

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»**

**А. Є. Бабенко, О. О. Боронко,
Я. І. Лавренко, С. І. Трубачев**

КОЛИВАННЯ СТЕРЖНІВ, ПЛАСТИН ТА ОБОЛОНОК

Підручник

*Затверджено Вченою радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як підручник для студентів,
які навчаються за спеціальністю 131 «Прикладна механіка»*

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2022

УДК 539.3

Рецензенти: *Кучер М. К.*, д-р техн. наук, проф., завідувач відділу механіки конструкційних матеріалів Інституту проблем міцності ім. Г. С. Писаренка НАН України, м. Київ
Філімоніхін Г. Б., д-р техн. наук, проф., завідувач кафедри деталі машин та прикладної механіки, Центральноукраїнський національний технічний університет, м. Кропивницький

Відповідальний редактор *Пискунов С.О.*, д-р техн. наук, проф., завідувач кафедри динаміки і міцності машин та опору матеріалів, КПІ ім. Ігоря Сікорського

Гриф надано Вченою радою КПІ ім. Ігоря Сікорського (протокол № 4 від 27 . 06 . 2022 р.)

Електронне мережне навчальне видання

Бабенко Андрій Єлисейович, д-р техн. наук, проф.
Боронко Олег Олександрович, д-р техн. наук, проф.
Лавренко Ярослав Іванович, канд. техн. наук, доц.
Трубачев Сергій Іванович, канд. техн. наук, доц.

КОЛИВАННЯ СТЕРЖНІВ, ПЛАСТИН ТА ОБОЛОНОК

Коливання стержнів, пластин та оболонок [Електронний ресурс] : підручн. для студ. спец. 131 «Прикладна механіка» / А. Є. Бабенко, О. О. Боронко, Я. І. Лавренко, С. І. Трубачев ; КПІ ім. Ігоря Сікорського. – Електронні текстові данні (1 файл: 10,28 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2022. – 252 с.

У підручнику розглянуто аналітичні та чисельні методи розрахунку лінійних коливань стержнів, пластинок та тонких оболонок з урахуванням зовнішнього та внутрішнього тертя. Найбільше уваги приділено стержневим та пластинчастим моделям. Наведено розрахунок коливань стержнів, коливання пластинок та тонких оболонок. Теоретичний матеріал супроводжується прикладами його практичного застосування, запитаннями для самоперевірки.

Для студентів спеціальності 131 «Прикладна механіка». Підручник також може бути корисний для аспірантів, викладачів та наукових працівників.

© А. Є. Бабенко, О. О. Боронко,
Я. І. Лавренко, С. І. Трубачев, 2022
© КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2022

ЗМІСТ

| | |
|--|-----------|
| ВСТУП | 7 |
| Розділ 1. | |
| КОЛИВАЛЬНІ СИСТЕМИ З РОЗПОДІЛЕНИМИ ПАРАМЕТРАМИ | 9 |
| 1.1. Розрахунок коливань стержнів. Поздовжні коливання стержнів. Виведення диференціального рівняння поздовжніх коливань стержня змінного перерізу із прямою віссю | 12 |
| 1.2. Вільні поздовжні коливання стержня змінного перерізу | 15 |
| 1.3. Вільні поздовжні коливання стержня постійного перерізу | 17 |
| 1.4. Визначення власних частот і форм поздовжніх коливань стержня постійного перерізу | 19 |
| 1.4.1. Метод біжучих хвиль (метод Д'Аламбера) | 25 |
| 1.4.2. Визначення власних частот і форм поздовжніх коливань стержня за неоднорідних граничних умов | 28 |
| 1.4.3. Вільні поздовжні коливання стержня з урахуванням внутрішнього або зовнішнього тертя | 31 |
| 1.4.4. Вимушені поздовжні коливання ідеально пружного стержня без урахування зовнішнього тертя | 34 |
| 1.4.5. Вимушені поздовжні коливання стержня з урахуванням внутрішнього або зовнішнього тертя | 39 |
| 1.4.6. Кінематичне збудження поздовжніх коливань стержня | 44 |
| 1.4.7. Випадкові вимушені поздовжні коливання стержня | 45 |
| 1.4.8. Метод початкових параметрів | 47 |
| 1.5. Крутильні коливання стержнів | 51 |
| 1.6. Поперечні коливання струни | 54 |
| <i>Контрольні запитання</i> | <i>57</i> |
| Розділ 2. | |
| ЗГИННІ КОЛИВАННЯ | 58 |
| 2.1. Згинні коливання прямих стержнів | 58 |
| 2.1.1. Виведення диференціального рівняння згинних коливань стержня з урахуванням поздовжньої сили | 58 |
| 2.1.2. Граничні й початкові умови | 61 |
| 2.1.3. Вільні поперечні коливання балки змінного перерізу | 64 |
| 2.1.4. Вільні поперечні коливання пружного призматичного стержня | 66 |

| | |
|--|------------|
| 2.2. Вимушені згинні коливання ідеально пружної балки під дією довільного навантаження | 76 |
| 2.3. Вимушені згинні коливання пружної балки під дією розподіленої гармонічної сили | 77 |
| 2.4. Стержень на пружних опорах або на пружній основі | 79 |
| 2.5. Кінематичне збудження згинних коливань балки | 86 |
| 2.6. Вимушені поперечні коливання балки з урахуванням тертя. Довільна в часі розподілена поперечна сила | 88 |
| 2.7. Вплив поздовжніх сил на частоту вільних згинних коливань балки | 90 |
| 2.8. Параметричні згинні коливання балки | 92 |
| 2.9. Згинні коливання балки з урахуванням зсуву та інерції обертання мас | 94 |
| 2.10. Порівняльний аналіз значень власних частот при згинних коливаннях балки Тимошенка з технічною теорією залежно від геометричних розмірів .. | 99 |
| 2.11. Наближені методи визначення власних частот і форм коливань | 107 |
| <i>Контрольні запитання</i> | 110 |
| Розділ 3. | |
| КОЛИВАННЯ ПЛАСТИНОК | 112 |
| 3.1. Класифікація пластинок | 112 |
| 3.2. Поперечні коливання тонких жорстких прямокутних пластинок | 113 |
| 3.2.1. Виведення диференціального рівняння коливань | 113 |
| 3.2.2. Рівняння рівноваги елемента $dx dy$ коливної пластинки (диференціальні залежності при згинанні пластинки) | 116 |
| 3.3. Диференціальне рівняння вимушених коливань пружної тонкої пластинки | 117 |
| 3.4. Урахування внутрішнього і зовнішнього тертя | 118 |
| 3.5. Вільні коливання прямокутної однорідної пружної пластинки постійного перерізу | 120 |
| 3.6. Точний розв'язок задачі про вільні коливання прямокутної пластинки за граничних умов Нав'є | 121 |
| 3.7. Граничні умови, за яких можливий точний розв'язок для прямокутної пластинки | 123 |
| 3.8. Вимушені коливання пружної прямокутної пластинки | 124 |
| 3.8.1. Довільне у часі розподілене поперечне навантаження | 125 |
| 3.8.2. Гармонічне поперечне розподілене навантаження | 126 |

| | |
|---|------------|
| 3.9. Вимушені поперечні коливання прямокутної пластинки з урахуванням недосконалої пружності матеріалу..... | 127 |
| 3.9.1. Довільне у часі розподілене поперечне навантаження | 127 |
| 3.9.2. Гармонічне розподілене поперечне навантаження | 128 |
| 3.9.3. Вплив початкових зусиль у серединній площині пластинки | 129 |
| 3.10. Поперечні вільні коливання квадратної пластинки | 131 |
| <i>Контрольні запитання</i> | 132 |
| Розділ 4. | |
| КЛАСИЧНА ТЕОРІЯ КОЛИВАНЬ ТОНКИХ ОБОЛОНОК | 134 |
| 4.1. Геометрія і класифікація оболонок | 134 |
| 4.2. Загальне рівняння коливань тонких оболонок | 137 |
| 4.2.1. Припущення класичної теорії оболонок | 137 |
| 4.2.2. Деформації та переміщення | 138 |
| 4.2.3. Напруження та внутрішні зусилля | 140 |
| 4.2.4. Відношення пружності (закон Гука в зусиллях) | 143 |
| 4.2.5. Рівняння динамічної рівноваги елемента серединної поверхні оболонки | 144 |
| 4.2.6. Загальні рівняння коливань пружних тонких оболонок у переміщеннях..... | 151 |
| 4.3. Початкові та крайові умови | 157 |
| 4.4. Деякі спрощені варіанти теорії коливань тонких пружних оболонок | 157 |
| <i>Контрольні запитання</i> | 158 |
| Розділ 5. | |
| ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ ПОКООРДИНАТНОГО СПУСКУ ДЛЯ РОЗРАХУНКУ КОЛИВАНЬ СТЕРЖНІВ, ПЛАСТИН ТА ОБОЛОНОК | 160 |
| 5.1. Варіаційна постановка задачі про власні коливання пружних систем | 161 |
| 5.2. Збіжність схем приблизного розв'язання для задач на власні значення ... | 165 |
| 5.3. Вибір ефективного способу реалізації методу квазістатичних ітерацій у задачах динаміки | 169 |
| 5.4. Визначення власних частот і власних форм коливань при поздовжніх коливаннях стержнів | 175 |
| 5.5. Визначення власних частот та власних форм коливань при крутильних коливаннях стержнів | 176 |
| 5.6. Визначення власних частот та власних форм коливань при згинних коливаннях стержнів..... | 178 |

| | |
|--|------------|
| 5.7. Визначення власних частот та власних форм коливань просторових стержневих систем | 179 |
| 5.8. Визначення власних частот та власних форм коливань при поздовжніх коливаннях пластинки у своїй площині | 180 |
| 5.9. Визначення власних частот та власних форм коливань при вільних згинних коливаннях пластин..... | 182 |
| 5.10. Вільні коливання однорідних оболонок | 185 |
| 5.11. Визначення власних частот і власних форм коливань просторових пластинчато-оболонкових конструкцій | 188 |
| 5.12. Визначення власних частот і власних форм тривимірних призматичних тіл | 189 |
| 5.13. Перевірка вибору оптимального коефіцієнта релаксації | 193 |
| 5.14. Вимушені коливання систем зі скінченним числом степенів вільності .. | 195 |
| 5.14.1. Вимушені гармонічні коливання недисипативних систем | 195 |
| 5.14.2. Вимушені гармонічні коливання дисипативних систем скінченним числом степенів вільності | 196 |
| 5.14.3. Коливання недисипативних систем зі скінченним числом степенів вільності при кінематичному збудженні | 198 |
| 5.15. Автоматизована система розрахунку на вільні та вимушені коливання стержнів, пластин та пластинчато-оболонкових систем на основі запропонованого методу | 201 |
| <i>Контрольні запитання</i> | 215 |
| СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ | 216 |
| Основна література | 216 |
| Нормативні посилання | 218 |
| ДОДАТКИ. ТЕРМІНИ ТА ПОЗНАЧЕННЯ | 219 |
| Д.1. Загальні терміни теорії коливань | 219 |
| Д.2. Терміни в галузі вібрації | 236 |
| Д.3. Позначення та одиниці вимірювань у сфері вібрації | 249 |

ВСТУП

Розгойдування дерев від вітру, гойдання корабля на хвилях, дрижання різця під час обробки металів, землетруси, людська мова, скорочення серця і под. – усі ці рухи довкола нас і в нас самих характеризуються послідовними збільшенням і зменшенням деяких величин.

Зміна величини, за якої відбувається її послідовне збільшення і зменшення, називають коливанням. Далі розглядатимемо лише механічні коливання, пов'язані з переміщенням у просторі. Механічні коливання – це відхилення від положення рівноваги, що повторюються. Цей вид коливань відіграє велику роль в машинобудуванні і в будівництві. Коливання можуть бути корисними і шкідливими. Відповідно до цього існують і дві задачі: викликати за допомогою малої сили корисні коливання або ослабити шкідливі. До корисних належить вібрація, що використовується під час забивання свай, ущільнення ґрунтів, вібротранспортування, очищення, у приладах тощо. Шкідливими є коливання нерівноважених частин машини, що обертаються. Такі коливання призводять до швидкого зносу і ламання. Близько 80 % аварій і поломок у машинах виникає унаслідок неприпустимо великих коливань.

Шкідливою є вібрація різця, що погіршує якість обробки металу. Багато неприємностей виникає внаслідок землетрусів.

У всіх випадках таких коливань треба вміти усувати коливання або послаблювати їх шкідливий вплив, а для цього треба знати теорію коливань.

Класифікуються коливання за числом степенів вільності, за характером збуджень, за формою руху (за кінематичним принципом), за видом диференціальних рівнянь руху та за видом супроводжувальної деформації.

За числом степенів вільності розрізняють коливальні системи з однією, двома, трьома степенями вільності і т. д., а також з неперервним розподілом параметрів (із безмежним числом степенів вільності). Оскільки всі реальні коливальні системи є континуальними, у підручнику особлива увага приділяється саме таким системам.

Число степенів вільності (кількість незалежних координат, що визначають положення системи) залежить від вибору розрахункової схеми.

Залежності від характеру збудження коливання можуть бути вільними, вимушеними, коливаннями із самозбудженням (автоколивання) і параметричними. Вільні (власні) коливання виникають унаслідок початкового відхилення від положення рівноваги або удару, а потім підтримуються силами пружності системи. Наявність сил опору призводить до затухання вільних коливань.

Автоколивання – це сталі коливання, що підтримуються зовнішніми силами, характер яких регулюється самими коливаннями. На відміну від власних коливань, автоколивання не згасають. Автоколивання різняться від вимушених коливань тим, що в першому випадку збуджувальна сила регулюється самим коливним процесом, а в другому випадку, навпаки, задана зовні сила регулює коливальний процес.

Параметричні коливання – це коливання, що збуджуються періодичною зміною параметрів системи – маси або жорсткості.

Залежно від того, чи є закон руху періодичною чи неперіодичною функцією, коливання називають, відповідно, періодичними або неперіодичними. Є ще майже періодичні коливання (близькі до періодичних).

Залежно від виду супроводжуючої деформації коливання можуть бути поздовжніми (розтяг – стискання), крутильними (кручення), поперечними (згин), складними (згин і кручення) та ін.

Висококваліфікований інженер будь-якого фаху має знати властивості та закони коливань, що допоможе йому у практичній діяльності використовувати корисні коливання та запобігати шкідливим виявам коливань.

Розділ 1

КОЛИВАЛЬНІ СИСТЕМИ З РОЗПОДІЛЕНИМИ ПАРАМЕТРАМИ

Реальні коливальні системи мають неперервне розподілення фізичних параметрів: жорсткості, маси і характеристик демпфірування. Для таких систем закон коливального руху визначається функціями кількох змінних (часу і просторових координат), а диференціальні рівняння коливань є рівняннями з частинними похідними.

Моделі систем з розподіленими параметрами (континуальні системи) поділяють на три групи: одновимірні (один вимір – одна просторова координата і час), двовимірні (дві просторові координати і час), тривимірні (три просторові координати і час).

До одновимірних належать такі розрахункові моделі: стержень, балка, струна; до двовимірних – пластина, оболонка; до тривимірних – пружне тіло, рідина, газ.

Коливання ізотропного пружного тіла визначають відомим з теорії пружності матричним рівнянням Ламе:

$$\mu \Delta \{u\} + (\lambda + \mu) \text{grad div} \{u\} + \{X\} = \rho \{\ddot{u}\}, \quad (1.1)$$

якому відповідають три скалярні рівняння:

$$\mu \sum_{k=1}^3 \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_k^2} + (\lambda + \mu) \sum_{k=1}^3 \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_j \partial x_k} + X_j = \rho \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2}, \quad (1.2)$$

де $j, k = 1, 2, 3$, а параметри Ламе становлять:

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}; \mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)}. \quad (1.3)$$

До рівнянь (1.1) чи (1.2) потрібно приєднати граничні умови.

З рівнянь коливань тривимірного тіла теоретично можна знайти як частинні випадки рівняння коливань двовимірної та одновимірної моделей. Наприклад, вважаючи, що в (1.2) $u_1 = u_1(x_1, t); u_2 = u_3 = 0$, матимемо:

$$\mu \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + X_1 = \rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}. \quad (1.4)$$

Якщо врахувати, що $\lambda + 2\mu = \frac{Ev}{(1+\nu)(1-2\nu)} + \frac{2E}{2(1+\nu)} \approx E$, то з (1.4) дістанемо відоме рівняння поздовжніх коливань пружного стержня (якщо знехтувати доданком з ν^2):

$$\rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - E \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} = X_1. \quad (1.5)$$

Проте в окремих випадках рівняння коливань можна отримати простіше – не з (1.1), а за допомогою кінематичних гіпотез (плоских перерізів, прямих нормалей тощо). Останній підхід і використано в цьому підручнику.

Недоліком наведених тут рівнянь коливань, які відповідають класичній теорії пружності, є відсутність розв’язків їх при резонансі. Ці розв’язки можна дістати тільки врахувавши внутрішнє чи зовнішнє тертя. Внутрішнє тертя в лінійному випадку стаціонарних і нестаціонарних коливань можна врахувати за гіпотезами Бока–Шліппе–Колара чи Кельвіна–Фойхта. Під час стаціонарних коливань для врахування внутрішнього тертя застосовують метод комплексних модулів пружності (гіпотеза Сорокіна).

Для врахування внутрішнього тертя за згаданими гіпотезами потрібно помножити модулі пружності на відповідні оператори. Так, за першою гіпотезою цими операторами є вирази у круглих дужках:

$$E \rightarrow E \left(1 + \alpha_1 [I] \frac{\partial}{\partial t} \right); \quad G \rightarrow G \left(1 + \gamma_1 [I] \frac{\partial}{\partial t} \right), \quad (1.6)$$

де α_1 та γ_1 – коефіцієнти циклічного (несинфазного, гістерезисного) відхилення у випадку частотонезалежного розсіяння енергії відповідно при нормальних і дотичних напруженнях; $[I]$ – матриця корегувальних множників.

Для спрощення вважатимемо, що $\alpha_1 = \gamma_1$.

За цього припущення для врахування внутрішнього тертя за першою гіпотезою параметри Ламе потрібно помножити на оператор:

$$\left(1 + \alpha_1 [I] \frac{\partial}{\partial t}\right). \quad (1.7)$$

Тоді рівняння (1.1) не змінить форми, якщо вважати утворені так добутки узагальненими (комплексними) параметрами Ламе. У цьому полягає принцип відповідності рівнянь теорії пружності без тертя рівнянням теорії пружності з урахуванням тертя. Тут гістерезисний коефіцієнт

$$\alpha_1 = \Lambda \pi^{-1}, \quad (1.8)$$

де Λ – логарифмічний декремент коливань, який не залежить від частоти і форми коливань.

При врахуванні тертя за другою гіпотезою параметри Ламе у рівнянні (1.1) потрібно помножити на оператор:

$$\left(1 + b_1 [I] \frac{\partial}{\partial t}\right), \quad (1.9)$$

де $b_1 = \Lambda_1 \pi^{-1} \omega^{-1} = \dots = \Lambda_N \pi^{-1} \omega_N^{-1}$.

У рівнянні (1.9) логарифмічний декремент коливань залежить від частоти і власної форми коливань. Принцип відповідності рівнянь дотримано.

Якщо переміщення $\{u\}$ та $\{X\}$ подати у комплексному вигляді, то, згідно з гіпотезою Є. С. Сорокіна, оператором зсуву фази є уявна одиниця i . За гіпотезою Кельвіна–Фойхта недосконалій пружності матеріалу приписується в'язка природа і роль оператора зсуву відіграє оператор диференціювання за часом $\frac{\partial}{\partial t}$.

Застосування останньої гіпотези коректне як для стаціонарних, так і для нестаціонарних коливань попри те, що для металічних матеріалів вона не підтверджується експериментально. Лінійна гіпотеза Сорокіна узгоджується з експериментом, але може використовуватись тільки для усталених коливань. Нехтування будь-яким із них порушує принцип суперпозицій. Крім того, деякі частинні розв'язки визначають коливання, які з'явилися до прикладання навантаження і не задовольняють принцип причинності (фізичну реалізованість).

Якщо перед оператором зсуву і поставити два знаки ($\pm i$), то з чотирьох відповідних розв'язків можна вибрати два необхідні й формально задовольнити принцип причинності. Але два знаки перед i свідчать про порушення лінійності рівняння.

Якщо помножити параметри Ляме λ, μ у рівнянні (1.9) на оператор (1.7) або (9.9), то відповідні рівняння можна записати в операторному вигляді:

$$A\{i\ddot{u}\} + B\{i\dot{u}\} + C\{u\} = \{X\}, \quad (1.10)$$

де A, C, B – матричні оператори: інерційний і пружний однакові для обох гіпотез $A = \rho$; $C = -\mu\Delta - (\lambda + \mu)\text{grad div}$, а дисипативний має різний вигляд $B = \alpha_1[I]$ для гіпотези Бока–Шліппе–Колара й $B = b_1C$ для гіпотези Кельвіна–Фойхта; α_1 та b_1 – відповідні цим гіпотезам коефіцієнти гістерезисного відхилення від закону Гука. Операторну форму рівнянь використовують для скорочення викладок.

1.1. Розрахунок коливань стержнів.

Поздовжні коливання стержнів.

Виведення диференціального рівняння

поздовжніх коливань стержня змінного перерізу

із прямою віссю

Стержнем називають одновимірне пружне тіло, яке має скінченну жорсткість на розтягнення – стиснення, кручення і згинання. Стержень, який працює на розтягнення, кручення або згинання, називають відповідно брусом, валом або балкою.

Вважаємо, що при поздовжніх коливаннях справедлива гіпотеза плоских перерізів; задача в разі малих переміщень є фізично і геометрично лінійною, всіма компонентами напружень і деформацій, окрім $\sigma_{11} = \sigma$, $\varepsilon_{11} = \varepsilon$, можна знехтувати. У цьому випадку переміщення і деформація дорівнюють

$u_1 = u(x, t); u_2 = u_3 = 0$ і $\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x}$. Цій деформації за законом Гука, за гіпотезами Кельвіна–Фойхта або Бока–Шліппе–Колара відповідають напруження

$$\sigma = E \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \sigma = E \left(1 + b_1 \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial}{\partial x}; \quad \sigma = E \left(1 + \alpha_1 [I] \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (1.11)$$

Значення поздовжньої сили в поперечному перерізі (рис. 1.1) визначають відповідно до цих фізичних законів формулами

$$N(x) = EF(x) \frac{\partial u}{\partial x}; \quad (1.12)$$

$$N(x) = EF(x) \left(1 + b_1 \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial u}{\partial x}; \quad (1.13)$$

$$N(x) = EF(x) \left(1 + \alpha_1 [I] \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (1.14)$$

Додаючи, згідно з принципом Д'Аламбера, до зусиль, які діють на елемент стержня dx , сили інерції $\rho F \ddot{u} dx$ та сили в'язкого тертя середовища $b_2 \rho F \dot{u} dx$ (або сили частотонезалежного тертя середовища $\alpha_1 [I] \rho F \dot{u} dx$) (рис. 1.2), дістанемо умову його динамічної рівноваги:

$$N + \frac{\partial N}{\partial x} dx + q(x, t) dx = N + \rho F \ddot{u} dx + b_2 \rho F \dot{u} dx,$$

врахувавши формули (1.11) – (1.14), знайдемо наближенні (справедливі для малих частот, коли довжина хвилі деформації більша, ніж розміри поперечного перерізу) рівняння вимушених поздовжніх коливань, відповідно, пружного стержня, стержнів із в'язким і частотонезалежним внутрішнім тертям (недосконалою пружністю) та зовнішнім тертям [5, 14]:

$$\rho F \ddot{u} + b_2 \rho F \dot{u} - \frac{\partial}{\partial x} \left(EF \frac{\partial u}{\partial x} \right) = q(x, t); \quad (1.15)$$

$$\rho F \ddot{u} + b_2 \rho F \dot{u} - \frac{\partial}{\partial x} \left[EF \left(1 + b_1 \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial u}{\partial x} \right] = q(x, t); \quad (1.16)$$

$$\rho F \ddot{u} + b_2 \rho F \dot{u} - \frac{\partial}{\partial x} \left[EF \left(1 + \alpha_1 [I] \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial u}{\partial x} \right] = q(x, t); \quad (1.17)$$

де ρ – щільність; E – модуль поздовжньої пружності; F – площа поперечного перерізу; b_1, α_1 – коефіцієнти гістерезисного відхилення від закону Гука у випадках частотозалежного і частотонезалежного розсіяння енергії в матеріалі; b_2, α_2 – коефіцієнти пропорційності оператора B оператору A , що відповідають частотозалежному і частотонезалежному зовнішньому тертю; $[I]$ – нескінченна матриця корегувальних множників.

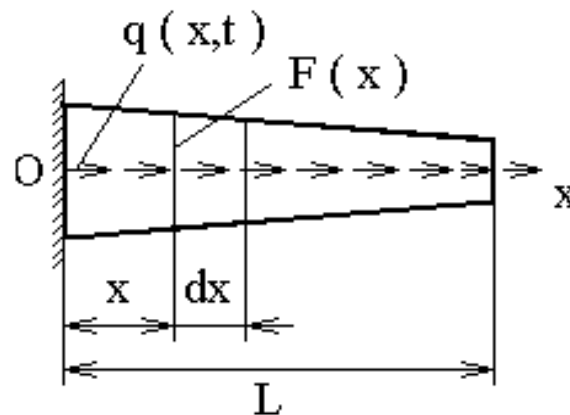


Рис. 1.1. Розрахункова схема стержня при поздовжніх коливаннях

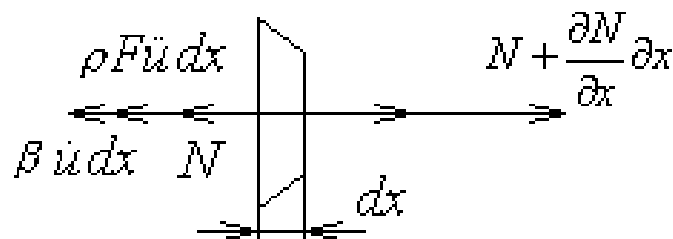


Рис. 1.2. Схема зусиль

Якщо переміщення і змушувальну силу записати в комплексному вигляді, то оператором зсуву фази на $0,5$ може бути уявна одиниця i . Однак тоді відповідне рівняння (1.17) буде коректним тільки при дослідженні усталених коливань. Зіставляючи рівняння (1.16) та (1.17) з рівнянням (1.15), робимо висновок, що для врахування недосконалої пружності матеріалу потрібно помножити модуль його пружності на оператор відповідної лінійної гіпотези розсіяння енергії в матеріалі. Таким оператором у гіпотезі Кельвіна–Фойхта є

$1 + b_1 \frac{\partial}{\partial t}$, у гіпотезі Бока–Шліппе–Колара $1 + \alpha_1 [I] \frac{\partial}{\partial t}$, у гіпотезі Сорокіна $1 + \alpha_1 i$ тощо.

Рівняння (1.15) – (1.17) можна замінити одним операторним рівнянням

$$A\ddot{u} + B\dot{u} + Cu = q; \quad (1.18)$$

де інерційний і пружний оператори мають однакові вирази для всіх трьох рівнянь:

$$A = \rho F; \quad C = -\frac{\partial}{\partial x} \left(EF \frac{\partial}{\partial x} \right), \quad (1.19)$$

а дисипативний оператор різний для всіх рівнянь:

$$B = b_2 \rho F = b_2 A; \quad B = b_1 C + b_2 A;$$

$$B = \alpha_1 [I] C + \alpha_2 [I] A \quad .$$

1.2. Вільні поздовжні коливання стержня змінного перерізу

Вважатимемо, що в (1.15) $b_2 = 0$ та $q = 0$, тоді маємо рівняння вільних коливань стержня без урахування тертя

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(EF \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \rho F \ddot{u} = 0, \quad (1.20)$$

Для повного розв'язку рівняння – розв'язку задачі про вільні коливання стержня потрібно до рівняння (1.20) приєднати дві граничні умови і дві початкові умови.

Відомі дві однорідні граничні умови: на вільному кінці осьова сила $N = EF \frac{\partial u}{\partial x} = 0$, якщо там немає зосередженого навантаження, на закріпленому кінці переміщення $u = 0$. Можливі три комбінації однорідних граничних умов: обидва кінці вільні; обидва кінці закріплені; один кінець закріплений, другий вільний.

Частинні розв'язки рівняння (1.20) шукаємо у вигляді

$$u_l(x, t) = U_l(x)\eta_l(t) = U_l(x)\cos(\omega_l t - \varphi_l), \quad (1.21)$$

що відповідає головним коливанням. Підставимо (1.21) у (1.20), дістанемо рівняння для власних форм коливань [12]:

$$\frac{d}{dx} \left(EF \frac{dU_l}{dx} \right) + \rho F \omega_l^2 U_l = 0. \quad (1.22)$$

Замкнена форма розв'язку цього рівняння відома тільки при деяких законах зміни перерізу вздовж стержня. Незважаючи на це, відомо, що:

1) існує впорядкований дискретний спектр власних частот і відповідна множина власних форм коливань:

$$\omega_1 \leq \omega_2 \leq \omega_3 \dots U_1(x); U_2(x); U_3(x); \dots ;$$

2) усі власні частоти дійсні, додатні, якщо оператор $A > 0$, а C^{-1} цілком неперервний;

3) власні форми коливань попарно ортогональні відносно кінетичної і потенціальної енергій:

$$(AU_l, U_s) = 0 \quad (CU_l, U_s) = 0; \quad l \neq s; \quad (1.23)$$

4) власні форми коливань утворюють повний базис.

Доведемо третє твердження, записавши рівняння (1.23) для U_l і U_s . Помножимо перше з отриманих рівнянь на $U_s dx$, а друге – на $U_l dx$ й проінтегруємо вздовж стержня:

$$\int_0^L \frac{d}{dx} \left(EF \frac{dU_l}{dx} \right) U_s dx = -\omega_l^2 \int_0^L \rho F U_l U_s dx, \quad (1.24)$$

$$\int_0^L \frac{d}{dx} \left(EF \frac{dU_s}{dx} \right) U_l dx = -\omega_s^2 \int_0^L \rho F U_s U_l dx. \quad (1.25)$$

Тут ліві частини проінтегруємо частинами:

$$EF \frac{dU_l}{dx} U_s \Big|_0^L - \int_0^L EF \frac{dU_l}{dx} \frac{dU_s}{dx} dx = -\omega_l^2 \int_0^L \rho F U_l U_s dx; \quad (1.26)$$

$$EF \frac{dU_s}{dx} U_l \Big|_0^L - \int_0^L EF \frac{dU_s}{dx} \frac{dU_l}{dx} dx = -\omega_s^2 \int_0^L \rho F U_s U_l dx. \quad (1.27)$$

У випадку однорідних граничних умов перші доданки у рівняннях (1.26), (1.27) дорівнюють нулю. Віднімемо один від одного вирази, що залишилися, враховуючи самоспряженість операторів A та C . Дістанемо:

$$\int_0^L \rho F U_l U_s dx = \begin{cases} 0 & \text{при } s \neq l \\ M_l & \text{при } s = l \end{cases}. \quad (1.28)$$

Враховавши (1.26), із (1.27) дістанемо і другу умову ортогональності та формулу для головного коефіцієнта жорсткості:

$$-\int_0^L \frac{d}{dx} \left(EF \frac{dU_l}{dx} \right) U_s dx = \int_0^L EF \frac{dU_l}{dx} \frac{dU_s}{dx} dx = \begin{cases} 0; & \text{при } s \neq l \\ K_l; & \text{при } s = l \end{cases}, \quad (1.29)$$

а також формулу для l -ї власної частоти:

$$\omega_l^2 = \frac{K_l}{M_l}. \quad (1.30)$$

Власні форми коливань визначаються з точністю до сталого множника. Для ліквідування такої довільності їх нормують, підпорядковуючи одній із рівностей:

$$M_l = 1; \quad K_l = 1; \quad U_l(x_0) = 1. \quad (1.31)$$

1.3. Вільні поздовжні коливання стержня постійного перерізу

Якщо коефіцієнти рівняння (1.20) EF та ρF сталі, то рівняння спрощується і називається *хвильовим*, набуваючи вигляду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad (1.32)$$

де $c_0 = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ – фазова швидкість (швидкість поширення поздовжньої хвилі у стержні, швидкість звуку у стержні), $мс^{-1}$.

Три можливі комбінації однорідних граничних умов у випадках, коли обидва кінці вільні, обидва кінці закріплені або один закріплений, другий вільний, мають, відповідно, такий вигляд [4, 5, 6]:

$$EF \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = EF \frac{\partial u(L, t)}{\partial x} = 0 \quad (1.33)$$

$$u(0, t) = u(L, t) = 0; \quad (1.34)$$

$$u(0, t) = EF \frac{\partial u(L, t)}{\partial x} = 0. \quad (1.35)$$

Хвильове рівняння (1.32) можна розв'язати точно методами *стоячих хвиль* (метод Фур'є) і *біжучих хвиль* (метод Д'Аламбера).

Згідно з першим методом частинні розв'язки хвильового рівняння знаходимо у вигляді, що відповідає головним (гармонічним) коливанням:

$$u_l(x, t) = U_l(x)\eta_l(t) = U_l(x)\alpha_l \cos(\omega_l t - \varphi_l), \quad (1.36)$$

де $U_l(x)$ – l -та власна форма коливань (амплітудна функція); $\eta_l(t)$ – головна l -координата.

Такий варіант методу Фур'є називають *методом головних коливань* (координат), (МГК). Підставимо (1.36) у (1.32) і дійдемо звичайного диференціального рівняння:

$$\frac{d^2 U_l}{dx^2} + k_l^2 U_l = 0, \quad (1.37)$$

в якому хвильове число

$$k_l = \frac{\omega_l}{c_0} = \omega_l \sqrt{\frac{\rho}{E}}. \quad (1.38)$$

Дві граничні умови дають змогу визначити в загальному розв'язку рівняння (1.37):

$$U_l = A_l \cos k_l x + B_l \sin k_l x, \quad (1.39)$$

значення тільки однієї сталої та характеристичного числа (хвильового), значення другої сталої обирають довільно.

Суперпозиція частинних розв'язків (1.36) є загальним розв'язком вихідного рівняння (1.32):

$$u(x, t) = \sum_{l=1}^{\infty} a_l U_l(x) \cos(\omega_l t - \varphi_l) = \sum_{l=1}^{\infty} U_l(x) (N_l \cos \omega_l t + Q_l \sin \omega_l t). \quad (1.40)$$

Коливання тут уже не будуть гармонічними. Сталі a_l та φ_l (амплітуда і початкова фаза головного коливання) та сталі N_l, Q_l пов'язані між собою,

$$N_l = a_l \cos \varphi_l; \quad Q_l = a_l \sin \varphi_l; \quad a_l^2 = N_l^2 + Q_l^2; \quad \operatorname{tg} \varphi_l = \frac{Q_l}{N_l}, \quad (1.40)$$

і визначаються із двох початкових умов:

$$u(x, 0) = u_0(x); \quad \dot{u}(x, 0) = \dot{u}_0(x), \quad (1.41)$$

за допомогою умов ортогональності та формул зведення, які у випадку стержня постійного перерізу мають вигляд

$$\rho F \int_0^L U_l U_s dx = \begin{cases} 0 & \text{при } s \neq l \\ M_l & \text{при } s = l \end{cases}, \quad (1.42)$$

$$-EF \int_0^L \frac{d^2 U_l}{dx^2} U_s dx = EF \int_0^L \frac{dU_l}{dx} \frac{dU_s}{dx} dx = \begin{cases} 0 & \text{при } s \neq l \\ K_l & \text{при } s = l \end{cases}. \quad (1.43)$$

Умови ортогональності тут можна записати у чистому вигляді без математичної ваги, поділивши рівності (1.42) та (1.43), відповідно, на ρF та EF .

