досягається застосуванням композиційного планування експерименту, яке забезпечує ортогональність векторів  $(v_{r0} - v_0), (v_{r^*0} - v_0)$ .

Перевагою такого підходу є обмежена (на кожному кроці розширення) розмірність вектора невідомих параметрів, можливість аналізу на кожному кроці значущості знайдених коефіцієнтів ряду (2.7) і відкидання незначущих.

**Приклад 2.2.** Нехай невідома двомірна залежність (2.5) в об'єкті має вигляд

$$y(v) = v_1(t) + 0,5v_1(t)v_2(t) + v_2^2(t),$$

де змінні  $y(v), v_i(t)$  визначені так:  $(v_{01} = 0, v_{02} = 0) \in G_0$ ;  $(v_{11} = -1, v_{12} = 0) \in G_1$ ;  $(v_{21} = 0, v_{22} = -1) \in G_2$ ;  $y(0) = 0$ .

У кожній області є по два вимірювання  $v_i(t_{jr})$ , відхилення яких від центрів для кожної області однакові:  $\Delta v_1(t_{1r}) = 0,1$ ;  $\Delta v_2(t_{1r}) = 0$ ;  $\Delta v_1(t_{2r}) = 0$ ,  $\Delta v_2(t_{2r}) = -0,1$ .

Враховуючи ці відхилення, отримуємо

$$\Delta y(t_{10}) = 0,1; \Delta y(t_{20}) = 0,005; \Delta y(t_{11}) = 0,1;$$

$$\Delta y(t_{20}) = 0,055; \Delta y(t_{12}) = 0,5; \Delta y(t_{22}) = 0,105.$$

Потрібно визначити структуру і параметри невідомої залежності  $y(v)$ .

*Розв'язання:*

а) для  $G_0$  складемо рівняння (2.8)

$$\Delta y(t_{j0}) = \beta_{01} \Delta v_i(t_{j0}) + \beta_{02} \Delta v_2(t_{j0});$$

підставивши дані, отримаємо

$$0,1 = \beta_{01} \times 0,1 + \beta_{02} \times 0; \quad 0,005 = \beta_{01} \times 0 + \beta_{02} \times (-0,1);$$

Звідси маємо шукані перші члени ряду (2.7):

$$\beta_{01} = 1; \beta_{02} = -0,05;$$

б) для  $G_1$ :

$$\Delta y(t_{j1}) = \beta_{11} \Delta v_1(t_{j1}) + \beta_{12} \Delta v_2(t_{j1}),$$

звідси  $\beta_{11} = 1; \beta_{12} = 0,55$ ;

в) для  $G_2$ :

$$\Delta \phi(t_{j2}) = \beta_{21} \Delta v_1(t_{21}) + \beta_{22} \Delta v_2(t_{j1});$$

звідси  $\beta_{21} = 0,5; \beta_{22} = 1,05$ ;

г) маючи  $\beta_{ir}$ , можна, згідно з рівнянням (2.10), переходити до знаходження оцінок других похідних у (2.7):

$$\left. \frac{\partial y}{\partial v_1} \right|_{v_{r0}} - \left. \frac{\partial y}{\partial v_1} \right|_{v_0} = \left. \frac{\partial^2 y}{\partial v_1^2} \right|_{v_0} (v_{r01} - v_{01}) + \left. \frac{\partial^2 y}{\partial v_1 \partial v_2} \right|_{v_0} (v_{r02} - v_{02}),$$

де ліворуч різниця  $\beta_{r1}$ ,  $r = 1, 2$ , і  $\beta_{01}$ , а  $(v_{r0j} - v_{0j})$ ,  $j = 1, 2$  — різниця координат центрів  $r$ -ї і нульової області.

Аналогічно друге рівняння

$$\left. \frac{\partial y}{\partial v_2} \right|_{v_{r0}} - \left. \frac{\partial y}{\partial v_2} \right|_{v_0} = \left. \frac{\partial^2 y}{\partial v_2^2} \right|_{v_0} (v_{r02} - v_{02}) + \left. \frac{\partial^2 y}{\partial v_1 \partial v_2} \right|_{v_0} (v_{r01} - v_{01}).$$

Підставивши дані для першого рівняння, отримаємо систему

$$\left. \begin{aligned} 0 &= \left. \frac{\partial^2 y}{\partial v_1^2} \right|_{v_0} \times (-1) + \left. \frac{\partial^2 y}{\partial v_1 \partial v_2} \right|_{v_0} \times 0; \\ -0,5 &= \left. \frac{\partial^2 y}{\partial v_1^2} \right|_{v_0} \times 0 + \left. \frac{\partial^2 y}{\partial v_1 \partial v_2} \right|_{v_0} \times (-1). \end{aligned} \right\}$$

Її розв'язання відразу вказує (!) на відсутність квадратичної залежності від  $x_1$ :

$$b_k = \sum_{l=-p}^p \eta(l) \sum_{j=1}^M [(y(j+l))x_k(j) + y(j)x_k(j+l)].$$

Аналогічно, із другого рівняння

$$\begin{cases} 0.5 = \frac{\partial^2 y}{\partial v_2^2} \Big|_{v_0} \cdot 0 + \frac{\partial^2 y}{\partial v_1 \partial v_2} \Big|_{v_0} \cdot (-1); \\ -1 = \frac{\partial^2 y}{\partial v_2^2} \Big|_{v_0} \cdot (-1) + \frac{\partial^2 y}{\partial v_1 \partial v_2} \Big|_{v_0} \times (0); \end{cases}$$

отримаємо рішення

$$\frac{\partial^2 y}{\partial v_2^2} \Big|_{v_0} = 1; \quad \frac{\partial^2 y}{\partial v_1 \partial v_2} \Big|_{v_0} = 0,5.$$

Отримані значення перших і других похідних підставимо в (2.7). Враховуючи, що  $v_0 = 0$ ,  $y_0 = 0$ , знаходимо оцінку  $\hat{y}(v)$  невідомої залежності  $y(v)$ :

$$\hat{y}(v) = v_1(t) - 0,05v_2(t) + 0,5v_1(t)v_2(t) + v_2^2(t).$$

Оцінка  $\hat{y}(v)$  відрізняється від  $y(v)$  на несуттєву для області  $G$  величину —  $0,05 v_2(t)$ , яка з'явилася внаслідок наближеності обчислення похідних.

Не менш ефективний принцип декомпозиції має місце і під час опису сигналів. Можна говорити про часове і частотне розбиття сигналів. Часове розбиття можна будувати за різними ознаками, наприклад виділення інтервалів, відповідних статичним і динамічним режимам об'єкту, для незалежного вивчення його статички та динаміки; виділення сильно- і слабозашумлених ділянок записів змінних для оптимального вибору інтервалів і алгоритмів оцінювання сигналів; виділення «інформативних» (в сенсі ідентифікації моделі об'єкту) ділянок записів з некорельованими або ортогональними змінними.

Частотне розбиття еквівалентно розкладенню сигналів об'єкту в ряд Фур'є. Перехід в частотну область дозволить достатньо просто синтезувати оптимальний фільтр Вінера для оцінювання сигналів [87]. Сучасна спектральна теорія аналізу і синтезу систем [2] також заснована на розкладанні сигналів і їх функціональних відображень. Розкладання проводиться за системою ортогональних функцій. Декомпозиція

сигналів складних коливальних об'єктів дозволяє виділити окремі тони і побудувати для них часткові спрощені моделі. Отже, принцип декомпозиції доцільний на всіх рівнях і для всіх елементів складних об'єктів.

### 2.3. Принцип узгодженості критеріїв якості підсистем складного об'єкту

Для ієрархічної системи управління (див. рис. 2.3) існує одне значення для елементів множини

$$\{I, OptI, J, Opt J, \Sigma, \beta, I_{\phi}, OptI_{\phi}, \Sigma_{\phi}, \beta_{\phi}, I_{\text{min}}, OptI_{\text{min}}, \beta_{\text{min}}\},$$

за якого головний показник  $\Lambda$  оптимальний, якщо не враховувати витрати на пошук цього значення. Але реальні оптимізаційні задачі не можуть не враховувати ці втрати. Тому релаксаційний процес відшукування абсолютного екстремуму (наприклад, мінімуму) зупиняється на певному етапі, якщо подальший приріст втрат на пошук перевищить зменшення решти частини функціоналу.

За повної відсутності інформації про залежність  $\Lambda$  від елементів множини пошук абсолютного екстремуму виконується методом перебору: з усіх  $n$  можливих значень  $m$  змінних множини  $F$  вибирається  $m$  оптимальних значень. Загальне число кроків РП  $C_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$  для реальних значень  $m$  і  $n$

надмірно велике.

Задача набагато порядків спрощується, якщо кожен з функціоналів  $\Lambda, I, \dots, I_{ii}$  оптимізується на підмножині змінних свого рівня:  $X, u, \dots, (\Sigma_{\text{min}}, \beta_{\text{min}})$ . Це призводить до композиції умовно оптимальних рішень



$$\begin{aligned}
\Lambda^* &= \text{extr} \Lambda \\
x \Big|_{I^* = \text{extr} I} & \\
u \Big|_{J^* = \text{extr} J} & \\
(\Sigma, \beta) \Big|_{J_\phi^* = \text{extr} J_\phi} & \\
(\Sigma_\phi, \beta_\phi) \Big|_{J_m^* = \text{extr} J_m} & \\
(\Sigma_{nn}, \beta_{nn}) \Big|_{\dots} &,
\end{aligned} \tag{2.11}$$

де ліворуч від кожної вертикальної ризи змінна, що оптимізує функціонал «свого» рівня, праворуч — результат умовної оптимізації на нижніх рівнях.

Оптимізаційна задача кожного рівня піддається досить суворій формалізації, що дозволяє інтенсифікувати процес пошуку умовного екстремуму.

Проблема розмірності знімається, але залишається проблема ефективності вирішення (2.11).

Щоб процедура (2.11) давала рішення, близьке до абсолютного екстремуму головного функціонала, необхідно забезпечити непротиворічність критеріїв  $\Lambda, I, \dots, J_{i\bar{i}}$ .

Критерії  $\Lambda, I, \dots, J_{i\bar{i}}$  називають *абсолютно узгодженими*, якщо композиція умовних рішень (2.11) призводить до глобального екстремуму головного показника  $\Lambda$ .

Два сусідніх за рівнями функціонала назвемо *локально несуперечливими*, якщо їх варіації подібні в обмеженій області  $G$  простору змінних підсистеми нижнього рівня:

$$\left. \begin{aligned}
\delta \Lambda (u + \delta u) &= k_1 \delta I (u + \delta u); \\
\delta I (\beta + \delta \beta) &= k_2 \delta J (\beta + \delta \beta); \\
\delta J (\beta_\phi + \delta \beta_\phi) &= k_3 \delta J_\phi (\beta_\phi + \delta \beta_\phi); \\
\delta J_\phi (\beta_{i\bar{i}} + \delta \beta_{i\bar{i}}) &= k_4 \delta J_{i\bar{i}} (\beta_{i\bar{i}} + \delta \beta_{i\bar{i}}).
\end{aligned} \right\}$$

Якщо перетин областей  $G_i$  існування змінних  $i$ -х рівнів представляє не порожню множину, яка включає точку, що

визначає глобальний екстремум за  $\Lambda$ , то їх багаторазова послідовна оптимізація від  $J_{\text{min}}$  до  $\Lambda$  та назад від  $\Lambda$  до  $J_{\text{min}}$  в принципі дозволяє відшукати глобальний екстремум  $\Lambda$ .

Проте досягти його не просто. Пояснюється це тим, що оптимально будувати функціонали зверху вниз неможливо через незнання оптимальних по верхньому функціоналу значень елементів нижніх рівнів. Так, не можна синтезувати функціонал  $I$  управління  $u$  на об'єкті  $\Sigma_{\infty}$  не знаючи якою математичною моделлю  $(\Sigma, \beta)$  він буде описаний, який рівень і вид шумів  $\epsilon$  в оцінках  $X_M$ , отриманих за оцінками підсистеми фільтрації і т. д.

Можна застосувати мінімаксний підхід [93], і будувати  $I$  так, щоб для найгіршої моделі  $(\Sigma, \beta)$  та оцінок  $X_M$  сигналу отримати найкраще гарантоване вирішення. Але ж у загальній системі (див. рис. В.1) є підсистема ідентифікації, яка в результаті оптимізації дасть завжди рішення не гірше гіршого, тому, застосовуючи мінімаксний підхід, програємо в оптимальності.

Доцільним є наступний алгоритм побудови локально несуперечливих функціоналів:

1. На підставі апріорної інформації про об'єкт  $\Sigma_{\infty}$ , головний функціонал  $\Lambda$  і наявних елементах підсистем усіх рівнів, з урахуванням принципу раціонального ускладнення [27] на першому кроці багаторівневого РП приймають найпростіші, що задовольняють апріорно відомим даним, підсистеми первинних перетворювачів оцінювання сигналів  $X$  і моделі  $(\Sigma, \beta)$  і оптимального управління  $u$ .

2. Вибрані підсистеми  $i$ -го рівня оптимізують методом перебору структур і методів оптимізації за апріорно прийнятим критерієм підсистем  $i + 1$ -го рівня:  $\Sigma_{\text{min}}$  по  $J_{\phi}$ ,  $(\Sigma_{\phi}, \text{Opt}J_{\phi})$  по  $J$ ,  $(\Sigma, \text{Opt}J)$  по  $I$ ,  $(\text{Opt}I)$  по  $\Lambda$ . Оскільки розмірності цих змінних невеликі, то витрати на пошук допустимі. У результаті цієї оптимізації отримаємо оптимальну систему першого наближення.

3. Методами теорії чутливості, або моделювання і планування експерименту [40], проєктують несуперечливі критерії  $I, J, J_\phi, J_{\text{шт}}$ .

Розглянемо підхід, заснований на аналітичному обчисленні чутливості функціоналів. Нехай  $\epsilon$  оптимальна система першого наближення, в якій реальний об'єкт  $\Sigma_\infty$  замінено його моделлю  $(\Sigma, \beta)$ . Знайдемо варіацію основного функціоналу  $\Lambda$  відносно його екстремального значення  $\Lambda^*(u^*)$ , викликану варіацією  $\delta u$  оптимального управління об'єктом. Нехай

$$u(t) = u^*(t) + \epsilon \delta u(t),$$

де  $\epsilon$  — мала величина;  $u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix}$  — вектор-функція часу  $t$ .

Нехай

$$\Lambda(u(t)) = \int_{\theta_1} \lambda(u^*(t) + \delta u(t) \epsilon) dt,$$

де  $\int_{\theta_1}$  — оператор інтегрування на інтервалі  $\theta_1$  часу  $t$ ;  $\lambda(\cdot)$  — скалярна функція векторного аргументу  $u$ .

Знайдемо першу варіацію  $\Lambda$ :

$$\delta \Lambda = \frac{\partial \Lambda}{\partial \epsilon} = \int_{\theta_1} \frac{\partial \lambda}{\partial \epsilon} dt = \int_{\theta_1} \left( \frac{\partial \lambda}{\partial u} \right)^T \frac{\partial u}{\partial \epsilon} dt = \int_{\theta_1} \left( \frac{\partial \lambda}{\partial u} \right)^T \delta u dt,$$

де

$$\frac{\partial \lambda}{\partial u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \lambda}{\partial u_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial \lambda}{\partial u_m} \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial u}{\partial \epsilon} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial \epsilon} \\ \vdots \\ \frac{\partial u_m}{\partial \epsilon} \end{bmatrix}.$$

Тепер візьмемо другу варіацію:

$$\begin{aligned}\delta^2\Lambda &= \frac{\partial^2\Lambda}{\partial\varepsilon^2} = \frac{\partial}{\partial\varepsilon} \frac{\partial\Lambda}{\partial\varepsilon} = \frac{\partial}{\partial\varepsilon} \int_{\theta_1} \left( \frac{\partial\lambda}{\partial u} \right)^T \delta u dt = \\ &= \int_{\theta_1} \frac{\partial}{\partial\varepsilon} \left( \frac{\partial\lambda}{\partial u} \right)^T \cdot \delta u \cdot dt = \int_{\theta_1} \frac{\partial}{\partial u} \left[ \left( \frac{\partial\lambda}{\partial u} \right) \delta u \right]^T \frac{\delta u}{\partial\varepsilon} dt,\end{aligned}\quad (2.12)$$

де

$$\frac{\partial^2\lambda}{\partial u^T \partial u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2\lambda}{\partial u_1 \partial u_1} & \dots & \frac{\partial^2\lambda}{\partial u_1 \partial u_m} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2\lambda}{\partial u_m \partial u_1} & \dots & \frac{\partial^2\lambda}{\partial u_m \partial u_m} \end{bmatrix}.$$

Якщо  $\Lambda$  визначено на  $x(t)$ , а не на  $u(t)$ , то, діючи аналогічно, отримаємо

$$\delta^2\Lambda = \int_{\theta_1} \delta x^T \frac{\partial^2\lambda}{\partial x^T \partial x} \delta x dt,$$

або

$$\delta^2\Lambda = \int_{\theta_1} \delta u^T \left( \frac{\partial x}{\partial u} \right)^T \frac{\partial^2\lambda}{\partial x^T \partial x} \frac{\partial x}{\partial u} \delta u dt,\quad (2.13)$$

де

$$\delta x = \frac{\partial x}{\partial u} \delta u,$$

$$\delta x = \begin{bmatrix} \delta x_1(t) \\ \vdots \\ \delta x_n(t) \end{bmatrix}, \quad \delta u = \begin{bmatrix} \delta u_1(t) \\ \vdots \\ \delta u_m(t) \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial x}{\partial u_1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \frac{\partial x_1}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial x_1}{\partial u_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial x_n}{\partial u_1} & \frac{\partial x_n}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial u_m} \end{bmatrix}.$$

Зіставляючи (2.12) і (2.13), бачимо, що

$$\frac{\partial^2 \lambda}{\partial u^T \partial u} = \left( \frac{\partial x}{\partial u} \right)^T \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x^T \partial x} \frac{\partial x}{\partial u}.$$

На екстремалі  $x^*(t)$ ,  $u^*(t)$  перша варіація дорівнює нулю, друга варіація (2.12) або (2.13) визначає еталонну [для функціонала  $I(u)$ ] поверхню у функціональному просторі варіацій  $\delta u(t)$ . Нехай  $\delta u(t) = 1(t)$  — одинична вектор-функція від  $t$ , тоді (2.13) являє еталонну для  $I$  матрицю  $A_1$  дійсних чисел

$$\delta^2 \Lambda = A_1 = \int_0^1 \left( \frac{\partial x}{\partial u} \right)^T \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x^T \partial x} \frac{\partial x}{\partial u} dt. \quad (2.14)$$

Під час побудови функціонала  $I$  будемо прагнути, щоб аргументи екстремумів  $\Lambda$  та  $I$  співпали, а другі варіації були подібні.

Тут також можна досягти скорочення кількості різних варіантів, застосовуючи методику планування експерименту для побудови моделі залежності цього додаткового функціонала від структур і параметрів підсистем нижнього рівня. Узгодивши критерії підсистем усіх рівнів та оптимізувавши їх, одержимо оптимальну систему другого наближення. Повторивши для неї процедуру узгодження критеріїв і оптимізувавши їх, отримаємо третє наближення. Процес узгодження припиняється, якщо результати подальших ітерацій мало відрізняються.

Забезпечення несуперечності критеріїв теоретичним або імітаційним моделюванням на ЕОМ певною мірою наблизить задачу умовної оптимізації об'єкту до задачі знаходження найкращого рішення (визначення глобального екстремуму головного критерію  $\Lambda$ ).

#### **2.4. Композиція підсистем різних рівнів об'єкту в єдину систему**

Третім, завершальним, етапом розробки близьких до оптимальних по головному показнику  $\Lambda$  структури і алгоритмів функціонування багаторівневої системи оптимізації, на-

приклад, об'єкту, є етап композиції (сполуки) окремих підсистем в єдиний комплекс.

Сформульовані визначення системи, релаксаційних процесів, принципу раціонального ускладнення [26] дозволяють окреслити коло основних підходів до проблеми композиції. Це:

- упорядкування елементів множин моделей і методів оптимізації;
- вибір оптимальної системи першого наближення;
- організація релаксаційних процесів ускладнення і вдосконалення окремих елементів систем і, можливо, структури самої системи, починаючи з оптимальної системи першого наближення і закінчуючи оптимальною за  $\Lambda$ .

Упорядкування елементів підсистем реалізується проекторами ПР, звужуючими на першому кроці початкову множину елементів до підмножин допустимих, а потім до підмножини претендентів на оптимальні елементи. Наприклад, допустимими за неповної прямої спостережуваності змінних об'єкта  $\Sigma_\infty$  є методи ідентифікації, які не потребують повної спостережуваності  $\Sigma_\infty$ . На першому рівні проектори ПР<sub>1</sub> виділяють ті елементи (методи і моделі), які можуть бути застосовані в цій ситуації, яка визначається сигналами  $\hat{u}, \hat{x}$ , що спостерігаються, і заданими критеріями  $J_\phi, J, I, \Lambda$ . Тут проектори є багатовимірними дискримінаторами, що пропускають на вихід ті елементи, властивості яких повністю узгоджуються з факторами, що визначають реальну ситуацію. На другому рівні проектори ПР<sub>2</sub> виділяють два-три претенденти на оптимальність. Для цього в проекторі ПР<sub>2</sub> для кожного елемента закладено регресійні залежності відповідних критеріїв  $\hat{J}_\phi, \dots, \hat{\Lambda}$  від кількісно розрахованого вектора факторів  $\theta$ , який характеризує конкретну ситуацію.

Для елементів-методів лінійного оцінювання чинниками є співвідношення сигнал-шум за амплітудою і шириною

спектрів, корельованість сигналів, наближеність моделі (величина кінцевої похибки апроксимації) і та ін.

Визначивши в просторі цих факторів кілька найбільш характерних для практики регресійного аналізу областей, далі для кожної області будують регресійну залежність відповідного критерію  $J_{\phi, \dots}$ ,  $\Lambda$  або його оцінки  $\hat{J}_{\phi, \dots}, \hat{\Lambda}$  від  $\theta$ . Тоді проектор  $PP_1$  визначає область, а  $PP_2$  — для кожного елемента значення критерію для конкретного  $\theta$ , що належить цій області. Задача побудови проекторів відноситься до етапу проектування і вимагає тим більших витрат, чим точніше проектори і ширше області та розмірності факторів  $\theta$ .

Вибір оптимальної системи першого наближення було подано вище. Основним процесом на цьому етапі є організація структури системи.

Розглянемо варіант структури системи оптимізації  $J$ , тобто систему ідентифікації. У табл. 2.1 структурно систематизовані підсистеми ідентифікації від найпростішої до такої, що само-організується для створення підсистеми ідентифікації в багаторівневій системі оптимізації головного показника  $\Lambda$  (якщо  $\Sigma^*$  і  $Opt^*$  апріорно невідомі).

Із табл. 2.1, як припустимо, приймаємо структуру БАСІ. Для цієї системи ідентифікації, на відміну від більш простих, характерна замкненість по основному (для неї) критерію  $I$  і неунітність елемента  $\Sigma$ .

Складемо функціональну схему БАСІ, визначивши її взаємозв'язок з підсистемами верхніх і нижніх рівнів (рис. 2.3).

Характерні частини системи (підсистеми) обведено пунктиром і пронумеровано: 1 — оптимізація  $\Lambda$ ; 2 — оптимізація  $I$ ; 3 — оптимізація  $J$ , що доповнює найпростішу систему ідентифікації (частина 4) до багатократно адаптивної (частини 3 і 4); 5 — оптимізація  $J_{\phi}$ .

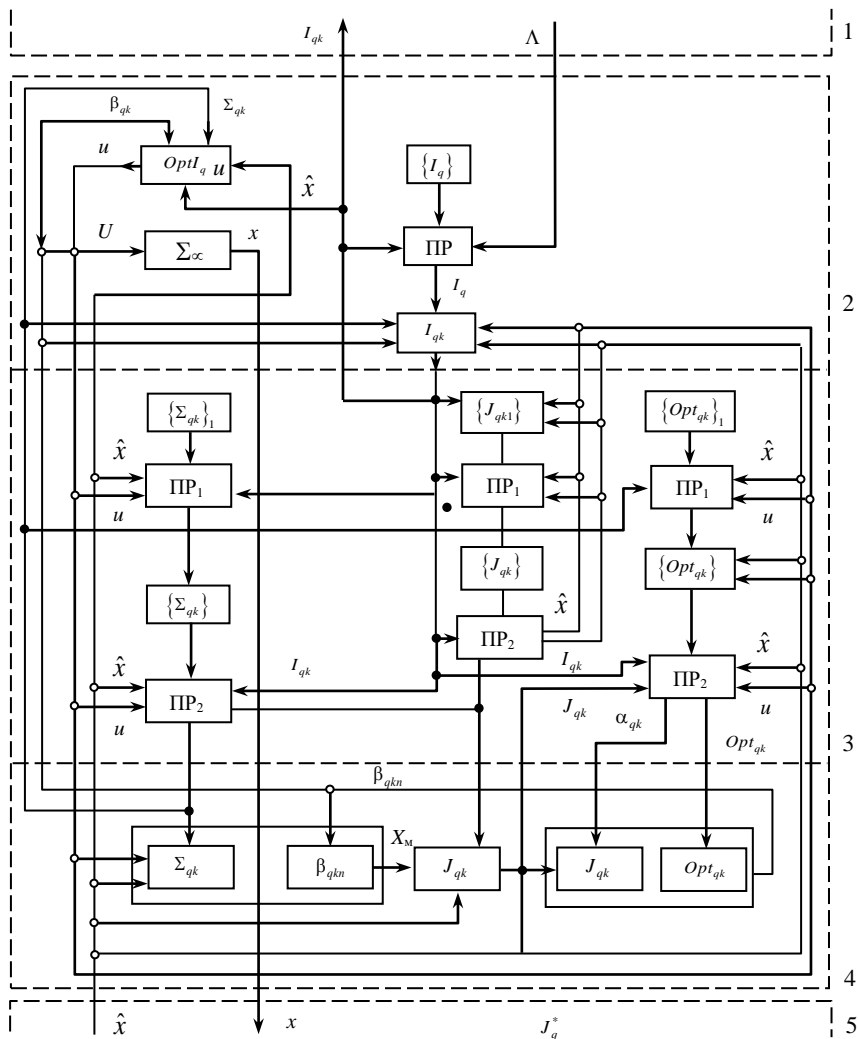


Рис. 2.3. Функціональна схема багатократно адаптивної підсистеми ідентифікації

Частина 4 системи містить функціонал  $J_{qk}$ , який задається вище, модель  $\Sigma_{qk}$  з вектором  $\beta_{qkn}$ , параметрів, що на-



лаштовуються, оптимізатор  $(Opt_{qk}, \alpha_{qk})$ . Тут реалізується РП  $\{\beta_{qkn}\}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , щодо  $J_{qk}$  за допомогою оптимізатора  $Opt_{qk}, \alpha_{qk}$ . Після закінчення РП інформація про оптимальні за  $J_{qk}$  структури  $\Sigma_{qk}$  і вектори  $\beta_{qk}$  параметрів моделі надходить у підсистеми верхніх рівнів.

Частина 3 містить три множини  $\{\Sigma_{qk1}\}$ ,  $\{Opt_{qk1}\}$ ,  $\{J_{qk1}\}$ ; проєктори першого рівня  $PP_1$ , що звужують ці множини до підмножин  $\{\Sigma_{qk}\}$ ,  $\{Opt_{qk}\}$ ,  $\{J_{qk1}\}$  допустимих елементів; проєктори  $PP_2$  другого рівня, що вибирають з числа допустимих претенденти на оптимальні елементи. Для конкретного виду  $I_q$  і потрібного значення  $J_{qk}$ , що задається вище, проєктори  $PP_1$ ,  $PP_2$  задають елементи  $J_{ql}, \Sigma_{ql}, Opt_{ql}, \alpha_{ql}$  частини 4, де в результаті РП  $\{\beta_{qkn}\}$  отримують оптимальну по  $J_{qk}$  модель  $(\Sigma_{qk}, \beta_{qk})$ . У підсистемі частини 2 на реальному об'єкті  $\Sigma_\infty$  або його моделі  $(\Sigma_{qk}, \beta_{qk})$  оцінюється значення критерію  $I_{qk}$  для  $k$ -й структури БАСІ, і якщо воно не задовольняє необхідному, то в одному з проєкторів  $PP_2$  відбувається зміна претендента. Знову повторюється процес  $\{\beta_{qkn}\}$  і так до виконання умови, що  $I_{qk}$  буде не гірше необхідного, або до закінчення процесу перебору всіх претендентів. При зміні  $I_{qk}$  в частинах 4 та 5 можливі зміни структури і параметрів підсистеми нижнього рівня. У частинах 3 та 4 має місце композиція двох РП  $\{\beta_{qkn}\}$  по  $n$  і  $\{I_{qk}\}$  по  $k$ , що відповідає визначенню БАСІ.

Частина 2 містить реальний об'єкт  $\Sigma_\infty$ , його оптимізатор  $Opt_u I_q$ , множину  $\{I_{qk}\}$  і проектор ПР, що визначає (на основі значень  $I_{qk}$  і  $\Lambda$ ) вид  $I_q$  критерію  $I_{qk}$ . Сигнал  $x$  з виходу об'єкта  $\Sigma_\infty$  надходить в підсистему нижнього рівня, з виходу якої його оцінка  $\hat{x}$  потрапляє в системи ідентифікації і управління. Оптимізатор  $Opt_u I_{qk}$  на основі інформації  $\Sigma_{qt}, \beta_{qt}, I_{qt}, \hat{x}$  виробляє керувальний вплив  $u$ , що надходить на об'єкт або його модель (на стадії пошуку оптимальних елементів системи).

Якщо після закінчення РП  $\{\beta_{qk}\}$  по  $k$  оптимальне значення  $I_q$  не задовольняє систему частини 1, то з системи верхнього рівня може надійти команда в проектор ПР на зміну по  $q$  виду функціоналу  $I_q$ . Крок по  $q$  призводить до повторення кроків по  $k$ , а  $k$  по  $n$  в МАСІ, тобто в частинах 1–4 має місце композиція з трьох РП, що відповідає визначенню системи, яка самоорганізується (СС) (див. табл. 2.1).

Глибокий зворотній зв'язок за критеріями від  $\Lambda$  до  $I$ , від  $I$  до  $J$ , від  $J$  до  $J_\Phi$ , оптимізувальний і цілеорієнтуючий структуру і параметри підсистеми всіх рівнів об'єкту, здійснює регуляризацію рішення в широкому сенсі.

## 2.5. Приклад побудови проекторів ПР<sub>1</sub>, ПР<sub>2</sub> в БАСІ

### 2.5.1. Алгоритми роботи проекторів $Opt_q \rightarrow Opt_{qk}$ в БАСІ

Ефективність системи другого рівня БАСІ визначається потужністю множин  $\{Opt_q\}$  і кінцевим результатом  $\{Opt_{qk}\}$  роботи проекторів ПР<sub>1</sub>, ПР<sub>2</sub>. Оптимальність по  $I_{qk}$  елемента  $\{Opt_{qk}\}$  залежність від правила побудови в проек-

торах відображення сигналів  $(x(t), u(t))$  об'єкта в індекс  $k$ . Відображення  $(x(t), u(t)) \rightarrow k$  в  $\text{PP}_1$  було реалізовано таблицями з обмеженим входом ( $\chi \in \{0,1\}$ ), а в  $\text{PP}_2$  необмеженим, якщо  $\chi \in R$ ,  $R$  — множина дійсних чисел.

В  $i$ -му рядку таких таблиць розташовані коефіцієнти зв'язку  $i$ -го елемента ( $\text{Opt}_i$  або  $\Sigma_i$ ) або його показника якості з  $j$ -ою властивістю даних  $(x(t), u(t))$ . Індекс  $k$  оптимальної підмножини  $\{\text{Opt}_{qk}\}$  в  $\text{PP}_1$  знаходиться за умови

$$k = \arg \max_{i \in \{\overline{i,r}\}} \{\chi \cdot \theta\}, \quad (2.15)$$

де  $\chi$  — матриця бінарних коефіцієнтів  $\chi_{ij} \in \{0,1\}$ ;  $\chi_{ij} = 0$ , якщо ефект впливу  $i$ -го елемента на  $j$ -й фактор негативний і, навпаки,  $\chi_{ij} = 1$ , якщо ефект позитивний;  $\theta$  — вектор бінарних факторів  $\theta_j \in \{0,1\}$ , які вказують на присутність чи відсутність відповідної властивості;  $r$  — потужність множини  $\{\text{Opt}_{qk}\}$ .

У проекторі  $\text{PP}_2$  із підмножини претендентів на оптимальність, яка (унаслідок бінарності  $\chi_{ij}$  в  $\text{PP}_1$ ) може містити декілька елементів  $\{\text{Opt}_{qk}\}$ , відбирається єдиний найкращий  $\text{Opt}_k^*$  елемент за умови

$$K^* = \arg \min[\chi \cdot \text{diag}[\eta_j] \cdot \theta], \quad (2.16)$$

де  $\chi$  — матриця  $\chi_{ij}$  коефіцієнтів чутливості показника  $I$  якості  $i$ -го елемента до  $j$ -го фактору;  $\chi_{ij} \in R$ ;  $\eta_j$  — коефіцієнт подібності між тестовим  $\theta_j$  і реальним  $\eta_j \theta_j$  рівняннями  $j$ -го фактора;  $\theta$  — вектор рівнів тестових факторів.

Для реалізації правила (2.16) побудуємо такий тест.

2. Рівняння тестової моделі

$$y^*(k) = \beta_1^* x_1^*(k) + \beta_2^* x_2^*(k) + \varepsilon_0(k) \theta_\varepsilon, \quad (2.17)$$

де  $\varepsilon_0(k)\theta_6$  — нев'язка, визначена наближеністю структури моделі (2.17); виміри

$$y(k) = y^*(k) + N_0(k)\theta_1;$$

$$x_1(k) = x_1^*(k) + N_1(k)\theta_2; \quad \beta_1^* = \beta_2^* = 1;$$

$$x_2(k) = x_2^*(k) + N_2(k)\theta_2; \quad k = \overline{1, \theta_5};$$

$$x_1^*(k) = \sin \frac{2\pi k}{M} \theta_7; \quad x_2^*(k) = \sin \left( \frac{2\pi k}{M} \theta_7 + \theta_4 \right);$$

$$\varepsilon_0(k) = \sin \left( \frac{2\pi k}{M} \theta_7 + \frac{\theta_4}{2} \right);$$

$$N_i(k) = \theta_3 N_i^0(k) + (1 - \theta_3) N_i(k-1); \quad i = 0, 1, 2;$$

$N_i^0(k)$  — гаусів білий шум з одиничною дисперсією.

Фактори та їх рівень:

$\theta_1$  та  $\theta_2$  — рівень перешкод у  $y$  та  $x$ ;

$\theta_3$  та  $\theta_7$  — ширина спектрів сигналу і шуму;

$\theta_4$  — взаємозв'язок оцінок  $\beta_1$  і  $\beta_2$  унаслідок неортогональності  $x_1$  і  $x_2$ ;

$\theta_5$  — представництво вибірок даних;

$\theta_6$  — наближеність моделі (2.17).

### 2.5.2. Методика оцінювання кількісних характеристик метода ідентифікації

Побудуємо ортогональний план у вигляді адамарової матриці 8-го порядку [51],  $i$ -й рядок якої є  $i$ -ою функцією Уолша (табл. 2.2). Для цього введемо нормовані змінні

$$\bar{\theta}_i = (\theta_i - \theta_{i8}) / \Delta\theta_{i8}, \quad (2.18)$$

де  $i = \overline{1,7}$ ;  $\bar{\theta}_0 = 1$ ;  $\theta_{i8}$  — значення  $\theta_i$  для базового режиму;  $\Delta\theta_{i8}$  — крок варіювання фактора  $\theta_i$ ;  $I_j$  — значення показника якості метода ідентифікації для  $j$ -го набору факторів.

Таблиця 2.2

**Числові значення факторів  $\theta_i$**

№	$\bar{\theta}_0$	$\bar{\theta}_1$	$\bar{\theta}_2$	$\bar{\theta}_3$	$\bar{\theta}_4$	$\bar{\theta}_5$	$\bar{\theta}_6$	$\bar{\theta}_7$	$\bar{I}$
1	1	1	1	1	1	1	1	1	$I_1$
2	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	$I_2$
3	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	$I_3$
4	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	$I_4$
5	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	$I_5$
6	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	$I_6$
7	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	$I_7$
8	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	$I_8$

У табл. 2.3 наведено числові значення факторів  $\theta_i$ , які відповідають трьом значенням ( $\pm 1, 0$ ) нормованих факторів  $\bar{\theta}_i$ , а також значення відхилень  $\Delta\theta_{i8}$ . Як показник  $I_j$  було прийнято значення модулів зміщення  $I_{1j}$  і  $I_{2j}$  оцінок  $\hat{\beta}_1$  і  $\hat{\beta}_2$  плюс три кореня квадратного із оцінок  $I_{3j}^2$  і  $I_{4j}^2$  дисперсій оцінок  $\hat{\beta}_1$  і  $\hat{\beta}_2$ :

$$I_j = \frac{|I_{1j}| + |I_{2j}|}{2} + 3\sqrt{\frac{I_{3j}^2 + I_{4j}^2}{2}}, \quad (2.19)$$

$j = \overline{1,8}$ ;  $\beta_1^* = \beta_2^* = 1$ , якщо  $\bar{\theta}_6 = -1$  (точна модель);  $\beta_1^* = \beta_2^* = 1,251$ , якщо  $\bar{\theta}_6 = 1$  (модель наближена, а коефіцієнти  $\beta_1^*, \beta_2^*$  визначено по МНК за відсутності перешкод у  $y$  і  $x_i$ , тобто  $y = y^*, x_i = x_i^*$ ).

Таблиця 2.3

## Комп'ютерний експеримент відповідно до плану

$\bar{\theta}_i$	$\theta_i$	$\Delta\theta_{is}$
$\bar{\theta}_0 = 1$	1	—
$\bar{\theta}_1 = \begin{cases} +1 & \text{Сильна перешкода в } x_1(k) \\ 0 & \text{Середня перешкода в } x_1(k) \\ -1 & \text{Слабка перешкода в } x_1(k) \end{cases}$	$\theta_1 \begin{cases} = 1 \\ = 0,5 \\ = 0 \end{cases}$	0,5
$\bar{\theta}_2 = \begin{cases} +1 & \text{Сильна перешкода в } x_2(k) \\ 0 & \text{Середня перешкода в } x_2(k) \\ -1 & \text{Слабка перешкода в } x_2(k) \end{cases}$	$\theta_2 \begin{cases} = 1 \\ = 0,5 \\ = 0 \end{cases}$	0,5
$\bar{\theta}_3 = \begin{cases} +1 & \text{співвідношення смуги} \\ 0 & \text{спектрів сигналів} \\ -1 & \text{і перешкод} \end{cases}$	$\theta_3 \begin{cases} = 0,6 \\ = 0,8 \\ = 1 \end{cases}$	0,2
$\bar{\theta}_i$	$\theta_i$	$\Delta\theta_{is}$
$\bar{\theta}_0 = 1$	1	—
$\bar{\theta}_4 = \begin{cases} +1 & \text{Сильна взаємодія змінних } x_i \\ 0 & \text{Середня взаємодія змінних } x_i \\ -1 & \text{Слабка взаємодія змінних } x_i \end{cases}$	$\theta_4 \begin{cases} = \pi/15 \\ = 19\pi/120 \\ = \pi/4 \end{cases}$	$11\pi / 120$
$\bar{\theta}_5 = \begin{cases} +1 & \text{Мала вибірка} \\ 0 & \text{Сильна вибірка} \\ -1 & \text{Велика вибірка} \end{cases}$	$\theta_5 = M \begin{cases} = 200 \text{ точок} \\ = 500 \text{ точок} \\ = 800 \text{ точок} \end{cases}$	0,3
$\bar{\theta}_6 = \begin{cases} +1 & \text{Сильно наближенна модель} \\ 0 & \text{Наближена наближена модель} \\ -1 & \text{Точна наближенна модель} \end{cases}$	$\theta_6 \begin{cases} = 0,5 \\ = 0,025 \\ = 0 \end{cases}$	0,25

$\bar{\theta}_7 = \begin{cases} +1 & \text{Число періодів основної} \\ 0 & \text{гармоніки корисного} \\ -1 & \text{сигналу на виборці} \end{cases}$	$\theta_7 \begin{cases} = 4 \\ = 2,5 \\ = 1 \end{cases}$	2,5
--	--	-----

Показник (2.19) наближено визначає як зміщення (унаслідок перешкод у  $x(t)$ ), так і три середньоквадратичних відхилення (унаслідок перешкод в  $y(t)$ ).

Базові значення факторів:

$\theta_{1a} = 50\%$  — рівень перешкод у  $y(k)$ ;

$\theta_{2a} = 50\%$  — рівень перешкод у  $x(k)$ ;

$\theta_{3a} = 0,8$  — час автокореляції перешкод ( $5 \div 8$  дискретів  $k$ ); автокореляційна функція експоненційна зі сталою часу  $T \approx \Delta\tau/\theta_3$ ,  $\Delta\tau$  — крок між дискетами  $k$ ;

$\theta_{4a} = 19\pi/120 \approx 28^\circ$  — зсув по фазі між сигналами  $x_1^*(k)$  і  $x_2^*(k)$ ; тоді коефіцієнт кореляції  $r_{x_1^*x_2^*} = \cos 28^\circ = 0,87$ .

Якщо модель об'єкту  $n$ -вимірна, то інваріантною до розмірності  $n$  буде величина визначника  $D_1$  кореляційної матриці:

$$D_1 = \det \begin{bmatrix} r_{x_1x_1} & \cdots & r_{x_1x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ r_{x_nx_1} & \cdots & r_{x_nx_n} \end{bmatrix}. \quad (2.20)$$

Для базового варіанту

$$D_T = \det \begin{bmatrix} 1 & 0,87 \\ 0,87 & 1 \end{bmatrix} = 0,243;$$

$\theta_{5a} = 500$  точок  $k$ ;

$\theta_{6a} = 0,25$  (тобто  $\varepsilon_0(k)$  становить 25 % амплітуди  $x_1^*(k)$  і  $x_2^*(k)$  або 12,5 % амплітуди  $y^*(t)$ ).

Комп'ютерний експеримент відповідно до плану (Табл. 2.2) виконувався  $m_j$  разів, кожного разу з новими шумами і результати усереднювались.

Далі, внаслідок ортогональності  $\bar{\theta}_i(j)$  по МНК незалежно обчислювались коефіцієнти  $\chi_i$ ,

$$\chi_i = \frac{\Delta\theta_{id}}{8} \sum_{j=1}^8 I(j) \bar{\theta}_i(j), \quad i = \overline{1,5}, \quad (2.21)$$

регресійної моделі залежності показника (2.19):

$$I(j) = \sum_{i=0}^7 \chi_i \cdot \theta_i(j); \quad j = \overline{1,8}, \quad (2.22)$$

де  $\chi_0$  — значення  $I$  для базового режиму  $\theta_0$ ;  $\chi_1, \chi_2$  — визначають чутливість показника  $I_l$  до перешкод у  $y(k)$  і  $x(k)$ ;  $\chi_3 \div \chi_6$  — відповідно чутливість до змін полоси спектра перешкод, корельованості  $x_i(k)$ , розмірності вибірок даних, неточності структури моделі.

### 2.5.3. Вибір найкращого з множини $\{Opt_{qk}\}$ методу ідентифікації для реальної ситуації

Шляхом експрес-аналізу оцінюється рівні реальних факторів:

$$\theta_1 = \left( \sum_{k=1}^M (y(k) - \hat{y}(k))^2 / (\hat{y}(k))^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

де  $\hat{y}(k)$  — прогладжене ковзним середнім значення  $y(k)$ ;  $\theta_2$  — середнє по всім  $x_i(k)$  значення шум-сигнал;  $\theta_3$  — визначається шляхом апроксимації експонентою  $R_e(\tau) = \sigma_e^2 \cdot e^{-k\Delta t/T}$  автокореляційної функції оцінки перешкоди в



$y(k)$ ; тоді  $\theta_3 = \Delta t / T$ ;  $\theta_4 = \frac{19}{120} \pi \frac{D_1}{D_T}$ ;  $\theta_5$  — кількість  $M$  точок

реальної вибірки;  $\theta_6 = [\varepsilon^T \varepsilon / \hat{Y}^T \hat{Y}]^{1/2}$  — нормові СКО, де  $\varepsilon$  — похибка між  $Y$  і  $\hat{Y}$ ;

$\theta_7$  — середній період оцінки  $\hat{y}(k)$  сигналу  $y^*(k)$ :

$$\theta_7 = [5\dot{l} / (r-1)] / 90,$$

де  $r$  — кількість перетинів  $\hat{y}(k)$  її середнього значення, в базовому варіанті  $2\dot{l} / (r-1) = 90$ .

Обчисливши експрес-аналізом оцінки  $\theta_i$  реальних факторів, визначаємо значення показника (2.19) для конкретного  $s$ -го метода  $Opt_s$ :

$$I_s = I_0 + \sum_{i=0}^7 \chi_i \cdot \theta_i. \quad (2.23)$$

Як найкращий беруть той метод, для якого показник (2.23) мінімальний. У табл. 2.4 наведені регресійні моделі (2.23) показника  $I$  (2.19) для множини методів ідентифікації (розділ 3 і [69]): МНК — метод найменших квадратів; УМНК — узагальнений МНК; МПК — метод прогнозу кореляцій; МБК — метод багатократного корелювання; МОД — метод однократного ділення; МБД — метод багатократного ділення.

Таблиця 2.4

### Регресійні моделі показника

	$\theta_0$	$\theta_1$	$\theta_2$	$\theta_3$	$\theta_4$	$\theta_5$	$\theta_6$	$\theta_7$
Модель МНК								
$J$	0,83	0,72	0,18	-1,9	0,7	1,15	-	-
							0,89	0,15
Модель УМНК								
$J$	0,77	0,89	0,1	-	0,78	1,4	-	-
				1,37			0,65	0,08

Модель МПК								
<i>J</i>	1,6	– 1,17	2,17	– 4,53	1,75	–2,05	3,04	– 0,48
Модель МБК								
<i>J</i>	18,85	– 25,7	36,2	– 67,8	35,68	– 44,39	68,7	– 9,24
Модель МОД								
<i>J</i>	2,72	4,51	–3,4	10,8	4,36	7,34	– 7,87	– 1,29
Модель МБД								
<i>J</i>	0,96	0,81	0,27	– 2,12	0,77	1,34	– 0,95	– 0,14

Взагалі за результатами тестування методів  $Opt_{qk}$  можна зробити такі висновки:

- СМНК добре працює, якщо шуми  $N$  у  $X$  типу «білого шуму», модель наближена ( $\varepsilon^* \neq 0$ ),  $X^*$  — гладка функція,  $N_i$  у  $N$  — взаємно не корельовані;
- МПК — на відміну від СМНК добре працює і з «кольоровим» шумом у  $X$ ;
- УМНК — на відміну від МНК перешкоди можуть бути взаємокорельовані;
- МБК — має робастність до збоїв у даних, але чутливий до неточності моделі (бажана малість  $\varepsilon^*$ );
- МБД — стійкий до широкополосних перешкод, в іншому подібний до МБК;
- МОД — простіший за МНК, для малих  $\varepsilon^*$  дає незміщені оцінки параметрів  $\beta$  за наявності шумів у  $X$ .

## 2.6. Енергетичний підхід до побудови параметричних моделей об'єкту

Для кількісної і якісної оцінки процесів енергоперетворення, що протікають в об'єкті, використовують параметричні математичні моделі, що припускають застосування сис-

тем диференціальних або диференційно-алгебраїчних рівнянь [21, 22, 23, 48, 51]. Найбільш загальним підходом у математичному моделюванні цього типу, який дозволяє детальніше враховувати процеси перетворення енергії в об'єкті, є *енергетичний формалізм Лагранжа* [36, 48, 51].

Відповідно до сучасних уявлень енергія  $W$  є мірою кількості руху матерії, незалежно від форми її прояву (механічною, електромагнітною, тепловою, хімічною, атомною). Енергія може акумулюватися на одних елементах об'єкту у вигляді потенційної або кінетичної складових (індуктивні і ємнісні елементи електричних кіл, пружні елементи механічних пристроїв, теплопередавальні елементи теплових пристроїв тощо). На інших елементах об'єкту енергія розсіюється (резистивні елементи електричних пристроїв, дисипативні елементи механічних пристроїв, теплопередавальні елементи теплових пристроїв).

Для системи, що складається з  $M$  елементів, припасена енергія визначається виразом:

$$W_K = \sum_{i=1}^N W_i^T + \sum_{j=1}^P W_j^U, \quad (2.24)$$

де  $W_i^T$ ,  $i=1, (1), N \leq M$  — величина кінетичної енергії, припасеної в  $N$  елементах об'єкту;  $W_j^U$ ,  $j=1, (1), P \leq M$  — величина потенціальної енергії, припасеної в  $P$  елементах об'єкту.

Якщо в системі присутні  $G$  елементів, кожний з яких розсіює енергію  $W_k^R$ , тоді розсіяна енергія визначається як сума:

$$W^R = \sum_{k=1}^G W_k^R. \quad (2.25)$$

Стан об'єкту визначається набором змінних, що характеризують процеси в підсистемах. Кожен з наборів є окремою підсистемою певної фізичної природи. Для представлення процесів перетворення енергії об'єкту в цілому, і для взаємозв'язку різнорідних підсистем між собою, згідно з формалізмом Лагранжа, вводять:

– *узагальнені координати*  $q_i, i = 1 \dots S$  — усі  $S$  фізичних змінних, незалежно від їх фізичної природи, які однозначно визначають стан об'єкту в цілому (кут повороту, заряд, температура, ...);

– *узагальнені сили*  $f_i$ , — сили, що діють у напрямі узагальнених змінних  $q_i$ , і визначавані як  $f_i = \frac{dW_i}{dq_i}$ ;

– співвідношення

$$L = W^T - W^U, \quad (2.26)$$

$$H = W^T + W^U \quad (2.27)$$

називаються *силовими функціями*.

Ці функції відомі як функція Лагранжа  $L$  і функція Гамільтона  $H$ . Вони містять досить глибоку інформацію про процеси в підсистемах і їх взаємодію. З їх допомогою досягається універсальність моделювання різнорідних підсистем об'єкту з одночасним збігом опису електричних кіл рівняннями Кірхгофа, які моделюють в об'єкті основний елемент ЕТП — електротехнологічний перетворювач.

Рівняння Лагранжа другого роду для систем, у яких присутні елементи, що розсіюють енергію, і на які чинять зовнішні дії  $F(t)$  [36, 73, 92, 94]:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_m} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_m} = F(t), \quad m = 1 \div M, \quad (2.28)$$

де  $D$  — функція розсіювання Релея;  $\dot{q}_m = \frac{dq_m}{dt}$  — швидкість змін  $m$ -ї узагальненої координати.

Рівняння (2.28) має ряд властивостей, які роблять їх вибір переважним порівняно з іншими підходами:

1) для основної частини об'єкту (джерела електричної енергії, електричного перетворювача, електротехнологічного перетворювача) рівняння Лагранжа другого роду (2.28) тотожні рівнянням, складеним за законами Кірхгофа, що дає можливість використання прийомів, методів і способів, добре розроблених у теорії електричних кіл [48];

2) рівняння Лагранжа, так само як і рівняння для енергій, зберігають незмінною свою форму для різнорідних підсистем, унаслідок чого відпадає необхідність використання відповідно різнорідних систем змінних параметрів і понять;

3) рівняння Лагранжа другого роду (2.28) виражають через силову функцію Лагранжа  $L$  (2.26), яка дозволяє визначити всі необхідні векторні величини (сили, моменти, швидкості, ...), будучи в той самий час скалярною функцією, чим досягається істотне спрощення процедури моделювання.

Для ілюстрації застосування енергетичного формалізму Лагранжа розглянемо найпростіший приклад.

**Приклад 2.3.** Електричне коло, що містить активний опір, індуктивний і ємнісний елементи (рис. 2.4). Дана система характеризується однією узагальненою координатою  $q_1$  — зарядом  $q$ . Швидкість зміни узагальненої координати  $q_1$  є струм, що протікає у колі  $\dot{q}_1 = i$ . Кінетичною енергією в даному випадку є енергія магнітного поля, запасена індуктивним елементом  $W_K^T = \frac{1}{2} Li^2$ . В якості потенційної енергії виступає енергія електричного поля, що запасається конденсатором,  $W_K^U = \frac{q^2}{2C}$ . На активному опорі відбувається розсіювання частини енергії системи.

За законом Джоуля–Ленца величина розсіяної енергії  $D = R \cdot i^2$ . У системі (рис. 2.4) присутня одна узагальнена сила  $F_1(t)$ , яка дорівнює значенню ЕРС джерела  $e(t)$ . Значення активного опору, індуктивності і ємності, що називаються *параметрами системи*, вважаємо постійними, тоді силова функція Лагранжа (2.26) для даної системи матиме наступний вигляд:

$$L_K = \frac{1}{2} Li^2 - \frac{q^2}{2C}. \quad (2.29)$$

$$W_K^T = 0,5Li^2 \quad D = Ri^2 \quad W_C^T = q^2/2C$$

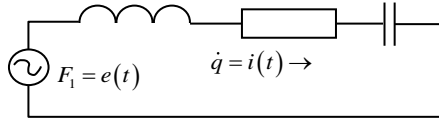


Рис. 2.4. Електричне коло, яке містить елементи, що запасують і розсіюють енергію

Похідні, що входять в рівняння Лагранжа другого роду:

$$\frac{\partial L_K}{\partial \dot{q}_1} = Li; \quad (2.30)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L_K}{\partial \dot{q}_1} \right) = L \frac{di}{dt}; \quad (2.31)$$

$$\frac{\partial L_C}{\partial q_1} = \frac{q}{C}; \quad (2.32)$$

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{q}_1} = Ri. \quad (2.33)$$

Підставляючи отримані вирази в (2.27), отримуємо:

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{q}{C} = e. \quad (2.34)$$

Співвідношення (2.34), складене за допомогою рівняння Лагранжа другого роду повністю співпадає з рівнянням для даного кола, складеним за II законом Кірхгофа.

Далі, рівняння (2.34) може бути використане для визначення поточних значень узагальненої координати за відомими значеннями параметрів системи і закону зміни узагальненої сили (пряме завдання), або для визначення невідомих значень параметрів за відомими законами зміни узагальненої координати і узагальненої сили (завдання ідентифікації або зворотне завдання).

## Запитання

1. Визначте поняття системного підходу.
2. Чому не існує моделей, ізоморфних до об'єкта?
3. В чому принципова різниця між системами (табл. 2.1)?
4. Поясніть сутність декомпозиції, композиції і цілеспрямованості підсистем різних рівнів.
5. Поясніть принцип узгодженості підсистем різних рівнів (формула 2.11).
6. Яка роль проєкторів у багаторівневій системі?
7. В чому полягає універсальність енергетичного підходу до побудови моделей?
8. Поясніть принцип роботи тренажера (рис. 2.5).

## Розділ 3

### ДОСЛІДЖЕННЯ МОЖЛИВИХ ОБМЕЖЕНЬ СТАТИСТИЧНО ОПТИМАЛЬНИХ МЕТОДІВ ІДЕНТИФІКАЦІЇ ОБ'ЄКТІВ

#### 3.1. Ідентифікація статичних характеристик в об'єктів методом найменших квадратів

##### 3.1.1. Регресійні моделі об'єктів та їх ідентифікація

Лінійні і нелінійні, одновимірні і багатовимірні статичні залежності між змінними стану об'єкту, як було показано в розділі 1, можна подати рядом Тейлора або відповідним йому степеневим поліномом від однієї чи декількох змінних, складові якого можна умовно розглядати як незалежні змінні  $x_i$  лінійної (відносно невідомих коефіцієнтів  $\beta_i$ ) регресійної моделі вихідної змінної  $Y$ .

Якщо на вихідну змінну  $Y$  об'єкту впливає декілька вхідних  $X_1, X_2 \dots X_m$ , то маємо справу з множинною регресією [1, 2, 5, 8, 9, 13]:

$$M\{Y / X_1, X_2 \dots X_m\} = X\beta, \quad (3.1)$$

де  $X = (x_1, x_2, \dots, x_m)^T$ ,  $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m)^T$  — вектор параметрів  $\beta_i$ , які оцінюються  $i = \overline{1, m}$ ,  $M\{y/x\}$  — умовне математичне сподівання вихідної змінної  $Y$  від  $m$  вхідних  $(x_1, x_2, \dots, x_m)$ .

Теоретична лінійна модель у скалярному вигляді:





раметрів. Емпірична модель є статистичним аналогом теоретичної. За її допомогою визначаються оцінки параметрів моделі (3.2) шляхом статистичної обробки вибірки даних. Емпірична модель  $Y$  у векторно-матричній формі

$$Y = X\beta^* + e, \quad (3.5)$$

де

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1m} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2m} \\ & & & \vdots & \\ 1 & x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nm} \end{pmatrix}, \beta^* = \begin{pmatrix} \beta_0^* \\ \beta_1^* \\ \beta_2^* \\ \vdots \\ \beta_m^* \end{pmatrix}, e = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}, \quad (3.6)$$

де  $\beta^*$  — статистична оцінка теоретичного вектора  $\beta$  лінійної множинної регресії (3.4);  $e$  — статистична оцінка випадкового вектора похибок  $\varepsilon$  цієї ж моделі.

Якщо компоненти вектора  $\varepsilon$  — це невідомі випадкові величини, то компоненти  $e_i$  вектора  $e$  можуть бути обчислені за даними вибірки.

Для визначення вектора  $\beta^*$  використовується метод найменших квадратів. Для оптимальності МНК мають бути виконані умови Гаусса–Маркова:

- 1)  $M(\varepsilon_i) = 0, \quad i = \overline{1, n};$
- 2)  $\text{cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = \begin{cases} 0, & i \neq j; \\ \sigma_\varepsilon^2, & i = j, \end{cases}$

тобто між випадковими відхиленнями  $\varepsilon_i$  і  $\varepsilon_j$  повинен бути відсутній кореляційний зв'язок, та дисперсія  $\sigma_{\varepsilon_i}^2 = \text{const} = \sigma^2$ ;

3) між регресорами моделі і випадковим вектором  $\varepsilon$  теж має бути відсутній кореляційний зв'язок, тобто  $\text{cov}(\varepsilon_i, x_i) = 0, i = \overline{1, n};$

- 4) регресори моделі повинні бути точними;

5) модель має бути лінійною відносно своїх параметрів;

б) між векторами  $X_1, X_2, \dots, X_m$ ,

$$\text{де } X_1 = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{n2} \end{pmatrix}, \dots, X_m = \begin{pmatrix} x_{1m} \\ x_{2m} \\ \vdots \\ x_{nm} \end{pmatrix}, \text{ має бути відсут-$$

ня лінійна залежність, щоб визначник матриці  $X^T X$  був більше нуля;

7) випадковий вектор  $\varepsilon$  має багатовимірний нормальний закон розподілу ймовірностей:

$$\varepsilon \sim N(0; \sigma \cdot I_n);$$

кожний компонент  $\varepsilon_i$  вектора  $\varepsilon$  також буде мати нормальний закон розподілу

$$\varepsilon_i \sim N(0; \sigma), \quad i = \overline{1, n};$$

8) ранг  $r(X)$  матриці  $X$  повинен бути не менше  $(m+1)$ .

Виконання цих умов дає право на використання звичайного МНК для визначення статистично-оптимальних оцінок  $\beta^*$  параметрів  $\beta$  теоретичної лінійної множинної регресії, як моделі статистики об'єкту, перевірки статистичних гіпотез та побудови інтервальних статистичних оцінок.

### **3.1.2. Оцінювання вектора $\beta$ за методом найменших квадратів (МНК)**

Із виразу (3.5) вектор похибок  $e$  буде дорівнювати:

$$e = y - X\beta^*. \quad (3.7)$$

Для визначення компонент вектора  $\beta^*$  — статистичних оцінок компонент вектора  $\beta$  використовується МНК. Він полягає в мінімізації по  $\beta^*$  суми квадратів похибок  $e^T e$ :

$$\begin{aligned}
e^T e &= (y - X\beta^*)^T (y - X\beta^*) = \left( y^T - (\beta^*)^T X^T \right) (y - X\beta^*) = \\
&= y^T y - y^T X\beta^* - (\beta^*)^T X^T y + (\beta^*)^T X^T X\beta^* = \\
&= y^T y - 2(\beta^*)^T X^T y + (\beta^*)^T X^T X\beta^*,
\end{aligned} \tag{3.8}$$

де літерою ( $T$ ) позначено транспонування вектора чи матриці.

Необхідна умова мінімуму виразу (3.8):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(e^T e)}{\partial\beta^*} &= \frac{\partial}{\partial\beta^*} (y^T y - 2(\beta^*)^T X^T y + (\beta^*)^T X^T X\beta^*) = \\
&= -2X^T y + X^T X\beta^* + ((\beta^*)^T X^T X)^T = -2X^T y + \\
&+ X^T X\beta^* + X^T X\beta^* = -2X^T y + 2X^T X\beta^* = 0.
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Звідси отримаємо оцінку  $\beta^*$  вектора  $\beta$ :

$$\beta^* = (X^T X)^{-1} X^T y, \tag{3.10}$$

яка складається з точного значення  $\beta$  і випадкової складової:

$$\beta^* = \beta + (X^T X)^{-1} X^T \varepsilon. \tag{3.11}$$

### 3.1.3. Числові характеристики МНК-оцінки $\beta^*$

Оскільки  $\beta^*$  є випадковим вектором, то його компоненти  $\beta_i^*$  будуть випадковими величинами. Тому виникає потреба у визначенні їхніх числових характеристик.

Враховуючи (3.11) отримаємо математичне очікування  $M(\beta^*)$  МНК-оцінки  $\beta^*$ :

$$\begin{aligned}
M(\beta^*) &= M(\beta + (X^T X)^{-1} X^T \varepsilon) = M(\beta) + \\
&+ M((X^T X)^{-1} X^T \varepsilon) = \beta + (X^T X)^{-1} X^T M(\varepsilon) = \beta.
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Оскільки  $M(\varepsilon) = 0$ , то  $M(\beta^*) = \beta$ . Таким чином емпіричний вектор  $\beta^*$  є точковою незміщеною статистичною оцінкою для теоретичного вектора  $\beta$  параметрів.

Для отримання дисперсій компонентів  $\beta_i^*$  емпіричного вектора  $\beta^*$ , як випадкових величин, визначимо коваріаційний момент:

$$\begin{aligned} \text{cov}(\beta^* (\beta^*)^T) &= M(\beta^* - \beta)(\beta^* - \beta)^T = \\ &= M(\beta + (X^T X)^{-1} X^T \varepsilon - \beta)(\beta + (X^T X)^{-1} X^T \varepsilon - \beta)^T = \\ &= M[(X^T X)^{-1} X^T \varepsilon ((X^T X)^{-1} X^T \varepsilon)^T] = \\ &= M[(X^T X)^{-1} X^T \varepsilon \varepsilon^T X ((X^T X)^{-1})^T] = \\ &= (X^T X)^{-1} X^T M \left\{ \begin{array}{c} \left( \begin{array}{c} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{array} \right) (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n) \end{array} \right\} X (X^T X)^{-1} = \\ &= (X^T X)^{-1} X^T M \left( \begin{array}{cccccc} \varepsilon_1^2 & \varepsilon_1 \varepsilon_2 & \cdots & \cdots & \varepsilon_1 \varepsilon_n \\ \varepsilon_2 \varepsilon_1 & \varepsilon_2^2 & \cdots & \cdots & \varepsilon_2 \varepsilon_n \\ & & \vdots & & \\ & & \vdots & & \\ \varepsilon_n \varepsilon_1 & \varepsilon_n \varepsilon_2 & \cdots & \cdots & \varepsilon_n^2 \end{array} \right) X (X^T X)^{-1} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (X^T X)^{-1} X^T \begin{pmatrix} M(\varepsilon_1^2) & M(\varepsilon_1 \varepsilon_2) & \cdots & M(\varepsilon_1 \varepsilon_n) \\ M(\varepsilon_2 \varepsilon_1) & M(\varepsilon_2^2) & \cdots & M(\varepsilon_2 \varepsilon_n) \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots \\ M(\varepsilon_n \varepsilon_1) & M(\varepsilon_n \varepsilon_2) & \cdots & M(\varepsilon_n^2) \end{pmatrix} X (X^T X)^{-1} = \\
&= (X^T X)^{-1} X^T \begin{pmatrix} \sigma_\varepsilon^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_\varepsilon^2 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_\varepsilon^2 \end{pmatrix} X (X^T X)^{-1} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (X^T X)^{-1} X^T \sigma_\varepsilon^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} X (X^T X)^{-1} = \\
&= (X^T X)^{-1} X^T \sigma_\varepsilon^2 I_n X (X^T X)^{-1} = \\
&= \sigma_\varepsilon^2 (X^T X)^{-1} (X^T X) (X^T X)^{-1} = \sigma_\varepsilon^2 (X^T X)^{-1},
\end{aligned}$$

оскільки  $\sigma_\varepsilon^2 = \text{const}$  і  $M(\varepsilon_i \varepsilon_j)$  для  $i \neq j$  дорівнює нулю.

Таким чином коваріаційна матриця оцінок

$$\text{cov}(\beta^* (\beta^*)') = \sigma_\varepsilon^2 (X^T X)^{-1}. \quad (3.13)$$

Позначимо  $c_{ij}$  ( $i, j = \overline{1, n}$ ) елементи оберненої матриці

$C = (X^T X)^{-1}$ . Тоді

$$\text{cov}(\beta^* (\beta^*)') = \sigma_\varepsilon^2 (X^T X)^{-1} = \sigma_\varepsilon^2 C, \quad (3.14)$$

або

$$\sigma_{\varepsilon}^2 \tilde{N} = \sigma_{\varepsilon}^2 \begin{pmatrix} \tilde{n}_{11} & \tilde{n}_{12} & \cdots & \cdots & \tilde{n}_{1n} \\ \tilde{n}_{21} & \tilde{n}_{22} & \cdots & \cdots & \tilde{n}_{2n} \\ & & & \vdots & \\ & & & \vdots & \\ \tilde{n}_{n1} & \tilde{n}_{n2} & \cdots & \cdots & \tilde{n}_{nm} \end{pmatrix}.$$

Далі, враховуючи що

$$\beta \beta^T = \begin{pmatrix} \left( \begin{matrix} \beta_0^* \\ \beta_1^* \\ \beta_2^* \\ \vdots \\ \beta_m^* \end{matrix} \right) \left( \beta_0^*, \beta_1^*, \beta_2^*, \dots, \beta_m^* \right) \end{pmatrix},$$

одержимо коваріаційну матрицю оцінок  $\beta^*$ :

$$\begin{aligned} & \text{cov}(\beta^* (\beta^*)) = \\ & = \begin{pmatrix} \sigma_{\beta_0}^2 \text{cov}(\beta_0^* \beta_1^*) & \text{cov}(\beta_0^* \beta_2^*) & \cdots & \text{cov}(\beta_0^* \beta_m^*) \\ \text{cov}(\beta_1^* \beta_0^*) & \sigma_{\beta_1}^2 \text{cov}(\beta_1^* \beta_2^*) & \cdots & \text{cov}(\beta_1^* \beta_m^*) \\ \text{cov}(\beta_2^* \beta_0^*) & \text{cov}(\beta_2^* \beta_1^*) & \cdots & \text{cov}(\beta_2^* \beta_m^*) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \text{cov}(\beta_m^* \beta_0^*) & \text{cov}(\beta_m^* \beta_1^*) & \cdots & \text{cov}(\beta_m^* \beta_2^*) \sigma_{\beta_m}^2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Оскільки  $\text{cov}(\beta_i^*)^2 = D(\beta_i^*) = \sigma_{\beta_i}^2$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, m$ , то вираз (3.14) набуває такого вигляду:

$$\sigma_{\varepsilon}^2 \tilde{N} = \begin{pmatrix} \sigma_{\beta_0}^2 & \text{cov}(\beta_0^* \beta_1^*) & \text{cov}(\beta_0^* \beta_2^*) & \cdots & \text{cov}(\beta_0^* \beta_m^*) \\ \text{cov}(\beta_1^* \beta_0^*) & \sigma_{\beta_1}^2 & \text{cov}(\beta_1^* \beta_2^*) & \cdots & \text{cov}(\beta_1^* \beta_m^*) \\ \text{cov}(\beta_2^* \beta_0^*) & \text{cov}(\beta_2^* \beta_1^*) & \sigma_{\beta_2}^2 & \cdots & \text{cov}(\beta_2^* \beta_m^*) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{cov}(\beta_m^* \beta_0^*) & \text{cov}(\beta_m^* \beta_1^*) & \text{cov}(\beta_m^* \beta_2^*) & \cdots & \sigma_{\beta_m}^2 \end{pmatrix} =$$

$$= \sigma_{\varepsilon}^2 \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & \cdots & c_{1,m+1} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & \cdots & c_{2,m+1} \\ & & \vdots & \vdots & \\ & & & \vdots & \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & \cdots & c_{m+1,m+1} \end{pmatrix}, \quad (3.16)$$

де

$$\sigma_{\beta_0}^2 = \sigma_{\varepsilon}^2 c_{11}, \quad \sigma_{\beta_1}^2 = \sigma_{\varepsilon}^2 c_{22}, \quad \sigma_{\beta_2}^2 = \sigma_{\varepsilon}^2 c_{33}, \quad \dots, \quad \sigma_{\beta_m}^2 = \sigma_{\varepsilon}^2 c_{m+1,m+1}.$$

Отже дисперсії оцінок  $\beta_i^*$  будуть дорівнювати добуткам діагональних елементів  $c_{ij}$  матриці  $C$ , помножених на  $\sigma_{\varepsilon}^2$ , де  $C = (X^T X)^{-1}$ .

### 3.1.4. Числові характеристики рівняння регресії

Розглянемо рівняння множинної лінійної регресії з параметрами  $\beta_i^*$  ( $i = 0, 1, 2, \dots, m$ ), визначеними за даними вибірки:

$$y_i^* = \beta_0^* + \beta_1^* x_1 + \beta_2^* x_2 + \cdots + \beta_m^* x_m, \quad (3.17)$$

де  $y_i^*$  — одне із можливих значень для заданого вектора  $x^T = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ .

Оскільки емпіричні коефіцієнти функції (3.17) випадкові величини, то і емпірична функція  $y_i^*$  буде випадковою.

Постає питання про визначення її характеристик:



1. *Математичне очікування:*

$$\begin{aligned} M(y_i^*) &= M(\beta_0^* + \beta_1^*x_1 + \beta_2^*x_2 + \dots + \beta_m^*x_m) = \\ &= M(\beta_0^*) + x_1M(\beta_1^*) + x_2M(\beta_2^*) + \dots + \\ &+ x_mM(\beta_m^*) = \beta_0 + \beta_1x_1 + \beta_2x_2 + \dots + \beta_mx_m. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Тобто  $y^* = x\beta^*$  є незмінною оцінкою теоретичної функції  $y = x\beta$ . Із рівняння (3.18) випливає, що для емпіричної функції

регресії  $y^* = X\beta^*$  буде виконуватися рівність

$$M(y^*) = M(X\beta_0^*) = XM(\beta^*) = X\beta. \quad (3.19)$$

2. *Дисперсія:*

$$\begin{aligned} D(y^*) &= D(\beta_0^* + \beta_1^*x_1 + \beta_2^*x_2 + \dots + \beta_m^*x_m) = \\ &= D(\beta_0^*) + x_1^2D(\beta_1^*) + x_2^2D(\beta_2^*) + \dots + x_m^2D(\beta_m^*) + \\ &+ 2x_1\text{cov}(\beta_0^*\beta_1^*) + 2x_2\text{cov}(\beta_0^*\beta_2^*) + \dots + 2x_m\text{cov}(\beta_0^*\beta_m^*) + \\ &+ 2x_1x_2\text{cov}(\beta_1^*\beta_2^*) + \dots + 2x_1x_m\text{cov}(\beta_1^*\beta_m^*) + \dots + \\ &+ 2x_{m-1}x_m\text{cov}(\beta_{m-1}^*\beta_m^*) = x^T\text{cov}((\beta^*)^T\beta^*)x. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Векторно-матричний вигляд рівняння (3.20):

$$D(y_i^*) = \sigma_\varepsilon^2 x^T (X^T X)^{-1} x.$$

3. *Середньоквадратичне відхилення:*

$$\sigma_{y_i^*} = \sigma_\varepsilon \sqrt{x^T (X^T X)^{-1} x}. \quad (3.21)$$

4. *Коефіцієнт детермінації* для множинної лінійної регресії — це неспадна функція від числа  $m$  регресорів  $x$ :

$$R^2 = 1 - \frac{\sum e_i^2}{\sum (y_i - \bar{y})^2}. \quad (3.22)$$

Кожна нова змінна надає моделі додаткову інформацію і область невизначеності при цьому зменшується.

При обчисленні  $R^2$  для одержання її незміщених статистичних оцінок здійснюють поправку в чисельнику і знаменнику (3.22) на число ступенів вільності. Такий коефіцієнт називають скоригованим [1, 2, 6]:

$$R_{\text{не}}^2 = 1 - \frac{\sum e_i^2}{\sum (y_i - \bar{y})^2} = 1 - \frac{(n-1) \sum e_i^2}{(n-m-1) \sum (y_i - \bar{y})^2}. \quad (3.23)$$

Враховуючи, що

$$\frac{\sum \hat{o}_i^2}{\sum (y_i - \bar{y})^2} = 1 - R^2, \quad (3.24)$$

остаточно одержимо

$$R_{\text{не}}^2 = 1 - (1 - R^2) \frac{n-1}{n-m-1}. \quad (3.25)$$

### 5. Довірчі інтервали:

Для перевірки значущості статистичних оцінок  $\beta_i^*$  і щоб знайти для них, а також для множинної лінійної регресії, довірчі інтервали, необхідно визначити їхні закони розподілу, як випадкових величин.

Оскільки  $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma_\varepsilon)$  випадковий вектор, який має  $n$ -вимірний нормальний закон розподілу  $N(0, \sigma_\varepsilon^2 I_n)$ , то із виразу (3.11) випливає, що

$$\beta_i^* \sim N\left(\beta, \sigma_\varepsilon^2 (X^T X)^{-1}\right). \quad (3.26)$$

Тоді компоненти  $\beta_i^*$  вектора  $\beta^*$  будуть мати розподіли

$$\beta_i^* \sim N(\beta_i, \sigma_\varepsilon^2 c_{ii}). \quad (3.27)$$

Розподіл випадкової величини:

$$\frac{\beta_i^* - \beta_i}{\sigma_\varepsilon \sqrt{c_{ii}}} \sim N(0, 1). \quad (3.28)$$

Розподіл випадкової величини:

$$\begin{aligned} & (\beta_0^* + \beta_1^* x_1 + \beta_2^* x_2 + \dots + \beta_m^* x_m) \sim \\ & \sim N\left(\beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_m x_m, \sigma_\varepsilon^2 x^T (X^T X)^{-1} x\right). \end{aligned}$$

Позначимо

$$y_i^* = \beta_0^* + \beta_1^* x_1 + \beta_2^* x_2 + \dots + \beta_m^* x_m, \quad (3.29)$$

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_m x_m. \quad (3.30)$$

Тоді випадкова величина  $\frac{y_i^* - y_i}{\sigma_{y_i^*}}$  теж буде мати нормований нормальний закон (3.28) розподілу ймовірностей:

$$\frac{y_i^* - y_i}{\sigma_{y_i^*}} \sim N(0;1). \quad (3.31)$$

Для визначення законів розподілу ймовірностей оцінок дисперсій, як випадкових величин  $S_\varepsilon^2$  і  $S_\varepsilon$ , слід дослідити випадковий вектор залишків  $\varepsilon_i$ . Відповідно до передумов МНК компоненти  $\varepsilon_i$  вектора  $\varepsilon_i$  мають нормальний закон розподілу із параметрами  $M(\varepsilon_i) = 0$ ,  $D(\varepsilon_i) = \sigma_\varepsilon^2 = \text{const}$ ,  $\varepsilon_i \sim N(0; \sigma)$ .

Тоді

$$\varepsilon^T \varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)^T \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix} = (n - m - 1) \sum \varepsilon_i^2. \quad (3.32)$$

Враховуючи що  $\varepsilon_i \sim N(0; \sigma_\varepsilon)$ , випадкова величина буде мати  $\chi^2$  розподіл із  $k = n - m - 1$  степенями вільності

$$\frac{\varepsilon T \varepsilon}{(n-m-1)\sigma_\varepsilon^2} \sim \chi^2(n-m-1). \quad (3.33)$$

Якщо

$$e = TY = T(X\beta + \varepsilon) = TX\beta + T\varepsilon = T\varepsilon \text{ і } TX = 0, \text{ а } T^T = T, \quad (3.34)$$

то

$$e^T = (Ty)^T = y^T T^T = (X\beta + \varepsilon)^T T^T = \beta^T X^T T^T + \varepsilon^T T^T = \varepsilon^T T^T, \\ \text{і } \bar{e}\bar{e} = \bar{\varepsilon}' T T \bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}' T \bar{\varepsilon},$$

оскільки  $T^T T = T$ . Тоді випадкова величина (3.33) має  $\chi^2$  розподіл із  $k = n - m - 1$  степенями вільності.

$$\frac{ee^T}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-m-1).$$

Отже, оцінка дисперсії похибки  $\varepsilon$  дорівнює

$$S_\varepsilon^2 \sim \chi^2(n-m-1), \quad (3.35)$$

і її середньоквадратичне значення

$$S_\varepsilon \sim \chi(n-m-1), \quad (3.36)$$

відповідно мають розподіл  $\chi^2$  і розподіл  $\chi$  із  $k = n - m - 1$  степенями вільності.

Враховуючи те, що  $\beta^*$  і  $e$  статистично незалежні, то випадкова величина  $t$  буде мати розподіл Стьюдента із  $k = n - m - 1$  степенями вільності:

$$t = \frac{\beta_i^* - \beta_i}{\sqrt{\frac{\sum e_i^2}{n-m-1} c_{ii}}} \sim t(n-m-1). \quad (3.37)$$

Аналогічно, для функції регресії маємо випадкову величину

$$\frac{y_i^* - y_i}{S_{y_i^*}} \sim t(n - m - 1), \quad (3.38)$$

яка має  $t$ -розподіл із  $k = n - m - 1$  степенями вільності, де

$$S_{y_i^*} = S_\varepsilon \sqrt{x^T (X^T X)^{-1} x}. \quad (3.39)$$

Враховуючи те, що

$$\frac{\sum_{i=1}^m (\beta_i^* - \beta_i)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(m), \quad (3.40)$$

а

$$\frac{\sum e_i^2}{\sigma^2(n - m - 1)} \sim \chi^2(n - m - 1),$$

то відношення

$$\frac{\frac{\sum_{i=1}^m (\beta_i^* - \beta_i)^2}{\sigma^2}}{\frac{\sum e_i^2}{\sigma^2(n - m - 1)}} \sim F(k_1 = m, k_2 = n - m - 1) \quad (3.41)$$

буде мати  $F$ -розподіл Фішера із  $k_1 = m$ ,  $k_2 = n - m - 1$  степенями вільності.

### ***3.1.5. Довірчі інтервали моделі статистики об'єкту та її параметрів $\beta_i$***

Для побудови довірчих інтервалів оцінок параметрів  $\beta_i$  використовують співвідношення (3.37). Із надійністю  $\gamma$  цей інтервал визначається за умови, що

$$P \left( \left| \frac{\beta_i^* - \beta_i}{\sqrt{\frac{\sum e_i^2}{n-m-1}} c_{ii}} \right| < t(\gamma, k) \right) = \gamma. \quad (3.42)$$

Враховуючи що  $\sqrt{\frac{\sum e_i^2}{n-m-1}} c_{ii} = S_{\beta_i^*}$  є незміщеною оцінкою середньоквадратичного відхилення для  $\beta_i^*$ , вираз (3.42) набуде такого вигляду:

$$P \left( \left| \frac{\beta_i^* - \beta_i}{S_{\beta_i^*}} \right| < t(\gamma, k) \right) = \gamma$$

або

$$P \left( \beta_i^* - t(\gamma, k) S_{\beta_i^*} < \beta_i < \beta_i^* + t(\gamma, k) S_{\beta_i^*} \right) = \gamma. \quad (3.43)$$

Тобто, із заданою надійністю  $\gamma$  параметр  $\beta_i$  буде міститися в проміжку

$$\beta_i^* - t(\gamma, k) S_{\beta_i^*} < \beta_i < \beta_i^* + t(\gamma, k) S_{\beta_i^*}, \quad (3.44)$$

де  $t(\gamma, k)$  знаходять за таблицею (дод. 1) за заданою надійністю  $\gamma$  і числом степенів вільності  $k = n - m - 1$ .

Аналогічно для побудови довірчого інтервалу для теоретичної множинної лінійної функції регресії із заданою надійністю  $\gamma$  використовується рівність

$$P \left( \left| \frac{y_i^* - y_i}{S_{y_i^*}} \right| \sim t(\gamma, k) \right) = \gamma, \quad (3.45)$$

або

$$y_i^* - t(\gamma, k) S_{y_i^*} < y_i < y_i^* + t(\gamma, k) S_{y_i^*}, \quad (3.46)$$

де  $y_i^*$ ,  $S_{y_i^*}$  визначають за формулами (3.17), (3.37) для фіксованих значень вектора  $x^T = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

Якщо до значень  $y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_m x_m$  додати можливі відхилення залежної змінної  $Y$  від функції регресії, то до дисперсії  $D(y_i^*)$  необхідно додати дисперсії випадкової величини  $\varepsilon_i$ , яка дорівнює  $\sigma_\varepsilon^2$ . Однак, враховуючи, що  $\sigma_\varepsilon^2$  невідома величина, використовуємо її точкову незміщену статичну оцінку  $S_\varepsilon^2$ :

$$\left(S_{y_i^*}^*\right)^2 = S_\varepsilon^2 \left( I + x^T (X^T X)^{-1} x \right). \quad (3.47)$$

Тоді довірчий інтервал для  $y_i$  буде дорівнювати:

$$y_i^* - t(\gamma, k) S_{y_i^*} < y_i < y_i^* + t(\gamma, k) S_{y_i^*}. \quad (3.48)$$

### ***3.1.6. Перевірка статистичної значущості коефіцієнтів теоретичного рівняння регресії***

Статистична значущість коефіцієнтів теоретичної множинної лінійної регресії із  $m$  регресорами здійснюється на основі  $t$ -статистики

$$t_{\beta_i}^* = \frac{\beta_i^* - \beta_i}{S_{\beta_i^*}}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (3.49)$$

яка має розподіл Стьюдента із  $k = n - m - 1$  степенями вільності.

Для заданого рівняння значущості  $\alpha$  здійснюється перевірка правдивості статистичної гіпотези  $H_0: \beta_i = 0$  за альтернативної гіпотези  $H_\alpha: \beta_i \neq 0$ .

Формулювання альтернативної гіпотези дає підстави для побудови двобічної критичної області. Враховуючи те, що  $t$ -розподіл визначається парною диференційною функцією, то за заданим значенням  $\alpha$  і числом степенів вільності

$k = n - m - 1$  знаходять критичне значення  $t'_{\varepsilon\delta}''\left(\frac{\alpha}{2}; k\right)$  за таблицею [ ].

Враховуючи те, що  $\left|t'_{\varepsilon\delta}\left(\frac{\alpha}{2}; k\right)\right| = t''_{\varepsilon\delta}\left(\frac{\alpha}{2}; k\right)$ , тобто критичні точки симетрично розташовані відносно нуля, область прийняття гіпотези  $H_0$  дорівнюватиме

$$\left[ t'_{\varepsilon\delta}\left(\frac{\alpha}{2}; k\right), t''_{\varepsilon\delta}\left(\frac{\alpha}{2}; k\right) \right].$$

Спостережуване значення статистичного критерію обчислюється за формулою

$$t_{\beta_i}^* = \frac{\beta_i^*}{S_{\beta_i}^*}. \quad (3.50)$$

Якщо  $|t_{\beta_i}^*| \in \left[ t'_{\varepsilon\delta}\left(\frac{\alpha}{2}; k\right), t''_{\varepsilon\delta}\left(\frac{\alpha}{2}; k\right) \right]$ , то коефіцієнти  $\beta_i$

вважають статистично незначущими, тобто вони статистично близькі до нуля. Це буде означати, що змінна  $X_i$  лінійно не пов'язана із залежною змінною  $Y$  і її присутність у моделі можна вважати зайвою із статистичного погляду.

За виявлення такої ситуації рекомендується вивести  $X_i$  із моделі, що не викличе зниження її якості, але надасть більш чіткої конкретності. Якщо

$$|t_{\beta_i}^*| \notin \left[ t'_{\varepsilon\delta}\left(\frac{\alpha}{2}; k\right), t''_{\varepsilon\delta}\left(\frac{\alpha}{2}; k\right) \right],$$

то коефіцієнти  $\beta_i$  вважаються статистично значущими, а входна змінна  $X_i$  має вплив на вихідну змінну  $Y$  об'єкта.

### 3.1.7. Перевірка загальної якості моделі об'єкту

Після оцінювання індивідуальної статистичної значущості кожного із коефіцієнтів  $\beta_i$  здійснюється сукупна пере-



вірка коефіцієнтів, тобто перевіряється на правдивість статистична гіпотеза:

$$H_0 : \beta_0 = \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_m = 0$$

для заданого рівня довіри  $\alpha$ .