1.4. Визначення власних частот і форм поздовжніх коливань стержня постійного перерізу

Випадок 1. Стержень з вільними для поздовжніх переміщень кінцями (рис. 1.3, а). Враховуючи форму розв'язку (1.39) та умови (1.33.), запишемо граничні умови для l -ї власної форми коливань (1.39) так:

$$\frac{dU_l(0)}{dx} = \frac{dU_l(L)}{dx} = 0. \quad (1.44)$$

Підставимо (1.39) у (1.44), знаходимо $B_l = 0$ A_l . Оскільки $A_l \neq 0$, то

$$\sin k_l L = 0. \quad (1.45)$$

Корені частотного рівняння (1.45) і хвильові числа відповідно дорівнюють:

$$k_l L = 0, \pi, 2\pi, \dots, l\pi, \dots,$$

$$k_l = \frac{l\pi}{L}; \quad l = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad (1.46)$$

Тоді відповідно до (1.38) знаходимо власні кутові частоти – частоти повних коливань

$$\omega_l = k_l c_0 = \frac{l\pi}{L} \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \quad (1.47)$$

Усі власні частоти кратні основній (найменшій) частоті $\omega_l = \frac{\pi}{L} \sqrt{\frac{E}{\rho}}$.

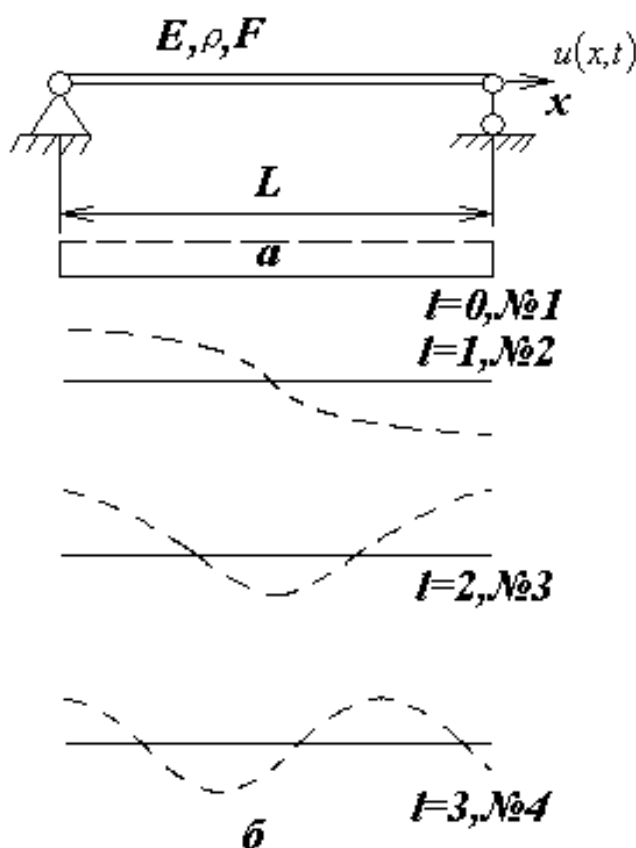


Рис. 1.3. Стержень з вільними для поздовжніх переміщень кінцями (а) та його перші власні форми поздовжніх коливань (б)

Із граничних умов було знайдено $B_l = 0$. Вважаємо, що $A_l = 1$. Тоді рівняння власних форм коливань набере конкретного вигляду

$$U_l = \cos \frac{l\pi}{L} x. \quad (1.48)$$

Для тривіального значення частоти $\omega_0 = 0$ ($l = 0$) із (1.48) знаходимо рівняння форми коливань $U_0 = 1$. Підставимо згідно з (1.48) вираз $U_0 \eta_0(t)$ у (1.39), проінтегруємо результат і дістанемо

$$\eta_0(t) = N_0 + Q_0 t. \quad (1.49)$$

Отже, тривіальному значенню частоти $\omega_0 = 0$ відповідає поступальний рух стержня у поздовжньому напрямку з початковим переміщенням N_0 та початковою швидкістю Q_0 .

Системи з тривіальними значеннями власних частот називають *напіввизначеними* – незакріпленими у відповідних напрямках.

На рис. 1.4, а зображено графіки (діаграми) власних форм коливань, які показують найбільші поздовжні відхилення перерізів стержня від положення статичної рівноваги. На цих графіках є вузли (нерухомі перерізи) і пучності (перерізи, що мають найбільші переміщення). Кількість вузлів N -ї власної форми коливань становить $N - 1$, а кількість пучностей – N . До номерів N включають і форму коливань $U_0 = 1$. До вузлів не включають закріплений граничний переріз. Вузли та їх положення визначають, прирівнюючи до нуля рівняння відповідної форми коливань (1.48).

Підсумовуючи частинні розв'язки (1.21), знаходимо загальний розв'язок рівняння (1.39) для першого випадку граничних умов (1.44):

$$\begin{aligned} u(x, t) &= U_0 (N_0 + Q_0 t) + \sum_{l=1}^{\infty} a_l U_l(x) \cos(\omega_l t - \varphi_l) = \\ &= (N_0 + Q_0 t) + \sum_{l=1}^{\infty} \cos \frac{l\pi}{L} x (N_l \cos \omega_l t + Q_l \sin \omega_l t). \end{aligned} \quad (1.50)$$

Загальний розв'язок (1.50) є суперпозицією форм коливань (стоячих хвиль), помножених на часові функції. Інакше загальний розв'язок є суперпозицією «головних коливань».

Підставивши (1.50) в (1.41), визначимо скінченну множину часових сталих N_l та Q_l з початкових умов (1.41):

$$N_0 + \sum_{l=1}^{\infty} N_l U_l(x) = u_0(x); \quad Q_0 + \sum_{l=1}^{\infty} Q_l \omega_l U_l(x) = \dot{u}_0(x).$$

Останні суми помножимо на $\rho F U_l dx$ ($l = 0, 1, 2, \dots, \infty$), проінтегруємо в межах від 0 до L та, враховуючи умови (1.42), дістанемо систему алгебричних рівнянь [5]:

$$N_0 M_0 = \rho F \int_0^L u_0(x) dx; \quad Q_0 M_0 = \rho F \int_0^L \dot{u}_0(x) U_0 dx; = 1,$$

$$N_l M_l = \rho F \int_0^L u_0(x) U_l dx; \quad Q_l \omega_l M_l = \rho F \int_0^L \dot{u}_0(x) U_l dx, \quad l = 1, 2, 3, \dots, \infty.$$

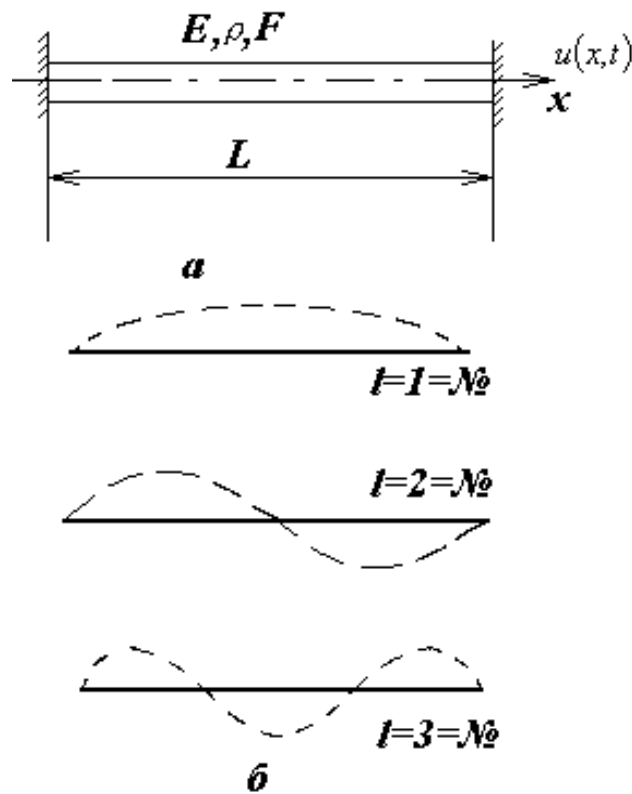


Рис. 1.4. Стержень із закріпленими від поздовжніх переміщень кінцями (а) і його перші власні форми поздовжніх коливань (б)

Із них знаходимо:

$$N_0 = \frac{\rho F \int_0^L u_0 dx}{M_0}; \quad Q_0 = \frac{\rho F \int_0^L \dot{u}_0 dx}{M_0};$$

$$N_l = \frac{\rho F \int_0^L u_0(x) dx}{M_l}; \quad Q_l = \frac{\rho F \int_0^L \dot{u}_0(x) U_l dx}{\omega_l M_l}; \quad (1.51)$$

$$M_0 = \rho Fl; \quad M_l = \int_0^L U_l^2 dx = \rho F \int_0^L \cos^2 \frac{l\pi}{L} x dx = \frac{\rho FL}{2}. \quad (1.52)$$

Знаючи сталі N_l та Q_l , (можна визначити і сталі α_l , φ_l за допомогою формул (1.40).

Випадок 2. Обидва кінці стержня закріплені від поздовжніх переміщень (див. рис. 1.4).

Враховуючи форму розв'язку (1.37), зведемо граничні умови (1.35) до вигляду

$$U_l(0) = U_l(L) = 0. \quad (1.53)$$

Підстановка частинного розв'язку (1.39) в умови (1.53) дає $A_l = 0$; $B_l \sin k_l L = 0$. Оскільки $B_l \neq 0$ (інакше не буде коливань), то

$$\sin k_l L = 0. \quad (1.54)$$

Корені цього характеристичного (вікового) рівняння дорівнюють

$$k_l L = 0, \pi, 2\pi, \dots, l\pi, \dots$$

Корінь $k_0 L = 0$ потрібно відкинути, тому що стержень закріплений і його поступальний рух з тривіальним значенням частоти $\omega_0 = 0$ неможливий. Тоді хвильові числа

$$k_l = \frac{l\pi}{L}; \quad l = 1, 2, 3, \dots, \infty. \quad (1.55)$$

Цим характеристичним (хвильовим) числам згідно з (1.47) відповідають власні (головні) частоти і власні форми коливань системи (вважаємо, що $B_l = 1$):

$$\omega_l = k_l c_0 = \frac{l\pi}{L} \sqrt{\frac{E}{\rho}}; \quad (1.56)$$

$$U_l = \sin k_l x = \sin \frac{l\pi}{L} x. \quad (1.57)$$

Усі частоти кратні основній $\omega_l = \frac{\pi}{L} \sqrt{\frac{E}{\rho}}$. Загальний розв'язок набере

вигляду суми стоячих хвиль (форм коливань), помножених на часові функції:

$$u(x, t) = \sum_{l=1}^{\infty} a_l U_l(x) \cos(k_l c_0 t - \varphi_l) = \sum_{l=1}^{\infty} \sin \frac{l\pi}{L} x (N_l \cos \omega_l t + Q_l \sin \omega_l t). \quad (1.58)$$

Випадок 3. Один кінець стержня закріплений, другий вільний (рис. 1.5).

Підставляючи у граничні умови

$$U_l(0) = \frac{dU_l(L)}{dx} = 0 \quad (1.59)$$

розв'язок (1.39), знаходимо $A_l = 0$; $B_l k_l \cos k_l L = 0$.

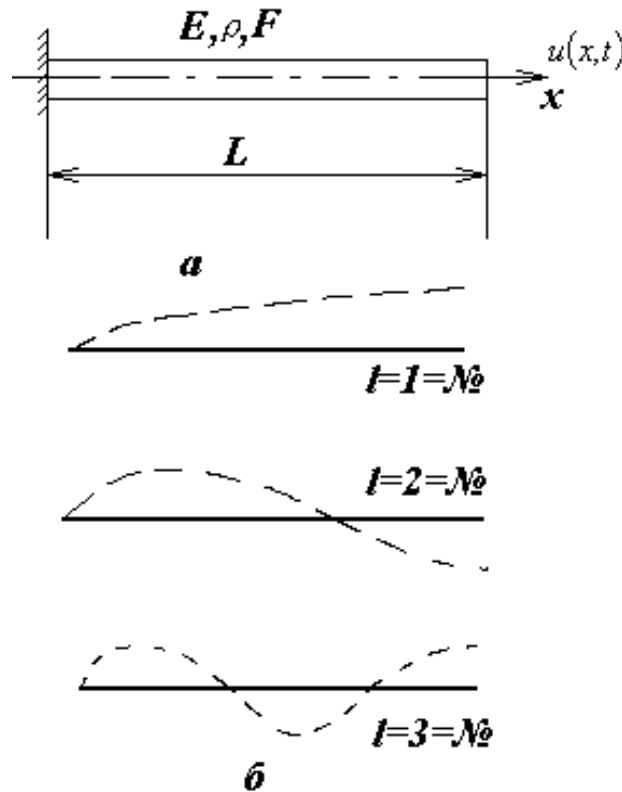


Рис. 1.5. Стержень з одним закріпленим, а другим вільним для поздовжніх переміщень кінцями (а) та його перші власні форми поздовжніх коливань (б)

Оскільки $B_l \neq 0$ (інакше не буде коливань) та $k_l \neq 0$ (стержень закріплений), то

$$\cos k_l L = 0.$$

Із цього частотного (вікового) рівняння знаходимо:

$$k_l L = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \dots, \frac{2l-1}{2} \pi = \frac{l_{\text{нен}} \pi}{2}, \dots$$

$$k_l = \frac{2l-1}{2} \pi = \frac{l_{\text{нен}} \pi}{2}. \quad (1.60)$$

Враховуючи (1.60), а також $A_l = 0$, й поклавши $B_l = 1$, маємо, згідно з (1.38) та (1.39), формулу для власних частот і рівняння форм коливань:

$$\omega_l = k_l c_0 = \frac{2l-1}{2L} \pi \sqrt{\frac{E}{\rho}} = \frac{l_{\text{нен}} \pi}{2}, \dots \quad (1.61)$$

$$U_l = \sin k_l x = \sin \frac{2l-1}{2L} \pi x = \sin \frac{l_{\text{нен}}}{2L} \pi x. \quad (1.62)$$

Власні частоти кратні основній частоті. Загальний розв'язок хвильового рівняння матиме вигляд

$$u(x, t) = \sum_{l=1}^{\infty} a_l U_l(x) \cos(k_l c_0 t - \varphi_l) = \sum_{l=1}^{\infty} \sin \frac{2l-1}{2L} \pi x (N_l \cos \omega_l t + Q_l \sin \omega_l t). \quad (1.63)$$

1.4.1. Метод біжучих хвиль (метод Д'Аламбера)

Розв'язок хвильового рівняння (1.31) шукаємо у вигляді [12]

$$u(x, t) = f(x + at), \quad (1.64)$$

де f – двічі диференційована за складним аргументом $(x + at)$ функція.

Підставимо похідні $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f''$; $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = f'' a^2$ у рівняння (1.33) і знаходимо:

$$A = \pm c_0.$$

Загальним розв'язком рівняння (1.33) буде сума частинних розв'язків (1.64):

$$u(x, t) = f_1(x - c_0 t) + f_2(x + c_0 t). \quad (1.65)$$

Функції f_1 і f_2 визначимо з початкових умов $u(x, 0) = u_0(x)$; $\dot{u}(x, 0) = 0$:

$$f_1(x) + f_2(x) = u_0(x); \quad c_0(-f_1' + f_2') = 0.$$

Інтегруючи друге рівняння, маємо

$$-f_1 + f_2 = C,$$

що разом з першим рівнянням дає

$$f_1 = \frac{1}{2}[u_0(x) - C]; \quad f_2 = \frac{1}{2}[u_0(x) + C].$$

Підстановка цих виразів у (1.65) і заміна аргумента x на $x \pm c_0 t$ приводить до розв'язку хвильового рівняння

$$u(x, t) = \frac{1}{2}u_0(x - c_0 t) + \frac{1}{2}u_0(x + c_0 t). \quad (1.66)$$

За загальних початкових умов $u(x, 0) = u_0(x)$; $\dot{u}(x, 0) = \dot{u}_0(x)$ розв'язок хвильового рівняння буде таким:

$$u(x, t) = \frac{1}{2}u_0(x - c_0 t) + \frac{1}{2}u_0(x + c_0 t) + \frac{1}{2c_0} \int_{x-c_0 t}^{x+c_0 t} \dot{u}_0(\xi) d\xi. \quad (1.67)$$

Отже, розв'язок Д'Аламбера залежить тільки від початкових умов і тому використовується для нескінченно довгого стержня, коли задано лише початкові умови. У випадку стержня скінченної довжини відбувається накладання на (1.65) відбитих від кінців стержня хвиль.

Значення функції $f_1(x - c_0 t)$ залишається весь час сталим, якщо її аргумент $x - c_0 t = \text{const}$, тобто $dx = c_0 dt$. А це означає, що графік $f_1(x - c_0 t)$ функції неперервно переміщується в додатний бік осі x . Тут $c_0 = \frac{dx}{dt}$ – фазова швидкість хвилі (швидкість звуку в матеріалі стержня). Аналогічно встановлюємо, що графік функції – хвиля $f_2(x + c_0 t)$ переміщується у від'ємний бік осі x з тією ж швидкістю c_0 .

Від розв'язку Фур'є для хвильового рівняння можна прийти до розв'язку (1.66) Д'Аламбера. Справді, за початкових умов

$$u(x, 0) = u_0(x); \quad \dot{u}(x, 0) = 0.$$

Із (1.15) дістанемо

$$u(x, t) = \sum_{l=1}^{\infty} N_l \sin k_l x \cos k_l c_0 t = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{\infty} N_l [\sin k_l (x - c_0 t) + \sin k_l (x + c_0 t)],$$

звідки за $t = 0$ знаходимо

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{2} N_l [\sin k_l x + \sin k_l x] = u_0(x); \quad \sum_{l=1}^{\infty} N_l \sin k_l x = u_0(x).$$

Підставивши останнє рівняння у розв'язок (1.67) і замінивши аргумент x на $x \pm c_0 t$, знову дістанемо (1.66).

Розглянемо l -й доданок у рівнянні (1.67). Він буде єдиним, якщо початкова умова визначається l -ю стоячою хвилею $u(x, 0) = U_l(x) = \sin k_l x$:

$$u_l(x, t) = \sin k_l x \cos k_l \omega_l t = \frac{1}{2} [\sin k_l (x - c_0 t) + \sin k_l (x + c_0 t)]. \quad (1.68)$$

Тут перший і другий доданки є рівняннями синусоїдальних хвиль, які біжать відповідно в додатному та від'ємному напрямках осі x . Сума цих хвиль дає стоячу хвилю. Для синусоїдальних хвиль введемо поняття довжини хвилі.

Довжина хвилі λ_l дорівнює відстані, на яку поширюється біжуча хвиля за період T_l , часу

$$\lambda_l = c_0 T_l = \frac{2\pi}{k_l}. \quad (1.69)$$

Довжина хвилі λ_l (западина і горб або згущення та розрядження) зображає «просторовий період» (див. рис. 1.3 – 1.5).

Для наведених випадків за допомогою (1.69) запишемо формули для довжини хвилі залежно від номера l хвильового числа $k_l = \frac{2\pi}{\lambda_l} = \frac{\omega_l}{c_0}$:

$$\lambda_l = \frac{2\pi}{k_l} = \frac{2\pi}{\left(\frac{l\pi}{L}\right)} = \frac{2L}{l}; \quad \lambda_l = \frac{2L}{l}; \quad \lambda_l = \frac{4L}{2L-1}. \quad (1.70)$$

Отже, стояча і біжуча синусоїдальні хвилі мають однакову форму (графік). Але форма біжучої хвилі поширюється зі швидкістю звуку c_0 уздовж стержня.

Як у випадку стоячих, так і у випадку біжучих хвиль точки стержня не «біжать», а коливаються навколо свого положення статичної рівноваги.

1.4.2. Визначення власних частот і форм поздовжніх коливань стержня за неоднорідних граничних умов

Гранична умова може бути неоднорідною в чотирьох випадках: 1) пружне закріплення кінця; 2) зосереджена маса на кінці; 3) зосереджена сила на кінці; 4) зосереджене на кінці переміщення.

У першому випадку на кінці виникає пружна сила $\pm cu$, у другому – сила інерції $\pm M\ddot{u}$ (верхній знак береться для лівого кінця, тому що сила розтягальна; нижній знак – для правого краю, тому що сила стискальна (рис. 1.6)). У третьому і четвертому випадках задачу можна звести до вимушених коливань за однорідних граничних умов.

Визначимо власні частоти і власні форми поздовжніх коливань стержня постійного перерізу з масою на правому кінці (рис. 1.7). Алгоритм розв'язку задачі про вільні коливання такий самий, як і у випадку однорідних граничних умов. Граничні умови будуть інші (рис. 1.6) [6, 7, 12]:

$$u(0, t) = 0; \quad EF \frac{\partial u(L, t)}{\partial x} = -M\ddot{u}.$$

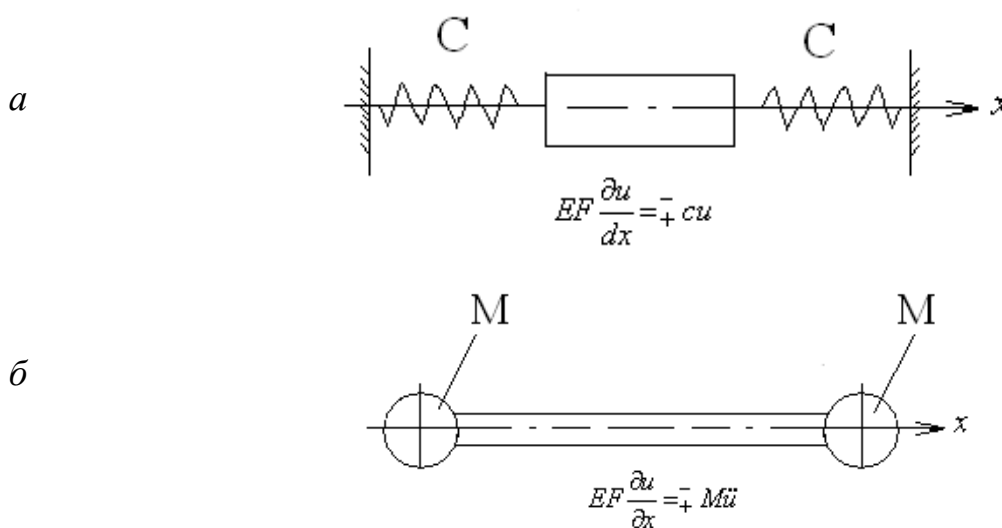


Рис. 1.6. Стержень з неоднорідними граничними умовами: *a* – пружне закріплення кінців; *б* – зосередження мас на кінцях

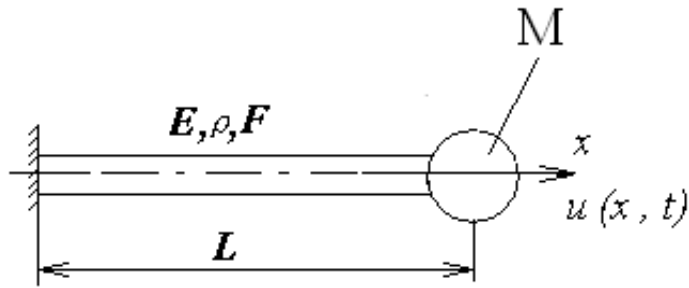


Рис. 1.7. Закріплений стержень із зосередженою масою на вільному кінці

Перепишемо граничні умови з урахуванням форми розв'язку (1.36):

$$U_l(0) = 0; \quad EF \frac{dU_l(L)}{dx} = M\omega_l^2 U_l. \quad (1.71)$$

Підставивши (1.37) у граничні умови, матимемо

$$A_l = 0; \quad EFB_l k_l \cos k_l L = M\omega_l^2 B_l \sin k_l L. \quad (1.72)$$

Враховуючи, що $\omega_l^2 = k_l^2 \frac{E}{\rho}$ (відповідно до (1.38)), помножимо (1.72) на

$k_l L$, у результаті прийдемо до характеристичного (вікового) рівняння

$$k_l L \operatorname{tg} k_l L = \frac{\rho FL}{M} = \alpha. \quad (1.73)$$

Графічний розв'язок рівняння (1.73), зображений на рис. 1.8, для відношення $\alpha = \frac{\rho FL}{M} = 0.5$ дає корені $k_1 L = 0,629$; $k_2 L = 3,24$; $k_3 L = 6,34 \dots$

За формулою (1.38) визначимо частоти:

$$\omega_1 = \frac{0.629}{L} \sqrt{\frac{E}{\rho}}; \quad \omega_2 = \frac{3.24}{L} \sqrt{\frac{E}{\rho}}; \quad \omega_3 = \frac{6.34}{L} \sqrt{\frac{E}{\rho}}.$$

Ці частоти вже не кратні основній частоті. Припустимо, що $B_l = 1$, тоді, з урахуванням $A_l = 0$, маємо рівняння форм коливань:

$$U_l = \sin k_l x.$$

Умови ортогональності й формули зведення за неоднорідних граничних умов теж змінюються. Якщо на кінці стержня ($x = L$) прикладено зосереджену масу M , то змінюються лише умови відносно кінетичної енергії:

$$\int_0^L \rho F U_l U_s ds + M U_l(L) U_s(L) = \begin{cases} 0 & \text{при } s \neq l \\ M_l & \text{при } s = l \end{cases}. \quad (1.74)$$

Якщо кінець стержня (наприклад, $x = L$) пружно закріплено (зосереджена пружина з коефіцієнтом жорсткості c), то змінюються лише умови відносно потенціальної енергії:

$$\int_0^L EF \frac{dU_l}{dx} \frac{dU_s}{dx} dx + c U_l(L) U_s(L) = \begin{cases} 0 & \text{при } s \neq l \\ K_l & \text{при } s = l \end{cases}. \quad (1.75)$$

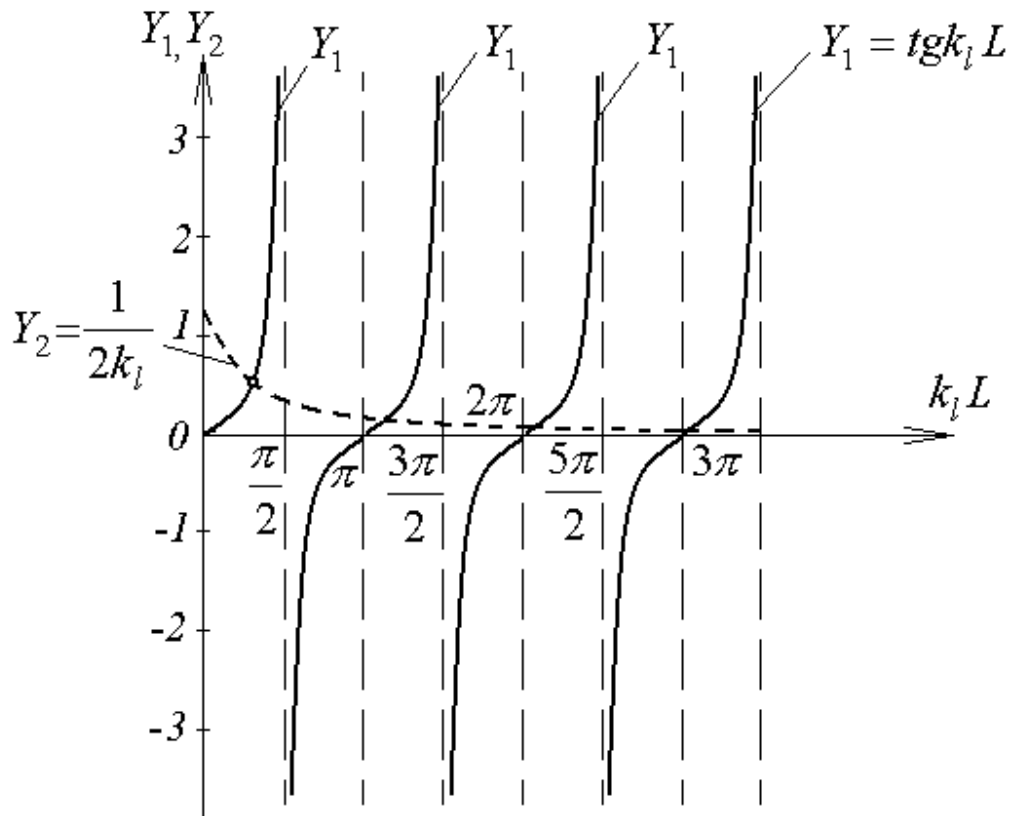


Рис. 1.8. Графічний розв'язок частотного рівняння (1.73)

Якщо на одному кінці прикладено зосереджену масу, а на другому – пружину c , то одночасно змінюються умови ортогональності й формули зведення як відносно кінетичної, так і потенціальної енергій, причому в ці умови ввійдуть координати точок прикладення маси і пружини. Співвідношення (1.74) і (1.75) доводять за допомогою рівності (1.27) чи (1.28) з урахуванням неоднорідних граничних умов.

1.4.3. Вільні поздовжні коливання стержня з урахуванням внутрішнього або зовнішнього тертя

Внутрішнім тертям називають силу опору коливанням, яка виникає внаслідок недосконалої пружності матеріалу. *Зовнішнім тертям* називають опір середовища.

Внутрішнє чи зовнішнє тертя має в'язку (пропорційне швидкості переміщення) чи незалежну від частоти (пропорційне гістерезисній частині переміщення) природу. Для спрощення вважаємо оператор внутрішнього тертя пропорційним пружному, а оператор зовнішнього – інерційному оператору. У цьому випадку можливе повне розділення змінних при застосуванні методу головних координат.

В'язке внутрішнє тертя. Припустимо в (1.16) $q = 0$ та $b_2 = 0$, тоді матимемо рівняння вільних поздовжніх коливань з урахуванням в'язкого внутрішнього тертя [3, 12, 14]:

$$\rho F \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left(EF \frac{\partial u}{\partial x} \right) - b_1 \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} \left(EF \frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0. \quad (1.76)$$

Розв'язок шукаємо за методом головних координат у вигляді

$$u_l(x, t) = \sum_{l=1}^{\infty} U_l(x) \eta_l(t), \quad (1.77)$$

де $U_l(x)$ визначає із рівняння

$$\frac{d}{dx} \left(EF \frac{\partial U_l}{\partial x} \right) + \rho F \omega_l^2 U_l = 0, \quad (1.78)$$

й відповідних граничних умов.

Підставимо (1.77), (1.78) у (1.76), помножимо результат на $U_s(x) dx$ і проінтегруємо по x в межах від 0 до L . З урахуванням умов (1.29) дістанемо скінченну множину незалежних між собою рівнянь:

$$\ddot{\eta}_l + b_1 \omega_l^2 + \omega_l^2 \eta_l = 0, \quad (1.79)$$

$$l = 1, 2, 3, \dots; \quad b_1 \omega_l^2 = 2h_l. \quad (1.80)$$

Частинні розв'язки знаходимо за методом Ейлера у вигляді

$$\eta_l = B_l e^{\lambda t}. \quad (1.81)$$

Підстановка (1.81) у (1.79) дає рівняння, з якого знаходимо характеристичні числа.

Можливі три випадки. Обмежимося першим – випадком малого тертя $h_l^2 < \omega_l^2$, коли

$$\lambda_1 = -h_l + i\tilde{\omega}_l; \quad \lambda_2 = -h_l - i\tilde{\omega}_l, \quad (1.82)$$

де $\tilde{\omega}_l = \sqrt{\omega_l^2 - h_l^2}$.

За принципом суперпозиції будемо загальний розв'язок для l -ї головної координати:

$$\eta_l = \frac{A_l}{2} e^{-i\varphi} \cdot e^{-h_l t + i\tilde{\omega}_l t} + \frac{A_l}{2} e^{i\varphi} \cdot e^{-h_l t + i\tilde{\omega}_l t} = A_l e^{-h_l t} \cos(\tilde{\omega}_l t - \varphi_l). \quad (1.83)$$

Логарифмічний декремент головного коливання залежить від частоти

$$\Lambda_l = h_l \tilde{T}_l = \frac{b_l \omega_l^2}{2} \cdot \frac{2\pi}{\tilde{\omega}_l} \approx b_l \pi \omega_l,$$

що не підтверджує експеримент. Із затухаючих головних коливань будемо загальний розв'язок, підставляючи (1.83) у (1.77):

$$u_l(x, t) = \sum_{l=1}^{\infty} A_l e^{-h_l t} U_l(x) \cos(\tilde{\omega}_l t - \varphi_l). \quad (1.84)$$

Здобутий розв'язок свідчить, що загальний рух є затухаючим коливальним, якщо для всіх l буде $h_l < \omega_l$. При $h_l = \omega_l$ й $h_l > \omega_l$ рух не буде коливальним.

Зовнішнє в'язке тертя. Рівняння вільних коливань стержня з урахуванням зовнішнього в'язкого тертя

$$\rho F \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + b_2 \rho F \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(EF \frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0. \quad (1.85)$$

Розв'язок рівняння знаходять за допомогою алгоритму, що описаний у попередньому розділі. Він матиме вигляд (1.84). Відмінність полягає в тому, що середній член рівняння (1.79) замінюється на $b_2 \eta_l$ й, отже, коефіцієнт демпфірування і логарифмічний декремент l -го головного коливання

$$2h_l = b_2; \quad \Lambda_l = h_l T_l = \frac{b_2}{2} \frac{2\pi}{\varpi_l} \approx \frac{b_2 \pi}{\omega_l}. \quad (1.86)$$

Внутрішнє частотонезалежне тертя. Замінивши в (1.15) та взявши $q = 0, b_2 = 0$, модуль E як оператор Сорокіна $E(1 + \alpha_1 i)$, матимемо рівняння вільних коливань з урахуванням частотонезалежного внутрішнього тертя:

$$\rho F \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \alpha_1 i \frac{\partial}{\partial x} \left(EF \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(EF \frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0. \quad (1.87)$$

Використання процедури методу головних координат дає рівняння коливань l -ї головної координати та характеристичне рівняння [12, 14]

$$\ddot{\eta}_l + \alpha_1 \omega_l^2 i \eta_l + \omega_l^2 i \eta_l = 0; \quad \lambda^2 + i \alpha_1 \omega_l + \omega_l^2 = 0.$$

Оскільки не всі коефіцієнти останнього рівняння – дійсні числа, то корені будуть комплексні, але не спряжені:

$$\lambda_{1l} = -h_l + i \tilde{\omega}_l; \quad \lambda_{2l} = h_l + i \tilde{\omega}_l, \quad (1.88)$$

$$\text{де } h_l^2 = \frac{\omega_l^2}{2} \left(-1 + \sqrt{1 + \alpha_1^2} \right); \quad \tilde{\omega}_l^2 = \frac{\omega_l^2}{2} \left(1 + \sqrt{1 + \alpha_1^2} \right).$$

Перший корінь (1.88) відповідає стійкому розв'язку, а другий – нестійкому і має бути відкинутим у цьому випадку, але тоді порушується принцип суперпозиції розв'язків.

Таким чином, застосування лінійної моделі комплексного модуля при нестационарних коливаннях не є коректним, тому під час дослідження нестационарних коливань з урахуванням частотонезалежного тертя замість оператора Сорокіна зсуву будемо використовувати оператор Бока–Шліппе–Колара у найпростішому вигляді (для рівнянь у головних координатах):

$$\alpha_1 [\omega]^{-1} \frac{\partial}{\partial t}.$$

Рівняння вільних поздовжніх коливань стержня з урахуванням тертя за гіпотезою Бока–Шліппе–Колара матиме вигляд

$$\rho F \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \alpha_1 [\omega]^{-1} \frac{\partial^2}{\partial t \partial x} \left(EF \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(EF \frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0. \quad (1.89)$$

Далі застосуємо процедуру методу головних координат і візьмемо до розв'язку (1.84). При цьому l -те рівняння l -ї головної координати матиме вигляд

$$\ddot{\eta}_l + \alpha_1 \omega_l \dot{\eta}_l + \omega_l^2 \eta_l = 0. \quad (1.90)$$

Корені характеристичного рівняння будуть комплексно спряженими. Розв'язок рівняння (1.80) коректний, тому що він є суперпозицією двох стійких частинних розв'язків. При цьому, на відміну від випадку в'язкого тертя, логарифмічний декремент l -го головного коливання не залежить від частоти:

$$\Lambda_l = h_l \frac{2\pi}{\omega_l} = \frac{\alpha_1 \omega_l}{2} \frac{2\pi}{\omega_l} \approx \alpha_1 \pi. \quad (1.91)$$

Розглянуту гіпотезу врахування тертя називають скоректованою гіпотезою Кельвіна–Фойхта.

1.4.4. Вимушені поздовжні коливання ідеально пружного стержня без урахування зовнішнього тертя

Довільна змушувальна сила. Розв'язок рівняння поздовжніх коливань стержня під дією довільної сили

$$\rho F \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left(EF \frac{\partial u}{\partial x} \right) = q(x, t). \quad (1.92)$$

будується у вигляді розкладу за власними формами коливань (метод головних координат)

$$u(x, t) = \sum_{l=1}^{\infty} U_l(x) \eta_l(t), \quad (1.93)$$

де $\eta_l(t)$ – шукані головні координати; $U_l(x)$ – власні форми коливань, знайдені в задачі про вільні коливання з рівняння

$$\frac{d}{dx} \left(EF \frac{dU_l}{dx} \right) + \rho F \omega_l^2 U_l = 0, \quad (1.94)$$

і заданих граничних умов. Помножимо результат підстановки (1.93), (1.94) у (1.92) на $U_s(x) dx$, проінтегруємо за x від 0 до L і, враховуючи

умови (1.29), дістанемо систему незалежних рівнянь зі сталими коефіцієнтами:

$$M_l(\ddot{\eta}_l + \omega_l^2 \eta_l) = q_l(t); l = 1, 2, 3, \dots, \infty; q_l(t) = \int_0^L q(x, t) U_l(x) dx. \quad (1.95)$$

За тривіальних початкових умов розв'язком цього рівняння є інтеграл переміщень:

$$\eta_l = \frac{1}{M_l \omega_l} \int_0^t \int_0^L q(x, \tau) U_l(x) \sin \omega_l(t - \tau) d\tau. \quad (1.96)$$

Підставимо (1.96) в (1.93) і знайдемо розв'язок вихідного рівняння (1.92) у довільній системі координат:

$$u(x, t) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{M_l \omega_l} \int_0^t \int_0^L q(x, \tau) U_l(x) \sin \omega_l(t - \tau) d\tau. \quad (1.97)$$

Приклад 1.1. Знайти закон коливань від раптово прикладеної до вільного кінця ідеально пружного стержня осьової сили (рис. 1.9) [14].

Розв'язання. Зведемо зосереджену раптову силу до формально розподіленої і залежної від часу за допомогою дельта-функції $\delta(x - L)$ та одиничної функції $\sigma_l(t)$.

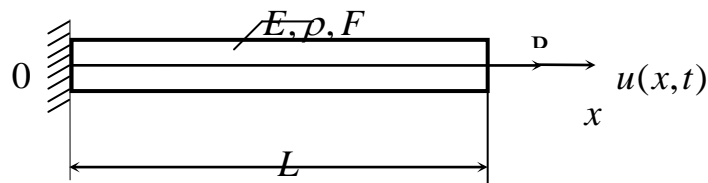


Рис. 1.9. Стержень з одним закріпленим від поздовжніх переміщень кінцем і раптово прикладеною осьовою силою на другому кінці

Тоді рівняння коливань і його розв'язок матимуть вигляд рівняння (1.92) і розв'язку (1.97):

$$\rho F \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left(EF \frac{\partial u}{\partial x} \right) = P \delta(x - L) \sigma_l = q(x, t),$$

$$u(x, t) = P \sum_{l=1}^{\infty} \frac{U_l(L) U_l(x)}{M_l \omega_l^2} (1 - \cos \omega_l t).$$

Тут враховано значення таких інтегралів:

$$\int_0^L P U_l(x) \rho(x-L) dx = P U_l(L); \int_0^L \sigma_l \sin \omega_l(t-\tau) d\tau = \frac{1}{M_l \omega_l^2} (1 - \cos \omega_l t).$$

Згідно з (1.61), (1.62) для цього прикладу маємо:

$$U_l = \sin \frac{2l-1}{2L} \pi x, \omega_l = \frac{(2l-1)}{2L} \pi \sqrt{\frac{E}{\rho}}; M_l = \frac{\rho FL}{2}.$$

Максимальне переміщення кінцевого перерізу $x=L$:

$$U_{\max} = \frac{16PL}{\varpi^2 EF} \left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots \right) = \frac{2PL}{EF}.$$

Для обчислення останнього результату використано значення суми числового ряду, що міститься у круглих дужках: $\frac{\pi^2}{8}$.

Знайдене динамічне переміщення більше за статичне $\frac{PL}{EF}$ у два рази.

Гармонічне розподілене навантаження. Для побудови розв'язку рівняння поздовжніх коливань стержня під дією розподіленої гармонічної сили,

$$\rho F \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left(EF \frac{\partial u}{\partial x} \right) = q(x) \cos \omega t, \quad (1.98)$$

використовують також метод головних координат. За допомогою цього методу дістанемо зліченну множину:

$$M_l (\ddot{\eta}_l + \omega_l^2 \eta_l) = q_l \cos \omega t; q_l = \int_0^L q(x) U_l(x) dx. \quad (1.99)$$

Частинний розв'язок, що відповідає суто вимушеним коливанням, шукаємо за виглядом правої частини:

$$\eta_l(t) = \alpha_l \cos(\omega t - \varphi). \quad (1.100)$$

Оскільки в системі немає тертя, то $\varphi_l = 0$. Підставляючи (1.100) у (1.99), за $\omega \neq \omega_l$ визначимо:

$$\alpha_l = \frac{\int_0^L q(x)U_l(x)dx}{M_l(\omega_l^2 - \omega^2)}; \quad \eta_l = \frac{\int_0^L q(x)U_l(x)dx}{M_l(\omega_l^2 - \omega^2)} \cos \omega t. \quad (1.101)$$

Якщо $\omega = \omega_l$, виникає резонанс l -ї головної координати, коли $\int_0^L q(x)U_l(x)dx = 0$. А при резонансі $\omega = \omega_l$ замість (1.101) розв'язком буде віковий член:

$$\eta_l = \frac{t \int_0^L q(x)U_l(x)dx}{2M_l\omega} \sin \omega t. \quad (1.102)$$

Підставимо (1.101) у (1.93) і матимемо розв'язок рівняння (1.98), який відповідає усталеним нерезонансним коливанням:

$$u(x,t) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{U_l(x) \cos \omega t \int_0^L q(x)U_l(x)dx}{M_l(\omega_l^2 - \omega^2)}. \quad (1.103)$$

Приклад 1.2. Знайти закон усталених вимушених коливань стержня (рис. 1.10).

Розв'язання. Підставивши у (1.103) величину $q(x) = q \sigma_l(x - x_0) \omega t$ та враховуючи $\omega \neq \omega_l$, матимемо

$$u(x,t) = q \cos \omega t \sum_{l=1}^{\infty} \frac{U_l(x) \int_0^L q(x)U_l(x)dx}{M_l(\omega_l^2 - \omega^2)},$$

де $U_l = \sin \frac{\pi l}{L} x$ – власна форма коливань.

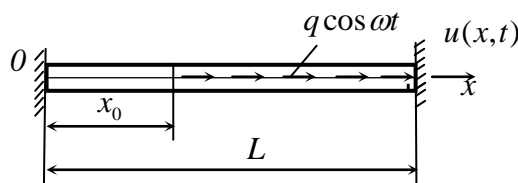


Рис. 1.10. Стержень із двома закріпленими кінцями під дією перервної розподіленої сили

Зосереджена гармонічна сила. Зосереджену в точці $x = x_0$ гармонічну силу $P \cos \omega t$ можна звести до формально розподіленої за допомогою дельта-функції і потім скористатися розв'язком (1.103):

$$u(x, t) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{U_1(x) \int_0^L P \delta(x - x_0) U_1(x) dx}{M_1(\omega_1^2 - \omega^2)} \cos \omega t =$$

$$= P \cos \omega t \sum_{l=1}^{\infty} \frac{U_1(x_0) U_1(x)}{M_1(\omega_1^2 - \omega^2)}; \quad \omega \neq \omega_1. \quad (1.104)$$

Якщо сила $P \cos \omega t$ прикладена на вільному кінці, то, крім розв'язку, що зображає суперпозицію головних коливань, можна знайти замкнений розв'язок, включаючи силу до неоднорідної граничної умови.

Приклад 1.3. Знайти безпосередній розв'язок задачі про вимушені поздовжні коливання стержня (рис. 1.11).

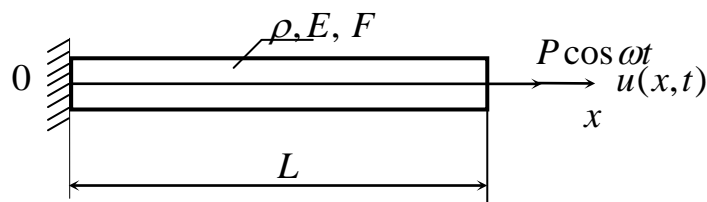


Рис. 1.11. Стержень з одним закріпленим кінцем під дією зосередженої гармонічної сили

Розв'язання. Однорідному рівнянню коливань стержня [12, 14]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad (1.105)$$

якщо граничні умови неоднорідні,

$$u(0, t) = 0; \quad EF \frac{\partial u(L, t)}{\partial x} = P \cos \omega t, \quad (1.106)$$

має задовольняти замкнений розв'язок

$$u(x, t) = U(x) \cos \omega t. \quad (1.107)$$

Підстановка (1.107) у (1.106) дає рівняння шуканої форми коливань –

$$\frac{d^2 U(x)}{dx^2} - \frac{\omega^2}{c_0^2} U(x) = 0. \quad \text{Його загальний розв'язок:}$$

$$U(x) = B \cos \frac{\omega}{c_0} x + A \sin \frac{\omega}{c_0} x,$$

підставимо до першої умови (1.39). Знайдемо $B = 0$. Тоді $U(x) = A \sin \frac{\omega}{c_0} x$,

підставимо до (1.107), а результат до другої умови (1.106):

$$AEF \cos \frac{\omega}{c_0} L = P.$$

Звідси амплітуда коливань $A = \frac{P c_0}{EF \omega \cos \frac{\omega}{c_0} L}$.

Розв'язок (1.107) набуде остаточного вигляду:

$$u(x, t) = \frac{P c_0}{EF \omega \cos \frac{\omega}{c_0} L} \cdot \sin \frac{\omega}{c_0} x \cos \omega t,$$

де $\cos \frac{\omega}{c_0} L = 0$; $\omega \neq \omega_l = \frac{(2l-1)\pi}{2L} c_0$.

1.4.5. Вимушені поздовжні коливання стержня з урахуванням внутрішнього або зовнішнього тертя

Довільна в часі розподілена по осі стержня змушувальна сила. У розглядуваному випадку довільної змушувальної сили математично коректними лінійними моделями внутрішнього тертя будуть тільки дві: Кельвіна–Фойхта та Бока–Шліппе–Колара. Зовнішнє тертя можна вважати в'язким [7, 12].

Для повного розділення змінних при використанні методу головних координат, як і раніше, вважаємо, що демпфірувальний оператор буде пропорційний пружному оператору при внутрішньому терті та інерційному – при зовнішньому терті.

Рівняння поздовжніх вимушених коливань з урахуванням внутрішнього тертя відповідно до Кельвіна–Фойхта та Бока–Шліппе–Колара і зовнішнього в'язкого тертя записують так [5, 12, 14]:

$$\rho F \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - b_1 \frac{\partial^2}{\partial t \partial x} \left(EF \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(EF \frac{\partial u}{\partial x} \right) = q(x, t); \quad (1.108)$$

$$\rho F \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \alpha_1 [\omega]^{-1} \frac{\partial^2}{\partial t \partial x} \left(EF \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(EF \frac{\partial u}{\partial x} \right) = q(x, t); \quad (1.109)$$

$$\rho F \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - b_2 \rho F \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(EF \frac{\partial u}{\partial x} \right) = q(x, t). \quad (1.110)$$

Розв'язок кожного із цих рівнянь шукаємо у вигляді розкладу [7]

$$u(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} U_i(x) \eta_i(t) \quad (1.111)$$

за власними формами коливань (метод головних координат), знайденим раніше з рівняння

$$\frac{d}{dx} \left(EF \frac{dU_1}{dx} \right) + \rho F \omega_i^2 U_1 = 0, \quad (1.112)$$

і заданих граничних умов. Помножимо результат підстановки (1.111), (1.112) у (1.108) – (1.110) на $U_s(x) dx$, проінтегруємо за x в межах від 0 до L і, враховуючи (1.112), дістанемо відповідну кожному із трьох рівнянь 1.108) – (1.110) свою зліченну множину рівнянь коливань головних координат у такому вигляді:

$$\begin{aligned} M_i (\ddot{\eta}_i + b_1 \omega_i^2 \dot{\eta}_i + \omega_i^2 \eta_i) &= q_i(t); \\ M_i (\ddot{\eta}_i + \alpha_1 \omega_i^2 \dot{\eta}_i + \omega_i^2 \eta_i) &= q_i(t); \end{aligned} \quad (1.113)$$

$$q_i(t) = \int_0^L q(x, t) U_i(x) dx.$$

За тривіальних початкових умов розв'язок l -го рівняння будь-якої з наведених множин подамо інтегралом переміщень

$$\eta_i = \frac{e^{-h_i t}}{M_i \omega_i} \int_0^t \int_0^L q(x, \tau) U_i(x) e^{h_i \tau} \sin \tilde{\omega}_i dx d\tau, \quad (1.114)$$

в якому демпфирована частота $\tilde{\omega}_l = \sqrt{\omega_l^2 - h_l^2}$ визначається з урахуванням різних виразів для коефіцієнта демпфірування у трьох розглянутих випадках:

$$h_l = \frac{b_1 \omega_l^2}{2}, \quad h_l = \frac{\alpha_1 \omega_l^2}{2}, \quad h_l = \frac{b_2}{2}. \quad (1.115)$$

Якщо початкові умови не є тривіальними, то до (1.114) додається визначений цими умовами загальний розв'язок однорідного рівняння l -ї головної координати. Підставимо (1.114) до (1.111), тоді

$$u(x, t) = \sum_{l=1}^{\infty} U_l(x) \frac{e^{-h_l t}}{M_l \omega_l} \int_0^t \int_0^l q(x, \tau) U_l(x) e^{h_l \tau} \sin \tilde{\omega}_l(t - \tau) dx d\tau,$$

інтеграл, що є загальним (за тривіальних початкових умов) розв'язком будь-якого з вихідних рівнянь (1.108) – (1.110). Проте при цьому для h_l береться значення з ряду формул (1.115), що відповідають гіпотезі Кельвіна–Фойхта, Бока–Шліппе–Колара або зовнішньому в'язкому тертю [12].

Гармонічне розподілене осьове навантаження. У рівняннях (1.108) – (1.110) праві частини $q(x, t)$ замінюємо на $q(x) \cos \omega t$, а потім застосовуємо процедуру (1.111) – (1.113) переходу до головних координат. Матимемо зліченну множину рівнянь для головних координат відповідно з урахуванням внутрішнього тертя за гіпотезами Кельвіна–Фойхта, Бока–Шліппе–Колара або з урахуванням зовнішнього в'язкого тертя [3, 7, 12, 14]:

$$M_l (\ddot{\eta}_l + b_1 \omega_l^2 \dot{\eta}_l + \omega_l^2 \eta_l) = q_l(x) \cos \omega t, \quad (1.116)$$

$$M_l (\ddot{\eta}_l + \alpha_1 \omega_l \dot{\eta}_l + \omega_l^2 \eta_l) = q_l(x) \cos \omega t, \quad (1.117)$$

$$M_l (\ddot{\eta}_l + b_2 \omega_l^2 \dot{\eta}_l + \omega_l^2 \eta_l) = q_l(x) \cos \omega t, \quad (1.118)$$

$$q_l = \int_0^L q(x) U_l(x) dx; \quad l = 1, 2, 3, \dots$$

Частинний розв'язок кожного із цих рівнянь шукаємо у вигляді

$$\eta_l = \alpha_l \cos(\omega t - \varphi_l) = \alpha_l \cos \psi_l. \quad (1.119)$$

Підставимо у (1.116) – (1.118) форму розв'язку і вираз

$$\cos \omega t = (\psi_l + \varphi_l) = \cos \psi_l \cos \varphi_l - \sin \psi_l \sin \varphi_l,$$

а потім прирівняємо коефіцієнти за $\cos \psi_l$ та $\sin \psi_l$ й дістанемо систему двох рівнянь відносно сталих α_l та φ_l розв'язку (1.119):

$$\left. \begin{aligned} M_l \alpha_l (\omega_l^2 - \omega^2) &= q_l \cos \varphi_l \\ 2M_l \alpha_l h_l \omega &= q_l \sin \varphi_l \end{aligned} \right\} \quad (1.120)$$

Ця система однакова для всіх трьох випадків урахування тертя, коли h_l визначається формулами (1.115). З рівнянь (1.120) знаходимо:

$$\alpha_l = \frac{\int_0^L q(x) U_1(x) dx}{M_l \sqrt{(\omega_l^2 - \omega^2)^2 + 4h_l^2 \omega^2}}; \quad \operatorname{tg} \varphi_l = \frac{2h_l \omega}{\omega_l^2 - \omega^2}. \quad (1.121)$$

Враховуючи (1.121), надамо рівнянню (1.119) остаточного вигляду:

$$\eta_l = \frac{\int_0^L q(x) U_1(x) dx}{M_l \sqrt{(\omega_l^2 - \omega^2)^2 + 4h_l^2 \omega^2}} \cos(\omega t - \varphi_l).$$

Це рівняння визначає суто вимушені гармонічні коливання l -ї головної координати у всіх трьох областях – дорезонансній, резонансній, зарезонансній – і збігається з таким самим рівнянням для системи з одним ступенем вільності. Підставивши знайдене рівняння в (1.111), дійдемо загального (за тривіальних початкових умов) розв'язку:

$$u(x, t) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\int_0^L q(x) U_1(x) dx}{M_l \sqrt{(\omega_l^2 - \omega^2)^2 + 4h_l^2 \omega^2}} \cos(\omega t - \varphi_l), \quad (1.122)$$

вихідного рівняння (1.108), (1.109) або (1.110) за умови $q(x, t) = q(x) \cos \omega t$, коли обчислюється за першою, другою чи третьою формулами (1.115).

Використовуючи метод головних координат разом із методом комплексних амплітуд, розв'язок (1.122) подамо у вигляді

$$u(x, t) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{U_1(x) dx q_l e^{i\omega t}}{M_l [(i\omega_l)^2 + 2h_l^2 i\omega + \omega_l^2]} = W(x, \omega) e^{i\omega t}, \quad (1.123)$$

де $W(x, \omega)$ – частотна передатна функція – реакція коливальної системи на одиничне гармонічне збудження $e^{i\omega t}$.

Розраховуючи резонанс l -го порядку $\omega = \omega_l$, у сумі (1.122) за правилом Відлера залишаємо тільки l -й доданок, а іншими нехтуємо як малими величинами.

Зауважимо, що при дослідженні усталених коливань буде математично коректним і застосування гіпотези Сорокіна для врахування внутрішнього тертя. Результати обчислення у цьому випадку збігаються з результатами, отриманими за допомогою гіпотези Бока–Шліппе–Колара.

Приклад 1.4. Знайти розв’язок задачі про поздовжні коливання стержня (див. рис. 1.11) з урахуванням внутрішнього тертя за гіпотезою Бока–Шліппе–Колара і Кельвіна–Фойхта.

Розв’язання. Застосуємо формулу (1.122).

1. Знаходимо значення величин, які входять у цю формулу:

$$q_l = \int_0^L P \delta(x-L) U_l dx = P U_l(L); \quad \int_0^L \rho F U_l^2 dx = M_l;$$

$$\omega_l^2 = k_l^2 \frac{E}{\rho}; \quad h_l = \frac{\alpha_l \omega_l}{2}; \quad \operatorname{tg} \varphi_l = \frac{2h_l \omega}{\omega_l^2 - \omega^2}. \quad (1.124)$$

2. При резонансі $\omega = \omega_l$ матимемо $\varphi_l = \frac{\pi}{2}$. За правилом Відлера залишаємо в сумі тільки резонансний член. Тоді розв’язок матиме вигляд:

$$u(x, t) \approx P U_l(L) \frac{\sin k_l x}{M_l \alpha_l \omega_l^2} \sin \omega t. \quad (1.125)$$

3. За гіпотезою Кельвіна–Фойхта $h_l = \frac{b_l \omega^2}{2}$. Тоді розв’язок (1.122)

набуває вигляду

$$u(x, t) \approx P U_l(L) \frac{\sin k_l x}{M_l b_l \omega_l^2} \sin \omega t, \quad (1.126)$$

де $U(x, t) = \sin k_l x$.

1.4.6. Кінематичне збудження поздовжніх коливань стержня

Закріпленому кінцю стержня надамо переносного поступального руху $U^e(t)$. Він може бути гармонічним, періодичним або довільним у часі. Такого руху набувають і всі інші перерізи стержня. У стержні можуть виникнути і поздовжні коливання – змінні переміщення перерізів $U^r(t, x)$ відносно переносного руху (рис. 1.12). У цьому випадку абсолютне переміщення перерізів стержня

$$u(x, t) = u^e(t) + u^r(t). \quad (1.127)$$

Деформації, напруження і внутрішні зусилля виникають від відносних, а сили інерції – від абсолютних переміщень, їх обчислюють за формулами

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{\partial u^r}{\partial x}; \quad \sigma = E\varepsilon = E \frac{\partial u^r}{\partial x}; \\ N &= \sigma F = EF \frac{\partial u^r}{\partial x}; \quad \rho F \ddot{u} = \rho F (\ddot{u}^e + \ddot{u}^r). \end{aligned} \quad (1.128)$$

Розглянемо динамічну рівновагу елемента dx коливального стержня (рис. 1.13), включаючи до діючих на елемент сил і Д'Аламберові сили інерції. Підставимо в умову динамічної рівноваги елемента

$$\rho F \ddot{u} = \frac{\partial N}{\partial x},$$

відповідні вирази (1.128), матимемо [5, 12]:

$$\rho F \ddot{u}^r - \frac{\partial}{\partial x} \left(EF \frac{\partial u^r}{\partial x} \right) = -\rho F \ddot{u}^e, \quad (1.129)$$

рівняння поздовжніх коливань стержня у відносній системі відліку, в якій змушувальною силою буде сила інерції переносного руху (ейлерова сила інерції). Інтенсивні коливання виникнуть тоді, коли переносний рух буде гармонічним із частотою ω , яка дорівнює будь-якій власній частоті стержня ω_l . У цьому випадку потрібно враховувати тертя. Якщо тертя

внутрішнє, в'язке, то потрібно замінити E на оператор $EF\left(1 + b_1 \frac{\partial}{\partial t}\right)$ у рівнянні (1.129).

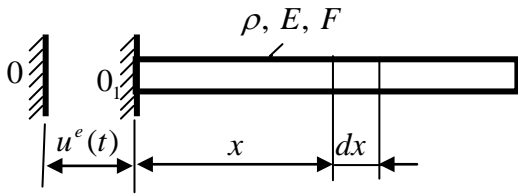


Рис. 1.12. Кінематичне збудження поздовжніх коливань

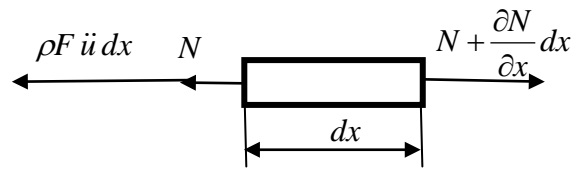


Рис. 1.13. Схема сил, які діють на елемент стержня його поздовжніх коливаннях

Розглянемо інший можливий вид кінематичного збудження, коли переносний поступальний рух надається не всім перерізам, а, наприклад, одному з координатою $x = \frac{L}{2}$. Тоді рівняння коливань набуде вигляду

$$\rho F \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left[EF \left(1 + b_1 \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial u}{\partial x} \right] = q(x) f(t).$$

$$\rho F \ddot{u} - \frac{\partial}{\partial x} \left[EF \frac{\partial u^y}{\partial x} \right] = \rho F \ddot{u}^e \left(\frac{L}{2}, t \right) \delta \left(x - \frac{L}{2} \right).$$

Тут $u^y = u^e = u$. Праву частину рівняння коливань помножено на дельта-функцію, щоб зосереджену змушувальну силу зобразити формально розподіленою і використати описаний вище МГК для розв'язування наведеного рівняння.

1.4.7. Випадкові вимушені поздовжні коливання стержня

Змушувальну довільну силу вважаємо випадковою у часі та детермінованою розподіленою уздовж осі стержня, тобто $q = q(x) f(t)$. Тоді рівняння поздовжніх коливань з урахуванням внутрішнього тертя за гіпотезою Кельвіна–Фойхта матиме вигляд

$$\rho F \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left[EF \left(1 + b_1 \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial u}{\partial x} \right] = q(x) f(t). \quad (1.130)$$

Нехай $f(t)$ – стаціонарна випадкова функція часу, яка має спектральну щільність $S_f(\omega)$. Через короткий проміжок часу після початку коливань перехідний процес унаслідок тертя затухає, і встановлюються вимушені стаціонарні випадкові коливання $u(x,t)$, спектральна щільність і дисперсія яких визначаються за формулами

$$S_u(x, \omega) = |W(x, \omega)|^2 S_f(\omega), \quad (1.131)$$

$$D_u(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |W(x, \omega)|^2 S_f(\omega) d\omega. \quad (1.132)$$

Вираз частотної передатної функції $W(x, \omega)$ визначено формулою (1.123).

Якщо вхід $f(t)$ – нестаціонарний випадковий процес, то вихід – вимушені позовжні коливання – є також нестаціонарним випадковим процесом. Імовірнісні характеристики останнього визначають через імовірнісні характеристики входу за формулами

$$m_u(x, t) = L_t(x) m_f(t); K_n(x, t_1, t_2) = L_{t_1}(x) L_{t_2}(x) K_f(t_1, t_2), \quad (1.133)$$

де m_f, K_f та m_u, K_u – математичне сподівання, кореляційна функція входу f і виходу u .

Оператор $L_t(x)$ перетворення вхідного сигналу $f(t)$ у вихідний $u(x,t)$ за тривіальних початкових умов знайдемо з детермінованого розв'язку, підставляючи в нього $q(x, \tau) = q(x) f(\tau)$:

$$m_u(x, t) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{U_l(x) q_l e^{-h_l t}}{M_l \omega_l} \int_0^t e^{-h_l \tau} f(\tau) \cdot \sin \tilde{\omega}_l(t - \tau) d\tau; \quad (1.134)$$

а потім відкинемо у результаті $f(\tau)$. Використовуючи оператор $L_t(x)$, у формулах (1.133) на звільнене місце ставимо задані ймовірнісні характеристики входу. За формулами (1.133) визначимо:

$$m_u(x, t) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{U_l(x) q_l e^{-h_l t}}{M_l \omega_l} \int_0^t e^{-h_l \tau} f(\tau) \cdot \sin \tilde{\omega}_l(t - \tau) d\tau;$$

$$K_u(x, t_1, t_2) = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{U_l(x) U_s(x) q_l q_s e^{-h_l t_1 - h_s t_2}}{M_l M_s \omega_l \omega_s} \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} e^{-h_l \tau_1 - h_s \tau_2} K_f(\tau_1, \tau_2) \cdot \sin \tilde{\omega}_{bl}(t_2 - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2;$$

$$q = \int_0^L q(x) U_l(x) dx.$$

Дисперсію $D_u(x, t)$ розв'язку знайдемо, поклавши в передостанній формулі $t_1 = t_2 = t$.

1.4.8. Метод початкових параметрів

При поздовжніх коливаннях застосовують метод початкових параметрів, коли стержень східчастого чи постійного перерізу має кілька ділянок, і розглядаються вільні чи вимушені гармонічні коливання далеко від резонансу (якщо тертя не враховується). Алгоритм методу початкових параметрів дає змогу на заданій частоті за відомим вектором стану (переміщення та осьова сила) на початку ділянки визначити вектор стану в кінці ділянки. Розглянемо три варіанти методу [3, 5, 12].

Метод початкових параметрів у глобальній системі координат. Початок координат обираємо загальним (на лівому кінці стержня) для всіх ділянок (глобальна система координат). Враховуємо тільки ті переміщення і зусилля, які розміщені між початком відліку і розглядуваним перерізом. Диференціювання та інтегрування проводиться без розкриття дужок. Додатними вважаються напрямлене в додатний бік осі переміщення і розтягальне зусилля. Межами ділянок є перерізи, на яких прикладено зосереджену силу, задані переміщення, змінюється стрибком площа перерізу тощо (рис. 1.14).

Виразимо сталі A, B рівняння (1.39) форми поздовжніх коливань через початкові параметри – осьове переміщення $U(0)$ та зусилля $N(0)$:

$$U(x) = U(0) \cos kx + \frac{N(0)}{kEF} \sin kx. \quad (1.135)$$

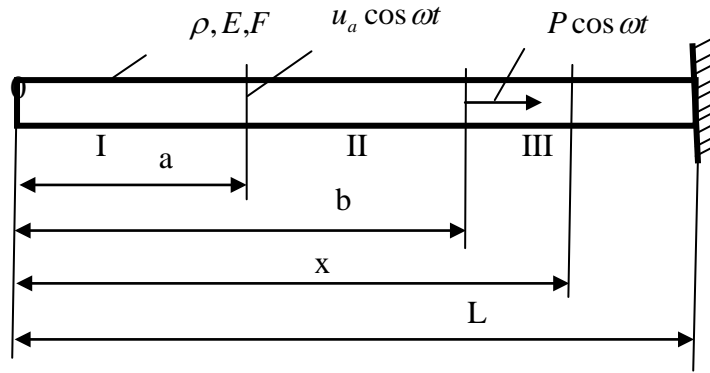


Рис. 1.14. Стержень з кількома ділянками

До цього виразу на ділянці II приєднується доданок від U_a , а на ділянці III – від P . Дістанемо універсальне рівняння амплітудних переміщень на останній ділянці стержня:

$$U(x) = U(0) \cos kx + \frac{N(0)}{kEF} \sin kx \Big|_I + U_a \cos k(x-a) \Big|_{II} - \frac{P}{kEF} \sin k(x-b) \Big|_{III}. \quad (1.136)$$

Продиференціювавши (без розкриття дужок) і помноживши на EF , матимемо друге універсальне рівняння для осьової сили:

$$N(x) = -EFkU(0) \sin kx + N(0) \cos kx \Big|_I - EFkU_a \sin k(x-a) \Big|_{II} - P \cos k(x-b) \Big|_{III}. \quad (1.137)$$

Початкові параметри визначаються із двох граничних умов.

Метод початкових параметрів у формі Коші. Початок координат вибираємо на початку кожної ділянки (локальна система відліку (рис. 1.15 1.16)). Запишемо рівняння для U та N кожної ділянки [5, 12, 14]:

$$\left. \begin{aligned} U_1(x_1) &= U_1(0) \cos kx_1 + \frac{N_1(0)}{kEF_1} \sin kx_1 \\ N_1(x_1) &= -EF_1kU_1(0) \sin kx_1 + N_1(0) \cos kx_1 \end{aligned} \right\}, \quad (1.138)$$

$$\left. \begin{aligned} U_2(x_2) &= U_2(0) \cos kx_2 + \frac{N_2(0)}{kEF_2} \sin kx_2 \\ N_2(x_2) &= EF_2kU_2(0) \sin kx_2 + N_2(0) \cos kx_2 \end{aligned} \right\}. \quad (1.139)$$

До цих рівнянь приєднуємо граничні умови та умови спряження ділянок:

$$U_1 = 0; \quad N_2(L_2) = 0, \quad (1.140)$$

$$U_1(L_1) = U_2(0); \quad EF_1 \frac{dU_1(L_1)}{dx_1} = EF_2 \frac{dU_2(0)}{dx_2}, \quad (1.141)$$

або в матричному вигляді:

$$\begin{Bmatrix} U_2 \\ N_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ N_1 \end{Bmatrix}, \quad -$$

де $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ – матриця переходу.

Трапляються й інші види умов спряження, наприклад для зосереджених на межі ділянок маси чи пружини (рис. 1.15, 1.16):

$$U_2 = U_2; \quad EF_2 U_2^1 - EF_1 U_1^1 = M \omega^2 U_1;$$

$$c(U_2 - U_1) = EF_1 U_1^1 = EF_2 U_2^1.$$

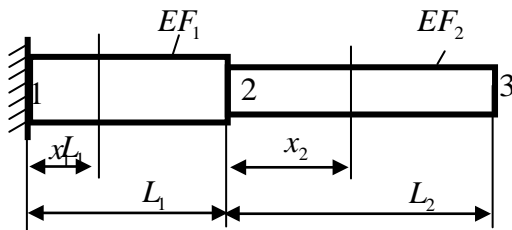


Рис. 1.15. Східчастий стержень на межі ділянок стержня

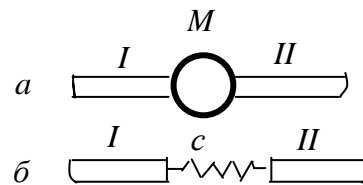


Рис. 1.16. Розміщення маси (а) і пружини (б)

Цим умовам спряження відповідають такі матриці переходу через масу чи пружину (див. наступний розділ):

$$M_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -M\omega^2 & 1 \end{bmatrix}; \quad M_{21} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{c} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Метод початкових параметрів у матричному вигляді (без системи відліку). Запишемо формули (1.138), (1.139) для перерізів, які є межами ділянок (рис. 1.15, точки 1, 2, 3), у вигляді співвідношень між числовими матрицями [12]:

$$\begin{cases} U_2 \\ N_2 \end{cases} = \begin{bmatrix} \cos kL_1 & \frac{1}{EF_1 k} \sin kL_1 \\ -EF_1 k \sin kL_1 & \cos kL_1 \end{bmatrix} \begin{cases} U_1 \\ N_1 \end{cases} \\ \begin{cases} U_3 \\ N_3 \end{cases} = \begin{bmatrix} \cos kL_2 & \frac{1}{EF_1 k} \sin kL_2 \\ -EF_2 k \sin kL_2 & \cos kL_2 \end{bmatrix} \begin{cases} U_2 \\ N_2 \end{cases} \end{matrix} \quad (1.142)$$

Позначимо вектор стану x_i , матрицю переходу (передатна матриця) M_{jk} і запишемо формули (1.143) у вигляді

$$X_2 = M_{21}X_1; \quad X_3 = M_{32}X_2; \quad X_3 = M_{32}M_{21}X_1. \quad (1.143)$$

Отже, перехід від перерізу до перерізу здійснюється множенням матриці переходу на вектор стану. Весь перехід від лівого до крайнього правого перерізу зображують добутком усіх передатних матриць на початкове значення вектора стану. При вільних коливаннях початковий вектор стану відомий з точністю до множника. Переваги методу початкових параметрів у матричному вигляді виявляються у випадку великої кількості ділянок стержня.

Приклад 1.5. Визначити власні частоти поздовжніх коливань східчастого стержня (див. рис. 1.15).