Якщо  $H_0$  не відхиляється, то можна зробити висновок, що сукупний вплив усіх  $m$  змінних  $x_i$  на залежну змінну  $Y$  можна вважати статистично не суттєвим, а загальну якість рівняння регресії низькою.

Перевірку цієї гіпотези можна здійснити на основі дисперсійного аналізу, де порівнюються пояснювальна  $\left( \frac{\sum (y_i^* - \bar{y})^2}{m} \right)$  та залишкова дисперсії.

У цьому разі нульова гіпотеза набуває такого формулювання:

$$H_0 : \frac{\sum (y_i^* - \bar{y})^2}{m} = \frac{\sum e_i^2}{n - m - 1}, \quad (3.51)$$

за альтернативної гіпотези

$$H_\alpha : \frac{\sum (y_i^* - \bar{y})^2}{m} > \frac{\sum e_i^2}{n - m - 1}. \quad (3.52)$$

Для перевірки правдивості  $H_0$  беруть статистичний критерій

$$F = \frac{\frac{\sum (y_i^* - \bar{y})^2}{m}}{\frac{\sum (y_i - y_i^*)^2}{n - m - 1}} = \frac{(n - m - 1) \sum (y_i^* - \bar{y})^2}{m \sum (y_i - y_i^*)^2}, \quad (3.53)$$

який має розподіл Фішера із  $k_1 = m$ ,  $k_2 = n - m - 1$  степенями вільності і який визначений на інтервалі  $[0, \infty)$ .

Формулювання альтернативної гіпотези дає підстави для побудови правобічної критичної області. Критична точка

для неї визначається за заданим  $\alpha$  і числом степенів вільності  $k_1 = m$ ,  $k_2 = n - m - 1$  за таблицею  $F$ -критерію [ ].

Спостережуване значення критерію  $F_{\text{н}}^*$  обчислюється за формулою (3.53). Якщо  $F_{\text{н}}^* > [F_{\text{вд}}(\alpha; k_1; k_2)]$ , то  $H_0$  відхиляється на користь  $H_\alpha$ . Це означає, що пояснювальна дисперсія є суттєво більшою залишкової, а це говорить про те, що рівняння регресії якісно моделює об'єкт ідентифікації.

За умови  $F_{\text{н}}^* \in [0, F_{\text{вд}}(\alpha; k_1; k_2)]$  немає підстави для відхилення  $H_0$ . А це означає, що пояснювальна дисперсія буде спільновимірною із дисперсією, викликаною впливом випадкових факторів. Це дає підстави стверджувати, що сукупний вплив пояснювальних змінних моделі на залежну змінну  $Y$  несуттєвий, а тому якість моделі в цьому випадку буде низькою.

На практиці частіше замість вище розглянутої гіпотези перевіряється на правдивість тісно з нею пов'язана гіпотеза про статистичну значущість коефіцієнта детермінації:

$$R^2 = 1 - \frac{\sum e_i^2}{\sum (y_i - \bar{y})^2}, \quad (3.54)$$

де  $\left( \frac{\sum e_i^2}{\sum (y_i - \bar{y})^2} \right)$  визначає частку розсіювання залежної змінної  $Y$  відносно емпіричної регресії.

Отже, необхідно перевірити правдивість  $H_0 : R^2 = 0$  при альтернативній  $H_\alpha : R^2 > 0$ . За статистичний критерій обирають випадкову величину

$$F = \frac{R^2}{1 - R^2} \cdot \frac{n - m - 1}{m}, \quad (3.55)$$

яка має розподіл Фішера із  $k_1 = m$ ,  $k_2 = n - m - 1$  степенями вільності

$$F = \frac{\sum (y_i^* - \bar{y})^2}{\sum (y_i - y_i^*)^2} \cdot \frac{(n-m-1)}{m}. \quad (3.56)$$

Критерій (3.55) отримано із  $F$ -статистики, якщо чисельник і знаменник поділити на  $\sum (y_i - \bar{y})^2$ .

Із виразу (3.55) випливає, що  $F = 0$  якщо  $R^2 = 0$ .

Отже, для перевірки статистичної гіпотези  $H_0 : F = 0 (R^2 = 0)$  для заданого рівня значущості  $\alpha$  за таблицею [ ] знаходять  $F_{\epsilon_0}(\alpha; k_1; k_2)$ , який буде визначати критичну область  $F_{\epsilon_0}((\alpha; k_1; k_2); \infty)$ . Обчисливши спостережуване значення критерію, за формулою (3.55) визначаємо наступне:

1) якщо  $F_{\text{м}}^* > F_{\epsilon_0}$ , то  $H_0$  відхиляється, а це рівнозначно твердженню, що  $R^2 > 0$ , тобто  $R^2$  є статистично значущим. У цьому разі можна зробити висновок, що рівняння регресії достатньо якісно моделює динаміку зміни залежної змінної  $Y$ ;

2) якщо  $F_{\text{м}}^* < F_{\epsilon_0}$  немає підстав для відхилення  $H_0$ ,  $R^2 = 0$ , а це інформує про те, що сукупний вплив регресорів моделі несуттєвий, а отже, якість моделі в цьому випадку низька.

### **3.1.8. Визначення моделі статички генератора постійного струму**

За даними пасивного експерименту (табл. 3.1) необхідно знайти залежність не точно вимірної напруги генератора  $Y$  від струмів якоря  $X_1$  та збудження  $X_2$ .

Таблиця 3.1

Залежність  $U_{я}$  від  $I_{я}$  і  $I_3$ 

№ з/п	Напруга у вольтах, $U_{я}$	Струм якоря $X_1$ , в амперах $I_{я}$	Струм збудження $X_2$ , в амперах $I_3$
1	111	6	3
2	103,2	10	1,3
3	108,7	10	1,8
4	101,6	16	1,8
5	117	2	2,4
6	118,9	4	4,0
7	115,8	3	2,0
8	118	6	3,0
9	119	3	4,0
10	106	6	1,6
11	113	6	2,6
12	123	5	2,1
13	114	3	2,0
14	111	3	1,5
15	109,5	8	2,6
16	128	3	2,2
17	106	8	1,8
18	105,8	9	1,6
19	102,8	11	1,6
20	126	1	2,2
21	110,5	6	2,0
22	116,9	7	2,3
23	103,4	9	1,5
24	114	1	1,4
25	123	1	1,8
Середнє	113,024	5,88	2,16

Припустимо лінійну залежність напруги  $Y$  від струмів  $X_1$  і  $X_2$ :

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \varepsilon.$$

Необхідно:

- 1) обчислити статистичну оцінку вектора  $\beta$ ;
- 2) проаналізувати ступінь адекватності побудованої моделі вибіркоvim даним;

3) виконати дисперсійний аналіз моделі та обчислити коефіцієнт множинної детермінації  $R^2$ ;

4) перевірити статистичну значущість коефіцієнта детермінації на основі критерію Фішера;

5) визначити оцінки дисперсій  $S_{\beta_0}^2, S_{\beta_1}^2, S_{\beta_2}^2$  та середньоквадратичні відхилення  $S_{\beta_0}^*, S_{\beta_1}^*, S_{\beta_2}^*$  для статистичних оцінок  $\beta_0^*, \beta_1^*, \beta_2^*$ ;

6) для заданої надійності  $\gamma = 0,95$  побудувати довірчі інтервали параметрів  $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ ;

*Розв'язання:*

1. *Обчислення статистичної оцінки для вектора  $\beta$ .*

Емпіричний вектор  $\beta^*$  визначимо за формулою (3.10):

$$\beta^* = (X^T X)^{-1} X^T y,$$

де

$$(X^T X)^{-1} = \begin{pmatrix} 0,67227 & -0,02897 & -0,21347 \\ -0,02897 & 0,00330 & 0,00441 \\ -0,21347 & 0,00441 & 0,08667 \end{pmatrix},$$

$$X^T y = \begin{pmatrix} 325,6 \\ 1400,4 \\ 762,95 \end{pmatrix}.$$

Статистичні точкові МНК-оцінки параметрів моделі:

$$\beta_0^* = 115,4; \quad \beta_1^* = -1,44; \quad \beta_2^* = 2,79.$$

Залежність напруги від струмів якоря і збудження:

$$y_i^* = 115,4 - 1,44x_{i1} + 2,79x_{i2}, \quad i = \overline{1, 25}.$$

2. *Аналіз ступеня адекватності побудованої моделі вибіркоvim даним*

Обчислимо вектор  $y_i^*$  за формулою

$$y_i^* = X\beta^*.$$

Правильність виконаних розрахунків можна перевірити, порівнюючи середні значення  $\bar{y}$  та  $\bar{y}^*$ , де

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n} = 130,24; \quad \bar{y}^* = \frac{\sum_{i=1}^n y_i^*}{n} = 130,24,$$

оскільки  $\bar{y} = \bar{y}^*$ , попередні розрахунки правильні.

Визначимо ступінь адекватності моделі за статистичними даними табл. 3.1 через відхилення між фактичними значеннями та обчисленими за моделлю. Запишемо їх як елементи вектора  $e$ :

$$e_i = y_i - y_i^*.$$

Середнє значення дорівнює нулю, отже, розбіжностей не існує, модель адекватна.

3. *Перевірка статистичної значущості коефіцієнта множинної детермінації  $R^2$  за критерієм Фішера*

Для перевірки статистичної значущості впливу регресорів на залежну змінну моделі використовуємо статистичний критерій Фішера

$$F = \frac{R^2}{1 - R^2} \frac{n - m - 1}{m}.$$

Для рівня значущості  $\alpha = 0,05$  та степенях вільності  $k_1 = m = 2$ , і  $k_2 = n - m - 1 = 22$  за таблицею [ ] знаходимо  $F(\alpha; k_1; k_2) = 3,44$ .

Спостережуване значення критерію Фішера:

$$F^* = \frac{R^2}{1 - R^2} \frac{n - m - 1}{m} = \frac{0,6736}{1 - 0,6736} \cdot \frac{22}{2} = 22,7.$$

Критерій Фішера має правобічну критичну область із критичною точкою 3,44. Оскільки  $F^* > F$ , то статистична гіпотеза  $H_0: R^2 = 0$  відхиляється, отже, всі регресори мають вплив на залежну змінну.

5. Оцінювання дисперсій оцінок параметрів  $S_{\beta_0}^2, S_{\beta_1}^2, S_{\beta_2}^2$  та їх стандартних похибок  $S_{\beta_0}, S_{\beta_1}, S_{\beta_2}$ . Незміщена оцінка для дисперсії залишків  $\sigma_\varepsilon^2$ :

$$S_\varepsilon^2 = \frac{1}{n-m-1} \sum e_i^2; \quad S_\varepsilon^2 = \frac{1}{22} \cdot 438 \approx 19,9.$$

Коваріаційна матриця оцінок параметрів:

$$\text{cov}(\beta^* (\beta^*)^T) = S_\varepsilon^2 (X^T X)^{-1};$$

звідки дисперсії оцінок параметрів:

$$S_{\beta_0}^2 = 13,38; \quad S_{\beta_1}^2 = 0,0658; \quad S_{\beta_2}^2 = 1,725.$$

Середньоквадратичні відхилення оцінок параметрів:

$$S_{\beta_0}^* = \sqrt{S_{\beta_0}^2} = 3,6587; \quad S_{\beta_1}^* = \sqrt{S_{\beta_1}^2} = 0,256; \quad S_{\beta_2}^* = \sqrt{S_{\beta_2}^2} = 1,313.$$

6. Перевірка статистичної значущості оцінок параметрів  $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ . Сформулюємо нульову гіпотезу  $H_0: \beta_i = 0$  за альтернативної гіпотези  $H_\alpha: \beta_i \neq 0$ :

$$t_{\beta_j}^* = \frac{\beta_j^* - 0}{S_{\beta_j}^*}, \quad j = 0, 1, 2; \quad t_{\beta_0}^* = \frac{115,4}{3,658} = 31,5;$$

$$t_{\beta_1}^* = \frac{1,44}{0,256} = 5,62; \quad t_{\beta_2}^* = \frac{2,79}{1,313} = 2,12.$$

За обчисленими значеннями  $t_{\beta_i}^*$  знаходимо, що оскільки  $t_{\beta_i}^* > 2,07 (i = 0, 1, 2)$ , то нульову гіпотезу про рівність нулю параметрів  $\beta_0, \beta_1$  та  $\beta_2$  відхиляємо.

7. Розрахунок довірчих інтервалів оцінок параметрів  $\beta_1$  та  $\beta_2$  із надійністю  $\gamma = 0,95$ .

$$\begin{aligned}
(115,4 - 3,658 \cdot 2,07) < \beta_0 < (115,4 + 3,658 \cdot 2,07); \\
(-1,44 - 0,256 \cdot 2,07) < \beta_1 < (-1,44 + 0,256 \cdot 2,07); \quad (3.57) \\
(2,79 - 1,313 \cdot 2,07) < \beta_2 < (2,79 + 1,313 \cdot 2,07);
\end{aligned}$$

або

$$107 < \beta_0 < 123; \quad -1,97 < \beta_1 < -0,91; \quad 0,067 < \beta_2 < 5,516.$$

Як бачимо, з пасивного експерименту (табл. 2.2), за неточно виміряної напруги  $Y$  і майже точних значень струмів якоря і збудження, довірчі області оцінок параметрів досить великі. Суттєве зменшення розкиду інтервальних оцінок (3.57) можливе або шляхом збільшення числа вибірки даних, або шляхом побудови активного експерименту, за умови великих вибірок використання вагових функцій з метою псевдо-ортогоналізації регресорів.

### Запитання

1. За яких умов МНК дає оптимальні оцінки параметрів?
2. Якфі числові характеристики МНК?
3. Як визначають довірчі інтервали МНК-оцінок?
4. Як впливає число обумовленості інформаційної матриці на якість МНК-оцінок параметрів?



## Розділ 4

# ДОСЛІДЖЕННЯ МЕТОДІВ ОЦІНЮВАННЯ ПАРАМЕТРІВ МОДЕЛЕЙ ЗА НЕТОЧНИМИ ВХІДНИМИ І ВИХІДНИМИ СИГНАЛАМИ

### 4.1. МНК в ситуації зашумленості вихідних і вхідних сигналів

У розділі 2 було показано, що за відповідних умов точна нелінійна, нестационарна модель (2.1) може бути зображена наближено лінійною стаціонарно моделлю (2.2) вигляду  $\dot{X}(t) = AX(t) + BU(t)$ , кожен  $i$ -й рядок якої

$$\dot{x}_i(t) = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j(t) + \sum_{k=1}^m b_{ik} U_k(t)$$

можна подати як рівняння регресії, де  $y(t) = \dot{x}_i(t)$ , а множина функцій  $\{x_j(t), U_k(t)\}$  утворює вектор-функцію  $X(t)$  відповідних регресорів  $\{a_{ij}, b_{ik}\}$  — вектор  $\beta$  параметрів.

Реально маємо ситуацію (3.23), за якої всі змінні вимірюються з випадковими похибками.

У розд. 3 було показано, що наявність випадкових збурень у вимірах незалежних змінних  $X$  призводить до зміщення оцінок  $\hat{\beta}$  вектора  $\beta$  параметрів моделі  $Y = X\beta$ , якщо вони визначаються методом найменших квадратів. Ця ситуація не відповідає умові 4 Гаусса–Маркова. Лише за наявності апріорної інформації про дисперсії  $\sigma_i^2$  білих шумів у вимірах  $X_i(k)$ , ( $i = \overline{1, n}$ ;  $k = \overline{1, m}$ ,  $M \gg n$ ), ситуацію можна дещо виправити, якщо від діагональних елементів  $a_{ii}$  матриці  $X^T X$  відняти присутню в них складову  $M\sigma_i^2$ . Тоді в асимптотиці ( $M \rightarrow \infty$ ) — це математичне сподівання оцінки  $\hat{\beta}$  буде

незміщеним:  $M(\hat{\beta}) = \beta$ , бо складова  $\text{diag } \sigma_i^2 \cdot M$  буде комплексована складовою —  $M\sigma_i^2$ .

У випадку, якщо апріорі відомо, що  $X_i^*(t_k)$  — гладкі низькочастотні функції, а шуми  $N_i(t_k)$  вимірів  $X_i(t_k)$  високочастотні, оцінку  $\hat{\sigma}_i^2$  дисперсії  $\sigma_i^2$  шуму в вимірах  $X_i(t_k)$  можна отримати шляхом низькочастотної фільтрації сигналів  $X_i(t_k)$  — формування моделі шуму  $\hat{N}_i(t)$ , як різниці  $X_i(t_k)$  і  $\hat{X}_i(t_k)$ , де  $\hat{X}_i(t_k)$  — відфільтроване значення. Тоді

$$\hat{N}_i(t_k) = X_i(t_k) - \hat{X}_i(t_k), \hat{\sigma}_{i2} = \frac{1}{M-1} \sum_{k=1}^M (X_i(t_k) - \hat{X}_i(t_k))^2.$$

Скоригувавши діагональні елементи інформаційної матриці  $X^T X$  на ці дисперсії, отримаємо незміщені МНК-оцінки  $\hat{\beta}$  вектора  $\beta$ .

Практична постановка задачі часто містить в собі суттєву частку невизначеності статистичних властивостей перешкод у вимірах вхідних  $X$  і вихідних  $Y$  даних про об'єкт, модель якого може бути подано як регресійну:

$$Y^* = X^* \beta^* + \varepsilon^*, \quad (4.1)$$

де  $Y^*, X^*, \beta^*, \varepsilon^*$  — точні значення змінних виходу, входу і нев'язки, яка утворюється за умови, що оцінку  $\beta^*$  для точних значень отримано за методом найменших квадратів:

$$\begin{aligned} \beta^* &= (X^{*T} X^*)^{-1} X^{*T} Y^*; \\ (X^{*T} X^*)^{-1} X^{*T} &= C^*, \end{aligned} \quad (4.2)$$

тобто, за умови

$$\beta^* = \text{argmin } \varepsilon^{*T} \cdot \varepsilon^*. \quad (4.3)$$

На практиці МНК-оцінку (4.2) отримують за збуреними перешкодами  $N_x$  і  $N_y$ :

$$\begin{aligned} X &= X^* + N_x, \\ Y &= Y^* + N_y, \end{aligned} \quad (4.4)$$



$$X^{*T} X^* = A^*, M \{ N_x^T N_x \} = \delta A, X^{*T} Y^* = B^*.$$

Тоді:

$$(A^*)^{-1} B^* = \hat{\beta}, [A^* + \delta A] \hat{\beta} = B^*.$$

$$\text{Звідси} \quad \delta A \hat{\beta} = -A^* (\hat{\beta} - \beta^*) = -A^* \Delta \hat{\beta}, \quad \text{тобто}$$

$$\delta A (\beta^* + \Delta \hat{\beta}) = -A^* \Delta \hat{\beta},$$

або

$$\Delta \hat{\beta} = -(A^* + \delta A)^{-1} \delta A \beta^*. \quad (4.7)$$

Як бачимо, оцінка  $\hat{\beta}$  за умов навіть некорельованих білих шумів  $N_x$  і  $N_y$ , буде занижена відносно істинної  $\beta^*$  на величину (4.7). Остання, за умови, що норма  $\|\delta A\| \rightarrow 0$  прямує до нуля, а  $\hat{\beta}$  до  $\beta^*$ ;  $I$  за умови, що норма  $\|\delta A\| \rightarrow \infty$  прямує до нуля.

Коваріація оцінки (4.5) за наведених вище умов та приймаючи, що норма  $\|N_x^T \varepsilon\|$  набагато менша, ніж  $\|X^{*T}\|$  або  $\|N_x^T Y^*\|$ , наближено дорівнює:

$$\begin{aligned} \text{cov}[\hat{\beta}] &\cong M \{ [C_1 \varepsilon + C_2 N_x] [C_1 \varepsilon + C_2 N_x]^T \} = \\ &= C_1 M \{ \varepsilon \varepsilon^T \} C_1^T + C_2 M \{ N_x N_x^T \} C_2^T, \end{aligned} \quad (4.8)$$

де  $\varepsilon = \varepsilon^* + N_y$ ,

$$C_1 = [X^{*T} X^* + M \{ N_x N_x^T \}]^{-1} X^{*T},$$

$$C_2 = [X^{*T} X^* + M \{ N_x N_x^T \}]^{-1} Y^{*T}.$$

Перша складова виразу (4.8) зі зростанням рівня  $N_x$  зменшується, в другій  $C_2$  зменшується, а  $M \{ N_x N_x^T \}$  збільшується. Але  $C_2$  входить до виразу (4.8) квадратично, тоді як  $M \{ N_x N_x^T \}$  — лінійно. Тому для білого шуму, якщо

$M\{N_X N_X^T\} = \sigma_{N_X}^2 MI$ , зі зростанням  $\sigma_{N_X}^2$  коваріація оцінки  $\hat{\beta}$  зменшуватиметься. Таким чином МНК має властивість регуляризації системи до нормальних рівнянь, подібно за Тихоновим [1]. Остання полягає в мінімізації звичайного квадратичного функціонала  $I = \varepsilon^m \varepsilon$  з регуляризуючим додатком  $\alpha \hat{\beta}^T \hat{\beta}$ , де  $\alpha$  — параметр регуляризації:

$$I = \varepsilon^{\delta} \varepsilon = (Y - X^*)^T (Y - X^*) + \alpha \hat{\beta}^T \hat{\beta},$$

$$\frac{\partial I}{\partial \hat{\beta}} = 0 = 2(X^{*T} X^* \hat{\beta} - X^{*T} Y + \alpha \hat{\beta}), \quad (4.9)$$

звідки  $\hat{\beta} = (X^{*T} X^* + \alpha I)^{-1} X^{*T} Y$ .

Зіставляючи (4.7) і (4.9), бачимо, що в МНК параметр Тихонова дорівнює  $\text{diag } \sigma_i^2 \cdot M$ .

## 4.2. Узагальнений МНК та його практична реалізація

У цьому методі знаходяться МНК-оцінки за зваженими  $U^{-1}$  (відфільтрованими) даними:

$$\hat{X}^{-1} = U^{-1} X, \quad \hat{Y} = U^{-1} Y,$$

що еквівалентно мінімізації функціонала

$$I = 0,5 \sum_{j=1}^M \|y(j) - x(j) \hat{\beta}\|^2 Q^{-1}, \quad (4.10)$$

де  $Q$  — матриця ваги кожного  $j$ -го виміру:  $Q = (\text{cov } \hat{\beta}) \cdot U^T$ .

Тоді зважена вагою  $Q^{-1}$  оцінка узагальненого МНК (УМНК), отримана за умови мінімуму (4.10), дорівнює:

$$\hat{\beta} = (X^T Q^{-1} X)^{-1} X^T Q^{-1} Y. \quad (4.11)$$

Коваріація оцінки (4.11):

$$\text{cov } \hat{\beta} = (X^T Q^{-1} X)^{-1} X^T M \{N_y N_y^T\} Q^{-1} X (X^T Q^{-1} X)^{-1}.$$

Оцінка (4.11) має мінімальну дисперсію за умови, що

$$Q = M \{N_y N_y^T\},$$

тоді

$$\text{cov} \hat{\beta} = \left[ X^T M \{N_y N N_y^T\} X \right]^{-1}.$$

Для некорельованого білого шуму в вимірах  $YQ = \sigma_y^2(j)I$ .

Тоді рекурентна формула УМНК збігається із зваженим МНК:

$$\hat{\beta}(j+1) = \beta(j) + P(j+1)X(j) \left( \frac{1}{\sigma_{y(j)}^2} \right) \left[ y(j) - X^T(j)\beta(j) \right], \quad (4.12)$$

$$P(j+1) = P(j) - X(j) \left[ X^T(j)P(j)X(j) + \sigma_y^2(j) \right]^{-1} X^T(j)P(j).$$

Неточність визначення чи апіорного завдання матриці  $Q^{-1}$  призводить до суттєвої втрати оптимальності оцінок (4.11), (4.12). Тобто, алгоритм не є робастним [2]: статистична незначна неадекватність матриці  $Q$  коваріації перешкод  $N_y$ , викликана, наприклад, окремими перебоями в даних, які утворюють в законі розподілення перешкод  $N_y$  так звані «тяжкі хвости» [2], під час оцінювання вектора  $\hat{\beta}$  за алгоритмом (4.11), це може привести до суттєвої помилки. Тому в практичній реалізації більш зручним і надійним буде квазіоптимальний УМНК:

— на першому етапі відбувається виявлення та виправлення аномальних даних та квазіоптимальне оцінювання сигналів  $X$ ,  $Y$  шляхом згладжування лінійними фільтрами їх зашумлених вибірок  $X(j)$ ,  $Y(j)$ ,  $j = \overline{1, M}$ ;

— на другому — МНК-оцінювання вектора  $\hat{\beta}$  за отриманими на першому етапі оцінками  $\hat{X}$  і  $\hat{Y}$  точних значень  $X^*$ ,  $Y^*$  сигналів.

Для такого підходу перешкоди  $N_{x_e}$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,  $N_y$  можуть бути взаємокорельованими. Окрім того, оскільки модель (4.1) лінійна, то, за умови фільтрації всіх змінних  $X_i(t)$ ,  $Y(t)$  одним

лінійним фільтром, невідповідність згладжених значень  $\hat{X}^*$  і  $\hat{Y}^*$  істинним  $X^*$ ,  $Y^*$  не приводить до зміщення оцінки  $\hat{\beta}$  відносно  $\beta^*$ . Дійсно, знак рівності в рівнянні (4.1) не порушується, якщо на його ліву і праву частину подіяти лінійним оператором фільтра  $W_\phi$ :

$$W_\phi = \{Y^*\} = W_\phi \{X^* \beta^* + \varepsilon^*\} = W_\phi \{X^*\} \beta^* + W_\phi \{\varepsilon^*\}. \quad (4.13)$$

Математичне сподівання оцінки  $\hat{\beta}$ :

$$M(\hat{\beta}) = \left[ \hat{X}^{*T} \hat{X}^* + M \{ \hat{N}_x \hat{N}_x^T \} \right]^{-1} \hat{X}^* \hat{Y}^*.$$

Якщо для спрощення прийняти що  $M(\hat{N}_x \hat{N}_x^T) = \text{diag} \{ \sigma_{N_x}^2 \} I$ , а також покласти, що власні числа матриці  $(\hat{X}^{*T} \hat{X}^*)^{-1} \text{diag} \{ \sigma_{N_i}^2 \}$  менше одиниці, то вираз  $\left[ I + (\hat{X}^{*T} \hat{X}^*)^{-1} \text{diag} \{ \sigma_{N_i}^2 \} \right]^{-1}$  можна подати рядом. Тоді:

$$\begin{aligned} (\hat{X}^{*T} \hat{X}^*) \hat{\beta} &= \left[ I + (\hat{X}^{*T} \hat{X}^*)^{-1} \text{diag} \{ \sigma_{N_i}^2 \} \right]^{-1} \hat{X}^{*T} \hat{Y}^* \cong \\ &\cong \left[ I - (\hat{X}^{*T} \hat{X}^*)^{-1} \text{diag} \{ \sigma_{N_i}^2 \} \right] \hat{X}^{*T} \hat{Y}^*. \end{aligned}$$

Звідси

$$\hat{\beta} \cong \left[ (\hat{X}^{*T} \hat{X}^*)^{-1} \hat{X}^{*T} \hat{Y}^* - (\hat{X}^{*T} \hat{X}^*)^{-2} \text{diag} \{ \sigma_{N_i}^2 \} \right]^{-1} \hat{X}^{*T} \hat{Y}^*.$$

Враховуючи, що:

$$\beta \cong (\hat{X}^{*T} \hat{X}^*)^{-1} \hat{X}^{*T} \hat{Y}^*,$$

отримаємо вираз для зсуву:

$$\Delta \hat{\beta} = \hat{\beta} - \beta = -\text{diag} \{ \sigma_{N_i}^2 \} (\hat{X}^{*T} \hat{X}^*)^{-1} \hat{\beta}^*. \quad (4.14)$$

Оскільки норма  $\Delta\beta$  не більше добутку норм складових правої частини рівняння (4.14), то справедлива нерівність:

$$\frac{\|\Delta\hat{\beta}\|}{\|\hat{\beta}^*\|} \leq \left\| \text{diag} \left\{ \sigma_{\hat{N}_i}^2 \right\} \right\| \cdot \|\hat{X}^{*T} \hat{X}^*\|^{-1}. \quad (4.15)$$

Що сильніша фільтрація  $X$ ,  $Y$  оператором  $W_\Phi$  фільтра, то менша норма матриці збурень  $\sigma_{\hat{N}_i}^2$ . Тобто фільтр заглушує перешкоди, не порушуючи рівняння (4.13). Але згладжування фільтром складових  $X_i(t)$  вектор-функції  $X(t)$  звужує їх частотні спектри і, як наслідок, зменшує їх лінійну незалежність. Зменшується число обумовленої матриці  $(\hat{X}^{*T} \hat{X}^*)$  і, як наслідок, збільшується норма зворотної матриці  $(\hat{X}^{*T} \hat{X}^*)^{-1}$ .

Для кожних конкретних випадків існує оптимальне значення згладжуючого ефекту фільтра  $W_\Phi$ , за якого норма зміщення (4.15) буде мінімальною.

Коваріація оцінки  $\hat{\beta}$  за методом УМНК при допущенні взаємонекорельованості перешкод, подібна до МНК (4.8), але матриці  $M\{\epsilon\epsilon^T\}$ ,  $M\{N_y N_y^T\}$  вже недиагональні. Чим далі рознесено спектри сигналу і перешкоди, то краща фільтрація і, відповідно, оцінки квазіоптимального УМНК.

### 4.3. Інтегрований МНК

#### 4.3.1. Загальні положення

МНК- і УМНК-оцінки попередніх методів знаходяться як координата точки мінімуму відповідних функціоналів  $\epsilon^T \epsilon$  і  $\hat{\epsilon}^T \hat{\epsilon}$ . Оскільки функціонал є усередненим на кінцевому інтервалі  $T$  значенням квадрата  $\epsilon$  чи  $\hat{\epsilon}$ , які є сумішшю корисного сигналу

$Y^* - X^* \beta$  і випадковою збурення  $N_y - N_x \beta$ , то він як функція від  $\beta$  не є точним. Відомо [3], що операція диференціювання



$\frac{\partial}{\partial \beta}(\varepsilon^T \varepsilon)$  зашумленої функції  $\varepsilon^T \varepsilon$  є некоректною. Цим обумовлена невисока точність МНК-оцінок на коротких сильно-зашумлених вибірках даних  $X, Y$ . УМНК дещо покращує точність завдяки згладжуванню перешкод в  $X, Y$ . Але на коротких вибірках впливає на точність фільтрації невизначеність граничних умов. Окрім цього згладжування зменшує обумовленість матриці  $\hat{X}^T \hat{X}$ , що еквівалентне зменшенню крутості функціонала. Тоді знову зростає область невизначеності  $G$  оцінки  $\hat{\beta}$ . Бажано зменшити розкид значень функціонала, не зменшуючи його кривизни в зоні екстремуму. Це можливо зробити для незгладжених  $X, Y$  шляхом додаткового усереднення по множині квазістатистично незалежних функціоналів, близьких до середньоквадратичного. Такими функціями можуть бути зсунуті у часі  $t$  на інтервал  $\theta$  середні добутки  $\frac{1}{T} \int_0^T \varepsilon(t) \varepsilon(t + \theta) dt$ . Усреднюючи їх на інтервалі  $[-\tau_1, \tau_1]$ , отримуємо критерій:

$$I = \frac{1}{2} \int_{-\tau_2}^{\tau_1} \eta(\theta) \int_0^T \varepsilon(t) \varepsilon(t + \theta) dt d\theta, \quad (4.16)$$

де  $\eta(\theta)$  — функція ваги, в найпростішому вигляді одинична.

Необхідна умова мінімуму  $I$  за  $\beta_k, k = \overline{1, n}$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial \beta_k} &= \frac{1}{2} \int_{-\tau_1}^{\tau_1} \eta(\theta) \int_0^T \left[ \frac{\partial \varepsilon(t)}{\partial \beta_k} \varepsilon(t + \theta) + \varepsilon(t) \frac{\partial \varepsilon(t + \theta)}{\partial \beta_k} \right] dt d\theta = \\ &= \int_{-\tau_1}^{\tau_1} \eta(\theta) \int_0^T (-x_k(t)) \left[ y(t + \theta) - \sum_{i=1}^n \beta_i x_i(t + \theta) \right] + \\ &+ (-x_k(t + \theta)) \left[ y(t) - \sum_{i=1}^n \beta_i x_i(t) \right] dt d\theta = 0, \quad k = \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Із виразу (4.17) випливає система нормальних рівнянь:

$$A \cdot \hat{\beta} = B, \quad (4.18)$$

де  $A$  — матриця  $n \times n$  з елементами  $a_{ik}$ ;  $B$  — матриця-стовпчик  $n \times 1$  з елементами  $b_k$ ;

$$a_{ik} = \int_{-t_1}^{t_1} \eta(\theta) \int_0^T [(x_i(t+\theta))x_k(t) + x_i(t)x_k(t+\theta)] dt d\theta, \quad (4.19)$$

$$b_k = \int_{-t_1}^{t_1} \eta(\theta) \int_0^T [(y_i(t+\theta))x_k(t) + y(t)x_k(t+\theta)] dt d\theta. \quad (4.20)$$

Для дискретних у часі  $t$  вибірок інтеграли замінімо відповідними сумами. Тоді:

$$a_{ik} = \sum_{l=-p}^p \eta(l) \sum_{j=1}^M [(x_i(j+l))x_k(j) + x_i(j)x_k(j+l)],$$

$$b_k = \sum_{l=-p}^p \eta(l) \sum_{j=1}^M [(y(j+l))x_k(j) + y(j)x_k(j+l)].$$

Розв'язок системи (4.18) дає шукану оцінку  $\hat{\beta}$ :

$$\hat{\beta} = A \cdot B. \quad (4.21)$$

### 4.3.2. Аналіз складових методу

Проаналізуємо наскільки ця оцінка відрізняється від істинної  $\beta^*$  [див. рівняння (4.2)]. Для цього спочатку розглянемо одну зі складових інтеграла (4.16) суми

$$I_e = \frac{1}{2} \sum_{l=-p}^p \eta(l) \sum_{j=1}^M \varepsilon(j)\varepsilon(j+l), \quad (4.22)$$

наприклад, якщо  $l = -m$ .

Тобто зсув  $\tau = -m\Delta t$ , де  $\Delta t$  — крок дискретності вимірів  $X$ ,  $Y$  у часі  $t$ . Тоді, без урахування ваги  $\eta(m)$ ,  $-m$  — складова дискретної моделі інтегрокореляційного критерію (4.22) дорівнюватиме:

$$\begin{aligned}
I_m &= \frac{1}{2} \varepsilon^\top \varepsilon_{-\tau} = \frac{1}{2} (Y_0 - X_0 \hat{\beta})^\top (Y_{-\tau} - X_{-\tau} \hat{\beta}) = \\
&= \frac{1}{2} Y_0^\top Y_{-\tau} - \frac{1}{2} \hat{\beta}^\top (X_0^\top Y_{-\tau} + X_{-\tau}^\top Y_0) + \frac{1}{2} \hat{\beta}^\top X_0^\top X_{-\tau} \hat{\beta},
\end{aligned} \tag{4.23}$$

де індекс  $-\tau$ , що означає зсув  $x_i(t)$ ,  $y(t)$  на  $\tau = m\Delta t$ :

$$\begin{aligned}
X_{-\tau} &= \begin{bmatrix} x_1(1) \dots x_n(1) \\ x_1(2) \dots x_n(2) \\ \dots \\ x_1(M-m) \dots x_n(M-m) \end{bmatrix}, Y_{-\tau} = \begin{bmatrix} y(1) \\ y(2) \\ \dots \\ y(M-m) \end{bmatrix}, \\
X_0 &= \begin{bmatrix} x_1(m+1) \dots x_n(m+1) \\ x_1(m+2) \dots x_n(m+2) \\ \dots \\ x_1(M) \dots x_n(M) \end{bmatrix}, Y_0 = \begin{bmatrix} y(m+1) \\ y(m+2) \\ \dots \\ y(M) \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Якщо зсув  $-\tau$  більше часу кореляції перешкод  $N$  і  $\hat{\varepsilon}$ , то математичне сподівання  $I_m$  (4.21) буде інваріантне до цих перешкод.

$$M\{I_m\} = \frac{1}{2} \varepsilon_0^{*\top} \varepsilon_{-\tau}^*.$$

Необхідна умова мінімуму  $I_m$ :

$$\frac{\partial I_m}{\partial \hat{\beta}^\top} = -\frac{1}{2} (X_0^\top Y_{-\tau} + X_{-\tau}^\top Y_0) + \frac{1}{2} (X_0^\top Y_{-\tau} + X_{-\tau}^\top Y_0) \hat{\beta} = 0, \tag{4.24}$$

достатня умова

$$\frac{1}{2} \det(X_0^\top X_{-\tau} + X_{-\tau}^\top X_0) > 0. \tag{4.25}$$

На відміну від МНК, для додатної визначеності матриці  $X_0^\top X_{-\tau} + X_{-\tau}^\top X_0$  в (4.25) недостатньо лінійної незалежності функції  $x_i(k)$ . Визначимо верхню границю  $\tau_{\text{гр}}$  для зсуву  $\tau$ , за якого нерівність (4.23) перетворюється в рівність, тобто система стає виродженою.

Оскільки перешкода  $N$  лише покращує обумовленість матриці  $X^T X$ , то при виведенні  $\tau_{\text{гр}}$  братимемо  $N = 0$ ,  $X = X^*$ . Зобразимо  $X_{-\tau}^*$  рядом Тейлора:

$$X_{-\tau}^* = X_0^* X - \tau_0 \dot{X}_0^* + R_1(\ddot{X}_0^*), \quad (4.26)$$

де  $X_0^* = \frac{d}{dt} X_0^*$ ,  $R_1(\ddot{X}_0^*)$  – матриця залишкових членів в розкладенні (4.24). З точністю до  $R_1(\ddot{X}_0^*)$  маємо:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(X_0^{*T} X_{-\tau}^*) + X_{-\tau}^{*T} X_0^* &\doteq \frac{1}{2} \left[ X_0^{*T} (X_0^* - \tau \dot{X}_0^*) + (X_0^* - \tau \dot{X}_0^*)^T X_0^* \right] = \\ &= X_0^{*T} X_0^* \frac{\tau}{2} (X_0^{*T} \dot{X}_0^* + \dot{X}_0^{*T} X_0^*) = \Gamma - \frac{\tau}{2} \Gamma_1, \end{aligned} \quad (4.27)$$

де  $\Gamma$ ,  $\Gamma_1$  – симетричні матриці:  $\Gamma$  – матриця Грама, тому вона додатно визначена.

Відомо, що дві симетричні матриці, з яких одна додатно визначена перетворенням  $T$ , можна одночасно привести до діагонального виду так, що на діагоналі матриці  $\Gamma$  будуть всі одиниці, а на діагоналі  $\Gamma_1$  — власні значення  $\lambda_i$  матриці  $\Gamma^{-1}$

(для виразу (4.27) –  $\frac{\tau}{2} \Gamma^{-1} \Gamma_1$ ):

$$T^{-1} \left( \Gamma - \frac{\tau}{2} \Gamma_1 \right) T = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} - \frac{\tau}{2} \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \cdots & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & \cdots & \lambda_{1n} \end{bmatrix}. \quad (4.28)$$

Граничне значення  $\tau_{\text{гр}}$  зсуву визначається за умови:

$$1 - \frac{\tau_p}{2} \max \lambda_{1i} = 0,$$

або

$$\tau_{\text{гр}} = \frac{2}{\max \lambda_{1i}}, \quad (4.29)$$

де  $\lambda_{1i}$  – власні значення матриці  $\frac{\tau}{2} \Gamma^{-1} \Gamma$ .

Зрозуміло, що чим більше  $\tau$ , то гірше обумовлена матриця  $\Gamma$  (більше  $\|\Gamma^{-1}\|$ ), то більше  $\max \lambda_{ii}$  і, як наслідок, менший граничний зсув  $\tau_{\text{гр}}$ .

Розглянемо, як вплине симетрія зсуву  $\pm\tau$  на граничне значення. Тут

$$I = \varepsilon_0^T (\varepsilon_\tau + \varepsilon_{-\tau}) = (Y_0 - X_0 \hat{\beta})^T (Y_\tau + Y_{-\tau} - (X_\tau + X_{-\tau}) \hat{\beta}) = Y_0^T (Y_\tau + Y_{-\tau}) - \hat{\beta}^T [X_0^T (Y_\tau + Y_{-\tau}) + (X_\tau + X_{-\tau})^T Y_0] + \hat{\beta}^T X_0^T (Y_\tau + Y_{-\tau}) \hat{\beta}^T, \quad (4.30)$$

$$X_0 = \begin{bmatrix} x_1(m+1) & \cdots & x_n(m+1) \\ x_1(m+2) & \cdots & x_n(m+2) \\ \vdots & & \vdots \\ x_1(M-m) & \cdots & x_n(M-m) \end{bmatrix}, Y_0 = \begin{bmatrix} y(m+1) \\ y(m+2) \\ \vdots \\ y(M-m) \end{bmatrix},$$

де

$$X_\tau = \begin{bmatrix} x_1(2m+1) & \cdots & x_n(2m+1) \\ x_1(2m+2) & \cdots & x_n(2m+2) \\ \vdots & & \vdots \\ x_1(M) & \cdots & x_n(M) \end{bmatrix}, Y_\tau = \begin{bmatrix} y(2m+1) \\ y(2m+2) \\ \vdots \\ y(M) \end{bmatrix},$$

$$X_{-\tau} = \begin{bmatrix} x_1(1) & \cdots & x_n(1) \\ x_1(2) & \cdots & x_n(2) \\ \vdots & & \vdots \\ x_1(M-2m) & \cdots & x_n(M-2m) \end{bmatrix}, Y_{-\tau} = \begin{bmatrix} y(1) \\ y(2) \\ \vdots \\ y(M-2m) \end{bmatrix}, \tau = m.$$

Необхідна умова мінімуму  $I$

$$\frac{\delta I}{\delta \hat{\beta}^T} = [X_0^T (Y_\tau + Y_{-\tau}) + (X_\tau + X_{-\tau})^T Y_0] + [X_0^T (Y_\tau + X_{-\tau}) + (X_\tau + X_{-\tau})^T X_0] \hat{\beta} = 0.$$

Достатня умова мінімуму  $I$

$$\det \frac{\delta I}{\delta \hat{\beta}^T \delta \hat{\beta}} = |X_0^T (X_\tau + X_{-\tau}) + (X_\tau + X_{-\tau})^T X_0| > 0. \quad (4.31)$$

Аналогічно висновку (4.29) знайдемо граничне  $\tau_{\text{гр}}$  із умови, що у формулі (4.31) дорівнює нулю. Розглянемо вже три члени ряду (4.26):

$$X_{\tau}^* = X_0^* + \tau \dot{X}_0^* + \frac{\tau^2}{2} \ddot{X}_0^* + R_3(\ddot{X}^*, \tau), \quad (4.32)$$

$$X_{-\tau}^* = X_0^* - \tau \dot{X}_0^* + \frac{\tau^2}{2} \ddot{X}_0^* + R_3(\ddot{X}, -\tau).$$

З точністю до  $R_3(\ddot{X}, \pm\tau)$ , отримуємо

$$\begin{aligned} & X_0^{*\Gamma} (X_{\tau}^* + X_{-\tau}^*) + (X_{\tau}^* + X_{-\tau}^*)^{\Gamma} X_0^* \approx \\ & \approx X_0^{*\Gamma} X_0^* + \frac{\tau^2}{4} [X_0^{*\Gamma} \ddot{X}_0^* + X_0^{*\Gamma} X_0^*] = \Gamma + \frac{\tau^2}{4} \Gamma_2, \end{aligned} \quad (4.33)$$

де  $\Gamma$  і  $\Gamma_2$  – подібні матриці до рівняння (4.28);  $\Gamma$  – додатно-визначена матриця Грама.

Тоді як і рівняння (4.28), вираз (4.33) приводиться перетворенням  $T$  до вигляду:

$$T^{-1} \left( \Gamma + \frac{\tau^2}{4} \Gamma_2 \right) T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{\tau^2}{4} \begin{bmatrix} \lambda_{2i} & 0 \\ 0 & \lambda_{2n} \end{bmatrix},$$

де  $\lambda_{2i}$  – власні значення матриці  $\frac{\tau^2}{4} T^{-1} \Gamma_2$  ( $i = \overline{1, n}$ ).

Граничне значення зсуву  $\tau_{\text{гр}}$  визначатиметься з умови

$$1 + \frac{\tau_{\text{гр}}^2}{4} \max |\lambda_{2i}| = 0,$$

або

$$\tau_{\text{гр}} = \frac{2}{\sqrt{\max |\lambda_{2i}|}}, \quad (4.34)$$

де  $\max |\lambda_{2i}|$  береться за множиною  $\{\lambda_{2i}\}$  від'ємних власних значень матриці  $\frac{\tau^2}{4} T^{-1} \Gamma_2$  на відміну від (4.27) для несиметричного зсуву.

Якщо продовжити розкладання (4.30) і підставити його в (4.31), легко впевнитися, що всі непарні члени розкладання (4.31) скоротяться.

Таким чином, для точних  $X^*$  матриця

$$X_0^{*T} (X_\tau^* + X_{-\tau}^*) + (X_\tau^* + X_{-\tau}^*)^T X_0^*$$

відрізняється від матриці  $X_0^{*T} X_0^*$  МНК лише парними членами розкладання (4.32), ураховуючи припущення гладкості  $x_0(t)$ .

Можна очікувати, що ця різниця буде суттєво меншою, ніж у (4.25) для точних  $X^*$ , оскільки там присутні всі члени розкладання (4.32). Таким чином, граничне значення (4.34) більше, ніж за умовою (4.29), а при тому ж  $\tau$  показник (4.30) при неточних  $X = X^* + N$  ближче до показника МНК (при точних  $X^*$ ), ніж показник у рівнянні (4.23). Щоб це підтвердити, розглянемо зсув і коваріацію оцінки  $\hat{\beta}$ :

$$\begin{aligned} \hat{\beta} = & \left[ X_0^T (X_\tau + X_{-\tau}) + (X_\tau + X_{-\tau})^T X_0 \right]^{-1} \times \\ & \times [X_0^T (Y_\tau + Y_{-\tau}) + (X_\tau + X_{-\tau})^T Y_0]. \end{aligned} \quad (4.35)$$

### 4.3.3. Кількісні показники (4.35)

Зсув  $\Delta \hat{\beta}$ :

$$\begin{aligned} \Delta \hat{\beta} = & M \left\{ \hat{\beta} - \hat{\beta}^* \right\} = M \left\{ \left[ X_0^T (X_\tau + X_{-\tau}) + (X_\tau + X_{-\tau})^T X_0 \right]^{-1} \right\} \times \\ & \times \left[ X_0^T (Y_\tau + Y_{-\tau}) + (X_\tau + X_{-\tau})^T Y_0 \right] - \left[ \left( X_0^{*T} X_0^* \right)^{-1} \left( X_0^{*T} Y_0^* \right) \right], \end{aligned}$$

або

$$\begin{aligned}
\Delta \hat{\beta} &= M \left\{ \left[ X_0^T (X_\tau + X_{-\tau}) + (X_\tau + X_{-\tau})^T X_0 \right]^{-1} \right\} \times \\
&\times M \left\{ \left[ X_0^T (Y_\tau + Y_{-\tau}) + (X_\tau + X_{-\tau})^T Y_0 \right] - (X_0^{*T} X_0^*)^{-1} (X_0^{*T} Y_0^*) \right\} = \\
&= \left[ X_0^{*m} (X_\tau^* + X_{-\tau}^*) + (X_\tau + X_{-\tau})^T X_0^* + M \{ N_0^T (N_\tau + N_{-\tau}) + \right. \\
&\quad \left. + (N_\tau + N_{-\tau})^T N_0 \} \right]^{-1} X_0^T (Y_\tau + Y_{-\tau}) + (X_\tau + X_{-\tau})^T Y_0 + \\
&+ M \left\{ \left[ X_0^{*T} (\varepsilon_\tau + \varepsilon_{-\tau}) + (X_\tau + X_{-\tau})^T \varepsilon_0 \right] \right\} - (X_0^{*T} X_0^*)^{-1} X_0^{*T} Y_0^*.
\end{aligned}$$

Скориставшись розкладанням (4.32) і формулою (4.33), отримаємо:

$$\begin{aligned}
\Delta \hat{\beta} &= \left[ (4\Gamma + \tau^2 \Gamma_2) + 4(M - 2m) R_{NN}(\tau) \right]^{-1} \times \\
&\times \left[ 4 \left( X_0^{*T} Y_0^* + \tau^2 (X_0^{*T} \ddot{Y}_0^* + \ddot{X}_0^{*T} Y_0^*) \right) + 2(M - 2m) \times \right. \\
&\quad \left. \times (R_{X_\varepsilon^*}(\tau) + R_{X_\varepsilon^*}(-\tau)) \right] - \Gamma^{-1} X_0^{*T} X_0^*,
\end{aligned}$$

де  $R_{NN}(\tau)$  — матриця ( $n \times n$ ) кореляційних функцій  $R_{N_i N_j}(\tau)$ ,  $i, j = \overline{1, n}$ ,  $R_{X_\varepsilon^*}(\pm\tau)$  — вектор-стовпчик ( $n \times 1$ ) кореляційних функцій  $R_{X_i \varepsilon_j}(\pm\tau)$ ,  $i, j = \overline{1, n}$ .

Зсув  $\Delta \hat{\beta}$  викликано членами  $(M - 2m) R_{NN}(\tau)$  і  $(M - 2m)[R_{X_\varepsilon}(\tau) + R_{X_\varepsilon}(-\tau)]$ . Член при  $\tau$  більшому часі кореляції перешкод дорівнює нулю. Друга складова

$$(M - 2m)[R_{X_\varepsilon}(\tau)] \approx \frac{\tau^2}{2} (X_0^{*T} \ddot{\varepsilon}_0^* + \ddot{X}_0^{*T} \varepsilon_0^*).$$

Тоді

$$\Delta \hat{\beta} = \left( 2\Gamma + \frac{\tau^2}{4} \Gamma_2 \right)^{-1} (M - 2m) (R_{X_\varepsilon}(\tau) + R_{X_\varepsilon}(-\tau)).$$



Звідси бачимо, що зсув  $\Delta \hat{\beta}$  зменшився, якщо виконується нерівність

$$\left( \frac{M-2m}{M-m} \right) \left\| \left( 2\Gamma + \frac{\tau^2}{2} \Gamma_2 \right)^{-1} \right\| < \left\| (2\Gamma - \tau\Gamma_1)^{-1} \right\|, \quad (4.36)$$

або за того ж зміщення  $\Delta \hat{\beta}$  оцінки  $\hat{\beta}$ , граничне  $\tau_{\text{Гр}}$  зросло.

**Оцінка дисперсії оцінки  $\hat{\beta}$ :**

$$\text{cov}[\hat{\beta}] = M \left\{ \left( \hat{\beta} - M \{ \hat{\beta} \} \right) \left( \hat{\beta} - M \{ \hat{\beta} \} \right)^T \right\}.$$

Подамо  $\hat{\beta}$  із рівняння (4.35) так:

$$\begin{aligned} \hat{\beta} = & \left[ X_0^m (X_\tau^* + X_{-\tau}^*) + (X_\tau^* + X_{-\tau}^*)^T X_0^* + 4(M-2m)R_{NN}(\tau) + \right. \\ & \left. + \xi(X^*, N, \tau) \right]^{-1} \left[ (X_0^m + N_0^T)(Y_\tau^* + \varepsilon_\tau + Y_{-\tau}^* + \varepsilon_{-\tau}) + \right. \\ & \left. + (X_\tau^* + N_\tau + X_{-\tau}^* + N_{-\tau})^T (Y_0^* + \varepsilon_0) \right]. \end{aligned}$$

За великих  $M$ , нехтуючи випадковою складовою і випадковими компонентами  $\left[ N_0^T (\varepsilon_\tau + \varepsilon_{-\tau})(N + N_{-\tau})_{\varepsilon_0} \right]$  другого порядку малості, позначивши:

$$C_1' = \left[ X_0^{*m} (X_\tau^* + X_{-\tau}^*) + (X_\tau^* + X_{-\tau}^*)^T X_0^* + 4(M-2m)R_{NN}(\tau) \right]^{-1} X_0^{*m};$$

$$C_1'' = \left[ X_0^{*m} (X_\tau^* + X_{-\tau}^*) + (X_\tau^* + X_{-\tau}^*)^T X_0^* + 4(M-2m)R_{NN}(\tau) \right]^{-1} X_{-\tau}^{*m};$$

$$C_1''' = \left[ X_0^{*m} (X_\tau^* + X_{-\tau}^*) + (X_\tau^* + X_{-\tau}^*)^T X_0^* + 4(M-2m)R_{NN}(\tau) \right]^{-1} X_\tau^{*m};$$

$$C_2' = \left[ X_0^{*m} (X_\tau^* + X_{-\tau}^*) + (X_\tau^* + X_{-\tau}^*)^\top X_0^* + 4(M - 2m)R_{NN}(\tau) \right]^{-1} Y_0^*;$$

$$C_2'' = \left[ X_0^{*m} (X_\tau^* + X_{-\tau}^*) + (X_\tau^* + X_{-\tau}^*)^\top X_0^* + 4(M - 2m)R_{NN}(\tau) \right]^{-1} Y_{-\tau}^*;$$

$$C_2''' = \left[ X_0^{*m} (X_\tau^* + X_{-\tau}^*) + (X_\tau^* + X_{-\tau}^*)^\top X_0^* + 4(M - 2m)R_{NN}(\tau) \right]^{-1} Y_\tau^*$$

,

отримаємо:

$$\begin{aligned} \text{cov}[\hat{\beta}] &\equiv M \left\{ \left[ C_1'(\varepsilon_\tau + \varepsilon_{-\tau}) + (C_2'' + C_1''')\varepsilon_0 + C_2'(N_\tau + N_{-\tau}) + (C_2'' + C_2''')N_0 \right] \times \right. \\ &\quad \left. \times \left[ C_1'(\varepsilon_\tau + \varepsilon_{-\tau}) + (C_1'' + C_1''')\varepsilon_0 + C_2'(N_\tau + N_{-\tau}) + (C_2'' + C_2''')N_0 \right]^\top \right\} = \\ &= C_1' M \left\{ (\varepsilon_\tau + \varepsilon_{-\tau})(\varepsilon_\tau + \varepsilon_{-\tau})^\top \right\} C_1'^\top + C_1' M \left\{ (\varepsilon_\tau + \varepsilon_{-\tau})\varepsilon_0^\top \right\} \left\{ (C_1'' + C_1''')^\top + \right. \\ &\quad \left. + (C_1'' + C_1''')M(\varepsilon_\tau \varepsilon_{-\tau})^\top \right\} C_1'^\top + C_1' M \left\{ (N_\tau + N_{-\tau})N_0^\top \right\} (C_1'' + C_1''')^\top + \\ &\quad + (C_1'' + C_1''')M \left\{ N_0(N_\tau + N_{-\tau}) \right\}^\top C_1'^\top + (C_1'' + C_1''')M \left\{ N_0 N_{\tau 0}^\top \right\} (C_1'' + C_1''')^\top \end{aligned}$$

або

$$\begin{aligned} \text{cov}[\hat{\beta}] &= C_5' \left[ M \left\{ (\varepsilon_\tau + \varepsilon_{-\tau})(\varepsilon_\tau + \varepsilon_{-\tau})^\top \right\} + 2M \left\{ (\varepsilon_\tau + \varepsilon_{-\tau})\varepsilon_0^\top + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 2M \left\{ \varepsilon_0(\varepsilon_\tau + \varepsilon_{-\tau})^\top \right\} + M \left\{ \varepsilon_0 \varepsilon_{\tau 0}^\top \right\} C_5^\top \right] + C_6 M \left\{ N_0(N_\tau + N_{-\tau})^\top \right\} + \quad (4.37) \\ &\quad \left. + M \left\{ N_0 N_{\tau 0}^\top \right\} C_6^\top = C_5 Q_3 C_5^\top + C_6 F_3 C_6^\top, \end{aligned}$$

де  $C_1' \approx C_1'' \approx C_1''' = C_5$ ,  $C_2' \approx C_2'' \approx C_2''' = C_6$ .

Враховуючи співвідношення (4.36), для  $|\tau| > 0$  можна сподіватися, що  $\|C_3\| > \|C_5\| > \|C_1\|$ ,  $\|C_4\| > \|C_6\| > \|C_2\|$ , тоді як

$$\|Q_3\| = \|Q_2\|, \quad \|F_3\| = \|F_2\|.$$

Внаслідок того, що в (4.37) має місце співвідношення діагональних і нільпонтентних матриць, тому при рівних  $\tau$  зсув і коваріація оцінок  $\hat{\beta}$  при  $\pm\tau$  буде менше, ніж для  $-\tau$ .

Тобто симетричний зсув наближає критерії  $\varepsilon_0^T (\varepsilon_\tau + \varepsilon_{-\tau})$  до ідеального  $\varepsilon_0^{*T} \varepsilon_0^*$ . Таким чином, кожна  $m$ -на складова інтегрокореляційного критерію (4.22) у межах зсуву  $\pm m\Delta t = \pm \tau$ , меншого за модулем, ніж  $\tau_{\text{гр}}$  (4.34), при її мінімізації дає оцінку  $\hat{\beta}$  (4.35), близьку до істинної  $\beta^*$ , якщо зсув  $\tau$  більший ніж час  $T_{\text{кор}}$  кореляції перешкод і менший ніж граничний  $\tau_{\text{гр}}$ .

#### 4.3.4. Рекурентна форма обчислення

Розглянемо рекурентну форму обчислення за критеріями (4.23) і (4.30) для  $M$  вимірів кроком  $\Delta t$ , тобто

$$t_k = k\Delta t, \quad k = \overline{1, M},$$

$$I = \sum_{k=1}^M \left[ y(k) - \sum_{i=0}^n \hat{\beta}_{i2} x_i(k) \right] \left[ y(k+m) - \sum_{i=0}^n \hat{\beta}_{i2} x_i(k+m) \right].$$

З умови (4.24) отримаємо систему :

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^M \left[ y(k)x_j(k+m) + y(k+m)x_j(k) \right] = \\ & = \sum_{i=1}^n \hat{\beta}_i \sum_{k=1}^M \left[ x_i(k)x_j(k+m) + x_j(k+m)x_i(k) \right], \quad j = \overline{1, n} \end{aligned}$$

або у векторній формі :

$$\hat{\beta} = X^T Y_m + X_m^T Y_0.$$

Позначимо

$$P = \left[ X_0^T X_m + X_m^T X_0 \right]^{-1}. \quad (4.38)$$

Тоді

$$\hat{\beta}_2 = P \left( X^T Y_m + X_m^T Y_0 \right). \quad (4.39)$$

Подано рівняння (4.38) в блочному вигляді для  $(k+1)$ -го виміру:

$$P_{k+1} = \left[ X_{0k}^T X_{mk} + X_{mk}^T X_{0k} \right]^{-1} = \left[ \left[ X_{0(k-1)}^T X_{m(k-1)} + X_{m(k-1)}^T X_{0(k-1)} \right] + \left[ x_{0k} x_{mk}^T + x_{mk} x_{0k}^T \right] \right]^{-1} = \left[ P_k^{-1} + \left[ x_{0k} x_{mk}^T + x_{mk} x_{0k}^T \right] \right]^{-1},$$

$$x_{0k}^T = \left[ x_1(k), x_2(k), \dots, x_n(k) \right],$$

де

$$x_{mk}^T = \left[ x_1(k+m), x_2(k+m), \dots, x_n(k+m) \right]. \quad (4.40)$$

Із рівняння (4.40) знайдемо, що

$$P_{k+1}^{-1} - P_k^{-1} = x_{0k} x_{mk}^T + x_{mk} x_{0k}^T. \quad (4.41)$$

Тоді для  $k$ -го виміру отримуємо  $\hat{\beta}$  (4.39):

$$\begin{aligned} \hat{\beta}(k+1) &= P_{k+1} \left( X_{0(k-1)}^T Y_{mk} + X_{mk}^T Y_{0k} \right) = \\ &= P_{k+1} \left[ X_{0k}^T, x_{0k} \right] \begin{bmatrix} Y_{m(k-1)} \\ y(k+m) \end{bmatrix} + \left[ X_{m(k-1)}^T, x_{mk} \right] \begin{bmatrix} Y_{0(k-1)} \\ y(k) \end{bmatrix} = \\ &= P_{k+1} \left[ P_k^{-1} \hat{\beta}(k) + x_{0k} y(k+m) + x_{mk} y(k) \right] = \\ &= \hat{\beta}(k) + P_{k+1} \left[ x_{0k} y(k+m) + x_{mk} y(k) + (P_k^{-1} - P_{k+1}^{-1}) \hat{\beta}(k) \right]. \end{aligned} \quad (4.42)$$

Із формули (4.42), враховуючи (4.40), отримаємо:

$$\begin{aligned} \hat{\beta}(k+1) &= \hat{\beta}(k) + P_{k+1} \left[ x_{0k} y(k+m) + x_{mk} y(k) - \right. \\ &\quad \left. - (x_{0k} x_{mk}^T + x_{mk} x_{0k}^T) \hat{\beta}_2(k) \right] = \\ &= \hat{\beta}(k) + P_{k+1} \left[ x_{0k} \varepsilon(k+m) + x_{mk} \varepsilon(k) \right], \end{aligned}$$

де  $P_{k+1}$  — визначено згідно з рівнянням (4.38),

$$\varepsilon(e) = y(e) - x_e^T \beta(e), \quad e = k, k+m.$$

Для критерію (4.30), з умови мінімуму, отримаємо систему:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^M \left[ \left( y(k+m) + y(k-m)x_j(k) + y(k) \right) \left( x_j(k+m) + x_j(k-m) \right) \right] = \\ & = \sum_{i=1}^n \hat{\beta}_i \left[ \left( x_i(k+m) + x_i(k-m) \right) x_j(k) + x_i(k) \left( x_j(k+m) + x_j(k-m) \right) \right] \end{aligned}$$

або у векторній формі:

$$\left[ X_0^T Z + Z^T X_0 \right] \hat{\beta} = X_0^T (Y_m + Y_{-m}) + Z^T Y_0,$$

де

$$Z = X_m + X_{-m}.$$

Позначимо:

$$\left[ X_0^T Z + Z^T X_0 \right]^{-1} = P.$$

Тоді

$$\hat{\beta} = P \left[ X_0^T (Y_m + Y_{-m}) + Z^T Y_0 \right].$$

#### 4.3.5. Вагова функція інтегрованого МНК

В умовах невизначеності характеристик збурень  $N_x$  і  $N_y$  вибір вагової функції  $\eta(m)$  функціонал (4.16) слід виконувати за зовнішнім (головним) показником  $I$ . Знаходитимемо  $\eta(m)$  у класі симетричних відносно  $m = 0$  фінітних функцій (таких, що  $\eta(0) = \eta(\pm m) = 0$ ), наприклад такого вигляду:

$$\eta(m) = \eta(m, \gamma, \theta) = (1 + |m|)^{\theta} \left( 1 - \cos \frac{1\pi m}{m_{\epsilon\delta}} \right)^{\gamma},$$

де  $\theta \in (\pm\infty)$ ,  $\gamma \in (0, \infty)$ ,  $m_{\text{кр}}$  визначається за умови (4.34), параметри  $\theta$  і  $\gamma$  оптимізуються (в системах класу БАСІ) за головним показником  $I$ . Параметр  $\gamma$  впливає на ширину імпульсу  $\eta(m)$ , а  $\theta$  — на його асиметрію відносно максимуму (рис. 4.1).

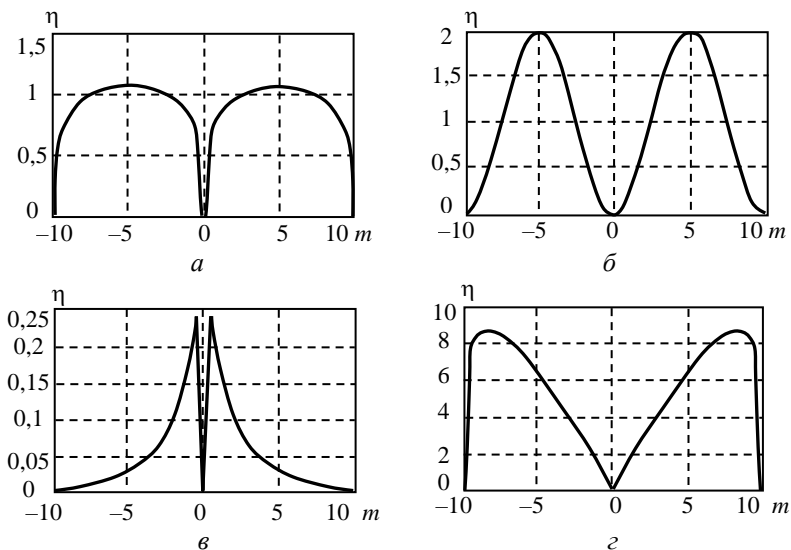


Рис. 4.1. Залежність  $\eta(m, \theta, \gamma)$ :

$a$  —  $\theta = 0, \gamma = 0,1$ ;  $б$  —  $\theta = 0, \gamma = 1$ ;  $в$  —  $\theta = 2, \gamma = 0,1$ ;  $г$  —  $\theta = 2, \gamma = 0,1$

Якщо,  $\gamma \rightarrow 0$ , то  $\eta(m)$  прямує до прямокутного імпульсу; якщо  $\gamma \rightarrow \infty$ , то  $\eta(m)$  — до  $\delta$ -функції Дірака, маємо оцінку (4.35); якщо  $\theta \rightarrow 0$ , то імпульси  $\eta(m)$  симетричні відносно їх максимумів; якщо  $\theta \rightarrow \infty$ , то імпульс  $\eta(m)$  наближається до  $m = 0$ , а метод до МНК; якщо  $\theta \rightarrow -\infty$ , то маємо оцінку (4.35) для  $m = m_{кр}$ . Змінюючи  $\theta$  і  $\gamma$ , за умови екстремуму  $I$  можна забезпечити оптимальність оцінки (4.19) інтегровано-го МНК.

### 4.3.6. Алгоритм методу ІМНК

Розглянемо алгоритм роботи ІМНК.

За відомими входними та вихідними даними  $N$  спостережень:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & \dots & x_{1n} \\ 1 & x_{21} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_{n1} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix},$$

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_N \end{pmatrix},$$

здійснюється:

1. Знаходження критичного значення зсуву  $m_{кр}$ .
2. Знаходження матриць  $A$  та  $B$ .
3. Оцінка параметрів моделі.

Розглянемо три етапи методу ІМНК докладніше.

1. Знаходження критичного значення зсуву  $m_{кр}$ .

1.1. Знаходження коефіцієнтів матриці  $A_1$  для  $m = 1$ :

$$a_{ij} = \sum_{k=m}^{N-2*m} \sum_{l=-m}^m \eta(l) [x_i(k) \cdot x_j(k+l) + x_i(k+l) \cdot x_j(k)], \quad (4.43)$$

$$\text{де } \eta(l) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } l = \pm m; \\ 0, & \text{якщо } |l| < m, \end{cases} \quad i, j = \overline{0, n+1}.$$

1.2. Знаходження визначника нормованої матриці  $A_1 - \det(A_1)$ , де

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{a_{01}}{a_{00}} & \dots & \frac{a_{0n}}{a_{00}} \\ \frac{a_{10}}{a_{11}} & 1 & \dots & \frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{a_{n0}}{a_{nn}} & \frac{a_{n1}}{a_{nn}} & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

1.3. Пошук матриці  $A_m$ , де  $m = \overline{2, N}$ , поки не знайдемо таке  $m_{кр}$ , за якого виконується рівність:

$$\det A_m \leq 0.1 \det A_1.$$

Елементи матриці  $A_1$  знаходяться за формулою (4.43).

2. Знаходження матриць  $A$  та  $B$  здійснюється за формулами:

$$a_{ij} = \sum_{k=m_{кр.}}^{N-2*m_{кр.}} \sum_{l=-m_{кр.}}^{m_{кр.}} \eta(l) [x_i(k) \cdot x_j(k+l) + x_i(k+l) \cdot x_j(k)], \quad (4.44)$$

$$b_j = \sum_{k=m_{кр.}}^{N-2*m_{кр.}} \sum_{l=-m_{кр.}}^{m_{кр.}} \eta(l) [y(k+l) \cdot x_j(k) + y(k) \cdot x_j(k+l)]. \quad (4.45)$$

В результаті маємо отримати матрицю  $A$  розмірності  $(n+1) \times (n+1)$  та матрицю  $B$ , що є вектор-стовпець розмірності  $(n+1)$ .

3. Оцінка параметрів  $\hat{\beta}$  моделі (2.1) є розв'язком матричного рівняння  $A \cdot \hat{\beta} = B$ , тобто  $\hat{\beta} = A^{-1} \times B$ .

Алгоритм ІМНК (рис. 4.2, а) являє собою послідовне обчислення  $m_{кр}$  (рис. 4.2 б) та матриць  $A$  і  $B$  (відповідно рис. 4.3 а, 4.3 б).



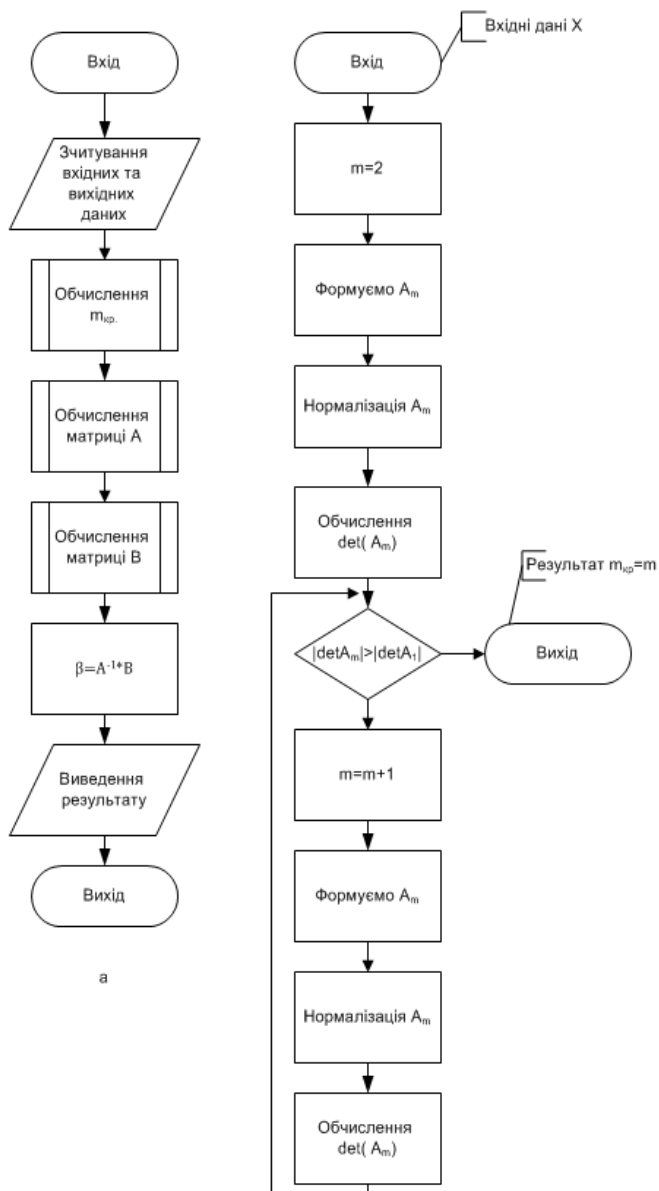


Рис. 4.2. Блок-схема алгоритму  
 а – методу ІМНК; б – функція знаходження  $m_{кр}$

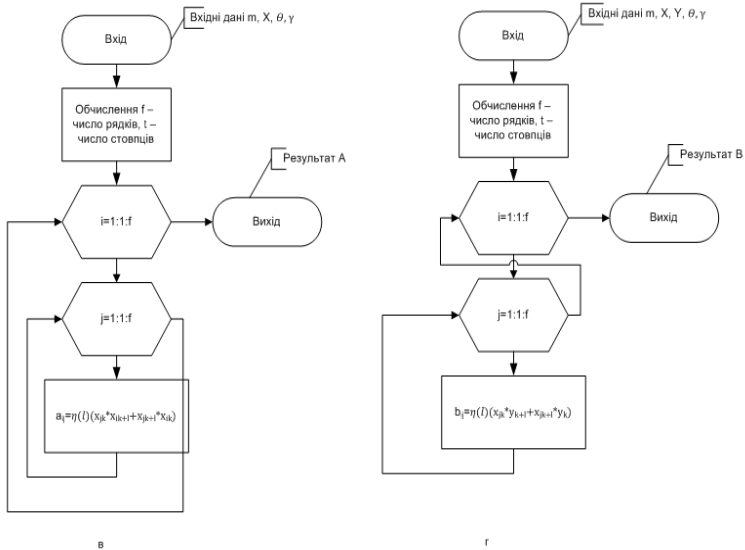


Рис. 4.3 – Блок-схема алгоритму  
*a* – функція обчислення матриці *A*; *b* – функція обчислення матриці *B*.

### 4.3.7. Тестування методу ІМНК

Розглянемо лінійну багатофакторну модель  $y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_n x_n$ .

Для тестування методу ІМНК згенеруємо множину вхідних та вихідних значень моделі заданої функцією (4.46) для 10 експериментів, які представлені в таблиці 4.1. На вхідні та вихідні значення проектованої моделі накладемо білий шум, прикладом якого є випадкові числа з діапазону  $[-1; 1]$  з рівномірним розподілом.

$$y(t) = x_1(t) + x_2(t) + e_y, \quad (4.46)$$

де  $\beta_0 = 0, \beta_1 = \beta_2 = 1$ ;  $t = k \cdot \Delta t$  ( $k = \overline{1, N}$ );

$$\Delta t = \frac{T}{1000};$$

$$x_1(t) = \sin \omega t + e_{x1};$$

$$x_2(t) = \sin(\omega t + \varphi) + e_{x_2};$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T};$$

$$\varphi \approx 30^\circ.$$

$e_{x_1}, e_{x_2}, e_y$  – випадкові числа з діапазону  $[-1;1]$  з рівномірним розподілом.

Таблиця 4.1

**Значення вхідних та вихідних значень**

№	$x_1$	$x_2$	$y$
1.	-0,9438	-0,2901	-1,23305
2.	0,72135	0,60548	1,29894
3.	-0,9154	-0,1151	-1,00631
4.	0,64704	-0,149	0,48419
5.	-0,7017	0,19377	-0,52352
6.	0,25831	-0,117	0,15577
7.	0,25434	0,93337	1,15011
8.	0,53885	1,1005	1,62137
9.	-0,5241	1,07417	0,57768
10.	-0,3195	0,45229	0,06318

Застосуємо для вибірки (табл. 6.1) метод ІМНК та МНК для порівняння оцінок параметрів.

Для застосування методу ІМНК використовується програмне забезпечення розроблене згідно алгоритму ІМНК. Результати виконання представлено на рис. 4.4.

Коефіцієнти вагової функції було обрано з врахуванням типу шуму, оскільки згладжування при білому шумі і коефіцієнтах  $\theta = -2, \gamma = 0.01$  буде максимальним. Графік вагової функції  $\eta(l, \theta, \gamma)$  представлено на рис. 4.5.

x1	x2	y	n=4
-0.9437670206619677	-0.29911467281838707	-1.233059582801914	Beta:
0.7212548044620115	0.8654816213063348	1.2989384402025217	1.0067626985605282
-0.9154187996298442	-0.11518194790442962	-1.0063074188561127	0.9737093928167815
0.64704250194460264	-0.14904488700800733	0.48418912395166	T:
-0.7017077740265474	0.19374604249578344	-0.523519215089370	2.380479444189279
0.2583181125747699	-0.11698565426501263	0.1537663174058236	2.530496530103826
0.2543357679966742	0.9333727881231373	1.1581193809427681	y середнє=0.25883579794613815
0.5388526866819363	1.1004970537489101	1.621368807068165	чисельник=4.186212387901375
-0.5240647819942308	1.0741720226239921	0.5776798803889114	Знаменник=0.00121878062680002356
-0.3194732962374851	0.45228760112569555	0.8631035895016267	F=3434.7546216250453

Рис. 4.4. Результати ідентифікації моделі за методом ІМНК

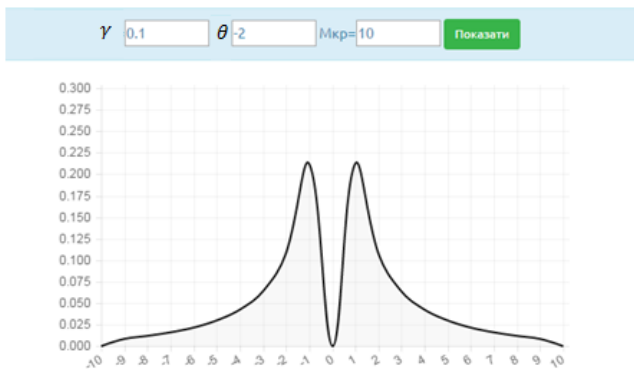


Рис. 4.5. – Графік вагової функції  $\eta(l, -2, 0.1)$

В результаті проведених обчислень отримано наступні оцінки параметрів за методом ІМНК:  $\hat{\beta}_0 = 0$ ;  $\hat{\beta}_1 = 1.006762$ ;  $\hat{\beta}_2 = 0.973709$ .

Отже, згідно обчислених оцінок параметрів моделі за допомогою ІМНК отримали модель:

$$\hat{y}(t) = 1.006762 \cdot x_1(t) + 0.973709 \cdot x_2(t) \quad (4.47)$$

Для застосування методу МНК використовуємо додаток Analysis Tools Park у середовищі MS Excel (рис. 4.6).

Дисперсійний аналіз					
	df	SS	MS	F	Значимість F
Регрессия	2	8,365523264	4,182761632	4242,451539	1,60815E-11
Остаток	7	0,006901512	0,00098593		
Итого	9	8,372424776			

	Коэффициенте	Стандартная ошибка	t-статистика	P-Значение	Нижние 95%	Верхние 95%	Нижние 95,0%	Верхние 95,0%
У-пересечение	-0,009602162	0,012921837	-0,743095765	0,481612949	-0,04015745	0,02953126	-0,04015745	0,02953126
Переменная X 1	0,986785768	0,016907519	58,36372378	1,13763E-10	0,946805839	1,026765698	0,946805839	1,026765698
Переменная X 2	0,991208451	0,020535241	48,26865468	4,28613E-10	0,942650322	1,039786579	0,942650322	1,039786579

Рис. 4.6. – Результати ідентифікації моделі за методом МНК

В результаті застосування методу МНК в середовищі MS Excel, отримали наступні оцінки моделі:  $\hat{\beta}_0 = -0.0096$ ;  $\hat{\beta}_1 = 0.986785$ ;  $\hat{\beta}_2 = 0.991208$ .

Згідно розрахунків методом МНК отримали модель:

$$\hat{y}(t) = -0.96 + 0.986785 \cdot x_1(t) + 0.991208 \cdot x_2(t). \quad (4.48)$$

Виконаємо дослідження побудованої моделі. Результати розрахунків дослідження побудованих моделей методами ІМНК та МНК наведено в таблиці 4.2 та таблиці 4.3 відповідно.

### 1. Перевірка правильності виконаних розрахунків.

Правильність розрахунків можна перевірити, порівнюючи середні значення  $y$  та  $\hat{y}$ .

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{10} y_i}{10} = 0.26;$$

$$\hat{y}_{\text{ІМНК}} = \frac{\sum_{i=1}^{10} y_i}{10} = 0.26;$$

$$\hat{y}_{\text{МНК}} = \frac{\sum_{i=1}^{10} y_i}{10} = 0.26.$$

З проведених розрахунків видно, що середні значення  $\hat{y}_{\text{МНК}}$ ,  $\hat{y}_{\text{МНК}}$  та  $\bar{y}$  рівні між собою, що свідчить про правильність проведених розрахунків.

Таблиця 4.2

**Результати розрахунків дослідження методом ІМНК**

№	$y_i$	$\hat{y}_i$	$e_i$	$e_i^2$	$\hat{y}_i - \bar{y}$	$(\hat{y}_i - \bar{y})^2$	$(y_i - \bar{y})^2$
1.	-1,235	-1,233	0,000	0,000	-1,49	2,224	2,2257
2.	1,2984	1,316	-0,017	-0,017	1,06	1,117	1,0818
3.	-1,001	-1,034	0,027	0,027	-1,29	1,671	1,6006
4.	0,4849	0,506	-0,022	-0,022	0,25	0,061	0,0508
5.	-0,552	-0,518	-0,006	-0,006	-0,78	0,603	0,6121
6.	0,1557	0,146	0,010	0,010	-0,11	0,013	0,0106
7.	1,1501	1,165	-0,015	-0,015	0,91	0,821	0,7944
8.	1,6217	1,614	0,007	0,007	1,36	1,837	1,8565
9.	0,5778	0,518	0,059	0,059	0,26	0,067	0,1017
10.	0,0638	0,119	-0,056	-0,056	-0,14	0,020	0,0383
$\Sigma$	2,59	2,60	-0,001	0,009	-	8,434	8,372

Таблиця 4.3

**Результати розрахунків дослідження методом МНК**

№	$y_i$	$\hat{y}_i$	$e_i$	$e_i^2$	$\hat{y}_i - \bar{y}$	$(\hat{y}_i - \bar{y})^2$	$(y_i - \bar{y})^2$
	-1,23305	-1,228	-0,0046	0,000021	-1,49	2,212	2,2257
2.	1,29894	1,302	-0,0034	0,000012	1,04	1,089	1,0818
3.	-1,00631	-1,027	0,0207	0,000429	-1,29	1,653	1,6006
4.	0,48419	0,481	0,0030	0,000009	0,22	0,049	0,0508
5.	-0,52352	-0,510	-0,0135	0,000183	-0,77	0,591	0,6121
6.	0,15577	0,129	0,0264	0,000698	-0,13	0,017	0,0106
7.	1,15011	1,167	-0,0164	0,000270	0,91	0,824	0,7944
8.	1,62137	1,613	0,0084	0,000071	1,35	1,834	1,8565
9.	0,57768	0,538	0,0397	0,001575	0,28	0,078	0,1017
10.	0,06318	0,123	-0,0603	0,003633	-0,14	0,018	0,0383
$\Sigma$	2,59	2,60	0	0,0069	-	8,365	8,372

2. Обчислення залишків моделей та їх середнього значення:

$$e_i = y_i - \hat{y}_i$$

Середнє значення  $e_{IMHK} \approx 0$ ,  $e_{MHK} \approx 0$ , що свідчить про адекватність моделі побудованої за методами ІМНК та МНК.

3. Обчислення коефіцієнта детермінації  $R^2$  та кореляції  $R$ .

**Коефіцієнт детермінації показує, яка частка загальної варіації результативної ознаки визначається досліджуваним фактором:**

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^N e_i^2}{\sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})^2},$$

$$R_{IMHK}^1 = 1 - \frac{0.008531}{8.372425} = 0.9989,$$

$$R_{MHK}^2 = 1 - \frac{0.006902}{8.372425} = 0.9991.$$

Відповідно,

$$R^2 = \sqrt{1 - \frac{\sum_{i=1}^N e_i^2}{\sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})^2}},$$

$$R_{IMHK} = 0.9994,$$

$$R_{MHK} = 0.9995.$$

З проведених розрахунків можна зробити висновок про щільний взаємозв'язок між показниками і факторами моделі за методами ІМНК та МНК.

4. Перевірка статистичної значущості отриманих результатів.

4.1 Перевірка адекватності моделі за критерієм Фішера здійснюється за формулою:

$$F = \frac{\sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})^2}{n} \cdot \frac{\sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y}_i)^2}{N - n - 1} .$$

За таблицею Фішера знаходимо критичне значення  $F_{кр.}$  з  $n$  та  $(N - n - 1)$  ступенями вільності, задавши рівень довіри  $(1 - \alpha) \cdot 100\%$  (як правило  $\alpha = 0.05$ ).

Якщо  $F > F_{кр.}$ , то модель адекватна. Якщо модель не адекватна, то необхідно повернутися до етапу побудови моделі і, можливо, ввести додаткові фактори або перейти до нелінійної моделі.

Згідно проведених обчислень:

$$F_{IMHK} = 3434.75 ,$$

$$F_{IMHK} = 4242.45 .$$

Табличне значення  $F_{табл.} = 19.35$ , очевидно, що обчислені значення значно перевищують табличне, що свідчить про адекватність побудованих моделей (4.47) та (4.48).

4.2 Перевірка значущості коефіцієнтів рівняння регресії здійснюється за критерієм Стьюдента за формулою:

$$t_i = \frac{|\beta_i|}{\sigma_\varepsilon^2 \cdot c_{ii}} ,$$

$$\text{де } \sigma_\varepsilon^2 = \frac{1}{N - 1} \sum_{j=1}^N (y_j - \hat{y}_j)^2 ;$$

$c_{ii}$  – діагональний елемент матриці  $(X^T X)^{-1}$ .

Розраховані значення за методом ІМНК:

$$t_{\beta_1} = 2.3804 ,$$

$$t_{\beta_2} = 2.5304 .$$



Розраховані значення за методом МНК:

$$t_{\beta_0} = -0.7430 ,$$

$$t_{\beta_1} = 58.3637 ,$$

$$t_{\beta_2} = 48.2686 .$$

Табличне значення для рівня значимості  $p = 0.05$  та ступенів вільності 10 дорівнює  $t_{табл.} = 2.22$  .

Оскільки розраховані значення  $t_{\beta_1}$  та  $t_{\beta_2}$  для методів ІМНК та МНК більші за табличне  $t_{табл.}$  , то можна стверджувати про статистичну значимість коефіцієнтів  $\beta_1$  та  $\beta_2$  і істотний вплив на узагальнюючий показник. Враховуючи, що  $t_{табл.} > t_{\beta_0}$  коефіцієнт  $\beta_0$  можна вважати не значимим для моделі (4.48).

*Висновок:* Виходячи із проведених розрахунків та розглянутого прикладу, можна зробити висновок про ефективність використання інтегрованого методу найменших квадратів для оцінки параметрів моделі, заданої зашумленими вхідними та вихідними даними. Правильність розрахунків, адекватність моделі та значимість обчислених коефіцієнтів підтверджено методами статистичного аналізу.

#### 4.4. Дослідження методу адаптивного одноразового ділення (МОД)

##### 4.4.1. Сутність методу

Даний метод можна розглядати як метод допоміжних змінних, в якому допоміжна змінна

$$U = \begin{bmatrix} u_1(1)u_2(1)\dots u_n(1) \\ u_1(M)u_2(M)\dots u_n(M) \end{bmatrix} \quad (4.49)$$

має такий вигляд

$$u_{ij} = \begin{cases} x_i^{-1}(j), |x_i^{-1}(j)| \geq \Delta_i; \\ 0, |x_i^{-1}(j)| < \Delta_i, j = \overline{1, M}, \Delta_i > 0. \end{cases}$$

Система функцій  $\{x_i^{-1}(j)\}$  лінійно незалежна, так як за умовою  $\{x_i(j)\}$  лінійно незалежна.

Згідно з методом допоміжних змінних, існує оцінка  $\hat{\beta}$ , яка може бути знайдена з рівняння

$$U^T Y = U^T X \hat{\beta},$$

$$\hat{\beta} = (U^T X)^{-1} U^T Y, \quad (4.50)$$

де

$$U^T X = \begin{bmatrix} M & \sum_{k=1}^M x_2(k) x_1^{-1}(k) & \cdots & \sum_{k=1}^M x_n(k) x_1^{-1}(k) \\ \sum_{k=1}^M x_1(k) x_2^{-1}(k) & M & \cdots & \sum_{k=1}^M x_n(k) x_2^{-1}(k) \\ \sum_{k=1}^M x_1(k) x_n^{-1}(k) & \sum_{k=1}^M x_2(k) x_n^{-1}(k) & \cdots & M \end{bmatrix},$$

$$U^T Y = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^M y(k) x_1^{-1}(k) \\ \sum_{k=1}^M y(k) x_2^{-1}(k) \\ \cdots \\ \sum_{k=1}^M y(k) x_n^{-1}(k) \end{bmatrix}$$

і розглядається множина  $M$  відліків  $k$ , у яких виконується умова:

$$|x_j^{-1}(j)| \geq \Delta_j.$$

#### 4.4.2. Зміщення оцінок

Якщо перешкоди  $N_i$  не корелюють між собою, а також з  $X^*$ ,  $Y^*$  і малі, то, вважаючи наближено

$$x_i^{-1}(j) = x_i^{*-1}(j) - N_i(j),$$

неважко отримати, що оцінка  $\hat{\beta}$  для точної структури моделі, коли  $\varepsilon^* = 0$ , буде незміщеною, оскільки  $M\{U^T X\} = U^{*T} X^*$ ,  $M\{U^T Y\} = U^{*T} Y^*$ . Зміщення може мати місце, якщо  $\varepsilon^* \neq 0$ . При цьому

$$\delta\hat{\beta} = (U^{*T} X^*)^{-1} U^{*T} \varepsilon^*, \quad (4.51)$$

так як з умови  $X^{*T} \varepsilon^* = 0$  в загальному випадку не впливає умова  $U^{*T} \varepsilon^* = 0$ , хоча  $U^*$  та  $X^*$  зв'язані співвідношенням (4.49). Зміщення (4.51) менше зміщення оцінок МНК через перешкоди  $N_i$  в  $X$ , якщо вплив  $\varepsilon^* \neq 0$  з формули (4.51) менше впливу перешкод  $N$  на зміщення оцінок МНК.

#### 4.4.3 Коваріація оцінок

$$\text{cov}[\hat{\beta}] = M \left\{ \left[ \hat{\beta} - M\{\hat{\beta}\} \right] \left[ \hat{\beta} - M\{\hat{\beta}\} \right]^T \right\}.$$

Вважаючи некорельованість випадкових похибок у  $(U^T X)^{-1}$  і  $(U^T Y)$  розкладаючи (4.50) у ряд

$$\hat{\beta} \approx M\{\hat{\beta}\} + \left[ \delta(U^T X)^{-1} \right] \left[ U^{*T} Y^* \right] + (U^{*T} X^*)^{-1} \left[ \delta U^T Y^* + U^{*T} \tilde{\varepsilon} \right],$$

отримаємо

$$\begin{aligned}
\text{cov}[\beta] &= M \left[ \left[ \delta(U^T X^{-1}) \left[ U^{*T} Y^* \right] + (U^{*T} X^*)^{-1} \left[ \delta U^T Y^* + U^{*T} \tilde{\varepsilon} \right] \right] \times \right. \\
&\quad \left. \times \left[ \left[ \delta(U^T X)^{-1} \right] \left[ U^{*T} Y^* \right] + (U^{*T} X^*)^{-1} \right] \left[ \delta U^T Y^* + U^{*T} \tilde{\varepsilon} \right]^T = \right. \\
&= M \left\{ \left[ \delta(U^T X)^{-1} \right] \left[ \left[ U^{*T} Y^* \right] (U^{*T} Y^*) \right]^T \left[ \delta(U^T X)^{-1} \right]^T \right\} + \quad (4.52) \\
&\quad + \left[ U^{*T} X^* \right]^{-1} Y^{*T} M \left\{ \delta U \delta U^T \right\} \left[ (U^{*T} X^*)^T \right]^{-1} Y^* + \\
&\quad + \left[ U^{*T} X^* \right]^{-1} U^{*T} M \left\{ \tilde{\varepsilon} \tilde{\varepsilon}^T \right\} \left[ (U^{*T} X^*)^T \right]^{-1} U^*,
\end{aligned}$$

де перший і другий компоненти залежать від порогів  $\Delta_i$  у (4.49) і від шумів  $N$  в  $X$ , а третій — від шумів у  $Y$ . При зменшенні порога  $\Delta$  до нуля перший компонент (як і в МНК, яка залежить від  $N$ ) прямує до нуля, оскільки при  $\Delta \rightarrow 0$  можуть існувати точки  $k$ , у яких  $u_i(k) \rightarrow \infty$ , а отже,  $\left\| (U^T X)^{-1} \right\| \rightarrow 0$ .

При  $\Delta \rightarrow 0, u \rightarrow 0, (U^T X)^{-1} \rightarrow 0$ , тобто перший компонент при зменшенні  $\Delta$  спадає. Другий компонент (4.52) пропорційний коваріаційній матриці  $M \left\{ \delta U \delta U^T \right\}$  і при  $\Delta \rightarrow 0$  прямує до нескінченності, а при  $\Delta \rightarrow \infty$  — до нуля. Третій компонент від  $\Delta$  не залежить. Отже, для конкретних умов існує оптимальний вектор порогів  $\Delta^*, \overline{\Delta}_i^*, i = \overline{1, n}$ , за якого норма коваріації мінімальна.

Якщо перешкоди  $N_i, \tilde{\varepsilon}$  некорельовані, а  $\varepsilon^* \rightarrow 0$ , то оцінка (4.50) буде незміщеною. Ефективність оцінок оптимізується в БАСІ за основним показником  $I_{qk}$  шляхом підбору вектора  $\Delta$ .

#### 4.5. Метод прогнозу кореляцій

Постановка задачі така ж, як і в попередньому методі: сигнали  $X^*, Y^*$  гладкі, перешкоди  $\varepsilon, N$  взаємнокорельовані, нормовані кореляційні функції перешкод затухають швидше, ніж відповідні функції сигналів  $X^*, Y^*$ ; за зашумленими вибірками  $X, Y$  треба отримати оцінку  $\hat{\beta}$ , близьку до оцінки МНК для точних даних.

Згідно з МНК,

$$\hat{\beta} = (X^T X)^{-1} X^T Y = A^{-1} B, \quad (4.53)$$

де  $A = [a_{ij}]_{i=1}^n$ ,  $B$  — вектор-стовпчик скалярних добутків  $(y(k), x_i(k))$ ,  $k = \overline{1, M}$ .

Коефіцієнти  $a_{ij}$  можна подати як відповідні кореляційні функції при нульовому зсуві змінних:

$$a_{ij} = MR_{x_i x_j}(0); \quad b_i = MR_{y x_i}(0).$$

Відповідно для зсуву  $m$  маємо

$$a_{ij}^{(m)} = MR_{x_i x_j}(m); \quad b_i^{(m)} = MR_{y x_i}(m).$$

Нехай  $R_{x_i x_i}(\tau) = R_{x_i x_i}^*(\tau) + \delta R_{x_i x_i}(\tau)$ ,  $0 < \tau < r + m$ , де  $\delta R_{x_i x_i}$  — по-хибка, переважно пов'язана з шумами  $N_i$  у вимірах  $x_i$ .

Покладемо в інтервалі  $[m, rm]$  лінійну модель автокореляції

$$\hat{R}_{x_i x_i}(\tau) = \alpha_0 + \alpha_1(\tau - \tau_{cp}). \quad (4.54)$$

Тоді як оцінки коефіцієнтів  $a_{ij}$  в формулі (4.53) візьмемо прогнозні в точку  $k = 0$  оцінки рівняння (4.54) кореляційних функцій, побудованих на інтервалі  $[m, rm]$ , де кореляція перешкод майже відсутня:

$$\hat{\alpha}_{ii} = MR_{x_i x_i}(\hat{R}_{x_i x_i}(0)) = \alpha_{0i}; \quad a_{ij} = MR_{x_j x_j}(0), i \neq j; \quad b_i = MR_{y x_i}(0). \quad (4.55)$$

У рівнянні (4.54) моделі  $\hat{R}_{x_i x_i}$

$$\tau_{\text{cp}} = \frac{1}{r+1} \sum_{k=m}^{r+m} \tau_k; \quad \alpha_0 = \frac{1}{r+1} \sum_{k=m}^{r+m} R_{x_i x_i}(\tau_k);$$

$$\alpha_{ii} = \sum_{i=m}^{r+m} (\tau_k - \tau_{\text{cp}}) R_{x_i x_i}(\tau_k) / \sum_{k=m}^{r+m} (\tau_k - \tau_{\text{cp}})^2.$$

Тоді (4.53) і (4.55) визначають  $\hat{\beta}_{\text{МПК}}$  — оцінку за даним методом — методом прогнозу кореляцій (МПК).

Позначимо  $\alpha_{ii} - \hat{\alpha}_{ii} = \delta\alpha_{ii}$ ,  $\delta A = [\delta\alpha_{ii}]_{i=1}^n$  — вектор-стовпчик;  $E\delta\alpha = \delta A_{\text{МПК}}$ ,  $A = A^* + \delta A_{\text{МПК}}$ , де через  $A^*$  позначено матрицю  $A$  для МНК за відсутності шумів.

Використовуючи розкладання в ряд Тейлора, загалом отримаємо

$$\begin{aligned} \delta B &= (A^* + \delta A)^{-1} B^* - A^{*-1} B^* \approx \\ &\approx A^{*-1} B^* - (A^{*-1})^2 \delta A B^* - A^{*-1} B^* = \\ &= -A^{*-1} \delta A A^{*-1} B^* = -A^{*-1} \delta A \beta^*. \end{aligned}$$

Розглянемо два випадки:

1) на рис. 4.7, а  $\hat{R}_{x_i x_i}^*(\tau)$ ,  $\tau \in [0, r+m]$  — опукла функція.

Тоді  $\alpha_{ii} > \hat{\alpha}_{ii}$ ,  $\delta A_{\text{МНК}} > A_{\text{МПК}}$ . Отже,  $\|\delta\beta_{\text{МПК}}\| < \|\delta\beta_{\text{МНК}}\|$ ;

2) на рис. 4.7, б  $R_{x_i x_i}^*(\tau)$  — увігнута функція. Підбором інтервалу  $(m, r)$  можна досягнути аналогічного результату і в цьому випадку. Із рис. 4.7 видно, що інтервал  $(m_2, r_2)$  задовольняє ці вимоги на відміну від інтервалу  $(m_1, r_1)$ . Отже, і в цьому випадку можна отримати менший зсув. Для опису  $R_{x_i x_i}^*(\tau)$  можуть застосовуватися ортогональні системи функцій та інші види моделей. У системах типу БАСІ структура і параметри  $R(\tau)$  можуть вибиратися за головним показником  $I_{qk}$ . Метод передбачає згладжування і прогнозування у точці  $\tau = 0$  кореляційних функцій від сигналів

$x_i(t), x_j(t)$ . Аналізуючи дисперсії цих оцінок кореляцій, легко переконатися, що  $\sigma_{\delta R}^2$  тим більше, чим менша довжина вибірки  $T$ .

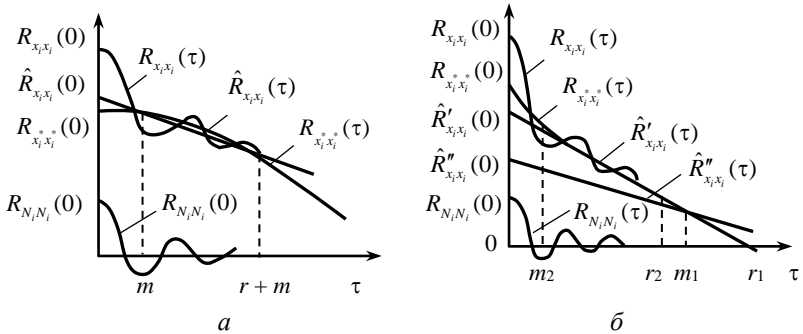


Рис. 4.7. Графік лінійної екстраполяції опуклої (а) і увігнутої (б) кореляційних функцій

#### 4.6. Дослідження системи ідентифікації типу БАСІ

Показники економіки як функції часу, можуть мати найрізно-манітнішу структуру, довжину ряду, точність, тип прихованої закономірності розвитку (зміни) у часі, кроку у часі, інтервалу прогнозу тощо.

Елементи, з яких складається модель часового ряду, можуть бути аналітичними функціями часу  $t$  (степеневі:  $t^i, -\infty < i < \infty$ ; періодичні тригонометричні:  $\sin(\omega t + \varphi)$ ; комбіновані та інші функції  $f(t)$  часу або затриманими у часі  $t$  значеннями самого ряду  $y(t)$  ( $y(t - \tau)$ ),  $0 \leq \tau \leq t_1$ , де  $t_1$  — кінцеве значення часу. Як правило, час  $t$  зображено дискетами  $t_k, k = 0, 1, 2, \dots$  не завжди з рівномірним кроком  $\Delta t$ .

У випадку невідомої структури моделі ряду, перебираючи різні варіанти структур, побудованих на вказаних елементах, можна в БАСІ-системі підібрати найкращу структуру (за основним критерієм  $I$  — критерієм точності прогнозу). Моделі

зі степеневими елементами, як правило, краще використувати для коротких рядів, а авторегресійні — для довгих (де не так сильно впливає невизначеність початкових умов).

Показник  $I$  точності прогнозу, який фізично реалізується, зобразимо зваженою сумою часткових показників  $I_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ), що відповідають за якість окремих властивостей моделі ряду. Показник  $I_1$ :

$$I_i = \frac{1}{n} \operatorname{tr} \left[ \operatorname{diag} \left[ \frac{|\hat{\beta}_i^{\text{П}} - \hat{\beta}_i^{\text{Н}}|}{|\hat{\beta}_i|} \right], i = \overline{1, n}, \right]$$

де  $\hat{\beta}_i^{\text{П}}$ ,  $\hat{\beta}_i^{\text{Н}}$ ,  $\hat{\beta}_i$  — оцінки  $i$ -го параметра моделі, отримані за вибіркою парних, непарних та всіх дискретів  $k$  часу  $t_k$ , це так званий параметричний показник регулярності.

Показник  $I_2$ :

$$I_2 = (\varepsilon^T \varepsilon) (x^T x)^{-1},$$

$$\varepsilon^T = [\varepsilon(1), \dots, \varepsilon(M)], \hat{x}^T = [\hat{x}(1), \dots, \hat{x}(M)], \quad (4.56)$$

де  $\varepsilon(k)$  — похибки апроксимації сигналу  $x(k)$  відповідною моделлю в  $k$ -й точці ряду, це так званий показник незміщеності або точності моделювання ряду моделлю.

Показник  $I_3$ :

$$I_3 = |1 - K|, \quad K = \frac{\sum_{i=1}^L \eta_i |x(M-i) \hat{x}(M-i)|}{\sum_{i=1}^L \eta_i |x(M-i)| \cdot \sum_{i=1}^L \eta_i |\hat{x}(M-i)|}. \quad (4.57)$$

Тут  $\eta_i$  — коефіцієнт розподілу бажаної точності прогнозу за  $L$  останніми точками вибірки  $x(k)$ ,  $k = \overline{1, M}$ ;  $\sum_{i=1}^L \eta_i = 1$ ;  $\hat{x}(M-i)$  — прогнозні значення, отримані з моделі, побудованої на скороченій на  $L$  останніх точок вибірки  $k = \overline{1, M-L}$ .

Оскільки вважається, що прогнозований ряд  $x(k)$  складається з прихованої детермінованої гладкої у часі складової і випадкової складової, близької до гауссівського



шуму, то у варіаційному ряді упорядкованих за складністю (мірності вектора  $\beta$ ), показник  $I_1$  збільшується тоді, як показник  $I_2$  зі зростанням  $n$  зменшується. Залежно від мети ідентифікації варіюються коефіцієнти ваги  $g_i$  зваженої суми показників:

$$I = \sum_{i=1}^3 g_i I_i, \quad \sum_{i=1}^3 g_i = 1, \quad g_i \geq 0. \quad (4.58)$$

Для задачі контролю параметрів  $\beta_i$  моделі відомої структури максимальна вага  $g_1$ ; для задачі точної апроксимації ряду  $x(k)$  моделлю  $\hat{x}(k) — g_2$ ; для задачі прогнозу —  $g_3$ . Сукупність показників  $I_1, I_2, I_3$  забезпечує компроміс між стабільністю оцінок моделі, точністю  $\varepsilon^T \varepsilon$  апроксимації та точністю прогнозу.

На конкретному прикладі реального часового ряду, що має 43 дискрети  $x(k)$  з рівномірним кроком  $\Delta t = 4$  місяці (один з показників у енергетиці України) (табл. 4.4).

Таблиця 4.4

**Залежність  $x$  від  $k$**

$k$	$x$	$k$	$x$	$k$	$x$	$k$	$x$
1	10550	12	13600	23	59250	34	57800
2	47070	13	14550	24	16850	35	49630
3	47350	14	49900	25	17830	36	18780
4	11500	15	56750	26	54800	37	16000
5	10900	16	16050	27	50700	38	53950
6	54700	17	14680	28	14150	39	57500
7	50000	18	59300	29	13550	40	22000
8	14320	19	57700	30	47430	41	19650
9	12900	20	15500	31	56350	42	59900
10	51650	21	13350	32	19450	43	57550
11	50740	22	55600	33	17600		

Розглянемо розв’язання задачі прогнозу  $x(k)$ , на шести останніх точках, вважаючи їх невідомими.

Така постановка задачі дозволяє реалізувати  $k = \overline{1,37}$ , фізично не реалізований при прогнозі в майбутнє,

об'єктивний показник  $I$  відносної точності прогнозу на ці шість точок:

$$I = \frac{[\varepsilon(38), \dots, \varepsilon(43)] [\varepsilon(38), \dots, \varepsilon(43)]^T}{[x(38), \dots, x(43)] [x(38), \dots, x(43)]^T}, \quad (4.59)$$

тобто відносне середньоквадратичне відхилення  $\varepsilon(k) = \hat{x}(k) - x(k)$ ,  $k = \overline{38, 43}$  прогнозованих значень  $\hat{x}(k)$

від відомих  $x(k)$ . У критерії (4.57) взято  $\eta_i = \frac{1}{L} = \frac{1}{6}$ .

Коефіцієнти ваги  $g_i$  в узагальненому критерії (4.58) прийнято такими:  $g_1 = 0,9$ ;  $g_2 = 0,4$ ;  $g_3 = 0,4$ . Середнє значення ряду 35 100, середньоквадратичне відхилення ряду від середнього — 19 550, коефіцієнт варіації — 0,55. Наведеному у табл. 4.4 ряду в БАСІ відповідали різні математичні моделі:

1) моделі у вигляді степеневого полінома (від дискретів  $k$  часу) з цілими, дробовими, додатними та від'ємними показниками степеня:

$$\hat{x}(k) = \beta_0 + \beta_1 k; \quad (4.60)$$

$$\hat{x}(k) = \beta_0 + \beta_1 k + \beta_2 k^2; \quad (4.61)$$

$$\hat{x}(k) = \beta_0 + \beta_1 k + \beta_2 k^2 + \beta_3 k^3; \quad (4.62)$$

$$\hat{x}(k) = \beta_0 + \beta_1 k^{\frac{1}{4}} + \beta_2 k^{\frac{1}{3}} + \beta_3 k^{\frac{1}{2}} + \beta_4 k^{\frac{3}{2}}; \quad (4.63)$$

$$\hat{x}(k) = \beta_0 + \beta_1 k + \beta_2 k^{-1} + \beta_3 k^{-3}; \quad (4.64)$$

2) моделі авторегресії від  $k$  із постійним та змінним кроком:

$$\hat{x}(k) = \beta_0 + \beta_1 x(k-1); \quad (4.65)$$

$$\hat{x}(k) = \beta_0 + \beta_1 x(k-1) + \beta_2 x(k-2) + \beta_3 x(k-3); \quad (4.67)$$

$$\hat{x}(k) = \beta_0 + \beta_1 x(k-4); \quad (4.68)$$

$$\hat{x}(k) = \beta_0 + \beta_1 x(k-1) + \beta_2 x(k-2) + \beta_3 x(k-3) + \beta_4 x(k-4); \quad (4.69)$$

$$\hat{x}(k) = \beta_0 + \beta_1 x(k-1) + \beta_2 x(k-4); \quad (4.70)$$

$$\hat{x}(k) = \beta_0 + \beta_1 x(k-1) + \beta_2 x(k-4) + \beta_3 x(k-8), \quad (4.71)$$

3) *комбіновані поліноміально-авторегресійні моделі*, які виявила БАСІ як інтелектуальна система в процесі ідентифікації багатьох часових рядів:

$$\hat{x}(k) = \beta_0 + \beta_1 k + \beta_2 x(k-1); \quad (4.72)$$

$$\hat{x}(k) = \beta_0 + \beta_1 k + \beta_2 x(k-1); \quad (4.73)$$

$$\hat{x}(k) = \beta_0 + \beta_1 k + \beta_2 x(k-4); \quad (4.74)$$

$$\hat{x}(k) = \beta_0 + \beta_1 k + \beta_2 x(k-1) + \beta_3 x(k-4).$$

На множині структур (4.60)–(4.74) моделей часового ряду (табл. 4.4) та множині методів (МНК, ІМНК, УМНК, МОД) було перевірено ефективність використання фізично реалізованого критерію (4.58) щодо його близькості до фізично не реалізованого критерію (4.60). Під ефективністю розумілася правильність вибору найкращого за фізично не реалізованим критерієм (4.60) методу, вибраного за фізично реалізованим критерієм (4.59).

Результати числового моделювання в 15 рядках подано в табл. 4.4 в стовпчиках:

- 1 – типи моделей (степеневі, авторегресійні, комбіновані);
- 2 – відносна середньоквадратична похибка моделювання ряду відповідною моделлю на  $k = \overline{1,3,7}$  при ідентифікації її за МНК;
- 3 – значення фізично не реалізованого ідеального критерію (4.60) за МНК;
- 4 – фізично реалізований критерій (4.59) при ідентифікації моделі за МНК;
- 5 – найкращий за критерієм (4.59) метод ідентифікації для відповідної до рядка моделі;
- 6 – значення ідеального критерію (4.60) для вибраного за реальним критерієм (4.59) методом для відповідної до рядка моделі;

7 – значення критерію (4.59) для вибраного за ним найкращого методу ідентифікації для відповідної до рядка моделі;

8 – найкращий за ідеальним критерієм (4.60) метод ідентифікації відповідної до рядка моделі;

9 – значення ідеального критерію (4.60) для найкращого за ним методом ідентифікації моделі відповідного рядка;

10 – значення реального критерію (4.59) для найкращого за критерієм (4.60) методом ідентифікації моделі відповідного рядка;

11 – коефіцієнт ефективності БАСІ-системи.

*Таблиця 4.5*

**Результати моделювання**

№ з/п	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	10,89	0,49	0,47	0,25	УМНК	0,41	0,242	МОД	0,363	0,26	1,3
2	10,90	0,484	0,593	0,26	ІМНК	0,415	0,223	ІМНК	0,415	0,223	1,43
3	10,91	0,476	0,883	0,41	ІМНК	0,38	0,2	ІМНК	0,38	0,2	2,32
4	10,92	0,485	0,593	0,27	УМНК	0,43	0,226	ІМНК	0,365	0,235	1,62
5	10,93	0,488	0,49	0,25	ІМНК	0,45	0,23	УМНК	0,425	0,237	1,15
6	10,94	0,49	0,435	0,24	УМНК	0,42	0,235	УМНК	0,415	0,235	1,05
7	10,95	0,62	0,58	0,28	УМНК	0,56	0,262	УМНК	0,558	0,262	1,04
8	10,96	0,123	0,143	0,04	МНК	0,143	0,04	МОД	0,096	0,048	1,49
9	10,97	0,133	0,1	0,03	МНК	0,1	0,03	МОД	0,088	0,126	1,13
10	10,98	0,113	0,122	0,037	МДЗ	0,092	0,03	МОД	0,092	0,03	1,33
11	10,99	0,131	0,103	0,034	МДЗ	0,091	0,031	МОД	0,091	0,031	1,13
12	10,100	0,008 7	0,092	0,015	МДЗ	0,063	0,011	МОД	0,063	0,011	1,46
13	10,101	0,488	0,47	0,245	МДЗ	0,489	0,225	УМНК	0,411	0,237	1,14
14	10,102	0,132	0,108	0,035	МНК	0,108	0,035	МОД	0,018 1	0,038	1,33
15	10,103	0,131	0,111	0,036	МНК	0,111	0,037	МНК	0,111	0,037	1

Проаналізуємо отримані результати розрахунків:

1. На множині з 15-ти структур моделей і 4 методів ідентифікації для конкретного ряду (див. табл. 4.4) найкращою за ідеальним критерієм (4.60) виявилась авторегресивна модель (4.63) зі змінним запізненням на  $k-1$ ,  $k-4$  і  $k-8$  кроків; найкращий метод — МОД. За реальним критерієм (4.59) отримано такий самий результат (!). Загалом із 15 розглянутих випадків у восьми оптимальний метод ідентифікації за реальним критерієм (4.59) було обрано правильно (рядки 2, 3, 6, 7, 10, 11, 12, 15 табл. 4.5), тобто він збігся з методом, обраним за ідеальним, але фізично не реалізованим критерієм (4.60). В інших семи випадках (рядки 1, 4, 5, 8, 9, 13, 14) ідеальний показник (4.62) для методу, вибраного за реальним показником, несуттєво гірший за цей показник для оптимального за ідеальним показником методом (стовпчики 6 і 9, рис. 4.8).

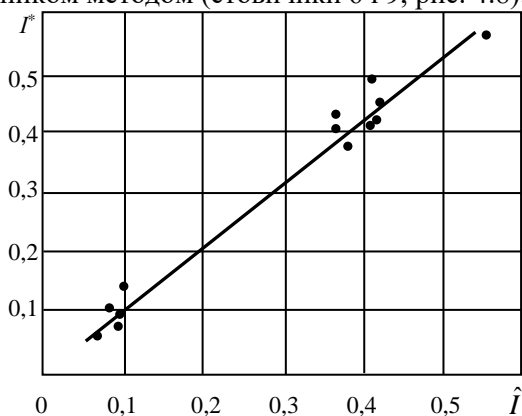


Рис. 4.8. Залежність ідеального показника  $I^*$ , отриманого для оптимального за ним методу ідентифікації від того самого показника для оптимального за реальним показником  $\hat{I}$  методу ідентифікації

З рис. 4.8 випливає висновок про сильну кореляцію показників (4.58) і (4.60) і, як наслідок, можливість ефективного використання фізично реалізованого критерію (4.59).

2. У міру ускладнення моделей (4.61), (4.62), (4.73), що є степеневими рядами, показник (4.56) (другий стовпчик табл. 4.5) середньоквадратичної похибки апроксимації ряду (табл.

4.4) моделями (4.60)–(4.62) зменшується, що природно витікає з першої теореми Вейерштрасса про апроксимацію степеневими поліномами (рядами Тейлора). Разом з тим ідеальний критерій (4.59) точності прогнозу при ускладненні моделей погіршується (рядки 1, 2, 3 третього стовпчика табл. 4.5). Це підтверджує необ'єктивність внутрішнього апроксимативного критерію (4.56) некоректність лише його використання для задачі прогнозу.

3. Дещо інша ситуація складається для авторегресивних і змішаних поліноміально-авторегресійних моделей (4.65)–(4.74).

Тут унаслідок регуляризованої властивості МНК, якщо змінні зашумлені, внутрішній критерій (4.56) середньоквадратичної міри близькості на ділянці апроксимації і зовнішній, як ідеальний (4.60), так і реальний (4.58) критерії стають досить сильно корельованими (рис. 4.9).

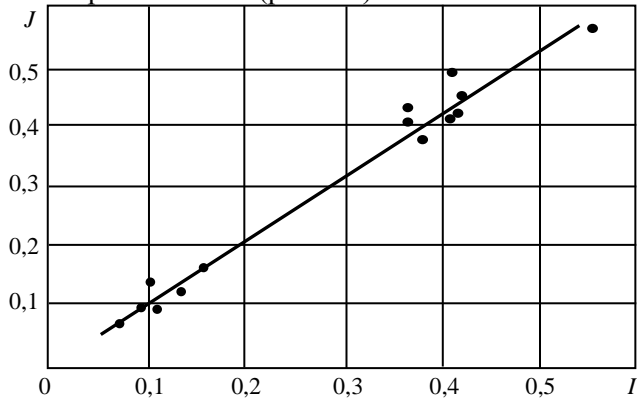


Рис. 4.9. Регресійна залежність  $J$  (4.48) від  $I$  (4.51)

Тобто для цього класу моделей менш критичне використання апроксимативного критерію (4.56) в задачі прогнозу в точках (38–43) за зашумленими даними в точках (1–37).

Тут має місце саморегулювання. Що складніша авторегресія, то гірша обумовленість інформаційної матриці МНК для точних даних, а для неточних — діагональні члени матриці МНК збільшуються.

Але для зашумлених некорельованою перешкодою даних діагональні елементи цієї матриці збільшуються і, як результат, зменшуються (за модулем) МНК-оцінки коефіцієнтів моделі, тим самим спрощуючи (регуляризуючи за Тихоновим [11]) модель.

4. Зіставимо значення ідеального критерію (4.59) для моделей, отриманих за МНК (стовпчик 3), і одному із запропонованих методів (стовпчик 6) з оптимізацією за реальним критерієм (4.58). Із 15 моделей лише для моделі (4.72) показник (4.60) несуттєво менший. Тобто тільки тут за критерієм (4.59) помилково замість МНК було вибрано МОД. В інших чотирнадцяти випадках метод, знайдений за умови мінімуму фізично реалізованого критерію (4.59) точності прогнозу, дав кращі результати, ніж МНК, або такі самі, якщо за (4.59) вибирався як кращий МНК (див. стовпчики 6 і 3 табл. 4.5).

5. У межах одного методу ідентифікації, наприклад МОД (стовпчик 6, рядки 10–13), розкид ідеального критерію (4.60) залежно від структури моделі становить від 0,063 до 0,489, що підтверджує актуальність вибору структури моделі.

У межах однієї, наприклад оптимальної за критерієм (4.58) моделі (4.71), оптимізація рішення на множині з чотирьох методів (МНК, МОД, УМНК, ІМНК) дає вигравш в 1,5 рази (0,092 — для МНК і 0,063 — для МОД як оптимального методу).

6. Загалом оптимізація на множині методів і моделей дає суттєвий вигравш у точності прогнозу. Визначимо цей вигравш як відношення критерію (4.60) для моделі з коефіцієнтами, визначеними за МНК (стовпчик 3, табл. 4.5), до значення того самого критерію для тієї самої моделі з коефіцієнтами, визначеними оптимальним за (4.60) методом (стовпчик 9, табл. 4.5).

У стовпчику 11 табл. 4.5 подано це відношення, що лежить у межах від 1 до 2,32. У середньому воно становить 1,33. Загальний і очевидний висновок-рекомендація: якщо ви маєте декілька методів ідентифікації і можливість використання

моделей, то пошук найкращої за основним показником і пари «модель-метод» в умовах невизначеності дає можливість краще розв'язати задачу ідентифікації.

### Запитання

1. Яка умова в реальній ситуації не відповідає умовам теореми Гаусса-Маркова?
2. Як вплинуть на зміщення МНК-оцінки шуми в вимірах незалежних змінних ММ?
3. Як оцінити шуми  $N(t)$  в  $X(t)$  і зкоригувати МНК-оцінку  $\beta$ ?
4. В чому полягає подібність регуляризації по Тихонову і МНК-оцінювання в умовах шумів в незалежних змінних?
5. В чому сутність узагальненого МНК?
6. Як впливає фільтрація шумів на зміщення і дисперсію УМНК-оцінок?
7. За яких умов буде ефективним ІМНК?
8. Чим обмежується зсув  $\pm \tau$  сигналів в ІМНК?
9. Чому симетричний зсув краще за односторонній?
10. Поясніть виведення формул зсуву і коваріації ІМНК-оцінок.
11. Чи буде різниця між ІМНК-оцінками в звичайному і рекурентному алгоритмі при великих вибірках?
12. Яким умовам повинна задовольняти вагова функція  $\eta(m)$  в ІМНК?
13. Як слід змінювати параметри  $\gamma$  і  $\theta$  вагової функції залежно від довжин кореляції сигналів і шумів?
14. Назвіть алгоритм методу ІМНК.
15. В чому сутність методів МОД і прогнозу кореляції?
16. В чому полягає ідея МОД?
17. Як вплине поріг  $\Delta_i$  в МОД на зміщення і дисперсію оцінок параметрів ММ?
18. Чому  $\Delta_i > 0$ ?
19. Які допущення зроблено для наближеного виведення зміщення і дисперсії МОД-оцінок параметрів ММ?



20. Яким чином в методі прогнозу кореляцій (МПК) досягається зменшення зміщення і дисперсії МПК-оцінок параметрів ММ?
21. Які складові  $I_j$  загального критерію  $I$  (6.50) і як вони впливають на якість прогнозної моделі?
22. Які моделі-претенденти було використано в БАСІ-системі?
23. Які методи ідентифікації?
24. Що (відносно ефективності БАСІ) показали результати (табл. 6.2) ідентифікації ММ з метою прогнозу?
25. Який максимальний коефіцієнт ефективності БАСІ і в чому він відповідає ІМНК-оцінюванню?

## Розділ 5

# ДОСЛІДЖЕННЯ НЕПЕРЕРВНИХ МОДЕЛЕЙ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ

### 5.1. Використання законів механіки

Структуру моделей динаміки фізичної системи отримують на основі законів механіки, електрики, гідравліки, термодинаміки та ін. Наприклад, система «пружина-маса» (рис. 5.1), до якої прикладемо момент  $M_1(t)$ .

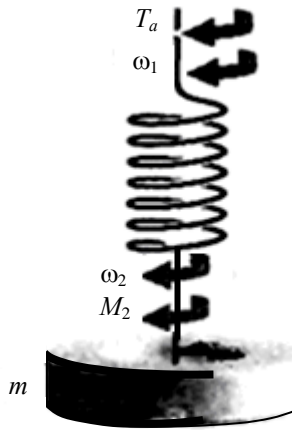


Рис. 5.1. Обертвий об'єкт «пружина-маса»

Припустимо, що пружина має малу масу порівняно з диском. Необхідно виміряти момент  $M_2(t)$  маси  $m$ , виходячи із законів механіки. Сума діючих моментів повинна дорівнювати нулю  $M_1(t) = M_2(t)$ . Зовнішній момент  $M_1(t)$  прикладений до кінця пружини, передається крізь цей пружний елемент. Різниця кутових швидкостей пружного елемента  $\omega(t) = \omega_2(t) - \omega_1(t)$  характеризує ку-

тову швидкість одного кінця пружного елемента щодо іншого і називається **відносною змінною**. Для пружини і маси, що обертаються без демпфера (рис. 5.1) або лінійно переміщуються з демпфером (рис. 5.2), в основу моделі покладено закони Ньютона.

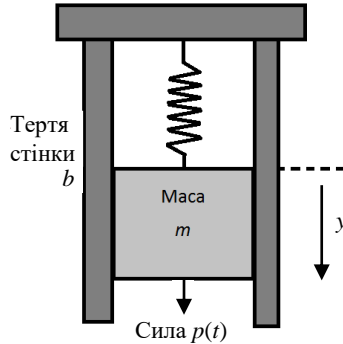


Рис. 5.2. Рухомий об'єкт «пружина-маса»

У прикладі (рис. 5.2) вважатимемо тертя вантажу об стінки в'язким. Тоді, згідно з другим законом Ньютона, отримаємо диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами

$$m \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + b \frac{dy(t)}{dt} + ky(t) = p(t), \quad (5.1)$$

де  $k$  — коефіцієнт пружності пружини;  $b$  — коефіцієнт тертя.

Більшість фізичних систем в малому діапазоні зміни змінних близькі до лінійних. Зі зростанням змінних всі системи стають нелінійними. Так, система «пружина-маса» (рис. 5.2) лінійна і описується рівнянням (5.1) лише для малих відхилень  $y(t)$ .

Якщо до системи в стані спокою застосувати збурення  $x_1(t)$ , то на виході з'явиться реакція  $y_1(t)$ . Якщо піддати систему збуренню  $x_2(t)$ , то вона дасть реакцію  $y_2(t)$ .

Необхідною умовою лінійності є умова, за якої при збуренні  $x_1(t) + x_2(t)$  система мала реакцію  $y_1(t) + y_2(t)$ . Це називають принципом *суперпозиції*.

Для лінійної системи повинен виконуватися фактор масштабування: при множенні вхідної змінної на константу  $\beta$  вихідна змінна системи дорівнювала  $\beta \beta^*$  у. Цю властивість називають *гомогенністю*.

Система  $y = x_2$  не є лінійною, тому що для неї не виконується принцип суперпозиції. Система  $y = mx + b$  негомогенна. Проте в околиці робочої точки  $x_0, y_0$  щодо малих відхилень  $\Delta x$  і  $\Delta y$  її можна вважати лінійною. Якщо  $x = x_0 + \Delta x$  і  $y = y_0 + \Delta y$ , то  $\Delta y = m\Delta x$  задовольняє необхідні умови лінійності.

Нехай певний елемент характеризується збуренням  $x(t)$  і реакцією на нього  $y(t)$ :

$$y(t) = f[x(t)],$$

Безперервну функцію  $f$  в околиці робочої точки  $x_0$  можна розкласти в *ряд Тейлора*:

$$y = f(x) = f(x_0) + \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_0} \frac{(x-x_0)}{1!} + \left. \frac{d^2 f}{dx^2} \right|_{x=x_0} \frac{(x-x_0)^2}{2!} + \dots$$

Значення похідної  $\left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_0}$  характеризує нахил дотич-

ної до функції  $y = f(x)$  в робочій точці  $x_0$ . Ця дотична є апроксимацією кривої  $f(x)$  у випадку малих значень  $(x - x_0)$  відхилення від робочої точки:

$$y = f(x_0) + \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_0} (x - x_0) = y_0 + \beta(x - x_0), \quad (5.2)$$

де  $\beta$  — тангенс кута нахилу дотичної до кривої в робочій точці. Рівняння (5.2) можна записати у відхиленнях:

$$\Delta y = \Delta x.$$

Нехай вантаж масою  $m$  розташовано на пружині. Робоча точка відповідає стану рівноваги, коли пружна сила пружини дорівнює вазі вантажу  $mg$ , де  $g$  — приско-

рення сили тяжіння:  $F_0 = mg$  (рис. 5.3). Якщо пружина має залежність  $F = y^2$ , то в положенні рівноваги  $y_0 = \sqrt{mg}$ . Лінійна модель для малих відхилень:

$$\Delta F = \beta \Delta y = \left. \frac{dF}{dy} \right|_{y_0} \Delta y = 2y_0 * \Delta y.$$

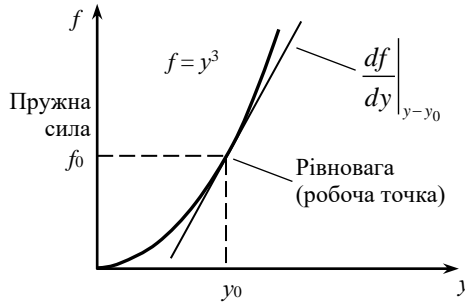


Рис. 5.3. Залежність пружної сили від  $y$

Якщо змінна узалежить від декількох збурень  $x_1, x_2, \dots, x_n$ ,

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

то при лінеаризації беруться перші члени кратного ряду Тейлора [див. формулу (1.7)]:

$$y = f(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}) + \left. \frac{\partial f}{\partial x_1} \right|_{x=x_0} (x_1 - x_{10}) + \left. \frac{\partial f}{\partial x_2} \right|_{x=x_0} (x_2 - x_{20}) + \dots + \left. \frac{\partial f}{\partial x_n} \right|_{x=x_0} (x_n - x_{n0}).$$

Розглянемо коливання маятника (рис. 5.4, а). Момент, що діє на масу, дорівнює:

$$M = mgL \sin \theta,$$

де  $g$  — прискорення сили тяжіння. Умова рівноваги маятника

$\theta_0 = 0^\circ$ . Нелінійну залежність між  $T$  і  $\theta$  зображено на рис. 5.4, б. Обчислимо похідну в точці рівноваги. Тоді

$$T - T_0 \approx MgL \left. \frac{\partial \sin \theta}{\partial \theta} \right|_{\theta=\theta_0} (\theta - \theta_0),$$

де  $T_0 = 0$ ,  $\theta_0 = 0$ , отже,

$$T = MgL(\cos^\circ)(\theta - 0^\circ) = MgL\theta. \quad (5.3)$$

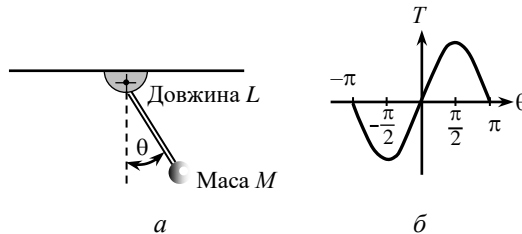


Рис. 5.4. Коливання маятника:  
а — маятник; б — залежність  $T(\theta)$

Лінійна модель (5.3) в діапазоні  $-\pi/6 \leq \theta \leq \pi/6$  відрізняється лише на 2 % від дійсних коливань маятника.

Розглянемо більш складну механічну систему (рис. 5.5). Рівняння руху механічної системи в просторі зображень за Лапасом за нульових початкових умов отримане на підставі складання сил, що діють на елементи системи:

$$m_1 s V_1(s) + (b_1 + b_2) V_1(s) - b_1 V_2(s) = p(s),$$

$$m_2 s V_2(s) + b_1 [V_2(s) - V_1(s)] + k \frac{V_2(s)}{s} = 0,$$

або

$$[m_1 s + (b_1 + b_2)] V_1(s) - b_1 V_2(s) = p(s), \quad (5.4)$$

$$-b_1 V_1(s) + \left( m_2 s + b_1 + \frac{k}{s} \right) V_2(s) = 0,$$

де  $s$  — змінна Лапласа.

Рівняння (5.4) у матричній формі:

$$\begin{bmatrix} m_1 s + b_1 + b_2 & -b_1 \\ -b_1 & m_2 s + b_1 + \frac{k}{s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1(s) \\ V_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p(s) \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Вважаючи, що вихідна змінна — це швидкість руху маси  $m_1$ , за допомогою обернення матриці отримаємо:

$$V_1(s) = \frac{(m_2 s + b_1 + k/s)p(s)}{(m_1 s + b_1 + b_2)(m_2 s + b_1 + k/s) - b_1^2}.$$

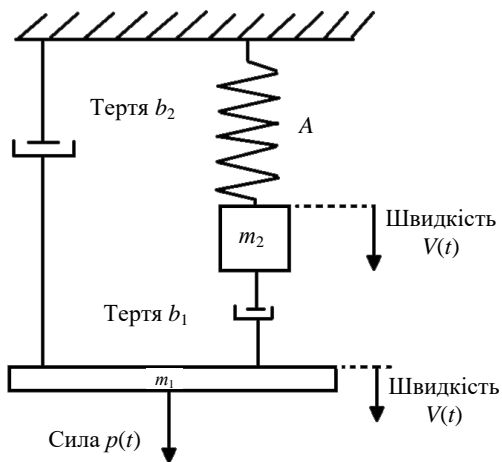


Рис. 5.5. Механічна система з двома масами

Передатна функція системи:

$$W(s) = \frac{V_1(s)}{p(s)} = \frac{(m_2 s^2 + b_1 s + k)}{(m_1 s + b_1 + b_2)(m_2 s^2 + b_1 s + k) - b_1^2 s}.$$

Якщо за вихідну змінну прийняти переміщення  $x_1(t)$ , то

$$\frac{X_1(s)}{p(s)} = \frac{V_1(s)}{s p(s)} = \frac{W(s)}{s}.$$

## 5.2. Використання законів електромеханіки

### 5.2.1. Передатна функція двигуна постійного струму як виконавчого елемента в системах бортової автоматики літальних апаратів

Електродвигун (рис. 5.6) перетворює електричну енергію на механічну енергію обертового руху. Завдяки високому обертальному моменту, можливості регулювання швидкості в широкому діапазоні, компактності, добрими характеристиками навантаження, двигуни постійного струму широко застосовуються в роботах-маніпуляторах, стрічкопротяжних механізмах, дисководах, у машинобудуванні та виконавчих пристроях слідкуючих систем.

Двигуни цього типу здатні створювати високий момент за малого моменту інерції ротора. Значення механічної сталої часу 15 мс.

Передатну функцію двигуна отримаємо шляхом лінійної апроксимації реальних характеристик. Вхідна керуюча напруга може бути подана на обмотку збудження або на якір. Якщо відсутня насиченість, то магнітний потік  $\Phi$  у повітряному зазорі буде пропорційний струму збудження  $i_f$ :

$$\Phi = K_f i_f.$$

Момент, що розвивається двигуном:

$$M_m = K_1 \Phi i_a(t) = K_1 K_f i_f(t) i_a(t). \quad (5.5)$$

Якщо двигун, керований по колу збудження, то перетворюючи (5.5) за Лапласом, отримаємо:

$$M_m(s) = (K_1 \Phi I_a) I_f(s) = K_m I_f(s), \quad (5.6)$$

де  $i_a = I_a$  струм якоря, а  $K_m$  носить назву *сталой електродвигуна*.



Струм збудження пов'язаний з напругою збудження  $U_f$  законами електрики

$$U_f(s) = (R_f + L_f s) I_f(s), \quad (5.7)$$

де  $R_f$  — опір;  $L_f$  — індуктивність обмотки збудження.

Момент, що розвиває двигун, застосовується до навантаження:

$$M_m(s) = M_L(s) + M_d(s), \quad (5.8)$$

де  $M_L(s)$ ,  $M_d$  — динамічний та статичний моменти навантаження

$$M_L(s) = Js^2\theta(s) + bs\theta(s). \quad (5.9)$$

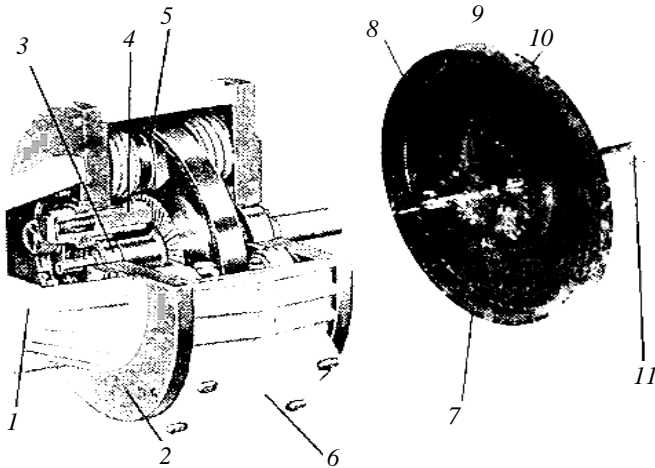


Рис. 5.6. Двигун постійного струму плоскої конструкції з постійними магнітами:

- 1 — захисна алюмінієва кришка; 2 — плоска форма, що забезпечує компактність конструкції; 3 — підшипники; 4 — щітки;
- 5 — постійні магніти зі сплаву Алніко, які забезпечують високе відношення «потужність/вага»; 6 — примусова вентиляція;
- 7 — обмотка; 8 — мідний колектор; 9 — якір; 10 — тарілчаста форма якої, що забезпечує малий момент інерції; 11 — вал

З виразів (5.6)–(5.8) отримаємо:

$$M_L(s) = M_m(s) + M_d(s); \quad (5.10)$$

$$M_m(s) = K_m I_f(s);$$

$$I_f(s) = \frac{U_f(s)}{R_f + L_f s}.$$

Передатна функція двигуна «вхід напруга  $U_f$  — вихід кут  $\theta$ »:

$$\frac{\theta(s)}{U_f(s)} = \frac{K_m}{s(Js + b)(L_f s + R_f)} = \frac{K_m / J L_f}{s(s + b/J)(s + R_f/L_f)},$$

або

$$\frac{\theta(s)}{U_f(s)} = G(s) = \frac{K_m / b R_f}{s(\tau_f s + 1)(\tau_L s + 1)},$$

де  $\tau_f = L_f / R_f$  і  $\tau_L = J / b$ .

Якщо  $\tau_L > \tau_f$  то сталою часу обмотки збудження можна знехтувати. Структурну схему двигуна, керованого по колу збудження, зображено на рис. 5.7. Момент, що розвивається двигуном, пропорційний добутку струму  $I_a$  якоря на струм  $I_3$  збудження :

$$M_m(s) = (K_1 K_f I_f) I_a(s). \quad (5.11)$$

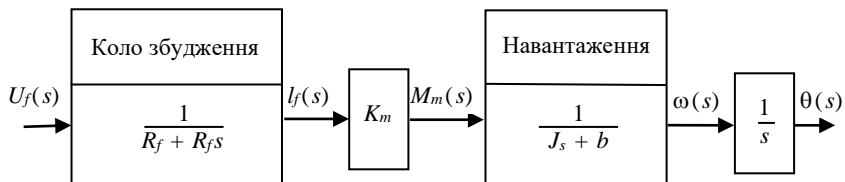


Рис. 5.7. Модель двигуна, керованого струмом збудження

Якщо використано постійні магніти, то момент двигуна буде пропорційний струму  $I_a$  якоря:

$$M_m(s) = K_m I_a(s),$$

де  $K_m$  — коефіцієнт, що залежить від магнітної проникності сталюого осердя.

Струм у колі якоря пов'язаний з напругою за другим законом Кірхгофа:

$$U_a(s) = (R_a + L_a s) I_a(s) + E_b(s), \quad (5.12)$$

де  $E_b(s)$  — проти-ЕРС, яка пропорційна швидкості  $\omega$  обертання:

$$E_b(s) = K_b \omega(s),$$

Із рівняння (5.12) визначимо  $I_a$ , як функцію від  $U_a$ ,  $\omega$ :

$$I_a(s) = \frac{U_a(s) - K_b \omega(s)}{R_a + L_a s}. \quad (5.13)$$

Із рівнянь (5.9)–(5.10) отримаємо вираз для моменту навантаження:

$$M_L(s) = J s^2 \theta(s) + b s \theta(s) = M_m(s). \quad (5.14)$$

Зв'язок між змінними двигуна, керованого по колу якоря, показано на рис. 5.8. Із рівнянь (5.11), (5.13) і (5.14) (або за структурною схемою) отримаємо передатну функцію двигуна:

$$\begin{aligned} W(s) &= \frac{\theta(s)}{U_a(s)} = \frac{K_m}{s[(R_a + L_a s)(J s + b) + K_b K_m]} = \\ &= \frac{K_m}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)}, \end{aligned}$$

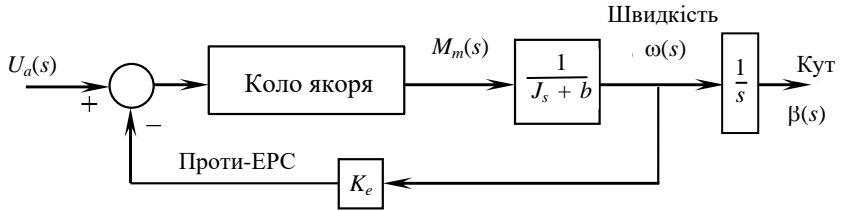


Рис. 5.8. Модель двигуна, керованого струмом якоря

Якщо сталою часу якоря  $\tau_1 = L_a / R_a$  можна знехтувати, то

$$\begin{aligned}
 W(s) &= \frac{\theta(s)}{V_a(s)} = \frac{K_m}{s [R_a (Js + b) + K_b K_m]} = \\
 &= \frac{K_m / (R_a b + K_b K_m)}{s(\tau_1 s + 1)},
 \end{aligned}
 \tag{5.15}$$

де еквівалентна стала часу  $\tau_1 = R_a J / (R_a b + K_b K_m)$ .

### 5.2.2. Модель гідравлічного приводу рульових машин літальних апаратів

Для лінійного переміщення маси  $m$  може бути використано гідравлічний пристрій. Рідина подається від джерела під постійним тиском і її стисливістю можна знехтувати. Переміщення  $x(t)$  золотника вниз призводить до подачі рідини у верхню частину гідроциліндра і тоді поршень переміщується вниз. Мала сила, необхідна для переміщення  $x(t)$ , перетворюється на велику силу, пов'язану з переміщенням поршня  $y(t)$ . Об'ємна витрата рідини  $Q$  залежить від переміщення  $x(t)$  і різниці тисків, що діють на поршень, тобто  $Q = g(x, P)$ . Скориставшись методом лінеаризації, запишемо:

$$Q = \left( \frac{\partial g}{\partial x} \right)_{x_0, P_0} x + \left( \frac{\partial g}{\partial P} \right)_{x_0, P_0} P = k_x x - k_p P, \quad (5.16)$$

де  $(x_0, P_0)$  — координати робочої точки.

Сила, що розвивається поршнем гідроциліндра, дорівнює добутку його площі  $A$  на тиск  $P$ :

$$AP = m \frac{d^2 y}{dt^2} + b \frac{dy}{dt}. \quad (5.17)$$

Підставляючи (5.16) в рівняння (5.17), отримаємо

$$\frac{A}{k_p} (k_x x - Q) = m \frac{d^2 y}{dt^2} + b \frac{dy}{dt}. \quad (5.18)$$

Окрім того, об'ємна витрата рідини пов'язана з переміщенням поршня:

$$Q = A \frac{dy}{dt}. \quad (5.19)$$

Підставляючи (5.19) в рівняння (5.18), отримаємо:

$$\frac{Ak_x}{k_p} x = m \frac{d^2 y}{dt^2} + \left( b + \frac{A^2}{k_p} \right) \frac{dy}{dt}.$$

Тоді, скориставшись перетворенням Лапласа, отримаємо передатну функцію, що зв'язує переміщення  $x(t)$  золотника з переміщенням  $y(t)$  поршня:

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{K}{s(Ms + B)}, \quad (5.20)$$

де  $K = \frac{Ak_x}{k_p}$  і  $B = b + \frac{A^2}{k_p}$ .

За структурою передатна функція (5.20) гідравлічного виконавчого пристрою збігається з передатною функцією (5.15) електродвигуна.

### 5.3. Структурні схеми систем керування

У теорії ідентифікації та керування часто використовують зображення систем у вигляді структурних схем. Структурні схеми складаються з ланок спрямованої дії, кожній із яких відповідає певна передатна функція. На рис. 5.9 зображено структурну схему двигуна постійного струму, керованого по колу збудження, яка відображає зв'язок між кутом повороту  $\theta(s)$  і напругою  $U_f(s)$ .

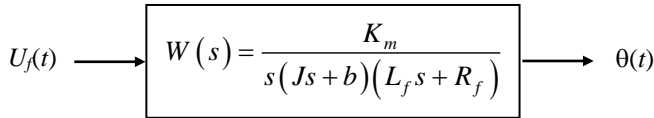


Рис. 5.9. Структурна схема двигуна постійного струму

У загальному випадку для моделі системи з декількома керованими змінними використовується структурна схема з перехресними зв'язками. У системі є дві входні і дві вихідні змінні (рис. 5.10).

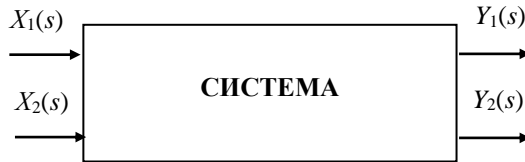


Рис. 5.10. Система з двома входами і двома виходами

За допомогою передатних функцій можна записати зв'язуючі їх рівняння:

$$Y_1(s) = W_{11}(s)X_1(s) + W_{12}(s)X_2(s),$$

$$Y_2(s) = W_{21}(s)X_1(s) + W_{22}(s)X_2(s),$$

де  $W_{ij}(s)$  — передатна функція від  $j$ -го входу до  $i$ -го виходу.

Загалом, за наявності  $n$  входів і  $m$  виходів можна записати в матричній формі:

$$\begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \\ \vdots \\ Y_m(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & \dots & G_{1n}(s) \\ G_{21}(s) & \dots & G_{2n}(s) \\ \vdots & & \vdots \\ G_{m1}(s) & \dots & G_{mn}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \\ \vdots \\ X_n(s) \end{bmatrix},$$

або векторно-матричній формі

$$Y = WX,$$

де  $Y$  і  $X$  — матриці-стовпці, елементами яких є  $m$  вихідних і  $n$  вхідних змінних, а  $W$  — матрична передатна функція розмірності  $mn$ .

Далі розглядаємо приклади систем типу «об'єкт-регулятор», де для вибору оптимального регулятора необхідно знати математичну модель об'єкта — передатну функцію. Структуру її визначають, виходячи із законів фізики, а параметри слід уточнити шляхом розв'язання задачі ідентифікації.

**Приклад 5.2.** Автономний самохідний місяцехід.

Самохідним апаратом (місяцеходом) (рис. 5.13) із живленням від сонячних батарей може керувати за допомогою команд  $x(t)$ . Система керування може бути розімкненою або замкненою.

Розімкнена система має передатну функцію:

$$W_0(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{K}{s^2 + a_1s + a_0},$$

замкнена система — відповідно:

$$W_c(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{K}{s^2 + a_1s + a_0 + K}.$$

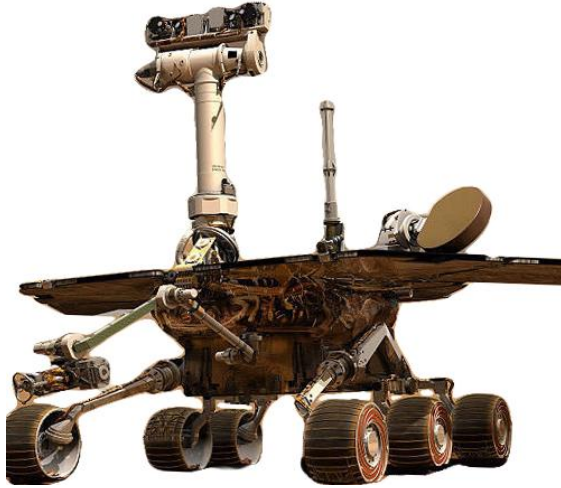


Рис. 5.13. Місяцехід

Для бажаного рівня якості керування необхідно визначити і періодично уточнювати змінні від часу і обставин три параметри:  $K$ ,  $a_1$ ,  $a_0$ .

**Приклад 5.3.** Система керування кутом крену літака.

Скористаємося спрощеною моделлю динаміки літака у вигляді передатної функції, що зв'язує відхилення елеронів  $\delta_e$  і кут  $\varphi$  крену літака (рис. 5.14, *a*). На рис. 5.14, *б* зображено замкнену систему керування положення літака у повітрі, мета якої полягає у підтримці кута крену  $\varphi$ , близького до  $\varphi_a$ , в умовах непередбачених зовнішніх збурень. Два апріорні параметри 11,4 і 1,4 моделі літака слід уточнювати в польоті за допомогою методів ідентифікації, бо вони можуть суттєво змінюватись.



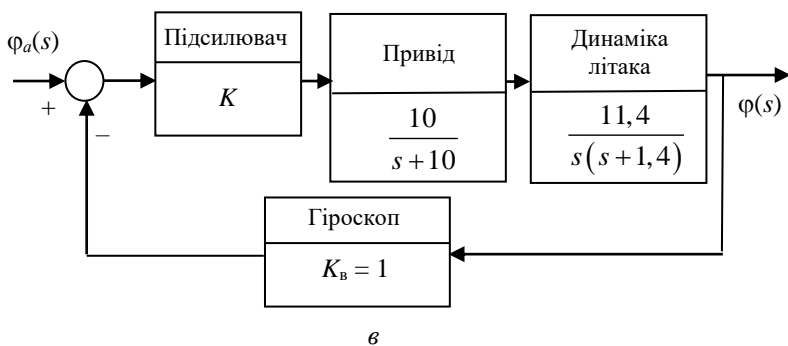
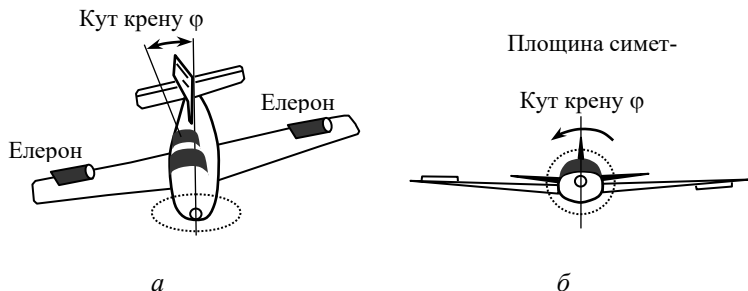


Рис. 5.14. Керування кутом крену літака за допомогою елеронів:  
*a* — загальний вигляд; *б* — площа симетрії;  
*в* — система керування

**Приклад 5.4.** Для виконання астрономічних спостережень на орбіту виводиться космічний телескоп.

Система керування наведенням повинна володіти точністю 0,01 кутової хвилини і стежити за рухом об'єктів зі швидкостями до 0,21 кутової хвилини на секунду. Космічний телескоп зображено на рис. 5.15, *a*, а структурну схему системи — на рис. 5.15, *б*.

Ідентифікації підлягає або  $K_1$  або всі коефіцієнти замкненої системи з передатною функцією

$$W_3(s) = \frac{b_1 s + b_0}{a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + 1},$$

де  $b_0 = K_1 K_2$ ,  $b_1 = K_2 \tau$ ,  $a_1 = \tau_1$ ,  $a_2 = (K_1, K_2)^{-1}$ ,  $a_3 = \tau_2 (K_1, K_2)^{-1}$ .

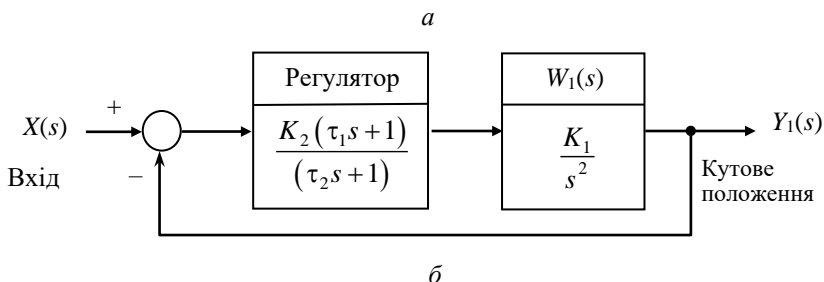


Рис. 5.15. Космічний телескоп:  
*a* — загальний вигляд; *б* — система керування  
 наведенням телескопа на зірку

**Приклад 5.5.** Безпілотна модель літака з автопілотом.

Для утримання моделі літака на заданому курсі і висоті використовується автопілот. Структурна схема системи керування (рис. 5.16) включає регулятор  $W(s)$ , параметри якого залежать від моделі літака. Останні підлягають ідентифікації для адаптації параметрів регулятора.

**Приклад 5.6.** Система керування ракетою.

На рис. 5.17 зображено структурну схему системи керування швидкістю ракети з ПІ-регулятором, параметри якого залежать від змінних у часі параметрів ракети. Для забезпечення стійкості і якості замкненої системи необхідна ідентифікація параметрів  $(100,2)$  ракети.

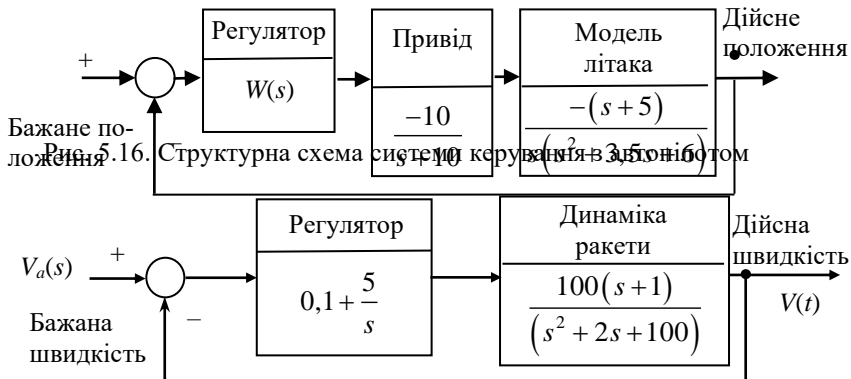


Рис. 5.17. Система керування швидкістю ракети

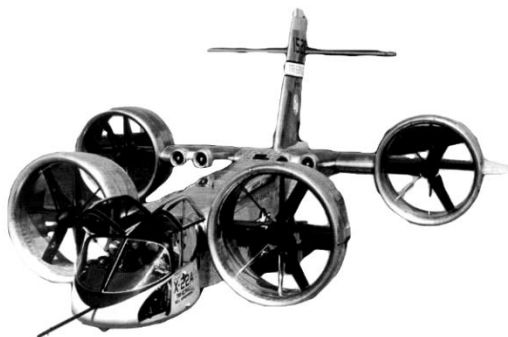
**Приклад 5.7.** Літак із вертикальним зльотом.

На рис. 5.18, *a* зображено літак із вертикальним зльотом, який забезпечується чотирма двигунами, що обертаються навколо горизонтальної осі. Структурну схему системи керування висотою підйому літака наведено на рис. 5.18, *б*.

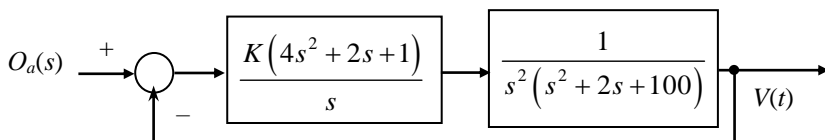
Передатна функція літака при вертикальному зльоті має два нульових і два комплексних корені:

$$W(s) = \frac{1}{s^2(s^2 + 2s + 100)}, \quad s_{1,2} = 0, s_{3,4} \cong -1 \pm j10.$$

Тобто літак нестійкий і сильноколивальний. Для стабілізації режиму вертикального зльоту необхідна ідентифікація.



*a*

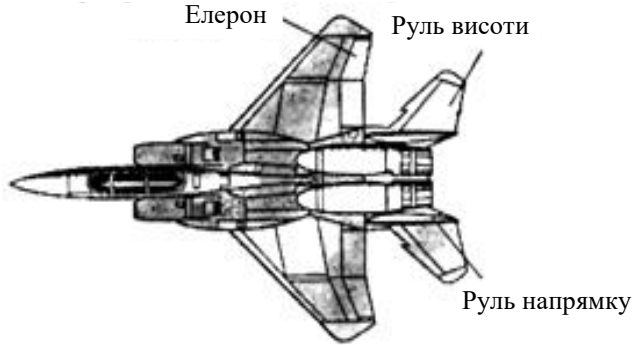


*б*

Рис. 5.18. Літак із вертикальним зльотом:  
*a* — загальний вигляд; *б* — система керування

**Приклад 5.8.** Реактивний винищувач.

На рис. 5.19, *a* зображено багатоцільовий реактивний винищувач і його структурну схему керування за кутом атаки (рис. 5.19, *б*), де ідентифікації підлягають аеродинамічні коефіцієнти (АДК) літака.



*a*

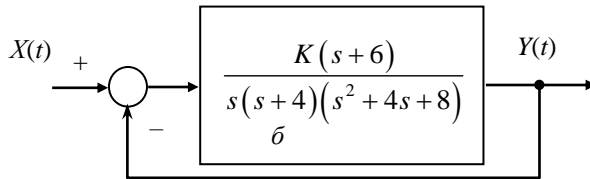


Рис. 5.19. Багатоцільовий винищувач:

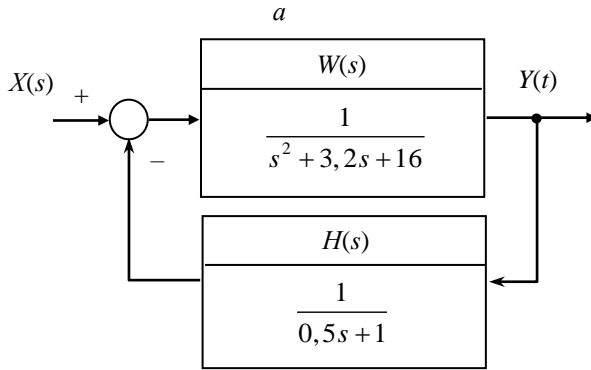
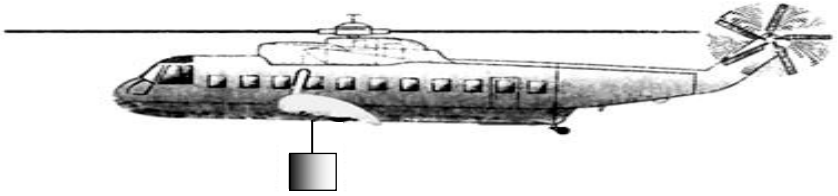
*a* — загальний вигляд;

*б* — структурна схема системи керування кутом атаки

**Приклад 5.9.** Вертоліт із вантажем на тросі.

На рис. 5.20, *a* зображено вертоліт із вантажем на тросі.

На рис. 5.20, *б* наведено структурну схему системи керування положенням вантажу, де візуальний зворотний зв'язок здійснюється пілотом, поданим передатною функцією  $H(s)$ . Параметри передатних функцій як вертольоту, так і пілоту можуть суттєво змінюватися, що призводить до зміни коренів передатної функції замкненої системи «пілот–вертоліт» і, як наслідок, коливальності системи, а то й стійкості системи.



*б*

Рис. 5.20. Система керування вертольотом,  
який переносить вантаж:  
*a* — вертоліт, який переносить вантаж; *б* — система керування

**Приклад 5.10. Космічний корабель.**

Космічний корабель (рис. 5.21, *a*), служить для доставки на орбіту корисного вантажу і поверненню його на Землю. Корабель, що важить без вантажу близько 75 т, оснащено елеронами в задній частині крил і гальмівним двигуном у хвості, за допомогою яких здійснюється керування його польотом. На рис. 5.21, *б* наведено структурну схему системи керування швидкістю зниження. Передатна функція корабля має вигляд

$$W(s) = \frac{0,30(s + 0,05)(s^2 + 1600)}{(s^2 + 0,05s + 16)(s + 70)},$$

але її параметри суттєво змінюються в функції висоти  $H$ , швидкості  $\psi$  та масі палива. Для забезпечення безпеки посадкового режиму необхідна поточна ідентифікація  $W(s)$  і відповідна корекція передатної функції  $W_1(s)$  регулятора. При цьому для коректної задачі ідентифікації необхідно спростити передатну функцію  $W(s)$ .

Як бачимо, існує безліч об'єктів ідентифікації. Це об'єкти, що змінюють свої параметри в процесі роботи. Для забезпечення бажаної якості керування ними виникає необхідність в ідентифікації їх передатних функцій.



*a*

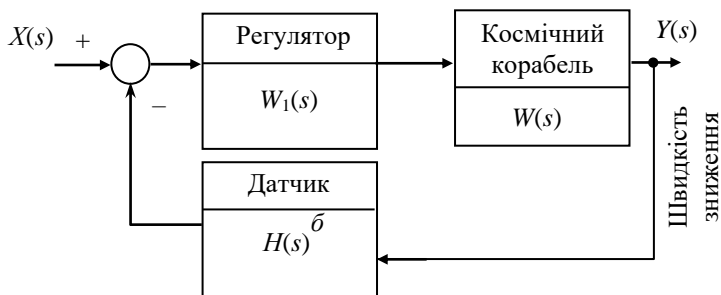


Рис. 5.21. Космічний корабель «Буран»:  
*a* — фото космічного корабля;  $\delta$  — структурна схема системи керування швидкістю зниження

## 5.4. Моделі в змінних стану

### 5.4.1. Змінні стану

Аналіз систем у часовій області ґрунтується на понятті стану системи. **Стан системи** — це сукупність таких змінних, опис якими динаміки системи дозволяє визначити її майбутній стан і вихідну змінну. Для динамічної системи її стан описується набором змінних  $[x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]$ , які визначають майбутню поведінку системи, якщо відомо її потоковий стан і всі зовнішні впливи. Наприклад, двовимірна система (рис. 5.22) має  $y_1(t)$  і  $y_2(t)$  — вихідні змінні, а  $u_1(t)$  і  $u_2(t)$  — вхідні. Якщо відомі початкові значення  $[x_1(t_0), x_2(t_0), \dots, x_n(t_0)]$  і вхідні сигнали  $u_1(t)$  і  $u_2(t)$  для  $t \geq t_0$ , то цього достатньо, щоб визначити майбутні значення всіх змінних стану і вихідних змінних.

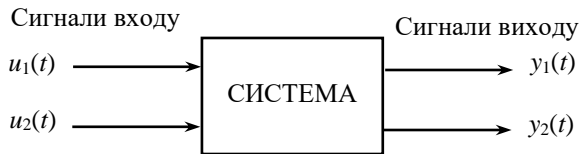


Рис. 5.22. Структурна схема системи

Таким чином, змінні стану описують поведінку системи в майбутньому, якщо відомі потоковий стан, зовнішній вплив і рівняння динаміки системи.

Загальний вигляд динамічної системи наведено на рис. 5.23.





Рис. 5.23. Динамічна система

Поняття змінних стану проілюструємо на прикладі системи «маса–пружина» (див. рис. 5.1) зі загасанням (рис. 5.24). Кількість змінних стану, вибраних для опису системи, має бути по можливості мінімальним, щоб серед них не було зайвих. Для даної системи цілком достатньо мати дві змінні стану:  $x_1(t)$  — положення і  $x_2(t)$  — швидкість руху маси  $m$ ;  $(x_1, x_2)$ ,  $x_1(t) = y(t)$  — вихідна змінна. Тоді

$$x_1(t) = y_1(t), \quad x_2(t) = \frac{dy(t)}{dt}.$$

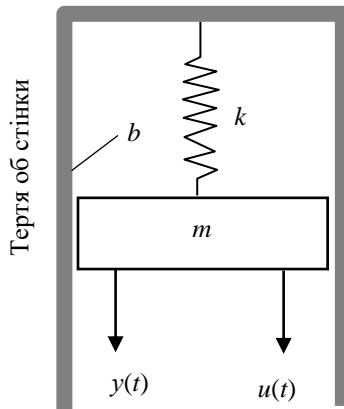


Рис. 5.24. Система «маса–пружина» зі загасанням

Диференціальне рівняння (5.1), яке описує поведінку системи

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} + ky = u(t),$$

з урахуванням введених змінних стану, набуває вигляду:

$$m \frac{dx_2}{dt} + bx_2 + kx_1 = u(t).$$

Останнє рівняння можна зобразити у вигляді системи двох диференціальних рівнянь першого порядку:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2; \\ \frac{dx_2}{dt} = -\frac{k}{m} x_1 - \frac{b}{m} x_2 + \frac{1}{m} u. \end{cases}$$

Ці рівняння описують залежність швидкості зміни кожної змінної стану від змінних стану  $x_1, x_2$  і вхідної змінної  $u(t)$ .

Загалом стан системи описується диференціальними рівняннями першого порядку відносно кожної зі змінних стану:

$$\dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + b_{11}u_1 + \dots + b_{1m}u_m,$$

$$\dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + b_{21}u_1 + \dots + b_{2m}u_m, \quad (5.24)$$

$$\dot{x}_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n + b_{n1}u_1 + \dots + b_{nm}u_m,$$

де  $\dot{x} = dx/dt$ . Система (5.24) в матричній формі:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix}. \quad (5.25)$$

Матриця-стовпчик, яка складається зі змінних стану, називається *вектором стану*.

Вектор вхідних впливів позначається як  $u$ . Тоді систему (5.25) можна описати у векторно-матричному вигляді:

$$\dot{x} = Ax + Bu. \quad (5.26)$$

Матриця  $A$  — квадратна розмірності  $n \times n$ , матриця  $B$  має розмірність  $n \times m$ . Рівняння стану зв'язує швидкість зміни стану системи з самим станом і вхідними сигналами. Загалом вихідні змінні стану системи зв'язані зі змінними стану і вхідними впливами рівнянням виходу

$$y = Cx + Du, \quad (5.27)$$

де  $y$  — сукупність вихідних сигналів, подана в вигляді вектора-стовпчика.

Скориставшись рівнянням (5.26), запишемо рівняння стану для системи (див. рис. 5.24):

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} u(t). \quad (5.28)$$

Рівняння виходу:

$$y = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1.$$

Розв'язок диференціального рівняння стану (5.28) формально можна отримати схожим на розв'язок скалярного диференціального рівняння першого порядку:

$$\dot{x} = ax + bu, \quad (5.29)$$

де  $x(t)$  і  $u(t)$  — скалярні функції часу. Перетворимо за Лапласом рівняння (5.29):

$$sX(s) - x(0) = aX(s) + bU(s),$$

звідки

$$X(s) = \frac{x(0)}{s-a} + \frac{b}{s-a} U(s). \quad (5.30)$$

Обернене перетворення Лапласа рівняння (5.30) дає розв'язок:

$$x(t) = e^{at} x(0) + \int_0^t e^{a(1-\tau)} b u(\tau) d\tau, \quad (5.31)$$

який подібний за виглядом і розв'язком до векторно-матричного диференціального рівняння стану (5.26).

Розглянемо **матричну експоненціальну функцію**. Подамо її у вигляді ряду

$$e^{At} = \exp(At) = I + At + \frac{A^2 t^2}{2!} + \dots + \frac{A^k t^k}{k!} + \dots$$

Розв'язок рівняння стану, подібний (5.31), матиме вигляд:

$$x(t) = \exp(At)x(0) + \int_0^t \exp[A(t-\tau)] B u(\tau) d\tau. \quad (5.32)$$

Розв'язок (5.32) можна також отримати, застосувавши перетворення Лапласа до рівняння (5.26) і згрупувавши члени. В результаті отримуємо:

$$X(s) = [sI - A]^{-1} x(0) + [sI - A]^{-1} B U(s), \quad (5.33)$$

де  $[sI - A]^{-1} = \Phi(s)$  зображення Лапласа функції

$$\Phi(s) = \exp(At).$$

Застосувавши до (5.33) обернене перетворення Лапласа і враховуючи, що другий доданок у правій частині містить добуток  $\Phi(s)B U(s)$ , отримуємо рішення (5.32). Матрична експоненціальна функція  $\Phi(t)$  описує вільний рух системі й називається **фундаментальною матрицею** або **перехідною матрицею стану**. Таким чином, розв'язок (5.32) можна записати у вигляді:

$$x(t) = \Phi(t)x(0) + \int_0^t \Phi(t - \tau)Bu(\tau)d\tau .$$

За рівнянням стану системи із входом і виходом визначимо її передатну функцію. Взявши для рівнянь (5.26) і (5.27) перетворення за Лапласом за нульових початкових умов  $X(0) = 0$  отримуємо:

$$sX(s) = AX(s) + BU(s), \quad (5.34)$$

і

$$Y(s) = CX(s) + DU(s). \quad (5.35)$$

Групуючи члени в рівнянні (5.33), отримуємо:

$$(sI - A)X(s) = BU(s).$$

Оскільки  $[sI - A]^{-1} = \Phi(s)$ , то  $X(s) = \Phi(s) BU(s)$ .

Підставляючи  $X(s)$  в рівняння (5.35), отримуємо:

$$Y(s) = [C \Phi(s) B + D] U(s).$$

Передатна функція  $W(s) = Y(s)/U(s)$ , тобто:

$$W(s) = C\Phi(s)B + D. \quad (5.36)$$

**Приклад 5.12.** Зв'язок моделі в змінних стану і відповідних передатних функціях моделі короткоподійного поздовжнього руху літака.

Рівняння стану

$$\begin{aligned} \bar{X} &= AX + BU \\ Y &= CX \end{aligned}, \quad (5.37)$$

де  $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ ;  $x_1$  — відхилення від балансованого кута атаки літака;  $x_2$  — відхилення кутової швидкості обертання літака;  $U$  — відхилення руля висоти літака;

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$ ,  $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  — аеродинамічні коефіцієнти.

Для визначення матричної передатної функції  $W(s)$  (5.36) візьмемо перетворення Лапласа для системи (5.37) за нульових початкових умов:

$$SX(s) = AX(s) + BU(s),$$

$$Y(s) = CX(s).$$

Звідси, згідно з рівнянням (5.36) (для  $D = 0$ )

$$W(s) = C(sI - A)^{-1}B, \quad (5.38)$$

або

$$\begin{aligned} W(s) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (s - a_{11}) & -a_{12} \\ -a_{21} & (s - a_{22}) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} W_{11}(s) & 0 \\ 0 & W_{22}(s) \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$\text{де } W_{11}(s) = \frac{x_1(s)}{U(s)} = \frac{b_1(s - a_{22})}{s^2 + a_{11}a_{22}s + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})},$$

$$W_{22}(s) = \frac{x_2(s)}{U(s)} = \frac{b_2(s - a_{11})}{s^2 + a_{11}a_{22}s + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})}.$$

Задача ідентифікації може розв'язуватися як для системи (5.37) у змінних стану, так і для передатних функцій (5.38).

### 5.5. Часові характеристики і перехідна матриця стану

Перехідні характеристики системи можна отримати шляхом розв'язання рівняння стану, яке має вигляд:

$$x(t) = \Phi(t)x(0) + \int_0^t \Phi(t - \tau)Bu(\tau)d\tau. \quad (5.39)$$

Якщо відомі початкові умови  $x(0)$ , вектор вхідних впливів  $u(t)$  і перехідна матриця стану  $\Phi(t)$ , то реакція системи  $x(t)$  може бути обчислена тим чи іншим способом. Таким чином, задача зводиться до обчислення матриці  $\Phi(t)$ , яка в основному і визначає реакцію системи. Слід згадати й деякі методи обчислення ряду

$$\Phi(t) = \exp(At) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!}$$

з обмеженою кількістю членів.

Відомі також ефективні методи обчислення  $\Phi(t)$  за допомогою комп'ютерних алгоритмів.

У рівнянні (5.33) показано, що  $\Phi(s) = (sI - A)^{-1}$ . Тоді, якщо обчислити обернену матрицю, то можна знайти і  $\Phi(t)$  як обернене перетворення Лапласа для  $\Phi(s)$ , тобто

$$\Phi(t) = L^{-1}[\Phi(s)].$$

Розглянемо перетворення Лапласа рівняння (5.39), вважаючи вхідні сигнали рівними 0. Тоді для  $u(\tau) = 0$  із рівняння (5.39) маємо:

$$X(s) = \Phi(s)x(0).$$

Перехідна матриця стану буде оберненим перетворенням Лапласа від  $\Phi(s)$ , тобто

$$\Phi(t) = L^{-1}[\Phi(s)].$$

Тоді залежність змінних стану від початкових умов  $x(0)$  визначається, наприклад, для системи (5.37) другого порядку так:

$$X_1(s) = \varphi_{11}(s)x_1(0) + \varphi_{12}(s)x_2(0);$$

$$X_2(s) = \varphi_{21}(s)x_1(0) + \varphi_{22}(s)x_2(0),$$

де  $\varphi_{ij}$  — складові матричної перехідної функції  $\Phi(s)$ .