Розв'язання. Головні вільні коливання стержня, частоти яких потрібно знайти, є гармонічними. Тому можна скористатися методом початкових параметрів, наприклад у матричному вигляді. Вектори стану в перерізах 1 та 3 з урахуванням граничних умов ($U_1 = 0; N_3 = 0$) матимуть вигляд

$$X_1 = \begin{Bmatrix} 0 \\ N_{10} \end{Bmatrix}; \quad X_3 = \begin{Bmatrix} U_3 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (1.144)$$

де N_{10} – задане початковою умовою значення сили в перерізі $x = 0$. Воно може бути довільним $N_{10} = 1$, якщо початкові умови не задано. Підставимо (1.145) у (1.144) і знайдемо:

$$\begin{bmatrix} \cos kL_1 & \frac{1}{EF_1k} \sin kL_1 \\ -EF_1k \sin kL_1 & \cos kL_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos kL_1 & \frac{1}{EF_1k} \sin kL_1 \\ -EF_1k \sin kL_1 & \cos kL_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} U_3 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Перемноживши матриці, матимемо два рівняння: одне для U_3 , друге (вікове) – для k . Останнє має вигляд

$$\operatorname{tg}kL_1 \operatorname{tg}kL_2 = \frac{F_1}{F_2}. \quad (1.145)$$

Визначивши звідси хвильові числа k , частоти обчислимо за формулою (1.38).

Розв'язуючи задачі про вимушені гармонічні коливання, використовують також матричні співвідношення, але в них частота ω і хвильове число k уже задані. Крім того, відома амплітуда силового $N_3 = P$, чи кінематичного $U_3 = B$ збудження. Потрібно визначити амплітуди всіх інших переміщень і зусиль. У резонансному випадку слід додатково враховувати частотонезалежне чи частотозалежне внутрішнє тертя, замінюючи модуль пружності на відповідні комплексні вирази $E(1 + \alpha_1 i)$ або $E(1 + b_1 \omega i)$.

З отриманих комплекснозначних матричних співвідношень визначимо комплексні амплітуди сил і переміщень – компоненти вектора стану. З останніх знаходимо дійсні амплітуди коливань і фази коливань.

1.5. Крутильні коливання стержнів

Виведення диференціального рівняння крутильних коливань круглого стержня змінного перерізу з прямою віссю. У круглому стержні центр ваги будь-якого перерізу збігається із центром згину і тому можливі суто крутильні коливання стержня. Вважаємо справедливою гіпотезу плоских перерізів. Виникають лише дотичні напруження $\tau_{12} = \tau_{21}$; $\tau_{13} = \tau_{31}$, рівнодійна яких напрямлена перпендикулярно до діаметра перерізу. Задача є геометрично і фізично лінійною (рис. 1.17, 1.18).

Сформульовані припущення дають можливість описати процес крутильних коливань однією одновимірною функцією $\varphi(x, t)$ – кутом кручення [7, 12, 14].

Відносна деформація – кут зсуву

$$\gamma = r \frac{\partial \varphi}{\partial x},$$

де r – відстань від осі кручення до точки перерізу стержня, що розглядається.

Цій деформації за законом Гука, гіпотезою Кельвіна–Фойхта чи гіпотезою Сорокіна відповідають напруження

$$\tau = G\gamma = Gr \frac{\partial \varphi}{\partial x}; \quad \tau = G(1 + b_1)r \frac{\partial \varphi}{\partial x}; \quad \tau = G(1 + \alpha_{1i})r \frac{\partial \varphi}{\partial x};$$

крутні моменти в поперечному перерізі (рис. 1.18):

$$M_{kp.} = \iint_{(F)} \tau r dF = G \frac{\partial \varphi}{\partial x} \iint_{(F)} \tau^2 dF = Gr_p \frac{\partial \varphi}{\partial x};$$

$$M_{kp} = GJ_p \left(1 + b_1 \frac{\partial}{\partial t}\right) r \frac{\partial \varphi}{\partial x};$$

$$M_{kp} = GJ_p (1 + \alpha_{1i}) r \frac{\partial \varphi}{\partial x}. \quad (1.146)$$

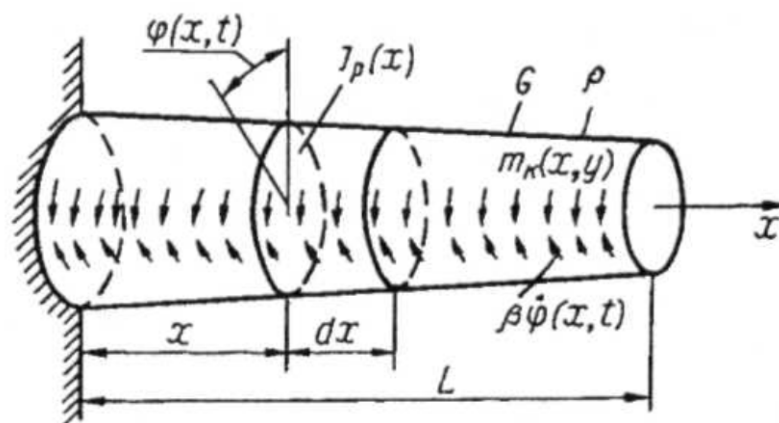


Рис. 1.17. Розрахункова схема стержня при крутильних коливаннях

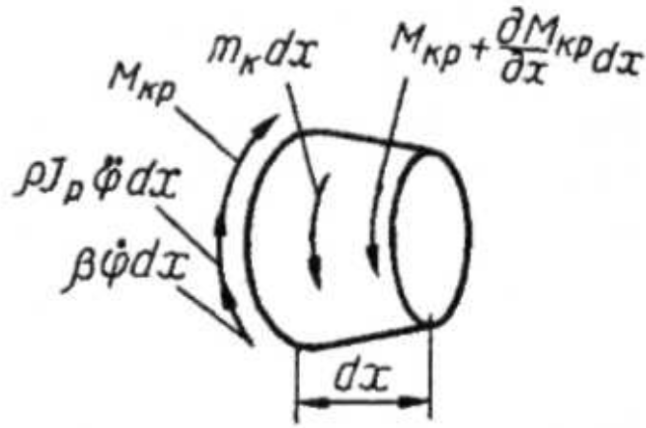


Рис. 1.18. Схема крутильних зусиль

Додаючи за принципом Д'Аламбера до зусиль, що діють на елемент dx коливального стержня, сили інерції $\rho J_p \ddot{\varphi} dx$ та сили в'язкого тертя середовища $b_2 \rho J_p \dot{\varphi} dx$, матимемо умову динамічної рівноваги елемента (рис. 1.18):

$$M_{kp} = GJ_p \dot{\varphi} dx + b_2 J_p \dot{\varphi} = M_{kp} + \frac{\partial M_{kp}}{\partial x} dx + m_k(x, t) dx.$$

Підставляючи сюди (1.146), дістанемо рівняння вимушених крутильних коливань відповідно пружного, в'язкопружного і недосконало пружного стержня круглого змінного перерізу з урахуванням зовнішнього в'язкого тертя [5, 12]:

$$\rho J_p \ddot{\varphi} + \rho J_p b_2 \dot{\varphi} dx - \frac{\partial}{\partial x} \left(GJ_p \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) = m_k(x, t); \quad (1.147)$$

$$\rho J_p \ddot{\varphi} + \rho J_p b_2 \dot{\varphi} - \frac{\partial}{\partial x} \left[GJ_p \left(1 + b_1 \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right] = m_k(x, t) dx; \quad (1.148)$$

$$\rho J_p \ddot{\varphi} + \rho J_p b_2 \dot{\varphi} - \frac{\partial}{\partial x} \left[GJ_p (1 + \alpha_1 i) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right] = m_k(x, t) dx, \quad (1.149)$$

де G – модуль зсуву; J_p – полярний момент інерції перерізу стержня; i – уявна одиниця; $m_k(x, t)$ – інтенсивність зовнішнього моментного навантаження.

Вивчаючи нестационарні коливання (вільні, випадкові, перехідні тощо), замість оператора i слід застосовувати оператор Бока–Шліппе–Колара $[\omega]^{-2} \frac{\partial}{\partial t}$.

З порівняння виразів (1.147) – (1.149) та (1.15) – (1.17) бачимо, що вони відрізняються лише позначеннями, і задача про крутильні коливання математично тотожна задачі про поздовжні коливання стержня. Усі інші результати для крутильних коливань будуть аналогічними результатам для поздовжніх коливань.

1.6. Поперечні коливання струни

Виведення диференціального рівняння поперечних коливань струни. Струна – це тонке пружне одновимірне тіло з незначною жорсткістю на згинання і стискання (рис. 1.19, 1.20), якою можна знехтувати. Натяг струни $T(x)$ вважаємо незалежним від часу при її поперечних коливаннях $v = v(x, t)$. Інтенсивність поперечного навантаження позначимо $c(x)$, інтенсивність сили опору середовища – $b_2 \rho F \dot{v}$. Задачу розглядаємо в геометрично лінійній побудові, коли

$$\cos \alpha = 1, \quad \sin \alpha = \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Спроекціюємо на вісь v сили, що діють на елемент dx струни при її коливаннях, а також Д'Аламберові сили інерції $\rho F \ddot{v} dx$ (рис. 1.19, б) та сили тертя:

$$(-\rho F \ddot{v} - b_2 \rho F \dot{v} - q) dx \cos \alpha - T \sin \alpha + \left(T + \frac{\partial T}{\partial x} dx \right) \sin \left(\alpha + \frac{\partial \alpha}{\partial x} dx \right) = 0.$$

Нехтуючи малими величинами другого порядку і враховуючи [12]

$$\frac{\partial T}{\partial x} \alpha + T \frac{\partial \alpha}{\partial x} (T \alpha), \quad \alpha = \frac{\partial v}{\partial x},$$

матимемо

$$\rho F \ddot{v} + b_2 \rho F \dot{v} - \frac{\partial}{\partial x} \left(T \frac{\partial v}{\partial x} \right) = q(x, t) \quad (1.150)$$

рівняння поперечних коливань ідеально пружної струни з урахуванням зовнішнього в'язкого тертя (рис. 1.20). До рівняння (1.150) приєднуємо дві граничні та дві початкові умови.

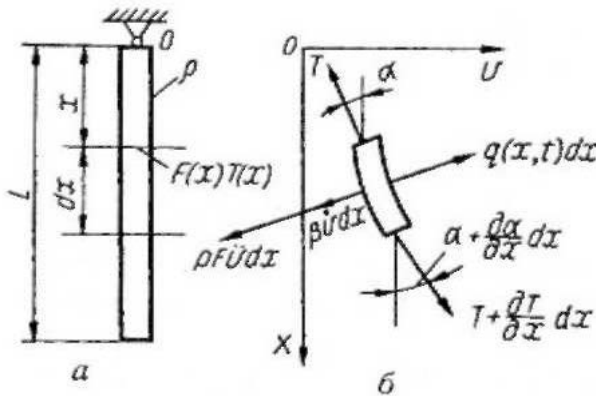


Рис. 1.19. Закріплена одним кінцем струна (а) і схема зусиль (б), які діють на її елемент при поперечних коливаннях

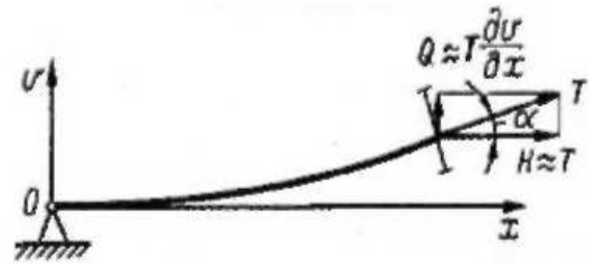


Рис. 1.20. Схема внутрішніх зусиль у перерізі струни

Однорідні граничні умови: на вільному кінці поперечна сила дорівнює нулю $Q = T \frac{\partial v}{\partial x} = 0$, а на закріпленому кінці поперечне переміщення ax дорівнює нулю $V = 0$ (рис. 1.19).

Якщо на кінці прикладено зосереджену масу M або зосереджену пружину з коефіцієнтом жорсткості c (пружне закріплення), то граничні умови неоднорідні:

$$T \frac{\partial v}{\partial x} = \pm M \ddot{v}, \quad T \frac{\partial v}{\partial x} = \pm c v. \quad (1.151)$$

Внутрішнє в'язке або частотонезалежне тертя у струні враховуємо за принципом відповідності рівнянь, помноживши натяг струни (що спричинив пружні сили) на оператори $\left(1 + b_1 \frac{\partial}{\partial t}\right)$, $\left(1 + \alpha_1 [\omega]^{-1} \frac{\partial}{\partial t}\right)$.

Отже, рівняння поперечних коливань струни за виглядом подібні до рівнянь поздовжніх коливань стержня. У випадку підвішеної струни натяг від власної ваги $T(x) = \rho g(L - x)$.

Вільні коливання струни без урахування тертя. Для струни змінного перерізу рівняння таких коливань має вигляд

$$\rho F \ddot{v} - \frac{\partial}{\partial x} \left(T \frac{\partial v}{\partial x} \right) = 0. \quad (1.152)$$

Шукаючи розв'язок за методом Фур'є:

$$v(x, t) = V(x) \cos \omega t,$$

приходимо до звичайного рівняння для власних форм коливань:

$$\frac{d}{dx} \left(T \frac{dV}{dx} \right) + \rho F \omega^2 V = 0.$$

Якщо струна однорідна і має постійні перерізи, то рівняння вільних коливань набуває вигляду хвильового рівняння

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0,$$

де $c_0^2 = \frac{T_0}{\rho F}$; c_0 – фазова швидкість.

Відповідне рівняння для власних форм коливань

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{\omega^2}{c_0^2} V = 0; \quad k^2 = \frac{\omega^2}{c_0^2}$$

має розв'язок. За граничних умов $V(0) = V(L) = 0$ він дає такі формули для форми коливань і частоти:

$$V_2(x) = \sin k_1 x; \quad \omega_1^2 = k_1^2 \frac{T}{\rho F}; \quad k_1 = \frac{l\pi}{L}.$$

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

- 1.1. Сформулюйте класифікацію систем з розподіленими параметрами.
- 1.2. Продемонструйте виведення диференціального рівняння поздовжніх коливань стержня.
- 1.3. Подайте диференціальне рівняння поздовжніх коливань стержня в операторному вигляді.
- 1.4. Які властивості операторів рівняння вільних поздовжніх коливань стержня?
- 1.5. Які властивості власних частот і власних форм поздовжніх коливань стержня?
- 1.6. Продемонструйте розв'язок хвильового рівняння у випадку, коли обидва кінці стержня закріплені.
- 1.7. Продемонструйте розв'язок хвильового рівняння у випадку, коли один кінець стержня закріплений, а другий вільний.
- 1.8. Запишіть неоднорідні граничні умови при поздовжніх коливаннях стержня.
- 1.9. Наведіть розв'язок хвильового рівняння методом Д'Аламбера.
- 1.10. Дайте визначення синусоїдальної хвилі. Що таке довжина хвилі? Яка її залежність від хвильового числа?
- 1.11. Дайте визначення вільних поздовжніх коливань з урахуванням в'язкого тертя.
- 1.12. Дайте визначення вимушених поздовжніх коливань ідеально пружного стержня.
- 1.13. Поясніть кінематичне збудження поздовжніх коливань стержня.
- 1.14. Як застосовувати метод початкових параметрів для визначення поздовжніх коливань у глобальній системі координат?
- 1.15. Виведіть диференціальне рівняння поперечних коливань струни.

Розділ 2

ЗГИННІ КОЛИВАННЯ

2.1. Згинні коливання прямих стержнів

2.1.1. Виведення диференціального рівняння

згинних коливань стержня з урахуванням поздовжньої сили

Припустимо, що поперечні перерізи при згинних коливаннях балки залишаються плоскими і перпендикулярними до нерозтягнутої осі (гіпотеза плоских перерізів). Напружено-деформований стан вважаємо одновісним – враховуємо тільки напруження σ_{11} . Задачу вважаємо лінійною фізично і геометрично. Знехтуємо сили інерції, що виникають при повороті, та зсувом перерізів.

Наведені припущення дають можливість описати процес згинних коливань балки однією функцією прогинів (поперечних переміщень осі відносно положення статичної рівноваги):

$$w = w(x, t).$$

На балку діють зовнішні розподілені навантаження, довільна з часом (рис. 2.1) поперечна $q(x, t)$ та осьова, що є незмінною в часі силою.

Розглянемо умови динамічної рівноваги елемента dx коливної балки у момент його прискореного переміщення вгору від положення статичної рівноваги, враховуючи разом з реальними силами й Д'Аламберові сили інерції $\rho F \ddot{w} dx$ поперечного переміщення елемента, а також зовнішнє в'язке тертя $b_2 \rho F \dot{w} dx$:

$$\sum w = 0; \quad \sum M_0 = 0; \quad \sum x = 0.$$

Останнє рівняння з точністю до нескінченно малих першого порядку перетворюється на тотожність, а перші два (рис. 2.1) матимуть вигляд

$$Q + (q - \rho F \ddot{w} - b_2 F \ddot{w}) dx - Q - \frac{\partial Q}{\partial x} dx +$$

$$+ q_1 dx (\alpha + \dots) - N \alpha + \left(N + \frac{\partial N}{\partial x} dx \right) \left(\alpha + \frac{\partial \alpha}{\partial x} dx \right) = 0; \quad (2.1)$$

$$M + Q dx + (q dx - \rho F \ddot{w} dx) \frac{dx}{2} - M - \frac{\partial M}{\partial x} dx = 0, \quad (2.2)$$

якщо вважати $\sin \alpha = \alpha$, $\cos \alpha = 1$. Записавши останні два доданки в першому рівнянні наближено у вигляді $\frac{\partial}{\partial x} (Na) dx$, дістанемо диференціальні залежності при прогині балки (нехтуючи $q_1 \alpha dx$ та іншими членами другого порядку малості):

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = q - \rho F \ddot{w} - b_2 \rho F \ddot{w} + \frac{\partial}{\partial x} (Na) dx; \quad \frac{\partial M}{\partial x} = Q, \quad (2.3)$$

з урахуванням додатної поздовжньої сили $N(x)$. Зусилля N , Q , M для визначеності вибрані додатними за правилом знаків, що прийняте в курсі опору матеріалів.

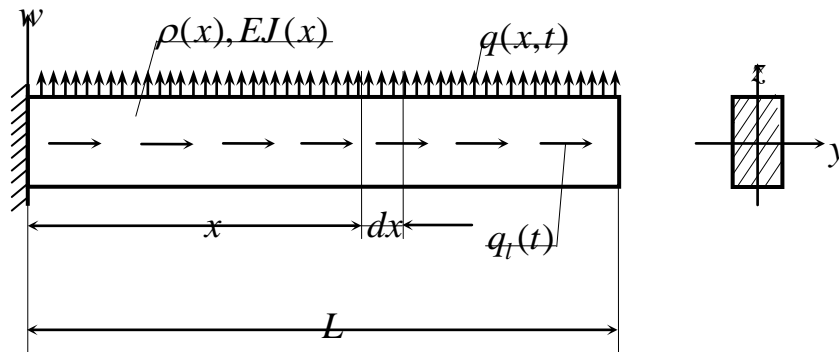


Рис. 2.1. Схема зовнішніх сил, які діють на балку

Підставляючи друге рівняння (2.3) у перше, знайдемо третю диференціальну залежність:

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} = q - \rho F \ddot{w} - b_2 \rho F \ddot{w} + \frac{\partial}{\partial x} (Na). \quad (2.4)$$

Враховуючи, що кривизна зігнутої осі балки в лінійному наближенні

$$\chi = \frac{1}{R} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2},$$

знаходимо відносне подовження волокна, розміщеного на відстані від нейтральної осі перерізу:

$$\varepsilon = \chi z = \frac{z}{R} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} z.$$

Цій деформації за законом Гука, гіпотезами Кельвіна–Фойхта або Бока–Шліппе–Колара відповідає напруження

$$\begin{aligned} \sigma &= E\varepsilon = E \frac{z}{R} = E \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} z; \quad \sigma = E \left(1 + b_1 \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} z; \\ \sigma &= E \left(1 + a_1 [\omega]^{-1} \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} z, \end{aligned} \quad (2.5)$$

та згинні моменти $M(x) = \iint_{(F)} \sigma z dF$ у поперечному перерізі x :

$$M(x) = EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \quad (2.6)$$

де $I = \iint_{(F)} z^2 dF$ – осьовий момент інерції перерізу балки.

Підставляючи (2.6) в (2.4), дістанемо диференціальне рівняння вимушених поперечних коливань відповідно пружної, в'язкопружної та недосконало пружної балки з урахуванням зовнішнього в'язкого тертя і поздовжнього зусилля (рис. 2.2) [5, 7, 12]:

$$\rho F \ddot{w} - b_2 \rho F \dot{w} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left(N \frac{\partial w}{\partial x} \right) = q(x, t); \quad (2.7)$$

$$\rho F \ddot{w} - b_2 \rho F \dot{w} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EI \left(1 + b_1 \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] - \frac{\partial}{\partial t} \left(N \frac{\partial w}{\partial x} \right) = q(x, t); \quad (2.8)$$

$$\rho F \ddot{w} - b_2 \rho F \dot{w} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EI \left(1 + \alpha_1 [\omega]^{-1} \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] - \frac{\partial}{\partial t} \left(N \frac{\partial w}{\partial x} \right) = q(x, t). \quad (2.9)$$

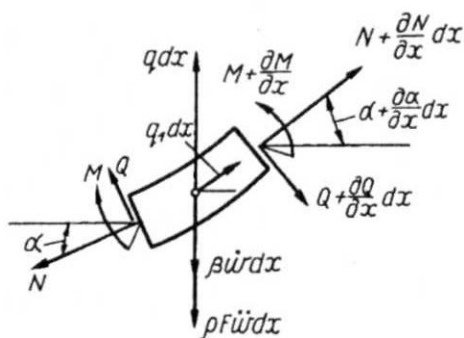


Рис. 2.2. Схема діючих на елемент балки зусиль при її коливаннях

У рівняннях (2.7) – (2.9) враховано $\alpha = \frac{\partial w}{\partial x}$. Ці рівняння справедливі для

довгих балок, коли довжина хвилі деформації значно більша за розміри поперечного перерізу балки, тобто для малих частот коливань.

У згадані рівняння входить тільки розподілене довільне в часі навантаження. Якщо ж сила зосереджена або стала в часі, то її можна звести до розподіленої за допомогою дельта-функції і до змінної за допомогою одиничної функції часу:

$$q(x, t) = P(t)\delta(x - x_0),$$

де x_0 – абсциса перерізу, до якого прикладена відповідна сила.

2.1.2. Граничні й початкові умови

Вважаючи, що в (2.7) $q = N = b_2 = 0$, дістанемо рівняння вільних коливань пружної балки без урахування тертя [5, 12]:

$$\rho F \ddot{w} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = 0. \quad (2.10)$$

До рівняння приєднаємо чотири граничні умови (по дві на кожному кінці) і дві початкові умови. Тоді загальні початкові умови

$$w(x, 0) = f(x); \quad \dot{w}(x, 0) = g(x). \quad (2.11)$$

Для рівняння (2.10) формулюються чотири види однорідних граничних умов:

1) на вільному кінці дорівнюють нулю згинний момент і поперечна сила (рис. 2.3, а):

$$M = EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0; \quad Q = \frac{\partial}{\partial x} \left(EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = 0; \quad (2.12)$$

2) у жорсткому закріпленні дорівнюють нулю прогин і кут повороту кінця (рис. 2.3, б):

$$w = 0; \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0; \quad (2.13)$$

3) у шарнірній опорі дорівнюють нулю прогин і згинний момент (рис. 2.3, в):

$$w = 0; \quad M = EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0; \quad (2.14)$$

4) у плаваючому закріпленні (напрямлений край) дорівнюють нулю кут повороту перерізу і поперечна сила (рис. 2.3, г):

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0; \quad Q = \frac{\partial}{\partial x} \left(EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = 0. \quad (2.15)$$

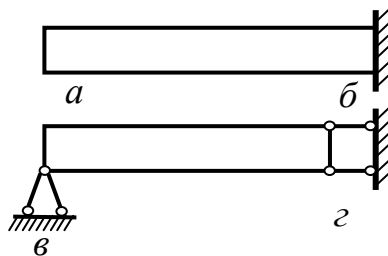


Рис. 2.3. Види закріплення кінців балки: *a* – вільний кінець; *б* – жорстке закріплення; *в* – шарнірна опора; *г* – плаваюче закріплення

За наявності поздовжніх зусиль рівняння вільних коливань балки постійного перерізу має вигляд

$$\rho F \ddot{w} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left(N \frac{\partial w}{\partial x} \right) = 0. \quad (2.16)$$

Для рівняння (2.16) граничні умови не відрізняються від наведених вище, за винятком умови для поперечної сили

$$Q = \frac{\partial}{\partial x} \left(EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + N \frac{\partial w}{\partial x} = 0. \quad (2.17)$$

Якщо переміщення w або кут повороту $\frac{\partial w}{\partial x}$, згинний момент M або поперечна сила Q не дорівнюють нулю на кінці балки, то граничні умови стають неоднорідними. Задача з неоднорідними кінематичними умовами зводиться до кінематичного збудження вимушених коливань за однорідних граничних умов. Випадки, коли на кінці прикладені зосереджена зовнішня сила чи момент, зводяться також до вимушених коливань через вплив силового збудження за однорідних граничних умов.

Не зводяться до однорідних неоднорідні граничні умови, які виникають при врахуванні пружності закріпленого кінця (зосереджена пружина) або сил інерції зосередженої на кінці маси (рис. 2.4, *a*, *б*):

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = \pm M_0 \ddot{w}_0; \quad EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \pm I_M \frac{\partial^3 w}{\partial t^2 \partial x};$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = \pm M_0 \ddot{w}_0; \quad EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0.$$



Рис. 2.4. Кінці балки із зосередженими масами і моментами інерції мас (*a*) і кінці із зосередженими масами (*б*)

При головних коливаннях $w_l = a_l W_l \cos(\omega_l t - \varphi_l)$ ці неоднорідні умови матимуть вигляд

$$\frac{d}{dx} \left(EI \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right) = \pm M_0 \omega_l^2 W_l; \quad EI \frac{d^2 W}{dx^2} = \pm J_M \omega_l^2 \frac{dW_l}{dx}; \quad (2.18)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(EI \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right) = \pm M_0 \omega_l^2 W_l; \quad EI \frac{d^2 W_l}{dx^2} = 0, \quad (2.19)$$

де M_0 , J_M – маса і момент інерції маси; верхній знак береться для лівого кінця, нижній – для правого (за правилами, що прийняті в курсі опору матеріалів).

2.1.3. Вільні поперечні коливання балки змінного перерізу

Рівняння (2.10) вільних коливань балки можна записати в операторному вигляді [3, 5, 12]:

$$A\ddot{w} + Cw = 0, \quad (2.20)$$

де A – додатно визначений інерційний оператор; C – неперервний пружний.

Розв'язок цього рівняння шукаємо за методом Фур'є у вигляді суперпозиції головних коливань:

$$w(x, t) = \sum_{l=1}^{\infty} W_l(x) a_l \cos(\omega_l t - \varphi_l) = \sum_{l=1}^{\infty} W_l(x) N_l \cos(\omega_l t + Q_l \sin \omega_l t) = \sum_{l=1}^{\infty} W_l(x) \eta_l(t), \quad (2.21)$$

де $N_l = a_l \cos \varphi_l$; $Q_l = a_l \sin \varphi_l$; $a_l^2 = N_l^2 + Q_l^2$; $\operatorname{tg} \varphi_l = \frac{Q_l}{N_l}$.

Підстановка (2.21) у (2.20) дає зліченну множину звичайних диференціальних рівнянь для власних форм коливань – амплітудних функцій:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(EI \frac{d^2 W_l}{dx^2} \right) - \rho F \omega_l^2 W_l = 0. \quad (2.22)$$

Точний розв'язок цього рівняння за заданих граничних умов можливий у бесселевих функціях для пірамідальної, конусної, клинуватої балок, у тригонометричних і гіперболічних функціях – для балки постійного перерізу, а в загальному випадку використовують наближені методи.

Незважаючи на відсутність точного аналітичного розв'язку рівняння (2.22) у загальному випадку, доведено, що:

1) існує нескінченний дискретний спектр власних частот, якому відповідає нескінченна множина власних форм поперечних коливань балки:

$$\omega_1 \leq \omega_2 \dots; \quad W_1(x), W_2(x), \dots;$$

2) власні частоти дійсні й додатні, якщо $A > 0$, $C > 0$, а $C^{-1} \sim$ цілком неперервний оператор;

3) власні форми коливань попарно ортогональні відносно кінетичної та потенціальної енергії;

4) власні форми коливань утворюють базис у просторі D – чотири рази диференційовних і інтегровних функцій, які задовольняють граничні умови.

Доведемо, наприклад, третє твердження, записуючи для балки вирази для кінетичної і потенціальної енергії при її згинних коливаннях:

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L \rho F [\dot{w}(x,t)]^2 dx + \frac{1}{2} M_0 [\dot{w}(x,t)]^2;$$

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^L EI [w''(x,t)]^2 + \frac{1}{2} c_1 [w(0,t)]^2 + \frac{1}{2} c_2 [w'(0,t)]^2.$$

Підставивши сюди рівняння (9.168), матимемо [7, 12]:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} M_{is} \dot{\eta}_l \dot{\eta}_s; \quad \Pi = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} K_{is} \eta_l \eta_s, \quad (2.23)$$

де

$$M_{is} = \int_0^L \rho F W_l(x) W_s(x) dx + M_0 W_l(L) W_s(L); \quad (2.24)$$

$$K_{is} = \int_0^L EI W_l''(x) W_s''(x) dx + c_1 W_l(0) W_s(0) + c_2 W_l'(0) W_s'. \quad (2.25)$$

Тут c_1 та c_2 – коефіцієнти лінійної та кутової жорсткості (пружності) закріпленого перерізу; M_0 – зосереджена маса. Це відповідає неоднорідним граничним умовам.

Відомо, що координати η_l є головними, якщо T й Π мають канонічний вигляд, а це можливо тоді і тільки тоді, коли побічні коефіцієнти відповідних матриць дорівнюють нулю, а діагональні йому не дорівнюють:

$$M_{is} = \begin{cases} 0 & \text{при } s \neq l \\ M_l & \text{при } s = l \end{cases}; \quad K_{is} = \begin{cases} 0 & \text{при } s \neq l \\ K_l & \text{при } s = l \end{cases},$$

що з урахуванням (2.24), (2.25) дає умови ортогональності відносно кінетичної та потенціальної енергій, а також формули зведення до головних коефіцієнтів інерції і жорсткості за неоднорідних граничних умов:

$$\int_0^L \rho F W_l W_s dx + M_0 W_l(L) W_s(L) = \begin{cases} 0 & \text{при } s \neq l \\ M_l & \text{при } s = l \end{cases}; \quad (2.26)$$

$$\int_0^L EI \frac{d^2 W_l}{dx^2} \frac{d^2 W_s}{dx^2} dx + c_1 W_l(0) W_s(0) + c_2 \frac{d^2 W_l}{dx^2} \frac{d^2 W_s}{dx^2} = \begin{cases} 0 & \text{при } s \neq l \\ K_l & \text{при } s = l \end{cases}. \quad (2.27)$$

За однорідних граничних умов у формулах (2.26), (2.27), вважаючи $M_0 = c_1 = c_2 = 0$, дістанемо:

$$\int_0^L \rho F W_l W_s (dx) = \begin{cases} 0 & \text{при } s \neq l \\ M_l & \text{при } s = l \end{cases}; \quad (2.28)$$

$$\int_0^L EI \frac{d^2 W_l}{dx^2} \frac{d^2 W_s}{dx^2} (dx) = \begin{cases} 0 & \text{при } s \neq l \\ K_l & \text{при } s = l \end{cases}.$$

Можна показати, що вираз $\int_0^L \frac{d^2}{dx^2} \left(EI \frac{d^2 W_l}{dx^2} \right) W_s dx$ за однорідних граничних умов дорівнює лівій частині другої формули (2.28), якщо двічі інтегрувати згаданий вираз частинами.

2.1.4. Вільні поперечні коливання пружного призматичного стержня

В окремому випадку призматичного стержня згинна жорсткість EI та площа поперечного перерізу F залишаються незмінними по всій довжині й рівняння поперечних коливань (2.10) набуває вигляду

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\rho F \partial^2 w}{EI \partial t^2} = 0. \quad (2.29)$$

Знаходимо розв'язок у вигляді (2.21) і дістанемо для власних форм коливань зліченну множину звичайних диференціальних рівнянь:

$$\frac{d^4 W}{dx^4} - k_l^4 W_l = 0; \quad (2.30)$$

$$k_l^4 = \frac{\rho F}{EI} \omega_l^2. \quad (2.31)$$

Частинними розв'язками рівняння (2.30) будуть чотири вирази $e^{\pm ikx}$, $e^{\pm kx}$, які за допомогою формул Ейлера перетворюються на функції $\sin kx$, $\cos kx$, $shkx$, $chkx$. Суперпозиція останніх дає такий загальний розв'язок l -го рівняння (2.30):

$$W_l = A_l \sin k_l x + B_l \cos k_l x + C_l shk_l x + D_l chk_l x. \quad (2.32)$$

Підставляючи в (2.32) граничні умови, матимемо систему чотирьох лінійних однорідних алгебричних рівнянь відносно сталих A_l , B_l , C_l , D_l .

Для знаходження нетривіального розв'язку згаданої системи рівнянь прирівняємо до нуля детермінант, що дає вікове рівняння. З вікового рівняння знаходимо зліченну множину характеристичних чисел, які пов'язані із власними частотами формулою (2.31). Спектр власних частот (характеристичних чисел) є внутрішньою інваріантною характеристикою коливальної системи. Оскільки детермінант дорівнює нулю, то з чотирьох рівнянь для сталих будуть незалежними лише три. Тому можна знайти значення трьох сталих, а значення четвертої вибирається довільно.

Умови (2.28) у випадку призматичного стержня спрощуються [5, 7, 12]:

$$\begin{aligned} \rho F \int_0^L W_l W_s (dx) &= \begin{cases} 0 \text{ при } s \neq l \\ M_l \text{ при } s = l \end{cases}; \\ EI \int_0^L \frac{d^2 W_l}{dx^2} \frac{d^2 W_s}{dx^2} (dx) &= \begin{cases} 0 \text{ при } s \neq l \\ K_l \text{ при } s = l \end{cases}. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Сталість ρF та EI дозволяють останні умови ортогональності записати у чистому вигляді.

Приклад 2.1. Обчислити для простої балки (рис. 2.5) власні форми коливань (балкові функції).