Часові характеристики системи, яка описується векторно-матричним диференціальним рівнянням стану, можна отримати, скориставшись **дискретною апроксимацією**. Подібна апроксимація ґрунтується на розбитті часової осі на достатньо малі відрізки. Тоді значення змінних стану будуть обчислюватися в дискретні моменти часу  $t = 0, T, 2T, \dots$ , де  $T$  є кроком дискретності у часі. Цей метод широко використовується для числового аналізу і для обчислення на цифрових комп'ютерах. Якщо крок дискретності  $T$  — досить малий порівняно зі сталими часу системи, то точність обчислень буде цілком припустимою.

Рівняння стану лінійної системи має вигляд:

$$\dot{x} = Ax + Bu.$$

Скористаємось класичною формулою похідної:

$$\dot{x} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}$$

для обчислення значень  $x(t)$  при розбитті  $t$  на малі відрізки  $\Delta t = T$ .

Отримаємо **апроксимацію** похідної

$$\dot{x} = \frac{x(t + T) - x(t)}{T}$$

і підставимо її в рівняння:

$$\frac{x(t + T) - x(t)}{T} \approx Ax(t) + Bu(t).$$

Звідси

$$x(t + T) \approx TAx(t) + x(t) + TBu(t) = (TA + I)x(t) + TBu(t), \quad (5.40)$$

де  $t$  розбито на малі відрізки тривалістю  $T$ . Тому час  $t$  набуває дискретних значень  $t = kT, k = 0, 1, 2, 3, \dots$ . Тоді вираз (5.40) набуває вигляду:



$$x[(k+1)T] \approx (TA+I)x(kT) + TBu(kT). \quad (5.41)$$

Таким чином, значення вектора стану в  $(k+1)$ -й момент часу визначається через значення  $x$  і  $u$  в  $k$ -й момент часу. Вираз (5.41) можна записати інакше:

$$x(k+1) \approx \psi(T)x(k) + TBu(k), \quad (5.42)$$

де  $\psi(T) = (TA+I)$ .

Вираз (5.42) показує, що визначення  $x(t)$  зводиться до обчислення його дискретної апроксимації  $x(k+1)$  на основі попереднього значення  $x(k)$ . Ця рекурентна операція, відома як **метод Ейлера**, являє собою послідовність обчислень і просто реалізується на цифрових комп'ютерах. Для розрахунків можуть також бути використані більш точні методи чисельного інтегрування, наприклад методи Рунге–Кутта.

**Приклад 5.13.** Неперервна та дискретна модель епідемії.

У біології також важливо визначати відповідні моделі. Так поширення епідемічного захворювання описується системою нелінійних диференціальних рівнянь:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\alpha x_1 - \beta x_1 x_2 + u_1(t), \\ \dot{x}_2 &= -\beta x_1 x_2 - \gamma x_2 + u_2(t), \\ \dot{x}_3 &= \alpha x_1 + \gamma x_2, \end{aligned} \quad (5.43)$$

де взаємодію між групами населення подано нелінійним членом  $x_1 x_2$ .

Вважатимемо, що  $\alpha = \beta = \gamma = 1$ ,  $u_1(t) = 0$ ,  $u_2(0) = 1$  і  $u_2(k) = 0$  при  $k \geq 1$ . Виберемо крок дискретності  $T = 0,2$  діб і задамо початкові умови у вигляді  $x^T(0) = [1 \ 0 \ 0]$ . Тоді, підставляючи в рівняння (5.43)  $t = kT$ , отримаємо рівняння

$$\frac{x_1(k+1) - x_1(k)}{T} = -x_1(k) - x_1(k)x_2(k),$$

$$\frac{x_2(k+1) - x_2(k)}{T} = x_1(k)x_2(k) - x_2(k) - u_2(k),$$

$$\frac{x_3(k+1) - x_3(k)}{T} = x_1(k) + x_2(k).$$

Визначимо із цих рівнянь  $x_i(k+1)$ :

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= 0,8x_1(k) - 0,2x_1(k)x_2(k), \\ x_2(k+1) &= 0,8x_2(k) - 0,2x_1(k)x_2(k) + u_2(k), \\ x_3(k+1) &= x_3(k) - 0,2x_1(k) + 0,2x_2(k). \end{aligned} \quad (5.44)$$

У перший момент часу, для  $t = T$  маємо:

$$x_1(1) = 0,8x_1(0) = 0,8,$$

$$x_2(1) = 0,2u_1(0) = 0,2,$$

$$x_3(1) = 0,2x_1(0) = 0,2.$$

Ще раз використовуючи рівняння (5.44) і враховуючи, що  $u_2(1) = 0$ , отримаємо:

$$x_1(k+1) = 0,8x_1(k) - 0,2x_1(k)x_2(k) = 0,608,$$

$$x_2(k+1) = 0,8x_2(k) - 0,2x_1(k)x_2(k) + u_2(k) = 0,192,$$

$$x_3(k+1) = x_3(k) - 0,2x_1(k) + 0,2x_2(k) = 0,40.$$

Аналогічно, при  $t = 3T$  маємо:

$$x_1(3) = 0,463, \quad x_2(3) = 0,177, \quad x_3(3) = 0,56.$$

Подальші обчислення виконуються аналогічно.

Годинні характеристики лінійних систем обчислюються шляхом використання перехідної матриці стану або за допомогою дискретної апроксимації рівняння стану. Для нелінійних систем найбільш придатним є метод дискретизації рівняння стану.

**Приклад 5.15.** Перевернутий маятник як фізична модель нестійкої системи ракети на старті.

Проблема керування положенням ракети на початковій стадії польоту: ракета знаходиться в рівновазі, якщо  $\theta(t) = 0$  і  $d\theta/dt = 0$ . Ця проблема класично моделюється у вигляді перевернутого маятника, який змонтовано на візку (рис. 5.26).

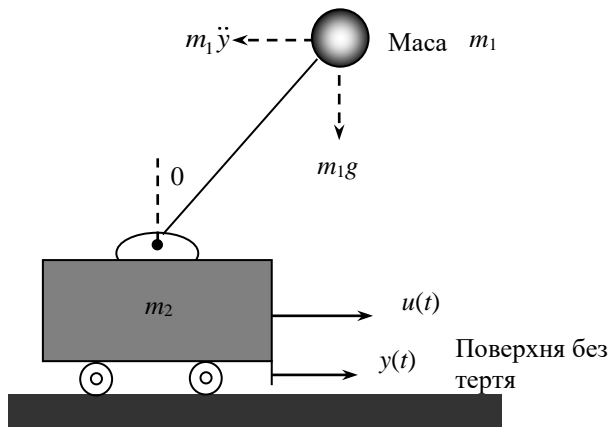


Рис. 5.26. Перевернутий маятник на візку

Візок повинен рухатися таким чином, щоб маса  $m$  завжди займала близьке до вертикального положення. Як змінні стану природно прийняти кут відхилення маятника  $\theta(t)$  і переміщення візка  $y(t)$ . Диференціальне рівняння, яке описує рух цієї системи, можна отримати, записавши вираз для суми сил, які діють у горизонталь-

ному напрямку, і суми моментів відносно точки обертання. Вважатимемо, що  $m_2 \gg m_1$  і кут відхилення від вертикалі  $\theta$  є малим, тому рівняння є лінійним. Сума сил, які діють у горизонтальному напрямку, дорівнює

$$m_2 \ddot{y} = m_1 l \ddot{\theta} - u(t) = 0, \quad (5.48)$$

де  $u(t)$  — сила, прикладена до візка;  $l$  — відстань від маси  $m_2$  до точки обертання.

Сума моментів відносно точки обертання

$$m_2 l \ddot{y} = m_1 l^2 \ddot{\theta} - m_1 l g \theta = 0. \quad (5.49)$$

Виберемо змінні стану для двох рівнянь другого порядку  $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (y, \dot{y}, \theta, \dot{\theta})$ . Рівняння (5.48) і (5.49) із врахуванням цих змінних стану:

$$m_2 \dot{x}_2 + m_1 l \dot{x}_4 - u(t) = 0, \quad (5.50)$$

$$\dot{x}_2 + l \dot{x}_4 - g x_3 = 0. \quad (5.51)$$

Для того, щоб отримати необхідні диференціальні рівняння першого порядку, визначимо із (5.51)  $l \dot{x}_4$  і підставимо його в рівняння (5.50):

$$m_2 \dot{x}_2 + m_1 g x_3 = u(t),$$

де враховано, що  $m_2 \gg m_1$ .

Далі, підставляючи  $\dot{x}_2$  із (5.50) в рівняння (5.51), отримаємо:

$$m_2 \dot{x}_2 + m_2 g x_3 + u(t) = 0.$$

Таким чином, отримаємо систему у змінних стану:

$$\dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = -\frac{mg}{M} x_3 + \frac{1}{M} u(t),$$

$$\dot{x}_3 = x_4, \quad \dot{x}_4 = -\frac{g}{l} x_3 - \frac{1}{Ml} u(t).$$

Звідси отримуємо матриці системи вигляду (5.26):

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(mg/M) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & g/l & 0 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/M \\ 0 \\ -1/Ml \end{bmatrix}.$$

### Запитання

1. Поясніть з позицій теоретичної механіки рівняння (5.1) об'єкти (рис. 5.2).
2. В чому полягає лінеаризація моделі маятника?
3. Визначте передаточну функцію 2-х масової системи (рис. 5.5).
4. Поясніть структурну схему ММ ДПС (рис. 5.8).
5. Розгляньте ММ (рис. 5.12÷5.21) різних динамічних об'єктів. В чому їх принципова наближеність?
1. Дайте визначення стану системи.
2. Перейдіть від диференційного рівняння системи (рис. 5.24) до системи в формі Коші в скалярному і векторно-матричному поданні?
3. Як перейти від системи рівнянь в формі Коші до матричної передаточної функції?
4. Як методом Ейлера перейти від неперервних до дискретних моделей?
5. Які змінні входять в модель (5.43) епідемії коронавірусу?
6. Які змінні стану моделі електроприводу принтера?
7. Які змінні стану моделі перевернутого маятника?

## Розділ 6

### МЕТОДИ ІДЕНТИФІКАЦІЇ ДИНАМІЧНИХ ОБ'ЄКТІВ.

#### 6.1. “Of-line” ідентифікація динамічних об'єктів

##### 6.1.1. Активна ідентифікація динамічних об'єктів

Будь-яка реальна система завжди складніша ніж її математична модель. Якщо розглядати задачу ідентифікації, як задачу довільної апроксимації відображення множини вхідних сигналів  $u(t)$  об'єкта в множину вихідних  $Y(t)$ , то тут має місце принцип множинності моделей (ситуація «чорної скриньки»). Існує безліч типів і структур у вибраному типі моделей, які (за відповідної оптимізації їх параметрів  $\beta$ ) задовольнять вимогу близькості вихідних сигналів  $Y(t)$  об'єкта і  $Y_M(t)$  моделі. При такій постановці задачі структура і параметри моделі можуть не мати нічого спільного з структурою і параметрами реального об'єкта. Наприклад, об'єкт, що являє собою оператор  $e^{-p\tau}$  запізнення у часі і синусоїдальний сигнал  $U_m \sin \omega t$  на виході, за умови що  $\tau < \frac{\dot{O}}{4} = \frac{\pi}{2\omega}$ , може мати модель у вигляді передаточної інерційної ланки першого порядку

$$W_M(s) = \frac{k}{\tau_1 s + 1},$$

яка точно відобразить вихідний сигнал об'єкта  $Y_m \sin(\omega(t - \tau))$ , де  $Y_m = U_m$ , якщо  $\frac{k}{\sqrt{\omega^2 \tau_1^2 + 1}} = 1$

і  $\varphi = -\arctg \omega \tau_1 = -\omega \tau$ . При цьому структура об'єкта і моделі зовсім різними. Виявити неадекватність моделі об'єкту можливо, якщо на вхід їх подавати більш інформативний ніж сигнал синусоїди, наприклад  $U_m \text{sign} \sin(\omega t)$ . Тоді за будь-яких

$k$  і  $\tau_1$  моделі неможливо забезпечити спів падання виходів об'єкта і моделі. Співпадання з точністю до малої величини  $\varepsilon$  може бути досягнуто шляхом пошуку структури моделі подібної до структури об'єкта. Але на об'єкт окрім вхідного впливу  $U(t)$  діє ще нескінченно велика кількість інших зовнішніх впливів. Тому, для визначення моделі конкретної структури, слід об'єкт ввести в такий стан, за якого невраховано в моделі впливи будуть зневажливо малими. В такій ситуації з точністю до  $\varepsilon$  можна вважати ідентичність об'єкта і моделі. При цьому модель і її коефіцієнти мають конкретний фізичний зміст. Наприклад, літак, що летить горизонтально в спокійній атмосфері на короткому відрізку часу при невеликих відхиленнях смінних стану під дією вхідного впливу(рулі висоти) відносно вихідної змінної з точністю до  $\varepsilon$  може бути представлений ланкою другого порядку

$$W_M(s) = \frac{b_0 + b_1 s}{s^2 + a_1 s + a_0},$$

коефіцієнти  $b_i, a_i (i = 0, 1)$ , якої будуть мати конкретний фізичний зміст. Наприклад  $a_0$  помножене на конструктивні параметри літака, це запас аперіодичної стійкості(нормована відстань між центром мас і аеродинамічним фокусом) літака і т.ін.

Таким чином для об'єктивного визначення фізичних параметрів реального об'єкта ідентифікації необхідно:

- ввести об'єкт в стан, де суттєвими будуть тільки ті змінні, які враховано в моделі;
- подати на вхід об'єкта і моделі такі керуючі впливи, які забезпечать однозначність оцінок коефіцієнтів моделі об'єкта.

В цих двох пунктах і полягає поняття активного експерименту.

Модель у вигляді передаточної функції по даним активного експерименту може бути одно-кроковою, коли передаточна функція визначається безпосередньо з експерименту або дво-кроковою, коли з експерименту визначається непараметрична оцінка перехідної чи імпульсної

перехідної функції або амплітудно-частотна характеристика ( I крок), а далі по ним( II крок) визначається передаточна функція.

### 6.1.2. Визначення імпульсної перехідної функції кореляційним методом

Вихідні змінні об'єкта  $y(t)$  визначаються не тільки як наслідок дії детермінованого керуючого вхідного сигналу  $u(t)$ , але і поміх  $e(t)$ . (рис 6.1).

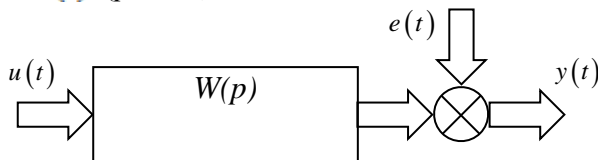


Рис. 6.1

Всі видимі перешкоди, що діють на різні частини об'єкта, приведені до виходу об'єкта та представлено у вигляді адитивного шуму. Значення вихідного сигналу

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \omega(\tau) u(t - \tau) dt + e(t), \quad (6.1)$$

де  $\omega(\tau)$  - імпульсивна перехідна функція.

Помноживши (6.1) на  $x(t+\tau)$  та проінтегрувавши обидві частини по  $\tau$  в межах  $(\pm\infty)$ , одержуємо:

$$R_{y,u}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \omega(t) R_{uu}(t - \tau) dt + R_{ue}(\tau). \quad (6.2)$$

Якщо  $R_{ue}(\tau) = 0$  та  $\omega(t) = 0$ , при  $t < 0$  (умова фізичної реалізованості системи), то

$$R_{y,u}(\tau) = \int_0^{\infty} \omega(t) R_{uu}(t - \tau) dt, \quad (6.3)$$

яке називається рівнянням Віннера-Хопфа.

Це лінійне інтегральне рівняння першого роду. Його числове рішення здійснюється методом апроксимуючих функ-



цій, обчислення яких здійснюється на основі методу найменших квадратів. Вирішення рівняння дає вираження для функції ваги  $\omega(t)$ , тобто імпульсної перехідної функції об'єкта.

Розглянемо рішення рівняння (6.3), використовуючи його дискретний аналог

$$R_{yu}(m) = \sum_{k=0}^n \omega(k) R_u(m-k) \Delta\tau, \quad (6.4)$$

де  $\Delta t$  - інтервал дискретизації кореляційних функцій.

Позначимо:

$$R_{u,u} = \begin{pmatrix} R_{uu}(0) & R_{uu}(1) & \cdots & R_{uu}(n-1) \\ R_{uu}(0) & R_{uu}(0) & \cdots & R_{uu}(0) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ R_{uu}(n-1) & R_{uu}(n-2) & \cdots & R_{uu}(0) \end{pmatrix}; \quad (6.5)$$

$$W = \begin{pmatrix} \omega(1) \\ \omega(2) \\ \vdots \\ \omega(n) \end{pmatrix}; R_{y,u} = \begin{pmatrix} r(1) \\ r(2) \\ \vdots \\ r(n) \end{pmatrix}; \quad (6.6)$$

$$\text{де } r(i) = \frac{R_{y,u}(i)}{\Delta\tau}.$$

Тоді (6.4) можна записати в матричному вигляді

$$R_{y,u} = R_{u,u} w \quad (6.7)$$

звідки шукані значення  $\omega(1), \dots, \omega(n)$  функції ваги будуть до-  
рівнювати

$$w = R_{u,u}^{-1} R_{y,u}. \quad (6.8)$$

В силу слабкої обумовленості матриці  $R_{u,u}$  рішення рівняння (6.8) нестійке, що приводить до великих похибок рішення за малих змін коефіцієнтів матриць  $R_{y,u}$  та  $R_{u,u}$ .

Більш точне рішення може бути отримане методом апроксимуючих функцій з використанням методу колокації. Відповідно до цього методом апроксимують функцію ваги лінійною комбінацією з  $m$  ортогональних функцій  $\gamma_k(t)$ :

$$\omega(t) = \sum_{k=1}^m \alpha_k \varphi_k(t), \quad (6.9)$$

та обчислюють  $m$  функцій  $f_k(t)$

$$f_k(t) = \int_0^t \varphi_k(\tau) R_{uu}(t-\tau) d\tau. \quad (6.10)$$

Метод колокації дає систему з  $m$  лінійних рівнянь для знаходження невідомих коефіцієнтів  $\alpha_k$  апроксимуючої функції:

$$\sum_{k=1}^m \alpha_k f_k(i) = R_{yu}(i) \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (6.11)$$

Оскільки в експерименті отримуються оцінки кореляційної функції, значення шуканої функції ваги являється наближеним. Структура рівняння Віннера-Хопфа така, що незначні помилки в визначенні кореляційних функцій призводять до значних помилок у визначенні імпульсної перехідної характеристики  $\omega(t)$ . Для покращення результату бажано оцінку кореляційних функцій  $R_{uy}, R_{uu}$  апроксимувати аналітичними залежностями виду

$$R_{uu}(\tau) = \sigma_u^2 e^{-a|\tau|}, R_{uu}(\tau) = \sigma_u^2 e^{-a\tau^2}, R_{uu}(\tau) = \sigma_u^2 e^{-a|\tau|} \cos \frac{2\pi}{T} \tau \quad \text{Ефективним є використання кореляційного методу для визначення}$$

запізнювання в об'єкті керування. Величина запізнення буде дорівнювати значенню аргументу взаємної кореляційної функції, за якого вона досягає максимуму.

**Приклад 6.1.** Проведемо активну ідентифікацію кореляційним методом об'єкта з передаточною функцією:

$$W(p) = \frac{2,5}{(p+0,1)(p^2+6p+25)}.$$

```

Програма ідентифікації:
k=2.5; p1=-1; p2=-3+4*I; p3=-3-4*I;
p=[p1 p2 p3];
wo=zpk([],p,k);
[nun,den]=tfdata(wo,'v');
wo=tf(nun,den,'td',10);%
tm=700;dt=.01;
t=0:dt:tm; Вагова функція та взаємна кореляційна функція
n=length(t);
u=randn(n,1);%
y=lsim(wo Вагова функція та взаємна кореляційна функція
tau=-tm:dt:
ruu=xcorr(u,u,'biased');%
ryu=xcorr(y,u,'biased');%
w=impulse(wo,t);
m=1:5000;
plot(t(m),w(m),t(m),ryu(n:n+4999)/dt),grid
Активний експеримент:

```

Взаємно кореляційна функція  $R_{uy}$  буде дорівнювати функції ваги об'єкта, якщо кореляційна функція вхідного сигналу буде являтися  $\delta$ -функцією. Таку кореляційну функцію має сигнал типу «білий шум». Якщо подати на вхід об'єкта «білий шум» (рис.6.2, а), який має кореляційну функцію у вигляді  $\delta$ -імпульсу (рис.6.2, б), то взаємна кореляційна функція буде функцією ваги  $\omega(t)$  (рис.6.3, в).

Розходження кривих на рис. 6.3 обумовлено неможливістю сформувати на вході об'єкта ідеальний «білий шум» і похибками обчислення кореляційних функцій.

Розходження кривих на рис. 6.3 обумовлено неможливістю сформувати на вході об'єкта ідеальний «білий шум» і похибками обчислення кореляційних функцій.

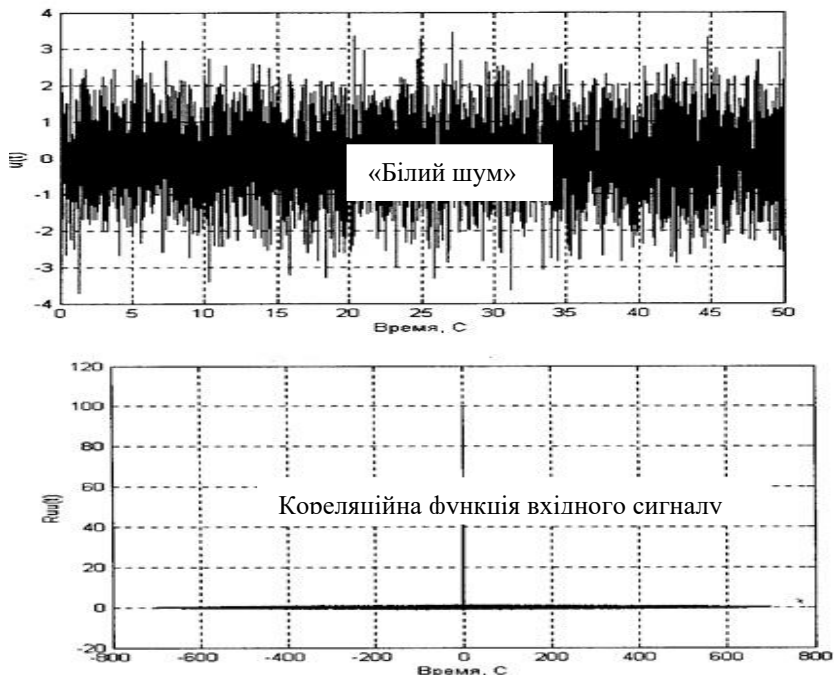


Рис.6.2.(Білий шум (а); Кореляційна функція(б))

Підвищити точність моделювання випадкового процесу типу «білого шуму» при скороченні довжини вибірки (що є дуже важливим для ідентифікації реальних об'єктів) можна, якщо в якості моделі «білого шуму» застосувати псевдовипадкові сигнали, характеристики яких близькі до «білого шуму» при обмеженій амплітуді і часу дії сигналу.

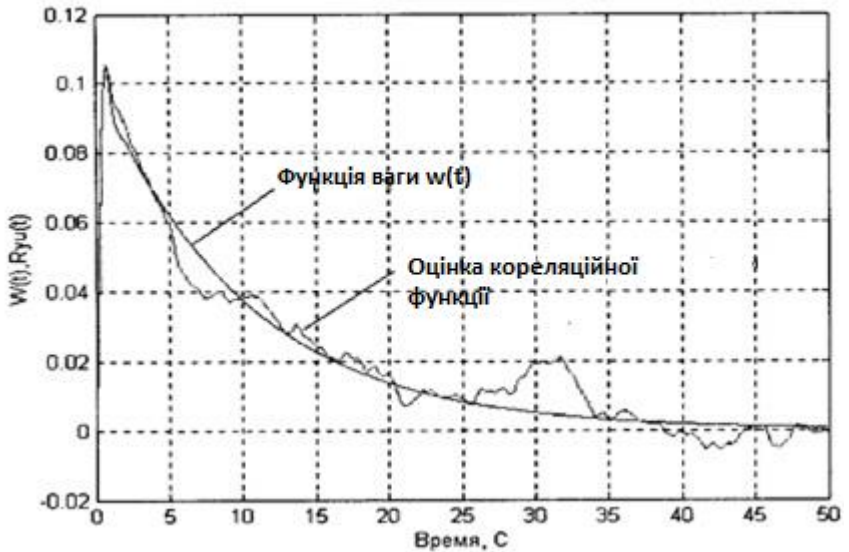


Рис.6.3.Вагова функція та взаємна кореляційна функція

### 6.1.3. Псевдовипадкові двійкові послідовності максимальної довжини.

**Генерація псевдовипадкових двійкових послідовностей (ПВДП).** Псевдовипадкову двійкову послідовність можна отримати на  $N$  розрядному регістрі зсуву з від'ємним зворотним зв'язком (рис. 6.4)

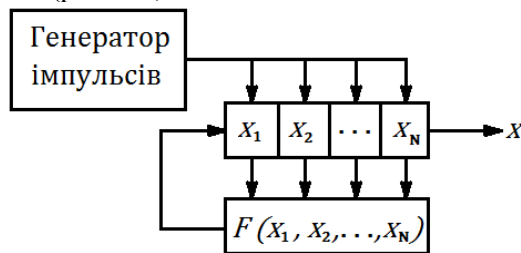


Рис. 6.4  $N$  – розрядний регістр зсуву з від'ємним зворотним зв'язком.

Сигнали з одиничних тригерів підсумовуються за модулем 2, а сигнал, що відповідає результату підсумування, подається на вхід тригера першого розряду. Період  $T$  дискретності цієї послідовності задається генератором імпульсів. Максимальна довжина періоду повтору послідовності

$$L = 2^N - 1,$$

або  $LT$  секунд кожної із комбінацій входу  $x_i = 0, i = \overline{1, N}$ . Це один із тих станів регістра зсуву, коли у всіх його розрядах зафіксовано одні нулі. У цьому разі генерація ПВДП припиняється. Максимальний для розряду  $N$  період  $L=2^n-1$  досягається тільки належним вибором номерів тригерів, з яких подається сигнал на суматор по модулю 2. Так, наприклад, п'яти-розрядний регістр зсуву, який складається з п'яти елементів за початкових умов 111 11, видає послідовність  $X$ , довжина періоду повтору якої

$$L = 2^N - 1 = 2^5 - 1 = 31.$$

Для дослідження ПВДП максимальної довжини використовують характеристичний поліном, який визначає тип генератора (табл. 6.1).

Таблиця.6.1

**Характеристичні поліноми псевдовипадкових двійкових послідовностей максимальної довжини**

Характеристичний поліном	Довжина $D$ (період)
$D^2 \oplus D^1 \oplus D^0$	3
$D^3 \oplus D^2 \oplus D^0$	7
$D^4 \oplus D^3 \oplus D^0$	15
$D^5 \oplus D^3 \oplus D^0$	31
$D^6 \oplus D^5 \oplus D^0$	63
$D^7 \oplus D^6 \oplus D^0 \leftrightarrow D^7 \oplus D^4 \oplus D^0$	127
$D^8 \oplus D^4 \oplus D^3 \oplus D^2 \oplus D^0$	255

З практичного погляду дуже зручно відтворювати ПВДП максимальної довжини, використовуючи рівні станів елементів регістра зсуву зі знаками +1 і -1 замість 0 і 1. У цьому випадку логічне додавання за модулем 2 еквівалентне функції множення зі зміною знака рис. 6.6

a'b		$A \oplus b$
0	0	0
1	0	1
0	1	1
1	1	0

а)

a'b		$A * b$
-1	-1	-1
1	-1	1
-1	1	1
1	1	-1

б)

Рис.6.6 (а - додавання за модулем 2;  
б - множення зі зміною знака добутку)

Розглянемо властивості псевдовипадкових двійкових послідовностей. У ПВДП є  $2^{N-1}$  значень 1 і  $2^{N-1}$  значень 0. Тому можлива комбінація 1 та 0. За винятком комбінації 000... Додавання за модулем два (або множення зі зміною знака добутку) будь-якої послідовності  $x_1$  з послідовністю  $x_2$ , отриману під час створення послідовності  $x_1$  і зсунутою на один такт., дає послідовність  $x_3$ , яка дорівнює послідовності  $x_1$ , зсунутій на один такт. (Рис 6.7).

Із рисунка 6.7 видно, якщо  $N=3$ , то період повтору ПВДП  $L=2^3-1=7$ . Тоді за початкових умов 111

$$x_1 = 111-1-11-1, \dots$$

$$x_2 = -1-11-1111, \dots$$

$$x_3 = 11-1-11-11, \dots$$

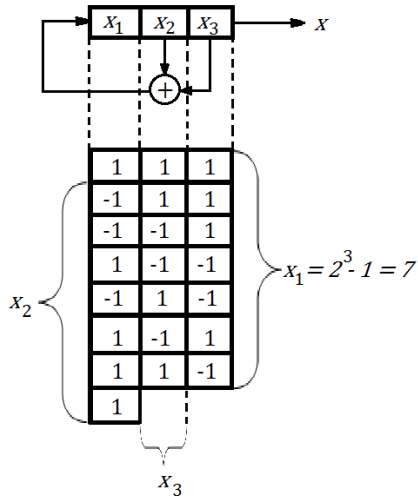


Рис.6.7 Три-розрядний регістр зсуву для генерації ПВДП максимальної довжини  $x_1, x_2, x_3$ .

Середнє значення ПВДП з рівнями 0 і 1 за період повтору  $L$ .

$$E[x] = \frac{1}{2^{N-1}} - \left\{ \frac{2^N}{2} \right\} = \frac{1}{2} \frac{2^N}{2^{N-1}} = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{L} \right).$$

Значення величин  $L$  досить велике, тому  $1/L \approx 0$ . Отже,

$$\hat{A}[x] = \frac{1}{2}.$$

Середнє значення ПВДП з рівнями сигналу  $+1$  і  $-1$  і періодом повтору  $L$

$$E[x] = 1/L \{ 2^{(N-1)} x(1) + (2^{(N-1)} - 1) x(-1) \}.$$

$$1/L \{ 2^{(N-1)} - 2^{(N-1)} + 1 \} = 1/L.$$

Якщо ПВДП має рівні сигналу  $+a$  і  $-a$ , то середнє значення такої послідовності за період повтору  $L$  відповідно буде таким:



$$E[x] = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L X(i) = \frac{1}{L} a.$$

Оскільки величина періоду повтору  $L$  досить велика, вважаємо, що ця послідовність центрована.

Автокореляційна функція дискретної ПВДП з рівнями  $+1$  і  $-1$  та періодом повтору  $L$ .

$$R_{xx}(k) = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L X(i)X(i-k).$$

Як показано, додавання за модулем 2 послідовності  $X_j$  дорівнює  $X_k$  і рівнозначне перемноженню зі зміною знака отриманого добутку, тобто

$$X_i X_j = -X_k.$$

Якщо  $k=0$ , то АКФ дискретної ПВДП з рівнями  $+1$  і  $-1$  дорівнює одиниці:

$$R_{xx}(0) = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L \tilde{O}^2(i) = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L 1 = 1,$$

якщо  $k \neq 0$ , то

$$R_{xx}(K) = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L X_i X_{j-k} = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L (-X_i) = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L X_j.$$

$$\text{Оскільки } \sum_{j=1}^L (-\tilde{O}_j) = 1,$$

то, якщо  $k \neq 0$ , тоді автокореляційна функція (АКФ) дискретної ПВДП з рівнями  $+1$  і  $-1$  і періодом повтору  $L$  обчислюють таким чином:  $R_{xx}(k)=1$ , якщо  $k=nL$ ,  $n$  - ціле число; або

$$R_{xx}(k) = -\frac{1}{L}, \text{ якщо } K \neq nL.$$

Графік дискретної автокореляційної функції зображено на рис.6.8

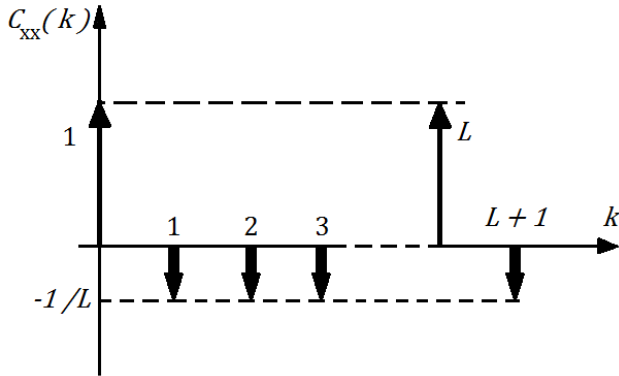


Рис. 6.8 Автокореляційна функція дискретної ПВДП з рівнями  $+1$  і  $-1$  і періодом повтору  $L$ .

У цьому випадку ПВДП з рівнями  $+a$  і  $-a$  і періодом повтору  $L$ , сигнал, що подається на систему ідентифікації, матиме вигляд показаний на рисунку 6.9

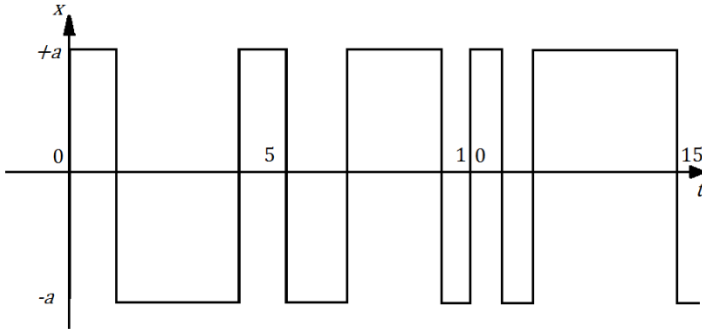


Рис. 6.9 Неперервна ПВДП з рівнями  $-a$  і  $a$  і періодом повтору  $L=15$

Середнє значення неперервної ПВДП з рівнями  $+a$  і  $-a$  і періодом повтору  $L$ .

$$E[x] = -\frac{a}{L}$$

Автокореляційна функція неперервної ПВДП з рівнями  $+a$  і  $-a$  і періодом повтору  $L$ .

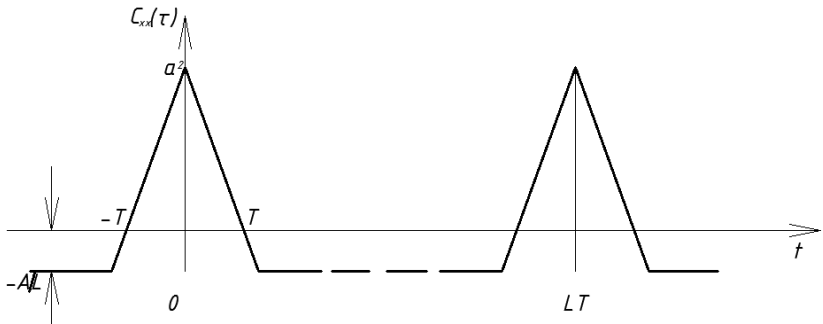
$$R_{xx}(\tau) = \frac{1}{LT} \int_0^{LT} x(t)x(t-\tau)dt, \quad (6.12)$$

якщо  $|\tau| \geq T$ , то випадкові величини  $x(T)$  і  $x(T-\tau)$  відповідають двом різним моментам дискретності і тому АКФ неперервної ПВДП

$$R_{xx}(\tau) = \frac{1}{LT} \int_0^{LT} [-ax(T)]dt = -\frac{a^2}{L}.$$

Якщо  $|\tau| < T$ , то  $C_{xx}(\tau) = a^2(1 - (1 - \frac{L+1}{L} \frac{\tau}{T}))$ ,

Графік АКФ неперервної ПВДП з рівнями  $+a$  і  $-a$  та періодом повтору  $L$  зображено на рис.6.10



6.10 Автокореляційна функція неперервної ПВДП з рівнями  $+a$  і  $-a$  та періодом повтору  $L$ .

Спектральну щільність ПВДП з рівнями  $+a$  і  $-a$  та періодом повтору  $L$ , можна одержати як перетворення Фурє (рис.6.10), яке має висоту

$$H = \frac{a^2(L+1)}{L},$$

із основою  $B=2T$ .

У цьому випадку спектральна щільність такої послідовності

$S_{xx}(f) = a^2 \frac{L+1}{L} T \left( \frac{\sin \pi \nu T}{\pi \nu T} \right)^2$ , де  $f = 1/T$  – частота генератора,  $T$ - період тактової частоти роботи генератора(інтервал часу між сусідніми зсувами).

Ураховуючи періодичність і неперервність величини  $\frac{a^2}{L}$  між піками АКФ неперервної ПВДП одержимо вираз для обчислення її спектральної щільності.

$$S_{xx}(V) = a^2 \frac{L+1}{L} T \left( \frac{\sin \pi f T}{\pi f T} \right)^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( f - \frac{n}{LT} \right) - \frac{a^2}{L} (f). \quad (6.13)$$

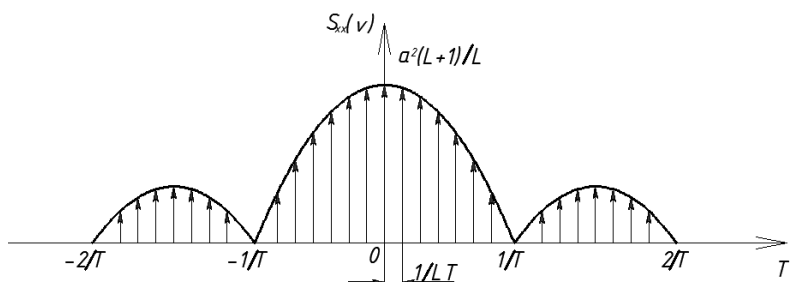


Рис.6.11 Спектральна щільність неперервної ПВДП з рівнями +а і –а та періодом повтору L. Спектральна щільність має огинаючу виду і вперше перетворюється на нуль , якщо  $\nu=1/T$ . Кількість спектральних ліній в межах від  $\nu=0$  до  $\nu=1/T$  дорівнює L.

Розширення частотного спектру ПВДП забезпечується збільшенням тактової частоти генератора ПВДП. Простота зміни тактової частоти, а отже й ширина спектру сигналу, дозволила широко використовувати ПВДП як модель «білого шуму».

**Приклад 6.2.** Необхідно визначити імпульсну перехідну функцію збирача рідини (рис. 6.12). У системі (а) рідина трубопроводом 1 через регулюючий орган (РО) 2 подається у збирач рідини 3, а з нього через технологічний вентиль (ТВ) 4 – на виробництво. За допомогою РО та ТВ у збирачі встановлюються відповідний рівень рідини  $h$ , він реагує як на зміну положення РО, так і положення ТВ. Будемо надалі

вважати зміну положення РО керувальним діянням, а зміну положення ТВ – збурювальним. У системі (б) рідина після проходження РО 2 надходить спочатку до довгого трубопроводу 5, а вже з нього – до збирача рідини 3.

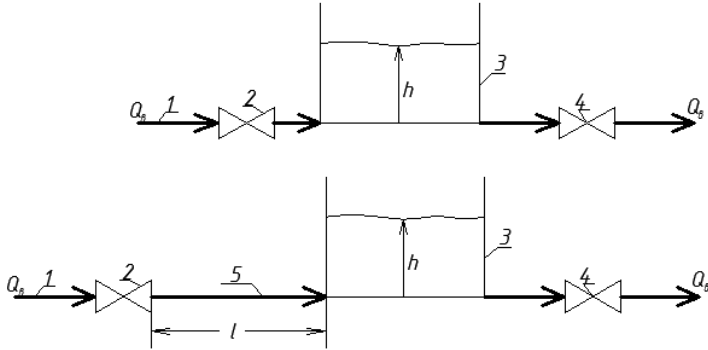


Рис. 6.12 принципові схеми збирача рідини з коротким трубопроводом подачі рідини в збирач (а) і з довгим (б).

Передаточна функція каналу керування «витрата рідини  $Q_n$  – рівень рідини  $h$ » системи «а» і системи «б».

$$W(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{k_0}{1 + T_0 s}. \quad (6.14)$$

$$W(s) = \frac{y(s)}{U(s)} = \frac{k_0 \exp(-pr)}{1 + T_0 s}.$$

Обчислимо значення експериментальної імпульсної перехідної функції системи (а). На вхід цієї системи подано ПВДП із рівняннями +1 і -1 та періодом повтору  $L=31$ .

Рис. 6.13 графік 1 вхідна змінна. Вихідна змінна системи  $y(i)$  відреагувала так, як показано на рис. 6.13 (графік 2) Експериментальна ППФ  $W_{\text{ек}}(i)$  системи 1 пов'язана з її взаємно кореляційною функцією  $R_{\text{уи}}(i)$ :

$$\omega_{el}(i) = \frac{L}{a^2(L+1)} R_{yu}(i), \quad (6.15)$$

де  $a$  – амплітуда (рівневхідного сигналу);  $L$  – період повтору ПВДП.

Оскільки період повтору  $L=31$  біт,  $a=1$ , а тривалість  $T=3$ с, то повторення  $L = LT=31*3=93$  с. Підставимо  $L$  у рівняння 6.15. Тоді:

$$\omega_{el}(i) = \frac{93}{1+93} R_{yu}(i) \cong 0,989 R_{yu}(i)$$

$$\omega_{el}(i) \cong R_{yu}(i),$$

Тобто експериментальна ППФ системи (а) за заданої ПВДП ( $a=1, L=31$  майже збігається з (ВКФ) цієї системи:

$$R_{yu}(k) = \frac{1}{N-k} \sum_{i=0}^{N-k} y(i)u(i-k). \quad (6.16)$$

Згідно з формулою (6.16) було обчислено 18 значень неперервної ВКФ системи (а).

Експериментальну ППФ системи  $a$  можна отримати на підставі АКФ поділивши її значення на  $T=3$ с:

$$R_{el}(i) \cong W(i) = \frac{1}{T} R_{yu}(i) = \frac{1}{3} R_{yu}(k). \quad (6.17)$$

На рис. 6.14 побудовано ППФ (графік 1), та дві експериментальні для різних поміх у вимірах  $y(\psi)$ . Збільшити точність вказаних функцій можна, збільшивши період повторення ПВДП.

Для об'єкта зі запізненням  $\tau$  внаслідок довгого трубопроводу подачі рідини (рис. 6.12, б) результат буде аналогічним, тільки ППФ і її оцінку будуть зсунуті у часі на  $\tau$ .

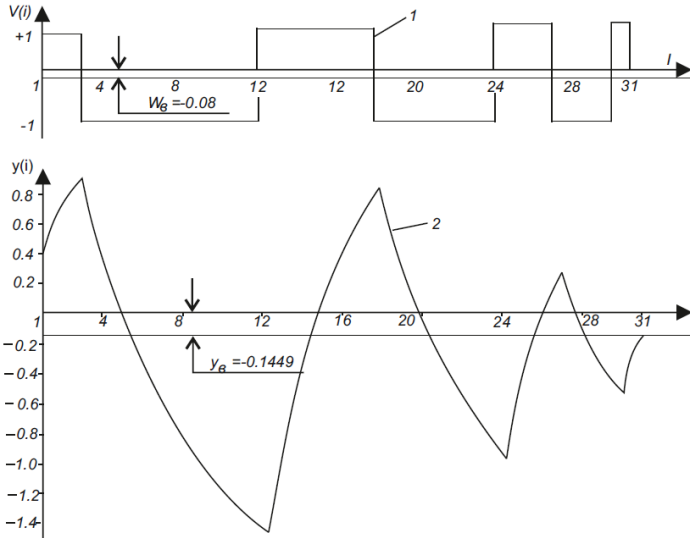


Рис. 6.13 Реалізація вхідної (графік 1) і вихідної (графік 2) змінних системи

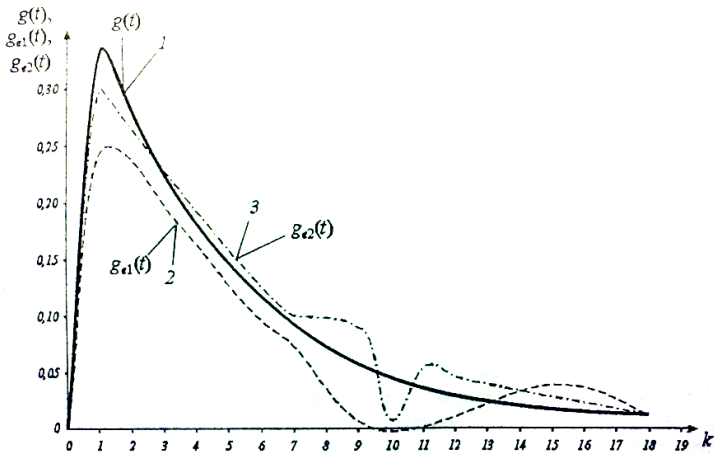


Рис. 6.14 Імпульсні перехідні функції збирача рідини:  
1 – істинна; 2 і 3 експериментальні.

### **6.1.4. Дослідження методів отримання непараметричних оцінок перехідної функції (ПФ) і АФЧХ в режимі активної ідентифікації**

При плануванні експерименту вибирають метод дослідження динаміки об'єкта, а також вид випробовуваного детермінованого (із заздалегідь відомим характером зміни) впливу. Для прискорення визначення динамічних характеристик зазвичай використовують метод перехідних характеристик. Цей метод простий і дозволяє отримати динамічні характеристики об'єкта за короткий проміжок часу.

**Визначення перехідних функцій (ПФ) об'єкта.** Визначення ПФ об'єкта необхідно робити в робочих режимах для сталих значеннях вхідних  $X_{вх}(0)$  і вихідних  $Y_{вих}(0)$  змінних. При плануванні експерименту оцінюють час проведення одного досліді і визначають необхідну кількість дослідів. Якщо динаміка об'єкта досліджується за відсутності перешкод, то на кожному робочому режимі слід знімати не менше чотирьох перехідних характеристик; за наявності перешкод рекомендується записувати, залежно від їх рівня, до десяти перехідних характеристик.

Якщо на останні діють випадкові обурення, то під час експерименту реєструють деяку функцію  $z(t)$ , що складається з випадкового центрованого шуму  $f(t)$  і корисного сигналу  $h(t)$ :

$$z(t) = h(t) + N(t).$$

Для виділення істинної перехідної характеристики використовують методи згладжування. Найбільш простим є згладжування ковзним середнім. Метод ковзаючого середнього полягає в тому, що на деякому інтервалі часу  $l\Delta t$  ( $l$  - будь-яке ціле число, краще парне) здійснюють послідовне усереднення ординат  $z_i (i=0, 1, 2, \dots, n)$  за формулою:

$$\hat{h}\left(i + \frac{l}{2}\right) = \frac{1}{l+1} \sum_{\beta=0}^l Z(i + \beta), \quad (6.18)$$



де  $i = 0, 1, 2, \dots, n-l$ ;  $\hat{h}$  - оцінки ординат перехідної характеристики  $h(t)$ .

Інтервал  $l\Delta t$  називають пам'яттю лінійного фільтру. Фільтр суттєво послаблює гармоніки функції  $z(t)$  з частотою вище  $2\pi / l\Delta t$ .

За вірного вибору  $l$  виділення перехідної характеристики  $h(t)$  може бути виконано достатньо точно. Зменшення пам'яті проти оптимального значення веде до недостатнього вирівнювання експериментальних даних, а збільшення - до спотворення  $h(t)$  і втрати частини ординат  $h_j^*$  з індексами  $i \leq \frac{l}{2-1}$  і  $i \geq n-l/2+1$ .

Початкова ділянка  $h(t)$  визначає структуру перехідної функції об'єкта, а кінцева - коефіцієнт посилення об'єкта. Для згладжування ковзальним середнім необхідно починати реєстрацію  $z(t)$  трохи раніше моменту нанесення збурення і припиняти для  $t > T_{зтх}$ . За цим же міркуванням, для згладжування  $z(t)$  спочатку беруть  $l = 2 \div 4$ , потім візуально оцінюють  $h^*(t)$  і, якщо необхідно, збільшують  $l$ . Потім виконують нормування згладжених характеристик  $h_j(t) = h_j(t)/A_j$ , де  $h_j(t)$  - перехідна згладжена характеристика, експериментально отримана в  $j$ -му досліді;  $A_j$  - амплітуда ступеньки сигналу в  $j$ -му досліді. В результаті дослідів маємо  $q$  перехідних характеристик  $h_j(t)$ , зазвичай відмінних один від одного. Їх необхідно усереднити:

$$h(t) = \frac{1}{q} \sum_{j=1}^q h_j(t) \quad (6.19)$$

### Визначення частотних характеристик

Проведення експериментів з визначення АФЧХ з допомогою періодичних впливів пов'язано з технічними складнощами, так як тривалість дослідів на одній частоті  $\omega$  в середньому в 5-10 разів більше часу встановлення перехідної функції  $h(t)$ . У зв'язку з цим необхідно ретельно

стабілізувати джерела обурень, контролювати зміщення середньої лінії вихідних коливань.

Експеримент полягає в тому, що випробовуваний періодичний із заданим періодом  $T_{\text{пер}}$  вплив подають на вхід об'єкта доти, доки на його виході не встановляться коливання вихідної величини  $y(t)$  з частотою  $\omega = 2\pi / T_{\text{пер}}$ . Ознакою сталих коливань вихідної величини  $y(t)$  є ідентичність коливань по амплітуді на трьох-п'яти періодах; загальна тривалість досліджу дорівнює  $(6-15)T_{\text{пер}}$ .

Експеримент слід починати з визначення перехідної характеристики об'єкта для отримання АФЧХ на нульовій частоті ( $\omega=0$ ). Потім на вхід об'єкта подають коливання з частотою  $\omega_n$ , за якої зсув фаз між вхідними і вихідними, коливаннями складає  $180^\circ$ . Для знаходження  $\omega_n$  досить об'єкт ввести в режим двопозиційного регулювання з зоною нечутливості, близькою до нуля.

При проведенні експерименту доцільно записувати коливання вхідних і вихідних величин на одному носії.

Важливим фактором при плануванні експерименту є вибір випробовуваного періодичного впливу  $x(t)$ . Бажаним видом вхідних впливів є синусоїдальні коливання. У лінійній системі коливання на виході об'єкта можуть відрізнитися від коливань на вході тільки по амплітуді і фазі. Щоб отримати АФЧХ об'єкта для синусоїдальних коливань, досить обробити вихідні і вхідні коливання для ряду різних частот  $\omega$ . У загальному випадку застосування синусоїдальних впливів  $x(t)=Asin\omega t$  спрощує наступну обробку результатів експерименту, проте для створення таких сигналів необхідний спеціальний генератор коливань.

*Метод прямокутної хвилі* не вимагає застосування генератора коливань. Періодичні коливання у вигляді прямокутної хвилі можуть створюватися вручну. Однак при використанні цього методу при обробці результатів дослідів доводиться розкласти в ряд Фур'є коливання вхідних і вихідних величин.

### 6.1.5. Визначення коефіцієнтів рядів, у які розкладаються передаточні функції

Степеневі ряди (ряд Маклорена, ряд за від'ємними степенями) використовують як проміжні етапи ідентифікації динамічних характеристик.

**Зв'язок коефіцієнтів розкладання в ряд Маклорена передаточної функції з коефіцієнтами передаточної функції**

Для нормованої (поділеної на коефіцієнт підсилення в статичі) передаточної функції маємо:

$$\frac{B(s)}{A(s)} = \sum_{i=0}^{N_e} E_i s^i$$

або

$$\frac{1 + b_1 s + b_2 s^2 + \dots + b_m s^m}{1 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots + a_n s^n} = 1 + e_1 s + e_2 s^2 + \dots + e_{N_e} s^{N_e}.$$

(6.20)

Помножимо ліву і праву частини рівняння (6.20) на знаменник передаточної функції:

$$(1 + e_1 s + e_2 s^2 + \dots + e_{N_e} s^{N_e})(1 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots + a_n s^n) = 1 + b_1 s + b_2 s^2 + \dots + b_m s^m.$$

Розкриваємо дужки та прирівнюємо коефіцієнти за однакових степенів  $s$ :

$$\begin{aligned} s^1, \quad e_1 a_1 + e_0 a_1 &= b_1; \\ s^2, \quad e_2 a_0 + e_1 a_1 + e_0 a_2 &= b_2; \\ s^3, \quad e_3 a_0 + e_2 a_1 + e_1 a_2 + e_0 a_3 &= b_3; \end{aligned} \quad (6.21)$$

$$s^{N_e}, \quad e_{N_e} a_0 + e_{N_e-1} a_1 + e_{N_e-2} a_2 + \dots + e_0 a_{N_e} = b_{N_e}.$$

Тут  $a_0 = b_0 = e_0 = 1$ .

Вважатимемо, що коефіцієнти  $a_i$  та  $b_i$  з індексами, що перевищують відповідно  $n$  та  $m$ , дорівнюють нулю. Тоді послідовно розв'язуючи систему (6.21) маємо:

$$\left\{ \begin{array}{l} e_1 = \frac{b_1 - e_0 a_1}{a_0}, \\ e_2 = \frac{b_2 - (e_0 a_2 + e_1 a_1)}{a_0}, \\ e_3 = \frac{b_3 - (e_0 a_3 + e_1 a_2 + e_2 a_1)}{a_0}, \\ \dots\dots\dots \\ e_{Ne} = \frac{b_{Ne} - (e_0 a_{Ne} + \dots + e_{Ne-2} a_2 + e_{Ne-1} a_1)}{a_0}. \end{array} \right. \quad (6.22)$$

Враховуючи, що  $a_0 = 1$ , можна записати систему (6.22) в загальному випадку:

$$\left\{ \begin{array}{l} e_1 = b_1 - e_0 a_1, \\ e_Z = b_Z - \sum_{i=0}^{Z-1} e_i a_{Z-i}, \quad 2 \leq Z \leq Ne. \end{array} \right. \quad (6.23)$$

Таким чином, визначивши коефіцієнти  $e_n$ , за алгоритмом (6.23) можна розрахувати по ним коефіцієнти передаточної функції (6.20).

### **Зв'язок коефіцієнтів ряду Маклорена передаточної функції з перехідною функцією**

Визначатимемо ряд Маклорена для нормованої передатної функції. Тоді перехідну характеристику нормуємо, тобто зводимо до одиничного коефіцієнта передачі. Як правило, досліджуваний об'єкт має самовирівнювання, графік  $h(t)$  подано на рис. 6.15.

Ряд Маклорена для  $W_{n(s)}$  можна записати так

$$W_H(s) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \left. \frac{d^i W_H(s)}{ds^i} \right|_{s^i}, \quad (6.24)$$

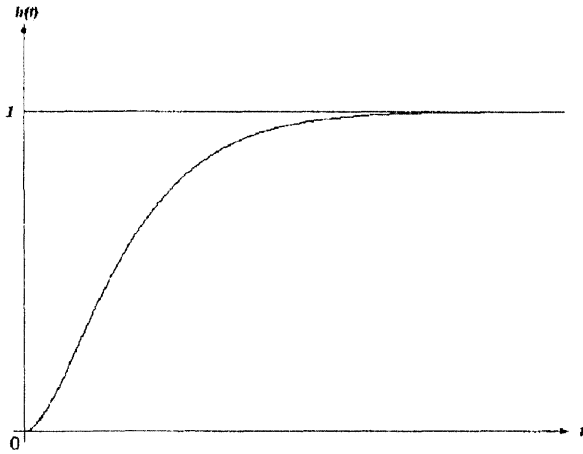


Рис. 6.15. Нормована перехідна характеристика

так

$$W_H(s) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i C_i s^i, \quad (6.25)$$

або так

$$W_H(s) = \sum_{i=0}^{\infty} E_i s^i.$$

Тоді

$$E_i = \frac{1}{i!} \left. \frac{d^i W_H(s)}{ds^i} \right|. \quad (6.26)$$

$$C_i = (-1)^i E_i. \quad (6.27)$$

Позначимо:

$$\begin{aligned} C_0(t) &= h_H(t); \\ C_0 &= \lim_{t \rightarrow \infty} C_0(t) = 1. \end{aligned} \quad (6.28)$$

Зображення  $L[\bullet]$  за Лапласом:

$$L[C_0 - C_0(t)] = \int_0^{\infty} [C_0 - C_0(t)]e^{-st} dt,$$

або, з урахуванням виразу (6.28),

$$\frac{C_0}{s} - \frac{W_H(s)}{s} = \int_0^{\infty} [C_0 - C_0(t)]e^{-st} dt.$$

Візьмемо, за правилом Лопітала, межу, якщо  $s \rightarrow 0$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \left[ -\frac{dW_H(s)}{ds} \right] = \int_0^{\infty} [C_0 - C_0(t)] dt.$$

З рівнянь (6.26), (6.27) для  $i=1$ , маємо:

$$C_1 = \int_0^{\infty} [C_0 - C_0(t)] dt$$

Отже,  $C_1$  є площею між ( $1=C_0$ ) та кривою  $C_0(t) = h_m(t)$  (рис. 6.16).

Позначимо:

$$C_1(t) = \int_0^{\infty} [C_0 - C_0(t)] dt, \quad C_1 = \lim_{t \rightarrow \infty} C_1(t).$$

Тоді

$$L[C_1 - C_1(t)] = \int_0^{\infty} [C_1 - C_1(t)]e^{-st} dt$$

або

$$\frac{C_1}{s} - \frac{1 - W_H(s)}{s} = \int_0^{\infty} [C_1 - C_1(t)]e^{-st} dt. \quad (6.29)$$

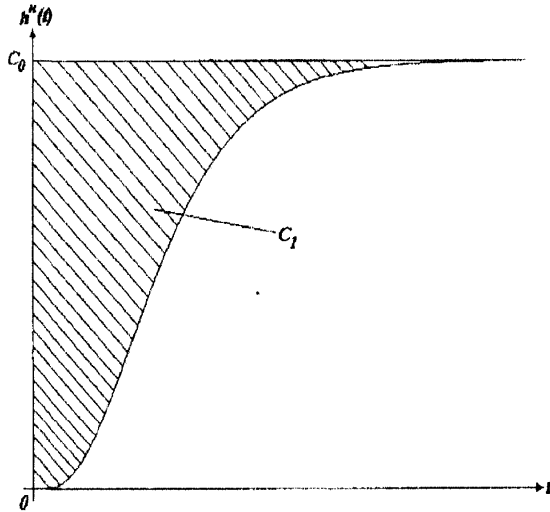


Рис. 6.16.Визначення  $C_1$

Зводимо ліву частину рівняння (6.29) до спільного знаменника та беремо межу при  $s \rightarrow 0$ :

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{C_1 s - 1 + W_H(s)}{s^2} = \int_0^{\infty} [C_1 - C_1(t)] dt.$$

Розкриваємо невизначеність у лівій частині, послідовно застосовуючи двічі правило Лопіталія:

$$\frac{d^2 W_n(s)}{2 ds^2} \Big|_{s=0} = \int_0^{\infty} [C_1 - C_1(t)] dt$$

З урахуванням формул (6.26), (6.27), якщо  $i=2$ ,

$$C_2 = \int_0^{\infty} [C_1 - C_1(t)] dt.$$

Графічно це показано на рис. 6.17.

Введемо функцію:

$$C_2(t) = \int_0^t [C_1 - C_1(t)] dt, \quad C_2 = \lim_{t \rightarrow \infty} C_2(t),$$

то аналогічно тому, як для  $C_2$ ,

$$C_3 = \int_0^{\infty} [C_2 - C_2(t)] dt,$$

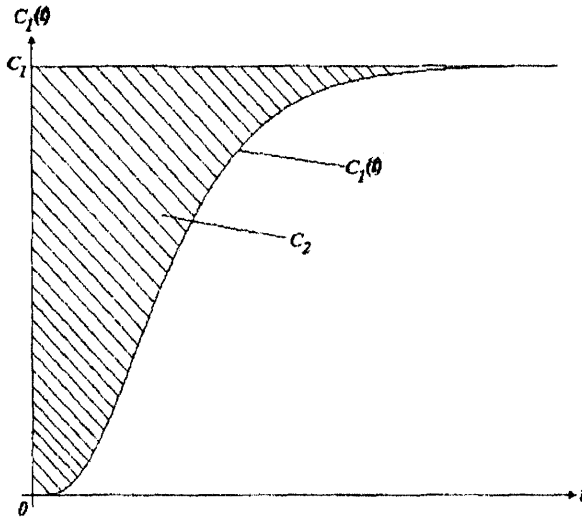


Рис. 6.17. Визначення  $C_2$

У загальному випадку:

$$C_i = \int_0^{\infty} [C_{i-1} - C_{i-1}(t)] dt. \quad (6.30)$$

А коефіцієнти ряду Маклорена  $E_i$  відповідно дорівнюють:

$$E_i = (-1)^i C_i. \quad (6.31)$$

### **Зв'язок коефіцієнтів ряду Маклорена розкладання передаточної функції з імпульсною перехідною функцією**

Передаточна функція  $W(s)$  є, як відомо, зображенням за Лапласом імпульсної функції:

$$W(p) = \int_0^{\infty} w(t) e^{-pt} dt \quad (6.32)$$

Розкладемо  $e^{-st}$  у ряд Маклорена



$$e^{-st} = 1 - ts + \frac{t^2}{2!} s^2 - \frac{t^3}{3!} s^3 + \dots$$

Тоді

$$W(s) = \int_0^{\infty} w(t) dt - s \int_0^{\infty} w(t)t dt + \frac{s^2}{2!} \int_0^{\infty} w(t)t^2 dt - \frac{s^3}{3!} \int_0^{\infty} w(t)t^3 dt + \dots$$

Інтеграл типу  $\int_0^{\infty} w(t)t^i dt$  називають моментом  $s$ -го порядку від імпульсної характеристики:

$$M_i = \int_0^{\infty} w(t)t^i dt \quad (6.33)$$

Тоді

$$W(s) = \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^i \frac{M_s}{i!} s^i, \quad (6.34)$$

або

$$W(s) = \sum_0^{\infty} E_i s^i, \quad (6.35)$$

де

$$E_i = \frac{(-1)^i}{i!} M_i = \frac{(-1)^i}{i!} \int_0^{\infty} t^i g(t) dt.$$

### **Зв'язок коефіцієнтів ряду Маклорена передаточної функції з амплітудно-фазовою частотою**

Нехай, з експерименту маємо для частот  $\omega_i$  ряд точок амплітудно-фазо-частотної характеристики

$$\omega(j\omega_i) = R_i + jI_i, \quad 0 \leq i \leq m. \quad (6.36)$$

Значення частот  $\omega_i$ , дійсно-частотних  $R_i$  та уявно-частотних характеристик  $I_i$  зосереджено в однойменних

масивах  $W, R, I$ : Передавальну функцію будемо шукати у вигляді ряду:

$$\omega(s) = \sum_{i=0}^n e_i s^i. \quad (6.37)$$

Відповідно до неї амплітудно-фазова характеристика дорівнює:

$$\omega(jw) = (e_0 - e_2 w^2 + e_4 w^4 - e_6 w^6) + j(e_1 w - e_3 w^3 + e_5 w^5 - e_7 w^7 + \dots)$$

Візьмемо для прикладу  $n = 7$ . Критерій якості  $J$  апроксимації буде сума квадратів відстаней між відповідними базовими та апроксимуючими точками амплітудно-фазових характеристик:

$$J = \sum_{i=0}^m \{ (e_0 - e_2 w_i^2 - e_4 w_i^4 - e_6 w_i^6 - R_i)^2 + (e_1 w_i - e_3 w_i^3 - e_5 w_i^5 - e_7 w_i^7 - I_i)^2 \} \rightarrow \min. \quad (6.38)$$

Умова мінімуму  $J$  дає систему рівнянь:

$$\frac{dJ}{de_0} = 2 \sum_{i=0}^m (e_0 - e_2 w_i^2 + e_4 w_i^4 - e_6 w_i^6 - R_i) w_i^0 = 0,$$

$$\frac{dJ}{de_1} = 2 \sum_{i=0}^m (e_1 - e_3 w_i^3 + e_5 w_i^5 - e_7 w_i^7 - I_i) w_i^1 = 0,$$

$$\frac{dJ}{de_2} = 2 \sum_{i=0}^m (e_0 - e_2 w_i^2 + e_4 w_i^4 - e_6 w_i^6 - R_i) (-w_i^2) = 0,$$

$$\frac{dJ}{de_3} = 2 \sum_{i=0}^m (e_1 - e_3 w_i^3 + e_5 w_i^5 - e_7 w_i^7 - I_i) (-w_i^3) = 0,$$

$$\frac{dJ}{de_4} = 2 \sum_{i=0}^m (e_0 - e_2 w_i^2 + e_4 w_i^4 - e_6 w_i^6 - R_i) w_i^4 = 0,$$

$$\frac{dJ}{de_5} = 2 \sum_{i=0}^m (e_1 - e_3 w_i^3 + e_5 w_i^5 - e_7 w_i^7 - I_i) w_i^5 = 0,$$

$$\frac{dJ}{de_6} = 2 \sum_{i=0}^m (e_0 - e_2 w_i^2 + e_4 w_i^4 - e_6 w_i^6 - R_i) (-w_i^6) = 0,$$

$$\frac{dJ}{de_7} = 2 \sum_{i=0}^m (e_1 - e_3 w_i^3 + e_5 w_i^5 - e_7 w_i^7 - I_i) (-w_i^7) = 0.$$

Під матрицею показано невідомі коефіцієнти при яких є елементи відповідного стовпця матриці. Матриця розпадається на дві незалежних системи для дійсної і уявної складових з яких по МНК знаходяться парні і, відповідно, непарні коефіцієнти  $e_i$  ряду (6.37).

Таблиця 6.1

$\sum w_i^0$	0	$-\sum w_i^2$	0	$\sum w_i^4$	0	$-\sum w_i^6$	0	$\sum R_i w_i^0$
0	$\sum w_i^2$	0	$-\sum w_i^4$	0	$\sum w_i^6$	0	$-\sum w_i^8$	$\sum R_i w_i^1$
$-\sum w_i^2$	0	$\sum w_i^4$	0	$-\sum w_i^6$	0	$\sum w_i^8$	0	$\sum R_i w_i^2$
0	$-\sum w_i^4$	0	$\sum w_i^6$	0	$-\sum w_i^8$	0	$\sum w_i^{10}$	$\sum R_i w_i^3$
$\sum w_i^4$	0	$-\sum w_i^6$	0	$\sum w_i^8$	0	$-\sum w_i^{10}$	0	$\sum R_i w_i^4$
0	$\sum w_i^6$	0	$-\sum w_i^8$	0	$\sum w_i^{10}$	0	$-\sum w_i^{12}$	$\sum R_i w_i^5$
$-\sum w_i^6$	0	$\sum w_i^8$	0	$-\sum w_i^{10}$	0	$\sum w_i^{12}$	0	$\sum R_i w_i^6$
0	$-\sum w_i^8$	0	$\sum w_i^{10}$	0	$-\sum w_i^{12}$	0	$\sum w_i^{14}$	$\sum R_i w_i^7$
$e_0$	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$	$e_5$	$e_6$	$e_7$	Праві частини

## Визначення передаточної функції об'єкта безпосередньо по амплітудно-фазово-частотній характеристиці методом найменших квадратів

Метод найменших квадратів з його здатністю згладжувати можливі похибки у вихідних даних, використовуваних для ідентифікації динамічного об'єкта, а також з його «терпимістю» до неповної відповідності апроксимуючої структури глибинним властивостям досліджуваного об'єкта можна застосовувати для ідентифікації за рядом точок амплітудно-фазової характеристики.

Нехай є ряд точок  $R_i + jI_i$ ,  $0 \leq i \leq m$ . Тут  $R_i = R(\omega_i)$ ,  $I_i = I(\omega_i)$  – значення дійсно- та уявно-частотних характеристик;  $\omega_i$  – частоти.

Будемо вважати, що коефіцієнт передачі  $k_{ob}$  відомий. Значення  $R_i$ ,  $I_i$ , задані в однойменних масивах, вважатимемо нормованими до одиничного коефіцієнта передачі (поділеним на  $k_{ob}$ ). Тоді апроксимуюча передаточна функція має вигляд:

$$W(s) = \frac{1 + b_1 s + b_2 s^2 + \dots + b_{N_a} s^{N_a}}{1 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots + a_{N_a} s^{N_a}}. \quad (6.39)$$

Нехай, наприклад,  $N_a = 7$ .

Замінімо в рівнянні (6.39)  $s$  на  $j\omega$ . Тоді для точки з номером  $i$  можна записати:

$$\frac{(1 - b_2 w_i^2 + b_4 w_i^4 - b_6 w_i^6) + j w_i (b - b_2 w_i^2 + b_4 w_i^4 - b_6 w_i^6)}{(1 - a_2 w_i^2 + a_4 w_i^4 - a_6 w_i^6) + j w_i (a - a_3 w_i^2 + a_5 w_i^4 - a_7 w_i^6)} = R_i + j I_i, \quad (6.40)$$

$$0 \leq i \leq m,$$

або

$$\begin{aligned} & [(1 - a_2 w_i^2 + a_4 w_i^4 - a_6 w_i^6) R_i - w_i (a_1 - a_3 w_i^2 + a_5 w_i^4 - a_7 w_i^6) I_i - \\ & - (1 - b_2 w_i^2 + b_4 w_i^4 - b_6 w_i^6)] + j [(1 - a_2 w_i^2 + a_4 w_i^4 - a_6 w_i^6) I_i + \\ & + w_i (a_1 - a_3 w_i^2 + a_5 w_i^4 - a_7 w_i^6) R_i - w_i (b_1 - b_3 w_i^2 + b_5 w_i^4 - b_7 w_i^6)] = 0, \end{aligned} \quad (6.41)$$

$$0 \leq i \leq m.$$

Ліву частину виразу (6.41) можна розглядати як вектор, що з'єднує  $i$ -ту точку амплітудно-фазової характеристики з відповідною їй апроксимуючою. Очевидно, що чим коротшими будуть такі вектори для усієї заданої сукупності точок амплітудно-фазової характеристики – тим краще буде апроксимація. Отже, за критерій якості апроксимації візьмемо середне-квадратичну норму:

$$I = \sum_{i=0}^m \{ [(1 - a_2 w_j^2 + a_4 w_j^4 - a_6 w_j^6) R_j - w_j (a_1 - a_3 w_j^2 + a_5 w_j^4 - a_7 w_j^6) I_j - (1 - b_2 w_j^2 + b_4 w_j^4 - b_6 w_j^6)] + [(1 - w_j^2 + a_4 w_j^4 - a_6 w_j^6) I_j + w_j (a_1 - a_3 w_j^2 + a_5 w_j^4 - a_7 w_j^6) R_j - w_j (b_1 - b_3 w_j^2 + b_5 w_j^4 - b_7 w_j^6)]^2 \} \quad (6.42)$$

Це – сума квадратів довжин векторів – відхилень між вихідними та апроксимуючими точками. З умови мінімуму (6.42) отримуємо дві незалежних системи нормальних рівнянь МНК, вирішивши які отримуємо шукані коефіцієнти передаточної функції (6.39).

## 6.2 Дослідження методів «on-line» ідентифікації передавальних функцій об'єктів

### 6.2.1 Ортогональні моделі

Мова піде про ідентифікацію об'єктів в реальному часі («on-line»), яка має місце в адаптивних системах керування. Для більшої наочності розглянемо неперервні процеси, які однак, як показано в розділі 4, за необхідністю легко переводяться в дискретні.

Будемо вважати, що параметри об'єкта змінюються у часі набагато повільніше від процесу настройки коефіцієнтів моделі, а процес настройки набагато повільнішим від зміни змінних стану об'єкта. Такий режим називається квазі-стаціонарним.

Для більшої наочності також змінну Лапласа за нульових початкових умов  $s$  прирівняємо до оператора  $s = p = \frac{d}{dt}$ . Тоді графічно передаточної функції  $W(s)$  та інтегро-диференційні

оператори  $W(p)$  перетворення входу в вихід у часі будуть то-  
 жожними, що суттєво спрощує представлення структурних  
 схем системи.

Найбільш зручними (в сенсі адаптації складності структу-  
 ри моделей вхід-вихід) є ортогональні моделі:

$$y(t) = \sum_{i=1}^n \beta_i W_i(p) U(t), \quad p = d / dt, \quad (6.43)$$

Тут невідомі параметри  $\beta_i$  входять лінійно, а оператори  
 $W_i(p)$  перетворюють вхідний сигнал  $U(t)$  у систему ортогональ-  
 них на інтервалі  $T$  з вагою  $w(t)$  функцій  $\{\varphi_i(t)\}$ :

$$\varphi_i(t) = W_i(p) U(t), \quad (6.44)$$

$$\int_0^T w(t) \varphi_i(t) \varphi_j(t) dt = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ c \neq 0, & i = j, \end{cases} \quad (6.45)$$

Клас вхідних сигналів  $U(t)$  визначає оператори  $W_i(p)$ . Досить  
 просто реалізуються оператори на базі поліномів  $L_n^{(0)}$  Лагерра:

$$L_n^0(\gamma\tau) = \sum_{i=0}^n \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(i+1)} \frac{(-\gamma\tau)^i}{i!(n-i)!}; \quad (6.46)$$

$$W_n(p) = L\{L_n^0(\gamma\tau)\} = \frac{(p-\gamma)^n}{p^{n+1}}. \quad (6.47)$$

Це частковий випадок узагальнених поліномів Лагерра  $L_n^\alpha(x)$   
 при  $\alpha=0$ ,  $x=\gamma\tau$  або функції Лагерра [ ]:

$$\varphi_n(\gamma\tau) = e^{\frac{\gamma\tau}{2}} L_n^{(0)}(\gamma\tau), \quad (6.48)$$

яким відповідає оператор

$$W_i(p) = L\{\varphi_n(\gamma\tau)\} = \frac{(p-\gamma)^n}{(p+\gamma)^{n+1}}, \quad (6.49)$$

де  $L$ –оператор перетворення Лапласа.

Система поліномів Лагерра  $L_n^{(0)}$  ( $\gamma t$ ) ортогональна на напівскінченній осі  $[0; \infty)$  з експонціальною вагою  $\varphi(\tau) = e^{-\gamma\tau}$ , за умови, що вхідний сигнал  $U(t)$  має зображення Лапласа, яке не залежить від  $p$ , або постійний фур'є-спектр. Таку умову задовольняє дельта-функція або «білий шум». Практично достатньо забезпечити неперервність  $S_M(\omega)$  у полосі пропускання об'єкта або застосувати формулюючі фільтри  $W_\phi(p)$ , перетворюючі у полосі частот об'єкта сигнал  $U(t)$  у «білий шум». Тоді (6.43) набуває вигляду

$$y(t) = \sum_{i=1}^n \beta_i W_i(p) W_\phi(p) u(t), \quad (6.50)$$

де функції  $\varphi_i(t) = W_i(p) W_\phi(p) U(t)$  взаємно ортогональні.

При переході до дискретного часу операторам  $W_i(p)$  еквівалентні дискретні передаточні функції:

$$W_i(z) = \frac{\sum_{j=1}^i b_{ji} z^{-j}}{1 - \left( \sum_{j=1}^i c_{ji} z^j \right)}, \quad (6.51)$$

де  $b_{ji}$  і  $c_{ji}$  – коефіцієнти, які вираховують через параметр  $\gamma$  в (6.49) и крок  $\Delta t$ ;  $z^j$  – оператор зсуву часу на  $j\Delta t$ .

Для ускладнення (спрощення) ортогональної моделі достатньо додати (відкинути) один оператор  $W_n(p)$ , не змінюючи інші  $\beta_i$ .

Оптимальне значення  $\beta_i$  (по критерію  $J_{qk}$ ) не залежить від інших коефіцієнтів  $\beta_r (r \neq i)$ . У цьому перевага ортогональних моделей.

До недоліків слід віднести важкість вибору  $\gamma$ , відсутність зв'язку між структурою моделі та структурою протікаючих в об'єкті процесів, вплив невідомих ненульових початкових умов, обмеження застосувань класом одних лише аперіодичних об'єктів.

Якщо  $U(t)$  неперервне, то для визначення передаточної функції моделі

$$W(p) = \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0}, \quad (6.52)$$

(структура цієї моделі може допускати фізичну інтерпретацію) апроксимуємо сигнали  $U(t)$  і  $y(t)$ , де  $t \in [0; T]$ , за допомогою системи ортогональних функцій  $\{\varphi_r(t)\}$ :

$$u(t) = \sum_{i=0}^n a_i \varphi_i(t), \quad y(t) = \sum_{j=0}^m b_j \varphi_j(t). \quad (6.53)$$

Зображення за Лапласом відношення  $y(s)$  до  $\varphi(s)$ , тобто передаточну функцію

$$W(p) = \sum_{k=0}^m \alpha_k \varphi_k(s) / \sum_{k=0}^n \beta_k \varphi_k(p). \quad (6.54)$$

Приведемо до стандартного вигляду. Так, для поліномів оператора (6.52):

$$b_{m-j} = (-1)^j \sum_{k=j}^m \eta_k^j \alpha_k; \quad a_{n-i} = (-1)^i \sum_{k=j}^n \eta_k^i \beta_k, \quad (6.55)$$

де  $\eta_k^j = \frac{k(k-1)\dots(k-j-i)}{j}$ .

Точність визначення векторів  $b$  і  $a$  в (6.52) за допомогою формул (6.55) залежить від точності апроксимації сигналів, чисел  $n$  і  $m$  та довжини реалізації. Для зміни структури моделі (6.52) достатньо змінити числа  $n$  і  $m$  у виразі (6.55).

### 6.2.2. Градієнтний метод з паралельною моделлю

Позначимо вихідні сигнали об'єкта  $y_0(t)$ , моделі –  $y_M(t)$ , а спільний для них вхідний сигнал через  $U(t)$ . Сигнал різниці виходів об'єкта і моделі:

$$\varepsilon(t) = Y_0(p) - Y_M(p), \quad (6.56)$$



Вважаємо, що оператор моделі  $W_M(p)$  співпадає з оператором об'єкту  $W_0(p)$  з точністю до параметрів. Градієнтний алгоритм оптимізації вектора  $\beta_M$  параметрів  $\beta_{M_i}$  моделі:

$$\frac{d\hat{\beta}_{M_i}(t)}{dt} = -\lambda_i \text{grad}_i \frac{\varepsilon^2}{2}(\beta_0, \beta_M) = -\lambda_i e \frac{\partial \varepsilon}{\partial \beta_{M_i}}, i = \overline{1, n}. \quad (6.57)$$

де рискою позначено операцію поточного усереднення.

Для побудови градієнтного алгоритму необхідно визначити  $\partial \varepsilon / \partial \beta_{M_i}$  та виконати операцію усереднення. Похідна від помилки:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \beta_{M_i}} = \frac{\partial W_M(p)}{\partial \beta_{M_i}} U(t) \quad (6.58)$$

називається функцією чутливості, а  $\partial W_M / \partial \beta_{M_i}$  - допоміжним оператором [Костюк ]. Враховуючи вираз для функції чутливості, градієнтний алгоритм самонастройки моделі приймає вигляд :

$$\frac{d\beta_{M_i}}{dt} = -\lambda_i \varepsilon(t) \int_0^t \frac{\partial w(\tau)}{\partial \beta_{M_i}} u(t-\tau) d\tau, \quad (6.59)$$

де  $w(\tau)$  – імпульсна вагова функція моделі. Необхідно додатково будувати допоміжні оператори  $\partial W(p) / \partial \beta_{M_i}$ , на основі яких вираховують функцію чутливості  $\partial \varepsilon / \partial \beta_{M_i}$ .

Розглянемо градієнтний алгоритм само-налаштування з паралельною ортогональною моделлю у вигляді фільтра Лаггера (рис.6.18), де  $O$  – об'єкт, що підлягає ідентифікації,  $a_i$  – параметри, що настроюються,  $y_i$  – вихідні сигнали фільтрів Лаггера.

$$L\{l_0(t)\} = \frac{1}{p+1/2},$$

$$L\{l_1(t)\} = \frac{p-1/2}{(p+1/2)^2} = L\{l_0(t)\} \cdot \frac{p-1/2}{p+1/2},$$

$$L\{l_2(t)\} = \frac{(p-1/2)^2}{(p+1/2)^3} = L\{l_1(t)\} \cdot \frac{p-1/2}{p+1/2}. \quad (6.60)$$

Наведена на рис. 6.18. структурна схема неперервного градієнтного алгоритму настройки параметрів реалізує алгоритм:

$$\frac{da_i}{dt} = -\lambda_i \overline{\text{grad}_i \varepsilon^2} = -\lambda_i \overline{\varepsilon(t) y_i(t)}, \quad i=1,2,3., \quad (6.61)$$

Застосування паралельної моделі для оцінювання призводить до необхідності побудови додаткових допоміжних операторів або формуючих «білий шум» фільтрів, що ускладнює на практиці структурну реалізацію метода. Метод з послідовно-паралельною моделлю частково позбавлений вказаних вище недоліків.

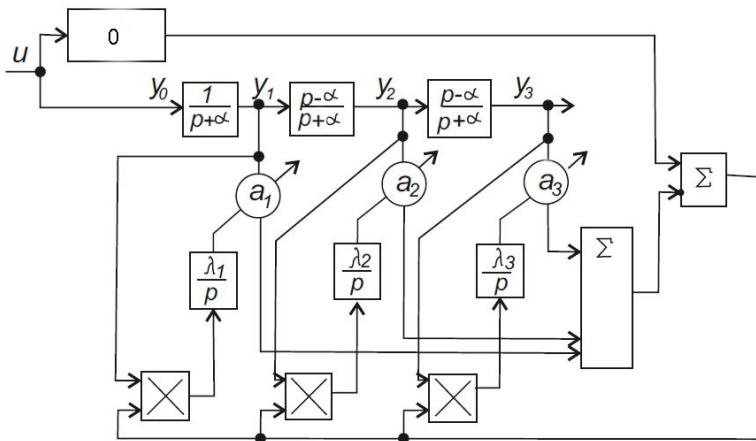


Рис. 6.18. Градієнтний метод оцінювання параметрів з ортогональною паралельною моделлю:

$a_i$  – параметри, які налаштовуються;  $y_i$  ( $i=1,2,3,\dots$ ) – виходи окремих ланок фільтра Лагерра,  $U(t)$  – «білий шум»,

### 6.2.3. Градієнтний метод з послідовно-паралельною моделлю

Розглянемо алгоритм настройки послідовно-паралельної моделі. Оператори моделей  $M_1$  і  $M_2$  будуються разом з низкочастотним фільтром  $F$ , що дозволяє здійснити перешкодостійку реалізацію похідних (рис.6.19).

Особливістю побудови такої моделі є те, що функції чутливості беруться безпосередньо із відповідних точок моделі. Звідси, для реалізації алгоритму ідентифікації об'єкта моделлю (6.52) із застосуванням послідовно-паралельної моделі відпадає необхідність у побудові спеціальних допоміжних операторі (6.58). Але, на відміну від ортогональних навіть при «білому шумі» на вході взаємозв'язок параметрів залишається.

Покажемо, як отримувати функції чутливості та як проявляється взаємозв'язок параметрів. Визначимо різницю  $\varepsilon(t)$  між виходом першої  $M_1$  і другої  $M_2$  моделі:

$$\varepsilon(t) = Y_{M_2}(t) - Y_{M_1}(t) = (W_0 W_{M_1} - W_{M_2})U(t), \quad (6.62)$$

де оператори моделей  $W_{M_1}(\delta) = \frac{\sum_{i=0}^n b_i \delta^i}{F(p)}$ ,

$$W_{M_2}(\delta) = \frac{\sum_{j=0}^m a_j \delta^j}{F(\delta)}.$$

З урахуванням лінійності по параметрам  $b_i, a_i$  моделей  $M_1, M_2$ , функції чутливості запишуться наступними виразами:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon(t)}{\partial a_k} &= \frac{W_0 p^k}{F(p)} U(t), k = 0, 1, 2, \dots, n; \\ \frac{\partial \varepsilon(t)}{\partial b_k} &= \frac{p^k}{F(p)} U(t), r = 0, 1, 2, \dots, m. \end{aligned} \quad (6.63)$$

Підставляючи  $\partial \varepsilon(t) / \partial a_k$  і  $\partial \varepsilon(t) / \partial b_r$  у вираз для помилки  $\varepsilon(t)$ , отримаємо :

$$\varepsilon(t) = \sum_{k=0}^n a_k \frac{\partial \varepsilon(t)}{\partial a_k} - \sum_{r=0}^m b_r \frac{\partial \varepsilon(t)}{\partial b_r}. \quad (6.64)$$

З виразів видно, сигнал  $\varepsilon(t)$  різниці пропорційний функціям чутливості. На рисунку 6.19 подано формувач помилки і, для прикладу, показано два контури самонастройки.

Градiєнтний алгоритм настройки параметрів :

$$\begin{aligned} \frac{d\beta_i}{dt} &= -\lambda_i \sum_j C_j z_j(t) z_i(t), \quad C_i(t_0) = C_i(0), \\ i &= 1, 2, \dots, n, n+1, \dots, n+m+1 \end{aligned} \quad (6.65)$$

де  $C = \{b_0, b_1, \dots, b_m, a_1, \dots, a_n\}$  – вектор налаштовуваних параметрів;  $C_i(0)$  – початкові значення параметрів моделі;  $z$  – вектор функцій чутливості;  $\lambda_i$  ( $i=0, 1, 2, \dots, m+n+1$ ) – коефіцієнти посилення  $i$ -го контуру само-налаштування моделі (КСН). Позначимо

$$\dot{a}_{ij} = -\lambda_i z_i(t) z_j(t). \quad (6.66)$$

Тоді градiєнтний алгоритм само налаштування може бути представленоу матричному вигляді системою диференційних рівнянь :

$$\dot{C} = AC, C(0) = C_0. \quad (6.67)$$

Оскільки це диференційне рівняння лінійної автономної системи, то умова стійкості визначається коренями характеристичного рівняння.

$$\det(pE - A) = |pE - A| = \begin{vmatrix} p - a_{11} & \dots & -a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ -a_{1n} & \dots & p - a_{nn} \end{vmatrix}, \quad (6.68)$$

де:  $E$  – одинична матриця.

Розкриваючи визначник, отримуємо рівняння  $n$ -го порядку, з коефіцієнтами  $a_i (i = \overline{1, n})$ , які згідно (6.66) залежать від часу, являючи добуток  $\lambda_i$  на  $z_i(t)$  і  $z_j(t)$ . Ефект усереднення досягається інерційністю процесу (6.65): чим менше  $\lambda$ , тим інерційніше процес.

$$p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n = 0, \quad (6.69)$$

Для стійкості процесу (6.67) само-налаштування необхідно, щоб усі корені характеристичного рівняння мали від'ємні дійсні частини.

Недоліком градієнтних алгоритмів є залежність часу само-налаштування від коефіцієнтів посилення  $\lambda_i$ , (рис.6.20). Для малого  $\lambda$  рух у точку екстремуму надто повільний. Збільшення  $\lambda$  призводить до росту коливань контуру само-налаштування і час настройки також зростає. Тому існує оптимальне  $\lambda^*$ . Окрім того зі збільшенням числа налаштовуваних параметрів збіжність процесу погіршується.

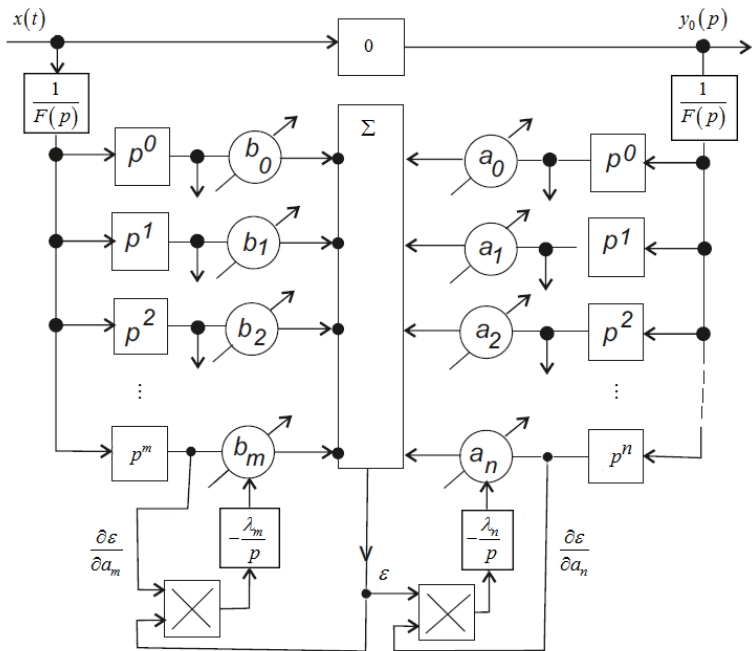


Рис.6.19. Схема практичної реалізації градієнтного методу налаштування параметрів з послідовно-паралельною моделлю

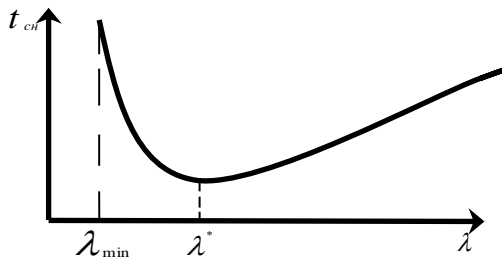


Рис.6.20. Залежність часу само настрійки від коефіцієнта посилення КСН

Наступний метод значно позбавлений вказаних недоліків.

### 6.2.4. Дослідження методу трьох моделей

Припускається, що для досліджуваного об'єкта відображення  $f^*(x^*, \beta^*, t)$  де вхід  $x(t)$ , вихід  $y(t)$ , може бути з малою похибкою представлено паралельною  $f(x, \hat{\beta}, t)$ , послідовно паралельною або композицією з паралельної і лінійної (по вектору параметрів  $\beta'''$ ) додаткової моделі:

$$y(t) = (\beta''')^T \varphi^T(x, \beta, t), \quad (6.69)$$

де

$$(\beta''')^T = [\beta''_1, \dots, \beta''_r]$$

$$\varphi^T(\cdot) = [\varphi_1(x, \beta, t), \dots, \varphi_r(x, \beta, t)]$$

Вважається, що сигнал  $x(t)$  вимірюється досить точно. Сигнал на виході складається з точного значення  $y^*(t)$  випадкової складової поміхи  $\tilde{\varepsilon}(t)$  і складової  $\varepsilon^*(t)$  - помилки, пов'язаної з неточністю структури моделі.

$$y(t) = y^*(t) + \tilde{\varepsilon}(t) + \varepsilon^*(t) \quad (6.70)$$

Апріорна інформація про  $\beta^*$  відсутня, тому функціонал  $J(\varepsilon)$  у загальному випадку є багато екстремальною функцією відхилень  $\Delta\beta$ . Необхідно отримати незміщену оцінку  $\beta$  коефіцієнтів моделі :

$$\hat{y}(t) = f\left(x^*(t), \hat{\beta}, t\right), \quad (6.71)$$

для якої

$$\hat{\beta} \in G_{\beta}, \left\| y^*(t) - \hat{y}(t) \right\|^2 \leq \delta J(\delta\beta), \quad (6.72)$$

де  $\delta J(\delta\beta)$  - допустима похибка  $\delta J$ , що відповідає області невизначенності  $\delta\beta$  оцінки  $\hat{\beta}$ .

Виміри проводять у дискретні моменти часу  $t_k = k\Delta t$  ( або просто  $k$ ), значення  $x^*(k)$  точне,  $y(k) = y^*(k) + \xi(k) + \varepsilon^*(k)$ , початкові умови нульові. Алгоритм оцінювання  $\hat{\beta}$  у для моделі (6.71) полягає у наступному.

*Крок 1.* Задамо у виразу (6.71):

$$f(x, \beta, t) = x, \quad (6.73)$$

що відповідає одиничній паралельній моделі. Апроксимуємо вихідний сигнал об'єкта  $y(k)$ ,  $k = \overline{1, M}$  вихідним сигналом моделі (6.69), додаткової до одиничної моделі (6.71).

У якості міри близькості  $y(k)$  і  $\hat{y}_1(k)$  приймемо, наприклад, середній по  $M$  дискретам квадрат похибки

$$\varepsilon(k) = y(k) - \hat{y}_1(k), \quad (6.74)$$

де на цьому кроці

$$\hat{y}_1(k) = (\beta^m)^T \varphi(x). \quad (6.75)$$

З умови мінімуму  $\sum_{k=1}^M \varepsilon^2(k)$  отримаємо систему нормальних рівнянь:

$$A_1 \beta^m = B_1, \quad (6.76)$$

де

$$A_1 = \varphi^T \varphi = \varphi^T \begin{bmatrix} \varphi_1(1) & \varphi_1(2) & \dots & \varphi_1(M) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_r(1) & \varphi_r(2) & \dots & \varphi_r(M) \end{bmatrix}, \quad (6.77)$$

$$(\beta^m)^T = [\beta_1^m, \dots, \beta_r^m];$$

$$B_1 = \varphi^T y, \quad y^T = (y(1), \dots, y(M)).$$



де  $\varphi_i(k)$  – скорочене позначення для  $\varphi_i(x(k))$ .

З системи (6.76) знайдемо оцінку вектора  $\beta''''$ :

$$\beta'''' = A_1^{-1} B_1. \quad (6.78)$$

Підставивши (6.78) в (6.75), отримаємо оцінку  $\hat{y}_1(k)$  першого наближення.

*Крок 2.* Розглядаючи оцінку  $\hat{y}_1(k)$  як згладжений сигнал  $y(k)$  об'єкта, поставимо відображенню (6.75) у відповідність паралельну моделлю з вектором  $\beta$ , параметри якого одержимо через вектори  $\beta'$ ,  $\beta''$  послідовно-паралельної моделі. Для цього з умови мінімуму середнього квадрата  $\sum_{k=1}^M \varepsilon_0^2(k)$  узагальненої помилки  $\varepsilon_0$  послідовно-паралельної моделі,

$$\varepsilon_0 = f_1^T(x, \hat{y}, \beta' - f_2^T(x, \hat{y}_1, t)\beta''), \quad (6.79)$$

отримаємо систему нормальних рівнянь

$$A_2 \hat{\beta}^T = B_2, \quad (6.80)$$

де  $\hat{\beta}^T = (\beta'^T, \beta''^T)$ ,

$$A_2 = F^T F; F^T = \begin{bmatrix} F_1(1) & F_1(2) & \dots & F_1(M) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ F_p(1) & F_p(2) & \dots & F_p(M) \end{bmatrix}, p = n + m;$$

$$F_i(k) = \begin{cases} f_{1i}, & i = \overline{1-m}, \\ f_{2, i-m}, & i = \overline{m+1, n+m} \end{cases}$$

Із виразу (6.80) визначимо оцінку  $\hat{\beta}$ :

$$\hat{\beta} = A_2^{-1} B_2, \quad (6.81)$$

і підставимо її в модель (6.71). В результаті отримаємо оцінку  $\hat{y}_2$  сигналу  $y$  в другому наближенні і оцінку  $\hat{\beta}$  параметрів паралельної моделі в першому приближенні.

*Крок 3.* Повтор кроку 1, де в якості входу для моделі (6.75) береться вихід  $\hat{y}_2(k)$  паралельної моделі, отриманої на кроці 2. На виході моделі отримаємо більш точну оцінку  $\hat{y}_3$  сигналу  $y$ .

*Крок 4.* Повтор кроку 2, але уже для більш точної апроксимації  $\hat{y}_3$ . Далі кроки повторюються до виконання умови останови, якою може бути величина  $\delta$  відносно зміни модуля норми вектора  $\hat{\beta}$  на  $(l+1)$ -му і  $(l)$ -му кроках:

$$\delta = \left| \frac{\|\hat{\beta}(l+1)\|}{\|\hat{\beta}(l)\|} - 1 \right|. \quad (6.82)$$

Так як для оцінювання  $\beta^{***}$  і  $\hat{\beta}$  використовувались тільки квадратичні функціонали (в силу того, що  $\beta^{***}$  і  $\hat{\beta}^T = [\hat{\beta}^T, \hat{\beta}^{**T}]$  входять лінійно в  $\varepsilon$  і  $\varepsilon_0$  відповідно), то величина  $\delta$  зменшується по мірі росту  $l$ . Якщо структура моделі достатня для опису відображення в об'єкті  $x^*$  в  $y^*$  об'єкті, то з ростом  $l$  додаткова модель вироджується в одиничну, а паралельна – з одиничної в модель об'єкта. Швидкість сходження оцінок  $\hat{\beta}$  до  $\beta^*$  залежить від того, наскільки точно додаткова модель апроксимує сигнал  $y$  (особливо на кроці 1, коли входом для неї служить сигналом  $x$ ). Для покращення апроксимаційних властивостей додаткову модель можна будувати по ноніусному принципу (Розділ 6.2.4) з адаптацією структури операторів; зручні також ортогональні моделі.

На рис.6.21 представлено схему ідентифікації за методом трьох моделей. Система має три типи моделей і два блоки  $\beta^{***}(\varphi, \varepsilon)$  і  $\beta(f, \varepsilon_0)$  оцінювання параметрів.

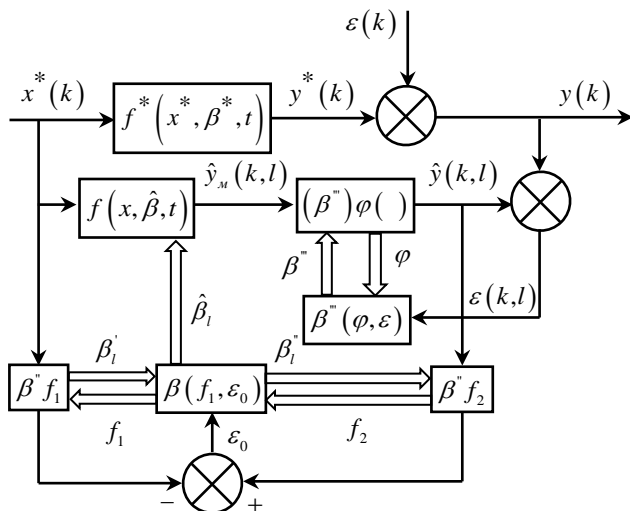


Рис.6.21 . Схема системи ідентифікації по методу трьох моделей

Окрім циклічного алгоритму уточнення параметрів можливим є рекурентний. При рекурентному алгоритмі блоки  $\beta^{***}(\varphi, \varepsilon)$  і  $\hat{\beta}(f, \varepsilon_0)$  реалізують градієнтне строїку параметрів, причому з умов стійкості алгоритм блоку  $\beta^{***}(\varphi, \varepsilon)$  повинен бути більш швидкодіючим. В надзвичайно простому випадку оператором  $(\beta^{***})^T \varphi(t)$  допоміжної моделі є скаляр  $\beta^{***}$ , що настроюється за градієнтним алгоритмом:

$$d\Delta \beta^{***}/dt = -\lambda \text{grad}(\varepsilon t) = -\lambda 2\varepsilon(t) \hat{y}_1(t), \quad (6.83)$$

$$\varepsilon(t) = \tilde{\varepsilon}(t) + \hat{y}_1(t) \Delta \beta^{***},$$

або

$$d\Delta \beta^{***}/dt = -2\lambda [\tilde{\varepsilon}(t) \hat{y}_1(t) + \Delta \beta^{***} \hat{y}_1^2(t)].$$

Така допоміжна модель представляє собою стохастичну систему з параметрично-зворотнім зв'язком

$$d\Delta \beta^{***}/dt + 2\lambda \hat{y}_1^2(t) \Delta \beta^{***} = -2\lambda \tilde{\varepsilon}(t) \hat{y}_1(t), \quad (6.84)$$

для якої за відповідної нестационарності  $\hat{\beta}(t)$  і перешкоди  $\tilde{\epsilon}(t)$  існує оптимальне значення  $\lambda$ , коли середній квадрат  $\bar{\epsilon}^2$  помилки (6.74) є мінімальним і близьким до  $\tilde{\epsilon}^2$ , тобто до квадрата поміхи.

Додаткова модель безперервно доповнює вихід  $\hat{y}(k)$  паралельної моделі до істинного виходу  $y^*(k)$  об'єкта. Тоді на послідовно-паралельній моделі по сигналах  $x(k)$  і  $\hat{y}(k)=y^*(k)$  буде одержано значення вектора  $\hat{\beta}$ , близьке до істинного  $\beta^*$ . Найпростіша допоміжна модель може застосовуватися лиш для уточнення вектора  $\hat{\beta}$  в паралельній моделі. При ідентифікації стаціонарних систем для  $\lambda \rightarrow \infty$  справедливою є рівність  $\hat{y}(k)=y(k)$ , тобто послідовно-паралельна модель виходить ніби підключеною до об'єкта і оцінка  $\hat{\beta}$  буде зміщеною. Якщо в міру настройки паралельної моделі значення  $\lambda$  зменшувати, то оцінка  $\hat{\beta}$  прямує до  $\beta^*$ . Метод дозволяє одержати асимптотично не зміщені оцінки  $\hat{\beta}$  невідомого вектора  $\beta^*$ , який нелінійно входить в оператор  $f(x, \hat{\beta}, t)$  паралельної моделі.

**Приклад 6.2.** Об'єкт з чистим запізненням представлено моделлю.

$$y^*(t) = \frac{1}{\left(1 + \sum_{i=1}^n a_i \cdot p^i\right)} \cdot x(t), \quad x(t) = x_0 \sin \omega t \quad (p = d/dt, \alpha_i = \tau^i / i!). \quad (6.85)$$

Необхідно по  $y(t)=y^*(t)+\tilde{\epsilon}(t)$ ,  $\tilde{\epsilon}(t)=\sum_{j=1}^{\infty} a_m \delta(t-t_j)$ , де  $\delta(\cdot)$  - функція Дірака,  $t_j$  - випадкові значення із середнім періодом  $T_{cp}$  (тобто  $M(t_j - t_{j-1}) = T_{cp}$ ) і  $x(t)$  оцінити нелінійно вхідний в рівнянні об'єкта параметр  $\tau$ , користуючись не трьома, а двома моделями.

Так як об'єкт – це ланка з чистим запізненням  $\tau$ , то для синусоїдного сигналу  $x(t)$  область унімодальності середнього квадрата помилки  $\epsilon(t) = y(t) - \hat{y}_1(t)$ , як функції  $\Delta t$ , буде обмежена величиною  $\pm \max \Delta t = \pm \pi / \omega$ ,  $\Delta t = \hat{\tau} - \tau$ . Якщо скористатися методом двох моделей, тобто, безпосередньо до об'єкта

застосувати послідовно-паралельну модель з послідовним  $f_1=W_1(p)$  і паралельним  $f_2=W_2(p)$  операторами відповідно:

$$W_1(p) = \frac{1 + \sum_{i=1}^n a_i p^i}{1 + T_p}; \quad W_2(p) = \frac{1}{1 + T_p},$$

то

$$\begin{aligned} \varepsilon_0(t) &= W_2(p)[y^*(t) + \tilde{\varepsilon}(t)] - \\ -W_1(p)x(t) &\approx \Delta\tau \frac{p}{T_p + 1} x(t + \Delta\tau) + \tilde{\tau}(t + \hat{\tau}) / T_p + 1. \end{aligned} \quad (6.86)$$

Тоді математичне очікування  $M\{\cdot\}$  оцінки  $\hat{\tau}$ , яке відповідає умові

$$M \frac{\delta \bar{\varepsilon}_0^2}{\delta \hat{\tau}} = M \left\{ \varepsilon_0(t) \frac{\partial \varepsilon_0(t)}{\partial \hat{\tau}} \right\} = \Delta\tau \frac{\omega^2}{T^2 \omega^2 + 1} \frac{x_0^2}{2} - \frac{a_{ш}^2}{2T^2 T_{cp}} = 0, \quad (6.88)$$

буде зміщено на величину для  $\omega T > 1$ , яка дорівнює відношенню перешкода-сигнал:

$$\Delta\tau = \frac{a_{ш}^2}{T_{cp} x_0^2} \frac{T\omega^2 + 1}{T^2 \omega^2} \approx \frac{a_{ш}^2}{T_{cp}} / x_0^2 \Delta\tau =, \quad (6.89)$$

де  $T$ -стала часу фільтра.

Якщо  $|\Delta\tau| > \pi/\omega$ , то оцінка  $\hat{\tau}$  по паралельній моделі з початковим значенням  $\hat{\tau}(0)$ , яке взяте з послідовно-паралельної, не зійдеться до  $\tau$ , а приведе до одного з хибних значень  $\tau \pm \frac{2\pi}{\omega} k$ ,  $k=1,2,\dots$ , тобто, як бачимо застосування методу двох моделей не дало бажаного результату.

**Приклад 6.3.** За вхідним сигналом  $u(t)$  об'єкта, який представляє собою одиничну ступеньку, і вихідним сигналом  $x(t)$  потрібно визначити три коефіцієнта  $\hat{\beta}_i (i=\overline{1,3})$  диференціального рівняння моделі об'єкта, наприклад, моделі повздовжнього коротко-періодичного руху літака:

$$\ddot{x}^*(t) + \hat{\beta}_2 \dot{x}^*(t) + \hat{\beta}_1 x^*(t) = \hat{\beta}_3 U(t), \quad (6.90)$$

де  $x(t)$  – відхилення кутової швидкості,  $U(t)$  – відхилення руля висоти.

Сигнали  $U(t)$  і  $x^*(t)$  виміряні в дискретні моменти часу  $k$  з кроком  $\Delta t=0,05\text{с}$ . Вимірювання  $x(k)$  ( $k=1,100$  сигналу  $x^*(k)$ ) зашумлені адаптивною перешкодою  $N(k)$  типу гаусового білого шуму з нульовим середнім значенням. Задачу будемо вирішувати методом послідовно-паралельної моделі і методом трьох моделей. Фільтри послідовно-паралельної моделі задамо оператором  $W_\phi(p)=1/(p^3+5p^2+6p+7)$ , який значною мірою згладжує перешкоду  $N(t)$ .

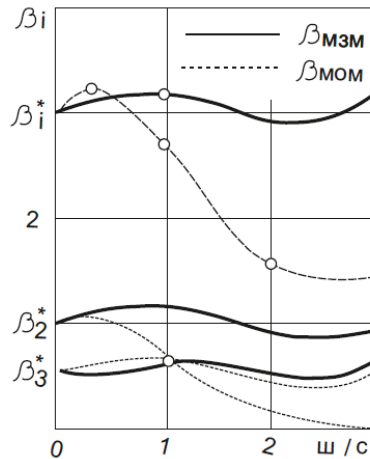


Рис.6.22. Залежність значень оцінок для методів узагальненої послідовно-паралельної моделі (ППМ) і трьох моделей (МЗМ) з відношення шум-сигнал

Однак, за великих рівнів шуму оцінки  $\hat{\beta}_1$  і  $\hat{\beta}_2$  суттєво занижені, оцінка  $\hat{\beta}_3$  для обох методів близька до істинної, так як сигнал  $u(t)$  вимірюється точно. Деяке відхилення її від точного значення викликане тільки не ортогональністю матриці МНК. На рис.6.22 і в табл. 6.2 наведено залежності значень оцінок  $\hat{\beta}_i$  за методом послідовно-паралельної моделі (ППМ) (штрихові лінії) і по методу трьох моделей (МЗМ) (суцільні лінії) від відношення середньоквадратичних значень шуму

$N(k)$  і сигналу  $x^*(k)$  (ш/с). Як бачимо, в методі трьох моделей шум в  $y(t)$  не призводить до зміщення оцінок. Оцінки гарантовано сходяться за дві ітерації. Тоді як в методі ППМ оцінки  $\hat{\beta}_1$  і  $\hat{\beta}_2$  зі зростанням відношення м/с суттєво зменшуються, як показано в розділі 6, вираз (6.8).

Таблиця 6.2

Залежності від відношення «шум-сигнал» значень оцінок  $\hat{\beta}_i$  для методу ППМ та МЗМ

$\hat{\beta}$	$\hat{\beta}_1$		$\hat{\beta}_2$		$\hat{\beta}_3$	
m/c	ППМ	МЗМ	ППМ	МЗМ	ППМ	МЗМ
0	3	3	1	1	0,5	0,5
0,1	3,06	3,05	1,03	1,02	0,504	0,504
0,2	3,11	3,08	1,04	1,03	0,508	0,507
0,5	3,15	3,10	1,01	1,1	0,517	0,516
1	2,69	3,15	0,71	1,14	0,6	0,52
2	1,56	2,82	0,16	0,96	0,49	0,48
3	1,39	3,22	0,02	0,95	0,53	0,58

### 6.2.5. Дослідження ноніусних моделей

Ноніусні моделі займають проміжне місце між ортогональними моделями та моделями з жорстко заданою структурою. Ноніусною динамічною моделлю реальної системи, називають динамічну систему, в якій сімейство функції, яке відображає вхід  $u(t)$  і вихід  $y(t)$ , реалізується у вигляді композиції операторів  $W_{ki}(k=1,2;i=0,1,2,\dots)$  з адаптацією закону композиції і чергування в часі процесів оцінювання параметрів цих операторів. Розрізняють паралельні ( $k=1$ ), послідовне (інверсні) ( $k=2$ ), послідовно-паралельне ( $k=1,2$ ) підключення моделі до об'єкта, з послідовним, паралельним та змішаним законам композиції операторів.

**Приклад 6.4.** Розглянемо ноніусну модель з послідовним включенням операторів  $W_{i1}$ , підключених паралельно до

об'єкта  $\Sigma_\infty$ , який має невідомі нестационарні внутрішні та зовнішні характеристики, наприклад, літальний апарат. Необхідно в процесі функціонування об'єкта (в реальному часі) вести формування моделі відображення  $W(\beta, p)$  сигналу  $u(t)$  в  $y(t)$  для цілей прогнозування  $y(t)$  і відомого  $u(t)$  (задача прогнозування) або корекції  $u(t)$  за заданого  $y^*(t)$  (задача управління). Якщо оператор  $W(\beta, p)$  визначено, то для задачі прогнозування траєкторії ЛА

$$y(t) = W(\beta, p)u(t), \quad p = d/dt, \quad (6.91)$$

для задачі управління

$$u(t) = W^{-1}(\beta, p)y^*(t), \quad (6.92)$$

де  $\widehat{W}^{-1}(\beta, p)$  - фізичний реалізуємо оператор, близький до ідеального  $W^{-1}(\beta, p)$ . Так якщо

$$W(\beta, p) = \frac{\beta_1 p + \beta_0}{\beta^2 + \beta_2 p + \beta_3}, \quad (6.93)$$

то

$$W^{-1}(\beta, p) = \frac{1}{\delta p + 1} W^{-1}(\beta, p), \quad (6.94)$$

де  $\delta$  - малий параметр такий, що для будь-якої частоти  $\omega$  в смузі пропускання об'єкта  $\omega^2 \delta^2 < 1$ .

Тоді

$$U(t) = \frac{1}{\delta p + 1} W^{-1}(\beta, p)y^*(t), \quad (6.95)$$

а різниця

$$\varepsilon(t) = \hat{y}^*(t) - y^*(t) = \frac{1}{\delta p + 1} y^*(t) - y^*(t) = -\frac{\delta p}{\delta p + 1} y^*(t), \quad (6.96)$$

між дійсним значенням  $\hat{y}^*(t)$ , отриманим на вході моделі і бажаним  $y^*(t)$ , буде несуттєвою.

Для паралельної ноніусної моделі з послідовно ввімкненими операторами :

$$W(\beta, p) = \prod_{i=0}^r W_i(\beta_i, p). \quad (6.97)$$



Якщо є інформація про інерційність, коливання або нейтральність, то оператор  $W_0(\beta_0, p)$  задається відповідно в вигляді

$$W_0(\beta_0, p) = \frac{\beta_{01}}{p + \beta_{02}}; \quad W_0(p, \beta_0) = \frac{\beta_{01}}{p^2 + \beta_{02}p + \beta_{03}}; \quad W_0 = \frac{\beta_0}{p}. \quad (6.98)$$

Наступні оператори по можливості беруть до уваги фізику процесу або задаються у вигляді :

$$W_i(p, \beta_i) = (\beta_{0i} + \beta_{1i}p) / (\beta_{2i} + p), \quad (6.99)$$

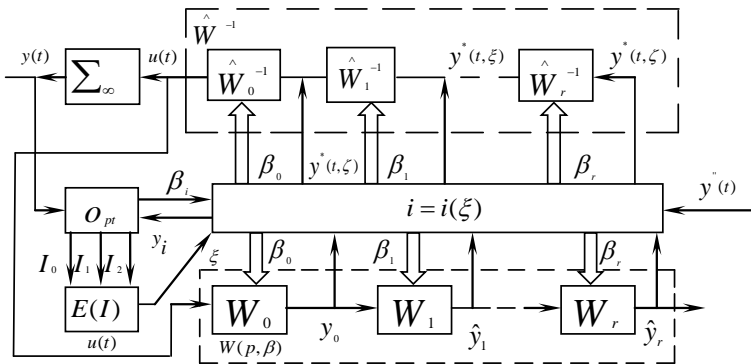


Рис.6.23 Схема нонінусного ідентифікатора в адаптивній системі управління

Кожен оператор містить два-три невідомі параметри. З ростом  $i$  при ідентифікації стаціонарного об'єкта, оператори  $W_i(p, \beta_i)$  прямують до одиничного оператора  $W(p, \beta_i) \equiv I$ . Настроюють оператори послідовно в часі. Спочатку настраюють вектор  $\beta_0$  оператора  $W_0(p, \beta_0)$ , потім  $W_1(p, \beta_1)$  і так до  $W_r(p, \beta_r)$ , якщо об'єкт за цей час залишався стаціонарним. Якщо характеристики об'єкта суттєво змінюються за час налаштування  $r$  операторів, то(в залежності від степеня не стаціонарності) встигає налаштуватися більше або менше число операторів  $W_i$ . Адаптивна система управління з ідентифікатором у вигляді паралельної нонінусної моделі (6.97) (рис.6.23) має набір налаштованих по  $\beta$  операторів  $W_i(p, \beta_i)$ , інверсних їм фізично реалізуємо операторів  $\hat{W}^{-1}(p, \beta_i, \delta)$ , комутатора  $i(\xi)$ , блоку Орт формування оцінок  $\beta_i$  по критерію  $J$ ,

логічного блоку  $\zeta(J)$  і реальної системи  $\Sigma_\infty$ . В момент початку роботи системи оператори  $W_i$  і  $\widehat{W}^{-1}$  дорівнюють одиниці, а  $W_0$  рівний одному з операторів (6.98). По команді  $\zeta$  з логічного блоку  $\zeta(J)$  комутаторам  $i(\xi)$  комутуються схеми формування помилки з індексом «0» :

$$\varepsilon(t) = \hat{y}(t) - y(t), \quad (6.100)$$

і закону настройки  $\beta_0$  блоком Opt. Блок  $\zeta(J)$  контролює значення критерію  $J_0$  і його зміни в часі. В якості  $J_i(i, 0, r)$  можуть братися згладжені фільтром  $W_\Phi(p)$  квадрати  $\varepsilon_i^2(t)$ :

$$J_i = W_\Phi(p) \varepsilon_i^2(t), \quad (6.101)$$

де  $W_\Phi(p) = 1/(Tp+1)$ ;  $p = d/dt$ ;  $T$  - стала часу фільтра.

Сигналом закінчення настройки  $i$ -го оператора і переходу до  $(i+1)$  може бути величина :

$$dJ_i / dt = pJ_i(t) / (Tp+1), \quad (6.102)$$

яка уявляє собою згладжене фільтром  $1/(Tp+1)$  значення похідної по часу від критерію  $J_i$ :

якщо

$$\left| \frac{dJ_i}{dt} \right| < \Delta_1, \quad (6.103)$$

(де  $\Delta_1$  - заданий поріг), то настройка оператора  $W_0$  припиняється і за командою  $\zeta$  блоку  $\zeta(J)$  комутатор  $i(\xi)$  комутує коло налаштування оператора  $W_i(p, \beta_i)$ , і так далі. Блок  $\zeta(J)$  в процесі налаштування операторів контролює також зміну  $\Delta J_j$  показника  $J_j$ ,  $0 \leq j \leq i$ :

$$\Delta J_j = J_j(t) - J_j(t_j), \quad (6.104)$$

де  $J_j(t_j)$  – значення  $J_j$  на момент  $t_j$  закінчення налаштування  $j$ -го оператора ( $t_j < t$ ). Поява  $\Delta J_j$  пов'язана з не стаціонарністю характеристик об'єкта.

Якщо  $\Delta J_j > \Delta_2$ , то налаштування  $i$ -го оператора  $W_i(\beta_i, p)$  припиняється і відновлюється підлаштування  $j$ -го оператора до виконання умови (6.103), потім  $(j+1)$ -го і так далі (до  $i$ -го). В задачі прогнозування достатньо спостерігати  $\hat{y}_i(t)$ . Для задачі управління оптимальна траєкторія  $u(t)$  отримується на виході інверсної, фізично реалізованої моделі  $W^{*-1}$ . Сигнал

$y^*(t)$  при цьому подається за допомогою комутатора  $i(\zeta)$  на вхід  $i$ -го, а при умові (6.103) – на вхід  $j$ -го інверсного оператора.

Зіставлення ноніусних та ортогональних моделей показує, що врахування фізичної природи об'єкта дозволяє суттєво зменшити число ноніусних операторів в порівнянні з числом ортогональних операторів. Ноніусні моделі можуть бути ефективні для опису коливальних та нестационарних об'єктів, які знаходяться в нестационарних умовах.

## Запитання

1. Визначити поняття алгоритмічних моделей.
2. Навести алгоритм градієнтного методу з паралельною моделлю.
3. Навести алгоритм градієнтного методу з послідовно-паралельною моделлю.
4. Навести алгоритм ідентифікації методу 3-х моделей.
5. Навести поняття конусних моделей.
6. Визначити поняття активної ідентифікації динамічних моделей.
7. Навести алгоритм визначення імпульсних перехідних функцій.
8. Навести визначення псевдовипадкової двійкової послідовності.
9. Навести властивості псевдовипадкових двійкових послідовностей.
10. Навести алгоритм отримання непараметричних оцінок.
11. Навести алгоритм отримання частотних характеристик.
12. Навести алгоритм отримання перехідних функцій об'єкта.
13. Навести алгоритм визначення коефіцієнтів рядів, які розкладаються передаточні функції.
14. Навести зв'язок коефіцієнтів ряду Маклорена передаточної функції з імпульсною перехідною функцією.

## Розділ 7

### ДОСЛІДЖЕННЯ МЕТОДІВ СТРУКТУРНО-ПАРАМЕТРИЧНОЇ ІДЕНТИФІКАЦІЇ НЕЛІНІЙНИХ ОБ'ЄКТІВ

#### 7.1. Оцінювання лінійної складової нелінійної моделі динаміки об'єктів

Динаміка збуреного руху об'єкту описується нелінійною динамічною моделлю. У такій ситуації основною похибкою оцінок параметрів лінійної складової моделі є їх зміщення внаслідок наближеності лінійної моделі, яка не враховує нелінійність характеристик об'єкту.

Розумним компромісом між лінійною моделлю об'єкту (справедливою для малих відхилень), і нелінійною (справедливою для більших відхилень), буде модель об'єкту, представлена першими і другими членами розкладання нелінійної моделі в ряд Тейлора відносно базового режиму.

##### *7.1.1. Оцінювання лінійної складової нелінійної моделі двигуна постійного струму*

Для моменту  $m$  електродвигуна постійного струму шляхом розкладання в обмежений другими похідними ряд Тейлора відносно моменту часу  $t_0$ , як функції струму якоря  $I_y$ , струму  $I_z$  збудження магнітного потоку і напруги  $U_y$ , отримаємо:

$$\begin{aligned}
m(t) = & m(t_0) + \left. \frac{\partial m}{\partial I_{\dot{y}}} \right|_{t_0} \Delta I_{\dot{y}}(t) + \left. \frac{\partial m}{\partial I_{\dot{\varsigma}}} \right|_{t_0} \Delta I_{\dot{\varsigma}}(t) + \left. \frac{\partial m}{\partial U_{\dot{y}}} \right|_{t_0} \Delta U_{\dot{y}}(t) + \\
& + \frac{1}{2} \left[ \left. \frac{\partial^2 m}{\partial I_{\dot{y}}^2} \right|_{t_0} (\Delta I_{\dot{y}}(t))^2 + \left. \frac{\partial^2 m}{\partial I_{\dot{\varsigma}}^2} \right|_{t_0} (\Delta I_{\dot{\varsigma}}(t))^2 + \left. \frac{\partial^2 m}{\partial U_{\dot{y}}^2} \right|_{t_0} (\Delta U_{\dot{y}}(t))^2 + \right. \\
& + \left. \left. \frac{\partial^2 m}{\partial I_{\dot{y}} \partial I_{\dot{\varsigma}}} \right|_{t_0} \Delta I_{\dot{y}}(t) \Delta I_{\dot{\varsigma}}(t) + \frac{\partial^2 m}{\partial I_{\dot{y}} \partial U_{\dot{y}}} \right|_{t_0} \Delta I_{\dot{y}}(t) \Delta U_{\dot{y}}(t) + \right. \\
& \left. + \frac{\partial^2 m}{\partial I_{\dot{\varsigma}} \partial U_{\dot{y}}} \right|_{t_0} \Delta I_{\dot{\varsigma}} \Delta U_{\dot{y}}(t) \left. \right].
\end{aligned} \tag{7.1}$$

Така модель враховує несиметрію режимів розгону і гальмування для обмежених відхилень. Але велика кількість її членів (дев'ять), серед яких тільки  $\Delta U_{\dot{y}}$  незалежна змінна, а інші, з урахуванням взаємозв'язку їх рівнянням двигуна, її наслідки; взаємна корельованість, обмеженість і наближеність вимірювань відхилень, обмеженість часу одного режиму, роблять завдання оцінювання всіх коефіцієнтів некоректним внаслідок фізичної неможливості забезпечення лінійної незалежності змінних і статистично достатньої довжини вибірок [55, 81].

Відповідно до мети експерименту треба визначити перші три лінійні члена розкладання (7.1), тобто лінійна модель в області малих відхилень від бажаного режиму роботи ДПС. Для точного їх оцінювання сплануємо натурний експеримент за наступною схемою. Нехай всі відхилення змінних рівняння (7.1) будуть близькі за формою:  $\Delta U_{\dot{y}}(t)$  — «сходінка»;  $\Delta I_{\dot{y}}(t)$ ,  $\Delta I_{\dot{\varsigma}}(t)$  — відповідно до рівнянь динаміки експоненціальні функції-реакції ДПС на вплив  $U_{\dot{y}}(t)$ .

Перепишемо вираз (7.1) у такому вигляді:

$$\begin{aligned}
& \Delta m(t) = \\
& = \left[ m^{I_{\bar{y}}} + \left( m^{I_{\bar{y}}^2} \Delta I_{\bar{y}}(t) + m^{I_{\bar{y}} I_{\zeta}} \Delta I_{\zeta}(t) + m^{I_{\bar{y}} U_{\bar{y}}} \Delta U_{\bar{y}}(t) \right) \right] \Delta I_{\bar{y}}(t) + \\
& + \left[ m^{I_{\zeta}} + \left( m^{I_{\zeta} I_{\bar{y}}} \Delta I_{\bar{y}}(t) + m^{I_{\zeta}^2} \Delta I_{\zeta}(t) + m^{I_{\zeta} U_{\bar{y}}} \Delta U_{\bar{y}}(t) \right) \right] \Delta I_{\zeta}(t) + \\
& + \left[ m^{U_{\bar{y}}} + \left( m^{U_{\bar{y}} I_{\bar{y}}} \Delta I_{\bar{y}}(t) + m^{U_{\bar{y}} I_{\zeta}} \Delta I_{\zeta}(t) + m^{U_{\bar{y}}^2} \Delta U_{\bar{y}}(t) \right) \right] \Delta U_{\bar{y}}(t),
\end{aligned} \tag{7.2}$$

де кожний коефіцієнт складається з шуканого  $i$  лінійної функції від  $\Delta I_{\bar{y}}$ ,  $\Delta I_{\zeta}$ ,  $\Delta U_{\bar{y}}$ . Якщо з певним досить грубим ступенем наближення у виразах для коефіцієнтів рівняння (7.2)  $\Delta I_{\bar{y}}(t)$ ,  $\Delta I_{\zeta}(t)$ ,  $\Delta U_{\bar{y}}(t)$  замінити відповідними ступінчастими функціями

$$\Delta I_{\bar{y}}(\infty)1(t), \Delta I_{\zeta}(\infty)1(t), \Delta U_{\bar{y}}(\infty)1(t),$$

де аргумент  $(\infty)$  відповідає часу появи сталого значення  $\Delta I_{\bar{y}}(t)$ ,  $\Delta I_{\zeta}(t)$ ,  $\Delta U_{\bar{y}}(t)$ , то, з точністю до цього наближення, рівняння (7.2) можна подати у наступному вигляді:

$$\Delta m_{z_1}(t) \cong a_1 \Delta I_{\zeta}(t) + a_2 \Delta I_{\bar{y}}(t) + b_1 \Delta U_{\bar{y}}(t), \tag{7.3}$$

де

$$\begin{aligned}
a_1 &= m^{I_{\zeta}} + \left[ m^{I_{\zeta} I_{\zeta}} \Delta I_{\zeta}(\infty) + m^{I_{\zeta}^2} \Delta I_{\zeta}(\infty) + m^{I_{\zeta} U_{\zeta}} \Delta U_{\zeta}(\infty) \right], \\
a_2 &= m^{I_{\bar{y}}} + \left[ m^{I_{\bar{y}}^2} \Delta I_{\bar{y}}(\infty) + m^{I_{\bar{y}} I_{\zeta}} \Delta I_{\zeta}(\infty) + m^{I_{\bar{y}} U_{\bar{y}}} \Delta U_{\bar{y}}(\infty) \right], \\
b_1 &= m^{U_{\bar{y}}} + \left[ m^{U_{\bar{y}} I_{\bar{y}}} \Delta I_{\bar{y}}(\infty) + m^{U_{\bar{y}} I_{\zeta}} \Delta I_{\zeta}(\infty) + m^{U_{\bar{y}}^2} \Delta U_{\bar{y}}(\infty) \right].
\end{aligned}$$

Чим ближче форма сигналів до «сходинки», тим точніше рівняння (7.3), але і тим гірше обумовленість інформаційної матриці МНК.

У силу взаємозв'язку змінних  $\Delta I_{\zeta}$ ,  $\Delta I_{\bar{y}}$ ,  $\Delta U_{\bar{y}}$  управляти «ступінчастістю» немає можливості.

Але змінюючи амплітуду  $\Delta U_{\bar{y}}(\infty)$ , ми можемо пропорційно змінювати зсув коефіцієнтів  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $b_1$  відносно шуканих часткових похідних  $m^{I_{\zeta}}$ ,  $m^{I_{\bar{y}}}$ ,  $m^{U_{\bar{y}}}$ .

Тоді, альтернативна до ортогональної, постановка експерименту буде полягати в подачі послідовності сходенок

напруги  $U_B$  різної амплітуди, визначення зміщених коефіцієнтів  $a_1, a_2, b_1$  рівняння (7.3) і ліквідації цього зміщення шляхом лінійної апроксимації коефіцієнтів  $a_1, a_2, b_1$  у функції  $\Delta U_B(\infty), \Delta I_B(\infty)$  або  $\Delta I_C(\infty)$ .

Наприклад:

$$\begin{aligned} a_{1i} &= m^{I_C} + k_1 \Delta I_{B_i}(\infty); \\ a_{2i} &= m^{I_B} + k_2 \Delta I_{B_i}(\infty); \\ b_{1i} &= m^{U_B} + k_3 \Delta I_{B_i}(\infty), \end{aligned} \quad (7.4)$$

де  $i$  — номери сходинок різної амплітуди.

У загальному випадку  $i$ -й рядок векторно-матричного рівняння руху ДПС, як об'єкту, що враховує лінійні та квадратичні члени розкладання має вигляд:

$$\Delta y_i = \Delta X A_i + \Delta X B_i \Delta X^T, \quad (7.5)$$

де

$$\begin{aligned} \Delta y_i^T &= [\Delta y_i(1), \Delta y_i(2), \dots, \Delta y_i(N)]; \quad A_i^T = [a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}]; \\ \Delta X &= \begin{bmatrix} \Delta x_1(1) & \Delta x_2(1) & \dots & \Delta x_n(1) \\ \Delta x_1(2) & \Delta x_2(2) & \dots & \Delta x_n(2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Delta x_1(N) & \Delta x_2(N) & \dots & \Delta x_n(N) \end{bmatrix}; \quad B_i = \begin{bmatrix} b_{i11} & b_{i12} & \dots & b_{i1n} \\ b_{i21} & b_{i22} & \dots & b_{i2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{in1} & b_{in2} & \dots & b_{inn} \end{bmatrix}; \end{aligned}$$

де  $N$  і  $n$  — відповідно числа дискретів за часом і розмірністю вектора  $A_i$ . Зміщена внаслідок неврахування квадратичної форми  $\Delta X B_i \Delta X^T$  МНК-оцінка  $\hat{A}_i$  дорівнює:

$$\hat{A}_i = (\Delta X^T \Delta X)^{-1} \Delta X^T \Delta y_i. \quad (7.6)$$

Її зсув буде пропорційний  $\Delta X^T$ :

$$\hat{A}_i - A_i = (\Delta X^T \Delta X)^{-1} \Delta X^T \Delta X B_i \Delta X^T = B_i \Delta X^T.$$

У загальному випадку модель (7.5) повинна бути розширена членами третього і вище порядку, і залежність зміщення оцінок від  $\Delta X$  буде носити нелінійний характер. Тому для ефективної реалізації цього підходу слід обмежити знизу і зверху діапазони зміни  $\Delta X$ . Для ілюстрації доцільності такого підходу розглянемо приклад.

### 7.1.2. Тестування методу

Точна нелінійна модель об'єкту

$$y(k) = \sum_{j=1}^3 x_j(k) + \sum_{j,q=1, j \geq q}^3 x_j(k)x_q(k) \quad (7.7)$$

з одиничними коефіцієнтами  $\beta$ , для чотирьох вибірок різної амплітуди  $X_{\max}$ , апроксимувалася її лінійною частиною за таких сигналів:

$$\begin{aligned} x_1(k) &= x_{\max}(l) \sin\left(\pi \frac{k-1}{M-1}\right), & x_2(k) &= x_{\max}(l) \sin\left(2\pi \frac{k-1}{M-1}\right), \\ x_3(k) &= x_{\max}(l) \cos\left(2\pi \frac{k-1}{M-1}\right), & k &= \overline{1, M}, l = \overline{1, 4}. \end{aligned} \quad (7.8)$$

Оцінки  $\hat{\beta}_j$  ( $j=1, 2, 3$ ) обчислювалися методом найменших квадратів. При цьому показник  $\varepsilon^T \varepsilon$  похибки  $\varepsilon$  апроксимації  $y(k)$  лінійною моделлю  $y(k) = \hat{\beta}_1 x_1(k) + \hat{\beta}_2 x_2(k) + \hat{\beta}_3 x_3(k)$  був на 2 порядки менше аналогічної норми  $\|\Delta y\|$ .

Тобто задача апроксимації лінійною моделлю вирішується достатньо якісно. Але коефіцієнти  $\hat{\beta}_i$  відносно істинних (одиничних) були істотно зміщені (рис. 7.1).



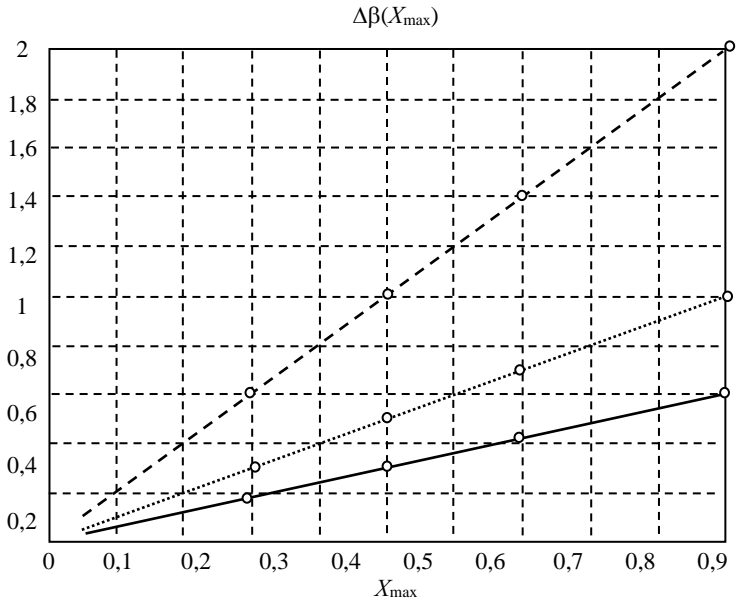


Рис. 7.1. Залежність відхилень  $\Delta\beta_i$  від  $x_{\max}$  :  
 - - - -  $\Delta\beta_1$ ; ······  $\Delta\beta_2$ ; —  $\Delta\beta_3$

Однак, як видно з рис. 7.1 лінійні регресійні залежності зсувів  $\Delta\beta_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ) від  $x_{\max}$  ( $l = 1, 2, 3, 4$ ), збігаються для нульової амплітуди  $x_{\max}$  до нуля; відповідно оцінки  $\hat{\beta}_j$  збігаються до істинних значень  $\beta_j = 1$ .

Якщо бралася повна модель (7.7), то з регуляризацією за Тихоновим МНК-оцінювання коефіцієнтів повної моделі (7.7) дало практично нульове значення показника  $\varepsilon^T \varepsilon$ . Регуляризований показник за Тихоновим:

$$I(\hat{\beta}, \alpha) = \left\| \Delta Y(y) - \Delta \hat{Y}(\hat{\beta}, t) \right\| + \alpha \left\| \hat{\beta} - \beta_{apr} \right\|, \quad (7.9)$$

де  $\alpha$  — параметр регуляризації;  $\beta_{apr}$  — апіорі заданий вектор параметрів.

Практично нульове значення показника  $\varepsilon^T \varepsilon$  досягається для самих різних значень  $\beta_{apr}$ , але оцінка  $\hat{\beta}$  близька до  $\beta_{apr}$ , а не до дійсної, яка дорівнює одиниці. Для більшої наочності розглянемо двовимірну задачу, де модель і об'єкт ізоморфні:

$$y(k) = \beta_1 x_1(k) + \beta_2 x_2(k). \quad (7.10)$$

Тут  $x_1(k)$  і  $x_2(k)$  сильно корельовані. Тому функціонал  $\varepsilon^T \varepsilon$  (пунктирні лінії на рис. 7.2) як функція  $\hat{\beta}$ , сильно випуклий для першого і третього квадранта площини  $(\beta_1, \beta_2)$  і слабо-випуклий («рівчак») для другого і четвертого квадрантів.

Регуляризуючий десятивідсотковий додатак  $\alpha \|\hat{\beta} - \beta_{apr}\|$ , ( $\alpha = 0,1$ ) функціонала (7.9) (круги на рис. 7.2) строго випуклий і, відповідно, робить випуклим функціонал (7.9).

Стрілками показано процес мінімізації функціонала (7.9), в результаті якого з апіорної оцінки  $\beta_{apr}$  отримана апостеріорна оцінка  $\hat{\beta}$  (табл. 7.1). Як впливає з табл. 7.1 і рис. 7.2, оцінки  $\hat{\beta}$  прямують в область близьку до дійсного значення, якщо  $\beta_{apr}$  лежить в першому і третьому квадранті (ближче або далі від  $\beta$  залежно від віддалення  $\beta_{apr}$  від  $\beta$ ). Якщо ж  $\beta_{apr}$  лежить в другому і четвертому квадрантах, оцінки, в результаті мінімізації регуляризованого функціонала (7.9), не відходять далеко від апіорних, знаходячи точку компромісу між зростаючою добавкою  $\alpha \|\hat{\beta} - \beta_{apr}\|$  і спадним значенням норми  $\|\Delta Y(t) - \Delta \hat{Y}(\beta, t)\|$ .

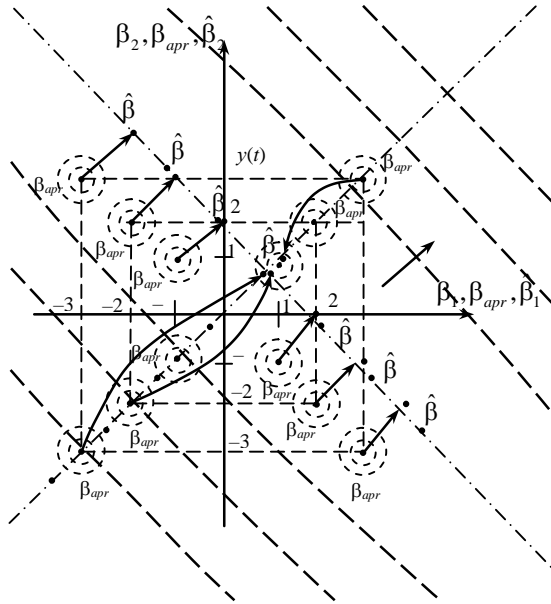


Рис. 7.2. Точне значення  $\beta$  і її оцінка  $\hat{\beta}$ , отримана зумови мінімуму функціонала (7.9) для різних апріорних значень  $\beta_{apr}$

При цьому відношення  $\varepsilon^T \varepsilon$  до  $\|\Delta Y(t)\|$  не перевищує 2,26 %. Тобто якість сигнальної ідентифікації достатньо висока, тоді як параметрична ідентифікація взагалі не коректна: у другому квадранті  $\hat{\beta}_2$  навіть йде від  $\beta_{apr2}$  в протилежний від  $\hat{\beta}_2$  бік, аналогічно  $\hat{\beta}_1$  в четвертому квадранті. У загальному випадку, для  $n$  змінних, функція  $J(\beta)$  може мати декілька «рівчаків» мінімальної або навіть нульової крутизни, що ще більше ускладнює завдання параметричної ідентифікації.

Таблиця 7.1

## Апріорні і апостеріорні значення параметрів

$\beta_{apr1}$	$\hat{\beta}_1$	$\beta_{apr2}$	$\hat{\beta}_2$	$\frac{\ \Delta Y(t) - \Delta \hat{Y}(t)\ }{\ \Delta Y(t)\ }$
1	1	1	1	0
-1	0,904	-1	0,904	0,0091
-2	0,857	-2	0,857	0,0091
-3	0,809	-3	0,809	0,036
2	1,048	2	1,048	0,0023
3	1,095	3	1,095	0,0091
1	1,9	-1	0,0015	0,0045
$\beta_{apr1}$	$\hat{\beta}_1$	$\beta_{apr2}$	$\hat{\beta}_2$	$\frac{\ \Delta Y(t) - \Delta \hat{Y}(t)\ }{\ \Delta Y(t)\ }$
2	2,85	-2	-0,95	0,011
3	3,8	-3	-1,9	0,0226
-1	0,0015	1	1,9	0,0045
-2	-0,95	2	2,85	0,011
-3	-1,9	3	3,8	0,0226

## 7.1.3. Реальний приклад

На рис. 7.3 наведено сім режимів зміни напруги  $I_B$  (0.02, 0.03, 0.04, 0.06, 0.07, 0.09, 0.1) якоря двигуна постійного струму (ДПС) і кутової швидкості  $\Omega(t)$ .

Повна динамічна модель залежності  $\Omega(t)$  від  $I_B(t)$  нелінійна. У кожному з семи режимів визначалися зміщені внаслідок наближеності моделі, оцінки коефіцієнтів  $\hat{\beta}_j$ ,  $j = 1, 2, 3$ . лінеаризованого диференційного рівняння.

За ними розраховувався статичний коефіцієнт  $K$  зв'язку  $I_B$  з  $\Omega$ . Далі коефіцієнт  $K$  апроксимувався поліномом другої степені залежністю у функції норми  $\|U_{я}\|$  (рис. 7.4):

$$K(\|I_B\|) = 621 - 3,11\|I_B\|. \quad (7.11)$$

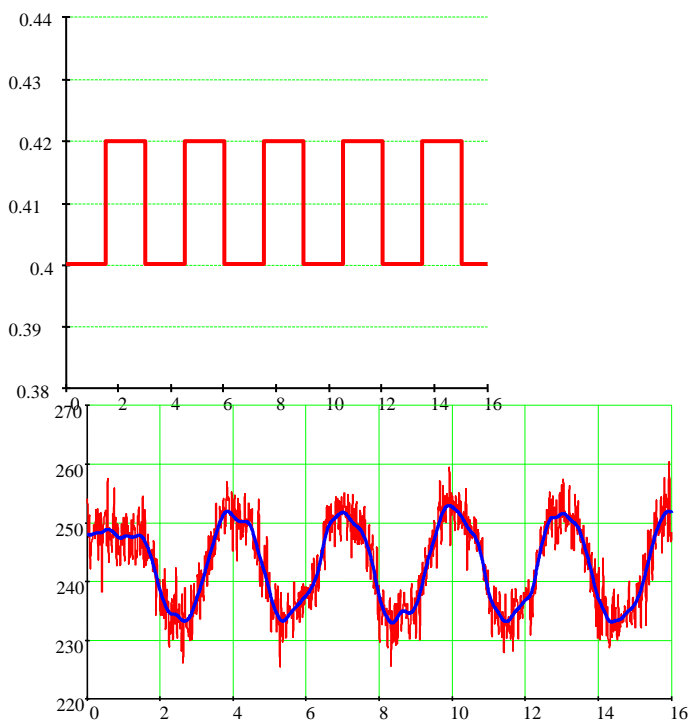


Рис. 7.3. Осцилограми режимів зміни напруги  $I_B$  і кутової швидкості  $\Omega$

Прогнозне в  $\|I_B\| = 0$  значення  $K(0)$  лежить в області дійсних значень незміщеної оцінки  $K = 619,5$  отриманої шляхом апроксимації поліномом другої степені залежності (7.11) і розрахунку її значення в точці нульових відхилень.

Просте усереднювання результатів дасть істотно зміщену (занижену) оцінку  $K = 603$ .

Таким чином, для коректності постановки задачі ідентифікації слід розрізняти **сигнальний** і **параметричний** підходи.

Спільність їх полягає в мінімізації  $\varepsilon^T \varepsilon$ , відмінність — в моделях (абстрактна і «фізично» адекватна) і вимогам до фу-

нкціонала  $\varepsilon^T \varepsilon$ , як функції оцінки  $\hat{\beta}$  (відповідно нестрога і строга випуклість).

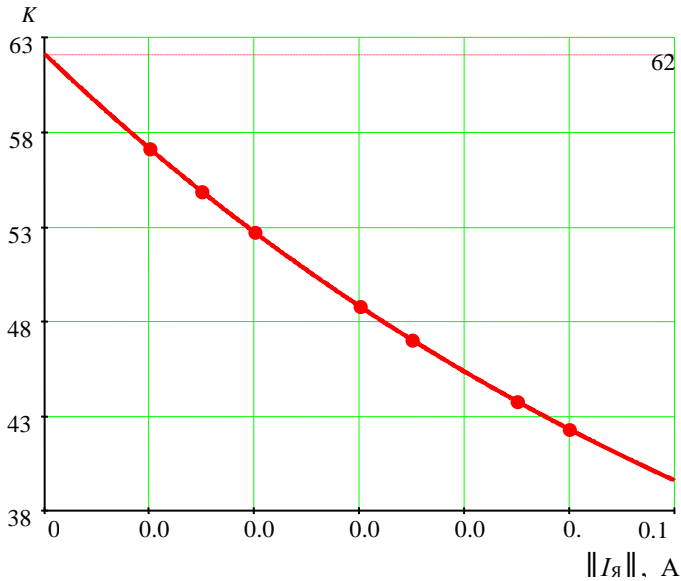


Рис. 7.4. Залежність  $K$  від  $\|U_{я}\|$  та її апроксимація

На жаль, в практиці іноді користуються для оцінювання параметрів **сигнальною** ідентифікацією, закладаючи в модель апріорі необ'єктивні наочні значення коефіцієнтів, і отримуючи в результаті оптимізації функціонала (7.9) неправильні необ'єктивні оцінки  $\hat{\beta}$ .

## 7.2. Структурно-параметрична ідентифікація багатовимірних нелінійних моделей об'єкту

Відсутність інформації про структуру нелінійної багатовимірної залежності  $y(x_1, \dots, x_n)$  не дає можливості застосувати методику оптимального планування експерименту.

Як правило, знімаються часткові перерізи  $y(x_j)$  за постійних  $x_j$  ( $j = \overline{1, n-1}, j \neq i$ ).

Скориставшись властивістю гладкості  $y(x)$ , подамо цю залежність кратним рядом Тейлора або його степеневим еквівалентом:

$$y(x) = \beta_0 + \sum_{i=1}^n \beta_i x_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \beta_{ij} x_i x_j + \dots \quad (7.12)$$

Для часткового  $k$ -го перерізу для  $x_i = \text{const}$ ,  $i = \overline{1, n-1}$ ,  $i \neq k$ , з (7.12) отримаємо одновимірну залежність

$$y(x_k) = \beta_{0k} + \beta_{1k} x_k + \beta_{2k} x_k^2 + \dots \quad (7.13)$$

Структура залежності (7.13) і параметри  $\beta_{0k}, \beta_{1k}, \dots$  знаходиться за МНК для різних, але фіксованих значень інших змінних. Далі коефіцієнти часткових моделей послідовно апроксимуються як функції цих змінних [69, 81, 84].

### 7.2.1. Нелінійна модель тягового зусилля двигуна АІ-20М

Розглянемо висотно-швидкісні характеристики двигуна АІ-20М (залежність тяги  $y$  від висоти  $x_1$ , швидкості  $x_2$  та керуючого впливу  $x_3$  (рис. 7.5).

Математична модель (неперервні лінії) отримана з локальних моделей перерізів  $y(x_k)$  при  $x_1 = c_i, x_2 = c_j$ :

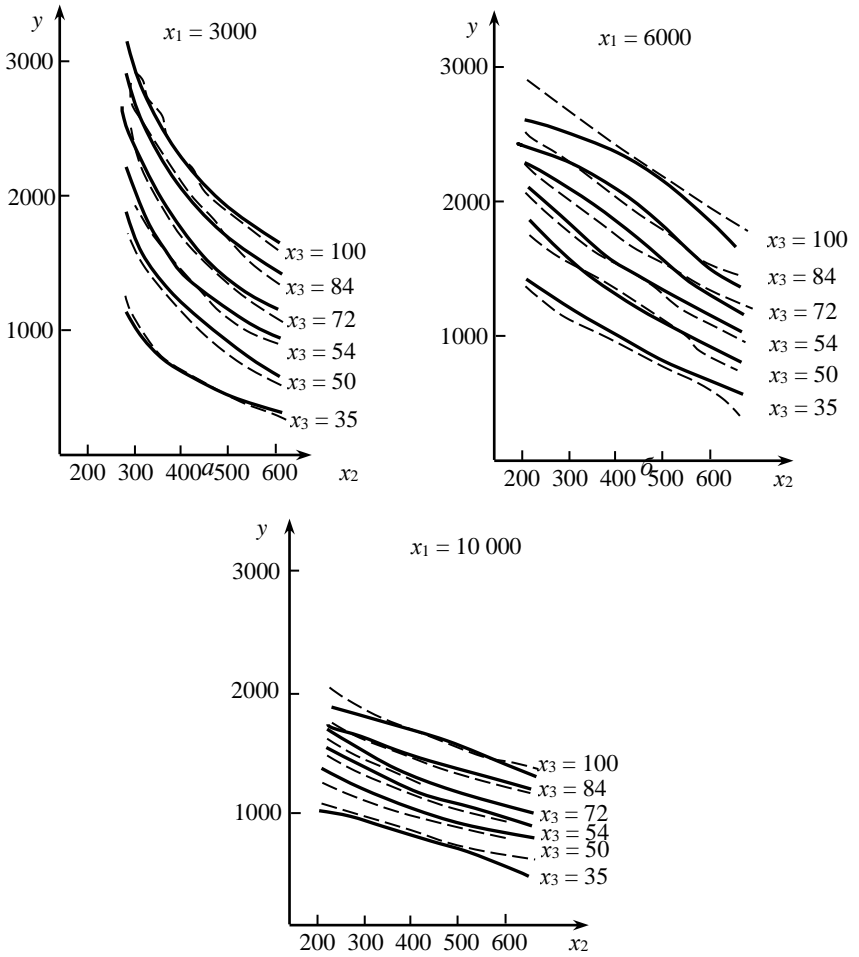
$$y(x_3) = \beta_0'' + \beta_1'' x_3 \quad (7.14)$$

шляхом МНК-апроксимації її коефіцієнтів лінійною моделлю по  $x_2$ :

$$\beta_0'' = \beta_{01}' x_2 + \beta_{02}', \quad \beta_1'' = \beta_{11}' x_2 + \beta_{12}' \quad (7.15)$$

і подальшої апроксимації статистично значущих коефіцієнтів моделей (7.15) квадратичною моделлю по  $x_1$ :

$$\beta_i' = \beta_{i0} + \beta_{i1} x_1 + \beta_{i2} x_1^2, \quad i = 0, 1. \quad (7.16)$$



в

Рис. 7.5. Характеристики тягового зусилля двигуна  
 АІ-20М (неперервні лінії — модель;  
 пунктирні — експериментальні дані):  
 а —  $x_1 = 3000$  м; б —  $x_1 = 6000$  м; в —  $x_1 = 10\,000$  м

Максимальна похибка апроксимації склала 2 % від  $y_{\max}$ .



У результаті, повна модель набула вигляду:

$$y = (\beta_0 + \beta_{01}x_1 + \beta_{02}x_1^2) + (\beta_1 + \beta_{11}x_1 + \beta_{12}x_1^2)x_2 + (\beta_2 + \beta_{21}x_1 + \beta_{22}x_1^2)x_3 + (\beta_3 + \beta_{31}x_1 + \beta_{32}x_1^2)x_2x_3 + (\beta_4 + \beta_{41}x_1 + \beta_{42}x_1^2)x_2^2. \quad (7.17)$$

### 7.2.2. Приклад нелінійної залежності $y(x_1, x_2)$

Практично збіглися (рис. 7.6) експериментальні дані з об'єкта з моделлю залежної змінної  $y$  у функції від  $x_1$  і  $x_2$ . Тут з локальних моделей

$$y(x_2) = \beta'_{i1}x_2 + \beta'_{i2}x_2^2, \quad x_1 = \text{const}, \quad i = \overline{1, 6}, \quad (7.18)$$

лінійною по  $x_1$  апроксимацією коефіцієнтів моделі (7.18)

$$\beta''_{i1}(x_1) = \beta_1 + \beta_2x_1; \quad \beta''_{i2}(x_1) = \beta_3 + \beta_4x_1 \quad (7.19)$$

отримана повна модель

$$y = \beta_1x_2 + \beta_2x_1x_2 + \beta_3x_2^2 + \beta_4x_1x_2^2. \quad (7.20)$$

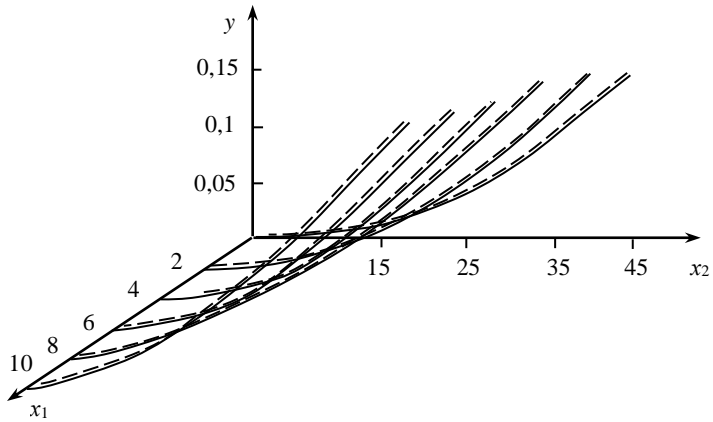


Рис. 7.6. Залежність  $y(x_1, x_2)$

### 7.2.3. Приклад нелінійної залежності $\hat{J}(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$

Залежність аеродинамічних поправок літака ТУ-144  $\hat{J}(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$  (рис. 7.7), отримано аналогічним шляхом:

$$J(\beta_1) = \alpha_{1ik}\beta_1 + \alpha_{2ik}\beta_1^2, \quad i = 1, 2, 3; \quad k = 1, 2, 3; \quad (7.21)$$

$$\alpha_{jik}(\beta_2) = \alpha'_{jk}\beta_2 + \alpha''_{jk}\beta_2^2, \quad j = 1, 2; \quad (7.22)$$

$$\alpha_{jk}^{(i)}(\beta_3) = \alpha'_j\beta_3 + \alpha''_j\beta_3^2. \quad (7.23)$$

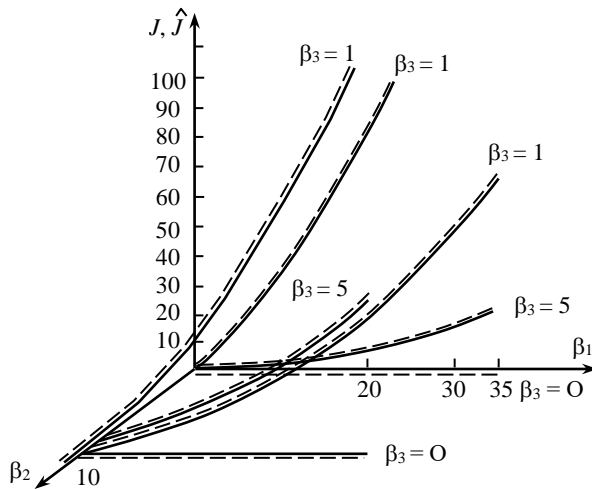


Рис. 7.7. Залежність  $J(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$  — (---)

та її модель  $\hat{J}(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$  — (—).

Після підстановки коефіцієнтів (7.23) в (7.22), а (7.22) в (7.21) отримаємо:

$$\begin{aligned} \hat{J}(\beta) = & -0.96 \cdot 10^{-6} \beta_1 \beta_2 \beta_3 - 0.61 \cdot 10^{-2} \beta_1 \beta_2^2 \beta_3^2 + 0.9 \cdot 10^{-2} \beta_2^2 \beta_3^2 + \\ & + 0.23 \beta_1^2 \beta_2 \beta_3^2 + 0.04 \beta_1 \beta_2 \beta_3^2 - 1.72 \beta_2 \beta_3^2 - 0.24 \cdot 10^{-4} \beta_1^2 \beta_2^2 \beta_3 + \\ & + 0.46 \cdot 10^{-5} \beta_1 \beta_2^2 \beta_3 - 0.0232 \beta_2^2 \beta_3 - 0.0126 \beta_1^2 \beta_2 \beta_3 + 0.133 \beta_1 \beta_2 \beta_3 + \\ & + 1.02 \beta_2 \beta_3. \end{aligned} \quad (7.24)$$

Похибка апроксимації не перевищує 0,5 % від максимального значення  $J$ .

У разі, якщо допустима похибка складає 5 % вираз (7.24) суттєво спрощується:

$$\begin{aligned} \hat{J}(\beta) = & -0.61 \cdot 10^{-2} \beta_1 \beta_2^2 \beta_3^2 + 0.9 \cdot 10^{-2} \beta_2^2 \beta_3^2 + 0.23 \beta_1^2 \beta_2 \beta_3^2 + \\ & + 0.04 \beta_1 \beta_2 \beta_3^2 - 1.72 \beta_2 \beta_3^2 - 0.0232 \beta_2^2 \beta_3 - 0.0126 \beta_1^2 \beta_2 \beta_3 + \\ & + 0.133 \beta_1 \beta_2 \beta_3 + 1.02 \beta_2 \beta_3. \end{aligned} \quad (7.25)$$

Як бачимо з прикладів, даний алгоритм дає можливість досить просто визначити структуру і параметри складних багатовимірних нелінійних залежностей між вхідними і вихідними змінними реальних об'єктів (у тому числі і об'єкту), поданих таблично за результатами натурних експериментів.

#### 7.2.4. Приклад нелінійної залежності $J(\beta)$

Визначення аналітичної залежності енергії першої півхвилі струму розряду надконденсатора  $C$  в колі з індуктивністю  $L$  і опором  $R$  залежно від добротності  $\beta$  контуру силового перетворювача енергії.

Струм  $x$  з  $R, L, C$  — параметрами кола пов'язаний рівняннями:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dx}{dt} + \frac{1}{LC} x = 0, \quad \int_{-\infty}^0 x(t) dt = CU_c(0), \quad \beta = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}, \quad (7.26)$$

де  $U_c(0)$  — початкові умови по напрузі  $U_c$  на конденсаторі,  $x(0) = 0$ . Показник якості, що підлягає оптимізації:

$$J(\beta) = \left( \frac{CU_c^2(0)}{2} \right)^{-1} \int_0^{t_1} R x^2(t) dt, \quad t_1 = \underset{t \in (0, \infty)}{\text{ArgSup}} x^2(t). \quad (7.27)$$

Задачу (7.26), (7.27) вирішено чисельним методом. Отримано залежність  $J(\beta)$ , де  $\beta$  — скаляр, і апроксимовано дробово-раціональною функцією від  $\beta$  (рис. 7.8).

$$\hat{J}(\beta) = \frac{-0.031 + 1.066\beta - 0.658\beta^2 + 0.149\beta^3}{1 + 0.23\beta - 8.87 \cdot 10^{-5}\beta^2 + 1.112 \cdot 10^{-5}\beta^3}. \quad (7.28)$$

Звідси оцінка  $\hat{\beta}^*$  оптимального значення  $\beta^*$  знаходиться за умови

$$\frac{\partial \hat{J}(\beta)}{\partial \beta} = 0, \quad \frac{\partial^2 \hat{J}(\beta)}{\partial \beta^2} < 0.$$

Максимальна похибка  $\frac{\beta^* - \hat{\beta}^*}{\beta^*} \cdot 100\%$  склала 0,05 % від  $\beta^*$ .

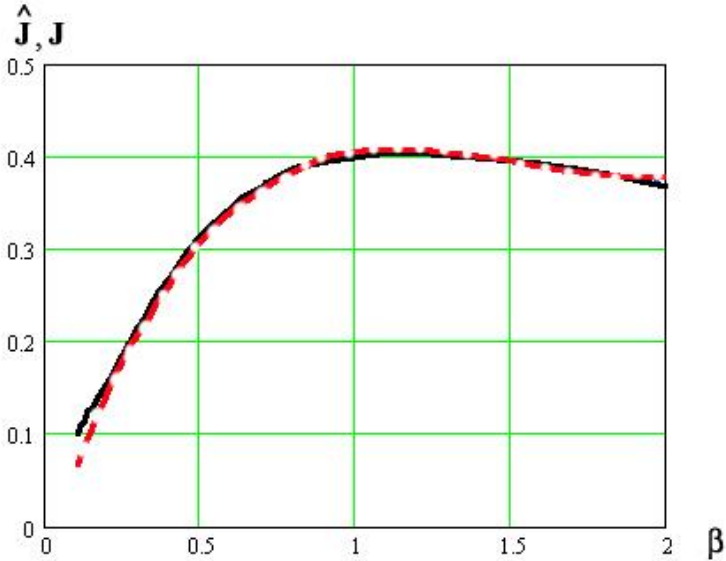


Рис. 7.8. Залежність  $J(\beta)$  (пунктир) та її модель (7.28)  $\hat{J}(\beta)$  (лінії)

### 7.3. Дослідження методу роздільного оцінювання статичної нелінійної і динамічної лінійної складових моделі об'єкту

Модель Гомерштейна (рис. 7.9) описує по входу ( $x_{\text{вх}}$ ) — виходу ( $x_{\text{вих}}$ ) реальну систему комбінацією лінійного динамічного оператора

$$\begin{aligned} & \beta'_n \frac{d^n x_{\text{вих}}}{dt^n} + \beta'_n \frac{dx_{\text{вих}}}{dt} + x_{\text{вих}}(t) = \\ & = \gamma_m \frac{d^m x_{\text{вх}}}{dt^m} + \dots + \gamma_1 \frac{dx_{\text{вх}}}{dt} + \gamma_0 x_{\text{вх}}(t) \end{aligned} \quad (7.29)$$

зі статичним нелінійним  $f(u)$ , де зазвичай останній розкладається з коефіцієнтами  $l_k$  по системі лінійно-незалежних (бажано ортогональних) функцій  $\phi_k(u)$ :

$$f(u) = \sum_{k=1}^r l_k \phi_k(u). \quad (7.30)$$

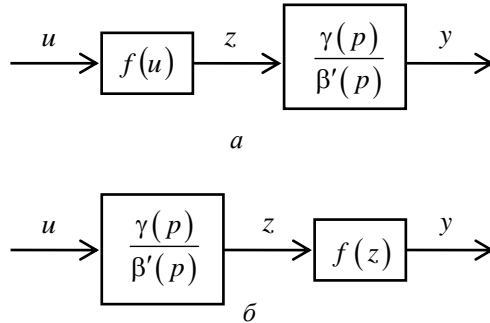


Рис. 7.9. Моделі Гомерштейна:  
*a* — нелінійність на вході, *б* — на виході

Залежно від розташування нелінійності (рис. 7.9), позначивши оператор  $\frac{d^i}{dt^i} = p^i$  і підставивши розклад (7.30) і динаміку (7.29) у відповідні структури (рис. 7.9), отримаємо для варіантів (рис. 7.9, *a*), де нелінійності на вході, модель:

$$\beta'(p)y(t) = \sum_{i=1}^m \gamma_i p^i \left( \sum_{k=0}^r \alpha_k \phi_k(u) \right). \quad (7.31)$$

Для варіанта (рис. 7.9, *б*), де нелінійність на виході, модель

$$\sum_{i=0}^n \beta'_i p^i \left( \sum_{k=0}^r \alpha_k \phi_k(y(t)) \right) = \gamma(p)u(t), \quad (7.32)$$

де  $\beta'(p) = \beta'_n p^n + \dots + \beta'_1 p + 1$ ,  $\gamma(p) = \gamma_m p^m + \dots + \gamma_1 p + \gamma_0$ .

За такого підходу в задачі ідентифікації визначається  $n + m + r + 2$  параметрів  $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ . При цьому в моделі (7.31) параметри  $\gamma_i, \alpha_k$  входять як множина їх добутків, в моделі

(7.32) та ж ситуація для параметрів  $\beta_i, \alpha_k$ . Це суттєво ускладнює розв'язок задачі оцінювання. Окрім того, якщо  $u(t)$  навіть таке, що забезпечує ортогональність  $\varphi_k(u(t))$  (що досить складно реалізувати), тим не менш ортогональність порушується внаслідок диференціювання функцій  $\varphi_k(u(t))$  у часі.

Наприклад, якщо  $\varphi_k$  — це синус-косинусний ряд, то вже перша похідна від  $\varphi_k$  буде лінійно залежною функцією від  $\varphi_{k+1}$ . Використання степеневого поліному

$$f(u(t)) = \sum_{k=0}^r \alpha_k u^k(t), \quad (7.33)$$

теж не створює ортогональності. Все це погіршує практичне використання моделей (7.31), (7.32), особливо в реальних умовах за-шумленості сигналів, які підлягають диференціюванню. Тому, враховуючи обмеженість полоси спектру сигналів  $x_{\text{аєо}}(t)$ ,  $x_{\text{аєо}}(t)$  і допускаючи кінцеву похибку  $\Delta$  апроксимації диференційного рівняння (7.29) рівнянням пониженого порядку

$$\beta_n \frac{d^n x_{\text{аєо}}}{dt^n} + \dots + \beta_1 \frac{dx_{\text{аєо}}}{dt} + x_{\text{аєо}}(t) = x_{\text{аєо}}(t) + \Delta(t), \quad (7.34)$$

отримаємо спрощені моделі Гомерштейна

$$\beta(p)y(t) = \sum_{k=0}^r \alpha_k \varphi^k(u), \quad (7.35)$$

$$\sum_{i=0}^n \beta_i P^i \left( \sum_{k=0}^r \alpha_k \varphi_k(y(t)) \right) = u(t). \quad (7.36)$$

Останню можна представити у вигляді (7.35), якщо розглядати не пряму  $y(u)$ , а інверсну залежність  $u(y)$  (рис. 7.10).

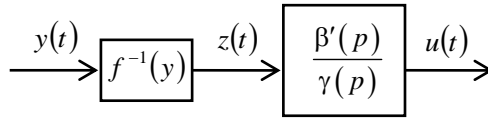


Рис. 7.10. Інверсна модель

Таким чином задача ідентифікації обох моделей зводиться до задачі ідентифікації моделі (7.35) з  $n+r+1$  невідомими. Подальше спрощення задачі досягається шляхом урахування фундаментальної закономірності всіх відображень, а саме **гладкості** залежності  $f(u)$  [60, 75, 81, 84].

### 7.3.1. Критерії наближення, що враховують гладкість шуканої залежності

Поданий в 1806–1809 роках Лежандром–Гаусом середньо-квадратичний критерій близькості дає можливість отримати найкраще наближення до математичного очікування шуканої залежності, якщо завади розподілені за нормальним законом, а вибірка даних достатньо велика.

Для обмежених вибірок і порушення нормальності закону розподілу завод, метод втрачає свою оптимальність. Покращити ситуацію можна, якщо врахувати додаткову інформацію, а саме відкинути аномальні дані і врахувати природну гладкість шуканих залежностей.

Аномальні дані відкидаються чи виправляються на етапі робастної фільтрації сигналів, а властивість гладкості вперше була врахована при визначенні моделей технологічних процесів у праці [60]. Замість мінімуму середнього квадрата похибки запропоновано мінімізувати в загальному випадку середнє значення квадрата  $r+1$ -ї кінцевої різниці  $\Delta^{r+1}\varepsilon$ :

$$I = \sum (\Delta^{r+1}\varepsilon)^2 \rightarrow \min, \quad (7.37)$$

де, якщо  $r=1$ , то має місце наближення за гладкістю, якщо  $r=2$  — наближення по кривизні і так далі.

У праці [60] також пропонується узагальнення критерію (7.37), де замість квадрата беруть будь-яку степінь. Але, ураховуючи вимогу робастності, збільшувати ступінь недоцільно.

Порядок різниці  $r+1$  встановлюється апріорі, якщо відомий порядок моделі (7.30), або відшукується поступово, починаючи з  $r=1$ .

### 7.3.2. Визначення гладкої статичної нелінійності з динаміки об'єкту

Динаміка об'єкту описується лінійним диференціальним рівнянням

$$\sum_{k=0}^n a_{n-k} \frac{d^{n-k} y(t)}{dt^{n-k}} = f[x(t)], \quad (7.38)$$

де  $f[x(t)]$  — статична нелінійність, на вхід якої поступає тестуючий сигнал  $x(t)$ , а вихід цієї нелінійності впливає на динаміку об'єкта, моделлю якого слугує передатна функція  $W(a, p)$  [75, 14, 82, 84].

Задача полягає у тому, щоб за вимірюваними зашумленими значеннями виходу  $\hat{y}(t_k)$  відновити (оцінити) статичну нелінійність. Класичні способи вирішення задач такого типу полягають у застосуванні для оцінювання параметрів моделі динаміки об'єкта (параметрів передаточної функції) методу найменших квадратів (МНК). При цьому, як правило, невідома нелінійність як функція вхідного впливу  $f[x(t)]$  апроксимується поліномом

$$f[x(t)] = b_0 + b_1 x(t) + b_2 x^2(t) + \dots + b_m x^m(t). \quad (7.39)$$

Формується нев'язка

$$\varepsilon(t) = \sum_{k=0}^n a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} - f[x(t)] \quad (7.40)$$

й мінімізується по  $b_i, a_k (i = 0, 1, \dots, m; k = 0, 1, \dots, n)$  функціонал

$$J = \frac{1}{T} \int_0^T \varepsilon^2(t) dt. \quad (7.41)$$



Параметри  $b_k, k = \overline{1, m}; a_k, k = \overline{1, n}$ , оцінюються за умови мінімуму функціоналу (7.41):

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{b}} = 0; \quad \frac{\partial J}{\partial \mathbf{a}} = 0. \quad (7.42)$$

Практика застосування методу найменших квадратів до вирішення такого роду задач свідчить, що йому властиві досить суттєві недоліки, які пов'язані з високими вимогами, що пред'являються до тестуючого (вхідного) сигналу  $x(t)$ , а також низька точність оцінок параметрів нелінійної динамічної моделі внаслідок неадекватності структури моделі об'єкта, які обмежують застосування класичного МНК для вирішення задач такого типу.

Спроби підвищення адекватності моделі за рахунок підвищення її порядку призводить до різкого збільшення часу оцінювання, що як правило, є неприпустимим в умовах обмеженого часу (особливо при вирішенні задачі у реальному часі) та зашумленості вихідних даних, що вимірюються.

Це призводить до появи систематичних похибок, які суттєво обмежують застосування класичного МНК. У зв'язку з цим задача пошуку методів оцінювання статичних нелінійностей, які впливають на динаміку об'єкта, а також оцінювання параметрів моделі передаточної функції об'єкта контролю, є важливою й актуальною. З метою визначення непараметричної моделі  $\hat{f}[x(t)]$  статичної нелінійності  $f[x(t)]$  визначимо скомпенсований вихід об'єкта у такому вигляді:

$$y_{\text{нє}}(t) = \hat{y}(t) - \beta_1 \frac{d\hat{y}(t)}{dt} - \beta_2 \frac{d^2\hat{y}(t)}{dt^2}, \quad (7.43)$$

де параметри  $\beta_1, \beta_2$  визначаються за умови середнього квадрату  $r$ -ї похідної від  $\hat{y}(t)$  по  $x$ :

$$(\beta_1, \beta_2) = \arg \min \sum_{k=1}^N \left( \frac{d^r y_{\text{нє}}(t_k)}{dx^r} \right)^2. \quad (7.44)$$

Приймаючи до уваги дискретність у часі вимірювань вихідної величини  $y$ , замість  $r$ -ї похідної можна використовувати відповідний їй дискретний аналог. Для цього послідов-

ність  $x(t_k)$ , яка вимірюється із сталим кроком у часі  $\Delta t$  перетворюється у послідовність із сталим прирощенням  $\Delta x$ , але із змінним кроком у часі. Ця задача можна вирішується наступним чином.

Перш за все треба виконати згладжування зашумлених вхідної та вихідної послідовностей вимірювань. Для вирішення цієї задачі використовується згладжування значень, що вимірюються, за допомогою сплайнів.

Впорядковуємо значення вхідної змінної  $x(t_k)$  за зростанням. Далі, для визначення значень  $t_j$ , які відповідають значенням вхідної змінної, що змінюються зі сталим кроком, виконаємо інтерполювання одержаної послідовності за допомогою інтерполяційних сплайнів:

$$S_2(t) = x_k + m_k(t - t_k) + c_k(t - t_k)^2, \quad t \in [\bar{t}_k, \bar{t}_{k+1}]. \quad (7.45)$$

Значення  $t_j$ , які відповідають  $j\Delta x$ , знаходимо шляхом розв'язання рівняння сплайну:

$$t_{j_k} = t_k + \frac{1}{2c_k} \left( -m_k + \sqrt{m_k^2 + 4j c_k \Delta x} \right), \quad (7.46)$$

де  $j = \overline{1, l_k}$ ,  $l_k = [x(t_{k+1}) - x(t_k)] / \Delta x$ .