Розв'язання. Підставляючи у граничні умови задачі

$$W_l(0) = W_l'' = W_l(L) = W_l''(L) = 0$$

загальний розв'язок (2.32), матимемо систему рівнянь для визначення сталих A_l, B_l, C_l, D_l :

$$0 + B_l + 0 + D_l = 0;$$

$$0 - B_l + 0 - D_l = 0;$$

$$A_l \sin k_l L + B_l \cos k_l L + C_l \operatorname{sh} k_l L + D_l \operatorname{ch} k_l L = 0;$$

$$-A_l \sin k_l L - B_l \cos k_l L + C_l \operatorname{sh} k_l L + D_l \operatorname{ch} k_l L = 0.$$

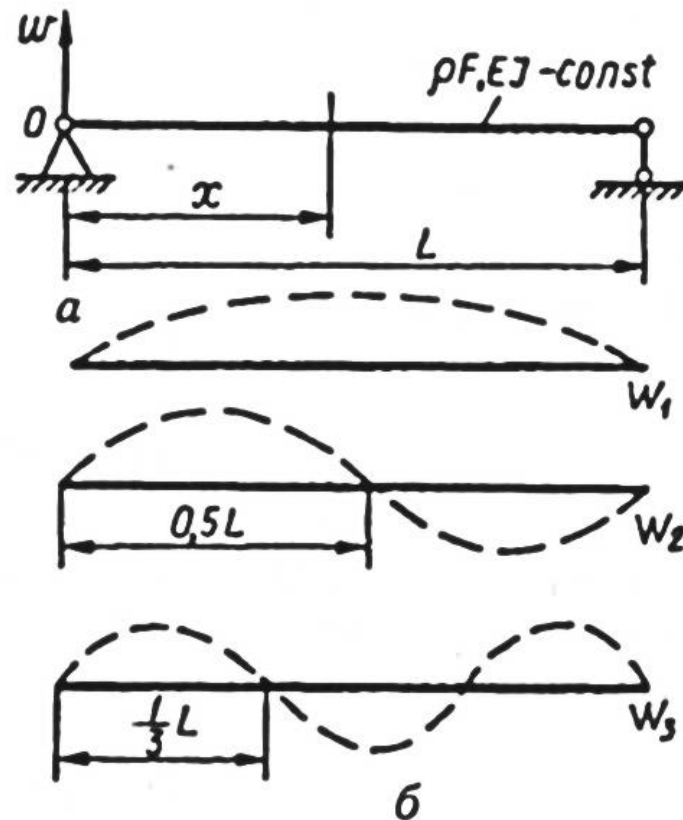


Рис. 2.5. Проста призматична балка (а) і перші власні форми її згинних коливань (б)

Прирівнюючи до нуля детермінант системи цих рівнянь, дістанемо вікове рівняння

$$\sin k_l L = 0,$$

а із системи знаходимо $B_l = C_l = D_l = 0$ й довільно вибираємо $A_l = 1$. Тоді рівняння власної форми коливань набуває остаточного вигляду:

$$W_l = \sin k_l x,$$

а корені вікового рівняння

$$k_l L = 0, \pi, 2\pi, \dots, l\pi.$$

Перший корінь відкидаємо, тому що за $k = 0$ немає коливань. Крім того, неможливий і рух балки як твердого тіла завдяки наявності закріплень її кінців. Згідно з формулою (2.31) визначаємо власні кутові частоти:

$$\omega_l = k_l^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho F}} = \left(\frac{l\pi}{L}\right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho F}}.$$

Перші три форми коливань показано на рис. 2.5. Кількість пучностей дорівнює номеру форми коливань N , а кількість вузлів на одиницю менше (не враховуються закріплення кінців).

Метод функцій Крилова. Загальний розв'язок l -го рівняння (2.30) часто подають в іншому вигляді (індекс l для скорочення запису опускаємо):

$$W(kx) = C_1 K_1(kx) + C_2 K_2(kx) + C_3 K_3(kx) + C_4 K_4(kx), \quad (2.34)$$

де $K_1 = S$, $K_2 = T$, $K_3 = U$, $K_4 = V$ – функції Крилова, що є такими комбінаціями частинних розв'язків:

$$K_{1,3} = \frac{ch kx \pm \cos kx}{2}; \quad K_{2,4} = \frac{sh kx \pm \sin kx}{2}.$$

Функції Крилова мають дві чудові властивості:

1) $K_1(0) = 1$; $K_2(0) = K_3(0) = K_4(0) = 0$; за $x = 0$;

2) при послідовному диференціюванні (за x або kx) до четвертого порядку включно функції переходять одна в одну зі зменшення номера функції на одиницю (колова заміна індексів за циклом $4 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 4$).

Ці властивості приводять до того, що функції Крилова разом із трьома послідовними похідними за kx створюють фундаментальну матрицю розв'язків рівняння (2.30), яку називають *матрицею Коші*. При $x = 0$ ця матриця перетворюється на одиничну.

Справді, обчислимо три послідовні похідні від форми коливань (2.34) за kx [12]:

$$\begin{aligned}\frac{dW}{d(kx)} &= W' = C_1 K_4 + C_2 K_1 + C_3 K_2 + C_4 K_3 = \frac{1}{k} \frac{dW}{dx}; \\ \frac{d^2 W}{d(kx)^2} &= W'' = C_1 K_3 + C_2 K_4 + C_3 K_1 + C_4 K_2 = \frac{1}{k^2} \frac{d^2 W}{dx^2}; \\ \frac{d^3 W}{d(kx)^3} &= W''' = C_1 K_2 + C_2 K_3 + C_3 K_4 + C_4 K_1 = \frac{1}{k^3} \frac{d^3 W}{dx^3}.\end{aligned}\quad (2.35)$$

Наведемо (2.35) у матричному вигляді:

$$\begin{Bmatrix} W(0) \\ W'(0) \\ W''(0) \\ W'''(0) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 & K_3 & K_4 \\ K_1' & K_2' & K_3' & K_4' \\ K_1'' & K_2'' & K_3'' & K_4'' \\ K_1''' & K_2''' & K_3''' & K_4''' \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 & K_3 & K_4 \\ K_4 & K_1 & K_2 & K_3 \\ K_3 & K_4 & K_1 & K_2 \\ K_2 & K_3 & K_4 & K_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{Bmatrix}; \quad (2.36)$$

$$\{W(0)\} = [K]\{C\}, \quad (2.37)$$

де $\{W\}$ – стовпець загальних розв'язків; $[K]$ – матриця Коші; $\{C\}$ – стовпець сталих.

Підставляючи $x = 0$ в (2.36), (2.37) і враховуючи першу властивість функції Крилова, дістанемо співвідношення

$$\begin{Bmatrix} W(0) \\ W'(0) \\ W''(0) \\ W'''(0) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{Bmatrix}; \quad (2.38)$$

$$\{W(0)\} = [E]\{C\}, \quad (2.39)$$

які виражають сталі через початкові параметри (амплітудні значення прогину і трьох похідних у початку координат).

Із (2.38) бачимо, що будь-яка комбінація двох однорідних умов на лівому кінці ($x = 0$) потребує рівності нулю відпо-відних сталих, що одразу спрощує побудову в конкретних задачах загального розв'язку (2.34) тільки з двома невідомими сталими. Останні визначаються з умов на правому кінці ($x = L$). Тривіальні сталі за таких умов закріплення лівого кінця завжди стоять при функції $K_1(kx)$, що не перетворюється на нуль, а нетривіальні сталі – при функціях $K_2(kx)$, $K_3(kx)$ або $K_4(kx)$, що дорівнюють нулю на лівому кінці.

Це все і забезпечує, що однорідні умови на лівому кінці задовольняються автоматично.

Отже, при написанні розв'язку у вигляді (2.32) треба шукати значення трьох сталих (або їх відношення до четвертої), а при використанні розв'язку (2.34) – значення однієї сталої (або відношення двох сталих), при цьому в обох випадках одну сталу обирають довільно.

Метод початкових параметрів. Використовується для визначення власних частот і форм гармонічних коливань балки з кількома ділянками (власні та вимушені коливання). Амплітудний вектор стану довільного перерізу балки визначається вже не двома, як це було при поздовжніх коливаннях, а чотирма компонентами – прогином $W(x)$, кутом повороту $\Theta(x)$, згинальним моментом $M(x)$ і поперечною силою $Q(x)$. Значення цих величин на початку координат ($x=0$) називають *початковими параметрами* $W(0)$, $\Theta(0)$, $M(0)$, $Q(0)$.

Виразимо через ці початкові параметри сталі загального розв'язку (2.34) для l -го головного (гармонічного) коливання. Для цього запишемо формули для всіх чотирьох компонентів вектора стану, використовуючи відомі диференціальні залежності $\Theta(x) = W'(x)$; $M = EIW''(x)$; $Q = EIW'''(x)$ і властивості функцій Крилова [12]:

$$\begin{aligned} W(kx) &= C_1 K_1(kx) + C_2 K_2(kx) + C_3 K_3(kx) + C_4 K_4(kx); \\ \Theta(x) &= k[C_1 K_4(kx) + C_2 K_1(kx) + C_3 K_2(kx) + C_4 K_3(kx)]; \\ M(x) &= EIk^2[C_1 K_3(kx) + C_2 K_4(kx) + C_3 K_1(kx) + C_4 K_2(kx)]; \\ Q(x) &= EIk^3[C_1 K_2(kx) + C_2 K_3(kx) + C_3 K_4(kx) + C_4 K_1(kx)]. \end{aligned}$$

Якщо $x = 0$, ці рівняння матимуть вигляд

$$W(0) = C_1; \quad \Theta(0) = kC_2; \quad M(0) = EIk^2 C_3; \quad Q(0) = EIk^3 C_4.$$

Підставляючи знайдені вирази сталих у згадані рівняння, дістанемо формули переходу від значень компонентів вектора стану на початку ділянки до значень у довільному перерізі ділянки. У результаті матимемо формули переходу від початку до кінця ділянки:

$$\begin{Bmatrix} W(L) \\ \Theta(L) \\ M(L) \\ Q(L) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_1(kL) & \frac{1}{k}K_1(kL) & \frac{1}{k^2EI}K_3(kL) & \frac{1}{k^3EI}K_4(kL) \\ kK_4(kL) & K_1(kL) & \frac{1}{kEI}K_2(kL) & \frac{1}{k^2EI}K_3(kL) \\ k^2EIK_3(kL) & EIkK_4(kL) & K_1(kL) & \frac{1}{k}K_2(kL) \\ k^2EIK_3(kL) & k^2EIK_3(kL) & kK_4(kL) & K_1(kL) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} W(0) \\ \Theta(0) \\ M(0) \\ Q(0) \end{Bmatrix}; \quad (2.40)$$

$$X_2 = M_{21} X_1, \quad (2.41)$$

де M_{21} – матриця переходу через ділянку I балки постійного перерізу; X_1, X_2 – вектори (стовпці) стану в 1-му (крайнє ліве) і 2-му (перед масою) перерізах.

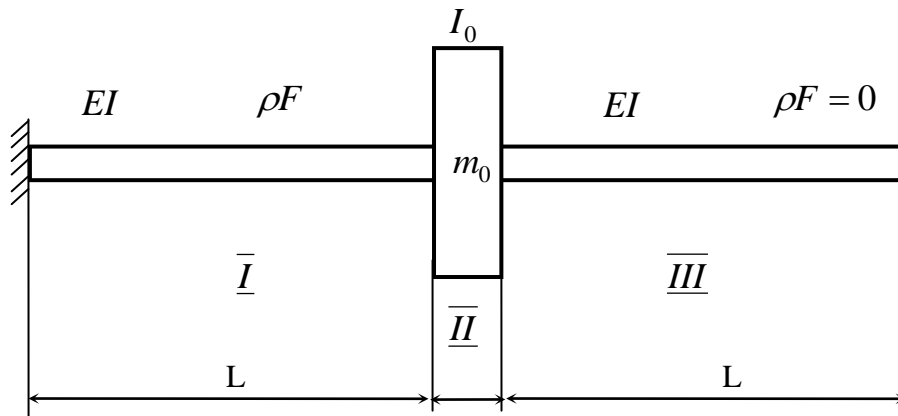


Рис. 2.6. Балка з кількома ділянками

Зауважимо, що при заміні сталих розв'язку (2.32) на початкові параметри дістанемо ті самі формули переходу (2.40), (2.42).

Знайдемо матриці переходу для деяких інших типових ділянок балки. Якщо ділянку \overline{III} балки вважати безінерційною (нехтують масою, але враховують згинну жорсткість), то формули переходу і матрицю переходу (передаточну матрицю) знайдемо, переходячи в (2.40) до границі, що прямує до нуля, і враховуючи при цьому позначення (2.30) та відповідні розклади в ряд Тейлора:

$$\begin{Bmatrix} W_4 \\ \Theta_4 \\ M_4 \\ Q_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & L & \frac{L^2}{2EI} & \frac{L^3}{6EI} \\ 0 & 1 & \frac{L}{EI} & \frac{L^2}{2EI} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} W_3 \\ \Theta_3 \\ M_3 \\ Q_3 \end{Bmatrix}; \quad (2.42)$$

$$X_4 = M_{43} X_3. \quad (2.43)$$

Ділянка II балки ($L = 0$), де зосереджена маса m_0 з моментом інерції J_0 маси або пружина з коефіцієнтами лінійної і c_1 кутової c_2 жорсткості, має таку формулу переходу:

$$X_3 = M_{32} X_2, \quad (2.44)$$

$$M_{32} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -I_0 \omega^2 & 1 & 0 \\ m_0 \omega^2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad M_{32} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 1 & 0 \\ -c_2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.45)$$

Весь перехід від лівого кінця до правого визначається добутком

$$X_4 = M_{43} M_{32} M_{21} X_1 = M_{41}(\omega^2) X_1. \quad (2.46)$$

Далі, враховуючи граничні умови, дістанемо частотне рівняння, яке розв'язуємо чисельно. Чисельно визначаємо і форми коливань. При розрахунку вищих форм коливань виникають обчислювальні складності, що пов'язані з малими різницями великих чисел. Розглянутий варіант методу початкових параметрів наведено повністю в чисельній формі, зручній для реалізації на ЕОМ. Переваги методу початкових параметрів виявляються при великій кількості ділянок і чисельній його реалізації на ЕОМ. Проте для ілюстрації методу (при розрахунках вручну) візьмемо простий приклад про коливання балки, що складається з двох ділянок (рис. 2.7).

Матриці переходу (2.44) відповідають умовам спряження правого і лівого перерізів ділянки $\overline{\overline{\quad}}$ нульової довжини, на якій зосереджені інерційні або пружні елементи. Помножимо ці матриці справа на вектор X_2 , знайдемо вектор $\{X\}$ й умови спряження у матричному вигляді. Знаки перед компо-

нентами встановлюються за правилом, прийнятим у курсі опору матеріалів. Проте, оскільки коливання відбуваються за гармонічним законом $w = W \cos \omega t$, $v = \Theta \cos \omega t$, то знаки перед амплітудами сил інерції змінюються на протилежні.

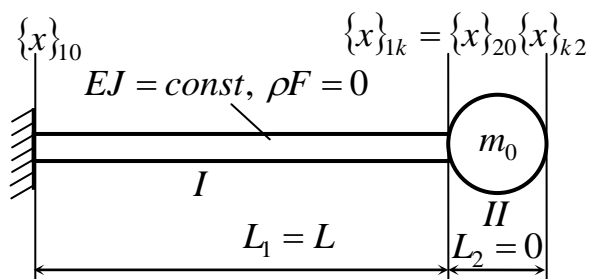


Рис. 2.7. Консольна балка із зосередженою масою на кінці

Наприклад, якщо прогин w_2 напрямлено у протилежну сторону осі (вгору), то додатний кут повороту лівого перерізу \dot{v}_2 буде напрямлено проти руху годинникової стрілки. Сили інерції $m_0 \ddot{w}_2$ та $J_0 \ddot{v}_2$ будуть напрямлені відповідно вниз і за рухом годинникової стрілки й матимуть згідно з правилом знаків для поперечної сили і згинального моменту такі знаки: $-m_0 \ddot{w}_2 + J_0 \ddot{v}_2$. Амплітудні значення сил інерції змінять знаки на протилежні.

Матриці переходу всіх інших спряжених перерізів є одиничними навіть тоді, коли в наведених здвоєних перерізах задаються значення деяких гармонічних компонент вектора стану (кінематичне або силове збудження вимушених коливань). При цьому значення заданих компонент вносять у відповідний вектор стану.

Приклад 2.2. Знайти основну частоту поперечних коливань балки (рис. 2.7), що складається із двох ділянок. Перша ділянка, безінерційна ($\rho F = 0$), має довжину L , жорсткість EI , друга – довжину $L_2 = 0$ і зосереджену масу m_0 (моментом інерції нехтуємо, $J = 0$).

Розв'язання. Перехід від лівого до правого кінця балки згідно з [7, 12] запишемо у вигляді

$$X_3 = M_{32} M_{21} X_1;$$

$$\begin{Bmatrix} W_3 \\ \Theta_3 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ m_0\omega^2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & L & \frac{L^2}{2EI} & \frac{L^3}{6EI} \\ 0 & 1 & \frac{L}{EI} & \frac{L^2}{2EI} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ M_1 \\ Q_1 \end{Bmatrix}. \quad (2.47)$$

Тут враховано граничні умови $M_3 = Q_3 = 0$ на вільному кінці й $W_1 = \Theta_1 = 0$ в закріпленні. Перемножимо матриці й дістанемо:

$$W_3 = M_1 \frac{L^2}{2EI} + Q_1 \frac{L^3}{6EI}; \quad \Theta_3 = M_1 \frac{L}{EI} + Q_1 \frac{L^2}{2EI};$$

$$0 = M_1 + Q_1 L; \quad 0 = M_1 \frac{m_0\omega^2 L^2}{2EI} + Q_1 \frac{m_0\omega^2 L^3}{6EI} + 1.$$

Останні два рівняння однорідні. Оскільки $M_1 \neq 0$, $Q_1 \neq 0$, то детермінант

$$\left(\frac{m_0\omega^2 L^3}{6EI} \right) + 1 - \frac{m_0\omega^2 L^2}{6EI} L = 0.$$

У загальному випадку частотне рівняння розв'язується чисельним підбором.

У нашому випадку маємо $\omega^2 = \frac{3EI}{m_0 L^3}$.

Розрахунок форм коливань ведеться також підбором при послідовному використанні переходів від початку до кінця балки. Тому ці переходи відбуваються за формулами:

$$X_2 = M_{21} X_1; \quad X_3 = M_{32} X_2.$$

Відповідні форми коливань для всіх компонент вектора стану зображено на рис. 2.8 (значення компонент вірогідні тільки у крайніх перерізах). Завдяки лінійності перетворені вектори X_1 , X_3 можна розбити на дві частини:

$$X_3 = C_1 X_3^{(1)} + C_2 X_3^{(2)}; \quad X_1 = C_1 X_1^{(2)}$$

і вимагати, щоб перша частина задовольняла тільки першу граничну умову, а друга – тільки другу.

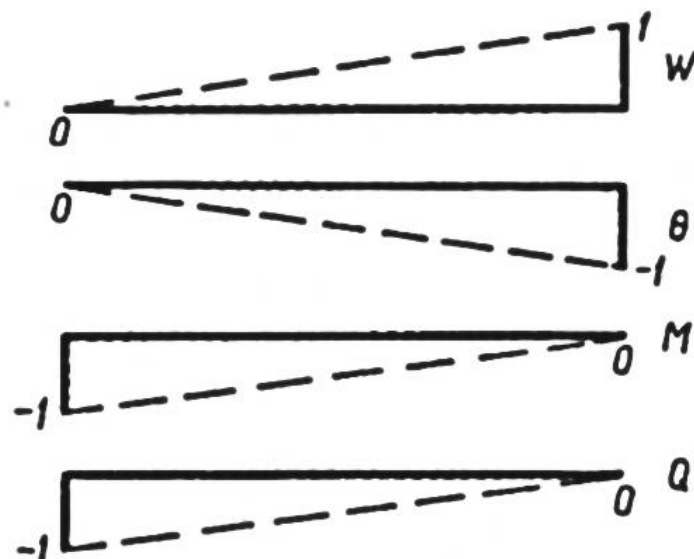


Рис. 2.8. Форми коливань компонентів вектора стану: прогину W , кута повороту θ , згинального моменту M і поперечної сили

2.2. Вимушені згинні коливання ідеально пружної балки під дією довільного навантаження

Рівняння коливань такої балки дістанемо, вважаючи, що в (2.48) $b_2 = 0$; $N = 0$:

$$\rho F \ddot{w} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = q(x, t). \quad (2.49)$$

Розв'язок цього рівняння шукаємо за МГК у вигляді

$$w(x, t) = \sum_{l=1}^{\infty} W_l(x) \eta_l(t), \quad (2.50)$$

де $W_l(x)$ задовольняє рівняння

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(EI \frac{d^2 W_l}{dx^2} \right) - \rho F \omega_l^2 W_l = 0. \quad (2.51)$$

і задані граничні умови. Підставимо (2.50) у (2.49), помножимо результат на $W_l dx$. Проінтегруємо від 0 до L , тоді матимемо скінченну множину незалежних диференціальних рівнянь відносно шуканих головних координат $\eta_l(t)$:

$$M_l (\ddot{\eta}_l + \omega_l^2 \eta_l) = \int_0^L q(x, t) W_l dx, \quad l = 1, 2, 3, \dots, \infty. \quad (2.52)$$

За тривіальних початкових умов розв'язком рівняння (2.52) буде інтеграл переміщень

$$\eta_l = \frac{1}{M_l \omega_l} \int_0^t \int_0^L q(x, \tau) W_l(x) \sin \omega_l(t - \tau) dx d\tau. \quad (2.53)$$

Додаючи до (2.53) загальний розв'язок $a_l W_l \cos(\omega_l t - \varphi_l)$ відповідного однорідного рівняння і підставляючи його в (2.52), знайдемо загальний інтеграл вихідного рівняння (2.49):

$$w(x, t) = \sum_{l=1}^{\infty} a_l W_l(x) \cos(\omega_l t - \varphi_l) + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{W_l(x)}{M_l \omega_l} \int_0^t \int_0^L q(x, \tau) W_l(x) \sin \omega_l(t - \tau) dx d\tau. \quad (2.54)$$

Сталі a_l, φ_l визначають із початкових умов.

Якщо довільна в часі сила (зокрема і стала) не є розподіленою вздовж балки, а зосереджена в перерізі $x = x_0$, то її зводять за допомогою дельта-функції до формально розподіленої $q(x, t) = P(t) \delta(x - x_0)$ і розв'язок шукають за стандартною формулою.

2.3. Вимушені згинні коливання пружної балки під дією розподіленої гармонічної сили

Вважаючи $q(x, t) = q(t) \cos \omega t$ в (2.49), матимемо рівняння гармонічних вимушених коливань

$$\rho F \ddot{w} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = q(x, t) \cos \omega t, \quad (2.55)$$

яке можна розв'язати за допомогою МГК і безпосередньо дістати замкнений розв'язок.

Метод головних координат. Як і раніше, застосовуючи процедуру МГК, отримуємо зліченну множину незалежних рівнянь:

$$M_l (\ddot{\eta}_l + \omega_l^2 \eta_l) = q_l \cos \omega t; \quad q_l = \int_0^L q(x) W_l dx. \quad (2.56)$$

За тривіальних початкових умов розв'язком l -го рівняння буде

$$\eta_l = \cos \omega t \frac{\int_0^L q(x)W_l(x)dx}{M_l(\omega_l^2 - \omega^2)} \quad \text{при } \omega \neq \omega_l; \quad (2.57)$$

$$\eta_l = t \sin \omega t \frac{q_l}{2M_l\omega} \quad \text{при } \omega = \omega_l \quad \text{і } q_l = \int_0^L q(x)W_l(x)dx \neq 0.$$

Якщо в останньому випадку ($\omega = \omega_l$) буде $q_l = \int_0^L q(x)W_l(x)dx = 0$, то резонанс не виникає.

Підставляючи розв'язок для головної координати η_l в (2.50), знаходимо загальний розв'язок вихідного рівняння за тривіальних початкових умов:

$$w(x, t) = \cos \omega t \sum_{l=1}^{\infty} W_l(x) \frac{\int_0^L q(x)W_l(x)dx}{M_l(\omega_l^2 - \omega^2)}, \quad \omega = \omega_l. \quad (2.58)$$

Безпосередній розв'язок за однорідних граничних умов. Замкнений розв'язок задачі про вимушені коливання під дією розподіленого гармонічного навантаження можна знайти для призматичної балки.

Обмежимося тільки випадком рівномірно розподіленої сили ($q = \text{const}$), коли рівняння має вигляд

$$\rho F \ddot{w} + EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = q \cos \omega t. \quad (2.59)$$

Шукаючи за методом розділення змінних розв'язок

$$w(x, t) = W(x) \cos \omega t, \quad (2.60)$$

отримуємо неоднорідне диференціальне рівняння

$$\frac{d^4 W}{dx^4} - k^4 W = \frac{q}{EI}. \quad (2.61)$$

де $k^4 = \frac{\rho E \omega^2}{EI}$ – задане число, на відміну від випадку вільних коливань, коли

шуканою є множина таких чисел.

Загальний розв'язок однорідного рівняння вже знайдено, він виражається формулою (2.60), а частинним розв'язком буде:

$$W = -\frac{q}{k^4 EI}. \quad (2.62)$$

Тоді загальний розв'язок подається сумою

$$W(x) = C_1 K_1(kx) + C_2 K_2(kx) + C_3 K_3(kx) + C_4 K_4(kx) - \frac{q}{k^4 EI}. \quad (2.63)$$

Виразимо сталі C_1, C_2, C_3, C_4 через початкові параметри. З урахуванням властивостей функцій Крилова знайдемо:

$$\begin{aligned} W(0) &= C_1 - \frac{q}{k^4 EI}; & W'(0) &= \theta(0) = C_2 k; \\ W''(0) &= C_3 k^2 = \frac{M(0)}{EI}; & W'''(0) &= C_4 k^3 = \frac{Q(0)}{EI}. \end{aligned} \quad (2.64)$$

Тоді матимемо замкнений розв'язок вихідного рівняння:

$$\begin{aligned} w(x, t) = & \left\{ W(0) K_1(kx) + \frac{\theta(0)}{k} K_2(kx) + \frac{M(0)}{k^2 EI} K_3(kx) + \right. \\ & \left. + \frac{Q(0)}{k^3 EI} K_4(kx) + \frac{q}{k^4 EI} [K_1(kx) - 1] \right\} \cos \omega t, \end{aligned} \quad (2.65)$$

в якому початкові параметри $W(0), \theta(0), M(0), Q(0)$ визначають із граничних умов. Цей розв'язок справедливий із $\omega \neq \omega_1$.

2.4. Стержень на пружних опорах або на пружній основі

Різноманітні умови закріплення кінців стержня можуть мати проміжні значення між двома граничними випадками: відсутністю закріплення та жорстким защемленням.

Якщо характер закріплення кінців такий, що силові фактори, які виникають в опорах, є лінійними відносно зміщень або кута повороту, зв'язки в опорах можна подати у вигляді набору пружин (рис. 2.9).

Нехай:

k_1 та k_2 – жорсткості пружин, що працюють відповідно на розтяг – стиск та кручення і встановлені на лівому кінці;

k_3 та k_4 – те саме, але для правого кінця.

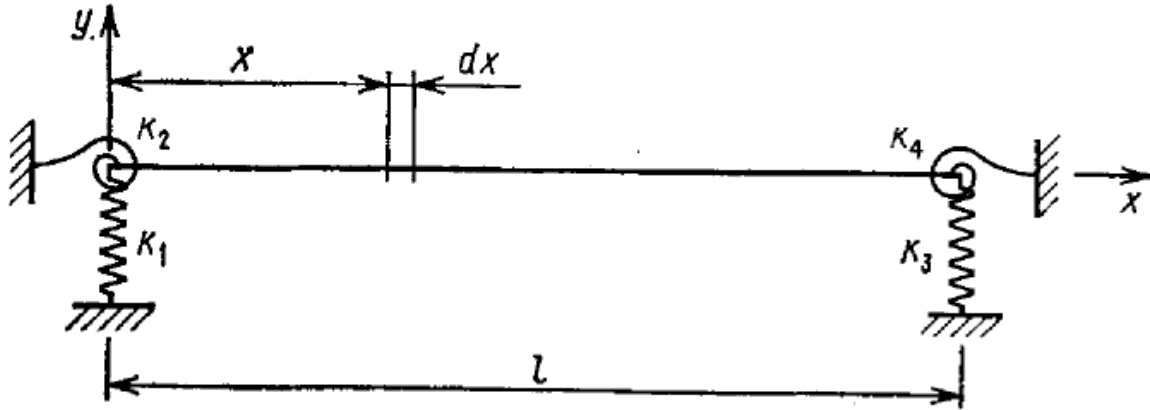


Рис. 2.9. Стержень на пружних опорах

Для вказаного випадку граничні умови можна виразити таким чином:

$$\begin{aligned}
 Q_{x=0} &= EJ(W''')_{x=0} = -k_1(W)_{x=0}, \\
 M_{x=0} &= EJ(W'')_{x=0} = k_2(W')_{x=0}, \\
 Q_{x=l} &= EJ(W''')_{x=l} = k_3(W)_{x=l}, \\
 M_{x=l} &= EJ(W'')_{x=l} = -k_4(W')_{x=l}.
 \end{aligned}
 \tag{2.66}$$

Нормальні функції та їх похідні за x , необхідні для розгляду цього випадку, мають такий вигляд:

$$\begin{aligned}
 W &= C_1 \sin kx + C_2 \cos kx + C_3 \operatorname{sh} kx + C_4 \operatorname{ch} kx; \\
 W' &= k(C_1 \cos kx - C_2 \sin kx + C_3 \operatorname{ch} kx + C_4 \operatorname{sh} kx); \\
 W'' &= k^2(-C_1 \sin kx - C_2 \cos kx + C_3 \operatorname{sh} kx + C_4 \operatorname{ch} kx); \\
 W''' &= k^3(-C_1 \cos kx + C_2 \sin kx + C_3 \operatorname{ch} kx + C_4 \operatorname{sh} kx);
 \end{aligned}
 \tag{2.67}$$

$$k = \sqrt{\frac{\rho}{a}},$$

де $a^2 = \frac{EJ}{\rho F}$.

Підставляючи вирази (б) в умови (а), отримаємо

$$\begin{aligned}
 EIk^3 C_1 - k_1 C_2 - EIk^3 C_3 - k_1 C_4 &= 0; \\
 -EIk C_2 - k_2 C_1 + EIk C_4 - k_2 C_3 &= 0; \\
 (-EIk^3 \cos kl - k_3 \sin kl) C_1 + (EIk^3 \sin kl - k_3 \cos kl) C_2 + \\
 + (EIk^3 \operatorname{ch} kl - k_3 \operatorname{sh} kl) C_3 + (EIk^3 \operatorname{sh} kl - k_3 \operatorname{ch} kl) C_4 &= 0; \\
 (-EIk \sin kl + k_4 \cos kl) C_1 + (-EIk \cos kl - k_4 \sin kl) C_4 + \\
 + (EIk \sin kl - k_4 \operatorname{ch} kl) C_3 + (EIk \operatorname{ch} kl - k_4 \operatorname{sh} kl) C_4 &= 0.
 \end{aligned} \tag{2.68}$$

Ця система чотирьох однорідних алгебричних рівнянь буде мати нетривіальні розв'язки тільки у тому випадку, якщо визначник матриці, зіставлений із коефіцієнтів за C_1, C_2, C_3, C_4 , дорівнює нулю. Тоді, розклавши цей визначник, можемо отримати частотне рівняння для стержня із пружним закріпленням на кінцях. Підставивши корені цього характеристичного рівняння назад у рівняння, можна визначити нормальні функції.

Припустивши, що жорсткість відповідних пружин рівна або нулю, або нескінченності, із системи рівнянь можна отримати визначники як для стержня з незакріпленими кінцями, так і для стержня з жорстко защемленими кінцями. Наприклад, для консольного стержня, лівий кінець якого жорстко защемлений, а правий не закріплений, маємо

$$k_1 = \infty, k_2 = \infty, k_3 = 0, k_4 = 0.$$

У цьому випадку визначник має вигляд

$$\begin{vmatrix}
 0 & 1 & 0 & 1 \\
 1 & 0 & 1 & 0 \\
 -\cos kl & \sin kl & \operatorname{ch} kl & \operatorname{sh} kl \\
 -\sin kl & -\cos kl & \operatorname{sh} kl & \operatorname{ch} kl
 \end{vmatrix} = 0, \tag{2.69}$$

де елементи першого рядка були поділені на $-k_1$, а другого на $-k_2$.

Розклад цього визначника приведе до наступного частотного рівняння:

$$\cos kl \operatorname{ch} kl = -1. \tag{2.70}$$

Вираз для нормальних функцій має вигляд

$$X_i = C_i \left(\frac{\sin k_i x - \operatorname{sh} k_i x}{\cos k_i l + \operatorname{ch} k_i l} - \frac{\cos k_i x - \operatorname{ch} k_i x}{\sin k_i l - \operatorname{sh} k_i l} \right). \quad (2.71)$$

Якщо пружні опори, які забороняють переміщення у поперечному напрямку, розподілені безперервним чином по довжині стержня, матимемо задачу про стержень на суцільній пружній основі.

Будемо називати коефіцієнтом пастелі k_n відношення сили, необхідної для створення рівного одиниці прогину, до одиниці довжини стержня, який лежить на пружній основі. При поперечних коливаннях стержня диференціальне рівняння динамічної рівноваги сил, які діють на малий елемент dx , можна подати у формі

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) dx = -k_n w dx - \rho F dx \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad (2.72)$$

де перший доданок правої частини описує силу опору зі сторони основи. Для стержня постійного поперечного перерізу це рівняння має вигляд

$$EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + k_n w = -\rho F \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \quad (2.73)$$

Для того, щоб розв'язати це рівняння, подамо власні форми коливань таким чином:

$$w_l = W_l (A_l \cos \omega_l t + B_l \sin \omega_l t). \quad (2.74)$$

Підставляючи у рівняння, отримаємо:

$$EJ \frac{d^4 W_l}{dx^4} - (\rho F \omega_l^2 - k_n) W_l = 0. \quad (2.75)$$

Розділивши ліву і праву частини на EJ , знайдемо

$$\frac{d^4 W_l}{dx^4} - \left(\frac{\omega_l^2}{a^2} - \frac{k_n}{EJ} \right) W_l = 0. \quad (2.76)$$

Тут

$$a^2 = \frac{EJ}{\rho F}.$$

Для зручності введемо позначення

$$\frac{\omega_l^2}{a^2} - \frac{k_n}{EJ} = k_l^4. \quad (2.77)$$

Тоді рівняння (і) можна подати у такій формі:

$$\frac{d^4 W_l}{dx^4} - k_n W_l = 0. \quad (2.78)$$

Розв'язком цього диференціального рівняння буде

$$X_i = C_{1i} \sin k_i x + C_{2i} \cos k_i x + C_{3i} \operatorname{sh} k_i x + C_{4i} \operatorname{ch} k_i x, \quad (2.79)$$

що збігається з розв'язком задачі про стержень без пружної суцільної основи. Тому в розглянутому випадку можуть бути використані всі результати, отримані вище для стержня з відмінними кінцевими умовами. Єдина відмінність у тому, що потрібно замінити $p_i = k_i^2 a$ на величину, яка визначається з виразу (2.77):

$$p_i = k_i^2 a \sqrt{1 + \frac{k_n}{EI k_i^4}}. \quad (2.80)$$

Розглядаючи найпростіший випадок стержня, кінці якого закріплені так, що не можуть переміщуватися у вертикальному напрямку, знайдемо нормальні функції

$$X_i = C_{1i} \sin k_i x, \quad (2.81)$$

а кругові частоти

$$\omega_l = \frac{l^2 i^2 \pi^2 a}{L^2} \sqrt{1 + \frac{k_n l^4}{EI i^4 \pi^4}} = \frac{\pi^2 a}{L^2} \sqrt{1 + \mu}, \quad (2.82)$$

де $\mu = k_n L^4 / EI \pi^4$ за винятком вказаного уточнення виразу для динамічних прогинів вільно опертого стержня при різних умовах можна використовувати також для стержня на суцільній основі (табл. 2.1).

$$\begin{aligned}\omega_l &= \frac{\pi^2 a}{L^2} \sqrt{1 + \mu} = \frac{\pi^2 a}{L^2} \sqrt{1 + k_n \cdot 1,4 \cdot 10^{-8}} = \\ &= \frac{\pi^2 \cdot 1748015}{4} \sqrt{1 + k_n \cdot 1,4 \cdot 10^{-8}} = \\ &= 4313054,134 \sqrt{1 + k_n \cdot 1,4 \cdot 10^{-8}}\end{aligned}$$

Якщо $k_n = 5 \text{ МПа}$,

$$\begin{aligned}\omega_l &= 4313054,134 \sqrt{1 + k_n \cdot 1,4 \cdot 10^{-8}} = \\ &= 4313054,134 \sqrt{1 + 5 \cdot 10^6 \cdot 1,4 \cdot 10^{-8}} = 4461 \cdot 10^3 \text{ с}^{-1}.\end{aligned}$$

Якщо $k_n = 50 \text{ МПа}$,

$$\begin{aligned}\omega_l &= 4313054,134 \sqrt{1 + k_n \cdot 1,4 \cdot 10^{-8}} = \\ &= 4313054,134 \sqrt{1 + 5 \cdot 10^7 \cdot 1,4 \cdot 10^{-8}} = 5624 \cdot 10^3 \text{ с}^{-1}.\end{aligned}$$

Якщо $k_n = 100 \text{ МПа}$,

$$\begin{aligned}\omega_l &= 4313054,134 \sqrt{1 + k_n \cdot 1,4 \cdot 10^{-8}} = \\ &= 4313054,134 \sqrt{1 + 10^8 \cdot 1,4 \cdot 10^{-8}} = 6682 \cdot 10^3 \text{ с}^{-1}.\end{aligned}$$

Якщо $k_n = 200 \text{ МПа}$,

$$\begin{aligned}\omega_l &= 4313054,134 \sqrt{1 + k_n \cdot 1,4 \cdot 10^{-8}} = \\ &= 4313054,134 \sqrt{1 + 2 \cdot 10^8 \cdot 1,4 \cdot 10^{-8}} = 8408 \cdot 10^3 \text{ с}^{-1}.\end{aligned}$$

Якщо $k_n = 1000 \text{ МПа}$,

$$\begin{aligned}\omega_l &= 4313054,134 \sqrt{1 + k_n \cdot 1,4 \cdot 10^{-8}} = \\ &= 4313054,134 \sqrt{1 + 10 \cdot 10^8 \cdot 1,4 \cdot 10^{-8}} = 16704 \cdot 10^3 \text{ с}^{-1}.\end{aligned}$$

Якщо $k_n = 15000 \text{ МПа}$,

$$\begin{aligned}\omega_l &= 4313054,134 \sqrt{1 + k_n \cdot 1,4 \cdot 10^{-8}} = \\ &= 4313054,134 \sqrt{1 + 150 \cdot 10^8 \cdot 1,4 \cdot 10^{-8}} = 62650 \cdot 10^3 \text{ с}^{-1}.\end{aligned}$$

Результати розрахунків зведені у табл. 2.2.

Таблиця 2.2. Власні частоти при різних матеріалах основи

| № з/п | Матеріал основи | k_n , МПа/м | Кругова частота |
|-------|----------------------------|---------------|-----------------------------------|
| 1 | Пісок | 1-5 | $4461 \cdot 10^3 \text{ c}^{-1}$ |
| 2 | Ґрунти середньої щільності | 5-50 | $5624 \cdot 10^3 \text{ c}^{-1}$ |
| 3 | Ґрунти щільні | 50-100 | $6682 \cdot 10^3 \text{ c}^{-1}$ |
| 4 | Ґрунти досить щільні | 100-200 | $8408 \cdot 10^3 \text{ c}^{-1}$ |
| 5 | Вапняк, піщаник, мерзлота | 200-1000 | $16704 \cdot 10^3 \text{ c}^{-1}$ |
| 6 | Тверда скеля | 1000-15000 | $62650 \cdot 10^3 \text{ c}^{-1}$ |

2.5. Кінематичне збудження згинних коливань балки

Розглянемо два види кінематичного збудження (рис. 2.10 та 2.11).

а) усі перерізи балки дістають однакове лінійне поперечне (рис. 2.10) або кутове (рис. 2.11, а) переміщення як деякого переносного руху;

б) тільки один чи кілька перерізів дістають примусове лінійне (рис. 2.11, б) або кутове (рис. 2.11, в) переміщення.

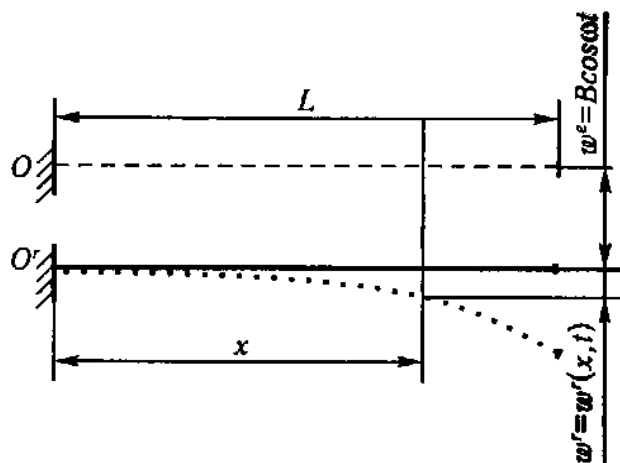
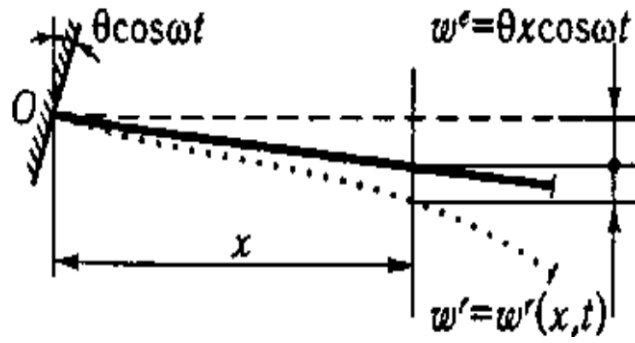
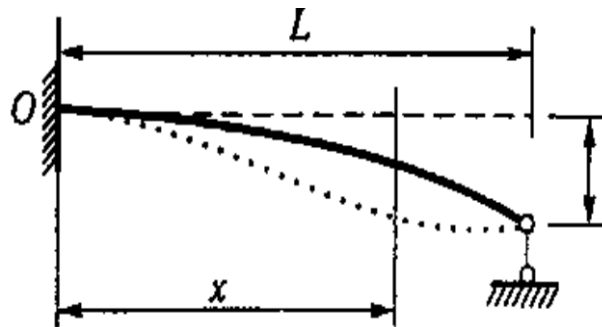


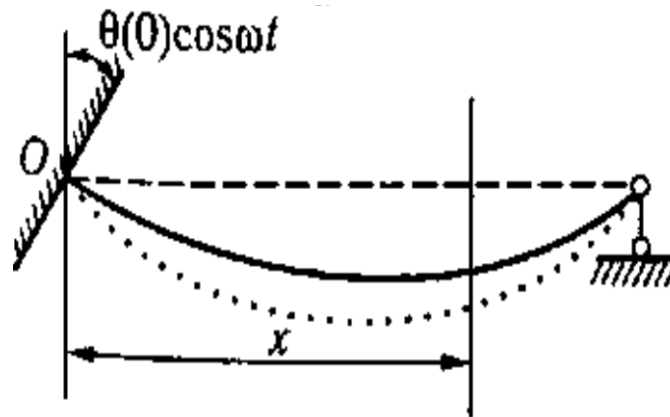
Рис. 2.10. Кінематичне збудження коливань балки вертикальним переносним рухом



a



б



в

Рис. 2.11. Кінематичне збудження балки:
 а – переносним кутовим рухом закріплення;
 б – вертикальним переносним рухом правої опори;
 в – поворотним рухом опори

У першому випадку, враховуючи сили інерції абсолютного переміщення w і сили пружності відносного переміщення w^r , дістанемо таке рівняння коливань:

$$A\ddot{w} + Cw^r = 0;$$

в якому інерційний A і пружний C оператори:

$$A = \rho F; \quad C = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right).$$

Підставляючи $w = w^l + w^r$ у знайдене рівняння, дістаємо рівність $Aw^r + Cw^r = A\ddot{w}^l$, яка відповідно до розрахункових схем (рис. 2.10, 2.11) набуває вигляду рівнянь коливань під дією рівномірно або нерівномірно розподілених гармонічних змушувальних сил:

$$A\ddot{w}^r + Cw^r = \rho FB\omega^2 \cos \omega t; \quad A\ddot{w}^r + Cw^r = \rho F\theta x\omega^2 \cos \omega t.$$

Інші випадки (рис. 2.11, б, в) досліджують за допомогою методу початкових параметрів.

2.6. Вимушені поперечні коливання балки з урахуванням тертя.

Довільна в часі розподілена поперечна сила

При врахуванні внутрішнього тертя у розглядуваному випадку неусталених коливань буде математично коректним використання тільки двох лінійних гіпотез: Кельвіна–Фойхта та Бока–Шліппе–Колара.

Для металічних матеріалів перша гіпотеза не підтверджується експериментально. Вважаючи, що $N=0$, дістанемо рівняння поперечних коливань балки з урахуванням внутрішнього тертя за гіпотезою Кельвіна–Фойхта і зовнішнього в'язкого тертя [6, 12, 14]:

$$\rho F\ddot{w} + b_2 \rho F\dot{w} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EI \left(1 + b_1 \frac{d}{dt} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] = q(x, t). \quad (2.83)$$

Для врахування внутрішнього тертя за гіпотезою Бока–Шліппе–Колара замінюємо в рівнянні (2.83) оператор $b_1 \frac{d}{dt}$ на оператор $\alpha_1 [\omega]^{-1} \frac{d}{dt}$.

Розв'язок отриманого рівняння шукаємо у вигляді МГК. Для повного розділення змінних при використанні методу головних координат і при

врахуванні тертя оператор зовнішнього тертя має бути пропорційним інерційному оператору, а оператор внутрішнього тертя – пружному:

$$\beta = b_2 A = b_2 \rho F; B = b_1 C. \quad (2.84)$$

Друга умова вже виконана в рівнянні (2.83). Унаслідок застосування процедури МГК до рівняння (2.84) матимемо діагональну систему рівнянь:

$$M_l \left[\ddot{\eta}_l + (b_2 + b_1 \omega_l^2) \dot{\eta}_l + \omega_l^2 \eta_l \right] = \int_0^l q(x, t) W_l(x) dx, \\ l = 1, 2, 3, \dots, \infty. \quad (2.85)$$

Частинний розв'язок цього рівняння визначається інтегралом переміщень:

$$\eta_l = \frac{e^{-h_l t}}{M_l \tilde{\omega}_l} \int_0^t \int_0^l q(x, \tau) e^{h_l \tau} W_l(x) \sin \tilde{\omega}_l(t - \tau) dx d\tau, \quad (2.86)$$

де $2h_l = b_2 + b_1 \omega_l^2; \tilde{\omega}_l^2 = \omega_l^2 - h_l^2; \Delta = \frac{\pi(b_2 + b_1 \omega_l^2)}{\tilde{\omega}_l}$.

Якщо внутрішнє тертя враховується за гіпотезою Бока–Шліппе–Колара, то ті самі величини становитимуть

$$2h_l = b_2 + b_1 \omega_l; \tilde{\omega}_l^2 = \omega_l^2 - h_l^2; \Delta = \frac{\pi(b_2 + \alpha_1 \omega_l)}{\tilde{\omega}_l}.$$

Підставляючи (2.86) у (2.85), дістанемо розв'язок рівняння (2.83) у вигляді розкладу за власними формами коливань.

Гармонічна в часі розподілена поперечна сила. Рівняння (2.83) набуває вигляду

$$\rho F \ddot{w} + \rho F b_2 \dot{w} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EI(1 + b_1 \frac{\partial}{\partial t}) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] = q(x, t) \cos \omega t. \quad (2.87)$$

Розв'язок цього рівняння також шукаємо за МГК. Застосування процедури обчислення за цим методом приводить до зліченної множини звичайних диференціальних рівнянь відносно головних координат:

$$M_l \left[\ddot{\eta}_l + (b_2 + b_1 \omega_l^2) \dot{\eta}_l + \omega_l^2 \eta_l \right] = \cos \omega t \int_0^L q(x) W_l(x) dx. \quad (2.88)$$

Частинний розв'язок l -го рівняння шукаємо у вигляді

$$\eta_l(t) = a_l \cos(\omega t - \varphi_l). \quad (2.89)$$

Підставляючи форму розв'язку (2.89) в (2.88), відомим вже способом виражаємо шукані сталі a_l та φ_l ; через коефіцієнти рівняння:

$$a_l = \frac{\int_0^L q(x) W_l(x) dx}{M_l \sqrt{(\omega_l^2 - \omega^2)^2 + 4h_l^2 \omega^2}}; \operatorname{tg} \varphi_l = \frac{h_l^2 \omega}{\omega_l^2 - \omega^2}, \quad (2.90)$$

де $2h_l = b_2 + b_1 \omega_l^2$; $\int_0^L \rho F W_l^2(x) dx$.

Розв'язок вихідного рівняння (2.87) за тривіальних початкових умов у вигляді розкладу за власними формами коливань дістанемо, підставляючи (2.90) з урахуванням (2.90):

$$w(x, t) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{W_l(x) \int_0^L q(x) W_l(x) dx}{M_l \sqrt{(\omega_l^2 - \omega^2)^2 + 4h_l^2 \omega^2}} \cos(\omega t - \varphi_l). \quad (2.91)$$

Визначальним у знайдений сумі буде l -й доданок, для якого $\omega_l = \omega$. За правилом Відлера всі інші доданки можна відкинути як дуже малі.

При дослідженні усталених коливань разом із гіпотезами Кельвіна–Фойхта, Бока–Шліппе–Колара будуть коректні гіпотези Сорокіна, комплексних модулів пружності та інші.

2.7. Вплив поздовжніх сил на частоту вільних згинних коливань балки

Вважаючи $b_2 = b_1 = 0$, $N = P = \text{const}$, матимемо рівняння вільних згинних коливань призматичної балки під дією сталої розтягуючої сили (верхній знак) або стискальної сили (нижній знак) по осі стержня:

$$\rho F \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^2} \pm P \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0. \quad (2.92)$$

Граничні умови такі самі, як і за відсутності поздовжньої сили, за винятком умови, де є поперечна сила. Шукаючи розв'язки рівняння (2.92), що відповідають головним коливанням

$$w(x, t) = W_l(x) \cos(\tilde{\omega}_l t - \varphi_l), \quad (2.93)$$

отримуємо звичайне рівняння для власних форм коливань:

$$\frac{d^4 W_l}{dx^4} \pm \frac{P}{EI} \frac{d^2 W_l}{dx^2} - \frac{\rho F}{EI} \tilde{\omega}_l^2 W_l = 0.$$

Загальний розв'язок цього рівняння знаходимо звичайним методом. Для скорочення викладок обмежимося тільки випадком простої балки, кінці якої шарнірно закріплені й форма коливань має вигляд

$$W_l(x) = \sin \frac{l\pi}{L} x. \quad (2.94)$$

У такому випадку знайдемо з рівняння для власних форм коливань

$$\tilde{\omega}_l = \left(\frac{l\pi}{L} \right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho F}} \sqrt{1 \pm \frac{PL^2}{l^2 \pi^2 EI}} = \omega_l \sqrt{1 \pm \frac{P}{P_{кpl}}}, \quad (2.95)$$

де $\tilde{\omega}_l$ – кутова частота вільних згинних коливань балки з урахуванням розтягуючої (верхній знак) чи стискальної поздовжньої сили P (нижній знак); ω_l – власна частота згинних коливань балки без урахування поздовжньої сили; $P_{кpl} = \left(\frac{l\pi}{L} \right)^2 EI$ – Ейлерова критична сила при втраті стійкості за l -ю власною формою коливань.

Із формули (2.95) бачимо, що розтягуюча сила збільшує, а стискальна – зменшує частоту вільних згинних коливань балки. У випадку стискальної поздовжньої сили, що дорівнює за величиною ейлеровій силі, балка втрачає стійкість і відповідна частота дорівнює нулю.

2.8. Параметричні згинні коливання балки

Нехай на призматичну балку з шарнірно закріпленими кінцями діє гармонічна стискувальна сила (рис. 2.12). Нехтуючи позовжніми коливаннями, вважаючи $b = b_2 \rho F, q = 0$ та $N = P \cos \omega t$ в останньому рівнянні, матимемо рівняння згинних коливань балки постійного перерізу:

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - a_3 EI \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^3 + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} P \cos \omega t + \rho F \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b_2 \rho F \frac{\partial w}{\partial t} = 0 \quad (2.96)$$

Оскільки один із коефіцієнтів останнього рівняння періодично змінюється, то воно визначає параметричні згинні коливання балки.

Обмежимося поширеним випадком, коли форма параметричних коливань збігається із власною формою згинних коливань балки.

Розв'язок (2.96) в лінійному випадку ($a_3 = 0$) за відсутності тертя ($b_2 = 0$) шукаємо за методом головних координат у вигляді

$$w(x, t) = \sum_{l=0}^{\infty} W_l(x) \eta_l(t) = \sum_{l=0}^{\infty} \sin \frac{l\pi}{L} x \eta_l(t). \quad (2.97)$$

Підставляючи (2.97) у (2.96), виконаємо ортогоналізацію результату відносно усіх форм коливань $W_l(x)$ й отримаємо систему незалежних рівнянь Матсьє:

$$\frac{d^2 \eta_l}{dt^2} - \omega_l^2 (1 - 2\mu_l \cos \omega t) \eta_l = 0,$$

$$2\mu_l = \frac{P}{P_{KPl}} = \frac{P}{\left(\frac{l\pi}{L}\right)^2 EI}; \quad \omega_l^2 = \left(\frac{l\pi}{L}\right)^4 \frac{EI}{\rho F}; \quad P \leq P_{KPl} = \left(\frac{l\pi}{L}\right)^2 EI; \quad \frac{d^2 W_l}{dx^2} = \left(\frac{l\pi}{L}\right)^2 W_l;$$

$$l = 1, 2, 3, \dots, \infty.$$

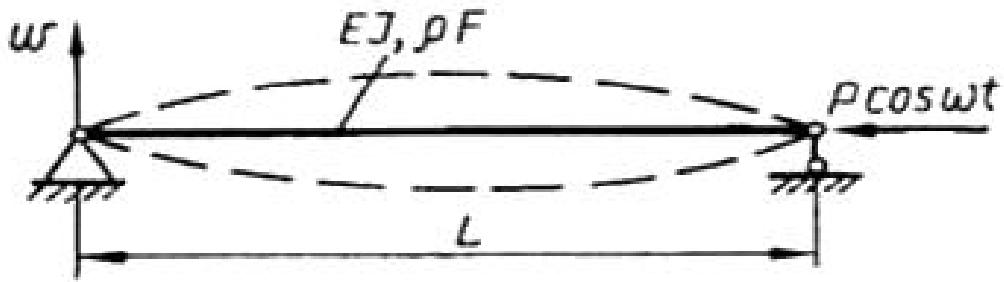


Рис. 2.12. Параметричне збудження поперечних коливань призматичної балки

Області значень параметрів $\frac{\omega}{2\omega_l}, \mu_l$, для l -го рівняння Мат'є, за яких виникає параметричний резонанс l -ї головної координати, на рис. 2.13 заштриховані. Якщо значення згаданих параметрів для всіх головних координат не потрапляють у заштриховані області – області параметричних резонансів, то розв'язок (2.96) стійкий. Рух (2.97) нестійкий, якщо значення параметрів хоча б однієї головної координати потрапляють в яку-небудь область параметричного резонансу.

У нелінійному випадку ($a_3 \neq 0$) розв'язування рівняння (2.96) пов'язане із труднощами. Унаслідок нелінійності нормальні коливання l -ї форми з l -ю частотою збудені коливаннями дуже малих амплітуд інших власних форм з обертонами розглядуваної частоти. Тому розв'язок нелінійного рівняння у вигляді суми (2.97) не є точним і коректним. Можливий частинний двопараметричний зв'язок, близький до l -го головного коливання.

Розв'язок нелінійного рівняння (2.96) за припущення, що можливі параметричні коливання за формою, близькою до l -ї власної форми, і за $P < P_{крl}$, шукаємо у вигляді

$$w(x, t) = \eta_l(t)W_l(x) = \eta_l(t) \sin \frac{l\pi}{L} x, \quad (2.98)$$

Підставляючи (2.98) в (2.96), помножимо результат на $W_l(x)dx$ й проінтегруємо у межах від 0 до L (уздовж балки), тоді матимемо

$$\ddot{\eta}_1 + 2h_1\dot{\eta}_1 + \omega_1^2(1 - 2\mu_1 \cos \omega t)\eta_1 - \gamma_1 h_1^3 = 0, \quad (2.99)$$

де $2h_1 = b_2; \lambda_1 = \frac{3a_3 EI_3}{16\rho F} \left(\frac{l\pi}{L}\right)^2$.

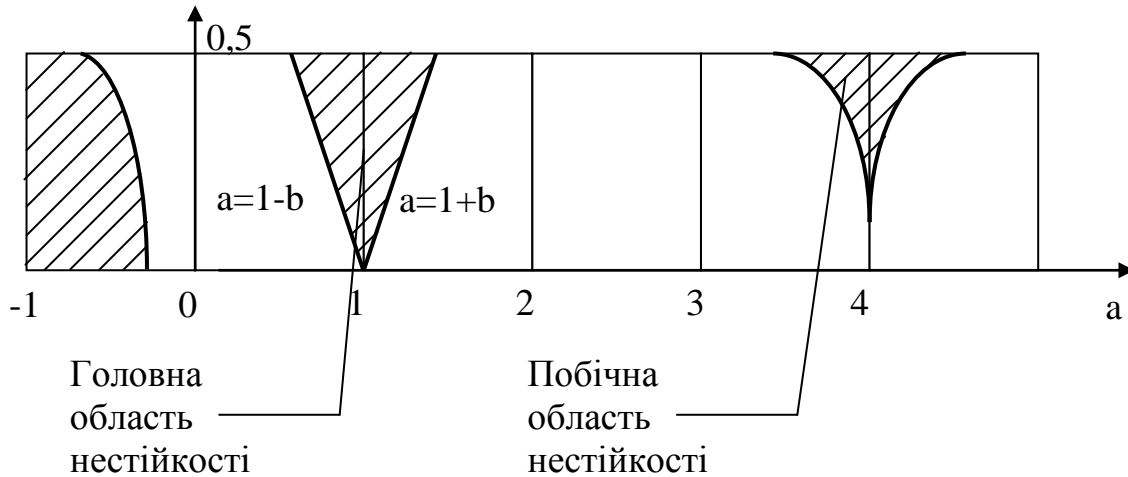


Рис. 2.13. Діаграма Айнса–Стретта

Розв’язок нелінійного рівняння (2.99) отримаємо методами нелінійної теорії колвань.

2.9. Згинні коливання балки з урахуванням зсуву та інерції обертання мас

Припущення й допоміжні формули. Для коротких балок при обчисленні високих частот, коли довжина хвилі деформації порівнянна з поперечними розмірами балки, технічна теорія згинних коливань, яка не враховує зсув і інерцію повороту перерізів, дає значні похибки (збільшення частот).

Таку модель називають балкою Бернуллі.

Академік С. П. Тимошенко запропонував враховувати інерцію повороту перерізів і зсув. Задача розглядається, як і раніше, в геометричному та фізично лінійному формулюванні. Припускається також правильність гіпотези плоских перерізів. Проте поперечні перерізи, залишаючись плоскими, вже не будуть перпендикулярними до зігнутої осі балки, а додатково під впливом зсуву

повертаються на кут γ_{cp} проти руху годинникової стрілки (перший тип коливань – знаки прогину і кута повороту однакові, рис. 2.14) або за рухом годинникової стрілки (другий тип коливань – знаки прогину і кута повороту протилежні). Процес коливань балки С. П. Тимошенко визначає двома функціями [12]:

$$w = w(x, t); \theta = \theta(x, t), \quad (2.100)$$

де w – прогин; θ – повний кут повороту перерізу балки, (верхній знак відповідає першому типу згинних коливань, нижній – другому),

$$\theta = \frac{\partial w}{\partial x} \pm \gamma_{cp}. \quad (2.101)$$

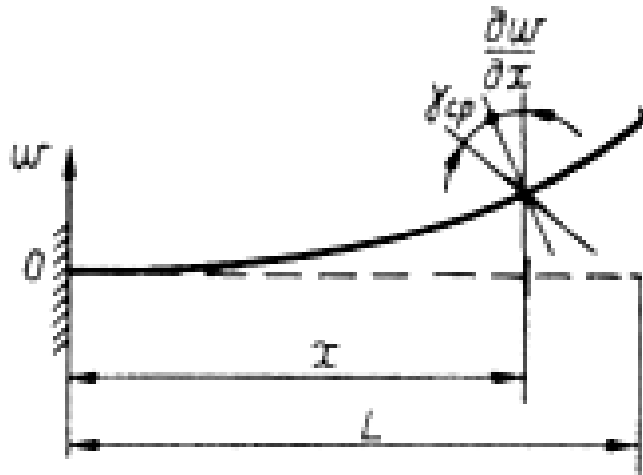


Рис. 2.14. Перший тип коливань балки Тимошенка

При згині модуль кута зсуву змінюється за висотою перерізу за таким самим законом, як і дотичне напруження (рис. 2.15). Обчислимо потенціальну енергію неоднорідного зсуву елемента, враховуючи закон Гука і формулу Журавського $\gamma = \frac{\tau}{G}; \tau = \frac{QS}{bI}$.

Тоді

$$d\bar{I} = \iint_{(F)} \frac{\tau dF \gamma dx}{2} = \frac{Q^2 dx}{2GI^2} \iint_{(F)} \frac{S^2}{b^2} dF = k_1 \frac{Q^2 dx}{2GF}, \quad (2.102)$$

де $k_1 = \frac{1}{k} = \frac{F}{I^2} \iint_{(F)} \frac{S^2}{b^2} dF$ – коефіцієнт форми перерізу, що враховує нерівномірність розподілу дотичних напружень у перерізі (відносної деформації зсуву). Прирівняємо (2.101) до значення потенціальної енергії такого самого елемента, але який перебуває у стані однорідного зсуву:

$$d\ddot{I} = \frac{\tau F \gamma dx}{2} = \frac{Q \gamma dx}{2}.$$

У результаті знайдемо вираз для поперечної сили:

$$Q = \frac{GF \gamma_{\bar{n}\bar{o}}}{k_1} = kGF \gamma_{\bar{n}\bar{o}}. \quad (2.103)$$

Залежність між повним кутом повороту перерізу θ і згинальним моментом M встановимо за допомогою рис. 2.15:

$$\begin{aligned} \Delta dx &= y \frac{\partial \theta}{\partial x} dx; \quad \varepsilon = y \frac{\partial \theta}{\partial x}; \quad \sigma = E \varepsilon = E \frac{\partial \theta}{\partial x} y; \\ M &= \iint_{(F)} \sigma_y dF = E \frac{\partial \theta}{\partial x} \iint_{(F)} y^2 dF = EI \frac{\partial \theta}{\partial x}. \end{aligned} \quad (2.104)$$

Останнє рівняння, якщо вважати $\theta = \frac{\partial w}{\partial x}$, нехтуючи γ_{cp} , перетворюється на

залежність $M = EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$, що відповідає технічній теорії згину.

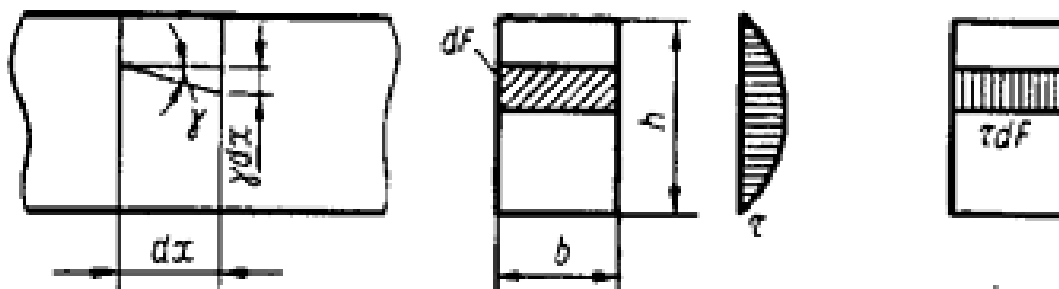


Рис. 2.15. Кут зсуву у перерізі й розподілення дотичних напружень у призматичній балці

Виведення диференціальних рівнянь коливань балки. Приєднуючи до сил, що діють на елемент dx , Д'Аламберові сили інерції від лінійного w

і кутового θ переміщень перерізів (рис. 2.16, 2.17), складемо рівняння динамічної рівноваги $\sum Y = 0$, $\sum M_0 = 0$. Із цих рівнянь, відкидаючи нескінченно малі величини другого порядку, дістанемо диференціальні залежності

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = q - \rho F \ddot{w}; \quad \frac{\partial M}{\partial x} = Q + I_m \ddot{\theta}. \quad (2.105)$$

Для визначеності вважаємо, що балка здійснює коливання першого типу. Тому зберігаємо верхній знак. Вираз (2.104) набуде вигляду $Q = -kGF \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \theta \right)$. Підставимо цю рівність у формулу (2.105) з урахуванням (2.104), матимемо систему рівнянь вимушених коливань пружної балки Тимошенка:

$$\begin{aligned} \rho F \ddot{w} - kGF \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) &= q(x, t); \\ EI \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - kGF \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \theta \right) - I_m \ddot{\theta} &= 0. \end{aligned} \quad (2.106)$$

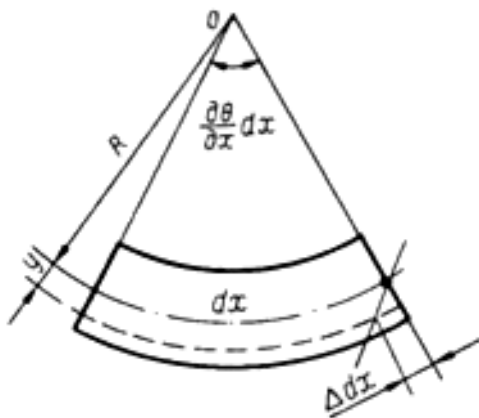


Рис. 2.16. Схема поворотів перерізів зусиль, що діють на елемент балки Тимошенка

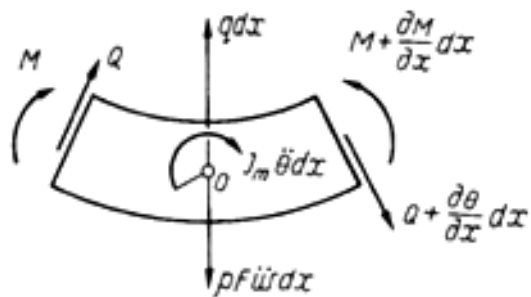


Рис. 2.17. Схема викривлення волокон балки

Альтернативні граничні умови:

$$EI \frac{\partial \theta}{\partial x} = \tilde{M} \quad \text{або} \quad \theta = \frac{\partial w}{\partial x} - \gamma_{\tilde{\theta}} = 0;$$

$$-kGF\gamma_{\tilde{v}} = \tilde{Q} \quad \text{або} \quad w = 0. \quad (2.107)$$

Крім граничних умов (по дві на кінці), до рівнянь (2.106) приєднаємо чотири початкові умови. При $q = 0$ дістанемо з (2.106) рівняння вільних коливань балки з урахуванням зсуву та інерції обертання. Ці рівняння у випадку шарнірного закріплення кінців балки мають такі розв'язки:

$$w = A_l \sin \frac{l\pi}{L} x \cos(\omega_l t - \varphi_l); \theta = B_l \cos \frac{l\pi}{L} x \cos(\omega_l t - \varphi_l).$$

Із частотного рівняння знаходять для того самого числа півхвиль l дві власні частоти $\omega_l^{(1)}, \omega_l^{(2)}$, що відповідають першому та другому типам коливань. Частоти другого спектра за величиною значно більші від частот першого спектра і порівнянні з ними за більших l . Тому на практиці визначають тільки кілька нижчих частот першого спектра і порівнюють їх із частотами, що одержані за допомогою технічної теорії. Це дає можливість оцінити вплив зсуву та інерції обертання. Унаслідок зсуву та інерції обертання власні частоти коливань балки зменшуються, і тим більше, чим вищий номер l частоти (коротша хвиля $\lambda_1 = \frac{2\pi}{k_1}$). Так, якщо основна частота зменшується

тільки на 2 %, то п'ята частота – на 25 %.

Наведені оцінки простіше обчислити за допомогою рівняння Тимошенка для прогину $w(x, t)$:

$$\rho F \ddot{w} + EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \rho I \left(1 + \frac{E}{kG} \right) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\rho^2 I}{kG} \frac{\partial^4 w}{\partial t^4} = 0. \quad (2.108)$$

Це рівняння можна знайти із системи (2.101), вважаючи $q = 0$; $EJ = const$; $GF = const$; $\rho F = const$ й виключаючи 0. Для цього продиференціюємо за x друге рівняння системи (2.107):

$$EI \frac{\partial^3 \theta}{\partial x^3} - kGF \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) - I_m \frac{\partial^3 \theta}{\partial x \partial t} = 0; \quad (2.109)$$

із першої ж рівності (2.106) знаходимо (за $q = 0$) вирази

$$kGF \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) = \rho F \ddot{w}; \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\rho \ddot{w}}{kG},$$

якими замінюємо всі останні доданки рівняння (2.107). Оскільки момент інерції маси елемента одиничної довжини I_m , щільність матеріалу балки ρ та осьовий момент інерції перерізу I пов'язані співвідношенням $I_m = \rho I$, приходимо до рівняння (2.108).

Розраховуючи резонансні вимушені коливання, потрібно врахувати внутрішнє тертя в матеріалі балки або зовнішнє в'язке тертя середовища. У першому випадку модулі пружності замінюють операторами $E(1 + \alpha_1 i); G(1 + \alpha_1 i)$, у другому – додають доданок $\rho F b_2 \dot{w}$, де i – уявна одиниця, якщо розглядати усталені коливання, а переміщення і змушувальні сили комплексні. Заміняючи i на оператор Бока–Шліппе–Колара $\frac{1}{[\omega]} \frac{\partial}{\partial t}$, можна розглядати як усталені коливання, так і неусталені.

2.10. Порівняльний аналіз значень власних частот

при згинних коливаннях балки Тимошенка

з технічною теорією залежно від геометричних розмірів

Як відомо, у класичній теорії Я. Бернуллі та Л. Ейлера вважається, що:

1) поперечні перерізи стержня, плоскі й перпендикулярні до осі стержня до деформації, під час згину залишаються плоскими і перпендикулярними деформованій осі стержня;

2) нормальні напруження на площадках, паралельних осі, незначні, тобто поздовжні перерізи чинять опір згину незалежно і не впливаючи один на одного;

3) інерцією обертання елемента стержня при згині нехтуємо [12].

У теорії Тимошенка враховується інерція повороту і зсув [5]. Крім того вважається, що плоскі перерізи залишаються плоскими, але не

перпендикулярними до деформованої осі стержня, а додатково під впливом зсуву обертаються на деякий кут.

Постановка задачі. Об'єктом дослідження є однорідна балка (рис. 2.18), яка являє собою двовимірну область простору R^2 з декартової системи координат, введеної таким чином: у тілі балки фіксується лінія зведення, яку називають середньою лінією $z = 0$, вісь Ox напрямлена зліва направо вздовж середньої лінії, вісь Oz – вниз, перпендикулярно осі Ox .

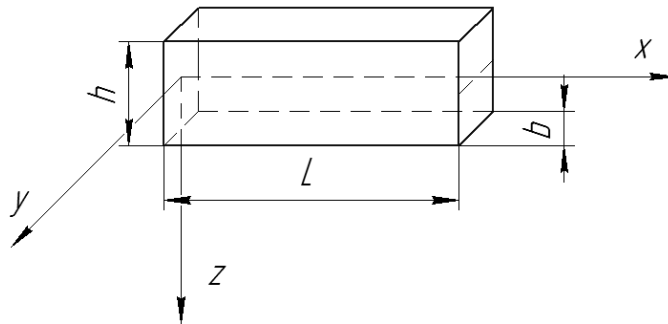


Рис. 2.18. Однорідна балка

В указаній системі відліку балка як двовимірну область Ω визначається як множина точок $\Omega = \left\{ x = [0, L]; z = \left[\frac{h}{2}, -\frac{h}{2} \right] \right\}, 0 \leq t \leq \infty$. Тут і надалі будемо використовувати такі позначення: L – довжина балки, h – висота, b – ширина.

Модель Тимошенка. Процес коливань балки Тимошенка визначає двома функціями:

$$W = W(x, t); \theta = \theta(x, t),$$

де W – прогин, θ – повний кут повороту перерізу балки.