Після визначення всіх  $t_{j_k}$  обчислюються значення  $\hat{y}(t_{j_k}), d\hat{y}(t_{j_k})/dt$  тощо.

Оскільки замість похідних по  $x$  використовуються скінченні різниці, маємо:

$$\Delta^r y_{\bar{n}\bar{e}} = \Delta^r \left[ \hat{y}(t) - \beta_1 \frac{d\hat{y}(t)}{dt} - \beta_2 \frac{d^2 \hat{y}(t)}{dt^2} \right]. \quad (7.47)$$

Зокрема, для  $r = 2$  маємо:

$$\Delta^2 y_{\text{СК}} = \frac{y_{\text{СК}}(t_{k+2}) - 2y_{\text{СК}}(t_{k+1}) + y_{\text{СК}}(t_k)}{(\Delta x)^2}, \quad (7.48)$$

для  $r = 3$ :

$$\Delta^3 y_{\text{СК}} = \frac{y_{\text{СК}}(t_{k+3}) - 3y_{\text{СК}}(t_{k+2}) + 3y_{\text{СК}}(t_{k+1}) - y_{\text{СК}}(t_k)}{(\Delta x)^3}. \quad (7.49)$$

Мінімізація функціоналу гладкості полягає у розв'язанні відносно  $\beta_1, \beta_2$  системи нормальних рівнянь:

$$\sum_{k=1}^N [\Delta^r \hat{y}(t_k) - \Delta^r \frac{d\hat{y}(t_k)}{dt} \beta_1 - \Delta^r \frac{d^2 \hat{y}(t_k)}{dt^2} \beta_2] \Delta^r \frac{d\hat{y}(t_k)}{dt} = 0;$$

$$\sum_{k=1}^N \left[ \sum_{k=1}^N [\Delta^r \hat{y}(t_k) - \Delta^r \frac{d\hat{y}(t_k)}{dt} \beta_1 - \Delta^r \frac{d^2 \hat{y}(t_k)}{dt^2} \beta_2] \right] \Delta^r \frac{d^2 \hat{y}(t_k)}{dt^2} = 0. \quad (7.50)$$

Після визначення параметрів  $\beta_1, \beta_2$  непараметричне значення гладкої статичної нелінійності визначається за формулою

$$f[x(t)] = \hat{y}(t) - \beta_1 \frac{d\hat{y}(t)}{dt} - \beta_2 \frac{d^2 \hat{y}(t)}{dt^2}. \quad (7.51)$$

### Алгоритм сплайн-згладжування експериментальних даних

Нехай унаслідок спостережень для значень аргументу  $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$  одержано значення функції  $f(\mathbf{x})$  у вигляді таблиці. З метою зменшення випадкових похибок та одержання більш плавної функції застосовується процес згладжування, сутність якого полягає у тому, щоб значення, які одержано за результатами спостережень, замінити значеннями, які одержано внаслідок процедури згладжування.

Задача згладжування формулюється наступним чином. Треба знайти функцію  $f^*(\mathbf{x}) \in L_2^n[a, b]$  таку, щоб досягався мінімум функціоналу

$$J[f] = \sum_{i=0}^n p_i [y_i - f(x_i)]^2 + p \int_{\alpha}^{\beta} [f^{(n)}(t)]^2 dt, \quad (7.52)$$

де  $p > 0$  — допоміжний параметр,  $p_i$  — задані числа (вагові коефіцієнти).

При  $p = 0$  задача зводиться до задачі наближення за МНК. При усіх  $p_i = 0$  задача переходить у задачу інтерполяції.

Згладжувальний сплайн відшукується у вигляді

$$S_3(x) = \alpha + \beta x + \sum_{i=0}^3 c_k^{[i]} x^i, \quad x_k < x < x_{k+1}. \quad (7.53)$$

Для побудови сплайну, що згладжує, для визначеності системи рівнянь треба накласти додаткові умови у місцях «зшивання» сплайнів.

Ці додаткові умови зазвичай називаються межовими умовами. Вони залежать від характеру даних, що вимірюються, а також від того, які умови мають бути виконаними у точках «зшивання». При згладжуванні розрізняють: умови періодичності, а також умови на перші або другі похідні у цих точках [14].

У неперіодичному випадку для визначення коефіцієнтів сплайну, що згладжує, маємо систему:

$$\begin{aligned} a_0 M_0 + b_0 M_1 + c_0 M_2 &= g_0; \quad b_0 M_0 + a_1 M_1 + b_1 M_2 + c_1 M_3 = g_1; \\ c_{k-2} M_{k-2} + b_{k-1} M_{k-1} + a_k M_k + b_k M_{k+1} + c_k M_{k+2} &= g_k; \quad k = \overline{2, N-2}; \\ c_{N-2} M_{N-3} + b_{N-2} M_{N-2} + a_{N-1} M_{N-1} + b_{N-1} M_N &= g_{N-1}; \\ c_{N-1} M_{N-2} + b_{N-1} M_{N-1} + a_N M_N &= g_N. \end{aligned} \quad (7.54)$$

Коефіцієнти цієї системи визначаються формулами:

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{2}(b_{k-1} + h_k) + \frac{1}{h_{k-1}^2} p_{k-1} + \left( \frac{1}{h_{k-1}} + \frac{1}{h_k} \right)^2 + \frac{1}{h_k^2} p_{k-1}; \quad k = \overline{1, N-2}; \\ b_k &= \frac{h_k}{6} - \frac{1}{h_k} \left[ \left( \frac{1}{h_{k-1}} + \frac{1}{h_k} \right)^2 + \frac{1}{h_{k-1}^2} p_k + \left( \frac{1}{h_{k+1}} + \frac{1}{h_k} \right) p_{k+1} \right]; \quad k = \overline{1, N-2} \quad (7.55) \\ c_k &= \frac{1}{h_k h_{k+1}} p_{k-1}; \quad k = \overline{1, N-3}; \\ g_k &= \frac{z_{k+1}^0 - z_k^0}{h_k} - \frac{z_k^0 - z_{k-1}^0}{h_{k-1}}; \quad k = \overline{1, N-1}. \end{aligned}$$

Згладжувальний сплайн задовольняє межові умови:

$$S''(a) = S''(b) = 0, \quad \text{то}$$

$$a_0 = a_N = 1; \quad b_0 = c_0 = b_{N-1} = c_{N-1} = g_N = g_0 = 0.$$

Системи рівнянь, які наведено вище, розв'язують методом немонотонної прогонки. Після визначення параметрів  $M_k$  величини  $z_k$  визначаються за співвідношеннями

$$z_k - z_k^0 = -p_k D_k; k = \overline{0, N}, \quad (7.56)$$

де

$$\begin{aligned} D_0 &= \frac{1}{h_0}(M_1 - M_0); \\ D_k &= \frac{1}{h_k}(M_{k-1} - M_k) - \frac{1}{h_{k-1}}(M_k - M_{k-1}); k = \overline{1, N-1}; \\ D_N &= \frac{1}{h_{N-1}}(M_N - M_{N-1}). \end{aligned} \quad (7.57)$$

Найважливішим моментом під час побудови згладжувального сплайну, є визначення вагових параметрів  $p_k$ .

У практичних застосуваннях зазвичай відомі похибки визначення величин  $z_k^0$ , тобто відомі  $|z_k - \bar{z}_k| \leq \delta_k$ , де  $\bar{z}_k$  — точні значення вимірюваної величини.

У цій ситуації природно вимагати, щоб згладжувальний сплайн  $S(x)$  задовольняв умови

$$|z_k - z_k^0| \leq \delta_k; k = \overline{0, N} \quad (7.58)$$

або, що теж саме, умовам  $p_k |D_k| \leq \delta_k; k = \overline{1, N}$ .

Ці обмеження використовуються для обчислення вагових множників  $p_k$ .

Побудуємо ітераційний процес, реалізація якого дозволить одержати невідомі коефіцієнти  $M_k$  та множники  $p_k$ :

$$(A + 6HR^{(m)}H^T)M^{(m)} = 6Hz^0. \quad (7.59)$$

$$p_k^{(m+1)} = \begin{cases} \delta / |D_k^{(m+1)}| & \text{якщо } D_k^{(m+1)} \neq 0, \\ 0 & \text{якщо } D_k^{(m+1)} = 0. \end{cases} \quad (7.60)$$

де  $m$  — номер ітерації.

Матриці  $A, H$  мають такий вигляд

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & r_1 & h_1 & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ \cdot & h_1 & r_2 & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \cdot & \cdot & \cdot & h_{N-3} & r_{N-2} & h_{N-2} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & h_{N-2} & r_{N-1} & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (7.61)$$

де  $r_k = 1(h_{k-1} + h_k)$ ;

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ h_0^{-1} & -(h_0^{-1} + h_1^{-1}) & h_1^{-1} & \dots & 0 \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \cdot & h_{N-1}^{-1} & -(h_{N-2}^{-1} + h_{N-1}^{-1}) & \dots & h_{N-1}^{-1} \\ \cdot & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix},$$

$$R = \begin{bmatrix} p_0 & & \\ & \ddots & \\ & & p_N \end{bmatrix}. \quad (7.62)$$

Зв'язок  $M_k$  з  $z_k$  визначається матричним рівнянням

$$AM = 6Hz. \quad (7.63)$$

Як початкове наближення природно взяти  $p_0^0 = 0$ , що відповідає інтерполяційному сплайну із значеннями  $D_k = D^{(0)}$ . Ітераційний процес продовжується доти, доки значення сплайну  $z_k$  не опиняться у «коридорі».

Алгоритм інтерполяції параболічними сплайнами

Нехай  $f(x) \in C_{[a,b]}$ ,  $\{a,b\} \in R_n$ ;  $a < b$ , і задано дві множини вузлів  $\Delta_n, \Delta'_n$ :

$$\Delta'_n : \bar{x}_0 = a < \bar{x}_1 < \dots < \bar{x}_{n+1} = b. \quad (7.64)$$

Припустимо, що  $x_{i-1} < \bar{x}_i < x_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ .

Функція  $S_2(x; f)$  називається інтерполяційним параболічним сплайном для функції  $f(x)$ , якщо

$$\begin{aligned} S_2(x) &\in P_2; \quad x \in (\bar{x}_i, \bar{x}_{i+1}); \quad i = \overline{1, n}; \\ S_2(x) &\in C_{[a, b]}^{(1)}; \\ S_2(x) &= f(x_i). \end{aligned} \quad (7.65)$$

Числа  $\bar{x}_i$  називаються вузлами сплайну, а числа  $x_i$  — вузлами інтерполяції. Вузли сплайну — це точки ймовірного розриву старшої похідної (у даному випадку другої). Сплайн  $S_2(x; f)$  залежить від  $n+3$  параметрів, отже містить два вільних параметри. Тому на інтерполяційний параболічний сплайн накладаються два додаткових обмеження. У загальному випадку найбільш розповсюдженими є такі умови:

$$S_2'(a) = a_n; \quad S_2'(b) = b_n; \quad S_2''(a) = A_n; \quad S_2''(b) = B_n, \quad (7.66)$$

де  $a_n, b_n, A_n, B_n$  — задані дійсні числа.

Конкретний вибір цих чисел залежить від задачі, що вирішується. Наприклад, якщо функція  $f(x)$  має відповідні похідні, то можна покласти

$$a_n = f'(a), \quad b_n = f'(b), \quad A_n = f''(a); \quad B_n = f''(b) \quad (7.67)$$

або замінити їх відповідними наближеними значеннями похідних (кінцевими різницями). Якщо вибір межових умов викликає труднощі, можна вимагати, щоб у точках  $\bar{x}_1, \bar{x}_n$  сплайн  $S_2(x)$  мав неперервну другу похідну, тобто

$$S_2''(z-0) = S_2''(z+0), \quad z = \bar{x}_i \quad (i = 1; i = n). \quad (7.68)$$

Нехай  $m_i = S_2'(x_i); \quad i = \overline{0, n}; \quad M_i = S_2''(x_i)$ . Оскільки  $S_2''(x)$  — кусково-стала функція, то

$$S_2''(x) = M_i; \quad \bar{x}_i < x < \bar{x}_{i+1}, \quad i = \overline{0, n}. \quad (7.69)$$

Позначимо

$$\begin{aligned} h_i &= x_{i+1} - x_i; \quad \bar{h}_i = x_{i+1} - \bar{x}_{i+1}, \quad i = \overline{0, n-1}; \\ \sigma_i &= f(x_{i+1}) - f(x_i)h_i = y_{i+1} - h_i y_i; \\ u_i &= h_i h_{i+1} + h_i; \quad \gamma_i = \bar{h}_i h_i - \bar{h}_i; \\ v_i &= h_{i-1} h_{i-1} + h_i; \quad \bar{u}_i = u_i \gamma_i; \quad \bar{v}_i = v_i \gamma_i; \quad i = \overline{0, n-1}. \end{aligned} \quad (7.70)$$

Тоді для  $x \in [x_k, x_{k+1}]$  маємо

$$S_2(x) = y_i + m_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_{i+1})_+^2. \quad (7.71)$$

Будемо вимагати, щоб  $S_2(x_{k+1}) = f(x_{k+1})$  та  $S_2'(x_{k+1}) = m_{k+1}$ ,  $k = \overline{0, n-2}$ . Тоді для коефіцієнтів  $c_k, d_k$  одержимо такі вирази:

$$c_i = \frac{m_{i-1}}{2} \left( \frac{1}{h_i} - \frac{\bar{v}_i}{\bar{h}_i} \right) - \frac{m_i}{2} \left( \frac{1}{h_i} + \frac{\bar{v}_i}{\bar{h}_i} \right) + \frac{\sigma_i}{h_i} \bar{v}_i, \quad (7.72)$$

$$d_i = \frac{\gamma_i h_i}{\bar{h}_i^2} (m_i + m_{i+1} / 2 - (y_{i+1} - y_i)). \quad (7.73)$$

Оскільки у точці  $x_{i+1}$  має виконуватись рівність  $S_2''(x_{k+1} - 0) = S_2''(x_{k+1} + 0)$ , одержуємо рівність  $c_k + d_k = c_{k+1}$  або

$$\begin{aligned} \frac{1}{\gamma_k \bar{h}_k} m_k + \left( \frac{h_k + \bar{h}_k}{h_k \bar{h}_k} + \frac{1}{h_{k+1}} + \frac{\gamma_k}{\bar{h}_{k+1}} \right) m_{k+1} + \frac{1}{h_{k+1} \gamma_{k+1}} m_{k+2} = \\ = 2 \frac{\sigma_k}{h_k} + 2 \frac{\sigma_{k+1}}{h_{k+1} - \bar{h}_{k+1}}. \end{aligned} \quad (7.74)$$

Для межових умов (7.73) маємо:  
 $2c_0 = A_n; 2c_{n-1} + 2d_{n-1} = B_n$ .

Для межових умов (7.67):  $d_0 = d_{n-1} = 0$ ;  
 $g_k = e_k = 2u_k \frac{h_{k-1}}{h_{k-1}} \sigma_{k-1} + 2v_k \gamma_k \frac{h_k}{h_k} \sigma_k; k = \overline{1, n-1}$ .

Для межових умов (7.66) система рівнянь має вигляд:

$$\mathbf{A}\mathbf{m} = \mathbf{g}, \quad (7.75)$$

де  $\mathbf{m} = [m_1, m_2, \dots, m_{n-1}]$ ;

$\mathbf{g} = [g_1 - \bar{u}_1 a_n, g_2, g_3, \dots, g_{n-2}, g_{n-1} - \bar{v}_{n-1} b_n]$ .

Для межових умов (7.67) система рівнянь має такий вигляд:

$$\begin{aligned} \left( 2 - \frac{\bar{h}_0}{h_0} \right) m_0 + \frac{\bar{h}_0}{h_0} m_1 = 2\sigma_0 - A_n (h_0 - \bar{h}_0); \\ \bar{u}_k m_{k-1} + (2 + \bar{u}_k + \bar{v}_k) m_k + \bar{v}_k m_{k+1} = g_k; k = \overline{1, n}; \end{aligned} \quad (7.76)$$



$$\frac{1}{\gamma_{n-1}} m_{n-1} + \frac{h_{n-1} + \bar{h}_{n-1}}{h_{n-1}} m_n = 2\sigma_{n-1} + B_n \bar{h}_{n-1}.$$

Визначення параметрів  $b_k, a_i$  методом найменших квадратів

Мінімізація критерію (7.41) — визначення оцінок параметрів  $b_k, k = \overline{1, m}$  та  $b_k, i = \overline{1, n}$ , реалізується шляхом розв'язання системи лінійних алгебричних рівнянь

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N \left\{ \left[ \sum_{i=1}^m b_i x_k^i - \sum_{i=1}^n a_i \frac{d^i y_k}{dt^i} \right] x_k' \right\} &= \sum_{k=1}^N y_k x_k', \quad l = \overline{0, m}; \\ \sum_{k=1}^N \left\{ \left[ \sum_{i=1}^m b_i x_k^i - \sum_{i=1}^n a_i \frac{d^i y_k}{dt^i} \right] \frac{d^l y_k}{dt^l} \right\} &= \sum_{k=1}^N y_k \frac{d^l y_k}{dt^l}, \quad l = \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (7.77)$$

Позначимо:

$$\begin{aligned} \mathbf{c} &= [\mathbf{b}, \mathbf{a}]^T; \\ e_l &= \sum_{k=1}^N y_k x_k^{l-1}; \quad l = \overline{1, m}; \\ e_l &= \sum_{k=1}^N y_k \frac{d^l y_k}{dt^l}; \quad l = \overline{1, n} \\ d_{l,1} &= N; \quad d_{j,l} = d_{l,j} = \sum_{k=1}^N x_k^j x_k^l, \quad j, l = \overline{1, m}; \\ d_{l,m+j} &= \sum_{k=1}^N \frac{d^j y_k}{dt^j} x_k^{l-1}; \quad j = \overline{1, n}; \quad l = \overline{1, m}; \\ d_{l+m,j} &= \sum_{k=1}^N x_k^{j-1} \frac{d^l y_k}{dt^l}; \quad l = \overline{1, n}; \quad j = \overline{1, m}; \\ d_{l+m,j+n} &= \sum_{k=1}^N \frac{d^j y_k}{dt^j} \frac{d^l y_k}{dt^l}; \quad l = \overline{1, n}; \quad j = \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (7.78)$$

Тоді система лінійних алгебричних рівнянь для визначення невідомих параметрів  $b_k, k = \overline{1, m}$  та  $b_k, i = \overline{1, n}$ , набуває «класичного» для МНК вигляду

$$Dc = e. \quad (7.79)$$

Тестування методу

Для контролю стійкості та точності системи автоматизованого електроприводу необхідно визначити величину та асиметрію зони нечутливості, крутизну та рівні насиченості нелінійної залежності швидкості обертання вихідного валу системи від напруги  $U_{\dot{y}}$  на валу якоря двигуна постійного струму в режимі реверсу, тобто швидкість переходить від  $-\Omega_{\max}$  до  $+\Omega_{\max}$ . Динаміці цього процесу відповідає диференціальне рівняння

$$a_2 \frac{d^2 \Omega(t)}{dt^2} + a_1 \frac{d\Omega(t)}{dt} + \Omega(t) = f[U_{\dot{y}}(t)], \quad (7.80)$$

де  $U_{\dot{y}}$  змінюється ступінчасто в межах від  $-U_{\dot{y}\max}$  до  $+U_{\dot{y}\max}$ :

$$U_{\dot{y}}(t) = U_{\max} \left[ -1 + \frac{1}{q/2} \sum_{k=1}^q 1(-k\Delta t) \right],$$

де  $q = 16$ ;  $1(t) = \begin{cases} 1, & t > k\Delta t, \\ 0, & t < k\Delta t. \end{cases}$

Числові значення параметрів  $a_1, a_2$  невідомі. Параметри тестуючого впливу дорівнюють  $U_{\max} = 120 \text{ В}$ ,  $\Delta t = 1 \text{ с}$ . Початкові умови:  $\Omega(0) = -\Omega_{\max} = -300 \text{ рад/с}$ ,  $d\Omega(0)/dt = 0$ .

Невідоме значення нелінійної залежності подано наступним виразом:

$$\Omega[U_{\dot{y}}(t)] = 3[U_{\dot{y}}(t)] - 60 \sin(0,065[U_{\dot{y}}(t)]),$$

який відповідає умові гладкості залежності із зонами нечутливості та насичення. Вимірювання вихідного сигналу приводу здійснюються з кроком  $\Delta t = 0,1 \text{ с}$  при  $N = 200$ ,  $q = 16$ .

Оскільки вимірювання вихідної змінної виконуються в умовах впливу перешкод вимірювання, для моделювання процесу накладемо 10 % похибку вимірювань у вигляді «білого шуму» — випадкового нормального процесу із нульовим середнім та одиничною дисперсією.

Моделювання процесу складається з наступних кроків:

1. Згладжування вхідних  $[U_{\hat{y}}(t_k)]$  та вихідних  $\hat{y}_k$ ,  $k = \overline{1, N}$ , значень, що вимірюються.

2. Упорядкування значень  $U_{\hat{y}}(t_k)$  у порядку їхнього зростання.

3. Інтерполяція цих значень за допомогою інтерполяційних сплайнів.

4. Визначення значень  $t_{k_j}$ , що відповідають рівномірному змінюванню  $U_{\hat{y}}(t_k)$  зі сталим кроком  $\Delta U$ .

5. Обчислення значень  $\hat{y}(t_{k_j})$ , а також похідних першого та другого порядку від цих значень (кінцевих різниць).

6. Мінімізація функціоналу (7.41) шляхом складання та розв'язання системи рівнянь (7.79) методу найменших квадратів.

Моделювання процесу визначення статичної нелінійності виконувалось для декількох значень  $m$  з метою визначення оптимального степеню поліноміальної залежності статичної нелінійності від вхідного впливу. З рис. 7.11 бачимо, що оптимальне значення відповідає  $m = 5$ . При цьому досягнуто значення середньоквадратичної похибки  $\varepsilon_5 = 26,72$ .

Цю ж задачу розв'язано за допомогою методу компенсації динаміки об'єкта контролю. Перші три кроки ті ж самі.

Після виконання кроків 4 та 5, тобто визначення часових інтервалів, що відповідають сталому прирощенню значень тестуючого сигналу, та визначення значень вихідного сигналу, які відповідають значенням часу  $t_{k_j}$  замість кроку 5 виконуємо: мінімізацію функціоналу по  $\beta_1, \beta_2$ :

$$\min J_{\text{нє}} = \min \sum_{k=1}^N \left( \frac{\partial^r \hat{y}_{\text{нє}}(t_k)}{\partial U^r(t)} \right)^2.$$

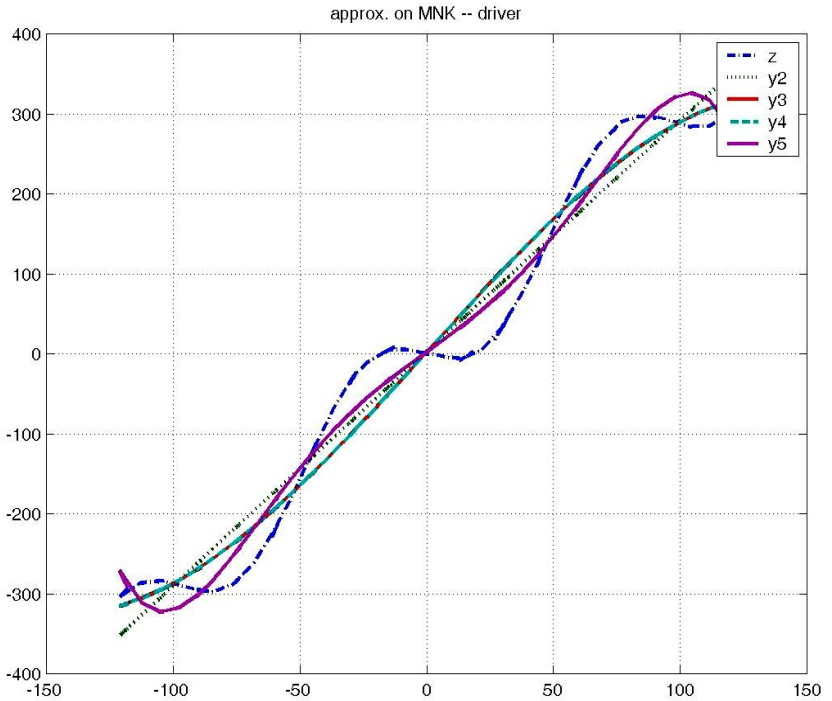


Рис. 7.11. Оцінка нелінійності для  $m = 2, 3, 4, 5$  за MNK

У результаті отримаємо оцінки

$$\hat{\beta}_1 = 0,0196, \quad \hat{\beta}_2 = 0,000134.$$

Тоді непараметрична оцінка шуканої нелінійності визначається наступним чином:

$$f[U_y(t)] = y(t) - 0,0196 \frac{dy(t)}{dt} - 0,000134 \frac{d^2y(t)}{dt^2}.$$

Результати моделювання для  $r = 1, 2, 3$  наведено на рис. 7.12.

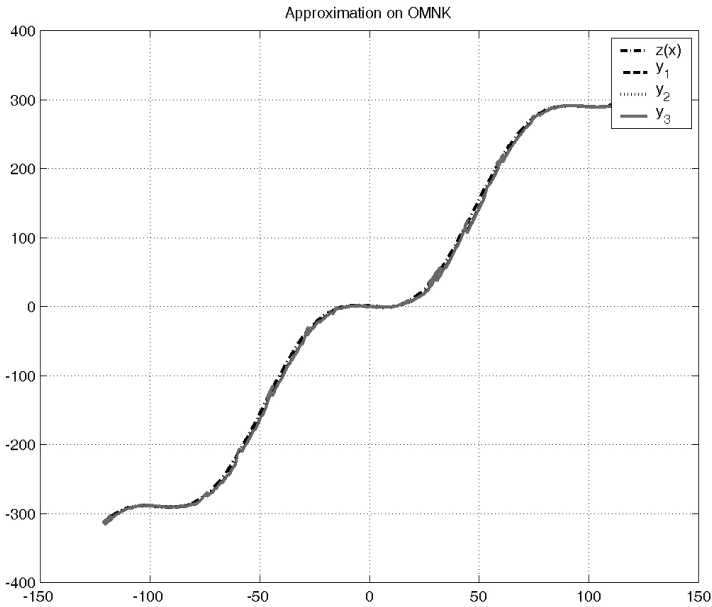


Рис. 7.12. Оцінка статичної нелінійності за методом компенсації динаміки для  $r = 1, 2$  та  $r = 3$

Остаточна похибка виявилась найменшою для  $r = 2$  і дорівнює  $\varepsilon = 3,067$ , що менше 0,5 %.

Отримавши точну залежність  $f[U_a(t)]$  (рис. 7.12), можна з рівняння (7.80) по МНК визначити більш точно коефіцієнти динамічної складової моделі.

### Приклад залежності $y(x)$ для реальної системи

На рис. 7.13 наведено статичну ВАХ  $y(x)$ , отриману з динамічних режимів літака М-17 (лінія 1), і апроксимовану прямою (лінія 2), а також для наочності наведено ламану (лінія 3), впорядковану за  $x$  залежність, побудовану без компенсації динаміки.

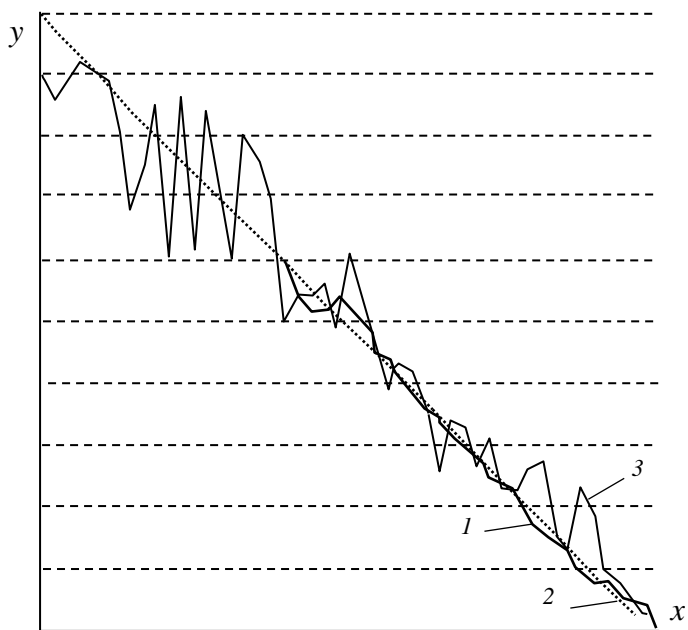


Рис. 7.13. Графік залежності  $y(x)$

Таким чином, спочатку виявивши й оцінивши нелінійність, а потім, якщо режим досить динамічний, більш точно можна оцінити і лінійну динамічну частину моделі об'єкту.

Тобто статика і динаміка оцінюються роздільно, що спрощує задачу і дає можливість більш точно, ніж з рівнянь (7.31), (7.32) по МНК визначити складові моделі Гаммерштейна.

#### **7.4. Дослідження методу об'єднання кусково-аналітичних моделей в єдину аналітичну**

##### ***7.4.1 Інтеграція кусково-аналітичних залежностей в єдину аналітичну***

Останнім часом все більшу увагу приділяють чисельним методам комп'ютерного моделювання О, як об'єктів

ідентифікації [14, 31, 55]. З одного боку це обґрунтовано складністю процесів у об'єкті, що досліджується (кусово-нелінійні залежності між його змінними, логіка переключення від однієї частинної моделі до іншої, нестаціонарність та стохастичність контрольованих і неконтрольованих параметрів і сигналів та інше), з іншого боку — майже необмеженими можливостями сучасних електронно-обчислювальних машин (ЕОМ).

Однак заміна теоретичних досліджень чисельними на ЕОМ призводить до втрати загальності рішення тієї чи іншої задачі. Множина вирішень задачі чисельним моделюванням завжди обмежена. Тому існує ймовірність не змодельованої ситуації на об'єкті, яка може бути небажаною. Це, наприклад, стосується кусково-аналітичних моделей, заміни диференціальних залежностей різницевиими (особливо для нестійких об'єктів), апроксимації багатомірних нелінійних залежностей на кінцевій множині експериментальних даних поліномами високого степеня.

Парадоксально, але відсутність ЕОМ сприяла свого часу розвитку фундаментальних положень варіаційного обчислення Ейлера, розробці ортогональних базисних функцій Фур'є, Лягера, Лежандра, Хаара та інших, теорії оптимальної фільтрації Вінера і багатьох інших фундаментальних теорій у різних сферах науки. Це дозволяло вирішити задачі оптимізації систем у суто теоретичному загальному плані, гарантуючи бажані результати для всієї множини можливих ситуацій.

Тому за наявності ЕОМ доцільно максимально використовувати аналітичні рішення, користуючись чисельними методами и і ЕОМ лише, як допоміжними засобами.

Розглянемо одну із таких задач: як отримати єдину аналітичну залежність для моделі об'єкту, яку подано кусково-аналітичними частковими моделями з логікою переключення від однієї до іншої залежно від координат об'єкта [80, 83, 82, 84].

Якщо нелінійність  $y(x)$  та її похідні неперервні, то можливий її аналітичний опис  $y(x)$ , наприклад за теоремою Веєрштрасса, степеневим поліномом. Більшість нелінійних елеме-

нтів реальних об'єктів мають кусково-аналітичну залежність  $y(x)$ . Під час аналізу і синтезу систем з такими елементами виникають незручності, пов'язані з врахуванням граничних умов переходу від однієї області змінних  $x, y$  до сусідньої. При зміні структури моделі нелінійності в досліджуваній системі, можуть виникати розриви  $y(x)$  та її похідних  $dy/dx, d^2y/dx^2, \dots$ . В той час, як у реальному об'єкті ці явища відсутні. Ці та інші причини вимагають мати аналітичну модель  $y(x)$  в усій області зміни  $x, y$ , щоб виключити складну логіку зміни структури  $y(x)$  та некоректності диференціювання  $dy/dx, d^2y/dx^2, \dots$  у точках стиковки.

Складна кусково-аналітична нелінійність може бути представлена множиною аналітичних залежностей, справедливих за умови що змінні  $x, y$  знаходяться в  $i$ -й області їх існування,  $i = \overline{1, n}$ . При переході з  $i$ -ї в  $i+1$ -у чи  $i-1$ -у область  $y_i(x_i)$  повинна змінюватись на  $y_{i+1}(x_{i+1})$  чи  $y_{i-1}(x_{i-1})$ . Таку умову можна забезпечити, якщо залежність  $y(x)$  подати зваженою функціями ваги  $\eta_i(x)$  сумою  $y_i(x_i)$ :

$$y(x) = \sum_{i=1}^n \eta_i(x) y_i(x), \quad (7.81)$$

де  $\eta_i(x) = \{1, \text{якщо } (x) \text{ належить } i\text{-ій області}, 0, \text{якщо не належить}$ .

Для забезпечення гладкості переходу в сусідню область функції ваги  $\eta_i(x)$ , повинні бути також гладкими, а не релейними, як при кусково-аналітичній апроксимації.

Аналогом таких функцій можуть бути частотні фільтри верхніх, середніх, нижніх частот. Тож, якщо покласти замість частоти  $\omega$  змінну  $x$ , то без суттєвих змін будемо мати можливість використати добре розвинену теорію частотних фільтрів для побудови функцій ваги  $\eta_i$ .



На відміну від фізично реалізованих фільтрів, де суттєвою є вимога нескладності, математично реалізовані — позбавлені цієї вимоги.

Наприклад тут, немає необхідності використовувати близькі більш-менш до ідеальних фільтри Баттерворда. Достатньо представити близькі до ідеального фільтри, як каскад з  $m$  найпростіших фільтрів 1-го порядку. Так для виділення області  $x$  від  $0$  до  $x = a$ , візьмемо  $m$  «фільтрів нижніх частот»:

$$\eta_1(x) = \left( \frac{1}{\sqrt{1+a^{-2}x^2}} \right)^m, \quad x \in [0, a], a > 0, \quad (7.82)$$

де  $m$  береться за умови близькості з точністю до  $\varepsilon$  моделі  $y(x)$  до реальної залежності  $y(x)$ . Тобто  $m$  збільшується від  $1$  до значення  $m^*$  за якої міра близькості  $y(x)$  до  $y(x)$  буде близька до бажаної  $\varepsilon$ .

Для виділення області  $x$  від  $x = a$  до  $x \rightarrow \infty$  візьмемо  $m$  «фільтрів верхніх частот»:

$$\eta_2(x) = \left( \frac{|a^{-1}x|}{\sqrt{1+a^{-2}x^2}} \right)^m, \quad x \in [0, \infty], x \in [-a, -\infty], \quad (7.83)$$

де  $m$  підбирається аналогічно. Для виділення області  $x$  від  $x = a$  до  $x = b$ ,  $b > a$ , візьмемо  $m$  «смугових фільтрів», побудованих з двох «фільтрів (7.82) нижніх частот  $a$  і  $b$ »:

$$\eta_3(x) = \left( \frac{1}{\sqrt{1+b^{-2}x^2}} \right)^m - \left( \frac{1}{\sqrt{1+a^{-2}x^2}} \right)^m, \quad x \in [a, b]. \quad (7.84)$$

Наведемо (для наочності) приклад аналітичного опису основної кривої намагнічування феромагнітного осердя котушки індуктивності. Згідно до рис. 7.14 маємо три області аналітичного опису  $y(x)$ :

$$\begin{aligned} y &= -y_{\max}, & -\infty < x \leq a_2; \\ y &= \beta_1 x + \beta_2 x^3, & -a_2 < x \leq a_1; \\ y &= y_{\max}, & a_1 \leq x < \infty. \end{aligned} \quad (7.85)$$

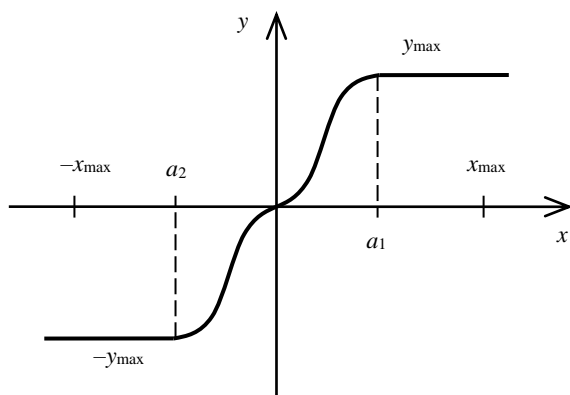


Рис. 7.14. Кусково-аналітична залежність  $y(x)$

У необмеженій області змінних  $x$  (фізично це може бути напруженість  $H$  магнітного поля, магніторушійна сила  $Iw$  чи магнітна напруга  $Hl$ ) залежність  $y(x)$  (магнітної індукції  $B$  чи магнітного потоку  $\hat{O}$ ) може бути представлена сумою трьох моделей (7.85) з ваговими функціями (7.88). Для цього слід ввести нову незалежну змінну  $z$ , яка б знаковмінну функцію  $x$  в області  $(-x_{\max}, +x_{\max})$  перетворювала в змінну одного знаку «плюс»:

$$z = x_{\max} - x. \quad (7.86)$$

Тоді аналітична у всьому діапазоні  $x$  залежність  $y(x)$  набуває вигляду

$$y(x) = -y_{\max} \eta_1(z) + y_{\max} \eta_2(z) + (\beta_1 x + \beta_2 x^3) \eta_3(z), \quad (7.87)$$

де

$$\eta_1(z) = \left( \frac{1}{\sqrt{1 + (x_{\max} + a_2)^{-2} z^2}} \right)^m;$$

$$\eta_2(z) = \left( \frac{|(x_{\max} + a_2)^{-1} z|}{\sqrt{1 + (x_{\max} + a_2)^{-2} z^2}} \right)^m ;$$

$$\eta_3(z) = \eta_1(z, a_1) - \eta_1(z, a_2). \quad (7.88)$$

Якщо залежність  $y(x)$  (рис. 7.14) симетрична, тобто  $a_1 = -a_2 = a$ , тоді

$$y(x) = y_{\max} \left[ \left( \frac{|(x_{\max} + a)^{-1} z|}{\sqrt{1 + (x_{\max} + a)^{-2} z^2}} \right)^m - \left( \frac{1}{\sqrt{1 + (x_{\max} + a)^{-2} z^2}} \right)^m \right] +$$

$$+ (\beta_1 x + \beta_2 x^3) \left[ \left( \frac{1}{\sqrt{1 + (x_{\max} + a)^{-2} z^2}} \right)^m - \left( \frac{1}{\sqrt{1 + (x_{\max} - a)^{-2} z^2}} \right)^m \right]. \quad (7.89)$$

Аналітичність і гладкість моделі (7.89) дозволяє за необхідності, якщо  $x$  відома функція часу  $x(t)$ , обчислити аналітичні похідні

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt}, \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left( \frac{dy}{dt} \right) = \frac{d^2 y}{dx^2} \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dx} \frac{d^2 x}{dt^2} \text{ та т. ін.}$$

Для кінцевого значення числа  $m$  ці похідні будуть гладкими функціями часу, які можна аналітично обчислити вручну або за відповідних програм (Mathcad, MATLAB) на ПЕОМ.

За першою теоремою Веєрштраса залежність  $y(x)$  (рис. 7.14) може бути представлена в області  $\pm a$  степеневим поліномом. Однак для достатньо широкої області ( $\pm x_{\max}$ ), за однакової середньоквадратичної похибки апроксимації  $\varepsilon$ , модель (7.89) буде значно простішою степеневому поліному.

Крім того, якщо вимірювання  $x$ ,  $y$  зроблені з кроком  $\Delta x$ , то за високих степенів поліному з'являються пульсації  $\hat{y}(x)$  в інтервалах  $\Delta x$  між вимірюваннями.

Визначивши, таким чином, непараметричну модель статичної нелінійної складової моделі Гамерштейна з довільної динаміки об'єкта ідентифікації, за умови компенсації невідомої ди-

наміки, та виконавши структурно-параметричну апроксимацію цієї параметричної моделі нелінійності аналітичною в усьому діапазоні її існування моделлю, можна, за необхідністю, перейти до коректного визначення, лінійної динамічної складової моделі Гамерштейна, якщо тепер уже відомий сигнал  $f[U^*(t)]$  на вході динамічної складової моделі буде достатньо інформативним [95].

#### 7.4.2. Залежність ЕРС машини постійного струму (МПС)

Нехай з експерименту отримано залежність електрорушійної сили  $E$  від струму збудження  $I_\zeta$  магнітного потоку індуктора (рис. 7.15, крива 1) [74].

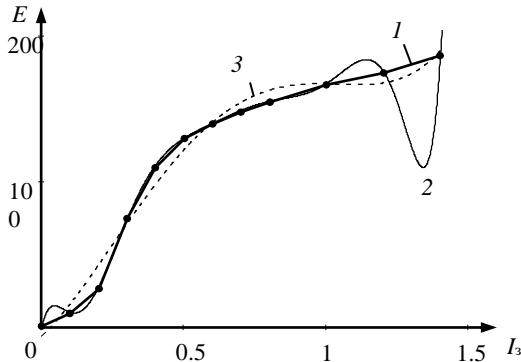


Рис. 7.15. Залежність  $E(I_\zeta)$  та її апроксимація поліномами:  
1 — кусково-аналітично; 2 — дев'ятої степені; 3 — четвертої степені

На ділянці від  $I_\zeta = 0$  до  $I_\zeta = 0,7$  А залежність апроксимуємо кубічною параболою, а на ділянці, де  $I_\zeta \geq 0,7$  — лінійною залежністю:

$$\hat{E}(I_\zeta) = \begin{cases} \beta_1 I_\zeta^2 + \beta_2 I_\zeta^3, & \text{якщо } I_\zeta < 0,7 \text{ А,} \\ \beta_3 + \beta_4 I_\zeta, & \text{якщо } I_\zeta \geq 0,7 \text{ А.} \end{cases} \quad (7.90)$$

За методом найменших квадратів (МНК) визначимо оцінки  $\hat{\beta}_i$  коефіцієнтів  $\beta_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ :  $\hat{\beta}_1 = 1209$ ,  $\hat{\beta}_2 = -1365$ ,  $\hat{\beta}_3 = 111,2$ ,  $\hat{\beta}_4 = 54,1$ .

Якщо всю залежність  $E(I_\zeta)$  описати по МНК степеневим поліномом з відносною середньоквадратичною похибкою (СКП) не більше 1 %, то отримуємо поліном дев'ятої степені. Для нього СКП в точках експерименту складає 0,53 %, але в проміжку між експериментальними точками має місце значна пульсація (рис. 7.15, крива 2).

Якщо зменшити ступінь поліному до чотирьох (рис. 7.28, крива 3), то суттєво зростає похибка апроксимації (СКП=8,1%). Тобто бажану високу точність апроксимації можна забезпечити лише кусково-поліноміальною логіко-аналітичною моделлю (7.90).

Щоб удосконалити спосіб кусково-поліноміальної апроксимації незручними логіко-аналітичними моделями (7.90), замінимо їх на аналітичні моделі, що являють собою суму часткових аналітичних моделей помножених на аналітичні в усьому інтервалі змінних вагові функції — «фільтри»  $\eta(I_\zeta)$ :

$$\hat{E}(I_\zeta) = (\beta_1 I_\zeta + \beta_2 I_\zeta^3) \eta_1(I_\zeta) + (\beta_3 + \beta_4 I_\zeta) \eta_2(I_\zeta),$$

де, підставивши  $\eta_1(I_\zeta) = \left(1 + (I_\zeta/0,7)^n\right)^{-1}$ ,

$\eta_2(I_\zeta) = \left(1 + (0,7/I_\zeta)^n\right)^{-1}$ , отримуємо просту і досить точну

залежність:

$$\hat{E} = \frac{(\beta_1 I_\zeta + \beta_2 I_\zeta^3)}{1 + (0,43 I_\zeta)^n} + \frac{(\beta_3 + \beta_4 I_\zeta)}{1 + (0,7/I_\zeta)^n}. \quad (7.91)$$

Залежність відносної СКП від степені  $m$  в моделі (7.91) подано в табл. 7.2.

## Залежність відносної СКП

$n$	2	4	8	10	20	40	80	100
СКП %	80	38	11	8	4	3	1,9	2,1

Аналітичність моделі (7.91) дозволяє, наприклад, аналітично визначити у будь-якій точці величину чутливості  $E$  до  $I_\zeta$ , пропорційну магнітній проникності  $\mu$  середовища ДПС і використати її для побудови розімкненої системи автоматичного регулювання напруги ГПС або швидкості обертання ДПС, діагностувати стан магнітного кола індуктора МПС та ін.

У даному прикладі  $\eta_1(I_\zeta)$  дорівнює  $m$  послідовно ввімкнених низькочастотних фільтрів частоти  $\omega$ ;  $\eta_2(I_\zeta)$  — високочастотних,  $\omega = I_\zeta$ .

#### 7.4.3 Дослідження завдання забезпечення інваріантності напруги $U_{я}$ до струму $I_{я}$ якоря генератора постійного струму(ГПС)

Рівняння змінних  $U_{я}$ ,  $E_{я}$ ,  $I_{я}$ ,  $I_3$ ,  $U_3$  стану ГПС:

$$\begin{cases} U_{я} = E_{я}(I_\zeta) - I_{я}R_{я}; \\ L_\zeta \frac{dI_\zeta}{dt} + I_\zeta(t)R_\zeta + U_\zeta(t), \end{cases} \quad (7.101)$$

де параметрами виступають  $R_{я}$  — електричний опір якоря ГПС;  $L_\zeta$ ,  $R_\zeta$ ,  $I_\zeta$  — індуктивність і опір кола збудження магнітного потоку струмом  $I_3$ , від якого нелінійно залежить електрорушійна сила  $E_{я}$ .

Згідно до вище наведених методів непараметричної і кусково-аналітичної ідентифікації було отримано (рис. 7.24) нелінійну статичну залежність  $E(I_\zeta)$ :

$$E(I_{\zeta}) \cong (\beta_0 + \beta_1 I_{\zeta} + \beta_2 I_{\zeta}^3) \eta_1(I_{\zeta}) + (\beta_3 + \beta_4 I_{\zeta}) \eta_2(I_{\zeta}), \quad (7.102)$$

де вагові функції мають наступний вигляд:

$$\begin{aligned} \eta_1(I_{\zeta}) &= \left(1 + (1,43 \cdot I_{\zeta})^{40}\right)^{-1}, \\ \eta_2(I_{\zeta}) &= \left(1 + (0,7 \cdot I_{\zeta}^{-1})^{40}\right)^{-1}. \end{aligned} \quad (7.103)$$

Параметри  $(\beta_0 \div \beta_4)$  параметричної моделі (7.102) отримано по МНК з непараметричної моделі (рис. 7.16), а непараметричну отримано за умови мінімуму показника Пухова–Хатіашвілі [60].

Для компенсації інерційності і лінеаризації каналу управління ГПС послідовно ввімкнемо інверсну до моделі (7.102, 7.103) нелінійну коригувальну ланку (КЛ).

Інверсна до залежності (7.102) модель  $\hat{I}_{\zeta}(E_{\bar{y}})$  (рис. 7.16, б), як рішення рівняння (7.102):

$$\hat{I}_{\zeta}(E_{\bar{y}}) = \hat{I}_{\zeta 1}(E_{\bar{y}}) \eta_1(E_{\bar{y}}) + \hat{I}_{\zeta 2}(E_{\bar{y}}) \eta_2(E_{\bar{y}}), \quad (7.104)$$

де

$$\begin{aligned} \hat{I}_{\zeta 1}(E_{\bar{y}}) &= \sqrt[3]{\frac{E_{\bar{y}} - \beta_0}{\beta_2} + \sqrt{\left(\frac{\beta_1}{3\beta_2}\right)^3 + \left(\frac{E_{\bar{y}} - \beta_0}{2\beta_2}\right)^2}} + \\ &+ \sqrt[3]{\frac{E_{\bar{y}} - \beta_0}{\beta_2} - \sqrt{\left(\frac{\beta_1}{3\beta_2}\right)^3 + \left(\frac{E_{\bar{y}} - \beta_0}{2\beta_2}\right)^2}}, \\ \hat{I}_{\zeta 2}(E_{\bar{y}}) &= \frac{E_{\bar{c}} - \beta_3}{\beta_4 - \beta_4}, \\ \eta_1(E_{\bar{y}}) &= \left(1 + (0,0067 \cdot E_{\bar{y}})^{40}\right)^{-1}, \\ \eta_2(E_{\bar{y}}) &= \left(1 + (150 \cdot E_{\bar{y}}^{-1})^{40}\right)^{-1}. \end{aligned} \quad (7.105)$$

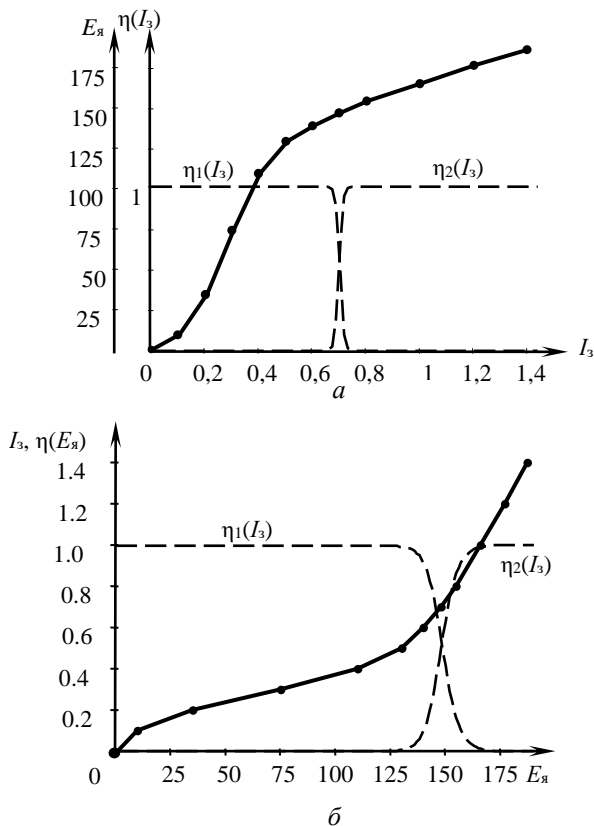


Рис. 7.16. Графіки прямої та зворотної залежності:  
 а —  $E_y(I_3)$  (точки) та її апроксимація (лінія);  
 б —  $I_3(E_y)$  (точки) та її апроксимація (лінія)

Як витікає з рівняння (7.102, 7.103) ГПС і (7.104, 7.105) КЛ, якщо в результаті параметричної ідентифікації оцінки  $\hat{L}_\zeta, \hat{R}_\zeta, \hat{R}_y, \hat{E}_y(I_\zeta)$  близькі до дійсних значень параметрів об'єкта, то в системі (рис. 7.17) має місце лінеаризація каналу управління по  $I_\zeta$ , майже повна компенсація інерційності залежності  $I_\zeta$  від  $U_\zeta$  і залежності (7.101)  $U_y$  від  $I_y$ , як збурювального впливу:



$$U_{\dot{y}} = U_{\dot{y}}^* - (R_{\dot{y}} - \hat{R}_{\dot{y}}) I_{\dot{y}}. \quad (7.106)$$

Таким чином, завдяки досить точній ідентифікації параметрів  $R_3$ ,  $R_{\dot{y}}$ ,  $L_3$  і побудові моделі (7.104), розімкнена система буде мати точнісні характеристики не гірше, ніж у замкненій, а також гарантовану стійкість і високу швидкодію.

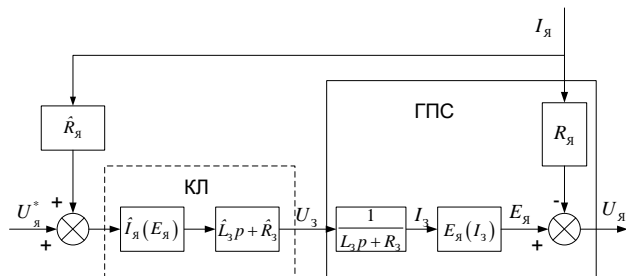


Рис. 7.17. Лінеаризована та інваріантна до збурення  $I_{\dot{y}}$  система розімкненого керування ГПС

#### ***7.4.4. Дослідження задачі забезпечення максимальної потужності сонячної батареї***

В автономній системі «сонячна батарея — навантаження», наприклад, для БЛА, оптимальне керування (в сенсі зняття максимальної потужності) полягає в регулюванні опору навантаження  $R_l$  залежно від електрорушійної сили  $\dot{A}$  і струму  $I$  батареї, які в свою чергу залежать від освітлення, повільна зміна якого в часі носить випадковий характер.

Статистично оптимальна система, налаштована на найбільш імовірну освітленість буде мало ефективною.

Максимальна ефективність досягається, якщо періодично за дуже короткий час визначати з динаміки вольт-амперну характеристику (ВАХ)  $U(I)$  батареї і відповідно до неї регулювати  $R_l$ .

Для цього батарею за допомогою електронних ключів вимикають від навантаження і умикають до котушки індук-

тивності  $L$  з невеликим додатковим опором  $R_{\text{в}}$ , з якого знімається напруга пропорційна струму  $i(t)$ .

Сигнали напруги  $u(t)$  і струму  $i(t)$  (рис. 7.18) фіксуються і обробляються швидкодіючим електронним пристроєм, який на основі вище розглянутих методів дів визначає ВАХ  $U(I)$ , максимум  $U^*I^*$  потужності  $UI$  і відповідно до нього оптимальний опір  $R_i^*$ :

$$R_i^* = \frac{U^*}{I^*}. \quad (7.107)$$

Виміри (рис. 7.18)  $u(t)$  і  $i(t)$  мають випадкову шумову складову, динамічну коливальну складову на початку процесу розряду батареї на  $R_{\text{в}}L$  — навантаження (коливальність пов'язана з «паразитною» ємністю  $\tilde{N}_0$ ), систематичну майже сталу похибку  $\Delta U$ , пов'язану з впливом на  $u(t)$  опору паралельної до батареї  $R_{\text{в}}L$  — вітки:

$$\Delta U = \dot{A} - \frac{E1/R_{\text{в}1} + Ldi/dt}{1/R_{\text{в}1} + 1/R_{\text{в}}}.$$

За досить великої сталої  $L/R_{\text{в}}$  початкова частина експоненти струму заряду котушки має майже лінійний характер, тому похідна  $di/dt$  майже стала.

Статичну непараметричну модель  $U(I)$  (рис. 7.19) і майже співпадаючу з нею параметричну отримано з даних нелінійної динаміки відповідно до вище розглянутих алгоритмів:

$$U(I) = \eta_1(I)(\alpha_1 + \alpha_2 I^2) + \eta_2(I)(\beta_1 + \beta_2 I + \beta_3 I^2), \quad (7.108)$$

$$\text{де } \eta_1(I) = \frac{1}{1 + (0,67 \cdot I)^{45}}, \quad \eta_2(I) = \frac{1}{1 + (1,5 \cdot I^{-1})^{45}}, \quad \alpha_1 = 20,$$

$$\alpha_2 = -1,06, \quad \beta_1 = -315, \quad \beta_2 = 432, \quad \beta_3 = -140.$$

Аналітичну модель залежності потужності  $P$  від  $U$  отримуємо як добуток  $U(I)$  на струм  $I$  (рис. 7.19). Оптимальні зна-

чення  $I^*$  струму, визначені за умови максимальної потужності батареї,  $I^* = \operatorname{argmax}_U P = 1,56 \text{ А}$ , оптимальне навантаження

(7.107)  $R_l^* \cong 12,3 \text{ Ом}$  та потужність  $P_{\max} = 29,9 \text{ Вт}$ .

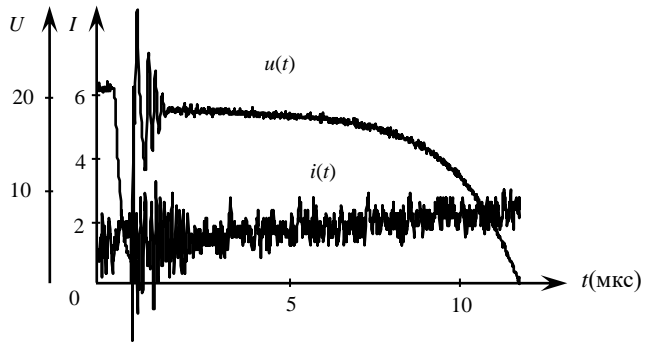


Рис. 7.18. Графіки вимірів  $u(t)$  і  $i(t)$

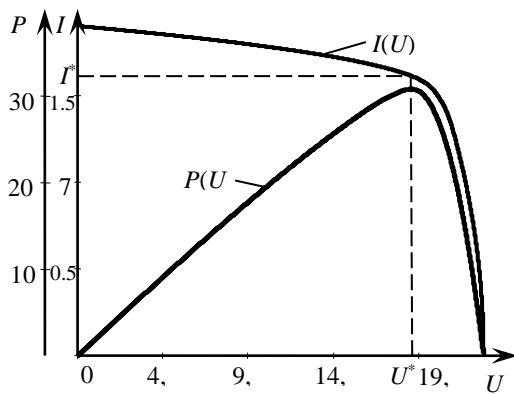


Рис. 7.19. Непараметрична і майже співпадаюча з нею параметрична (7.108) моделі ВАХ  $I(U)$  та залежність  $P(U)$

## Запитання

1. Поясніть, чому метод розділу 7.11 дає кращі результати, ніж МНК для повної нелінійної моделі?
2. Як повинен бути побудований експеримент, щоб вирішити задачу структурно-параметричної ідентифікації за методом розділу 7.2?
3. Яка необхідна умова відносно нелінійної залежності в методі розділу 7.3?
4. Чим відрізняється метод розділу 7.4 від методу кусочно-аналітичної апроксимації?
5. Чому виникають пульсації (рис. 7.15) при використанні поліному високого порядку?
6. В чому переваги і вади системи (рис. 7.17)?
7. яка умова зняття максимальної потужності з сонячної батареї?

## Розділ 8

### ДОСЛІДЖЕННЯ АДАПТИВНИХ СИСТЕМ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ

#### 8.1. Дослідження умови узгодженості показників якості підсистем різного рівня

Покажемо позитивний ефект від узгодженості показників якості багаторівневої системи на наступному прикладі:

Нехай задано квадратичний показник якості керування ЕТО:

$$I = \int_{\theta_2} (x^T G x + u^T Q u) dt, \quad (8.1)$$

де  $G, Q$  — вагові матриці;  $\theta_2$  — інтервал часу керування.

Тоді

$$\begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial \varepsilon} &= \int_{\theta_2} \left[ \delta u^T \left( \frac{\partial x}{\partial u} \right)^T G x + x^T G \frac{\partial x}{\partial u} \delta u + \delta u^T Q u + u^T Q \delta u \right] dt, \\ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 I}{\partial \varepsilon^2} &= \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \frac{\partial I}{\partial \varepsilon} = \int_{\theta_2} \left[ \delta u^T \left( \frac{\partial x}{\partial u} \right)^T G \frac{\partial x}{\partial u} \delta u + \delta u^T Q \delta u \right] du = \\ &= \int_{\theta_2} \delta u^T \left[ \left( \frac{\partial x}{\partial u} \right)^T G \frac{\partial x}{\partial u} + Q \right] \delta u dt. \end{aligned} \quad (8.2)$$

Для одиничних варіацій  $\delta u$  функціонал (8.1) буде несуперечливим основному, якщо варіації функціоналів будуть подібними:

$$\int_{\theta_2} \left[ \left( \frac{\partial x}{\partial u} \right)^T G \frac{\partial x}{\partial u} + Q \right] dt = k_1 A_1,$$

або в скалярному вигляді

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n g_{ij} \int_{\theta_2} \frac{\partial x_i}{\partial u_j} \frac{\partial x_j}{\partial u_k} dt + \int_{\theta_2} q_{lk} dt = k_1 \alpha_{lk}^1, l, k = \overline{1, m}, \quad (8.3)$$

де  $k_1$  — коефіцієнт подібності;  $\alpha_{lk}^1$  — елемент матриці  $A$ ,  $g_{ij}$ ,  $q_{lk}$  — елементи матриць  $G$  і  $Q$  відповідно.

Оскільки  $A_1$  симетрична, то загальна кількість рівнянь (8.3)  $0,5m(m+1)$ , а коефіцієнтів, що необхідно підібрати  $g_{ij}$ ,  $q_{lk}$   $0,5n(n+1)$  і  $0,5m(m+1)$  відповідно. Це дозволяє підбором їх задовольнити  $m(m+1)$  вимогам (8.3) несуперечності  $I$  до  $\Lambda$ , а також ряду інших вимог, що визначаються системою оптимізації  $I$ . При такому підході до побудови функціоналу  $I$  істотно полегшується задача задання матриць  $G$  і  $Q$ .

Наступний крок полягає в побудові критерію  $J$  підсистеми ідентифікації ЕТО. Нехай на попередньому кроці було отримано несуперечливий з  $\Lambda$  функціонал  $I$  (8.1) з ваговими  $G^*$  і  $Q^*$ , що задовольняють умову (8.3). Знайдемо другу варіацію  $I$  вже в просторі параметрів  $\beta$  моделі  $(\Sigma, \beta)$  і задамо її як еталонну для функціоналу  $J$ :

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 I}{\partial \varepsilon^2} = \int_{\theta_2} \delta u^T \left[ \left( \frac{\partial x}{\partial u} \right)^T G^* \frac{\partial x}{\partial u} \delta u + Q^* \right] \delta u dt,$$

де

$$\delta u = \frac{\partial u}{\partial \beta} \delta \beta, \quad \frac{\partial u}{\partial \beta} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial \beta_1} & \frac{\partial u_{r1}}{\partial \beta_2} & \dots & \frac{\partial u_1}{\partial \beta_r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial u_n}{\partial \beta_1} & \frac{\partial u_n}{\partial \beta_2} & \dots & \frac{\partial u_n}{\partial \beta_r} \end{bmatrix}, \quad \beta = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_r \end{bmatrix}.$$

Тоді

$$\begin{aligned} \delta^2 I(\beta) &= \int_{\theta_2} \delta \beta^T \left( \frac{\partial u}{\partial \beta} \right)^T \left[ \left( \frac{\partial x}{\partial u} \right)^T G^* \frac{\partial x}{\partial u} + Q^* \right] \frac{\partial u}{\partial \beta} \delta \beta dt = \\ &= \delta \beta^T \left[ \int_{\theta_2} \left( \frac{\partial u}{\partial \beta} \right)^T \left[ \left( \frac{\partial x}{\partial u} \right)^T \times G^* \frac{\partial x}{\partial u} + Q^* \right] \frac{\partial u}{\partial \beta} dt \right] \delta \beta = \delta \beta^T A_2 \delta \beta. \end{aligned} \quad (8.4)$$

У функціоналі

$$J = \int_{\theta_3} i(\hat{x}, x_1, \alpha) dt \quad (8.5)$$

у точці  $\hat{x} = x_1$ , що відповідає оцінці  $\hat{\beta}$ , що дорівнює  $\beta$ , перша варіація  $J$  повинна дорівнювати нулю, а друга

$$\delta^2 J(\beta) = \delta\beta^T \left[ \int_{\theta_3} \left( \frac{\partial x_1}{\partial \beta} \right)^T \frac{\partial^2 i(\alpha)}{\partial x_1^T \partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial \beta} dt \right] \delta\beta$$

подібна (8.4), тобто:

$$A_3 = \int_{\theta_3} \left( \frac{\partial x_1}{\partial \beta} \right) \frac{\partial^2 i(\alpha)}{\partial x_1^T \partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial \beta} dt = k_2 A_2, \quad (8.6)$$

де  $A_2$  містить  $0,5r(r+1)$  різноманітних елементів  $\alpha_{ij}^2$ .

Для того, щоб повністю задовольнити (8.6) функціонал (8.5) повинен містити не менше ніж  $0,5r(r+1)$  керованих параметрів  $\alpha$ .

Нехай, як приклад, модель  $(\Sigma, \beta)$  подано у вигляді

$$x_1(t) = \sum_{i=1}^n \beta_i W_i(p) u(t),$$

де  $W_i(p)$  — задані оператори від  $p = \frac{d}{dt}$ .

Покладемо, що в (8.4)

$$A_2 = \text{diag} [\alpha_{ij}^2].$$

Із умови (8.6), тобто з умови  $k_2 \alpha_{ij}^2 = \alpha_{ij}^3$ , знайдемо  $u(t)$  і представимо набором ортогональних функцій  $\varphi_k(t)$ :

$$u(t) = \sum_{k=1}^m \alpha_k \varphi_k(t), \quad (8.7)$$

де  $m$  — кількість членів  $\varphi_k(t)$ , що надають адекватне уявлення  $u(t)$  на інтервалі ідентифікації  $\theta_3 = [0 T]$ ;  $\varphi_k(t), k = \overline{1, n}$  — система ортогональних функцій, наприклад косинусний ряд

$$\varphi_k(t) = \cos\left(\frac{2k-1}{2}\right)\frac{\pi}{T}t. \quad (8.8)$$

Якщо  $J = \int_0^I \varepsilon^2(t) dt$ , де  $\varepsilon(t) = \hat{x}(t) - x_1(t)$ , то в (8.6) елементи

$$\alpha_{ij}^2 = \alpha_{ij}^3 / k_2 = \int_0^T [W_i(p)u(t)][W_j(p)u(t)] dt.$$

Позначимо

$$W_i(p)u(t) = y_i(t), i = \overline{1, n},$$

де з урахуванням (8.7), (8.8)

$$y_{ij}(t) = W_i(p)\varphi_k(t).$$

Тоді

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_{ij}^3}{k_2} &= \int_0^T \left( \sum_{k=1}^m \alpha_k y_{ik}(t) \right) \left( \sum_{k=1}^m \alpha_k y_{jk}(t) \right) dt = \\ &= \sum_{k=1}^m \sum_{q=1}^m \alpha_k \alpha_q \int_0^T y_{ik}(t) y_{jq}(t) dt = \sum_{k=1}^m \sum_{q=1}^m \alpha_k \alpha_q y_{ik}, \end{aligned}$$

де  $y_{ik} = \int_0^I y_{ik}(t) y_{jq}(t) dt$  розраховується заздалегідь.

Оптимальне значення  $\alpha$  знайдемо з умови

$$\alpha^* = \arg \min_{\alpha \in R} \left\| \frac{\alpha_{ij}^3}{k_2} - \sum_{k=1}^m \sum_{q=1}^m \alpha_k \alpha_q y_{ij}^{kq} \right\|, \quad (8.9)$$

$$i, j = \overline{1, n},$$

де всі змінні, крім  $\alpha$ , заздалегідь розраховані.

Якщо розмірність  $\alpha$  дорівнює або більше  $0,5 r(r+1)$ , то мінімум норми в (8.9) дорівнює нулю і маємо точну подібність варіацій функціоналів  $J$  та  $I$ .

Аналогічно попереднім, отримавши  $J$  і визначивши його варіацію від вектора  $\beta_0$  параметрів фільтра, підбираємо показник  $J_\phi$  якості фільтра  $(\Sigma_0 \beta_0)$  з умови подібності (8.4), а показник  $J_{\text{пн}}$  якості первинних перетворювачів — подібним  $J_\phi$ , отриманому на попередньому кроці.



Зважаючи на складність аналітичного розв'язання задачі узгодження функціоналів конструктивним є підхід, що полягає у плануванні комп'ютерного експерименту.

Створення систем автоматизованого проектування (САПР) критеріїв ієрархічних систем за наявності відповідного математичного забезпечення істотно полегшує задачу. На ЕОМ послідовно імітуються підсистеми двох суміжних рівнів, починаючи з верхнього; здійснюється експеримент, направлений на визначення других варіацій функціоналів відносно їх екстремального значення; формується додатковий функціонал [типу (8.9)], що визначає близькість (подібність) других варіацій заданого (верхній рівень) і синтезованого (нижній рівень) функціоналів; додатковий функціонал оптимізується шляхом підстроювання параметрів підсистеми нижнього рівня.

Для скорочення варіантів доцільно застосовувати оптимальні плани експерименту [32]. Якщо експеримент виконується для дослідження області екстремуму функціоналу, то за відомого значення екстремуму, для визначення других варіацій, необхідно і достатньо виконувати «зірковий експеримент», що полягає в почерговому відхиленні на величину «зоряного плеча»  $\pm\alpha$  кожної зі змінних, за якими знаходиться друга варіація функціонала; якщо координати екстремуму функціоналу невідомі, то оптимальним експериментом, з метою побудови квадратичної моделі виду

$$y(x) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \alpha_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^n \alpha_{ii} x_i^2 \quad (8.10)$$

буде — центральний композиційний план Бокса [15, 89]. Цей план можна зробити ортогональним. Нормовані змінні моделі (8.10) приймають п'ять значень  $-0, +1, -1, +\alpha, -\alpha$ . План експерименту містить:

- 1) повний факторний — експеримент  $2^n$  або дрібні репліки (якщо  $n > 5$ );
- 2) «зірковий план»;
- 3) точку в центрі плану (усього  $N$  експериментів).

Для побудови ортогонального плану модель (8.10) перетворюють до виду

$$y(x) = b_0 + \sum_{i=1}^n \alpha_i \tilde{x}_i + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \alpha_{ij} \tilde{x}_i \tilde{x}_{j+} + \sum_{i=1}^n \alpha_{ii} \tilde{x}_i^2, \quad (8.11)$$

де

$$b_0 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^n \alpha_{ii} x_i^2, \tilde{x}_i^2 = x_i^2 - c, c = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_i^2(k),$$

де  $k$  — номер досліду.

Нові змінні  $\tilde{x}_i^2$  будуть зміщуватися на значення  $-c$ . Це дасть змогу підібрати  $\alpha$  так, щоб усі стовпці матриці експерименту були попарно ортогональні. Наприклад, для  $n = 3$  та моделі (8.10) матриця плану Боксу подана в табл. 8.1, де  $c = (1/15) 2, \sum_{k=1}^{15} x_i^2(k) = (8 + 2\alpha^2)/15$  для будь-якого  $i$ .

Таблиця 8.1

**Матриця оптимального плану експерименту на ЕТО**

Вид плану	Нормовані змінні $X(k)$										
	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_1x_2$	$x_1x_3$	$x_2x_3$	$\tilde{x}_1^2$	$\tilde{x}_2^2$	$\tilde{x}_3^2$	$y(k)$
1	1	-1	-1	-1	1	1	1	1-c	1-c	1-c	y(1)
	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1-c	1-c	1-c	y(2)
	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1-c	1-c	1-c	y(3)
	1	1	1	-1	1	-1	-1	1-c	1-c	1-c	y(4)
	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1-c	1-c	1-c	y(5)
	1	1	-1	1	-1	1	-1	1-c	1-c	1-c	y(6)
	1	-1	1	1	-1	-1	1	1-c	1-c	1-c	y(7)
	1	1	1	1	1	1	1	1-c	1-c	1-c	y(8)
2	1	$-\alpha$	0	0	0	0	0	$\alpha^2-c$	$-c$	$-c$	y(9)
	1	$\alpha$	0	0	0	0	0	$\alpha^2-c$	$-c$	$-c$	y(10)
	1	0	$-\alpha$	0	0	0	0	$-c$	$\alpha^2-c$	$-c$	y(11)
	1	0	$\alpha$	0	0	0	0	$-c$	$\alpha^2-c$	$-c$	y(12)
	1	0	0	$-\alpha$	0	0	0	$-c$	$-c$	$\alpha^2-c$	y(13)
	1	0	0	$\alpha$	0	0	0	$-c$	$-c$	$\alpha^2-c$	y(14)
	1	0	0	0	0	0	0	$-c$	$-c$	$-c$	y(15)

«Зоряне плече»  $\alpha$  підбирають згідно з табл. 8.4 за умови ортогональності  $\tilde{x}_i^2$ :

$$\sum_{k=1}^N x_i^2(k) x_j^2(k) = 8(1-c)^2 - 4c(\alpha^2 - c) + 3c^2 = 0.$$

Підставивши сюди вирази для  $c$ , отримаємо  $\alpha = \sqrt{30} - 4 \approx 1,5$ ,  $\tilde{n} \approx 0,83$ . Унаслідок взаємної ортогональності коефіцієнти  $b_0, \alpha_i, \alpha_{ij}, \alpha_{jj}$ , моделі (8.11) визначають незалежно за методом найменших квадратів.

Від цих коефіцієнтів легко перейти до коефіцієнтів моделі (8.10), а від неї до моделі з ненормованими змінними. Для цього  $\alpha_j$  — поділяють на модуль кроку варіювання  $i$ -ї змінної,  $\alpha_{ij}$  — на добуток цих модулів  $j$ -ї та  $i$ -ї змінної  $i = \overline{1, n}, j = \overline{1, n}, i = j$ .

За наявності моделей функціоналів підсистем верхнього і нижнього рівнів, нижній конструюють по верхньому шляхом варіювання структури і параметрів нижньої підсистеми за умови мінімуму додаткового функціонала різниці коефіцієнтів  $\alpha_i, \alpha_{ij}, \alpha_{ii}$  моделей (8.10) двох рівнів.

## **8.2. Дослідження адаптивної системи керування процесом витягування кварцової трубки**

Щоб продукція українського виробника потрапила на світовий ринок і склала конкуренцію зарубіжним зразкам необхідно не просто автоматизувати процес її виробництва, а впровадити найбільш ефективні принципи керування: це адаптація систем управління до об'єкту керування на основі коректних методів його ідентифікації, адаптація процесу ідентифікації до нестаціонарності стохастичних процесів, що відбувається в об'єкті керування, адаптація еталонних моделей, оптимізація уставок та процесу стабілізації відповідних змінних ЕТК.

Розглянемо застосування цих принципів на прикладі АСУТП витягування кварцової трубки заданих діаметру  $d_{\text{вн}}$  і

товщини стінки  $\delta_{ст}$  з склоблоку, що має відповідні зовнішній  $D_з$  і внутрішній  $D_{вн}$  діаметри (рис. 8.1).

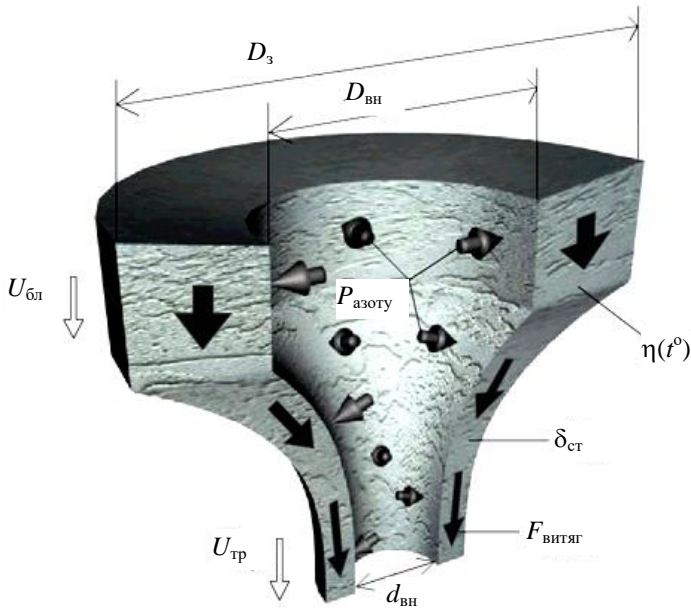


Рис. 8.1. Грушоподібна ділянка переходу блока в трубку

Блок розігрівають до температури  $t$  °С розм'якшення і під дією зусилля  $F_{вигтяг}$  і тиску  $P_{азоту}$  з середини він перетягується в трубку. Якщо швидкість подачі блоку  $U_{бл}$ , а витягування трубки, то, за умови закону незмінності маси, отримаємо співвідношення

$$\frac{D_з^2 - D_{вн}^2}{d_{вн}^2 - d_{вн}^2} = \frac{U_{тр}}{U_{бл}} \quad (8.12)$$

або через товщину стінки  $\delta_{ст}$  трубки:

$$\delta_{ст}(2d_{вн} + \delta_{ст}) = \frac{U_{бл}}{U_{тр}}(D_з^2 - D_{вн}^2). \quad (8.13)$$

Формула (8.13) вказує на взаємозв'язок  $d_{вн}$  і  $\delta_{ст}$ . Тому об'єкт керування слід розглянути як багатовимірний з перехресними зв'язками: щоб забезпечити стабільність  $d_{вн}$  і  $\delta_{ст}$  необхідно

одночас змінювати як тиск  $P_{\text{азоту}}$  так і швидкість  $U_{\text{тр}}$  витягування трубки. Окрім того слід застабілізувати швидкість  $U_{\text{бл}}$  подачі блока, температуру  $t^{\circ}\text{C}$  його, в'язкість  $\eta$  розігрітої скломаси або зусилля витягування (момент  $M(\eta)$ ).

Фізико-хімічна нестабільність блока виступає як стохастичне збурення, компенсувати дію якого зобов'язана система автоматичного керування.

### Побудова математичної моделі системи в режимі «Робота»

Для обмежених відхилень від номінального режиму і інтервалу часу нелінійний нестационарний стохастичний процес, що протікає в об'єкті, може бути представлено стаціонарним векторно-матричним диференціальним оператором

$$L(t)X_{\text{в}}(t) = \tilde{L}(t)U(t) \quad (8.14)$$

або матричною передатною функцією  $W(s)$ , якщо скористуватись перетворенням Лапласу:

$$X_{\text{в}}(s) = W(s)U(s), \quad (8.15)$$

де  $X_{\text{в}}$  — вектор-функція вихідних величин об'єкта, а саме  $\delta_{\text{ст}}$ ,  $d_{\text{вн}}$ ,  $U_{\text{бл}}$ ,  $t^0$ ,  $M(\eta)$ ;  $U(s)$  — вхідних:  $U_{\text{тр}}$ ,  $P_{\text{азоту}}$ ,  $U_{\text{бл}}^*$ , струму  $I$  нагрівача блока. На рис. 8.7 розкрито структуру  $W(s)$ , яка має перехресний зв'язок першого і другого каналів (передаточні функції  $W_{12}$  і  $W_{21}$ ). Вплив інших каналів на них враховано параметричним збуренням  $\xi$ , що діє на  $W_{ij}$ ,  $i, j = 1, 2$ , окрім цього мають місце сигнальні збурення від нестабільності  $\delta V_{\text{ае}}^*$  швидкості  $V_{\text{ае}}$  та вплив  $t^0$  на  $M(\eta)$ . Для їх компенсації система має ПП – регулятори по окремим каналам, а для розв'язки першого і другого додатково ввімкнено діаганалізатор  $W_g(s)$ . З умови, що

$$W_g(s)W(s) = \text{diag } W(s) \quad (8.17)$$

визначають оператори  $W_{ij}^g$  діаганалізатора:

$$W_{12}^g(s) = -W_{12}W_{11}^{-1}(s), \quad W_{21}^g(s) = -W_{21}W_{22}^{-1}(s). \quad (8.17)$$

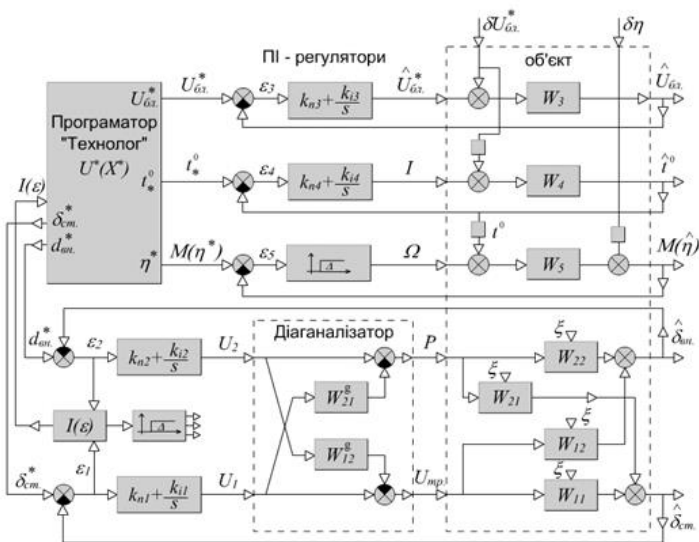


Рис. 8.2. Структурна схема системи керування в режимі «Робота»

Шляхом настроювання параметрів  $k_n$  і  $k_I$  ПІ-регулятора динаміка кожного з каналів наближається до динаміки еталонної моделі (рис. 8.3). Для цього за принципом мінімальної складності апроксимується відповідний канал об'єкта інерційного каналу першого порядку (рис. 8.4). Далі, за умови еквівалентності еталонної моделі (див. рис. 8.3) і САК  $i$ -го каналу, знаходять коефіцієнти ПІ-регулятора:

$$k_n = k_{em} k_{ii}^{-1} \tau_{ii}; \quad k_I = k_{em} k_{kk}^{-1}. \quad (8.18)$$

Блок  $I(\varepsilon)$  контролює якість вихідного продукту (відхилення діаметру і товщини трубки) і у випадку зниження якості система переходить в режим «Навчання».

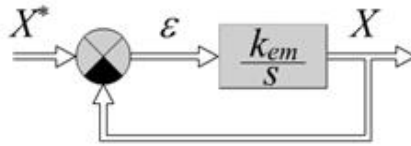


Рис. 8.3. Еталонна модель

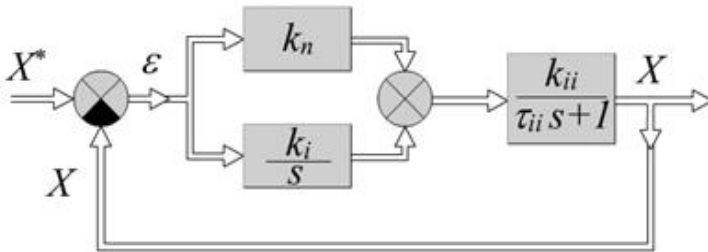


Рис. 8.4. САК з ПІ-регулятором

### Побудова математичної моделі системи в режимі «Навчання»

Перехід з режиму «Робота» в режим «Навчання» здійснюється шляхом розмикання ключа 3 і замикання інших ключів (рис. 8.5). Тоді на об'єкт подається тільки програмний вплив  $U_0$ , а також тестуючий вплив  $\delta U$ . У блоці 7 визначається модель  $W_M(s)$  об'єкта і, відповідно до її параметрів, блоками 8, 9 настроюються за алгоритмом (8.17) діагностичний аналізатор  $W_g(s)$  і за алгоритмом (8.18) ПІ-регулятори  $W_p(s)$ .

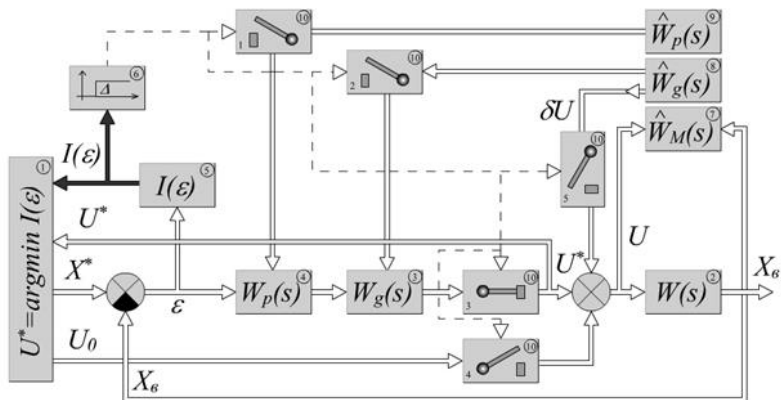


Рис. 8.5. Структурна схема системи

Режим «Навчання» обов'язково має місце на початку процесу витягування трубки, а також може виникати в процесі витяжки, якщо  $I(\varepsilon) > \Delta$ .

Розглянемо процес ідентифікації прямих  $W_{11}$ ,  $W_{22}$  і перехресних  $W_{12}$ ,  $W_{21}$  операторів об'єкта на початку процесу витягування. Залежно від знаку відхилень  $d_{\hat{a}i}$  і  $\delta_{\hat{\tau}i}$  від номінальних значень, починаючи з плюс чи мінус, з блоку ідентифікатора подається взаємозалежна послідовність сходинок  $\Delta P$  і  $\Delta U_{\delta\delta}$ , амплітуда яких поступово зменшується (рис. 8.6).

У межах кожної сходинки перехідний процес практично закінчується і описується експонентною. Тоді оцінка коефіцієнта  $\hat{k}_{ij}$ ,  $i=1,2$  визначається, як відношення приросту вихідної змінної  $j$ -го каналу  $\Delta x_j$  до приросту відповідної вхідної  $\Delta U_i$ , а оцінка сталої  $\hat{\tau}_{ij}$  часу — за робастним алгоритмом Тьюкі, як медіана упорядкованого по величині  $\tau_{ij}(k)$  ряду.



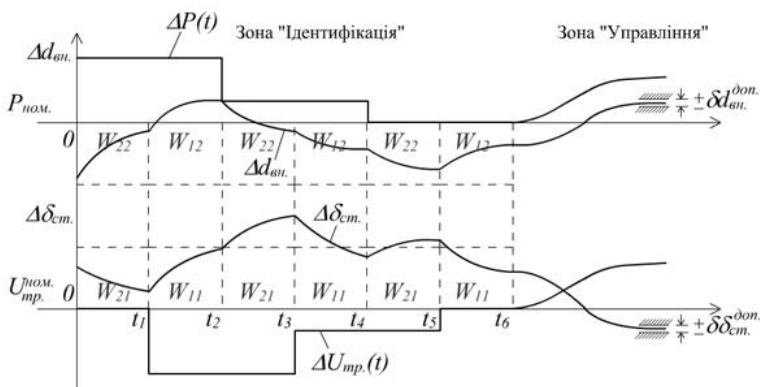


Рис. 8.6. Графіки перехідних процесів по  $d_{ст}$  і  $\delta_{ст}$

$$\hat{\tau}_{ij} = Me\{\tau_{ij}(k)\}, \quad (8.19)$$

де

$$\tau_{ij}(k) = - \frac{t_k}{\ln \left| \frac{\Delta x_j(t_k)}{\Delta x_j(t_n)} - 1 \right|},$$

$k = \overline{0, n}$  — дискретний час конкретної ділянки  $[t_l, t_{l+1}]$ ,  $l = \overline{0, 5}$ .