Їх можна знайти із системи рівнянь вимушених коливань пружної балки Тимошенка:

$$\begin{cases} \rho F \ddot{W} - kGF \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \right) = q(x, t), \\ EI \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + kGF \left(\frac{\partial W}{\partial x} - \theta \right) - I_m \ddot{\theta} = 0. \end{cases} \quad (2.110)$$

Вважаючи, що $q = 0$; $EI = \text{const}$; $GF = \text{const}$; $\rho F = \text{const}$ і виключаючи θ , можна знайти рівняння для прогину. Для цього продиференціюємо за x друге рівняння системи (2.110):

$$EI \frac{\partial^3 \theta}{\partial x^3} + kGF \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) - I_m \frac{\partial^3 \theta}{\partial x \partial t^2} = 0. \quad (2.111)$$

Із першої рівності знаходимо (за $q = 0$) вирази:

$$kGF \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) = \rho F \ddot{W}; \quad \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - \frac{\rho \ddot{W}}{kG}, \quad (2.112)$$

якими заміняємо всі останні доданки рівняння (2.111). Оскільки момент інерції маси елемента одиничної довжини I_m , густина матеріалу балки ρ та осьовий момент інерції перерізу I пов'язані співвідношенням $I_m = \rho I$, отримуємо рівняння

$$\rho F \ddot{W} + EI \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} - \rho I \left(1 + \frac{E}{kG} \right) \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\rho^2 I}{kG} \frac{\partial^4 W}{\partial t^4} = 0. \quad (2.113)$$

Модель Ейлера–Бернуллі. У випадку, коли згина жорсткість EI призматичного стержня та площа поперечного перерізу F залишаються незмінними по всій довжині, рівняння поперечних коливань набуває вигляду [7, 12]

$$\rho F \ddot{W} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right) = 0.$$

Загальний розв'язок матиме вигляд

$$W_n = A_n \sin \frac{\pi n}{L} x + B_n \cos \frac{\pi n}{L} x + C_n \operatorname{sh} \frac{\pi n}{L} x + D_n \operatorname{ch} \frac{\pi n}{L} x. \quad (2.114)$$

Щоб знайти сталі, потрібно задати граничні умови. Для прикладу розглянемо шарнірно оперту балку, для якої

$$W_n(0) = W_n''(0) = W_n(l) = W_n''(l) = 0. \quad (2.115)$$

У цьому випадку власні кутові частоти будуть визначатися за формулою:

$$\omega_n = \frac{(\pi n)^2}{L} \sqrt{\frac{EI}{\rho F}}.$$

Розв'язок рівняння Тимошенка. У випадку шарнірного закріплення кінців розв'язок буде мати вигляд

$$W_n = A_n \sin \frac{\pi n}{L} x \cos(\omega_n t - \varphi_n). \quad (2.116)$$

Підставляючи (2.116) у рівняння (2.113), отримуємо частотне рівняння. Із частотного рівняння знаходять для того самого числа півхвиль n дві власні частоти $\omega_n^{(1)}$ та $\omega_n^{(2)}$, що відповідають першому та другому типам коливань. Частоти другого спектра за величиною значно більші від частот першого спектра і порівнянні з ними за більших n . Тому на практиці визначають тільки кілька нижчих частот першого спектра і порівнюють із частотами, що одержані за допомогою технічної теорії. Це дає можливість оцінити вплив зсуву та інерції обертання. Унаслідок зсуву та інерції обертання власні частоти коливань балки зменшуються, і тим більше, чим вищий номер n частоти.

Як приклад розглянемо сталеву $E = 2 \cdot 10^{11} \text{ Па}$, $G = 79,3 \cdot 10^9 \text{ Па}$, $\rho = 7870 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$ балку довжиною $L=1 \text{ м}$ та поперечним перерізом $b \times h = 50 \times 100 \text{ мм}$.

Порівняльний аналіз значень власних частот за двома теоріями наведено у табл. 2.3.

Таблиця 2.3. Порівняльний аналіз значень власних частот за двома теоріями

| № | Технічна | Тимошенко | Похибка, % | № | Технічна | Тимошенко | Похибка, % |
|---|----------|---------------|------------|----|-----------|---------------|------------|
| 1 | 1436 | 1420,088 708 | -1,12 | 21 | 633 276 | 219 738,137 9 | -188,20 |
| 2 | 5744 | 5501,846 344 | -4,40 | 22 | 695 024 | 232 116,063 5 | -199,43 |
| 3 | 12 924 | 11 804,413 37 | -9,48 | 23 | 759 644 | 244 485,638 2 | -210,71 |
| 4 | 22 976 | 19 811,583 25 | -15,97 | 24 | 827 136 | 256 845,135 8 | -222,04 |
| 5 | 35 900 | 29 065,768 37 | -23,51 | 25 | 897 500 | 269 193,279 | -233,40 |
| 6 | 51 696 | 39 213,303 64 | -31,83 | 26 | 970 736 | 281 529,147 4 | -244,81 |
| 7 | 70 364 | 49 997,973 52 | -40,73 | 27 | 1 046 844 | 293 852,104 | -256,25 |
| 8 | 91 904 | 61 238,744 55 | -50,07 | 28 | 1 125 824 | 306 161,737 9 | -267,72 |

| № | Технічна | Тимошенко | Похибка, % | № | Технічна | Тимошенко | Похибка, % |
|----|----------|---------------|---------------|----|-----------|---------------|---------------|
| 9 | 116 316 | 72 808,198 74 | -59,76 | 21 | 633 276 | 219 738,137 9 | -188,20 |
| 10 | 143 600 | 84 616,051 14 | -69,71 | 22 | 695 024 | 232 116,063 5 | -199,43 |
| 11 | 173 756 | 96 597,592 51 | -79,88 | 23 | 759 644 | 244 485,638 2 | -210,71 |
| 12 | 206 784 | 108 705,837 9 | -90,22 | 24 | 827 136 | 256 845,135 8 | -222,04 |
| 13 | 242 684 | 120 906,230 6 | -100,72 | 25 | 897 500 | 269 193,279 | -233,40 |
| 14 | 281 456 | 133 173,051 9 | -111,35 | 26 | 970 736 | 281 529,147 4 | -244,81 |
| 15 | 323 100 | 145 486,961 8 | -122,08 | 27 | 1 046 844 | 293 852,104 | -256,25 |
| 16 | 367 616 | 157 833,29 | -132,91 | 28 | 1 125 824 | 306 161,737 9 | -267,72 |
| 17 | 415 004 | 170 200,831 4 | -143,83 | 21 | 633 276 | 219 738,137 9 | -188,20 |
| 18 | 465 264 | 182 580,984 8 | -154,83 | 22 | 695 024 | 232 116,063 5 | -199,43 |
| 19 | 518 396 | 194 967,127 5 | -165,89 | 23 | 759 644 | 244 485,638 2 | -210,71 |
| 20 | 574 400 | 207 354,154 9 | -177,01 | 40 | 2 297 600 | 452 850,709 7 | -407,36 |

На рис. 2.19 зображено графік залежності значення власної частоти за двома теоріями від порядкового номера частоти n .

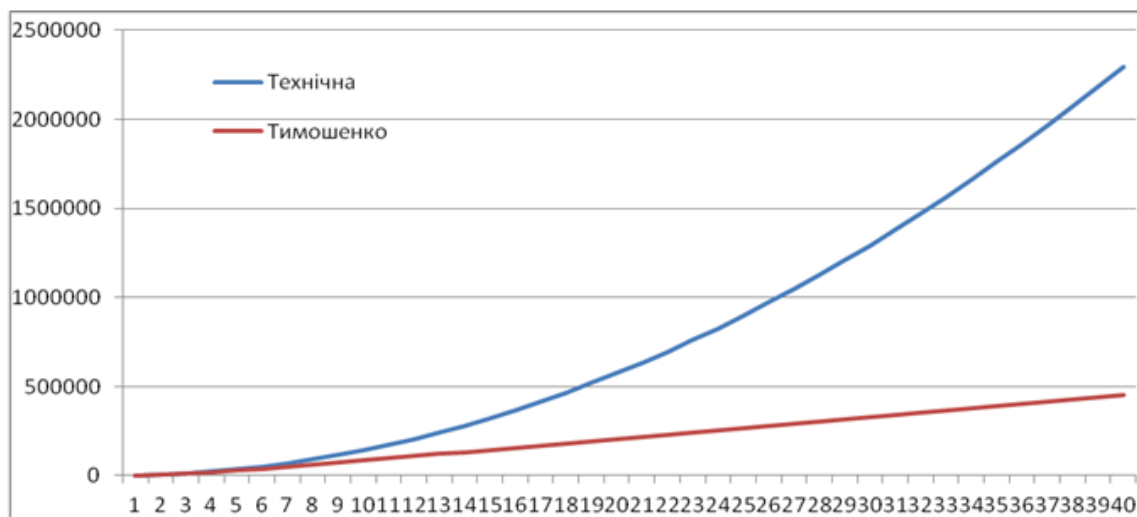


Рис. 2.19. Залежність частоти від порядкового номера

Розглянемо різні за довжиною та розміром поперечного перерізу балки. Щоб оцінити похибки між технічною теорією і теорією Тимошенка, будемо

розраховувати 5-ту частоту. Знайдемо залежність між похибкою та геометрією балки (довжиною L і моментом інерції I).

У табл. 2.4 наведено значення власних частот для різних за розмірами поперечного перерізу та довжиною балок.

Таблиця 2.4. Значення власних частот для різних за розмірами поперечного перерізу та довжиною балок за двома теоріями

| L , м | $b \times h$, мм | I , м ⁴ | Технічна | Тимошенко | Похибка, % | [n] |
|---------|-------------------|----------------------|--------------|------------|------------|---------|
| 0,5 | 100×200 | 0,000 066 67 | 287 254,44 | 180 242,78 | 37,25 | – |
| | 150×250 | 0,000 195 | 359 068,05 | 107 677,31 | 70,01 | – |
| | 200×100 | 0,000 017 | 143 627,22 | 84 616,05 | 41,09 | 1 |
| | 200×300 | 0,000 45 | 430 881,66 | 110 246,75 | 74,41 | – |
| | 400×400 | 0,002 133 | 574 508,88 | 113 212,68 | 80,29 | – |
| | 300×800 | 0,012 8 | 1 149 017,76 | 116 657,75 | 89,85 | – |
| 1 | 100×200 | 0,000 066 67 | 71 813,61 | 42 308,03 | 41,09 | 1 |
| | 150×250 | 0,000 195 | 89 767,01 | 45 918,52 | 48,85 | – |
| | 200×100 | 0,000 017 | 35 906,80 | 29 065,77 | 19,05 | 2 |
| | 200×300 | 0,00 045 | 107 720,41 | 48 495,65 | 54,98 | – |
| | 400×400 | 0,002 133 | 143 627,22 | 51 838,54 | 63,91 | – |
| | 300×800 | 0,012 8 | 287 254,44 | 56 606,34 | 80,29 | – |
| 1,5 | 100×200 | 0,000 0666 7 | 31 917,16 | 23 172,38 | 27,40 | 1 |
| | 150×250 | 0,000 195 | 39 896,45 | 26 025,52 | 34,77 | 1 |
| | 200×100 | 0,000 017 | 15 958,58 | 14 308,63 | 10,34 | 3 |
| | 200×300 | 0,000 45 | 47 875,74 | 28 205,35 | 41,09 | – |
| | 400×400 | 0,002 133 | 63 834,32 | 31 247,21 | 51,05 | – |
| | 300×800 | 0,012 8 | 127 668,64 | 36 218,24 | 71,63 | – |
| 2 | 100×200 | 0,000 066 67 | 17 953,40 | 14 532,88 | 19,05 | 2 |
| | 150×250 | 0,000 195 | 22 441,75 | 16 743,17 | 25,39 | 1 |
| | 200×100 | 0,000 017 | 8 976,70 | 8 408,07 | 6,33 | 4 |
| | 200×300 | 0,000 45 | 26 930,10 | 18 523,45 | 31,22 | 1 |
| | 400×400 | 0,002 133 | 35 906,80 | 21 154,01 | 41,09 | – |
| | 300×800 | 0,012 8 | 71 813,61 | 25 919,27 | 63,91 | – |
| 2,5 | 100×200 | 0,000 066 67 | 11 490,18 | 9 905,79 | 13,79 | 2 |
| | 150×250 | 0,000 195 | 14 362,72 | 11 626,31 | 19,05 | 2 |
| | 200×100 | 0,000 017 | 5 745,09 | 5 501,85 | 4,23 | 5 |
| | 200×300 | 0,000 45 | 17 235,27 | 13 071,10 | 24,16 | 1 |
| | 400×400 | 0,002 133 | 22 980,36 | 15 309,69 | 33,38 | 1 |
| | 300×800 | 0,012 8 | 45 960,71 | 19 729,16 | 57,07 | – |

| $L, \text{ м}$ | $b \times h, \text{ мм}$ | $I, \text{ м}^4$ | Технічна | Тимошенко | Похибка, % | $[n]$ |
|----------------|--------------------------|------------------|-----------|-----------|------------|-------|
| 3 | 100×200 | 0,000 066 67 | 7 979,29 | 7 154,32 | 10,34 | 3 |
| | 150×250 | 0,000 195 | 9 974,11 | 8 511,29 | 14,67 | 2 |
| | 200×100 | 0,000 017 | 3 989,64 | 3 869,40 | 3,01 | 6 |
| | 200×300 | 0,000 45 | 11 968,93 | 9 688,59 | 19,05 | 2 |
| | 400×400 | 0,002 133 | 15 958,58 | 11 586,19 | 27,40 | 1 |
| | 300×800 | 0,012 8 | 31 917,16 | 15 623,61 | 51,05 | – |
| 3,5 | 100×200 | 0,000 066 67 | 5 862,34 | 5 393,94 | 7,99 | 3 |
| | 150×250 | 0,000 195 | 7 327,92 | 6 481,12 | 11,56 | 3 |
| | 200×100 | 0,000 017 | 2 931,17 | 2 865,25 | 2,25 | 7 |
| | 200×300 | 0,000 45 | 8 793,50 | 7 448,62 | 15,29 | 2 |
| | 400×400 | 0,002 133 | 11 724,67 | 9 059,85 | 22,73 | 1 |
| | 300×800 | 0,012 8 | 23 449,34 | 12 721,70 | 45,75 | – |
| 4 | 100×200 | 0,000 066 67 | 4 488,35 | 4 204,04 | 6,33 | 4 |
| | 150×250 | 0,000 195 | 5 610,44 | 5 088,95 | 9,29 | 3 |
| | 200×100 | 0,000 017 | 2 244,18 | 2 205,14 | 1,74 | 8 |
| | 200×300 | 0,000 45 | 6 732,53 | 5 892,23 | 12,48 | 2 |
| | 400×400 | 0,002 133 | 8 976,70 | 7 266,44 | 19,05 | 2 |
| | 300×800 | 0,012 8 | 17 953,40 | 10 577,01 | 41,09 | – |
| 4,5 | 100×200 | 0,000 066 67 | 3 546,35 | 3 364,37 | 5,13 | 4 |
| | 150×250 | 0,000 195 | 4 432,94 | 4 095,46 | 7,61 | 3 |
| | 200×100 | 0,000 017 | 1 773,18 | 1 748,63 | 1,38 | 9 |
| | 200×300 | 0,000 45 | 5 319,53 | 4 769,54 | 10,34 | 3 |
| | 400×400 | 0,002 133 | 7 092,70 | 5 948,52 | 16,13 | 2 |
| | 300×800 | 0,012 8 | 14 185,40 | 8 938,69 | 36,99 | 1 |
| 5 | 100×200 | 0,000 066 67 | 2 872,54 | 2 750,92 | 4,23 | 5 |
| | 150×250 | 0,000 195 | 3 590,68 | 3 363,23 | 6,33 | 4 |
| | 200×100 | 0,000 017 | 1 436,27 | 1 420,09 | 1,13 | 10 |
| | 200×300 | 0,000 45 | 4 308,82 | 3 934,80 | 8,68 | 3 |
| | 400×400 | 0,002 133 | 5 745,09 | 4 952,90 | 13,79 | 2 |
| | 300×800 | 0,012 8 | 11 490,18 | 7 654,84 | 33,38 | 1 |

У табл. 2.4 наведено допустимі номери $[n]$ власних частот, які можна визначити за допомогою технічної теорії. Позначка «–» означає, що для цього перерізу і довжини не можна використовувати технічну теорію.

На рис. 2.20, *a-e* зображено графіки залежності власної частоти коливань від довжини балки за двома теоріями.

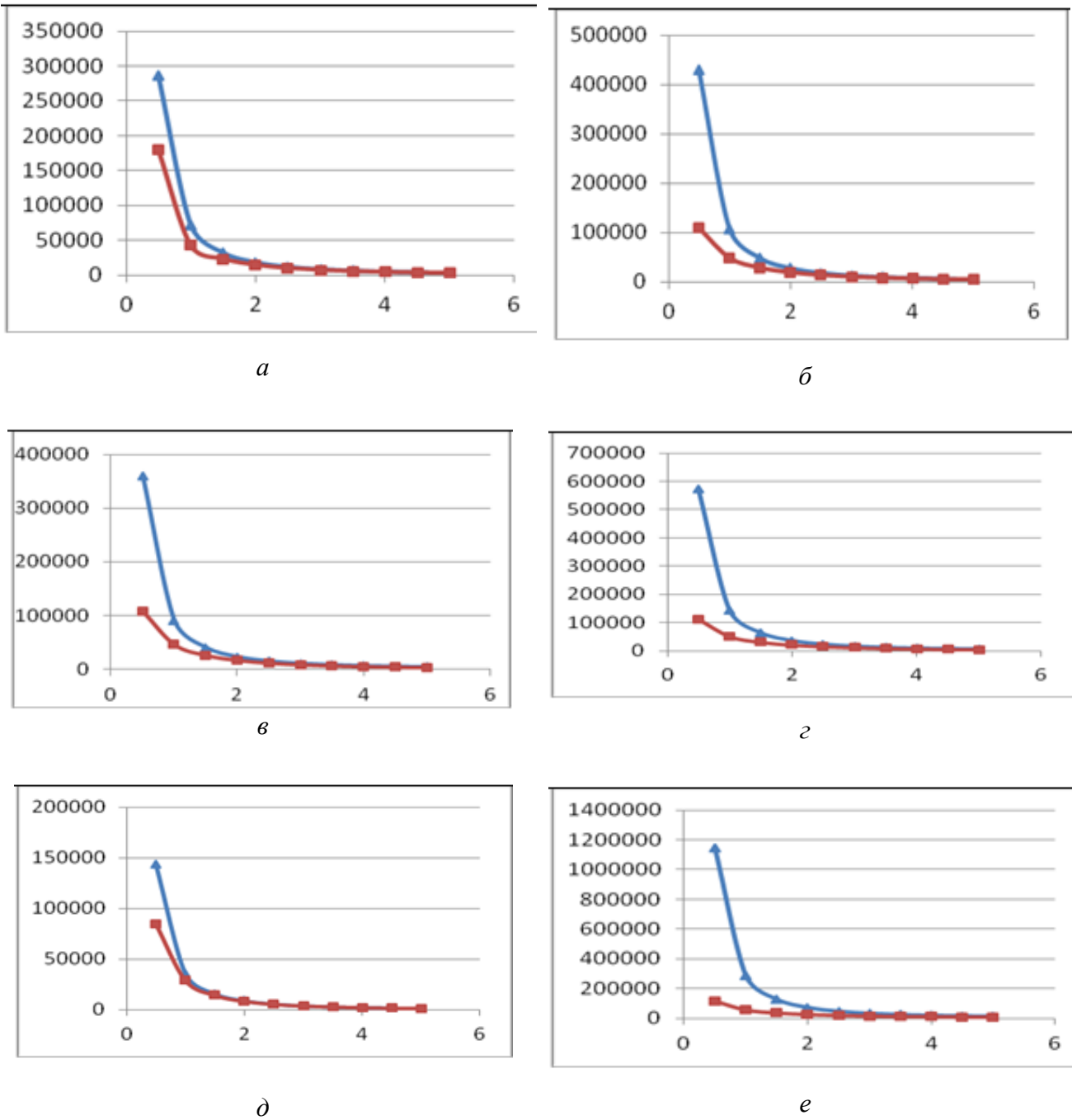


Рис. 2.20. Залежність власної частоти коливань від довжини балки за двома теоріями (сині трикутники – теорія Тимошенка, червоні квадрати – технічна теорія) для різних за розмірами перерізів: *a* – 100×200, *б* – 150×250, *в* – 200×100, *г* – 200×300, *д* – 400×400, *е* – 300×800

Спостерігаємо певну залежність: зі збільшенням довжини балки похибка між значеннями власних частот зменшується.

На рис. 2.21 зображено графік залежності власної частоти коливань від моменту інерції перерізу балки довжиною 2 м.

Як бачимо, зі збільшенням моменту інерції поперечного перерізу балки збільшується похибка у значеннях власної частоти коливань за двома теоріями.

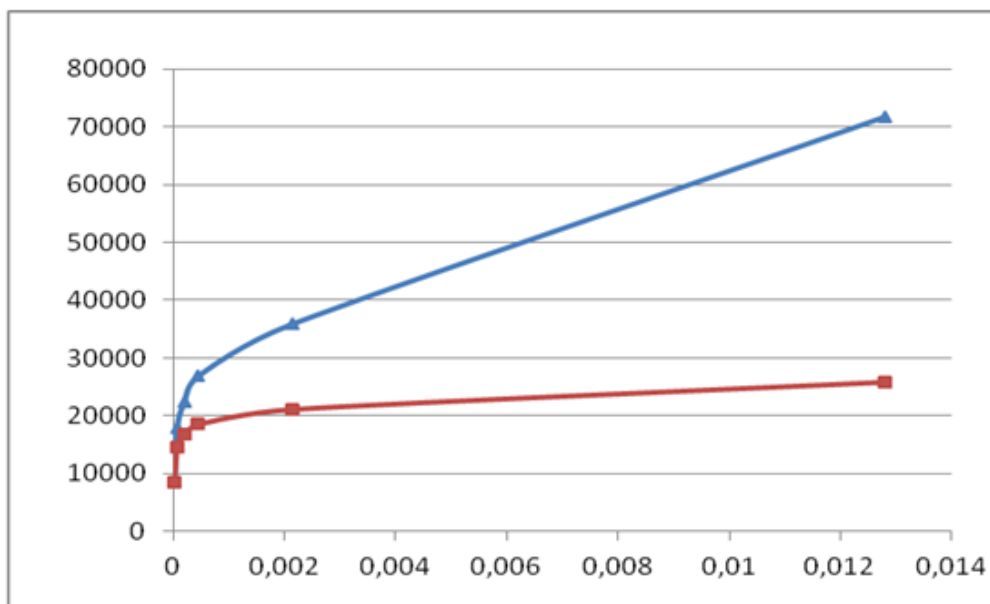


Рис. 2.21. Графік залежності власної частоти коливань від моменту інерції перерізу балки за двома теоріями (сині трикутники – технічна теорія, червоні квадрати – теорія Тимошенка)

Отже, чим більша буде довжина і менший момент інерції поперечного перерізу балки, тим ближче будуть знаходитись значення власних частот, отриманих за допомогою технічної теорії та теорії Тимошенка. Можна зробити висновок про те, що для довгих і тонких балок значення власних частот, отриманих технічною теорією, будуть точнішими, ніж для коротких балок.

2.11. Наближені методи визначення власних частот і форм коливань

Розглянуті точні способи розв'язання лінійних (наближених) рівнянь дають результати, що задовільно збігаються лише в нижній частині спектра частот і форм коливань. Проте й такі точні для диференціальних рівнянь і наближені для реальних тіл результати одержати не завжди можливо. У загальних випадках доводиться здійснювати наближені обчислення, результати яких, як правило, майже не збігаються з експериментом, а частина визначуваного спектра набагато коротша.

Метод Релея. Обираючи наближений вираз першої форми коливань балки (x) , що задовольняє хоча б кінематичні граничні умови, знаходимо завищене значення основної частоти за формулою

$$\omega_1^2 = \frac{[W_1, W_1]_C}{[W_1, W_1]_A} = \frac{K_1}{M_1} = \frac{\Pi_0}{T_0}, \quad (2.117)$$

де $[W_1, W_1]_C = K_1 = \Pi_0$ – енергетичний добуток відносно пружного оператора C (зведений коефіцієнт жорсткості; величина, пропорційна амплітудному значенню потенціальної енергії балки); $[W_1, W_1]_A = M_1 = T_0$ – енергетичний добуток відносно інерційного оператора A (зведений коефіцієнт інерції; величина, пропорційна амплітудному значенню кінетичної енергії).

При згинних коливаннях балки ці величини будуть відповідно

$$\int_0^L EI (W_1'')^2 dx; \int_0^L \rho F (W_1)^2 dx.$$

Часто обирають не $W_1(x)$, а деяке значення $q(x)$. За цим навантаженням, розв'язуючи статистичну задачу згину, визначають вигляд пружної лінії $\tilde{W}_1(x)$, а обчислення потенціальної енергії замінюють обчисленням роботи навантаження $q(x)$ на знайденому переміщенні $\tilde{W}_1(x)$:

$$\frac{1}{2} \int_0^L q(x) \tilde{W}_1(x) dx.$$

Тоді формула Релея матиме вигляд

$$\omega_1^2 = \frac{\int_0^L q(x) \tilde{W}_1(x) dx}{\int_0^L \rho F \tilde{W}_1^2(x) dx}. \quad (2.118)$$

Якщо маємо зосереджену в перерізі балки масу M або вибрану зосереджену в перерізі x_i силу P_i , то додаємо доданки до знаменника вигляду $M_i W_1^2(x_i)$ або до чисельника вигляду $P_i W_1(x_i)$.

Формула (2.118) через відсутність операції диференціювання дає більшу точність порівняно з формулою (2.117), де є операція диференціювання наближеної функції. Формулу (2.117) можна дістати з варіаційного принципу Релея:

$$\delta(\Pi_0 - \omega^2 T_0) = 0.$$

Другу частоту обчислимо за формулою

$$\omega_2^2 = \frac{[W_2, W_2]_C}{[W_2, W_2]_A} = \frac{K_2}{M_2} = \frac{\Pi_0}{T_0}, \quad (2.119)$$

при додатковій умові $[W_1, W_2]_A = 0$ або $[W_1, W_2]_C = 0$.

Метод Релея–Рітца. Форму коливань обираємо у вигляді зрізаного ряду координатних лінійно незалежних зображувальних функцій $W_k(x)$, що задовольняють кінематичні граничні умови

$$W(x) = \sum_{k=1}^N f_k W_k(x). \quad (2.120)$$

Підставимо цей вираз у формулу (2.117), тоді

$$\omega_2^2 = \frac{\sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N c_{jk} f_j f_k}{\sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N a_{jk} f_j f_k}, \quad (2.121)$$

де $c_{jk} = [W_j, W_k]_C$; $a_{jk} = [W_j, W_k]_A$.

Умови мінімуму функції (2.121) приводять до системи лінійних однорідних диференціальних рівнянь відносно коефіцієнтів f_k :

$$\sum_{k=1}^N (c_{jk} - \omega^2 a_{jk}) f_k = 0; \quad j = 1, 2, \dots, N. \quad (2.122)$$

Умови існування ненульового розв'язку цієї системи дає вікове рівняння

$$\det |c_{jk} - \omega^2 a_{jk}| = 0. \quad (2.123)$$

Метод Бубнова–Гальоркіна. Розв’язок шукаємо у вигляді розкладу (2.120), проте, на відміну від попереднього методу, координатні функції мають задовольняти всі граничні умови, а розв’язок (2.120) підставляємо у диференціальне рівняння форм коливань і проводимо ортогоналізацію відносно кожної координатної функції. У результаті знову приходимо до системи (2.122), де $c_{jk} = (CW_j, W_k)$, $a_{jk} = (AW_j, W_k)$. Метод Бубнова–Гальоркіна, на відміну від методу Релея–Рітца, можна використовувати і для вимушених коливань, з урахуванням тертя і без нього.

Метод Донкерлі–Саутвелла. Якщо рівняння для власних форм коливань

$$(C - \omega^2 A)W = 0$$

можна подати у вигляді

$$(C - \omega^2 \sum A_j)W = 0; (\sum C_j - \omega^2 A)W = 0,$$

то парціальними рівняннями, відповідно, будуть рівняння

$$(C - \theta_j^2 A_j)W_j = 0; (C - \theta_j^2 A)W_j = 0.$$

Формули Донкерлі та Саутвелла для основної частоти матимуть вигляд

$$\frac{1}{\omega^2} \approx \sum \frac{1}{\theta_j^2}; \omega^2 = \theta_j^2, \quad (2.124)$$

де θ_j – парціальні частоти.

Наведені формули дають занижене значення основної частоти.

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

2.1. Виведіть диференціальне рівняння поперечних коливань стержня.

2.2. Запишіть рівняння, початкові та граничні умови для вільних згинальних коливань стержня.

2.3. Наведіть властивості розв’язків диференціального рівняння вільних згинальних коливань балки.

2.4. Доведіть умови ортогональності та формул зведення для власних форм згинальних коливань балки змінного перерізу.

2.5. Визначте власні частоти та власні форми коливань балки постійного перерізу у разі шарнірного закріплення кінців балки.

2.6. Запишіть функції О. М. Крилова та наведіть їх властивості.

2.7. Виведіть рівняння вимушених коливань балки без тертя під дією довільної розподіленої сили.

2.8. Запишіть рівняння вимушених коливань балки без тертя під дією гармонічної розподіленої сили.

2.9. Виведіть рівняння вимушених коливань балки з урахуванням в'язкого тертя під дією довільної розподіленої сили.

2.10. Проаналізуйте вимушені коливання балки з урахуванням в'язкого тертя під дією гармонічної розподіленої сили.

2.11. Дайте визначення кінематичного збудження згинальних коливань балки.

2.12. Як впливають поздовжні зусилля на вільні поперечні коливання балки?

2.13. Запишіть рівняння динамічної рівноваги балки С.П. Тимошенка.

2.14. Виведіть диференціальні рівняння вимушених коливань балки С. П. Тимошенка.

2.15. Розв'яжіть диференціальні рівняння вільних коливань балки С. П. Тимошенка постійного перерізу з шарнірно закріпленими кінцями.

Розділ 3

КОЛИВАННЯ ПЛАСТИНОК

3.1. Класифікація пластинок

Пластинка – це тонке двовимірне тіло, товщина якого у багато разів менша від двох інших розмірів, а серединна поверхня є площиною. *Серединною поверхнею* називають поверхню, яка ділить товщину пластинки навпіл.

Пластинки розрізняють за *конфігурацією* (прямокутні, трикутні, круглі тощо), *властивістю матеріалу* (однорідні, неоднорідні, ізотропні, анізотропні та ін.), *товщиною* (товсті, тонкі, дуже тонкі), а також за *деформативністю* (жорсткі, гнучкі, дуже гнучкі).

При $h > \frac{a}{5}$ пластинку називають *товстою (плитою)*, при $\frac{a}{5} \leq h \leq \frac{a}{80}$ – *тонкою пластинкою*, при $h < \frac{a}{80}$ – *дуже тонкою пластинкою*.

При $f < \frac{a}{5}$ – тонку пластинку називають *жорсткою*, при $\frac{h}{5} \leq f \leq 5h$ – *гнучкою*, а при $f > 5h$ тонку й дуже тонку пластинку називають *абсолютно гнучкими (мембранами)*. Тут h – товщина, a – менший розмір серединної площини, f – стріла прогину (найбільший прогин). У жорсткій пластинці нехтують напруженнями в серединній поверхні. У гнучкій пластинці разом із згинальними напруженнями враховують і напруження в серединній поверхні (мембранні напруження). У мембрані (абсолютно гнучкій пластинці) враховують тільки напруження в серединній поверхні.

Поперечні коливання пластинок відбуваються з більш низькими частотами, ніж коливання пластинок у своїй площині. Тому першим приділяється більше уваги, ніж другим. Проте в деяких випадках, коли виникає змінне в часі плоске напруження або плоский деформований стан, необхідно розглядати коливання пластинок у своїй площині.

3.2. Поперечні коливання тонких жорстких прямокутних пластинок

3.2.1. Виведення диференціального рівняння коливань

Припущення. Оскільки прогини малі $\left(f < \frac{h}{5}\right)$, то справедливі такі гіпотези

Кірхгофа–Лява [5, 12]:

1) нормальний до серединної площини прямолінійний елемент залишається після деформації прямолінійним і нормальним до деформованої поверхні, зберігаючи свою довжину (гіпотеза прямих нормалей);

2) нормальні до серединної поверхні напруження малі й ними можна знехтувати ($\sigma_z = 0$), реалізується узагальнений плоский напружений стан, який змінюється залежно від товщини;

3) серединна площина нерозтяжна. Крім того, вважаємо, що задача геометрично і фізично лінійна. Праву прямокутну систему координат обираємо так, щоб площина xOy збігалася з серединною поверхнею, вісь y спрямуємо донизу (рис. 3.1), зсувом та інерцією повороту перерізів при згинних коливаннях нехтуємо.

Розрахункові рівняння. Перша гіпотеза Кірхгофа–Лява дає змогу виразити переміщення u , v через прогин w (рис. 3.2):

$$\operatorname{tg}(\Theta x) = \frac{-u}{z} = \frac{\partial w}{\partial x}; \quad u = -z \frac{\partial w}{\partial x}; \quad v = -z \frac{\partial w}{\partial x}. \quad (3.1)$$

Отже, процес поперечних коливань тонкої жорсткої пластинки визначається однією двовимірною функцією:

$$w = w(x, y, t). \quad (3.2)$$

За формулами Коші, враховуючи (3.1), визначаємо компоненти тензора деформацій поверхні, що перебувають на відстані z від серединної поверхні:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}; \quad \varepsilon_{xy} = \frac{\gamma_{xy}}{2} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \quad (3.3)$$

де $-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \chi_x$, $-\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \chi_y$ – кривизна перерізу серединної поверхні площиною,

що паралельна площині xz , xy ; $-\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \chi_{xy}$ – крутіння серединної поверхні

(зміна кривини залежно від y , x).

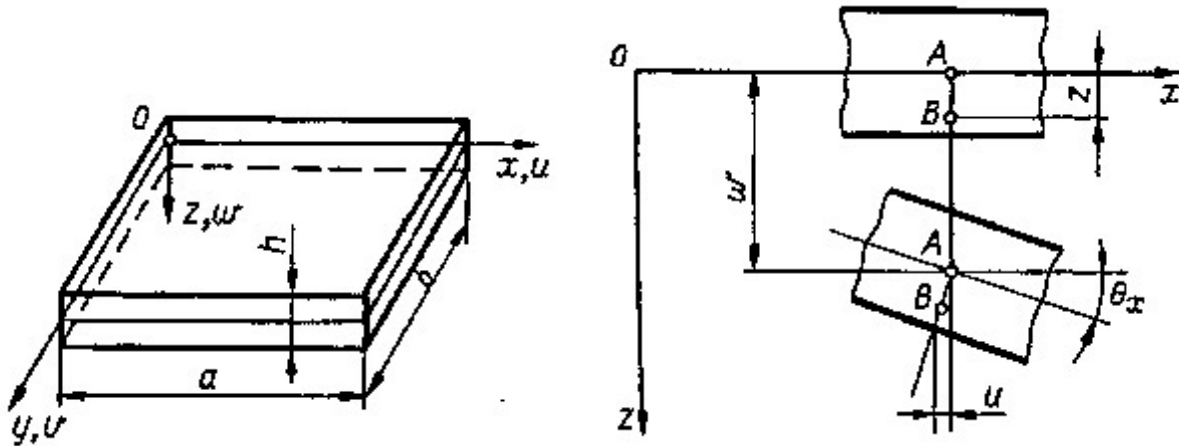


Рис. 3.1. Пластинка з правою системою координат

Рис. 3.2. Переміщення точок пластинки у площині xz

Деформаціям (3.3) за законом Гука і згідно з другою гіпотезою Кірхгофа–Лява відповідають напруження

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y) = -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right); \quad (3.4)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_y + \nu \varepsilon_x) = -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right);$$

$$\tau_{xy} = 2GE_{xy} = \frac{E}{1-\nu^2} \varepsilon_{xy} = -\frac{Ez}{1-\nu^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y},$$

де E , G , ν – відповідно модуль Юнга, модуль зсуву, коефіцієнт Пуассона.