Подальше уточнення оцінок  $\hat{k}_{ij}$ ,  $\hat{\tau}_{ij}$  досягається лінійною апроксимацією їх у функції амплітуди тестуючого сигналу:

$$\begin{aligned} \hat{k}_{ij}(\Delta P, \Delta U_{\delta\delta}) &= k_{ij}^* + a_1^{ij} \Delta P + a_2^{ij} \Delta U_{\delta\delta}; \\ \hat{\tau}_{ij}(\Delta P, \Delta \delta_{\delta\delta}) &= \tau_{ij}^* + b_1^{ij} \Delta P + b_2^{ij} \Delta U_{\delta\delta}. \end{aligned} \quad (8.20)$$

Шуканими будуть  $k_{ij}^*$  і  $\tau_{ij}^*$ . По визначенню параметрів об'єкта по всіх каналах, настраюються параметри діагностатора і регуляторів, ключі 1, 2, 4, 5 розмикаються, а ключ 3 підймає САК до об'єкта, тобто система переходить у режим «Робота».

**Дослідження роботи системи в режимі ноніусного уточнення моделі  
об'єкта і алгоритму керування**

Якщо в режимі «Робота» функціонал  $I(\varepsilon)$  суттєво менше  $\Delta$  і керуючі впливи змінюються несуттєво, то в підсистему «Технолог» поступає інформація про  $U^*$ , яка уточнює технологічну карту режимів, тобто співвідношення  $X_a^*(U^*)$  між номінальними значеннями вхідних і вихідних змінних об'єкта. Далі при цих значеннях  $U^*$  комутатор 3 (рис. 8.5) знов розмикається, а замикаються інші і система переходить в режим ноніусного уточнення моделі об'єкта.

Для цього з блоку 8 (рис. 8.5) на відповідні канали подаються взаємо- і автонекорельовані псевдовипадкові бінарні послідовності тестуючих сигналів (рис. 8.6) і за інтегрованим методом найменших квадратів (ІМНК) для згладжених даних уточнюються параметри  $k_{ij}$ ,  $\tau_{ij}$  базових моделей, визначається похибка апроксимації об'єкта базовими моделями і далі тим же методом оцінюється параметри уточнюючих операторів  $W_y$  ноніусних моделей за умови, що вже відомий — базовий. Наприклад, інертно-диференційний оператор каналу стабілізації температури:

$$W_y(s) = \frac{T_4 s + 1}{\tau_4 s + 1}. \quad (8.21)$$

Тоді ноніусна модель набуває вигляду:

$$W_{M4} = \frac{k_4^*}{\tau_4^* s + 1} \cdot \frac{T_4 s + 1}{\tau_4 s + 1}. \quad (8.22)$$

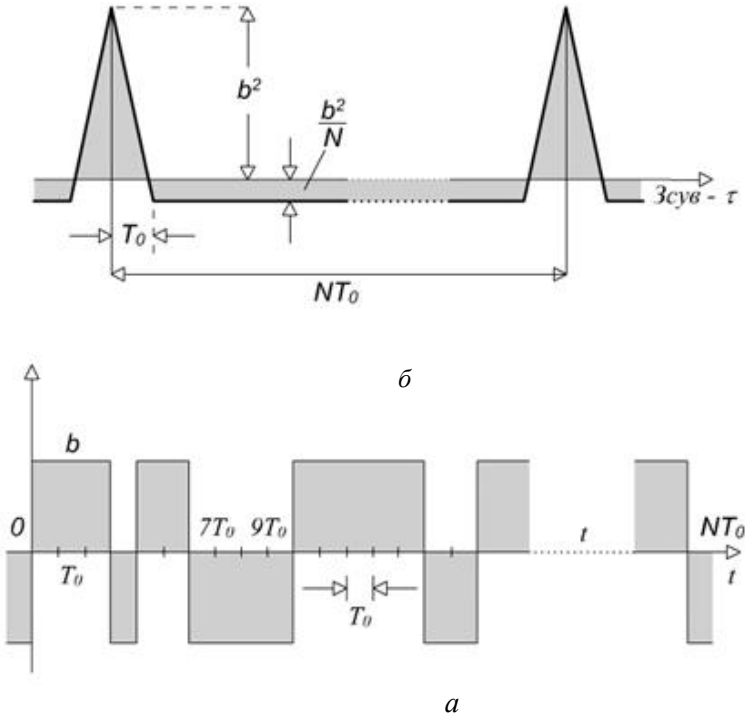


Рис. 8.7. Кореляційна функція (а) сигналу (б)

Щоб динаміка ЕТК відповідала еталонній відповідно коректується алгоритм управління шляхом підключення до ПІ-регулятора компенсуючої оператор  $W_y(s)$  ланки  $W_y^{-1}(s)$  (рис. 8.8).



Рис. 8.8. Ноніусна корекція каналу стабілізації  $t^0$

У процесі ноніусної ідентифікації контролюється значення показника  $I(\epsilon)$  і, при наближенні його до  $\Delta$ , система

переходить у режим «Робота» з тою моделлю, яку вдалося визначити. Цим досягається адаптивність до нестационарності збурень: чим стаціонарніше процес, тим точніша модель і менше значення  $I(\varepsilon)$ . Але і за умови нестационарності система встигає побудувати базову просту модель і забезпечити стійкість і якість процесу керування.

Окрім цього, якщо  $I(\varepsilon) \ll \Delta$ , система може зменшувати інерційність еталонних моделей і відповідно каналів стабілізації технологічних параметрів, збільшуючи швидкодію. Тут також можна досягти скорочення кількості різних варіантів, застосовуючи методику планування експерименту для побудови моделі залежності цього додаткового функціоналу від структур і параметрів підсистем нижнього рівня. Узгодивши критерії підсистем усіх рівнів та оптимізувавши їх, одержимо оптимальну систему другого наближення. Повторивши для неї процедуру узгодження критеріїв і оптимізувавши їх, отримаємо третє наближення. Процес узгодження припиняється, якщо результати подальших ітерацій мало відрізняються. Забезпечення несуперечності критеріїв теоретичним або імітаційним моделюванням на ЕОМ певною мірою наблизить задачу умовної оптимізації до задачі знаходження найкращого рішення (визначення глобального екстремуму головного критерію  $\Lambda$ ).

### Запитання

1. Як досягається узгодженість показників якості підсистем різного рівня?
2. Як безконтактно досягається формування маленьких розмірів кварцової трубки з кварцового блоку великих розмірів?
3. Для чого необхідна розв'язка каналів керування за діаметром і товщиною стінки трубки?
4. Що дає режим «навчання» для режиму «робота» установки?
5. В чому полягає ноніусне уточнення моделі процесу?

## Розділ 9

# ВИКОРИСТАННЯ МЕТОДОЛОГІЇ НАУКОВИХ ДОСЛІДЖЕНЬ ДЛЯ УТОЧНЕННЯ І ПОЯСНЕННЯ ФІЗИЧНИХ ЯВИЩ

### 9.1. Побудова нелінійних динамічних моделей резистивних елементів

Традиційно більшість резисторів прийнято вважати **ідеальними (лінійними, стаціонарними, безінерційними)**. Ідеальний резистор повинен мати активний опір  $R$ , на якому згідно до закону Джоуля–Ленца електрична енергія  $W_e$  за час  $t$  повністю і безповороту перетворюється на теплову  $Q$ :

$$Q = I^2 R Q t. \quad (9.1)$$

Теплова енергія витрачається на нагрів резистора і оточуючого середовища. Щоб визначити як впливає температура  $\theta^0$  резистора на його опір  $R$  скористуємось фізико-математичною моделлю опору  $R$  резистора:

$$R = \frac{l}{\gamma S}, \quad (9.2)$$

де  $l$  — довжина;  $S$  — площа поперечного перерізу;  $\gamma$  — питома провідність провідника резистора.

Як відомо із курсу фізики,

$$\gamma = |e| n \beta, \quad (9.3)$$

де  $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл — заряд електрона;  $n$  — концентрація вільних електронів у провіднику;  $\beta$  — коефіцієнт вільного пробігу електрону, який для металів зменшується при збільшенні температури  $\theta^0$  внаслідок збільшення протидії напрямленому руху тепловим хаотичним. Тобто

$$\beta = \beta(\theta^0). \quad (9.4)$$

Тоді опір  $R$  буде функцією  $\theta^0$ . Для відносно малих змін  $\Delta\theta^0$  ця залежність майже лінійна:

$$R(\theta^0) \cong R(\theta_0^0) [1 + \alpha \Delta\theta^0], \quad (9.5)$$

де  $\alpha$  — температурний коефіцієнт опору.

Як відомо з термодинаміки, для малих приростів  $dQ$  теплоти  $Q$  має місце диференціал:

$$dQ = cmd\theta^0 + K_{\delta\alpha} S_{\text{ox}} \Delta\theta^0 dt, \quad (9.6)$$

де  $c$  — теплоємність;  $m$  — маса;  $K_{\delta\alpha}$  — коефіцієнт тепло-віддачі,  $S_{\text{ox}}$  — площа охолодження резистора.

Швидкістю зміни теплоти  $Q$  є потужність:

$$\frac{dQ}{dt} = P = I^2 R(\theta^0) = cm \frac{d\theta^0}{dt} + K_{\delta\alpha} S_{i\delta} \Delta\theta^0. \quad (9.7)$$

Якщо для спрощення викладок прийняти, що потужність  $P$  незмінна, то в усталеному режимі

$$P = I^2 R(\theta_\infty^0) = K_{\delta\alpha} S_{i\delta} \Delta\theta_\infty^0, \quad (9.8)$$

де  $\Delta\theta_\infty^0 = \theta_\infty^0 - \theta_0^0$ , то рівняння (9.7) набуває вигляду:

$$\tau_\delta \frac{d\Delta\theta^0}{dt} + \Delta\theta^0 = \Delta\theta_\infty^0, \quad (9.9)$$

де  $\tau_\delta = \frac{cm}{K_{\delta\alpha} S_{i\delta}}$  — теплова стала часу резистора,

$$\Delta\theta^0 = \theta^0(t) - \theta_0^0, \quad \frac{d\Delta\theta^0}{dt} = \frac{d\theta^0}{dt}.$$

Для потужних резисторів стала часу може бути значною. Нагрів провідника резистора згідно (9.9) відбувається за експоненціальним законом (рис. 9.1):

Відповідно до  $R(\theta^0(t))$ , з урахуванням рівнянь (9.5) і (9.10), буде змінюватись у часі, змінюючи за тією самою експонентою свій опір від  $R(\theta_0^0)$  до  $R(\theta_\infty^0)$  (рис. 9.2):

$$\begin{aligned} R(\theta^0(t)) &= R(\theta^0(0)) [1 + \alpha \Delta\theta^0(t)] = \\ &= R(\theta^0(0)) \left[ 1 + \alpha \Delta\theta_\infty^0 \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau_\delta}} \right) \right]. \end{aligned} \quad (9.11)$$

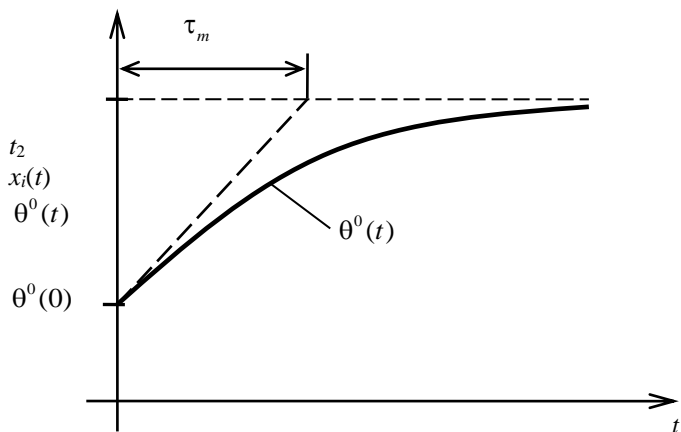


Рис. 9.1. Графік нагріву резистора

При підключенні резистора до ідеального джерела постійної напруги  $U$  струм у колі «джерело — резистор» за законом Ома з урахуванням залежності (9.11) буде зменшуватись у часі приблизно за тим же експоненціальним законом (рис. 9.3):

$$\begin{aligned}
 I(t) &= \frac{U}{R(\theta^0(0)) \left[ 1 + \alpha \Delta \theta_{\infty}^0 \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau_0}} \right) \right]} \approx \\
 &\approx I(0) \left[ 1 - \alpha \Delta \theta_{\infty}^0 \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau_0}} \right) \right].
 \end{aligned}
 \tag{9.12}$$

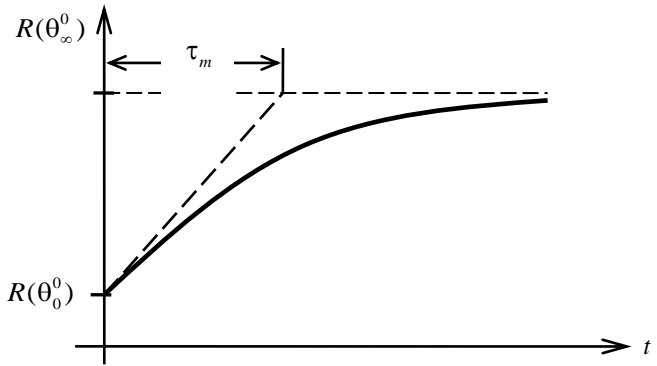


Рис. 9.9. Графік  $R(\theta^0(t))$

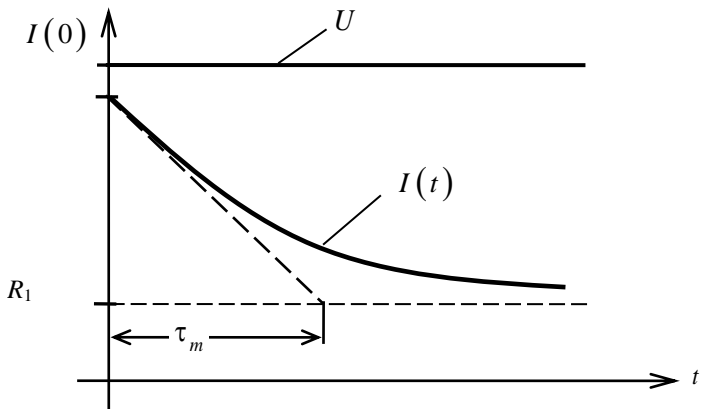


Рис. 9.3. Графік  $I(\theta^0(t))$

Графіку  $I(t)$  (рис. 9.3) відповідає схема **заміщення реального резистора** (рис. 9.4), як  $RC$ -двополюсника:



У момент  $t = 0$  комутації ємнісний опір нульовий. Тому

$$\frac{R_1 R(\theta_\infty^0)}{R_1 + R(\theta_\infty^0)} = R(\theta^0(0)), \quad (9.13)$$

звідки 
$$R_1 = \frac{R_0 R_\infty}{R_\infty - R_0}. \quad (9.14)$$

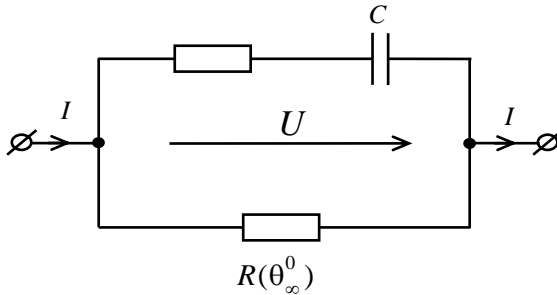


Рис. 9.4. Схема заміщення резистора

Ємність  $C$  визначаємо з умови  $\tau_\delta = R_1 C$  з урахуванням рівнянь (9.8) і (9.9):

$$C = \frac{cm(R_\infty - R_0)}{K_{\delta\alpha} S_{i\delta} R_\infty R_0}. \quad (9.15)$$

Залежно від динаміки зміни напруги  $U$ , коефіцієнтів  $m$ ,  $K_{\delta\alpha}$ ,  $S_{i\delta}$ ,  $c$ ,  $\sigma$ , приросту  $\Delta\theta^0$  залежність  $R(I^2(\theta^0(t)))$  може бути як суттєвою, так і несуттєвою.

Відповідно резистор може розглядатися як безінерційний, так і інерційний, як лінійний елемент зі сталим опором  $R$ , так і нелінійний, де  $R$  — функція  $I^2$ .

Повернемося до усталеного режиму  $\left(\frac{d\theta^0}{dt} = 0\right)$  і ви-

значимо аналітичну залежність  $R(I)$ .

З рівняння (9.7) при  $\frac{d\theta^0}{dt} = 0$  і  $t \rightarrow \infty$  отримаємо:

$$I^2 R(\theta_\infty^0) = K_{\text{оа}} S_{\text{іо}} \Delta\theta_\infty^0. \quad (9.16)$$

Звідси знайдемо  $\Delta\theta_\infty^0$  і підставимо в рівняння (9.5):

$$R(\theta_\infty^0) \cong R(\theta_0^0) \left[ 1 + \alpha \frac{R(\theta_\infty^0)}{K_{\text{оа}} S_{\text{іо}}} I^2 \right],$$

або

$$R(\theta_\infty^0) \cong \frac{R(\theta_0^0)}{1 - \alpha \frac{R(\theta_0^0)}{K_{\text{оа}} S_{\text{іо}}} I^2}. \quad (9.17)$$

Враховуючи, що для матеріалу резисторів  $\alpha \frac{R(\theta_0^0)}{K_{\text{оа}} S_{\text{іо}}} I^2 \ll 1$ ,

розклавши рівняння (9.17) у ряд Тейлора і беручи тільки перший член розкладання, отримаємо:

$$R(\theta_\infty^0) = R(\theta_0^0) [1 + \eta I^2], \quad (9.18)$$

де  $\eta$  — параметр резистора, який визначає нелінійний вплив струму  $I$  на опір  $R$ ,

$$\eta = \alpha \frac{R(\theta_0^0)}{K_{\text{оа}} S_{\text{іо}}}. \quad (9.19)$$

Параметр  $\eta$  пропорційний  $\alpha$  і зворотно пропорційний  $K_{\text{оа}} S_{\text{іо}}$ . Залежно від величини  $\eta$  і  $I^2$ , а також точності вимірювань, резистор слід розглядати як лінійний чи нелінійний елемент.

У наступному експерименті при його детальному плануванні слід розглядати дві цілі:

1) Для існуючих в ЕТК на стенді приладів **перевірити чи будуть резистори лінійними** (опір  $R$  незмінним) з урахуванням

точності вимірювання напруги  $U$  і струму  $I$ .

2) Шляхом оптимального планування експерименту (значень  $U$ ,  $I$  і кількості їх вимірювань) **визначити малий параметр  $\eta$** .

Для **вирішення першої цілі** (перевірки чи можна вважати резистори стенду лінійними елементами в межах похибок вимірювальних приладів стенду) — проведемо планування експерименту з вибором оптимального варіанту.

Наприклад, лабораторний стенд ЕВ-4, як ЕТК, має стрілочні амперметри з рівномірною шкалою від 0 до 5 А класом точності  $\gamma = 1,5\%$ ; цифровий мультиметр виміру напруги або опору з абсолютною похибкою — одиницею молодшого десяткового розряду, тобто  $\pm 10^{-5}$ . Опір  $R(0)$  холодного резистора можна досить точно виміряти цифровим омметром.

Струм омметра практично не змінить температуру резистора внаслідок його малості. Опір нагрітого резистора визначимо методом вольтметра-амперметра для максимально допустимого струму  $I_{\max} \cong 1,2I_f$ , де  $I_f$  — номінальне значення. Резистори стенда мають паспортні дані  $P = 50$  Вт,  $R = 100 \hat{\Omega}$ , тоді  $I_{\max} \approx 0,8$  А.

Для зменшення систематичної похибки, пов'язаної з ненульовим опором амперметра, вимірюємо його опір за допомогою цифрового омметра. Тоді незміщена оцінка  $\hat{R}$  опору резистора  $R$  дорівнюватиме:

$$\hat{R} = \frac{\hat{U}}{\hat{I}} - R_A, \quad (9.20)$$

де  $\hat{U}$ ,  $\hat{I}$  — виміри цифровим вольтметром напруги джерела  $\hat{U}$ , аналоговим амперметром струму  $\hat{I}$  і  $R_A$  — вимір опору амперметра (маючи велику точність цифрового омметра можна вважати точним).

Виміри  $\hat{U}$  і  $\hat{I}$  мають випадкові похибки, які некорельовані як між собою, так і між вимірами і, як правило, мають нормальний гаусовий розподіл.

Абсолютну похибку амперметра визначимо за його класом його точності ( $\gamma = 1,5\%$ )

$$\Delta \hat{I} = \frac{\gamma I_{\max}}{100} = 0,015 A.$$

Абсолютна похибка вимірювання напруги пов'язана не стільки з вольтметром (він досить точний), як з нестабільністю напруги джерела  $U$ . Для оцінювання нестабільності виконаємо  $n$  вимірювань  $\hat{U}$ , знайдемо оцінку середнього значення

$$\bar{U} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \hat{U}(k) \quad (9.21)$$

і незміщену оцінку  $\hat{\sigma}_U$  середньоквадратичного розкиду  $\sigma_U$  вимірів  $\hat{U}(k)$  відносно  $\bar{U}$ :

$$\hat{\sigma}_U = \left( \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (\hat{U}(k) - \bar{U})^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (9.22)$$

Оцінку нагрітого резистора при  $I_{\max} = 0,8 A$  отримаємо за формулою (9.20), де в якості  $\hat{U}$  візьмемо  $\bar{U}$  (9.21). Висновок про лінійність чи не лінійність резистора з відповідною достовірністю можна зробити шляхом співставлення опору  $R$  холодного резистора (вимір омметром) і  $\hat{R}$  як відношення (9.20)  $\bar{U}$  до  $\hat{I}$ . Вважаючи похибку  $\delta \hat{R}/R$  досить малою, наближено маємо:

$$\frac{\delta \hat{R}}{R} \cong \left[ \frac{\partial \hat{R}}{\partial \hat{U}} \Big|_{U,I} \delta \hat{U} + \frac{\partial \hat{R}}{\partial \hat{I}} \Big|_{U,I} \delta \hat{I} \right] R^{-1} = \frac{\delta \hat{U}}{U} - \frac{\delta \hat{I}}{I}. \quad (9.23)$$

Похибки  $\delta \hat{U}$  і  $\delta \hat{I}$  за своєю сутністю мають випадковий характер. Це, як правило, нормальний розподіл з нульовим

математичним очікуванням і дисперсіями  $\sigma_{\hat{U}}^2$ ,  $\sigma_{\hat{I}}^2$ . У результаті  $n$  спостережень напруги  $U$  маємо вибірку  $\hat{U}_1, \hat{U}_2, \dots, \hat{U}_n$  об'єму  $n$ . У процесі виміру  $\hat{U}(k)$ ,  $k=1, n$  показ стрілочного амперметра  $\hat{I}$ , внаслідок його інерційності і грубості, майже не змінюється. Таким чином незміщена оцінка  $S_{\hat{U}}^2$  дисперсії  $\sigma_{\hat{U}}^2$  визначається з експерименту

$$S_{\hat{U}}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n \left( \hat{U}_k - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n U_k \right)^2, \quad (9.24)$$

а оцінка  $S_{\hat{I}}^2$  дисперсії  $\sigma_{\hat{I}}^2$  визначається через клас точності  $\gamma$  амперметра, як квадрат абсолютної похибки  $\Delta I$ , яку прийmemo рівною двом  $\sigma_{\hat{I}}$ :

$$S_{\hat{I}}^2 = \left( \frac{\gamma I_{\max}}{100 \cdot \hat{I}} \right)^2 \frac{1}{4}. \quad (9.25)$$

Враховуючи взаємну некорельованість випадкових похибок  $\delta \hat{U}$  і  $\delta \hat{I}$ , та їх малість відносно  $U$  і  $I$ , з урахуванням (9.23), отримаємо оцінку  $S_{\frac{\hat{R}}{R}}$  кореня з дисперсії  $\sigma_{\frac{\hat{R}}{R}}^2$ :

$$S_{\frac{\hat{R}}{R}} \cong \sqrt{\frac{S_{\hat{U}}^2}{U^2} + \frac{S_{\hat{I}}^2}{I^2}}, \quad (9.26)$$

де  $\bar{U}$ ,  $\bar{I}$  — середні значення напруги і струму за  $n$  дослідів.

Результат вимірювання опору  $R$  холодного резистора цифровим омметром з точністю до п'яти десяткових розрядів можна прийняти за точне значення  $R(\theta_0^0)$ , оскільки струм омметра надто малий і не нагріває резистор. Результати ви-

мірювання (9.20) опору  $R(\theta^0)$  резистора, нагрітого струмом  $I = 1, 2 I_H$ , мають середнє значення

$$\bar{R} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \hat{R}_k \quad (9.27)$$

і оцінку дисперсії

$$S_{\delta R}^2 = \bar{R} \left( \frac{S_{\dot{U}}^2}{U^2} + \frac{S_I^2}{I^2} \right). \quad (9.28)$$

Для прийняття рішення щодо неістотності зміни опору від струму ( $H_0$  гіпотеза), чи істотності ( $H_1$  гіпотеза) побудуємо випадкову величину  $t$ :

$$t = \lim_{S_{\delta \hat{R}(\theta_0^0)} \rightarrow 0} \frac{\bar{R}(\theta^0) - \bar{R}(\theta_0^0)}{\sqrt{\frac{2}{n} \frac{(n-1)S_{\delta \hat{R}(\theta^0)}^2 + (n-1)S_{\delta \hat{R}(\theta_0^0)}^2}{2n-2}}} = \frac{\bar{R}(\theta^0) - \bar{R}(\theta_0^0)}{S_{\delta \hat{R}(\theta^0)}} \sqrt{n} \quad (9.29)$$

Величина  $t$  має розподіл Стюдента з  $n - 1$  степенями свободи. Двостороння критична область симетрична відносно нуля і знаходиться за умови, що ймовірність прийняття гіпотези  $H_1$  дорівнює взятому рівню значущості  $\alpha$ , коли правильна гіпотеза  $H_0$  ( $\alpha$  — похибка першого роду).

Критична точка  $t_{n-1, \alpha}$  знаходиться за таблицею розподілу Стюдента для кількості степенів свободи  $n - 1$  і ймовірності

$$P\{|T| \leq t_{n-1, \alpha}\} = 1 - \alpha. \quad (9.30)$$

Якщо  $|T| < t_{n-1, \alpha}$ , то приймається гіпотеза  $H_0$ , а якщо  $|T| > t_{n-1, \alpha}$ , — то гіпотеза  $H_1$ .

Перевіримо  $H_0$  гіпотезу для опору резистора і опору лампи розжарювання при зміні струму від мінімального до струму 120 % від номінального.

### Перевірка резистора на лінійність

Точні показання омметра:  $\bar{R}(\theta_0^0) = 100 \text{ Ом}$ . Десять результатів вимірювання напруги  $\hat{U}_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, 10$ ,  $n = 10$  (табл. 9.2).

Таблиця 9.2

#### Результати вимірювання

$k$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\hat{U}_k, \text{ В}$	80,4	79,5	80,5	79,8	$81,0_1$	78	82	80	80,5	79
$\hat{R}, \text{ Ом}$	100,5	99,37	100,5	99,75	$101,3$	97,5	102,5	100	100,6	98,75

$$\bar{U} = 80,07 \text{ В}, \quad S_{\hat{U}}^2 = 1,213 \text{ В}^2, \quad \bar{R} = 100,09 \text{ Ом};$$

$$\text{оцінка (9.25)} \quad S_i^2 = \left( \frac{1,5 \cdot 1}{100 \cdot 0,8} \right)^2 \frac{1}{3} = 0,000117;$$

$$\text{оцінка (9.28)} \quad S_{\delta R}^2 = 100 \cdot \left( \frac{1,213}{6411} + \frac{0,000117}{0,64} \right) = 0,037;$$

$$\text{величина (9.29)} \quad t = \frac{100,09 - 100}{\sqrt{0,037}} \cdot \sqrt{10} = 1,48;$$

кількість степенів вільності 9; похибка першого роду  $\alpha = 0,05$ ; критичне значення (за таблицями  $t$ -критерій Стьюдента)  $t_{9;0,05} = t(9; 0,95) = 2,26$ .

Оскільки  $|t| = 1,48$  менше  $t(9; 0,95) = 2,26$ , то можна вважати, що нуль-гіпотеза справедлива і розглядати резистори стенду «ЭВ-4» як лінійні.

### Перевірка лампи розжарювання на лінійність

Точний показ омметра:  $\bar{R}(\theta_0^0) = 100 \text{ Ом}$ . Для номінального режиму:

$U_H = 220 \text{ В}, P_H = 200 \text{ Вт}, I_H = 200/220 = 0,9 \text{ А},$   
опір

$$R(\theta) = \hat{R}(I_H) = (220 \text{ В} \pm 5 \text{ В}) / (0,9 \text{ А} \pm 0,015 \text{ А}) = \\ = (238,89 \div 250) \text{ Ом.}$$

У даному разі немає необхідності в статистичній перевірці  $H_0$  гіпотези, бо навіть у найгіршій ситуації оцінка  $\hat{R}(I_H)$  у 9.4 рази більша за  $\bar{R}(\theta_0^0)$ . Результати експерименту показують, що лампа є нелінійним елементом у діапазоні струмів від нуля до номінального.

Якщо прийняти модель (9.18) залежності  $R(I^2)$ , то з отриманих даних можна визначити параметр (9.19)  $\eta$ :

$$\eta \cong \frac{R(\theta_\infty^0) - R(\theta_0^0)}{R(\theta_0^0) I^2} \cong \frac{(244 \pm 6) - 100}{100 \cdot 0,81} = 1,78 \pm 0,07 \text{ А}^{-2}.$$

Для визначення малого параметра моделі (9.18) резистивного елемента слід спланувати і провести більш точний експеримент, який впливає з таких міркувань.

Запишемо залежність (9.18) з урахуванням корекції (9.20) для  $k$ -го результату вимірювання ( $k = 1, 2, \dots, n$ )

$$\hat{R}(I_k) = \frac{\hat{U}_k}{\hat{I}_k} - R_A \cong R(\theta_0^0)[1 + \eta I_k^2] + \delta_{\hat{R}_k}, \quad (9.31)$$

де  $\delta_{\hat{R}_k}$  — випадкова нормально розподілена похибка оцінки  $\hat{R}$  в  $k$ -му досліді.

Подано рівняння (9.31) у стандартному для регресійного аналізу вигляді:

$$y(k) = \beta_0 + \beta_1 I_k^2 + \delta y_k, \quad (9.32)$$

де  $\beta_0 = R(\theta_0^0)$ ,  $\beta_1 = R(\theta_0^0)\eta$ ,  $\delta y_k = \delta_{\hat{R}_k}$ .

Апріорі відомо, що  $|\delta_j| \ll I$ ,  $|\delta_U| \ll U$ , тому

$$\delta y \approx \left. \frac{\partial \hat{R}}{\partial \hat{U}} \right|_{U, I} \delta \hat{U} + \left. \frac{\partial \hat{R}}{\partial \hat{I}} \right|_{U, I} \delta \hat{I} = \frac{1}{I} \delta \hat{U} - \frac{R}{I} \delta \hat{I} = \frac{\delta \hat{U} - R \delta \hat{I}}{I}. \quad (9.33)$$



Математичне очікування  $\delta y$  внаслідок симетричності розподілу похибок  $\delta \hat{U}$  і  $\delta \hat{I}$  дорівнює нулю.

Дисперсія  $k$ -го результату вимірювання

$$\sigma_{\hat{y}_k}^2 = M \left\{ \left( \frac{\delta \hat{U}_k - R \delta \hat{I}_k}{I_k} \right)^2 \right\} = \frac{\sigma_{\hat{U}_k}^2 + R \sigma_{\hat{I}_k}^2}{I_k} = \frac{\sigma^2}{I_k^2}. \quad (9.34)$$

Похибки незалежні, тому їх коваріаційна матриця діагональна:

$$Q = \begin{bmatrix} \sigma_{y_1}^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_{y_2}^2 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_{y_n}^2 \end{bmatrix}. \quad (9.35)$$

Процес (9.33) — гетероскадестичний, тобто має залежну від  $I_k$  дисперсію (9.34) рис. 9.5.

Для таких процесів оптимальним за точністю оцінок  $\hat{\beta}_0$  і  $\hat{\beta}_1$  буде метод марковських оцінок, у якому ці оцінки знаходяться за умови мінімуму зваженого середнього квадрата різниці  $\hat{y}_k$  і  $\beta_0 + \beta_1 I_k^2$  моделі (9.32):

$$(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1) = \arg \min_{\beta_0, \beta_1} \sum_{k=1}^n \varepsilon_k^2 \sigma_k^{-2}, \quad (9.36)$$

де  $\varepsilon_k^2 = [\hat{y}_k - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 I_k^2]^2$ ,  $\sigma_k^{-2} = \frac{I_k^2}{\sigma^2}$ .

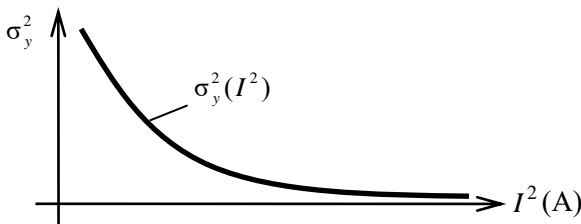


Рис. 9.5. Залежність  $\sigma_y^2$  від  $I^2$

Інакше кажучи, мінімізується середній квадрат різниці лівої і правої частини рівняння

$$\hat{y}_k \frac{I_k}{\sigma} = \beta_0 \frac{I_k}{\sigma} + \beta_1 \frac{I_k^2}{\sigma}. \quad (9.37)$$

Скоротимо на  $\sigma$  і замінимо  $\hat{y}_k I_k$  на  $\hat{U}_k$ . Тоді рівняння (9.32) набуває вигляду

$$\hat{U}_k = \beta_0 I_k + \beta_1 I_k^2 + \delta \hat{U}_k, \quad (9.38)$$

для якого коефіцієнти  $\beta_0$ ,  $\beta_1$  визначаються звичайним методом найменших квадратів:

$$\hat{\beta} = (x^T x) x^T y, \quad (9.39)$$

$$\text{де } \hat{\beta} = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \end{bmatrix}, \quad x^T y = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^n \hat{U}_k \hat{I}_k \\ \sum_{k=1}^n \hat{U}_k \hat{I}_k^2 \end{bmatrix}, \quad x^T x = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^n \hat{I}_k^2 & \sum_{k=1}^n \hat{I}_k^4 \\ \sum_{k=1}^n \hat{I}_k^4 & \sum_{k=1}^n \hat{I}_k^6 \end{bmatrix}.$$

Якщо струм  $I_k$  аналогового вимірювального приладу вважати незмінним, то коваріація оцінок дорівнюватиме

$$\text{cov}(\hat{\beta}) = \sigma_{\hat{U}}^2 (x^T x)^{-1}, \quad (9.40)$$

$$\text{де } (x^T x)^{-1} = \frac{1}{\det(x^T x)} \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^n \hat{I}_k^6 & -\sum_{k=1}^n \hat{I}_k^4 \\ -\sum_{k=1}^n \hat{I}_k^4 & \sum_{k=1}^n \hat{I}_k^2 \end{bmatrix},$$

$$\det(x^T x) = \sum_{k=1}^n \hat{I}_k^2 \sum_{k=1}^n \hat{I}_k^6 - \left( \sum_{k=1}^n \hat{I}_k^4 \right)^2.$$

Еліпс розкиду оцінок відповідно до (9.37) і (9.40) буде мінімальним. Але оцінки (9.39) будуть зміщені внаслідок неточності вимірювання  $I_k$ .

Для зменшення похибки в оцінюванні параметрів  $\beta_0$  і особливо  $\beta_1$  моделі (9.32), скористаємося додатковою апіорною ін-формацією про те, що вольт-амперна характеристика

резистора обов'язково проходить через нуль. З урахуванням цього побудуємо оптимальний план експерименту.

Вольт-амперні характеристики лінійного резистора

$$U_{\text{л}} = R_{\text{н.д.макс}} I = \frac{U_{\text{макс}}}{I_{\text{макс}}} I \quad (9.41)$$

і нелінійного

$$U_{\text{нл}} = (\beta_0 + \beta_1 I^2) I \quad (9.42)$$

показано на рис. 9.6.

У точках  $(0,0)$  і  $(U_{\text{макс}}, I_{\text{макс}})$  вольт-амперна характеристика лінійного і нелінійного резисторів співпадають. Тоді  $R_{\text{н.д.макс}} = \beta_0 + \beta_1 I_{\text{макс}}^2$ .

Підставимо  $R_{\text{н.д.макс}}$  у рівняння (9.41) і віднімемо з (9.41) рівняння (9.42):

$$U_{\text{л}} - U_{\text{нл}} = \beta_1 (I_{\text{макс}}^2 - I^2) I. \quad (9.43)$$

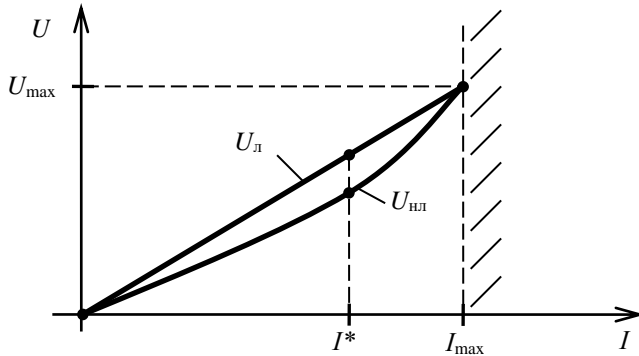


Рис. 9.6. ВАХ резисторів

Визначимо оптимальне значення  $I^*$ , за якого різниця між  $U_{\text{л}}$  і  $U_{\text{нл}}$  (9.43) максимальна

$$\frac{d}{dI} (U_{\text{л}} - U_{\text{нл}}) = \beta_1 I_{\text{макс}}^2 - 3\beta_1 I^{*2} = 0 \Rightarrow I^* = I_{\text{макс}} / \sqrt{3}. \quad (9.44)$$

Таким чином маємо дві точки оптимального плану експерименту:  $I^*$  і  $I_{\text{макс}}$ .

Із (9.43), (9.44) знаходимо, що

$$\beta_1 = \frac{U_{\dot{\epsilon}}^* - U_{\dot{\epsilon}}^*}{(I_{\max}^2 - I^{*2})I^*}. \quad (9.45)$$

Підставивши (9.45) у (9.42) при  $I = I_{\max}$ , знаходимо  $\beta_0$ :

$$\beta_0 = \frac{U_{\max}}{I_{\max}} - \beta_1 I_{\max}^2 = \frac{U_{\max}}{I_{\max}} - \frac{U_{\dot{\epsilon}}^* - U_{\dot{\epsilon}}^*}{I^*} \frac{I_{\max}^2}{I_{\max}^2 - I^{*2}}. \quad (9.46)$$

Оскільки  $U_{\dot{\epsilon}}^* = \frac{U_{\max}}{I_{\max}} I^*$ ,  $\frac{U_{\dot{\epsilon}}^*}{I^*} = \frac{U_{\max}}{I_{\max}}$ , то вираз (9.45) мож-

на записати у такому вигляді:

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \frac{U_{\max}(I^*/I_{\max}) - U_{\dot{\epsilon}}^*}{(I_{\max}^2 - I^{*2})I^*} = \frac{U_{\max}/\sqrt{3} - U_{\dot{\epsilon}}^*}{2I_{\max}^3/(3\sqrt{3})} = \\ &= \frac{3[U_{\max} - \sqrt{3}U_{\dot{\epsilon}}^*]}{2I_{\max}^3}. \end{aligned} \quad (9.47)$$

Вираз (9.46) отримаємо у такій формі:

$$\beta_0 = \frac{U_{\max}}{I_{\max}} - \frac{3[U_{\max} - \sqrt{3}U_{\dot{\epsilon}}^*]}{2I_{\max}^3} I_{\max}^2 = \frac{3\sqrt{3}U_{\dot{\epsilon}}^* - U_{\max}}{2I_{\max}}. \quad (9.48)$$

Якщо похибка вимірювання і  $I_{\max}$ , і  $I^*$  набагато менша нестабільності  $U_{\max}$  і  $U_{\dot{\epsilon}}^*$ , то похибка  $\delta\hat{\beta}_1$  визначається першим диференціалом

$$\delta\hat{\beta}_1 \cong \frac{\partial\hat{\beta}_1}{U_{\max}} \delta\hat{U}_{\max} + \frac{\partial\hat{\beta}_1}{\partial U_{\dot{\epsilon}}^*} \delta\hat{U}_{\dot{\epsilon}}^* = \frac{3}{2I_{\max}^3} \delta U_{\max} - \frac{3}{2I_{\max}^3} \delta U_{\dot{\epsilon}}^*. \quad (9.49)$$

Дисперсія  $\hat{\beta}_1$ :

$$\sigma_{\hat{\beta}_1}^2 = \frac{9}{4} \cdot \frac{1}{I_{\max}^6} \left[ \sigma_{\hat{U}_{\max}}^2 + 3\sigma_{\hat{U}_{\dot{\epsilon}}^*}^2 \right]. \quad (9.50)$$

Оскільки  $U_{\max}$  і  $U_{\dot{\epsilon}}^*$  вимірюються одним і тим же приладом, то їх дисперсії будуть однаковими і рівними  $\sigma_U^2$ . Загальну кількість  $n$  вимірювань розіб'ємо на  $kn$  вимірювань  $U_{\max}$  і  $(1 - kn)$  вимірювань  $U_{\dot{\epsilon}}^*$ , де  $k < 1$ . Дисперсії усередне-

них значень  $U_{\max}$  і  $U_{i\bar{\epsilon}}^*$  будуть в  $kn$  і  $(1 - kn)$  разів меншими. Тоді рівняння (9.50) набирає вигляду

$$\sigma_{\hat{\beta}_1}^2 = \frac{9}{4} \cdot \frac{\sigma_{\hat{U}}^2}{I_{\max}^6} \left[ \frac{1}{kn} + \frac{3}{(1-kn)n} \right] = \frac{9}{4} \cdot \frac{\sigma_{\hat{U}}^2}{I_{\max}^6} \frac{1+2k}{k(1-k)n}. \quad (9.51)$$

Визначимо  $k^*$  за умови мінімуму  $\sigma_{\hat{\beta}_1}^2$

$$\frac{\partial \sigma_{\hat{\beta}_1}^2}{\partial k} = \frac{9}{4} \cdot \frac{\sigma_{\hat{U}}^2}{I_{\max}^6} \frac{2k(1-k)n - (n-2kn)(1+2k)}{(k(1-k)n)^2} = 0. \quad (9.52)$$

Звідси  $k^* = 0,365$ .

Тепер із співвідношень (9.51), (9.52) можна визначити необхідну кількість  $n^*$  дослідів, щоб за відомими  $\sigma_{\hat{U}}^2$  і  $k^*$  отримати оцінку  $\hat{\beta}_1$  із заданою дисперсією  $\sigma_{\hat{\beta}_1}^2$ :

$$n^* = 16,8 \cdot \frac{\sigma_{\hat{U}}^2}{\sigma_{\hat{\beta}_1}^2} \frac{1}{I_{\max}^6}. \quad (9.53)$$

Чим менше  $\beta_1$  і відповідно бажане  $\sigma_{\hat{\beta}_1}^2$ , тим більше  $n^*$ . Але значення  $\beta_1$  невідоме. Тому, маючи оптимальний план  $\left( I^* = \frac{I_{\max}}{\sqrt{3}}, I_{\max} \right)$ , де кількість вимірювань у точці  $I^*$  складає  $(1-k)n$ , а  $I_{\max}$  —  $kn$ , або відповідно  $0,645n$  і  $0,365n$ , будемо поступово збільшувати  $n$ , наприклад  $n = 10, n = 20, \dots$ . Для кожного  $n_i, i = 1, 2, \dots$  розраховуємо оцінку  $\hat{\beta}_1$ , як середнє по  $n_i$  значення (9.47):

$$\hat{\beta}_1 = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} \frac{3 \left[ U_{\max}(j) - \sqrt{3} U_{i\bar{\epsilon}}^*(j) \right]}{2 I_{\max}^3(j)}, \quad (9.54)$$

по (9.54) розрахуємо її середнє квадратичне відхилення

$$\sigma_{\hat{\beta}_1} = \sqrt{16,8 \frac{\sigma_{\hat{U}}^2}{n_i} \cdot \frac{1}{I_{\max}^6}}, \quad (9.55)$$

перевіримо значущість оцінки (9.54)  $\hat{\beta}_1$ , що має оцінку (9.55) середнього квадратичного відхилення, за таблицею  $t$ -критерію Стьюдента для  $\alpha = 0,1$  та  $(n_i - 1)$  степенів вільності. Якщо

$$\frac{\hat{\beta}_1}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}} < t(n_i - 1; 0,9), \quad (9.56)$$

то оцінка значуща; якщо ні, то слід продовжити експеримент з більшим  $n_i$  доки не буде виконана умова (9.56).

Отримання таким чином параметрів  $\beta_0$  і  $\beta_1$  слаболінійної залежності  $U(I)$  дає можливість (шляхом уведення корекції) використовувати не ідеальні резистори у відповідних вимірювальних системах.

## 9.2. Дослідження багатокрокового процесу пояснення ефекту Ж.Губера

### 9.2.1. Методологія дослідження

1. *Будь-який реальний об'єкт дослідження, ґрунтуючись на фундаментальних законах Світу, не може в результаті досліджень отримати ізоморфну до нього фізико-математичну модель. Дійсно, так як Світ нескінченно мірний, де все з усім безпосередньо або опосередковано взаємопов'язано (близько- і дальнодія), внаслідок чого матерія і рух не подільні, то не існує кінцевомірної ( $n$ -мірної) математичної моделі виду*

$$\frac{dx_n}{dt} = f_n(x_n), \quad (9.57)$$

*ідентичної (ізоморфної) в просторі змінних  $x_n(t)$  до нескінченномірної моделі реального об'єкта, як частини нескінченно мірної моделі Всесвіту:*

$$\frac{dx_{\infty}}{dt} = f_{\infty}(x_{\infty}), \quad (9.58)$$

де індекс  $\infty$  вказує на нескінченномірність, а функція  $f_{\infty}$  -на загальний взаємо зв'язок всіх компонентів  $x_i(t)$  нескінченномірної вектор-функції  $x_{\infty}(t)$ ,  $t$ -час.

Завдання дослідника полягає в побудові кінцевомірної ( $n$ -мірної) моделі (9.57), яка б з допустимою похибкою  $\varepsilon$  відтворювала поведінку (9.58) реального об'єкта в обмеженому ( $n$ -мірному) просторі змінних  $x_n(t)$  з урахуванням того, що наявність загального взаємозв'язку обумовлює принципову наближеність моделі (9.57) до моделі (9.58).

Абстракція першого кроку дослідження реального об'єкта (9.58) полягає в умовному розділенні  $n$ -мірного вектора  $X_n$  на причинні  $U(t)$  і наслідкові  $Y(t)$  складові та спроби установити на основі теорії і експерименту логічну та математичну залежність  $Y(U)$ . Саме на цьому етапі досліджень важливо скористатися принципом раціонального ускладнення [72], за якого темп зростання в (процесі дослідження об'єкта) складності (мірності  $n$ ) моделі (9.57) не повинен випереджувати темп збільшення точності (зменшення похибки  $\varepsilon$ ) моделі (9.57) по відношенню до об'єкта (9.58). Мистецтво дослідника на першому етапі полягає в визначенні теоретично чи експериментально на множині з  $n$  факторів  $U_i$  ( $i=1, \bar{n}$ ) впливу на  $Y$  підмножини  $n_1$  найбільш суттєвих. На другому етапі, якщо є на то можливість, доповнити підмножину з  $n_1$  факторів додатковими, які могли б покращити відображення  $U$  в  $x$ , тобто зменшити похибку  $\varepsilon$  апроксимації реального відображення  $U$  в  $Y$  в об'єкті дослідження. Мистецтво дослідника

на цьому етапі полягає в виявленні на основі теорії чи експерименту того доповнення причинних змінних за якого б темп зменшення похибки  $\varepsilon$  випереджував темп зростання розмірності факторів впливу  $U$  на  $Y$ .

Багаторічний і багато-кроковий процес пояснення ефекту Губера (встановлення логічної і (по можливості) фізико-математичної моделі між причинами  $U$  і наслідками моделі  $Y(U)$ ), можна подати як не строго релаксаційний [5] оптимізаційний процес пошуку моделі  $Y(U^*)$  залежності обертового моменту в двигунах Губера і Косирєва-Мільроя від найбільш суттєвих факторів  $U^*$  впливу. Ефект Губера с позиції спостерігача полягає в наявності додаткового обертового моменту  $M$  в колісній парі, що котиться по рейкам до яких підведено джерело електроживлення. Перед дослідниками на першому етапі стояло завдання виявити, які з факторів  $U_k$ , ( $k = \overline{1, n}$ ) можна поділити на два класи:

- підмножина обов'язкових факторів;
- підмножина можливих факторів.

До перших відносяться:

1. Наявність руху в будь-якому напрямку (швидкість  $U \neq 0$ ).
2. Наявність постійного або змінного електричного струму  $I$  в контактах коліс і рейок або кульок і шайб.
3. Феромагнітний матеріал двигунів Губера і Косирєва-Мільроя.

До других відносяться:

1. Наявність чи відсутність іскріння в контакті рухомих частин.
2. Наявність чи відсутність суттєвого моменту інерції рухомих частин двигунів.
3. Наявність повітря чи мастила в зоні контакту.



4. Екстремальна залежність моменту  $M$  від кутової швидкості  $\omega$ .
5. Звуження площі поперечного перерізу провідників зі струмом  $I$  в зоні контакту.
6. Відсутність моменту і миттєва зупинка колеса з пермалою, який має прямокутну петлю гістерезису.
7. Соосність струму  $I$  і магнітного потоку  $\Phi$ , створеного цим струмом в зоні з'єднання коліс чи підшипників з феромагнітним валом.

Отже дослідникам слід було побудувати таку фізико-математичну (а на першому кроці принаймні фізичну) модель, яка надала б відповіді на сутність зв'язку цих та можливо інших факторів  $U$  впливу на момент  $M$ .

Далі буде розглянуто як різні вчені, в різні часи користуючись чи ні принципом раціонального ускладнення, на основі теоретичних і експериментальних досліджень ефекту Губера, будували ті чи інші моделі відображення  $U$  в  $Y$ , тобто обов'язкових і можливих факторів впливу на момент  $M$  двигунів Губера і Косирева-Мільроя. На жаль, більшість пояснень, як надто простих, так і надто математизованих, не підтвердились. Це звузило простір пошуку і дозволило з часом отримати правильне пояснення в результаті багатокрокового квазірелаксаційного пошукового процесу, побудованого на принципі раціонального ускладнення, де фізика б випереджувала математику.

### 9.2.2. Тепловий чи іскровий ефект?

Стаття [49] А.В. Нетушила «Изобретение Дж. Серла как развитие эффекта Губера» в журналі Електричество, №4, 1991. – с. 83.

*Професор А.В. Нетуцил, очолюючи комітет з дослідження і пояснення незрозумілих електротехнічних явищ, зняв пелену невизначеності з багатьох проектів по створенню «перпетуум-мобіле». Надамо далі деякі частини статті А.В. Нетушила відносно ефекту Губера:*

«Эффект Губера можно характеризовать как возникновение добавочной силы в направлении скорости при качении колеса по направляющей и пропускании электрического тока через место касания колеса и направляющей. Эта сила зависит от скорости качения и равна нулю при отсутствии движения. Эффект Губера наблюдался в 1959 г. самим Ж. Губером при рассмотрении колесной пары, в 1961 г. В. В. Косаревым, В. Д. Рябко и В. И. Вельманом при рассмотрении подшипников качения, в 1967 г. Р. А. Мильроем- при рассмотрении шариковых подшипников. Во всех случаях сила нелинейно зависела от скорости и отсутствовала в состоянии покоя [29]. В эффекте Губера эта сила уменьшается с увеличением скорости. При обсуждении эффекта Губера в последующих работах для его объяснения были высказаны две гипотезы [29]. В одной из них явление объяснялось **тепловым эффектом** и расширением материала направляющей поверхности в месте контакта. Во второй гипотезе эффект объяснялся силовым **воздействием искрового разряда** в месте отрыва цилиндра от направляющей поверхности. Проведение эксперимента в вакууме убедило в справедливости второй гипотезы».

### **9.2.3 Чому зупинився підшипник у вакуумі?**

*Подамо матеріал [10] статті П. Деміна "Эффект Губера и летающие тарелки" в журналі "Наука и Жизнь", 1991, №7. в оригіналі, але в дещо скороченому*

*видяді:* “Если еще недавно в нашем обществе господствовала абсолютная вера во всемогущество современной науки, то сейчас во многих умах ее сменило не менее твердое убеждение в бесполезности научного знания (этим отчасти объясняется нынешний всплеск интереса к необычному, необъяснимому). В конце 50-х годов швейцарский инженер Ж.Губер обнаружил, что если к паре железнодорожных колес, соединенных стальной осью, подвести по рельсам ток, на них начинает действовать небольшая сила. Сила возникает только когда колеса катятся по рельсам и всегда направлена в сторону их движения. Она **не зависит ни от места подключения источника к рельсам**, ни от того, постоянный или переменный ток подводится к колесам. С повышением скорости движения колес сила заметно уменьшается, а с увеличением силы тока растет. Губеру удалось использовать обнаруженный эффект для сортировки и сцепки вагонов на железнодорожных горках. Экспериментально новый эффект был изучен швейцарским инженером очень тщательно. А вот теоретически объяснить наблюдаемую силу оказалось гораздо сложнее. Ж.Губер считал очевидным, что она имеет электродинамическую природу, поскольку возникает только при наличии тока, а значит, магнитного поля, и только при движении колес, то есть пересечении ими силовых линий этого поля. Однако ни одна из реальных электромагнитных сил не совпадает по направлению с силой, проявляющейся в эффекте Губера. Так, **сила Ампера**, объясняющаяся взаимодействием текущего по колесам тока с магнитным полем, создаваемым токами в других участках цепи, действует лишь в одном направлении — она отталкивает колеса от источника питания. При движении колес может возникать и другая электромагнитная сила - **сила Лоренца**. В колесах, пересекающих си-

ловые линии магнитного поля, индуцируется дополнительный ток, который, в свою очередь, начинает взаимодействовать с существующим магнитным полем. Но сила Лоренца всегда направлена против скорости движения проводника; она способна только тормозить колеса, а не разгонять их. Нужно еще сказать о силах, возникающих вследствие действия закона Ленца. В проводящем контуре всегда возникают или стремятся возникнуть токи, препятствующие любому изменению магнитного потока, пронизывающего такой контур. Из самой формулировки закона Ленца ясно, что подобные силы опять таки могут только останавливать движение колес. Ответ на этот вопрос предложили новосибирские исследователи В.В. Косырев, В.Д. Рябко и Н.Н. Вельман, которые независимо от Губера наблюдали похожие явления. В 1963 г. они получили авторское свидетельство на простой электродвигатель, состоящий всего-навсего из подшипника качения, в котором между внутренним и внешним кольцами пропускается ток в несколько ампер. Устройство приходит в движение после первоначального толчка и вращается в любую сторону со скоростью до 1000 оборотов в минуту. Независимо от Ж.Губера и группы новосибирских исследователей эффект наблюдал и английский физик Р.Мильрой. В 1967 г. он предложил свой, более удобный вариант электродвигателя: вал из проводящего материала, продетый сквозь два подшипника, к внешним обоямам которых подводится ток. Подшипники вращаются благодаря эффекту Губера, только роль вагонных колес играют шарики или ролики, а рельсов - кольца. В описании изобретения новосибирские авторы так объясняют принцип действия двигателя: «Подвижная часть вращается в результате упругой деформации деталей при нагреве последних протекающим по ним электрическим током». В месте

электрического контакта между кольцом и шариком металл нагревается, расширяется и подталкивает шарик, который перекачивается на новый, еще не нагретый участок кольца, а там все повторяется сначала. Возникает бегущая волна теплового расширения, которая постоянно преследует катящийся шарик. Увы, предположение о тепловой природе эффекта при более тщательном рассмотрении тоже оказывается неубедительным. Стальной подшипник вообще не должен вращаться со скоростью 1000 оборотов в минуту при столь быстром вращении температура должна быть одинакова по всей поверхности кольца.

На несовершенство обеих гипотез и электродинамической, и тепловой обратили внимание сотрудники Московского энергетического института К.М. Поливанов, А.В. Нетушил и Н.В. Татаринова. Они выдвинули [58] новую гипотезу: **причина движения - электрическая искра**, проскакивающая между катящейся деталью (колесом, шариком) и направляющей (рельсом, кольцом). Искровой разряд возникает главным образом позади точки касания. Мгновенно нагревая воздух в узком зазоре между металлическими деталями, искра вызывает резкое повышение давления, толкающее колесо или шарик вперед.

В общем это искровые или, говоря современным языком, плазменные двигатели.

Чтобы доказать справедливость своей гипотезы ученые поместили двигатель Мильроя под вакуумный колпак. Когда воздух был из-под него откачан, двигатель остановился. Это достаточно убедительно говорит о роли искрового разряда, возникающего в воздушной среде. Недавно один из исследователей, профессор А.В. Нетушил в Московском институте тонкой химической технологии, вспомнил об эффекте”.

*Як бачимо, П. Демін, аналізуючи різні експерименти з ефектом Губера, показав, що відносно струму  $I$  в контакті і колесі ні сили Ампера, ні Лоренца, ні закон Ленца не спроможні безпосередньо створити обертовий момент в колесі чи кульці. Теж стосується пружної деформації колеса чи кульки від нагріву місця контакту струмом  $I$ . Можливе пояснення вченими МЕІ полягало в пневматичній дії іскри на збігаючій стороні контакту. Однак, те що підшипник зупинився у вакуумі, де немає іскри, можливо було визвано тривіальним заклинюванням його внаслідок перегріву. Як показали наші досліді, заклинювання підшипників відбувається і в повітрі.*

**На якість ефекту** також **впливало мастило** підшипників, за якого іскріння зменшувалося, а момент, навпаки, зростав. Однак, якщо кульки, як елементи що рухають обойму і вал, завдяки мастилу слизькі, то це повинно в наслідок збільшення ковзання зменшувати швидкість і момент. Однак досліді показують що навпаки швидкість  $\omega$  і, відповідно, момент за наявності мастила зростають. Тому плазмова природа створення обертового моменту в двигунах Губера, Косирева-Мильроя теж не підтвердилася.

#### **9.2.4. Чому саме феромагнетики і мастило?**

*В книзі [Пеннер Д.Н., Угаров В.А. [56] Электродинамика и специальная теория относительности /М.: Просвещение, 1980,-272с.] наводиться оригінальний експеримент, пов'язаний з ефектом Губера.*

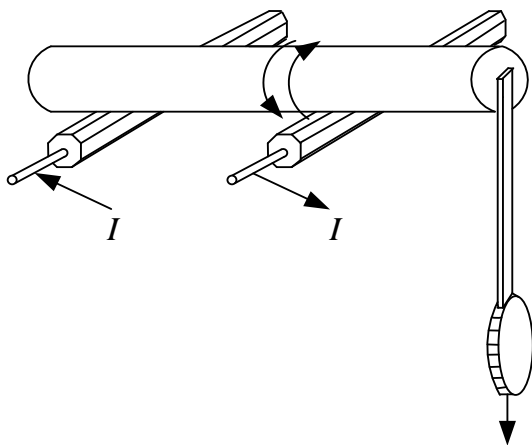


Рис.9.7. Эксперимент Д.Н. Пеннера

“Одна из простейших систем для наблюдения эффекта состоит из двух направляющих (рельсы), питаемых переменным или постоянным током (рис.9.7). Симметрия положенного на них круглого цилиндра должна быть нарушена смещением его центра тяжести относительно оси; наиболее просто это может быть сделано путем механического скрепления цилиндра с «маятником». Выведенный из равновесия цилиндр может часами колебаться без затухания, конечно, при наличии достаточного тока подводимого через рельсы. При колебаниях (а также при простом качении), как правило, слышно характерное хрустение искры, образующейся между сбегающей поверхностью и рельсом. Механическое действие происходящих взрывов и подталкивает тела в направлении начатого движения. При помещении системы в высокий вакуум, что сложно, или, что проще, **при поливании направляющих подсоленной водой колебания прекращаются**, прекращается и хрустящий звук.

Любопытный факт, имеющий, вероятно, и практическое значение, заключается в том, что некоторые проводники, несмотря на видимое искрение при больших токах, не способны к появлению обычного эффекта; напротив, выведенные из равновесия, они быстрее останавливаются при наличии тока.

Например, **колебания не возникают при выполнении направляющих из дюрали**. Наличие или отсутствие эффекта (или его ослабление) позволяет судить о физико-химических свойствах поверхностей соприкасающихся тел”.

*Як витікає зі змісту, у вакуумну камеру установку (рис.1) не поміщали, а при поливанні контакту соленою водою коливання зупинялися. Ймовірно, солоня вода зменшувала електричний опір контактів і, як наслідок, падіння напруги на контактах. Тоді, відповідно, зменшувалися заряди  $q$  на контактах ( $q = CU$ ) і, як буде показано далі, це зменшувало обертовий момент, маятник зупинявся. Важливим був дослід з алюмінієвими направляючими, за яких рух зупинявся. Тобто це однозначно підтверджує думку Губера про електромагнітну природу ефекту яка підсилюється в феромагнітному середовищі.*

### **9.2.5. Чому струм і магнітний потік збіглися за напрямом?**

*Стаття [71] Сильвестров А.Н., Зименков Д.К. «О природе эффекта Губера, вращающего момента в двигателях Косырева-Мильроя.» Кременчук: КНУ, Вып4/2010(63)., 74-76.*

*Подамо статтю в оригіналі:*

“Двигатель (рис.9.8) Косырева-Мильроя (два шарико-подшипника и вал) хоть и имеет на стыках-контактах шариков (роликов) эффект Губера, но он не является основным в создании вращающего момента при прохождении тока по цепи: внешняя обойма (9.57) – шарики (ролики) (9.58) – внутренняя обойма (9.59) – вал (9.60) - внутренняя обойма (5) второго подшипника – шарики (6) – внешняя обойма (7).

В работах [10] и [50] Воронковым С.С. для объяснения сути эффекта Губера [72], в частности обоснования существования магнитного поля, в макро-масштабе совпадающего по направлению с электрическим током,



были предложены новые понятия, такие как «сила Николаева, обусловленная сжимаемостью мировой среды», «скалярное магнитное поле». Не оспаривая возможность существования в природе ещё не раскрытых свойств, постараемся дать объяснение процессам в двигателе Косырева-Мильроя на основе уже открытых законов электромагнетизма.

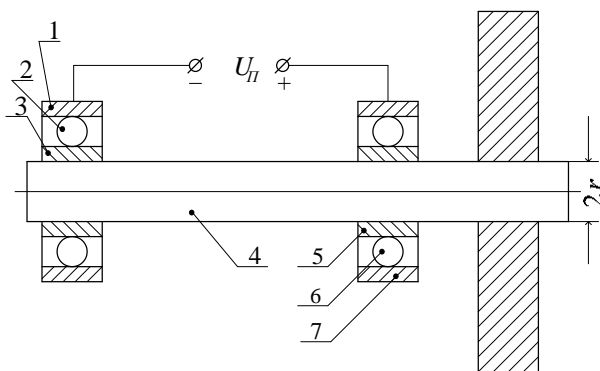


Рис.9.8. Электродвигатель Косырева-Мильроя

**Во-первых**, покажем, что магнитное поле, создаваемое током  $I$  в двигателе Косырева-Мильроя, обычное вихревое, а не «скалярное». Электрическое поле по цепи «минус источника  $U_n$  – подшипник – вал – подшипник – плюс источника» неоднородно: небольшая напряженность  $\varepsilon_k$  поля будет в точках контакта шариков с обоймами и гораздо меньшая в обоймах и вале  $\varepsilon_v$ . Скорость  $V_e$  направленного движения электронов в неподвижном проводнике пропорциональна напряженности поля. Точки контакта шариков левого подшипника (рис.9.8) образно представляем (по аналогии с гидравликой) как сопла, через которые тонкими «струйками» на большой скорости в тело внутренней шайбы подшипника вбра-

сывается поток электронов. В теле шайбы и вала напряженность  $\varepsilon_v$  намного меньше  $\varepsilon_k$  и соответственно меньше скорость направленного к правому подшипнику движения электронов (доли миллиметра в секунду). В то же время тело внутренней шайбы и поверхностного слоя вала имеет линейную скорость  $\Omega \cdot x = u(x)$ , намного большую, если  $x$  близко к  $r$  вала. Поэтому под обоймой и вблизи её излишка электронов, вошедших струйками в шайбу из шариков, образует пространственную траекторию в виде слегка сужающейся к середине длины вала спирали (рис.9.9). Вправо от середины вала картина будет зеркальной.

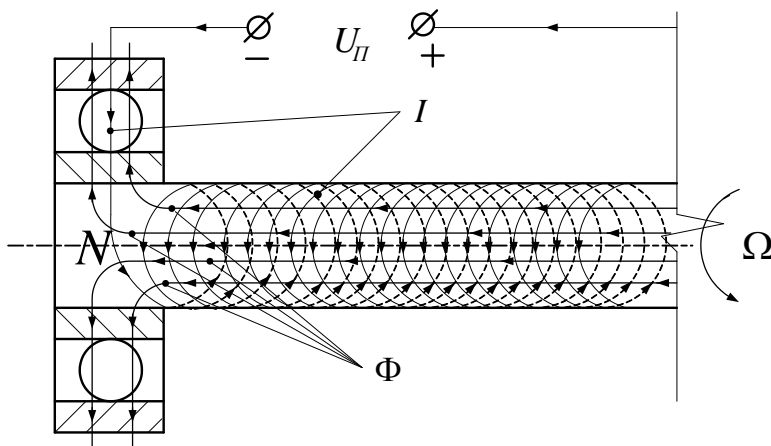


Рис.9.9. Траектория движения одной из «струек» электронов

Сужение спирали связано с радиальными силами, так как имеет место небольшая разность потенциалов на поверхности и на оси вала. Степень сужения и число условных витков спирали зависит от соотношения осевой напряженности  $\varepsilon_v$  поля и скорости  $\Omega$  вращения вала. Общее число «витков» будет в  $n$  раз больше, где  $n$  -

число шариков в подшипнике. Таким образом, вращающийся с частотой  $\Omega$  вал с током  $I$  эквивалентен катушке индуктивности, магнитный поток  $\Phi$  которой на её краях замыкается через шайбы и шарики подшипников, совпадая по направлению с током  $I$  в подшипниках. То есть имеет место обычный вихревой магнитный поток, проходящий по валу – сердечнику «катушки», подшипниках и замыкающийся через воздушное пространство.

**Во-вторых**, покажем, что основные сила и вращающий момент в двигателе Косырева-Мильроя возникают не в шарике (ролике), а непосредственно во внутренней обойме подшипника, связанной с валом. Магнитный поток  $\Phi$  (рис.9.9), оставаясь равным потоку внутри «катушки», на его выходе через подшипники в пространство распределен неравномерно: магнитная индукция  $B_{\min}$  в воздушных зазорах между шариками (роликами) подшипника минимальна, в промежутке пространства с шариком (роликом) - максимальна  $B_{\max}$  (рис.9.10):

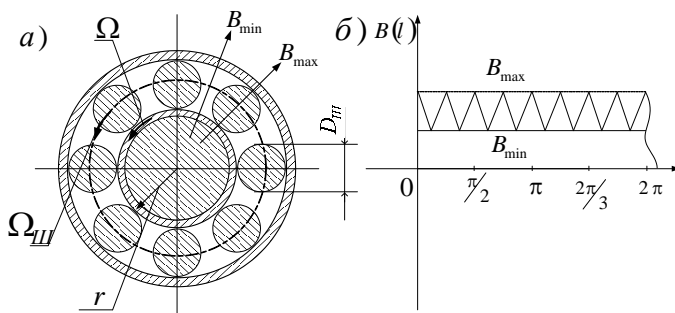


Рис.9.9. Поперечный разрез по оси шариков (а) и зависимость (б) магнитной индукции  $B$  от угла  $\alpha$ ,  $\alpha \in [0, 2\pi]$

Угловая скорость  $\Omega$  вала и внутренней обоймы подшипника в режиме двигателя вследствие трения всегда больше угловой скорости  $\Omega_{ш}$  вращения шариков относительно оси вала :  $\Omega > \Omega_{ш}$  . Это неравенство справедливо и для окружных линейных скоростей:  $v > v_{ш}$  , где  $v = \Omega \cdot r$  ,  $v_{ш} = \Omega_{ш} \cdot (r + \frac{D_{ш}}{2})$ .

Это очевидно, так как при  $\Omega = \Omega_{ш}$  шарики бы не вращались, что противоречит действительности. Поток  $\Phi$  в промежутке между обоймами подшипников, в частности его переменная составляющая, будет двигаться относительно внутренней обоймы против ее движения с разностной скоростью  $\Delta v$  :

$$\Delta v = v_{ш} - v = (\Omega_{ш} - \Omega) \cdot r - \Omega_{ш} \cdot \frac{D}{2} \approx (\Omega_{ш} - \Omega) \cdot r < 0, \quad (9.59)$$

То есть относительно внутренней обоймы шарики движутся в противоположную сторону (рис.9.11):

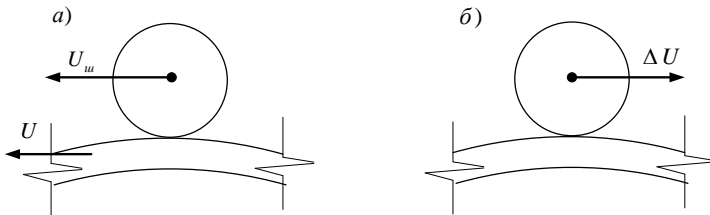
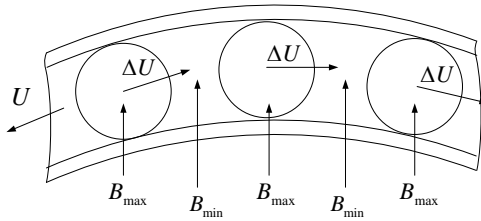


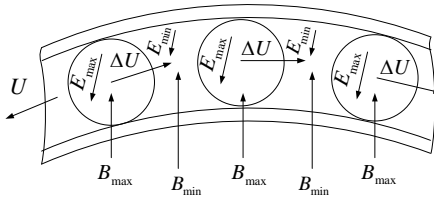
Рис.9.11. Движение обоймы и шарика относительно неподвижной системы координат(а) и относительно обоймы(б)

Пространственная картина процесса представлена на рис.9.12.

а)



б)



в)

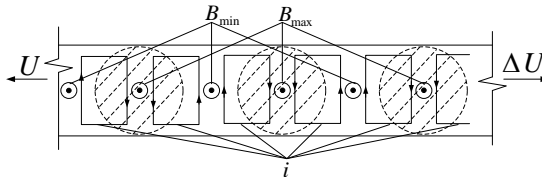


Рис.9.12. Распределение  $B(l)$  (а), ЭДС индукции (б) и индукционных токов  $i$  во внутренней обойме подшипника

Учитывая расположение векторов  $\Delta V$  и  $B$  (рис.9.12 (а)) на основе закона электромагнитной индукции ( правило правой руки) определяется направление и место расположения ЭДС индукции  $E_{\max}$  и  $E_{\min}$  (рис.9.12 (б)), под действием которых образуются индукционные токи  $i$  (рис.9.12 (в)). Далее, согласно закону Ампера, токи  $I$  взаимодействуют с магнитным потоком  $\Phi$ . Сила  $\Delta F_a$  будет равна разности сил под шариком(роликом) и между ними

$$\Delta F_a \cong (B_{\max} \cdot l_1 - B_{\min} \cdot l_2) \cdot 2i > 0, \quad (9.60)$$

где:  $l_1 \approx D_w$ ,  $l_2$  - ширина шайбы подшипника,  $i$ - вихревой ток, равный  $(E_{\max} - E_{\min}) \cdot G_k$ ,  $G_k$  - проводимость контура тока, приближенно равная  $\gamma \cdot \delta^2 / (2 \cdot l_2 + 2\pi \cdot r/n)$ , где  $\gamma$  - удельная проводимость тела шайбы,  $\delta$  - ее толщина. Для роликоподшипника  $l_1 = l_2$ . Сила  $\Delta F_a$  направлена влево, т.е. в направлении скорости  $U$  и  $\Omega$ . Для  $n$  шариков и двух подшипников сила будет в  $2n$  раз больше. Момент  $M$  подшипникового двигателя:

$$\begin{aligned}
 M &\cong 2n(B_{\max} \cdot l_1 - B_{\min} \cdot l_2) \cdot \frac{(E_{\max} - E_{\min}) \cdot \gamma \cdot \delta^2}{2(l_2 + \pi \cdot r/n)} = \\
 &= 4n(B_{\max} \cdot l_1 - B_{\min} \cdot l_2) \cdot \frac{(B_{\max} \cdot l_1 - B_{\min} \cdot l_2) \cdot v \cdot \Omega \cdot \delta^2}{2(l_2 + \pi \cdot r/n)} = \\
 &= 2n(B_{\max} \cdot l_1 - B_{\min} \cdot l_2)^2 \frac{\gamma \cdot r \cdot \Omega \cdot \delta^2}{l_2 + \pi \cdot r/n} = \quad (9.61) \\
 &= 2n^2(B_{\max} \cdot l_1 - B_{\min} \cdot l_2)^2 \frac{\gamma \cdot r \cdot \Omega \cdot \delta^2}{n \cdot l_2 + \pi \cdot r}.
 \end{aligned}$$

Для двигательного режима  $M$  имеет сложную зависимость от  $\Omega$ , так как  $B_{\max}$  и  $B_{\min}$  зависят от  $I$ , а  $I$  зависит от  $\Omega$  (с увеличением  $\Omega$  при неизменном  $U_n$  ток  $I$  будет уменьшаться, вследствие уменьшения контактной напряженности  $\varepsilon_k$ ).

Момент, возникающий в шарике(ролике), может быть подобен моменту, который возникает в двигателе Губера, но более вероятно имеет место взаимодействие магнитного потока через шарик(ролик) с током, проходящим вблизи поверхности шарика. В районе контакта взаимодействие поверхностного тока  $I/n$  и индукции  $B_{\max}$  создает пару сил Ампера, заставляющую шарик до-

полнительно вращаться вокруг оси между точками касания шарика. То есть происходит пространственное вращение шарика. Это приводит к спиралеобразной траектории движения электронов по шарiku и созданию результирующей пары сил, создающей вращательный момент (рис.9.13).

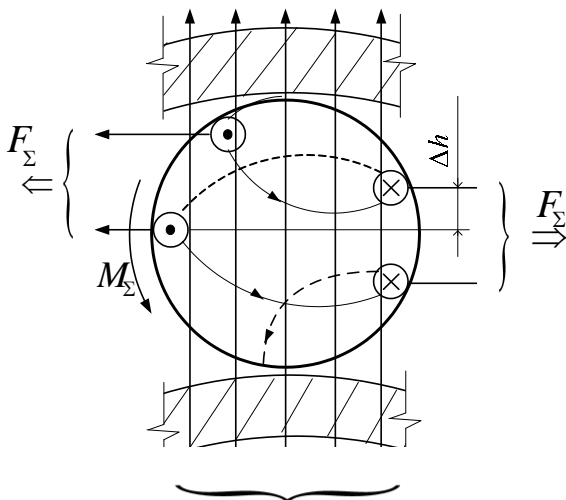


Рис.9.13. Момент  $M_{\Sigma}$ , создаваемый шариком

Кроме  $M_{\Sigma}$  имеет место также небольшой вращающий момент от кулоновского взаимодействия зарядов в районе контакта. Однако основным будет момент (9.61).

**Выводы:**

1. Природа появления вращающегося момента в двигателе Губера (колесо и рельс) заключается во взаимодействии спиралевидного тока  $I$  в колесе с обоими токами  $I/2$  в рельсе.
2. Природа появления вращающегося момента в двигателе Косырева-Мильроя (два подшипника и вал), в

основном, заключається во взаємодії магнітного потоку, створеного спіраллю току  $I$  в валі і модульованого змінним магнітним опором зазору між обіймами підшипника з індуктованими во внутрішній обіймі підшипника токами”.

*Як буде показано в більш пізніших дослідженнях, зроблені в статті висновки 1 і 2 не протирічать природі ефекту Губера. Вони вказують на деякі складові ефекту, які все ж не є головним. Так висновок про те, що кульки підшипника є двигунами, протирічать дослідом в яких змазка підшипників зменшує тертя але збільшує швидкість  $\Omega$  і момент  $M$ .*

#### **9.2.6. Термомеханічне гальмування в підшипнику**

*Автори статті [18] «Анализ исследований и объяснение эффекта Ж. Губера» в журналі «Българско списание за инженерно проектиране», №26, квітень 2015р., 11-15 с. довірливо, прийняли гіпотезу Кузьміна-Шпатенка про криволінійність траєкторії струму в колесі (кульці) і розвинули її, вважаючи що струм (потік електрики) в тілі, що обертається, розташовується на спіральної траєкторії. Подамо деякі вирізки з цієї статті:*

“Если колесо (рис.9.14) вращается с угловой скоростью  $\omega$  и движется с линейной скоростью  $U$ , то в зоне соприкосновения между токами рельсы и колеса образуется острый угол, под которым находятся встречно направленные токи  $I$ . Они взаимно отталкиваются, образуя по закону Ампера силу  $F_a$  с не нулевым плечом относительно точки соприкосновения. Таким образом первичная гипотеза Ж.Губера об электродинамическом эффекте частично подтверждалась.



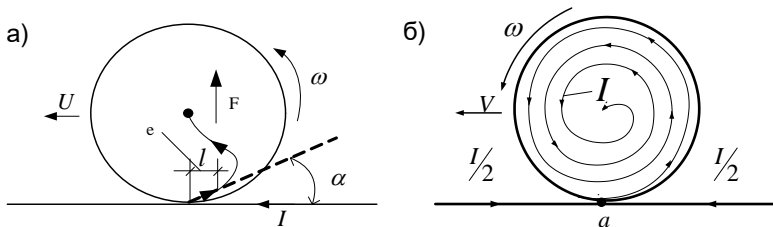


Рис.9.14. а). Модель Кузьмина В.В., Шпатенка В.С. б). Наша траектория тока в движущемся колесе

Предположение [35] об искривлении траектории тока в колесе или шаров справедливо. Однако для реальных скоростей  $V_1$  движения к (или от) центра электронов  $V_1 = \beta \varepsilon(x)$  скорость  $V_2$  их переноса телом колеса или шарика, которые вращаются с угловой скоростью  $\omega$ ,  $V_2 = \omega x$  (где  $\beta$  - коэффициент подвижности электронов в металле,  $\varepsilon(x)$  - напряженность электрического поля,  $x$  - расстояние траектории к оси, для  $x$  близкого к радиусу  $r$  колеса или шарика) намного больше от  $V_1$ . То есть траектория движения каждого из электронов будет иметь вид анти-спирали Архимеда (рис.9.14, б). При вращении колеса точка касания  $a$  перемещается по окружности колеса со скоростью  $\omega r$ , заряжая периметр колеса отрицательным или положительным зарядом в зависимости от полярности источника тока. То есть имеет место динамическая электризация токопроводящего колеса. Кроме того, как показал опыт авторов с двигателем Косырева-Мильроя с небольшими шарико-подшипниками и током в  $20\text{ A}$  двигатель через  $5 \div 8$  минут работы начинает тормозиться и останавливается. Эффект остановки объясняется линейным расширением радиуса  $r$  шариков в результате нагрева током по закону Джоуля - Ленца и уравнению термодинамики:

$$\frac{cm}{\kappa_{\text{TB}} S_{\text{OX}}} \frac{d\Delta\theta^\circ}{dt} + \Delta\theta^\circ = \left(\frac{I}{n}\right)^2 \frac{R(t)}{\kappa_{\text{TB}} S_{\text{OX}}}, \quad (9.62)$$

где  $n$  - количество шариков в подшипнике;  $c$  - коэффициент теплоемкости стали,  $m$  - масса шариков;  $\kappa_{\text{TB}}$  - коэффициент теплоотдачи с поверхности охлаждения  $S_{\text{OX}}$  шарика;  $R$  - электрическое сопротивление между точками касания шарика.

Тепловая постоянная времени  $\tau = \frac{cm}{\kappa_{\text{TB}} S_{\text{OX}}}$  характе-

ризует экспоненту нагрева шариков до установившегося значения

$$\theta_\infty = \theta_0 + \frac{R(\theta_\infty)}{n^2 \kappa_{\text{TB}} S_{\text{OX}}} I^2, \quad (9.63)$$

которое будет тем больше, чем меньше  $\kappa_{\text{TB}}$ . Воздух имеет гораздо больше  $\kappa_{\text{TB}}$ , чем вакуум. Именно по этой причине в опыте авторов статьи [58] двигатель Косырева-Мильроя остановился в вакуумной камере. К сожалению, они на этот фактор не обратили внимания. В нашем образце двигателя шарики разогревались примерно до  $200^\circ\text{C}$  и, имея температурный коэффициент расширения  $\alpha = 13 \times 10^{-6}$ , увеличили свой диаметр на  $0.026\text{мм}$  (что соизмеримо с зазором в точках соприкосновения шариков  $n$  колец). В результате роста механического противодействия двигатель через  $(3 \div 4)\tau$  останавливался. Это явление отсутствует в двигателе Ж.Губера, где одна точка соприкосновения.

Почему при существенном увеличении  $\omega$  ток  $I$  уменьшается; почему ток и магнитный поток в двигателе Косырева - Мильроя совпадают по направлению, как модернизировать двигатель Ж. Губера, чтобы получить не нулевой пусковой момент, показано в работе [15]".

**Висновок.** Не зважаючи на помилковість гіпотези Кузьміна-Шпаченко про виникнення моменту у двигуні Губера, криволінійність і навіть спіралевидність траєкторії потоку електрики в колесі, що обертається, має місце. І не менш важливим є думка про **динамічну електризацію** поверхні колеса, тобто про утворення електричних зарядів, як мінімум в зоні контакту. Важливим є також експериментальне і теоретичне підтвердження зупинки обертання підшипників внаслідок теплового розширення їх кульок.

### 9.3. Дослідження зони контакту

Коло можливих напрямків досліджень звузилось до недостатньо дослідженого процесу, що відбувається в зоні дотику. Конструктивно зона двох близько розташованих струмопровідних тіл може бути представлена як активно-ємнісний елемент з паралельно з'єднаними резистором  $R_k$  і конденсатором  $C_k$ . А ділянки наближення струму до зони контакту як активно-індуктивний елемент ( $RL$ ), де внаслідок досить великої площі поперечного перерізу направляючих та тіла колеса чи кульки активна складова  $R$  опору буде набагато менше активної складової опору  $R_k$  контакту (рис.9.15).

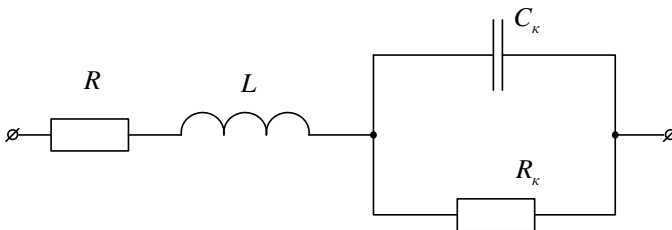


Рис.9.15. Схема заміщення кола струму в зоні контакту

Завдяки реактивним елементам (ємності  $C_{\kappa}$  і індуктивності  $L$ ) може виникати іскріння зліва і справа від зони механічного контакту. Розглянемо колесо радіусу  $r$ , ширини  $b$ , що рухається з лінійною швидкістю  $V_0$  і кутовою  $\omega_0$  по рейці (рис.9.16, а).

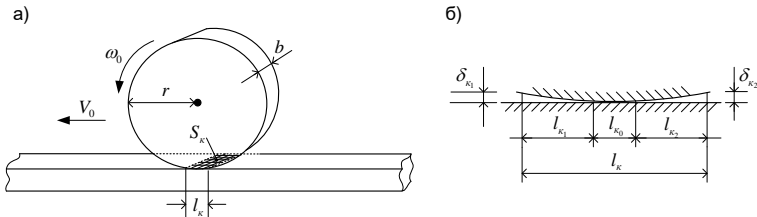


Рис.9.16. а) Система «колесо-рейка», б) Зона контакту

З наближаючої сторони на ділянці площею  $l_{\kappa_1} \cdot b$  виникає частина  $i_{C_1}$  загального струму  $I$ , яка має ємнісний характер:

$$i_{C_1}(t) = \frac{dq_1}{dt} = \frac{d}{dt}(U_{\kappa} \cdot C_1(\tau)) = U_{\kappa} \frac{dC_1}{dt} = U_{\kappa} \frac{d}{dt} \left( \frac{\varepsilon_0 S_1}{\delta_{\kappa_1}(t)} \right) = U_{\kappa} \varepsilon_0 S_1 \left( - \frac{d\delta_{\kappa_1}(t)}{dt} / \delta_{\kappa_1}^2(t) \right), \quad (9.64)$$

де, так як  $\delta_{\kappa_1}(t)$  зменшується, то

$$i_{C_1}(t) = \frac{\varepsilon_0 S_1 U_{\kappa}}{\delta_{\kappa_1}^2(t)} \cdot \left( \frac{d\delta_{\kappa_1}(t)}{dt} \right) > 0. \quad (9.65)$$

В збігаючій стороні на ділянці площею  $l_{\kappa_1} \cdot b$  виникає частина  $i_{C_2}$  загального струму  $I$ , яка, як і  $i_{C_1}(t)$  частково має ємнісний характер:

$$i_{C_2}(t) = \frac{\varepsilon_0 S_2 U_{\kappa}}{\delta_{\kappa_1}^2(t)} \cdot \left( - \frac{d\delta_{\kappa_2}(t)}{dt} \right) < 0. \quad (9.66)$$

Вона менше нуля, оскільки  $\delta_{\kappa_2}(t)$  збільшується у часі. Враховуючи симетрію відносно середини зони контакту і, прийнявши в першому наближенні лінійний закон зміни  $\delta_{\kappa_1}(t)$ ,  $\delta_{\kappa_2}(t)$ , можна прийняти, що ємнісні струми  $i_{C_1}$ ,  $i_{C_2}$  взаємокомпенсуються, тобто

$$i_{C_1}(t) + i_{C_2}(t) \cong 0. \quad (9.67)$$

Однак заряди  $q_1$  і  $q_2$ , внаслідок наявності напруги  $U_{\kappa}$  і ємностей  $C_1$  і  $C_2$ , будуть мати місце. Якщо маємо колісну пару Губера, то потенціал  $\phi_1$  однієї рейки-полюс, другої  $\phi_2$  мінус, а коліс - нуль. Тобто в зонах  $l_{\kappa_1} \cdot b$  і  $l_{\kappa_2} \cdot b$  має місце не збалансований (як у звичайному конденсаторі підключеному до джерела  $\pm U_{\kappa}$ ) заряд

$$q_{C_1} + q_{C_2} = \frac{U}{2} \cdot C = q_C, \quad (9.68)$$

де  $C = C_1 + C_2$ .

Ще більший заряд  $q_0$  має місце в зоні  $l_{\kappa_0} \cdot b$  безпосереднього контакту. Внаслідок його не ідеальності мають місце мікро-зазори  $\delta_{\kappa_0}$  між тілом колеса і рейки. Внаслідок кінцевості площі  $S_{\kappa_0} = l_{\kappa_0} \cdot b$  і майже нескінченно малого зазору  $\delta_{\kappa_0}$ , ємність  $C_0$  може бути досить як у іонисторах чи над-конденсаторах відчутною:

$$C_0 = \frac{\epsilon_0 S_{\kappa_0}}{\delta_{\kappa_0}}. \quad (9.69)$$

Так для контакту колеса вагона і рейки (рис.9.17) ємність  $C_0$  наближено дорівнюватиме

$$C_0 \cong \frac{8.85 \cdot 10^{-12} \cdot (0.02 \div 0.03) \cdot 0.1}{10^{-6}} = (0.018 \div 0.027) \mu\text{кФ}.$$

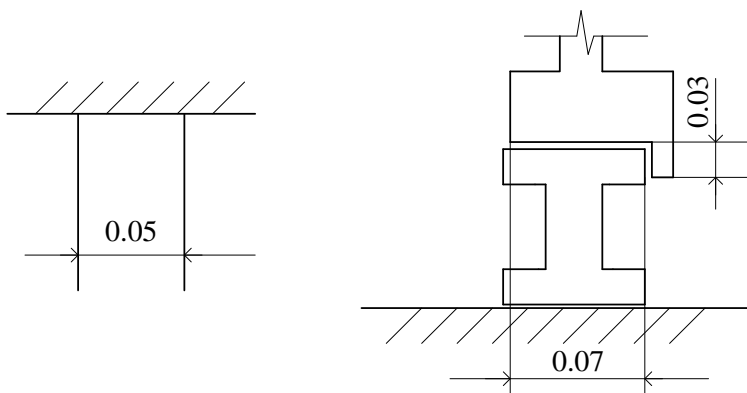


Рис.9.17. Контакт колеса і рейки

Якщо прийняти напруги  $U_k = 10V$ , то заряд  $q_0$  складе  $(0.18 \div 0.27) \cdot 10^{-6}$  Кл. Сумарний заряд  $q_\Sigma = q_0 + q_c$  буде ще більшим. Отже слід звернути увагу на ємнісні ефекти, завдяки яким в зоні контакту колеса і рейки утворюється не збалансований заряд  $q_\Sigma$ .

#### 9.4 Двостороння дія закону Біо-Савара-Лапласа

Подальше наближення до привільного пояснення ефекту Губера набуло в статі «Ефект Губера» [23]. Тут вперше було враховано дію закону Біо-Савара-Лапласа і на збігаючій стороні контакту. Надамо деякі складові цієї статті:

“Как показали наблюдения, для возникновения крутящего момента  $M$ , кроме наличия движения колес или шариков, необходимо чтобы колеса (шарики) и направляющие были ферромагнитными, соответственно где-то должен существовать источник намагничивания ферромагнетика колес (шариков) и направляющих; чтобы намагничивания тел было не равновесным относительно точки контакта (в сторону движения оно должно быть

большим, чем в противоположную), материал ферромагнетика был магнито-мягким; смазка подшипников, если она не густая, также несколько улучшала показатели двигателя Косырева-Мильроя. Однако ток  $I$ , который имел место во всем контуре "источник-потребитель", непосредственно не мог создавать не равновесное магнитное поле, которое, соответственно, не равновесно намагничивало ферромагнетики и путем их протягивания с набегающей стороны колес или шариков создавало крутящий момент.

Для выявления причины, которая это сделала, следует учесть специфику электродинамики, а именно наличие движения точки соприкосновения, как относительно неподвижной направляющей, так и относительно системы координат колеса или шарика, неподвижной относительно тела колеса или шарика. В обеих системах координат точка соприкосновения (при условии что колеса или шарики вращаются с угловой скоростью  $\Omega$  против движения часовой стрелки) движется влево со скоростью

$$V_0 = \Omega \cdot r, \quad (9.70)$$

где  $r$  - радиус колеса или шарика. Чтобы установить наличие в этой пространственно неоднородной системе зарядов и их неравномерное распределение, где показатели системы будут зависимыми как от тока, так и от положения и движения ее составляющих, необходимо детально проанализировать процессы непосредственно в зоне контакта.

При не подвижности колеса или шарика ( $V_0 = 0$ ) неподвижная зона контакта состоит из подзоны "a" непосредственно механического и электрического контакта, которая зависит от степени шероховатости поверхностей и механического давления, и подзоны "b" чисто электрического контакта, расположенной симметрично

вокруг зоны механического контакта (рис.9.18), которая имеет зазор  $\delta$  возрастающий по закону

$$\delta(\alpha) = r(1 - \cos \alpha), \quad (9.71)$$

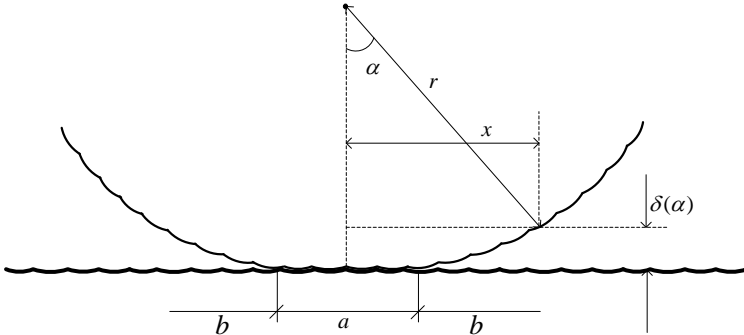


Рис.9.18. Зона электрических и механических контактов

где  $\alpha$  – угол, равный  $\arcsin \frac{x}{r}$ ,  $x$  – расстояние от оси прикосновения. Ток  $I$ , как поток вектора электрической плотности  $\vec{j}$  через общую поверхность  $S$  контакта, поданной в виде суммы электрических трубок  $k$ -й плотности  $j_k$  через сечение  $k$ -й трубки  $\Delta S_k$ .

$$I = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S} \cong \sum_{K=1}^N j_k \cdot \Delta S_k. \quad (9.72)$$

В зоне "a" механического контакта часть  $I_1$ , тока  $I$  исчисляется по закону Ома, как напряжения  $U_k$  на контакте, деленное на электрическое сопротивление  $R_k$  контакта. В зоне воздушного зазора  $\delta$  происходит ионизация воздуха и электрический пробой зазора вследствие достаточно большой напряженности  $\varepsilon$  электрического поля:



$$\varepsilon(\alpha) = \frac{U_{\kappa}}{\delta(\alpha)} = \frac{U_{\kappa}}{r(1 - \cos \alpha)}, \quad (9.73)$$

где  $U_{\kappa}$  составляет несколько единиц или десятков вольт, а зазор, в зависимости от  $\alpha$  изменяется от микрон до миллиметров. Поэтому общий поток  $I$  электронов, кроме тока проводимости  $I_1$ , будет иметь ток  $I_2$  пробоем диэлектрика, как поток электрических зарядов  $q$  через воздушный зазор  $\delta$ , движущихся со скоростью  $V_q$ , пропорциональной напряженности электрического поля в ионизированном воздухе зазора.

Таким образом, при условии  $V_0 = 0$ , имеем симметричное распределение плотностей  $j_{\kappa}$  тока  $I$  и зарядов, как на поверхностях ферромагнитных тел в зоне контакта, так и в воздушном ионизированном зазоре  $\delta(\alpha)$ . Ток  $I$  симметрично намагничивает ферромагнитные тела колеса (шарики) и направляющих, и не приводит к образованию крутящего момента  $M$ .

Иную картину наблюдаем при движении колеса или шарика, состоящего из вращающегося со скоростью  $\Omega$  и поступательного со скоростью  $V_0$  (9.70) движения (рис.9.19).

Ток  $j_{\kappa} \cdot \Delta S_{\kappa}$  каждой  $k$ -й трубочки в ферромагнитном теле направляющей и колеса (шарика) создает вокруг себя в  $\mu$  раз более сильную магнитную индукцию чем в вакууме. Для вакуума, по закону полного тока,

$$\oint_L \vec{B}_{\kappa} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\kappa}. \quad (9.74)$$

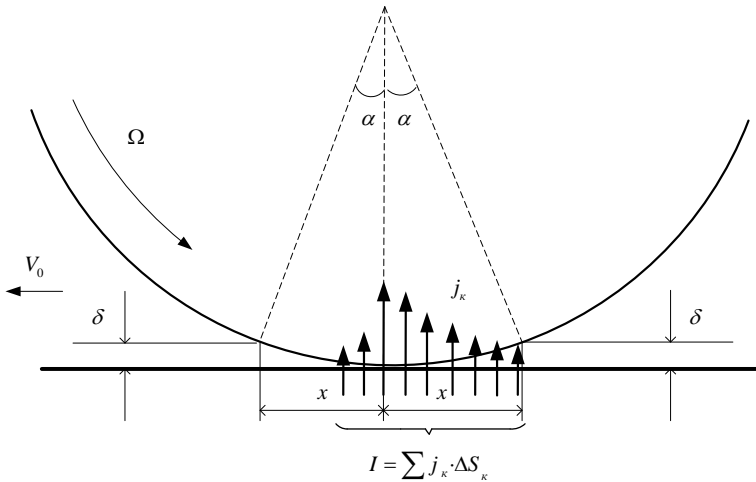


Рис.9.19. Асимметричное распределение плотности  $j_k$  тока  $I$

Для ферромагнетика в выражении (9.74) вместо  $\mu_0$  следует подставить  $\mu \cdot \mu_0$ , где  $\mu$  – относительная магнитная постоянная, для различных сталей лежит в пределах  $10^3 \div 10^4$ . Соответственно больше будет и индуктивность  $L$  каждой трубки тока. Во время движения колеса или шарика точка соприкосновения перемещается со скоростью  $V_0$ . Это приводит с набегающей стороны к замыканию зазора  $\delta$  и образования новых трубок  $j_k \cdot \Delta S_k$ , а со сбегающей - к размыканию цепи трубок. То есть имеет место процесс коммутации электрических цепей трубок  $j_k \cdot \Delta S_k$  токов  $I_k$ . Наличие индуктивности  $L$  трубок с током  $I_k$  в ферромагнитной среде, согласно закону электромагнитной индукции Фарадея, создает в зоне коммутации электродвижущую силу

$$\varepsilon_k = -L \frac{dI_k}{dt}, \quad (9.75)$$

которая по правилу Ленца направлена таким образом, чтобы уменьшить скорость  $\frac{dI_k}{dt}$  изменения тока  $I_k$ . С набегающей стороны  $\mathcal{E}_k$  направлена навстречу напряжению  $U_k$  на контакте, уменьшая скорость роста  $I_k$ ; со сбегающей стороны, наоборот,  $\mathcal{E}_k$  будет добавляться к напряжению  $U_k$ , тем самым поддерживая токи  $I_k$  справа от контакта. Чем больше индуктивность  $L$ , а также чем больше скорость  $\Omega$  тем больше будет асимметрия распределения трубок  $j_k \cdot \Delta S_k$  в пользу сбегающей стороны. Действительно, в  $R_k L_k$  - цепи в  $k$ -й трубке при коммутации в первом приближении имеют место два типа переходного процесса:

- при подключении

$$I_k(t) = I_{ky} \left( 1 - e^{-\int_0^t \frac{d\theta}{\tau_k(\theta)}} \right), \quad (9.76)$$

где  $I_{ky}$  - установившееся значение  $I_k$ ,  $\theta$  - время,

$$\tau_k = \frac{L_k}{R_k(\theta)}, \quad (9.77)$$

- при отключении

$$I_k(t) = I_{ky} e^{-\int \frac{d\theta}{\tau_k(\theta)}}. \quad (9.78)$$

Чем больше скорость  $V_0$  (9.70), тем (согласно (9.76)) меньше трубок токов  $I_k$  образуется с набегающей стороны и больше со сбегающей. Каждая трубка, преодолевая воздушный зазор  $\delta(\alpha_k)$ , образует в нем электрический заряд  $q_k$  (разряд, искру, дугу):

$$q_k = j_k \cdot \Delta S_k \cdot \Delta t_k = I_k \cdot \Delta t_k, \quad (9.79)$$

где  $\Delta t_\kappa$  - время прохождения носителей тока  $I_\kappa$  через зазор  $\delta(\alpha_\kappa)$ . Суммарный заряд  $q_\Sigma$  будет равен сумме всех зарядов слева и справа от точки соприкосновения с координатой  $x_{екв}$ :

$$x_{екв} = \frac{\sum_{\kappa=1}^N I_\kappa \cdot x_\kappa}{\sum_{\kappa=1}^N I_\kappa} = \frac{\sum_{\kappa=1}^N I_\kappa \cdot x_\kappa}{I}, \quad (9.80)$$

где координаты  $x_\kappa$  справа от точки соприкосновения берутся со знаком "минус", слева - "плюс".

Эквивалентный суммарному пространственному заряду  $q_\Sigma$  **точечный заряд  $q_e$  будет смещен вправо на расстояние  $x_{екв}$**  от точки соприкосновения. Соответственно, воздушные зазоры слева и справа от координаты  $x_{екв}$  заряда  $q_e = q_\Sigma$  будут разными:

– слева

$$\delta_1(\alpha) = r(1 - \cos(\alpha_e - \Delta\alpha)), \quad (9.81)$$

– справа

$$\delta_2(\alpha) = r(1 - \cos(\alpha_e + \Delta\alpha)), \quad (9.82)$$

где  $\Delta\alpha$  меняется от нуля до значения  $\alpha_{max}$ , при котором заряд прекращается. С ростом  $V_0$  от нуля до максимально возможной для данного источника питания,  $x_{екв}$  тоже растет от нуля до максимального вследствие увеличения количества трубок  $I_\kappa$  со сбегаящей стороны. Действительно согласно (9.78), трубка размыкается примерно за  $3\tau_\kappa$ . За это время длина  $x$  зоны существования трубок составит  $V_0 \cdot 3\tau_\kappa$ . Если на каждую трубку приходится  $\Delta x$  пути, то их количество  $n = V_0 \cdot 3\tau_\kappa / \Delta x$ .

Заряд  $q_e$  движется в воздушном зазоре за точкой соприкосновения со скоростью  $V_0$ . При этом в пространстве траектории движения заряда, согласно закону Био-Савара-Лапласа, он, как элемент  $I_y \cdot dl$  некоторого условного тока  $I_y$ , где

$$q_e \cdot V_0 = q_e \frac{dl}{dt} = I_y \cdot dl, \quad (9.83)$$

образует в соответствующей точке пространства магнитное поле индукции  $d\vec{B}$  (рис.9.20):

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_y \cdot dl \cdot \sin \beta}{r^2}, \quad (9.84)$$

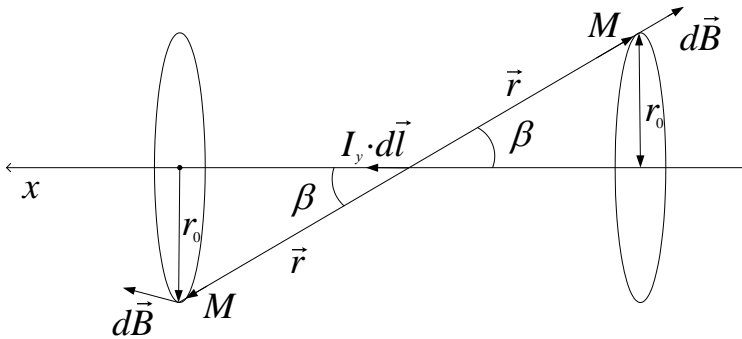


Рис.9.20. Закон Био-Савара-Лапласа

где  $r, r_0$  расстояние до точки  $M$ , в которой элемент тока  $I_y \cdot dl$  создает индукцию  $d\vec{B}$ . Для расчета магнитного поля  $\Phi(r_1 r_0)$  следует проинтегрировать  $dB(r_1 r_0)$  по всему заданному пространству в пределах  $r \in \{0, \pm r_{\max}\}$ ,  $r_0 \in \{0, \pm r_{0\max}\}$ . Если же в это воздушное пространство ввести ферромагнитные тела, то они локально намагнитятся от элемента  $I_y \cdot dl$  и, имея воздушный зазор  $\delta(\alpha)$  (9.81, 9.82), с целью минимизации энергии  $W_m$  магнитного поля [11], образуют силы  $F_m$ ,

которые действуют на увеличение магнитной проводимости  $Y_M$  зазора  $\delta(\alpha)$ , то есть на уменьшение зазора:

$$F_M = \frac{dW_M}{d\delta}. \quad (9.85)$$

Сила  $F_M$ , как известно [21], пропорциональна квадрату условного тока  $I_y$ , обратно пропорциональна квадрату зазора  $\delta$  и действует на уменьшение зазора  $\delta$  (увеличение магнитной проводимости  $Y_M$ ). Как видим (рис.9.21), условия намагничивания и взаимопротяжения ферромагнетиков слева существенно лучше аналогичных условий справа от точки соприкосновения. Слева  $\delta_1(\alpha)$  проходит через нуль и медленно растет (9.81) до  $\alpha_{\max}$ , тогда как справа  $\delta_2(\alpha)$  сразу возрастает (9.82) от  $\alpha_e$  до  $\alpha_{\max}$ .

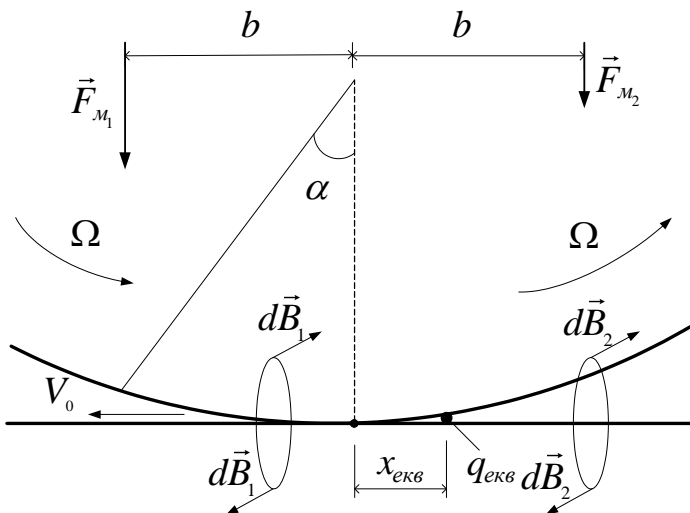


Рис.9.21. Асимметричное расположение заряда  $q_{ekv}$

Элемент  $I_y \cdot \vec{dl}$  несимметрично локально намагничивает тела ферромагнетиков в зоне контакта. По перемещению точки

контакта, в силу магнитомяккости ферромагнетиков, они размагничиваются до небольшой остаточной намагниченности. Это дает возможность на следующем шаге повторить весь процесс, обеспечивая постоянное воздействие крутящего момента (рис.9.21):

$$M = (F_{m_1} - F_{m_2})b, \quad (9.87)$$

где  $b$  - плечо равнодействующих сил  $F_{m_1}$  и  $F_{m_2}$ .

Однако с ростом  $V_0$  (или  $\Omega$ ) дальнейшее их увеличение, после некоторого экстремального роста  $x_{екв}$  приводит к уменьшению  $F_{m_1}$  и росту  $F_{m_2}$  и, как следствие, уменьшению момента  $M$ . Зависимость  $M(\Omega)$  носит экстремальный характер, подобный моментной характеристике однофазного асинхронного двигателя”.

*Однак, розглядаючи тільки миттєві значення сил  $\vec{F}_{m_1}$  і  $\vec{F}_{m_2}$  (рис.51), автори роблять невірний висновок, що  $F_{m_1}$  більше  $F_{m_2}$ . Навпаки, зсув  $x_{екв}$  заряду  $q_{екв}$  вправо від точки дотику збільшить миттєве значення моменту протидії обертанню  $\Omega$*

*Згадуючи двигун Косирєва-Мільроя, який на кафедрі загальної електротехніки КПІ демонстрував А.В.Нетушил, та не зовсім вдалі власні експерименти, ми звернули увагу на наявність маховика у двигуні Косирєва-Мільроя, що мав суттєвий динамічний момент інерції. Отже слід розглянути не миттєві значення відповідних сил і моментів, а так звані імпульси сил і моментів. Це дало можливість повністю пояснити ефект.*

## 9.5. Виявлення необхідної умова наявності моменту інерції

*Статті «Взаємодія законів електродинаміки в ефекті Ж.Губера» [24, 25] та «Interaction of the laws of electrodynamics in the Huber effect») подано остаточне пояснення процесів, що мають місце в ефекті Ж.Губера:*

Деколи проблема фізики полягає в бажанні отримання точного математичного опису процесів в об'єктах реального світу. Але неможливо отримати фізико-математичну модель, ізоморфну реальним процесам. Відповідно до законів загальної взаємодії елементів та нерозривності матерії і руху, логічно стверджувати, що не існують лінійна залежність між окремими фізичними явищами, автономні (ідеально ізольовані) об'єкти, стаціонарні детерміновані і стохастичні процеси, фізичні константи та ін. Як приклад, у зв'язку напруги і струму, поданого законом Ома як пряма пропорційність, ігноруються закони термодинаміки, з яких витікає, що коефіцієнт пропорційності (електричний опір) буде залежати від температури, а вона (за законом Джоуля–Ленця) від струму та часу. Тому інколи успіх пояснення того чи іншого явища залежить від розумного компромісу між точністю і складністю його математичної моделі. Саме такий підхід використано нижче для пояснення ефекту Ж. Губера.

### ***9.5.1. Ефект Ж. Губера з позиції зовнішнього спостерігача***

Якщо колісна пара Ж. Губера [35] котиться по рейкам, або вал і внутрішня шайба підшипників двигуна Косирєва–Мільроя обертаються, то, за наявності електричного струму в контактні коліс (чи кульок) з направляючими, виникає обертальний момент  $M$ . Швидкість  $\Omega$  обертання збільшується зі зростанням струму  $I$ ; не залежить від його напрямку, постійності чи синусоїдності струму; дорівнює 0, якщо матеріал не феромагнітний; за незмінності напруги реального джерела живлення залежність  $M$  від  $\Omega$  екстремальна. Для  $\Omega = 0$ ,  $M = 0$ , далі  $M$  зростає до максимального ( $M_{\max}$ ). Далі,



якщо механічний момент протидії менше  $M_{\max}$ ,  $\Omega$  продовжує зростати, але зменшується  $M$ . Далі, якщо момент протидії змінив знак, за деякої синхронної швидкості  $\Omega_c$ ,  $M = 0$ , і далі, зі зростанням  $\Omega > \Omega_c$ ,  $M < 0$ .

### ***9.5.2. Огляд існуючих намагань пояснити ефект Ж. Губера***

Розглянуте явище виявлено Ж.Губером в 1951 році. Пояснення ефекту, подані різними вченими [49, 12, 58, 35], на жаль, не відповідали фізичній сутності явища. Вважалось [12, 35], що момент виникає від взаємодії за законом Ампера струмів направляючої і колеса чи кульки, які розташовані під гострим кутом. Це створювало б момент, якби на другому колесі колісної пари Ж. Губера чи другій стороні кульки підшипника такий же момент не мав про-тилежного знаку. Вважалось [35], що момент виникає від іскри і збільшення тиску повітря на збігаючій стороні контакту. Щоб це підтвердити [58], підшипники помістили у вакуумний ковпак і поступово відкачали повітря. Рух припинився. Можливо, мав місце перегрів і заклинювання підшипників внаслідок суттєвого зменшення у вакуумі тепло-відбору від розігрітих струмом кульок до  $250^\circ\text{C}$ , і це привело до їх зупинки, а, можливо, і відсутність у вакуумі іскри? Тільки, чи пневматична дія іскри створювала момент? Автор роботи [57] за 1982 рік стверджує, що іскри не є причиною, а в роботі [58] за 1973 рік він вважав причиною саме їх. Про негативний вплив іскріння на рух говориться в [57]. Термодинамічне пояснення [12] виникнення моменту від теплової деформації направляючих, яка, начебто, створює гірку, з якої скочується кулька чи колесо, не враховує їх значної теплової інерційності і могло б мати місце лише для надмалих швидкостей  $\Omega$ . Але за таких

$\Omega$  момент не виникає. В [10] пропонуються положення, які не відповідають класичним законам фізики, наприклад, наявність магнітної індукції, створеної струмом, і співпадаючої з ним же за напрямком. Додаткові неясності внесли роботи [49, 10], де ефект Губера об'єднано з нез'ясованим ефектом Дж. Серла. Абстрактний математичний варіаційний підхід в роботі [11] теж не розкриває фізику явища.

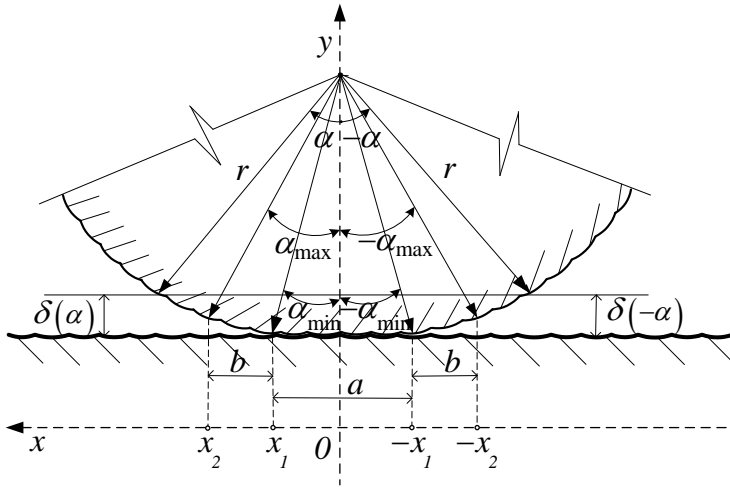


Рис.9.22. Зона контакту: “ $a$ ” – електромеханічного і “ $b$ ” – електричного контактів

Як показали спостереження, для виникнення обертального моменту  $M$ , окрім наявності руху, необхідно, щоб колеса (кульки) і направляючі були феромагнітними. Відповідно до цього повинно існувати джерело намагнічування коліс (кульок і направляючих). Намагнічування тіл повинно бути несиметричним відносно точки контакту: в сторону руху більшим; матеріал феромагнетика повинен бути магнітом’яким; змазка підшипників, якщо вона не густа, також дещо покращує показники. Однак, струм  $I$  в колі “джерело–споживач” без-

посередньо не може створювати несиметричне магнітне поле, яке б несиметрично намагнічувало феромагнетики і, шляхом їх притягання з набігаючої сторони з подальшим розмагнічуванням, створювало обертальний момент  $M$ . Пояснення ефекту залишалось не вирішеним.

### ***9.5.3. Пояснення ефекту на основі законів електродинаміки рухомих тіл***

Специфіка електродинаміки [57, 56, 26] полягає у вивченні просторово неоднорідної системи з нерівномірним розподілом зарядів  $q$  і додатковими степенями вільності руху. Тобто силові показники системи залежать не тільки від струму  $I$ , а від положення і руху складових системи.

Розглянемо систему «направляючі – зона контакту – колесо чи кулька». Колеса чи кульки радіусу  $r$ , обертаються з кутовою швидкістю  $\Omega$  проти годинникової стрілки. Вони котяться по нерухомих направляючих вліво від точки дотику з лінійною швидкістю  $V_0$ :

$$V_0 = \Omega \cdot r. \quad (9.87)$$

У колісній парі Губера рейки мають значний попередній переріз (по відношенню до площі контакту рейки з колесом). Тому падіння напруги у рейці відносно падіння в зоні контакту не суттєве, а напруга на контакті майже не залежить від місця підключення рейки до джерела. Площі перерізу колеса і вала також великі. Їх опір струму також буде набагато меншим опору зони контакту. Подібна ситуація має місце і в підшипниках. Таким чином, майже всю напругу джерела буде прикладено до двох послідовно увімкнених контактів коліс, або чотирьох послідовно і  $n$  паралельно увімкнених контактів

двох підшипників, де  $n$  – кількість кульок в підшипнику. Тому слід проаналізувати процеси в зоні контактів.

**Потік  $I$  електрики  $q$  через зону нерухомого контакту**

Зона контакту не є ідеальною лінією для колеса чи точкою для кульки (рис.9.22). Вона має кінцеву область с неідеального (внаслідок шерохватості поверхонь) електромеханічного контакту, яку оточує область « $b$ » суто електричного контакту через невеликий повітряний чи масляний зазор  $\delta$ .

В межах  $\pm x_1$  в зоні « $a$ », внаслідок шерохватості поверхонь, має місце механічний контакт з резистивним опором  $R_a$  і повітряний – з ємністю  $C_a$ . Опір  $R_a$  залежить від площі безпосереднього контакту поверхонь, питомого опору  $\rho_k$  контактного середовища і середньої товщини  $l_k$  зони механічного контакту:

$$R_a \cong \frac{\rho_k l_k}{S_k} \quad (9.88)$$

Ємність  $C_a$  в зоні « $a$ » з'являється внаслідок не ідеальності контакту, тобто наявності мікрозазорів між поверхнями. Вона пропорційна частині  $S_a$  площі  $S_k$ , діелектричній проникності  $\varepsilon$  повітря і зворотно пропорційна товщині  $\delta(\alpha)$  мікрозазору:

$$C_a \cong \frac{\varepsilon S_a}{\delta(\alpha)} \quad (9.89)$$

Для контакту кульки і обойми, враховуючи малість  $\alpha$ ,

$$S_a = k \frac{\pi a^2}{4} = \frac{\pi k}{4} r^2 \sin^2 \alpha \cong \frac{\pi k}{4} r^2 \alpha^2, \quad (9.90)$$

для контакту колеса і рейки

$$S_a = 2kaf \cong 2kfr\alpha, \quad (9.91)$$

де коефіцієнт  $k$  враховує, як зменшення загальної

площі  $S_k$ , так і збільшення поверхні “обкладок” конденсатора внаслідок шорсткості поверхонь;  $f$  – ширина колеса.

Зазор  $\delta(\alpha)$  для зони “а” складає одиниці мікрон. Тому ємність  $C_a$ , незважаючи на невелику площу  $S_a$ , може бути достатньо відчутною, особливо для масляного зазору. Для малих  $\alpha$ ,

$$\delta(\alpha) = r(1 - \cos \alpha) \cong r\alpha^2. \quad (9.92)$$

Ємність(9.89), з урахуванням(9.90) і (9.92), для  $n$  паралельно увімкнених кульок:

$$C_a = n \frac{\varepsilon}{r\alpha^2} \cdot \frac{k\pi}{4} r^2 \alpha^2 = \frac{nk\pi\varepsilon r}{4}. \quad (9.93)$$

Ємність двох контактів колеса і рейки.

$$C_a = 2 \frac{\varepsilon}{r\alpha^2} \cdot 2kfr\alpha = \frac{4k\varepsilon f}{\alpha}. \quad (9.94)$$

Напруга  $U_k$  (різниця потенціалів  $\varphi_1$  і  $\varphi_2$ ) на контакті, визначається опором і струмом  $I$ :

$$U_\varepsilon = \varphi_1 - \varphi_2 = I \cdot R_\varepsilon, \quad (9.95)$$

де, внаслідок наявності двох або чотирьох (у підшипниковій парі) послідовно увімкнених контактів між ( $\pm$ ) полюсами джерела постійної напруги  $U$ , потенціали  $\varphi_1$  і  $\varphi_2$  будуть одного знаку для чотирьох або  $\varphi_2$  буде нульовим для двох послідовних контактів.

Площа  $S_b$  в зоні “b” (рис.9.22) для кульки:

$$S_b = \frac{k\pi}{2} (a + 2b)b, \quad (9.96)$$

– для колеса:

$$S_b = 2kfb. \quad (9.97)$$

Площа  $S_b$  суттєво більша від  $S_a$ , але і зазор (9.92) більший, оскільки (рис. 9.23)

$$\alpha \in [\alpha_{\min}, \alpha_{\max}], \quad \alpha_{\min} = \arctg \frac{a}{2r}, \quad \alpha_{\max} = \arctg \frac{b + \frac{a}{2}}{r}. \quad (9.98)$$

Наближене значення ємності  $C_b$  для середнього значення  $\alpha_{\text{сєр.}}$ , що дорівнює напівсумі  $\alpha_{\min}$  і  $\alpha_{\max}$ :

– для  $n$  кульок підшипників

$$C_b \cong n \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r}{r \cdot \alpha_{\text{сєр.}}^2} \cdot \frac{k\pi}{2} (a + 2b)b \cong \frac{nk\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}{1} \cdot \frac{\alpha_{\max}(\alpha_{\max} - \alpha_{\min})}{\alpha_{\text{сєр.}}^2} \approx nk\pi\varepsilon_0\varepsilon_r \cdot \left( \frac{\alpha_{\max}}{\alpha_{\text{сєр.}}} \right)^2; \quad (9.99)$$

– для двох контактів коліс і рейок

$$C_b = 4 \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r}{r \alpha_{\text{сєр.}}^2} \cdot kfb. \quad (9.100)$$

Для підшипників сумарна ємність складе приблизно долі, для коліс – одиниці пікофарад, а можливо і більше.

Заряди  $q_1$  і  $q_2$  одного знаку, розташовані на контактуючих поверхнях,

$$q_1 = C \cdot \varphi_1, \quad q_2 = C \cdot \varphi_2, \quad (9.101)$$

відповідно до(9.89) – (9.95), складуть тисячні долі Кулона.

### ***Потік $I$ електрики $q$ через зону рухомого контакту***

За відсутності руху електричний струм  $I$ , як потік електрики  $q$ , розподілено в зонах “ $a$ ” і “ $b$ ” (рис. 9.22) симетрично. Невелика зона “ $b$ ” обмежена координатами  $\pm x_2$ , за яких явище пробою зазору зникає. Ситуація суттєво змінюється (рис.9.23), якщо колесо чи кулька обертаються зі швидкістю  $\Omega$ , рухаючись зі швидкістю  $V_0$

З метою пояснення виникнення асиметрії, подамо потік  $I$  сумою електричних трубок густини  $\vec{j}_k$  через

перерізи  $\Delta S$  сумарної площі  $S_\kappa$  контакту:

$$I = \int_{S_\kappa} \vec{j}(S) \cdot \vec{dS} \cong \sum_{k=1}^N j_k \cdot dS. \quad (9.102)$$

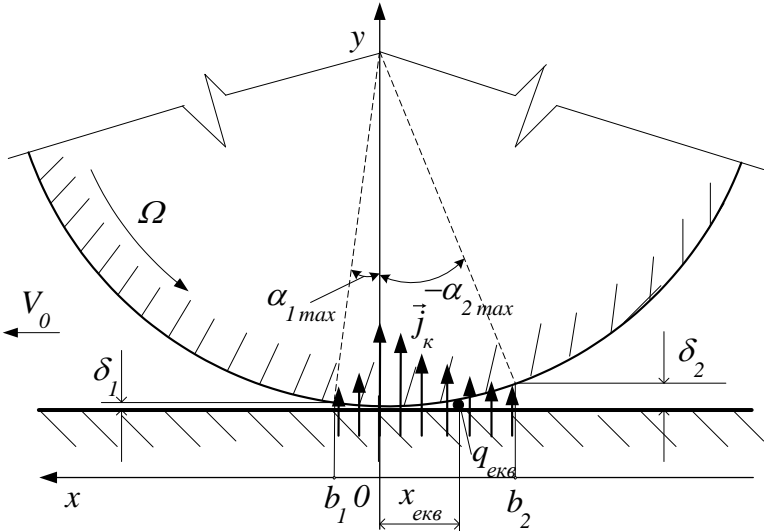


Рис. 9.23. Асиметричний розподіл густини  $j_k$  струму  $I$

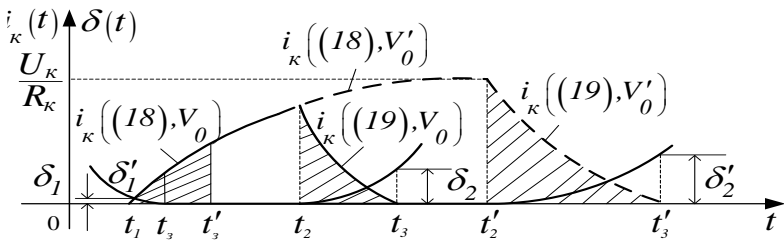


Рис. 9.24. Перехідні процеси (9.100), (9.101) в колі  $k$  – тої трубки

для швидкостей

$V_0$  і  $V'_0$ , де  $V_0 > V'_0$

Кожна  $k$ -та трубка струму  $I_k = j_k \Delta S$  утворюється в момент  $t_1$  виникнення розряду в зазорі  $\delta_1$  і зникає в момент  $t_3$  згасання розряду в зазорі  $\delta_2$  (рис.9.24). Маючи кінцеву довжину  $l_k$ , площу  $\Delta S$  перерізу і розташування у феромагнітному середовищі, кожна трубка є  $R_k L_k$ - колом, де  $R_k$  і  $L_k$  – електричний опір і індуктивність. Якщо (для спрощення) прийняти  $R_k$  і  $L_k$  постійними, а опір контакту вважати нульовим за наявності і нескінченним за відсутності розряду, то миттєве значення  $i_k(t)$  струму  $I_k$  визначається як розв’язок рівняння:

$$L_k \frac{di_k}{dt} + R_k \cdot i_k = U_k. \quad (9.103)$$

А саме: для  $t_2 > t \geq t_1$

$$i_k(t) = \frac{U_k}{R_k} \left( 1 - e^{-\frac{t-t_1}{\tau_k}} \right) \cdot 1(t-t_1); \quad (9.104)$$

для  $t_2 \leq t < t_3$

$$i_k(t) = \frac{U_k}{R_k} \left( 1 - e^{-\frac{t_2-t_1}{\tau_k}} \right) \cdot e^{-\frac{t-t_2}{\tau_k}} \cdot 1(t-t_2), \quad (9.105)$$

де  $1(t-t_1)$ ,  $1(t-t_2)$  – функції Хевісайда,  $\tau_k = L_k/R_k$  – стала часу.

Залежно від швидкості, струм  $i_k(t)$  за час  $(t_2 - t_1)$  експоненційно зростає і досягає усталеного значення  $\frac{U_k}{R_k}$  для швидкості  $V_0'$  або його частини  $i_k(t_2)$  для  $V_0$ . Далі, після розмикання механічного контакту ( $t \geq t_2$  або  $t \geq t_2'$ ), він експоненційно зменшується (9.105) до нуля. Напру-



женість  $\varepsilon_{np.}$ , за якої виникає чи зникає пробій зазору  $\delta$ , з набігаючої сторони дорівнює відношенню  $U_k$  до  $\delta_1$  (рис.9.23). В момент  $t_1$  (незалежно від швидкості  $V_0$  чи  $V'_0$ ) виникає струм (9.104). Заштрихована площа під кривою  $i_k(t)$  дорівнює заряду  $q'$ , що пройшов через зазор за час  $[t_1, t_3]$  для  $V_0$  або  $[t_1, t'_3]$  для  $V'_0$ , де  $t_3$  – момент виникнення механічного контакту. Далі, на інтервалах  $[t_3, t_2]$  чи  $[t'_3, t'_2]$ , має місце електромеханічний контакт. В момент часу  $t_2$  чи  $t'_2$  механічний контакт розмикається і виникає струм(9.105). Він буде експоненційно зменшуватись до моменту  $t_3$  чи  $t'_3$ , за якого відношення  $U_k + L_k \left| \frac{di_k}{dt} \right|$  до зазору  $\delta$  чи  $\delta'_2$  не зрівняється з напруженістю  $\varepsilon_{np.}$ , за якої відбувається пробій зазору  $\delta$ . Тобто  $\delta'_2$  буде більшим за  $\delta_1$  (рис.9.23, рис.9.24). Заштрихована площа під кривою (9.105) струму  $i_k(t)$  – це заряд  $q''$ , що пройшов за час  $[t_2, t_3]$  чи  $[t'_2, t'_3]$ . Як бачимо (рис. 9.24), він значно більший від заряду  $q'$  з набігаючої сторони.

Визначимо відстані  $b_1$  і  $b_2$ . Для  $b_1$ :

$$\varepsilon_{i\delta.} = \frac{U_k}{\delta_1} = \frac{U_k}{r(1 - \cos \alpha_1)} \cong \frac{U_k}{r\alpha_1^2} = \frac{U_k}{r \left( \arcsin \frac{b_1}{r} \right)^2} \cong \frac{U_k}{b_1^2} \cdot r, \quad (9.106)$$

звідси

$$b_1 = \sqrt{\frac{U_k \cdot r}{\varepsilon_{i\delta.}}}; \quad (9.107)$$

для  $b_2$ :

$$\varepsilon_{i\partial} = \frac{U_k + L_k \left| \frac{di_k(t_3)}{dt} \right|}{\delta_2} = \frac{U_k + L_k \left| \frac{di_k(t_3)}{dt} \right|}{b_2^2} \cdot r, \quad (9.108)$$

звідси

$$b_2 = \sqrt{\frac{U_k + L_k \left| \frac{di_k(t_3)}{dt} \right|}{\varepsilon_{i\partial}}} \cdot r. \quad (9.109)$$

Чим більша  $V_0$ , тим більше модуль  $\frac{di_k}{dt}$  і, відповідно, більше відношення  $b_2$  до  $b_1$ , тобто, несиметрія.

Аналогічно тому, як у колі з індуктивністю струми  $i_k$  трубок не змінюються миттєво, так і напруга  $U_k$  на конденсаторі (9.89) і, відповідно, заряди  $q_1, q_2$  (9.101) теж не можуть змінюватись миттєво. Тому також відбувається зміщення зарядів  $q_1, q_2$  праворуч від зони контактів.

Струми  $i_k$  трубок долають за скінчений час  $\Delta t_k$  повітряний зазор  $\delta_k$  зі швидкістю  $V_k$  пропорційною напруженості  $\varepsilon_k$ :

$$\vec{V}_k = \beta \vec{\varepsilon}_k, \quad (9.110)$$

де  $\beta$  – коефіцієнт рухомості заряджених частинок у зазорі  $\delta_k$ . Тоді, відповідно до розмірності (А·с=Кл), є припущення, що не тільки на поверхнях, а і в зазорі  $\delta_k$   $k$ -ої трубки утворюється незбалансований (внаслідок динамічності процесу) заряд  $q_k$ :

$$q_k = i_k \cdot \Delta t_k = i_k \cdot \frac{\delta_k}{\beta \varepsilon_k} \cong i_k \frac{\delta_k^2}{U_k}. \quad (9.111)$$

Сумарний повітряний заряд

$$q_{\Sigma} = \sum_{k=1}^N q_k \quad (9.112)$$

можна подати еквівалентним точковим зарядом  $q_{екв.}$ , який дорівнює  $q_{\Sigma}$  і розташований праворуч від точки дотику на відстані  $x_{екв.}$  (рис.9.23), де

$$x_{\dot{a}\dot{e}\dot{a}} = \frac{\sum_{k=1}^N q_k \cdot x_k}{q_{\Sigma}}. \quad (9.113)$$

Внаслідок асиметрії і поверхневі заряди (9.101) також будуть зміщені праворуч від точки дотику.

### ***Несиметричне намагнічування рухомими зарядами колеса (кульки) і направляючої***

Заряди (9.101), (9.112), що утворилися в зоні дотику рухаються відносно тіл колеса (кульки) і направляючої зі швидкістю  $V_0$ . Добуток сумарного заряду  $q = q_1 + q_2 + q_{екв.}$  на швидкість  $V_0$  можна подати як елемент  $I_y \cdot \Delta x$  умовного струму  $I_y$

$$(q_1 + q_2 + q_{екв.}) \cdot V_0 \cong I_y \cdot \Delta x, \quad (9.114)$$

де

$$I_y = \frac{q_1 + q_2 + q_{екв.}}{\Delta t}, \quad V_0 = \frac{\Delta x}{\Delta t}.$$

За законом Біо-Савара-Лапласа елемент (9.114) струму  $I_y$  в точці  $M$  повітряного простору утворює магнітне поле індукції  $\Delta B$  (рис.9.25):

$$\Delta B = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I_y \cdot \Delta x \cdot \sin \beta}{r^2}. \quad (9.115)$$

Для розрахунку всього магнітного поля  $\Phi(r, r_0)$  достатньо проінтегрувати (9.115) в межах  $\{0, \pm r_{\max}\}$ ,  $\{0, r_{0\max}\}$ . Якщо у цей простір внести феромагнітні тіла

колеса (кульки) і направляючої, то вони локально намагнітяться, збільшуючи в  $\mu_r$  разів магнітну індукцію  $B$  (в  $1000 \div 10000$ ) і, маючи повітряний зазор  $\delta(\alpha)$ , з метою максимізації енергії  $W_M$  магнітного поля [29], утворять сили  $F_M$ , які діють за умови збільшення магнітної провідності  $Y_M$ , тобто на зменшення зазору  $\delta(\alpha)$ :

$$F_M = \frac{dW_M}{d\delta}. \quad (9.116)$$

Як відомо [21], сила  $F_M$  пропорційна квадрату струму  $I_y$ , зворотно пропорційна квадрату зазору  $\delta(\alpha)$  і діє на зменшення  $\delta$  (збільшення  $Y_M$ ).

Однак, як бачимо з рис.9.23 і рис.9.24, зсув вправо відносно нуля координати  $x_{\text{вх}}$  за однакових зазорів  $\delta(\alpha)$  зліва і справа (на момент часу “нуль”) створює дещо кращі умови для намагнічування і притягання тіл на збігаючій (правій) стороні відточки дотику і, якби система, що рухається, мала нульову масу, то рух вліво миттєво б припинився. Асиметрія (рис.9.23) вирівнялась би до симетрії (рис.9.22). Але маємо для моменту  $t_0$  часу  $t$  взаємодію чотирьох моментів: момент  $M_1$ , що бажає зменшити зазор  $\delta(\alpha(t))$  зліва від точки дотику; момент  $M_2$ , що бажає зменшити зазор за точкою дотику справа; динамічний момент  $M_3$ , який утворюється від маси  $m$  і швидкості  $V_0$  руху рухомої частини системи;  $M_4$  – момент навантаження. Якщо  $V_0 > 0$ , то:

$$M_1 + M_3 \geq M_2 + M_4. \quad (9.117)$$

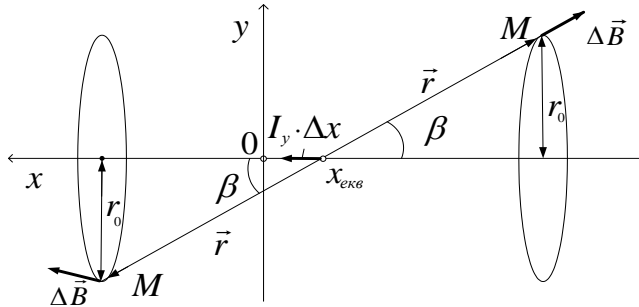


Рис. 9.25. Закон Біо-Савара-Лапласа

Чим більше  $m$  і  $V_0$ , тим більший  $M_3$ , але чим більша  $V_0$ , тим більше відстань  $x_{екв.}$  від точки дотику до координати еквівалентного заряду  $q_{екв.}$  (рис.9.25) і, відповідно,  $M_2$ . Для конкретного струму  $I$  існує максимальна швидкість  $V_{max}$ , за якої зрівняються усереднена за час  $\Delta t$  дія моментів  $M_1 + M_3$  і протидія моментів  $M_2 + M_4$ . Для інтервалу  $\Delta t$  часу  $t$ , за якого нерівність (9.117) виконується завдяки наявності руху зі швидкістю  $V_0$ , на шляху  $\Delta x$ , усереднене за час  $\Delta t$  значення моменту  $M_3$  (внаслідок зменшення зазору) зростає, а  $M_2$  – навпаки (внаслідок збільшення зазору) – зменшиться. Таке твердження вірне, якщо середнє (за час  $\Delta t$ ) значення зазору зліва  $\bar{\delta}_{лів.}$  менше, ніж справа  $\bar{\delta}_{пр.}$  (рис.9.26).

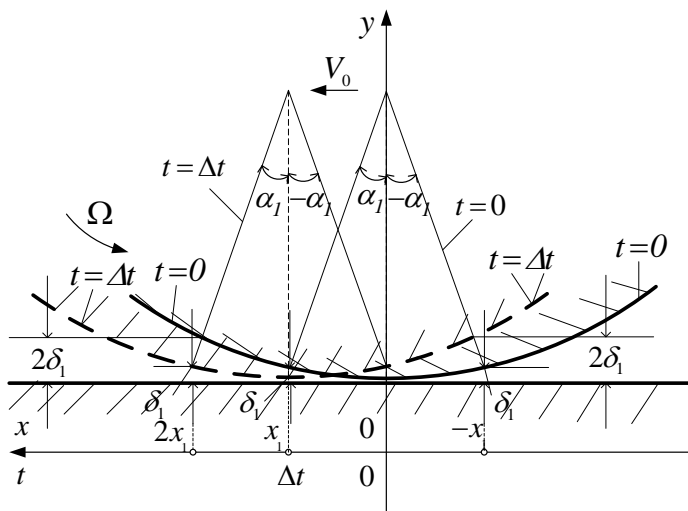


Рис.9.26. Динаміка зміни зазорів  $\delta(\alpha(t))$

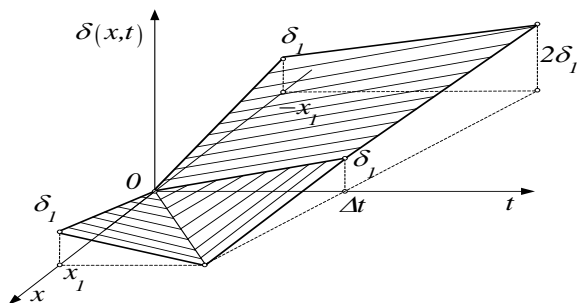


Рис.9.27. Поверхні лінеаризованої залежності  $\delta(t, x)$  для лівої  $(x_1, \Delta t)$  і правої  $(-x_1, \Delta t)$  областей

На рис.9.26 показано положення колеса (кульки)

для моментів  $t = 0$  (лінії) і  $t = \Delta t$  (пунктир) часу  $t$ . Щоб наближено визначити середнє за час  $\Delta t$  значення зазорів зліва і справа від точки  $(t = 0, x = 0)$ , лінеаризуємо залежності  $\delta(t, x)$  для малої області  $[(-x_1, x_1), (t = 0, t = \Delta t)]$  (рис.9.27). Як витікає з рис. 6, середнє значення  $\bar{\delta}$  за час  $\Delta t$  ліворуч від точки  $(0,0)$  складе  $0,5\delta_1$ , праворуч –  $\delta_1$ . Відповідно середнє за час  $\Delta t$  значення дії моменту  $M_1$  ліворуч від точки  $(0, 0)$  буде в 4 рази більше, ніж праворуч. Несиметрія сил і моментів призводить до прискорення руху. Однак, за майже незмінних параметрів  $R_k, L_k$ , тобто незмінної сталої часу  $\tau_k$ , зростає несиметрія. Центр  $x_{екв.}$  (9.113) розташування заряду (9.112) зміщується праворуч від точки  $(0, 0)$  дотику. Це призводить до зменшення несиметрії дії сил і, відповідно, сумарного моменту. Якщо далі штучно збільшувати швидкість  $\Omega$ , то момент буде зменшуватись до нуля і далі змінить знак подібно однофазному асинхронному двигуні.

### **Висновок**

В ефекті Ж. Губера має місце утворення зарядів в зоні контакту, які, рухаючись відносно феромагнітних тіл, нерівновісно локально намагнічують колеса (кульки) і направляючі. Останні, притягуючись з більшою енергією з набігаючої сторони, утворюють обертальний рух. Збільшення струму  $I$  збільшує заряди і момент. Збільшення швидкості збільшує зсув праворуч від точки дотику координати  $x_{екв.}$  заряду, що призводить до зменшення моменту. Тобто, система має властивість самобалансування. Намагнічування може відбутися як від сталого, так і синусоїдного струму, оскільки сила

$F_M$  (9.116) залежить від його квадрату. Необхідною умовою несиметрії є рух, який забезпечує умову (9.117). На збігаючій стороні контакту за зоною “ $b$ ” (рис.9.22) відбувається розмагнічування феромагнетиків і поступове зникнення надлишкових поверхневих зарядів. Ефект збільшується, якщо повітряний зазор з  $\varepsilon_0$  замінити масляним з  $\varepsilon \gg \varepsilon_0$ .

Подане пояснення ефекту полегшить шляхи подальшого удосконалення пристроїв, побудованих на ньому і, взагалі, доцільності його використання”.

В подальшому слід провести дослідження наявності чи відсутності ефекту рекуперації в двигунах Косирєва-Мильроя, впливу моменту інерції на максимальну швидкість обертання за однакового струму, вимірювання і розрахунку ємності контакту (ефект іонистирів), можливості збільшення площі контакту за умови не зменшення його опору та пошук ефективних сфер впровадження пристроїв на ефекті Ж. Губера.

### Запитання

1. Чому на практиці не описується закон Ома в шкільному формулюванні?
2. В чому полягає протиріччя законів Ома, Джоуля-Ленця і термодинаміки відносно резистивного елемента?
3. Як спланувати експеримент для визначення слабого ефекту не лінійності залежності напруги від струму в резистивному елементі?
4. В чому полягає багатокроковість дослідження ефекту Ж. Губера?



5. Чому закон Ампера про взаємодію струмів не пояснює ефекту Ж. Губера?
6. В чому полягав експеримент Д.Н.Пеннера?
7. Як побудовано двигун Косирєва-Мільроя у вакуумі?
8. Чому зупинився двигун Косирєва-Мільроя у вакуумі?
9. Поясніть модель (рис. 9.15) контакту.
10. Як утворюється магнітне поле за законом Біо-Савара-Лапласа?
11. Чому потік електрики зміщується у збігаючу сторону при русі колеса?
12. Як установлюється баланс енергій залежно від струму, геометрії контакту і маси рухомої частини установки Ж.Губера?

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

- 1 Адаптивні системи ідентифікації. / Під ред.. Костюка В.І., К.:Техніка, 1975,200с.
- 2 Анализ и статистическая динамика систем автоматического управления / под ред. Н. Д. Егунова. — М.: Изд-во МГТУ им. Н. С. Баумана, 2000. — 748 с.
- 3 Антонюк В. С. Методологія наукових досліджень: Навч. посіб. /, Л. Г. Полонський, В. І. Аверченков, Ю. А. Малахов. – К.: НТУУ „КПІ”, 2015. – 274 с.
- 4 Ашихмин В.Н., Гитман М.Б., Келлер И.Э. и др. Введение в математическое моделирование: Учеб. пособие / Под. ред. П.В. Трусова. – М.: Логос, 2005. – 440 с.
- 5 Б. Т. Поляк, Я. З. Цыпкин, Устойчивость и робастная устойчивость однотипных систем/Автоматика и телемеханика., 1996, № 11, 91–104;
- 6 Бідюк П. І. Методи прогнозування / П. Бідюк, О. Меньяй-ленко, О. Половцев. — Т 2. — Луганськ : Альма-матер, 2008. — 305 с.
- 7 Бут Д. А. Основы электромеханики / Д. А. Бут. — М. : МАИ, 1996. — 467 с.
- 8 Важинський С.Е., Щербак Т І. Методика та організація наукових досліджень : Навч. посіб. /С. Е. Важинський, Т І. Щербак. – Суми: СумДПУ імені А. С. Макаренка, 2016. – 260 с.
- 9 Виленкин С. Я. Статистическая обработка результатов исследования случайных функций / С. Я. Виленкин. — М. : Энергия, 1979. — 200 с.
- 10 Воронков С.С. Электродинамические силы Николаева/Научно-техническая библиотека. Статьи и публикации. <http://sciteclibrary.ru/rus/catalog/arts;>
- 11 Грамм М.И. Принцип минимума и возможные объяснения эффекта Губера/Электричество, 2002. –

- №12 – с. 57 – 60;
- 12 Демин П. Эффект Губера и летающие тарелки/Наука и жизнь, 1991.- №7;
  - 13 Жлуктенко В. І. Економетрія / В. І. Жлуктенко, Н. К. Водзянова, С. С. Савіна, О. В. Колодінська (під ред. С. І. Наконечного). — К.: Видавництво Європейського університету, 2005. — 550 с.
  - 14 Зеленський К. Х. Комп'ютерні методи прикладної математики / К. Х. Зеленський, В. М. Ігнатенко, О. П. Коц. — К. : Академперіодика, 2002. — 480 с.
  - 15 Ивахненко А. Г. Долгосрочное прогнозирование и управление сложными системами / А. Г. Ивахненко. — К. : Техніка, 1975. — 250 с.
  - 16 Калман Р. Очерки по математической теории систем / Р. Калман, П. Фалб, М. Арбиб. — М. : Мир, 1971. — 380 с.
  - 17 Кафаров В. В. Методы оптимизации в химической технологии / В. В.Кафаров. — М. : Наука, 1968. — 379 с.
  - 18 Кашин Г. М. Автоматическое управление продольным движением самолёта / Г. М. Кашин, И. М. Федоренко. — М. : Машиностроение, 1974. — 289 с.
  - 19 Кірічков В.М. Ідентифікація об'єктів систем управління технологічними процесами. К.:Вища школа, 1990,263с.
  - 20 Ковалёв В. З. Математическое моделирование электротехнических комплексов / В. З. Ковалев, Е. Г. Андреева; под общ. ред. Ю. З. Ковалёва. — Омск : Изд-во ОмГТУ, 1999. — 172 с.
  - 21 Ковалёв В. З. Моделирование электротехнических комплексов и систем как совокупности взаимодействующих подсистем различной физической природы: дис. докт. техн. наук / В. З. Ковалев. — Омск, 2000. — 312 с.

- 22 Ковалев В. З. Общая структура математической модели электротехнических комплексов / В. З. Ковалев // сб. тр. омских ученых: прил. к журн. «Ом. науч. вестник», нояб. 1998. — Омск, 1998. — С. 67–72.
- 23 Ковалев Ю. З. Построение иерархического набора математических моделей электромеханических преобразователей / Ю. З. Ковалев, В. З. Ковалев, В. В. Марголенко // Динамическое моделирование сложных систем: тез. докл. — М., 1987. — С. 163–164.
- 24 Корн Г. Справочник по математике / Г. Корн, Т. Корн. — М. : Наука, 1970. — 832 с.
- 25 Костюк В. И. Многократно адаптивная система идентификации МАСИ-1 и ее применение / В. И. Костюк, А. Н. Сильвестров, А. Ю. Юдин. — Вестник КПИ / Техническая кибернетика, 1980, №9. — с. 41–48.
- 26 Костюк В. И. Асимптотическая инвариантность многократно адаптивных систем / В. И. Костюк, А. Н. Сильвестров // Теория инвариантности и её применение. — К. : Наук. думка, 1979. — С. 155–167.
- 27 Костюк В. И. Принцип многократной адаптивности/ В. И. Костюк, А. Н. Сильвестров /Достижения и перспективы развития технической кибернетики. — К. : изд-во РДИТП, 1975. — Т. 1. — С. 65–69 (тр. III Всесоюзной междуниверситетской НТК).
- 28 Костюк В.І. Безпошукові градієнтні самоналаштувуючі системи. К:Техніка,1966.
- 29 Косырев В.В., Рабко В. Д., Вельман Н.И. Электрический двигатель/А.с.№ 155216 ( СССР ). Оpubл. в бюлл. – “ Изобретения. Пром. образцы. Товарные знаки ” , 1963,№ 12;
- 30 Крамер Г. Математические методы статистики / Г. Крамер. — М. : Мир, 1975. — 648 с.
- 31 Кринецкий Л.И. Летные испытания систем управле-

- ния ракет. М.: Машиностроение, 1980.
- 32 Круг Г. К. Планирование эксперимента в идентификации и экстарполяции / Г. К. Круг, Ю. А. Сосулин, В. А. Фатуев. — М. : Наука, 1977. — 280 с.
  - 33 Кубрак А. І. Методи і програми для дослідження системи автоматизації / А. І. Кубрак, А. І. Жученко, Л. Д. Ярошук. — К. : УМК ВО. 1989. — 228 с.
  - 34 Кудрин Б. И. Электроснабжение промышленных предприятий: учебник для вузов / Б. И. Кудрин. — М. : Энергоатомиздат, 1995. — 416 с.
  - 35 Кузьмин В.В., Шпатенко В.С. О природе появления вращающегося момента в двигателе Косырева – Мильроя/Вісник КДРУ ім. Остроградського, 2008. – №3 – с. 41 – 47;
  - 36 Ленк А. Электромеханические расчёты / А. Ленк. — М. : Энергоиздат, 1982. — 471 с.
  - 37 Льюнг Л. Идентификация систем / Л. Льюинг. — М. : Наука, 1991. — 386 с.
  - 38 Льюнг Л. Идентифікація систем. Теорія для користувачів. - М.:Наука.Гл.ред.фіз.-мат.літ.,1991-432с.
  - 39 Любич Ю. И. Общая теория релаксационных процессов / Ю. И. Любич, Г. Д. Майстровский. — Успехи математических наук, 1970, №1. — с. 57–1110.
  - 40 Маркова Е. В. Комбинированные планы в задачах много-факторного эксперимента / Е. В. Маркова, В. Н. Лысенков. — М. : Наука, 1979. — 348 с.
  - 41 Математические основы теории автоматического управления / под ред. Б. К. ЧеMODанова. — М. : Высш. шк., 1977. — Т. 1. — 336 с.
  - 42 Математичний опис об'єктів з розподіленими параметрами 4.3 / Р. Я. Ладієв, Ю. А. Остапенко, А. І. Кубрак, М. З. Кваско. — К. : КПІ, 1974. — 149 с.
  - 43 Маценко В.Г.Математичне моделювання: навчальний посібник / В.Г. Маценко. –Чернівці: Чернівець-

кий національний університет, 2014.–519 с.

- 44 Методы классической и современной теории автоматического управления. Т. 1 / под ред. Н. Д. Егупова. — М. : МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2000. — 747 с.
- 45 Микляев М. С. Методика определения частотных характеристик машин переменного тока / М. С. Микляев // Электротехника. — № 6. — 1965. — С. 18–19.
- 46 Мініна О.М. Визначення динамічних характеристик і параметрів типових регулюючих об'єктів. Вид-во АН СРСР, М.:1963.
- 47 Наладка засобів автоматизації та автоматичних систем регулювання // Під ред. А.С. Ключева, - М.:Енергоатоміздат, 1989,367с.
- 48 Нейман Л. Р. Теоретические основы электротехники: в 2 т. / Л. Р. Нейман, К. С. Демирчян. — Л. : Энергоатомиздат, 1981. — Т. 1–2.
- 49 Нетушил А.В. Изобретение Дж. Серла, как развитие эффекта Губера/Электричество, 1994. – №4 – с. 50 – 53;
- 50 Николаев Г.В. Современная электродинамика и причины ее парадоксальности/ Томск: Твердыня, 2003. – 149 с;
- 51 Основы теории электрических аппаратов / под ред. Г. В. Буткевича. — М. : Высш. шк., 1970. — 600 с.
- 52 Остапенко Ю. О. Ідентифікація та моделювання технологічних об'єктів керування / Ю. О. Остапенко. — К. : Радуга, 1999. — 424 с.
- 53 Островерхов М.Я. Методи дослідження електротехнічних комплексів і систем/М.Я. Островерхов, А.М. Сільвестров, К.Х. Зеленський/К.: ТАЛКОМ, 2019. – 300 с.

- 54 Патент 30530, Україна МПК 05В 13/60. Спосіб визначення гладкої статистичної нелінійності з динаміки об'єкта контролю/ А.М. Сільвестров, Лисиця П.М., Галай П.М.-NU 200713 від 25.02 2008р.
- 55 Патент на корисну модель №78541 України. МПК G01R 31/02. Спосіб вимірювання параметрів лінеаризованої моделі відносно базового режиму моделі нелінійної динаміки електротехнічних об'єктів/А.М.Сільвестров, О.М.Скринник, К. В. Уманська, М. М. Гонтар, заявник та власник патенту НТУУ «КПІ». — Заявл. 22.08.2012, опубл. 27.03.2013. Бюл. № 6/2013.
- 56 Пеннер Д.И., Угаров В.А. Электродинамика и специальная теория относительности /М.: “ Просвещение ”, 1980. – 272с;
- 57 Поливанов К.М. Электродинамика движущихся тел/М.: Энергоиздат, 1982. – 192 с;
- 58 Поливанов К.М., Татарина Н.В., Нетушил А.В. Электромеханический эффект Губера/ Электричество, 1973. – №8 – с. 72 – 76;
- 59 Политехнический словарь / под ред. А. Ю. Ишлинского. — М. : Сов. энцикл., 1989. — 500 с.
- 60 Пухов Г.Е. Модели технологических процессов/ Г. Е. Пухов, Ц. Хатиашвили. — К. : Техніка, 1974. — 200 с.
- 61 Райбман Н. С. Основы управления технологическими процессами / Н. С. Райбман, В. М. Чадаев. — М. : Наука, 1980. — 440 с.
- 62 Рао С. Р. Линейные статистические методы и их использование / С. Р. Рао. — М. : Наука, 1968. — 548 с.
- 63 Самсонов В. В. Алгоритм адаптивного навчання в системі електронних навчально-методичних ресурсів дисципліни/ В.В.Самсонов, А. М.Сільвестров, М.

- П. Костіков // Тези доповідей Міжнар. наук.-практ. конф. «Інформаційні технології в освіті, науці і техніці». — Черкаси: ЧДТУ, 2012. — т. 2. — с. 85–86.
- 64 Самсонов В. В. Моделирование процесса самостоятельного обучения с электронным тренажером / В.В.Самсонов, Н.И.Поворознюк, А.М.Сильвестров // Інформаційні технології в освіті. Вип. 1. Херсон: ХДУ, 2008. — С. 126–133.
- 65 Самсонов В. В. Системний підхід до розробки моделі керування процесом навчання / В. В.Самсонов, А. М.Сильвестров, О. В. Скринник // Наукові праці Національного університету харчових технологій. — К.: НУХТ. — 2010, № 32— С. 104–106.
- 66 Саридис Дж. Самоорганизующие стохастические системы управления / Дж. Саридис. — М. : Наука, 1980. — 400 с.
- 67 Себер Дж. Линейный регрессионный анализ / Дж. Себер. — М. : Мир, 1980. — 456 с.
- 68 Семенов А. Д. Идентификация объектов управления /А. Д. Семенов, Д. В. Артамонов, А. В. Брюхачев. — Изд-во пензенского госуниверситета, 2003. — 200 с.
- 69 Сильвестров А. Н. Идентификация и оптимизация автоматических систем / А. Н. Сильвестров, П. И. Чинаев. — М. : Энергоатомиздат, 1987. — 200 с.
- 70 Сильвестров А. М. Багатократно адаптивні системи ідентифікації / А. М. Сильвестров, О. М. Панченко. — К. : Техніка, 1983. — 110 с.
- 71 Сильвестров А.Н., Зименков Д.К. О природе эффекта Губера/Вісник КДРУ ім. Остроградського, 2010. – №4 – с. 33 – 38;
- 72 Сильвестров А.М., Чіпаєв П.І. Ідентифікація та оптимізація автоматичних систем.-М.:Енергоатомізд., 1987-200с.



- 73 Синицкий Л. А. Методы аналитической механики в теории электрических цепей / Л. А. Синицкий. — Львов : Вища шк. Изд-во при Львов, ун-те, 1978. — 138 с.
- 74 Сільвестров А. М. Забезпечення інваріантності напруги до струму якоря в генераторі постійного струму / А. М. Сільвестров, О. М. Скринник // тези 68-ї наукової конференції. — 2016. — Т. 1. — С. 19–21.
- 75 Сільвестров А. М. Ідентифікація нелінійних статичних залежностей з динаміки електротехнічних систем / Д. К. Зіменков, А. М. Сільвестров, О. М. Скринник // «Системні дослідження та інформаційні технології». — 2016. — №1. — С. 99–106.
- 76 Сільвестров А. М. Цілеспрямовані системи ідентифікації / А. М. Сільвестров, В. М. Синеглазов. — К. : УМКВО, 1989. — 110 с.
- 77 Сільвестров А.М., Синеглазов В.М. Ідентифікація статистичних і динамічних характеристик реальних об'єктів// В.сб. «Електроніка та системи управління». К.: НАУ, 2006, №4.
- 78 Сільвестров А.М., Синеглазов В.М., Спинул Л.Ю. Дві стратегії ідентифікації реальних об'єктів// В. сб. «Електроніка та системи управління», №1(15), 2008,К.: с. 129-137.
- 79 Сільвестров А. М. Виявлення закономірності у вібраціях об'єкта для діагностики та прогнозування його стану / А. М. Сільвестров, О. М. Скринник, Л. Ю. Спінул, К. В. Уманська // «Компрессорное и энергетическое машиностроение». — 2014. — №1(35). — С. 16–20.
- 80 Сільвестров А. М. Застосування теорії фільтрів для аналітичного опису логіко-аналітичних залежностей/Г.І.Кривобока, А. М. Сільвестров, О. М. Скрин-

- ник // Наукові вісті НТУУ «КПІ». — 2013. — № 2. — С. 64–69.
- 81 Сільвестров А. М. О некоторых методах идентификации нелинейных объектов / А. М. Сільвестров, В. В. Самсонов // An International journal «Mathematics and Computer Science», Journal of Qafqaz University. — 2011. — № 32. — С. 12–23
- 82 Сільвестров А. М. Применение метода анализа для аналитического описания кусочно-аналитических зависимостей / К. М. Божко, А. М. Сільвестров, О. М. Скринник // Bulgarian Journal for Engineering Design. — 2014. — issue 22. — page 33–38.
- 83 Сільвестров А. М. Структурно-параметрична ідентифікація статичної нелінійності динамічного об'єкта / А. М. Сільвестров, О. М. Скринник, Л. Ю. Спінул // Адаптивні системи автоматичного управління НТУУ «КПІ». — 2014. — № 1(24). — С. 105–112.
- 84 Сільвестров А.М. Нариси з теорії ідентифікації / В. В. Самсонов, А. М. Сільвестров // — К.: НУХТ, — 2012. — 222 с.
- 85 Смирний М. Ф. Основы научных исследований : конспект лекцій для студентів усіх форм навчання за спеціальністю 141 – Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка / М. Ф. Смирний ; Харків. нац. ун-т міськ.госп-ва ім. О. М. Бекетова. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2018. – 111 с.
- 86 Солодовников А. И. Основы теории и методы спектральной обработки информации / А. И. Солодовников, А. М. Спиваковский. — Л. : Изд-во ЛГУ, 1986. —269 с.
- 87 Солодовников В. В. Расчёт оптимальных систем автоматического управления при наличии помех / В. В.Солодовников, П. С. Матвеев. — М. : Машиностро-

ение, 1973. — 239 с.

- 88 Справочник по проектированию электроэнергетических систем / под ред. С. С. Рокотяна, И. М. Шапиро. — М. : Энергоатомиздат, 1985. — 352 с.
- 89 Тихонов А. Н. Методы решения некорректных задач / А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенина. — М. : Наука, 1979. — С. 250.
- 90 Тихонов А. Н. О решении не корректно поставленных задач / А. Н. Тихонов. — ДАН СССР, 1963, №3. — с. 131.
- 91 Толбатов Ю. А. Эконометрика / Ю. А. Толбатов. — Тернопіль: підручники і посібники, 2008. — 288 с.
- 92 Уайт Д. Электромеханическое преобразование энергии / Д. Уайт, Г. Вудсон. — М.-Л. : Энергия, 1964. — 344 с.
- 93 Фельдбаум А. А. Основы теории оптимальных автоматических систем / А. А. Фельдбаум. — М. : Физматгиз, 1963. — 552 с.
- 94 Фильц Р. В. Математические основы теории электромеханических преобразователей / Р. В. Фильц. — К. : Наук, думка, 1979. — 204 с.
- 95 Цыпкин Я. З. Основы информационной теории идентификации / Я. З. Цыпкин. — М. : Наука, 1984. — 380 с.
- 95 Цыпкин Я. З. Основы информационной теории идентификации / Я. З. Цыпкин. — М. : Наука, 1984. — 380 с.
- 96 Шидловский А. К. Кабели с полимерной изоляцией на сверхвысокие напряжения / А. К. Шидловский, А. А. Щерба, В. М. Золотарев, А. Д. Подольцев, И. Н. Кучерявая. — К. : Ин-т электродинамики НАН Украины, 2013. — 550 с.

- 97 Шин В. И. Субоптимальный алгоритм оценки состояния и параметров многомерных непрерывных нелинейных систем/ В. И. Шин // Автоматика и телемеханика, 1984. — № 1. — С. 101–106.
- 98 Эйкхофф П. Основы идентификации систем управления / П. Эйкхофф. — М. : Мир, 1975. — 690 с.
- 99 Электротехнический справочник; в 3 т. Т. 3, кн. 2: Использование электрической энергии / под общ. ред. И. Н. Орлова. — М. : Энергоатомиздат, 1988.— 614 с.
- 100 Юринець В. Є. Методологія наукових досліджень : навч. посібник / В. Є. Юринець. — Львів : ЛНУ імені Івана Франка, 2011. — 178 с.
- 101 Lambert J. Computational methods in ordinary differential equations/J. Lambert.—London–Nework–Sydney–Toronto, J. Wiley&Sons, 1973. — 278 p.
- 102 Whittle P. Prediction and Regulation / P. Whittle. — Van Nostrand, Princeton, N. J.,1 963. — 147 p.

## ЗМІСТ

<b>Розділ 1. ОСНОВИ МЕТОДОЛОГІЇ НАУКОВИХ ДОСЛІДЖЕНЬ</b> .....	3
1.1. Наука як система знань .....	3
1.2. Види й етапи наукових досліджень .....	5
1.3. Методологія наукового дослідження .....	8
1.4. Методи наукового дослідження.....	9
1.5. Етапи наукового дослідження.....	12
1.6. Визначення предмета та об'єкта дослідження .....	17
1.7. Мета і завдання дослідження .....	19
1.8. Моделювання як метод наукового дослідження .....	21
<b>Розділ 2. ВИКОРИСТАННЯ СИСТЕМНОГО ПІДХОДУ ДЛЯ ДОСЛІДЖЕННЯ ДИНАМІЧНИХ ОБ'ЄКТІВ</b> .....	26
2.1. Визначення системи.....	26
2.2. Багаторівнева декомпозиція систем ідентифікації об'єкту .....	36
2.3. Принцип узгодженості критеріїв якості підсистем складного об'єкту .....	48
2.4. Композиція підсистем різних рівнів об'єкту в єдину систему .....	53
2.5. Приклад побудови проєкторів $PP_1, PP_2$ в БАСІ.....	58
2.5.1 Алгоритми роботи проєкторів $Opt_q \rightarrow Opt_{qk}$ в БАСІ.....	58
2.5.2. Методика оцінювання кількісних характеристик метода ідентифікації.....	60
2.5.3. Вибір найкращого з множини $\{Opt_{qk}\}$ методу ідентифікації для реальної ситуації .....	64
2.6. Енергетичний підхід до побудови параметричних моделей об'єкту .....	66
<b>Розділ 3. ДОСЛІДЖЕННЯ МОЖЛИВИХ ОБМЕЖЕНЬ СТАТИСТИЧНО ОПТИМАЛЬНИХ МЕТОДІВ ІДЕНТИФІКАЦІЇ ОБ'ЄКТІВ</b> .....	72
3.1. Ідентифікація статичних характеристик в об'єктів методом найменших квадратів.....	72

3.1.1. Регресійні моделі об'єктів та їх ідентифікація .....	72
3.1.2. Оцінювання вектора $\beta$ за методом найменших квадратів (МНК).....	75
3.1.3. Числові характеристики МНК-оцінки $\beta^*$ .....	76
3.1.4. Числові характеристики рівняння регресії .....	80
3.1.5. Довірчі інтервали моделі статистики об'єкту та її параметрів $\beta_i$ .....	85
3.1.6. Перевірка статистичної значущості коефіцієнтів теоретичного рівняння регресії.....	87
3.1.7. Перевірка загальної якості моделі об'єкту .....	88
3.1.8. Визначення моделі статистики генератора постійного струму.....	91
<b>Розділ 4. ДОСЛІДЖЕННЯ МЕТОДІВ ОЦІНЮВАННЯ ПАРАМЕТРІВ МОДЕЛЕЙ ЗА НЕТОЧНИМИ ВХІДНИМИ І ВИХІДНИМИ СИГНАЛАМИ .....</b>	<b>97</b>
4.1. МНК в ситуації зашумленості вихідних і вхідних сигналів .....	97
4.2. Узагальнений МНК та його практична реалізація	101
4.3. Інтегрований МНК.....	104
4.3.1. Загальні положення.....	104
4.3.2. Аналіз складових методу.....	106
4.3.3. Кількісні показники (4.35).....	111
4.3.4. Рекурентна форма обчислення.....	115
4.3.5. Вагова функція інтегрованого МНК .....	117
4.3.6. Алгоритм методу ІМНК .....	118
4.3.7. Тестування методу ІМНК.....	122
4.4. Дослідження методу адаптивного одноразового ділення (МОД).....	129
4.4.1. Сутність методу.....	129
4.4.2. Зміщення оцінок.....	131
4.4.3. Коваріація оцінок.....	131
4.5. Метод прогнозу кореляцій .....	133
4.6. Дослідження системи ідентифікації типу БАСІ.....	135
<b>Розділ 5. ДОСЛІДЖЕННЯ НЕПЕРЕРВНИХ МОДЕЛЕЙ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ.....</b>	<b>146</b>
5.1. Використання законів механіки.....	146
5.2. Використання законів електромеханіки.....	152

5.2.1. Передатна функція двигуна постійного струму як виконавчого елемента в системах бортової автоматики літальних апаратів.....	152
5.2.2. Модель гідравлічного приводу рульових машинок літальних апаратів.....	156
5.3. Структурні схеми систем керування.....	158
5.4. Моделі в змінних стану.....	168
5.4.1. Змінні стану.....	168
5.5. Часові характеристики і перехідна матриця стану	174
<b>Розділ 6. МЕТОДИ ІДЕНТИФІКАЦІЇ ДИНАМІЧНИХ ОБ'ЄКТІВ</b> .....	182
6.1. “Of-line” ідентифікація динамічних об'єктів.....	182
6.1.1. Активна ідентифікація динамічних об'єктів.....	182
6.1.2. Визначення імпульсної перехідної функції кореляційним методом.....	184
6.1.3. Псевдовипадкові двійкові послідовності максимальної довжини.....	189
6.1.4. Дослідження методів отримання непараметричних оцінок перехідної функції (ПФ) і АФЧХ в режимі активної ідентифікації.....	200
6.1.5. Визначення коефіцієнтів рядів, у які розкладаються передаточні функції.....	203
6.2 Дослідження методів «on-line» ідентифікації передавальних функцій об'єктів.....	213
6.2.1 Ортогональні моделі.....	213
6.2.2. Градієнтний метод з паралельною моделлю.....	216
6.2.3. Градієнтний метод з послідовно-паралельною моделлю.....	219
6.2.4. Дослідження методу трьох моделей.....	223
6.2.5. Дослідження ноніусних моделей.....	231
<b>Розділ 7. ДОСЛІДЖЕННЯ МЕТОДІВ СТРУКТУРНО-ПАРАМЕТРИЧНОЇ ІДЕНТИФІКАЦІЇ НЕЛІНІЙНИХ ОБ'ЄКТІВ</b> .....	236
7.1. Оцінювання лінійної складової нелінійної моделі динаміки об'єктів.....	236
7.1.1. Оцінювання лінійної складової нелінійної моделі двигуна постійного струму.....	236

7.1.2. Тестування методу .....	240
7.1.3. Реальний приклад.....	244
7.2. Структурно-параметрична ідентифікація багатовимірних нелінійних моделей об'єкту .....	246
7.2.1. Нелінійна модель тягового зусилля двигуна АІ-20м.....	247
7.2.2. Приклад нелінійної залежності $y(x_1, x_2)$ .....	249
7.2.3. Приклад нелінійної залежності $\hat{J}(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ .....	250
7.2.4. Приклад нелінійної залежності $J(\beta)$ .....	251
7.3. Дослідження методу роздільного оцінювання статичної нелінійної і динамічної лінійної складових моделі об'єкту .....	252
7.3.1. Критерії наближення, що враховують гладкість шуканої залежності .....	255
7.3.2. Визначення гладкої статичної нелінійності з динаміки об'єкту .....	256
7.4. Дослідження методу об'єднання кусково-аналітичних моделей в єдину аналітичну.....	270
7.4.1 Інтеграція кусково-аналітичних залежностей в єдину аналітичну.....	270
7.4.2. Залежність ЕРС машини постійного струму (МПС).....	276
7.4.3 Дослідження завдання забезпечення інваріантності напруги $U_y$ до струму $I_y$ якоря генератора постійного струму(ГПС) .....	278
7.4.4. Дослідження задачі забезпечення максимальної потужності сонячної батареї .....	281
<b>Розділ 8. ДОСЛІДЖЕННЯ АДАПТИВНИХ СИСТЕМ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ .....</b>	<b>285</b>
8.1. Дослідження умови узгодженості показників якості підсистем різного рівня.....	285
8.2. Дослідження адаптивної системи керування процесом витягування кварцової трубки.....	291
<b>Розділ 9. ВИКОРИСТАННЯ МЕТОДОЛОГІЇ НАУКОВИХ ДОСЛІДЖЕНЬ ДЛЯ УТОЧНЕННЯ І ПОЯСНЕННЯ ФІЗИЧНИХ ЯВИЩ.....</b>	<b>301</b>



9.1. Побудова нелінійних динамічних моделей резистивних елементів .....	301
9.2. Дослідження багатокрокового процесу пояснення ефекту Ж.Губера.....	318
9.2.1. Методологія дослідження.....	318
9.2.2. Тепловий чи іскровий ефект?.....	321
9.2.3 Чому зупинився підшипник у вакуумі? .....	322
9.2.4. Чому саме феромагнетики і мастило? .....	326
9.2.5. Чому струм і магнітний потік збіглися за напрямом? .....	328
9.2.6 Термомеханічне гальмування в підшипнику .....	336
9.3. Дослідження зони контакту.....	339
9.4 Двостороння дія закону Біо-Савара-Лапласа...	342
9.5. Виявлення необхідної умова наявності моменту інерції .....	351
9.5.1. Ефект Ж. Губера з позиції зовнішнього спостерігача.....	352
9.5.2. Огляд існуючих намагань пояснити ефект Ж. Губера.....	353
9.5.3. Пояснення ефекту на основі законів електро- динаміки рухомих тіл .....	355
СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ .....	370

**Навчальний посібник**

**В.В. САМСОНОВ, А.М. СІЛЬВЕСТРОВ,  
О.М. ТАЧИНІНА**

**МЕТОДОЛОГІЯ ТА ПРИКЛАДНІ  
АСПЕКТИ НАУКОВИХ  
ДОСЛІДЖЕНЬ**

В авторській редакції

Підписано до друку 30. 05. 2022р. Формат 60x84/16  
Гарнітура xxxxxxxxx  
Ум. Друк. Арк. - 24,125. Обл. Вид. арк. -22,44  
Замовлення 0621.  
Друк ФОП Пилипенко Н. М.  
т. 067 401 35 15