Суцільними лініями зображено суто згинні, пунктиром – напруження від поперечних сил (рис. 3.3). Напрямки нормальних напружень вибрано так, щоб відповідні ним згинальні моменти були додатними. Напрямок дотичних напружень, які відповідають моменту крутіння, вибрано залежно від напрямку

нормальних напружень: якщо нормальне напруження напрямлене у від'ємний (додатний) бік осі, то дотичні напруження напрямлені у від'ємний (додатний) бік осей. Внутрішні зусилля від цих напружень, що показані на рис. 3.4, вважатимемо додатними згідно з правилами курсу опору матеріалів. Перший індекс у позначенні напруження (рис. 3.3) відповідає нормалі до площини, де діє напруження, а другий – у напрямку напружень; єдиний індекс відповідає площині та напруженню (напрямку).

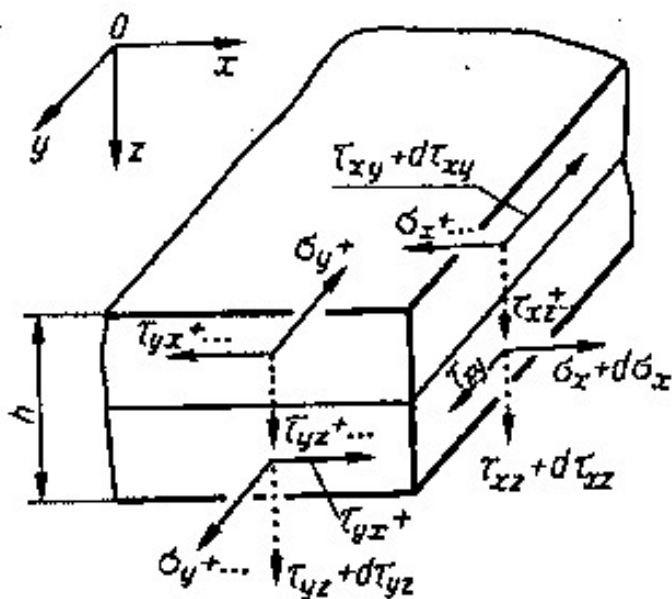


Рис. 3.3. Напруження у перерізах пластинки

Обчислимо згинальні та крутні моменти, а також поперечні сили у перерізах x та y (перпендикулярних до Ox та Oy), що діють на одиницю довжини перерізу пластинки:

$$\left. \begin{aligned} M_x &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x z dz = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ M_y &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_y z dz = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ M_{xy} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xy} z dz = -D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = M_{yx} \end{aligned} \right\}, \quad (3.5)$$

$$Q_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xz} dz; \quad Q_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{yz} dz, \quad (3.6)$$

де $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ – циліндрична жорсткість пластинки на згин.

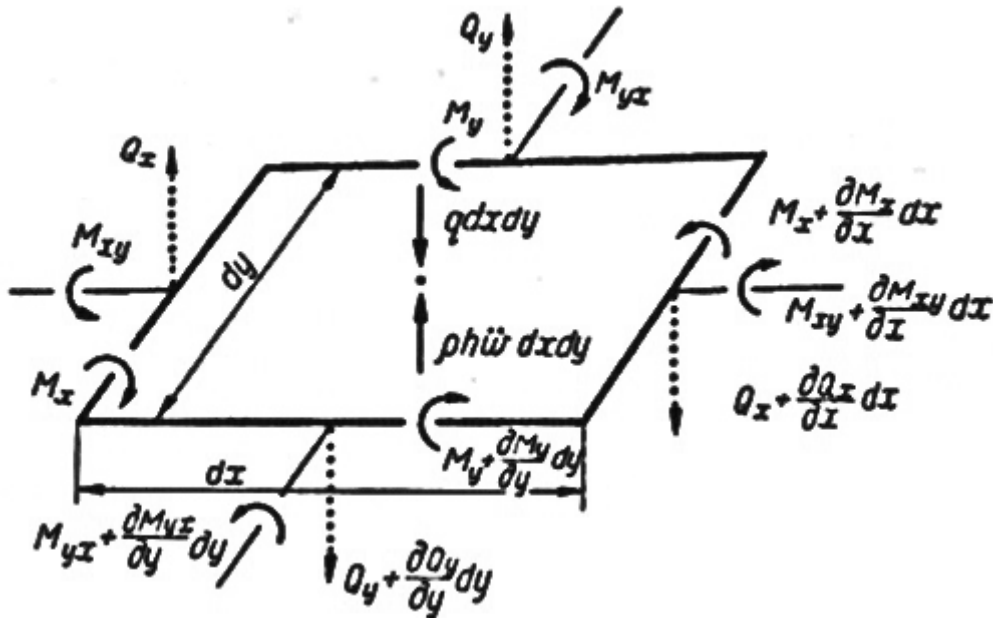


Рис. 3.4. Внутрішні зусилля, прикладені до одиниці довжини краю серединної поверхні, та зовнішні сили, що діють на елемент серединної поверхні

Якщо вісь z напрямлена вгору, то у формулах (3.5) знак перед D змінюється на додатний, тому що знаки моментів і кривизни правої та лівої частини у цьому випадку збігаються. Замінивши праві частини виразів (3.4) на моменти (3.5), дістанемо формули для обчислення напружень через внутрішні зусилля при згинанні пластин:

$$\sigma_x = \frac{12M_x z}{h^3}; \quad \sigma_y = \frac{12M_y z}{h^3}; \quad \tau_{xy} = \tau_{yx} = \frac{12M_{xy} z}{h^3}. \quad (3.7)$$

3.2.2. Рівняння рівноваги елемента $dx dy$ коливної пластинки (диференціальні залежності при згинанні пластинки)

На елемент пластинки діють внутрішні зусилля та зовнішня поперечна сила $q(x) dx dy$ (рис. 3.4). До цих сил за принципом Д'Аламбера додамо сили

інерції поперечних переміщень – $\rho h \ddot{w} dx dy$. Помножимо всі зусилля, що діють на горизонтальні грані, на dx , а на вертикальні грані – на dy , дістанемо у звичайний спосіб рівняння рівноваги:

$$\sum z = 0; \quad \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q - \rho h \ddot{w} = 0; \quad \sum M_{0x} = 0; \quad \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - Q_y = 0;$$

$$\sum M_{0y} = 0; \quad \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} - Q_x = 0; \quad (3.8)$$

підставивши дві останні диференціальні залежності у першу, знайдемо ще одну диференціальну залежність (рівняння рівноваги):

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - q(x, y, t), \quad (3.9)$$

в якій за законом парності дотичних напружень $M_{xy} = M_{yx}$.

3.3. Диференціальне рівняння вимушених коливань пружної тонкої пластинки

Диференціальне рівняння вимушених коливань пружної тонкої пластинки знайдемо, підставивши формули (3.5) у (3.9):

$$\Delta(D\Delta w) - (1 - \nu) \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(D \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(D \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(D \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \right] + ph \ddot{w} = q(x, y, t). \quad (3.10)$$

В окремому випадку, коли D та h сталі, з (3.10) дістанемо рівняння Софі Жермен:

$$D\Delta\Delta w + ph \ddot{w} = q(x, y, t), \quad (3.11)$$

де

$$\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}; \quad \Delta\Delta = \nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}. \quad (3.12)$$

Рівняння (3.10) та (3.11) справедливі доти, доки довжина хвилі деформації задовольняє умову $\lambda_1 \gg h$.

3.4. Урахування внутрішнього і зовнішнього тертя

Недосконала пружність матеріалу виявляється і в синфазному, і несинфазному (гістерезисному) відхиленнях від закону Гука. Синфазним відхиленням при малих коливаннях можна знехтувати. Гістерезисне відхилення (внутрішнє тертя) враховуємо за гіпотезою Кельвіна–Фойхта або за гіпотезою Бока–Шліппе–Колара, вважаючи його для спрощення однаковим при зсуві, розтягненні, згинанні (точніше: однаковим у шаровому та девіаторному напружено-деформованому станах). Для цього слід помножити модулі пружності у формулах (3.10) та (3.11) і циліндричну жорсткість D у рівнянні (3.5) на оператор Бока–Шліппе–Колара $\left(1 + \alpha_1 [\omega]^{-1} \frac{\partial}{\partial t}\right)$ – або на оператор Кельвіна–Фойхта $\left(1 + b_1 \frac{\partial}{\partial t}\right)$, де α_1 , β_1 – коефіцієнти гістерезисних відхилень відповідно за рахунок внутрішнього частотонезалежного чи частотозалежного тертя. Таке множення забезпечує пропорційність оператора демпфірування оператору пружності й, отже, повне розділення змінних при використанні методу головних координат. Для розділення змінних при врахуванні зовнішнього тертя, наприклад в'язкого, потрібно вважати оператор демпфірування пропорційним оператору інерційному, тобто в ліву частину рівняння (3.11) ввести доданок $\rho F b_2 \dot{w}$.

До рівняння (3.10) у загальному випадку потрібно приєднати дві початкові умови:

$$w(x, y, 0) = w_0(x, y); \quad \dot{w}(x, y, 0) = \dot{w}_0(x, y), \quad (3.13)$$

і вісім граничних умов – по дві на кожному краю.

Є чотири види граничних умов для прямокутної пластинки постійної товщини (рис. 3.1):

1) згинальний момент і поперечна сила на вільному краї, наприклад, за $x = a$ дорівнюють нулю:

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0,$$

$$Q_x^* = -D \left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right] = 0, \quad (3.14)$$

де $Q_x^* = Q_x + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}$ – зведена поперечна сила;

2) прогин і кут повороту перерізу закріпленого краю, наприклад, при якщо $x = a$, дорівнюють нулю:

$$w = \frac{\partial w}{\partial x} = 0; \quad (3.15)$$

3) прогин і згинальний момент шарнірно опертого краю, наприклад, за $x = a$, дорівнюють нулю:

$$w = 0 \quad M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0. \quad (3.16)$$

Перша умова приводить до $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$ за $x = a$. Тоді другу умову запишемо

як $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0;$

4) кут повороту та поперечна сила плаваючого закріплення (напрявлений край), наприклад, при $x = a$, дорівнюють нулю:

$$\frac{\partial w}{\partial x^2} = 0; \quad (3.17)$$

$$Q_x^* = -D \left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right] = 0. \quad (3.18)$$

Перша умова приводить до $\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} = 0$ по краю.

Тоді друга умова матиме вигляд $\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = 0.$

3.5. Вільні коливання прямокутної однорідної пружної пластинки постійного перерізу

Вважатимемо в (3.11), що $q = 0$. Тоді дістанемо рівняння вільних поперечних коливань тонкої жорсткої пластинки [5, 12]:

$$D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0. \quad (3.19)$$

Розв'язок цього рівняння у вигляді

$$w(x, y, t) = W(x, y) A \cos(\omega t - \varphi) \quad (3.20)$$

дає рівняння для власних форм коливань

$$D \Delta \Delta W - \rho h \omega^2 W = 0. \quad (3.21)$$

Загальний розв'язок рівняння (3.21) з вісьмома сталими невідомий, але доведено всі властивості розв'язків, у тому числі й умови ортогональності. Умови ортогональності та формули зведення до головних коефіцієнтів інерції та жорсткості відносно кінетичної і потенціальної енергій мають вигляд

$$\rho h \int_0^a \int_0^b W_{mn} W_{\bar{m}\bar{n}} dx dy = \begin{cases} 0 & \text{при } \bar{m} \neq m \text{ або } \bar{n} = n \\ M_{mn} & \text{при } \bar{m} = m \text{ або } \bar{n} = n \end{cases}; \quad (3.22)$$

$$D \int_0^a \int_0^b \left\{ \Delta W_{mn} \Delta W_{\bar{m}\bar{n}} - 2(1-\nu) \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 W_{mn}}{\partial x^2} \frac{\partial^2 W_{\bar{m}\bar{n}}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 W_{mn}}{\partial y^2} \frac{\partial^2 W_{\bar{m}\bar{n}}}{\partial x^2} \right) - \frac{\partial^2 W_{mn}}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 W_{\bar{m}\bar{n}}}{\partial x \partial y} \right] \right\} dx dy = \begin{cases} 0 & \text{при } \bar{m} \neq m \text{ або } \bar{n} = n \\ M_{mn} & \text{при } \bar{m} = m \text{ або } \bar{n} = n \end{cases}. \quad (3.23)$$

При розрахунках користуються тільки умовою (3.22), замінюючи пружний оператор інерційним за формулою (3.21).

3.6. Точний розв'язок задачі про вільні коливання прямокутної пластинки за граничних умов Нав'є

У випадку прямокутної пластинки із шарнірно закріпленими краями (див. рис. 3.1) її граничні умови – умови Нав'є

$$W = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 0 \text{ при } x = 0 \text{ і } x = a;$$

$$W = \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = 0 \text{ при } y = 0 \text{ і } y = b$$
(3.24)

задовольняє розв'язок

$$W_{mn}(x, y) = \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}.$$
(3.25)

Підставимо (3.25) в (3.21), знайдемо формулу для характеристичних чисел:

$$k^4 = \frac{\rho h}{D} \omega^2 = \left[\left(\frac{m}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right]^2$$
(3.26)

і відповідно до (3.26) формулу для власних частот:

$$\omega_{mn} = \pi^2 \left[\left(\frac{m}{a} \right)^2 + \left(\frac{n}{b} \right)^2 \right] \sqrt{\frac{D}{\rho h}}.$$
(3.27)

Загальним розв'язком вихідного рівняння (3.19) буде

$$w(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn}(x, y) (A_{mn} \cos \omega_{mn} t) + B_{mn} \sin \omega_{mn} t =$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn}(x, y) a_{mn} \cos(\omega_{mn} t - \varphi_{mn}).$$
(3.28)

де W_{mn} визначається за формулою (3.25) (рис. 3.5).

Часові сталі A_{mn} , B_{mn} (a_{mn} , φ_{mn}) знаходимо з початкових умов (3.13). Підстановка (3.28) у (3.13) дає

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn} A_{mn} = \omega_0(x, y); \quad \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn} B_{mn} \omega_{mn} = \tilde{\omega}_0(x, y).$$

Помножимо ці вирази на $\rho h W_{mn} dx dy$ та проінтегруємо у межах від 0 до a й від 0 до b . Далі, врахувавши умови (3.22), знайдемо сталі

$$A_{mn} = \frac{\rho h}{M_{mn}} \int_0^a \int_0^b \omega_0 W_{mn} dx dy; \quad B_{mn} = \frac{\rho h}{M_{mn} \omega_{mn}} \int_0^a \int_0^b \tilde{\omega}_0 W_{mn} dx dy. \quad (3.29)$$

Оскільки

$$M_{mn} = \rho h \int_0^a \int_0^b W_{mn}^2 dx dy = \rho h \int_0^a \int_0^b \sin^2 \frac{m\pi x}{a} \sin^2 \frac{n\pi y}{b} dx dy = \frac{\rho h a b}{4},$$

то формули (3.29) набудуть вигляду

$$A_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b \omega_0 W_{mn} dx dy; \quad B_{mn} = \frac{4}{ab \omega_{mn}} \int_0^a \int_0^b \tilde{\omega}_0 W_{mn} dx dy. \quad (3.30)$$

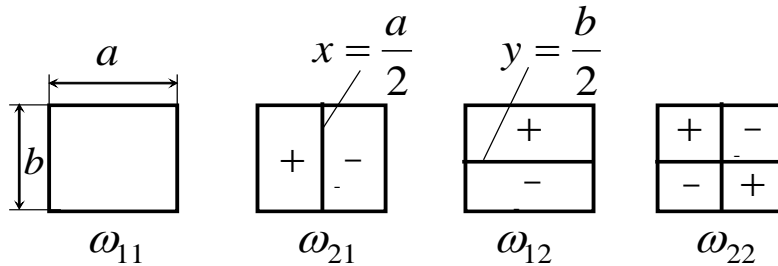


Рис. 3.5. Вузлові лінії прямокутної пластинки

При головних коливаннях (3.20) поверхня пластинки (швидше – серединна площина) поділяється вузловими лініями (геометричне місце точок, що не рухаються при стоячій хвилі). Знайдемо рівняння вузлових ліній, прирівнюючи форму коливань (стоячу хвилю) до нуля:

$$W_{mn}(x, y) = \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} = 0.$$

Ця рівність можлива, якщо аргумент першого чи другого множника

$$\frac{m\pi x}{a} = \bar{m}\pi \quad \text{або} \quad \frac{n\pi y}{b} = \bar{n}\pi.$$

Звідси знаходимо рівняння вузлових ліній, що паралельні краям пластинки:

$$x = \frac{a\bar{m}}{m}; \quad y = \frac{b\bar{n}}{n},$$

де $\bar{m} = 1, 2, \dots, m-1$, $\bar{n} = 1, 2, \dots, m-1$; $\bar{n} = 1, 2, \dots, n-1$.

Кількість вузлових ліній, паралельних осям x та y , дорівнює $m-1$ та $n-1$ відповідно. До цієї кількості не входять вузлові лінії на закріплених краях пластинки. Кількість пучностей у напрямках y та x дорівнює m та n відповідно. Такі правила справедливі за умов Нав'є. За інших умов закріплення країв можливі інші правила вузлів і пучностей.

При експериментальних дослідженнях усталених головних коливань на вузлових лініях збирається насипаний на пластинку пісок (пісочні фігури Хладні). Вузлові лінії для розглядуваної пластинки з шарнірно закріпленими краями показано на рис. 3.5. При $a > b$ буде $\omega_{21} < \omega_{12}$.

3.7. Граничні умови, за яких можливий точний розв'язок для прямокутної пластинки

Плаваюче закріплення (напрявлений край) по всьому контуру пластинки. Вважаємо, що $\frac{\partial W}{\partial x} = Q_x^* = 0$ за $x = 0$ та $x = a$; $\frac{\partial W}{\partial y} = Q_y^* = 0$ за $y = 0$ та $y = b$. Цим граничним умовам задовольняє розв'язок (форма коливань) $W_{mn}(x, y) = \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{a}$, підстановка якого у рівняння (3.21) дає формули (3.26) й (3.27) відповідно для характеристичних чисел і власних частот. Розміщення вузлових ліній і правило кількості їх буде іншим, ніж у випадку пластинки з шарнірно закріпленими краями.

Граничні умови Леві (шарнірно закріплені два паралельні краї). Умови шарнірного закріплення $W = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 0$ країв $x = 0$ та $x = a$ задовольняє розв'язок

$W(x, y) = Y_n(y) \sin \frac{m\pi x}{a}$, в якому $Y_n(y)$ знаходять з отриманого внаслідок підстановки його в (10.21) рівняння

$$Y_n'''' - 2\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 Y_n'' + \left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^4 - \frac{\rho h}{D} \omega^2\right] Y_n = 0.$$

Знайдемо частинні розв'язки у вигляді експоненти Ейлера $Y_n = Ae^{sy}$, тоді матимемо характеристичне рівняння

$$s^4 - 2\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 s^2 + \left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^4 - \frac{\rho h}{D} \omega^2\right] = 0, \quad (3.31)$$

звідки визначаємо $s^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \pm \sqrt{\frac{\rho h}{D} \omega^2}$, а потім і характеристичні числа. Якщо

$\sqrt{\frac{\rho h}{D} \omega^2} > \left(\frac{m\pi}{a}\right)$, то характеристичні числа

$$s_{1,2} = \pm i \sqrt{\sqrt{\frac{\rho h}{D} \omega^2} - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2} = \pm i k_1; \quad (3.32)$$

$$s_{3,4} = \pm i \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \sqrt{\frac{\rho h}{D} \omega^2}} = \pm k_2,$$

загальним розв'язком рівняння для власних форм коливань буде

$$Y_n(y) = C_1 \sin k_1 y + C_2 \cos k_1 y + C_3 \operatorname{sh} k_2 y + C_4 \operatorname{sh} k_2 y. \quad (3.33)$$

Підставимо це рівняння в умови на двох інших краях і дістанемо систему чотирьох однорідних рівнянь відносно сталих C_1, C_2, C_3, C_4 . Прирівнюючи нулю детермінант системи, отримуємо частотне рівняння.

Плаваюче закріплення на двох паралельних краях ($x = 0$; $x = a$).

Формою коливань буде вираз $W_{mn}(x, y) = Y_n(y) \cos \frac{m\pi x}{a}$, в якому $Y_n(y)$ визначається так, як і за граничних умов Леві.

Шарнірно закріплений край ($x = 0$) і напрямлений край ($x = a$).

Формою коливань буде функція $W_{mn}(x, y) = Y_n(y) \sin \frac{\left(m + \frac{1}{2}\right) \pi x}{a}$.

3.8. Вимушені коливання пружної прямокутної пластинки

У рівнянні (3.11) вимушених коливань пластинки постійної товщини можна застосовувати два підходи для отримання його розв'язку. Один із них

полягає в попередньому виключенні змінної t , другий – у виключенні змінних x, y . Після цього знаходять розв’язок для змінних, що залишилися. Тут використовують тільки другий підхід.

3.8.1. Довільне у часі розподілене поперечне навантаження

Розв’язок рівняння (3.11) шукаємо за методом головних координат:

$$w(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn}(x, y) \eta_{mn}(t), \quad (3.34)$$

де форми коливань уже були знайдені з рівняння (3.21) і заданих граничних умов; $\eta_{mn}(t)$ – головні координати, які потрібно знайти.

Підставимо (3.34) з урахуванням (3.21) в (3.11), помножимо на $W_{mn} dx dy$ і проінтегруємо по x, y від 0 до a та від 0 до b . Тоді з урахуванням (3.22) приходимо до нескінченної системи незалежних звичайних диференціальних рівнянь відносно головних координат:

$$M_{mn} (\ddot{\eta}_{mn} + \omega_{mn}^2 \eta_{mn}) = q_{mn}(t), \quad (3.35)$$

де

$$M_{mn} = \rho h \int_0^a \int_0^b W_{mn}^2 dx dy,$$

$$q_{mn}(t) = \int_0^a \int_0^b q(x, y, t) W_{mn}(x, y) dx dy; \quad m, n = 1, 2, \dots, \infty.$$

Розв’язок рівняння (3.35) за тривіальних початкових умов продамо інтегралом переміщень:

$$\eta_{mn}(t) = \frac{1}{M_{mn} \omega_{mn}} \int_0^t q_{mn}(\tau) \sin \omega_{mn}(t - \tau) d\tau.$$

Далі цей вираз підставляємо в (3.34) і знаходимо загальний розв’язок рівняння (3.11) за тривіальних початкових умов.

3.8.2. Гармонічне поперечне розподілене навантаження

У цьому випадку рівняння (3.11) набере вигляду

$$D\Delta\Delta w + ph\dot{w} = q(x, y) \cos \omega t. \quad (3.36)$$

Рівняння за методом головних (3.36) координат розв'язують у вигляді (3.34).

Процедура застосованого методу виключає змінні x , y та приводить до системи незалежних звичайних рівнянь:

$$M_{mn} (\ddot{\eta}_{mn} + \omega_{mn}^2 \eta_{mn}) = \cos \omega t \int_0^a \int_0^b q W_{mn} dx dy = q_{mn} \cos \omega t. \quad (3.37)$$

Частинний розв'язок рівняння (3.37) знаходимо за виглядом правої частини:

$$\eta_{mn} = \frac{q_{mn} \cos \omega t}{M_{mn} (\omega_{mn}^2 - \omega^2)}. \quad (3.38)$$

Цей розв'язок справедливий у нерезонансній зоні, а при резонансі $\omega = \omega_{mn}$ має вигляд вікового члена

$$\eta_{mn} = \frac{q_{mn} t}{2M_{mn} \omega} \sin \omega t. \quad (3.39)$$

Підставимо (3.39) в (3.34), тоді знайдемо загальний розв'язок за початкових умов, який справедливий у нерезонансній зоні:

$$w(x, y, t) = \cos \omega t \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn}(x, y) \frac{q_{mn}}{M_{mn} (\omega_{mn}^2 - \omega^2)}. \quad (3.40)$$

При резонансі відповідний доданок заміняємо віковим членом (3.39).

3.9. Вимушені поперечні коливання прямокутної пластинки з урахуванням недосконалої пружності матеріалу

3.9.1. Довільне у часі розподілене поперечне навантаження

У випадку дії довільного навантаження коливання пластинки будуть неусталеними негармонічними. Урахування недосконалої пружності в межах лінійного підходу, як зауважено у першому розділі, можна коректно виконати тільки за допомогою гіпотез Кельвіна–Фойхта або Бока–Шліппе–Колара.

Рівняння поперечних коливань пластинки з урахуванням недосконалої пружності, наприклад за гіпотезою Бока–Шліппе–Колара, матиме вигляд

$$\left(1 + \alpha_1 [\omega]^2 \frac{\partial}{\partial t}\right) D \Delta \Delta \omega + \rho h \ddot{\omega} = q(x, y, t). \quad (3.41)$$

Розв'язок цього рівняння шукаємо у вигляді розкладу (3.34) за власними формами коливань. Застосуємо метод головних координат і дістанемо нескінченну систему незалежних звичайних рівнянь відносно головних координат:

$$M_{mn} (\ddot{\eta}_{mn} + \alpha_1 \omega_{mn} \dot{\eta}_{mn}) = \int_0^a \int_0^b q(x, y, t) W_{mn}(x, y) dx dy. \quad (3.42)$$

Незважаючи на існування вже трьох операторів, відбулося повне розділення змінних, тому що оператор демпфірування пропорційний оператору пружності. Розв'язок рівняння (3.42) за тривіальних початкових умов подамо інтегралом переміщень:

$$\eta_{mn} = \frac{e^{-h_{mn}t}}{M_{mn} \tilde{\omega}_{mn}} \int_0^t \int_0^a \int_0^b q(x, y, \tau) e^{h_{mn}\tau} W_{mn}(x, y) \sin \tilde{\omega}_{mn}(t - \tau) dx dy d\tau, \quad (3.43)$$

де

$$\tilde{\omega}_{mn}^2 = \omega_{mn}^2 - h_{mn}^2; \quad h_{mn} = \frac{\alpha_1 \omega_{mn}}{2}. \quad (3.44)$$

Підставимо (3.43) в (3.34) і знайдемо розв'язок рівняння (3.11).

3.9.2. Гармонічне розподілене поперечне навантаження

Рівняння (3.41) запишемо так:

$$\left(1 + \alpha_1[\omega]^{-1} \frac{\partial}{\partial t}\right) D\Delta\Delta w + \rho h \ddot{w} = q(x, y) \cos \omega t. \quad (3.45)$$

Розв'язок шукаємо у вигляді (3.34). Застосування процедури (алгоритму) методу головних координат з урахуванням позначення (3.44) дає нескінченну систему незалежних рівнянь відносно головних координат:

$$M_{mn} \left(\eta_{mn} + 2h_{mn} \dot{\eta}_{mn} + \omega_{mn}^2 \eta_{mn} \right) = q_{mn} \cos \omega t;$$

$$M_{mn} = \rho h \int_0^a \int_0^b W_{mn}^2 dx dy; \quad q_{mn} = \int_0^a \int_0^b q(x, y) W_{mn}(x, y) dx dy, \quad (3.46)$$

частинні розв'язки яких можна знайти за виглядом правої частини в дійсному або комплексному вигляді. В останньому випадку розв'язок запишемо, відповідно, так:

$$e^{i\omega t}; \quad \eta_{mn} = a_{mn}^* e^{i\omega t}. \quad (3.47)$$

Унаслідок підстановки (3.47) в (3.46) дістанемо комплексне алгебричне рівняння

$$M_{mn} a_{mn}^* \left[(i\omega)^2 + 2h_{mn} i\omega + \omega_{mn}^2 \right] = q_{mn},$$

звідки знаходимо частотну передатну функцію для l -ї головної координати:

$$a_{mn}^*(i\omega) = \frac{q_{mn}}{\left[(i\omega)^2 + 2h_{mn} i\omega + \omega_{mn}^2 \right]}. \quad (3.48)$$

Підставимо (3.48) в (3.34) й отримаємо вирази частотної передатної функції

$$\tilde{W}(x, y, i\omega) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn}(x, y) a_{mn}^*(i\omega) \quad (3.49)$$

і закону поперечних коливань пластинки

$$w^*(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn}(x, y) a_{mn}^* e^{i\omega t} = \tilde{W}(x, y, i\omega) e^{i\omega t}. \quad (3.50)$$

Комплексна амплітуда (3.48) складається з дійсної амплітуди і по-фази:

$$a_{mn} = \frac{\int_0^a \int_0^b q(x, y) W_{mn}(x, y) dx dy}{M_{mn} \sqrt{(\omega_{mn}^2 - \omega^2)^2 + 4h^2 \omega^2}}; \quad \operatorname{tg} \varphi_{mn} = \frac{2h_{mn} \omega}{\omega_{mn}^2 - \omega^2}. \quad (3.51)$$

З урахуванням (3.51) запишемо розв'язок (3.50) у дійсному вигляді:

$$w(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn}(x, y) a_{mn} \cos(\omega t - \varphi_{mn}). \quad (3.52)$$

3.9.3. Вплив початкових зусиль у серединній площині пластинки

Зважаючи на лінійність задачі щодо моментних зусиль (див. рис. 3.4), за принципом суперпозиції можна приєднати зусилля в деформованій серединній площині (рис. 3.6) і скласти рівняння рівноваги у вигляді (3.8).

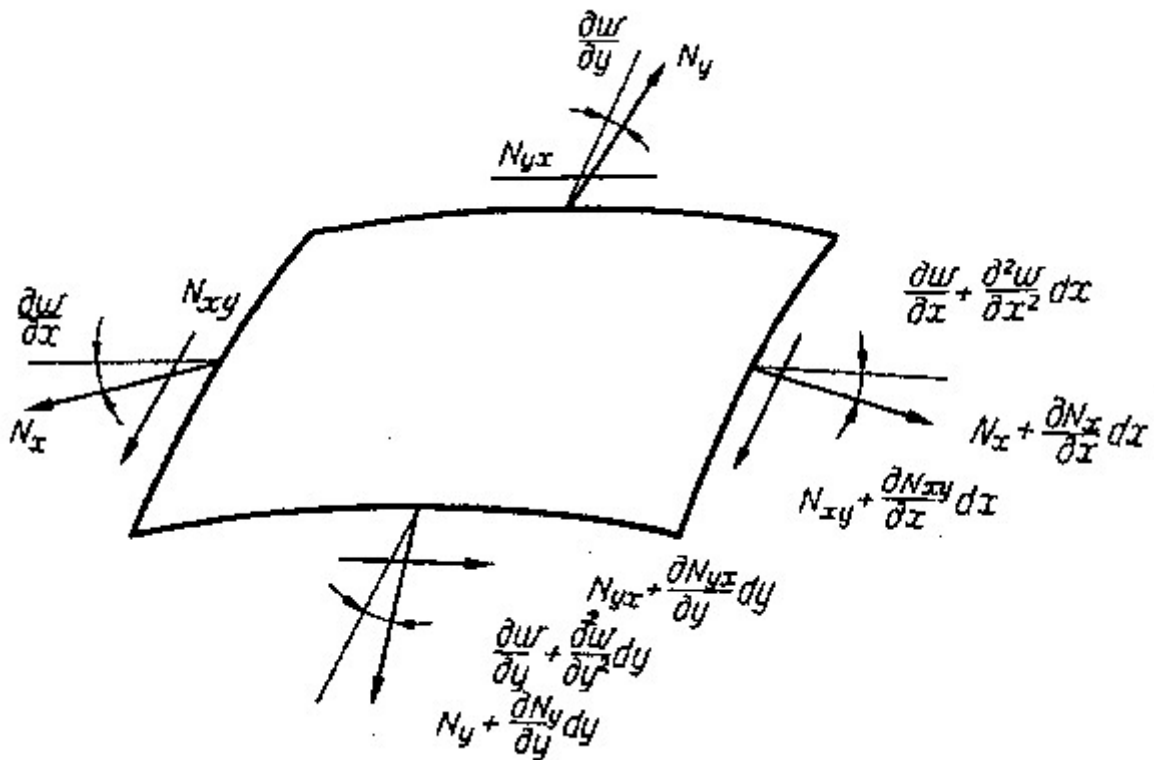


Рис. 3.6. Зусилля в деформованій серединній площині

Членами другого порядку малості можна знехтувати, тоді замість першого рівняння (3.8) дістанемо рівняння

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q - \rho h \ddot{w} - N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0. \quad (3.53)$$

У рівнянні (3.53) множник $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$ є приростом кута нахилу $\frac{\partial w}{\partial x}$ зусиль N_{xy}

до площини пластинки при переході від верхнього до нижнього краю елемента;

$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ та $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$ – прирости кутів нахилу N_x та N_y при переході від лівого до правого і від верхнього до нижнього країв елемента, прийдемо до диференціальної залежності

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = \rho h \ddot{w} - q - N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}. \quad (3.54)$$

Підставимо формули (3.53) до (3.54), дістанемо диференціальне рівняння поперечних коливань прямокутної пластинки з урахуванням зусиль у серединній площині. При сталих величинах D та h це рівняння матиме вигляд

$$D \Delta \Delta w + \rho h \ddot{w} = N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + q(x, y, t). \quad (3.55)$$

Оцінимо вплив розтягальних (верхній знак) і стискальних (нижній знак) зусиль у серединній площині. Вважаємо, що $N_x = N_y = \pm P$; $N_{xy} = q = 0$, тоді з (3.56) матимемо

$$D \Delta \Delta w + \rho h \ddot{w} \pm P \Delta w = 0. \quad (3.56)$$

Розглядаючи головні коливання $w(x, y, t) = W(x, y) a \cos(\dot{\omega} t - \varphi)$, отримаємо рівняння для власних форм коливань

$$D \Delta \Delta \omega \pm P \Delta \omega - \rho h \dot{\omega} W = 0. \quad (3.57)$$

Це рівняння у випадку шарнірного закріплення по всьому контуру прямокутної пластинки точно задовольняється розв'язком (3.25). Підставимо (3.25) в (3.58), тоді матимемо формулу для характеристичних чисел

$$k^4 = \frac{D}{\rho h} \pi^4 \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right]^2 \pm \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right] \frac{P}{D} \quad (3.58)$$

і формулу для власних частот

$$\tilde{\omega}_{mn}^2 = \frac{D}{\rho h} \pi^4 \left[\left(\frac{m}{a} \right)^2 + \left(\frac{n}{a} \right)^2 \right]^2 \left(1 \pm \frac{P}{\pi^2 D \left[\left(\frac{m}{a} \right)^2 + \left(\frac{n}{a} \right)^2 \right]} \right) = \omega_{mn}^2 \left(1 \pm \frac{P}{P_{EiL.mn}} \right). \quad (3.59)$$

Як видно з формули (3.60), розтягальна сила (верхній знак) у серединній площині збільшує, а стискальна – зменшує частоту поперечних коливань пластинки. При $N_x = N_y = -P$ (стискальна сила), якщо

$$P = \pi^2 D \left[\left(\frac{m}{a} \right)^2 + \left(\frac{n}{a} \right)^2 \right] = P_{EiL.mn},$$

буде $\tilde{\omega}_{mn}^2 = 0$.

Стиснена по контуру пластинка втрачає стійкість за W_{mn} формою.

3.10. Поперечні вільні коливання квадратної пластинки

У прямокутній пластинці при $a = b$ виникає поворотна симетрія другого порядку (виродження). Чимало власних частот, як випливає з формули (3.27), будуть попарно рівними ($\omega_{mn} = \omega_{nm}$). Однаковому значенню двох парних власних частот відповідають дві різні власні форми коливань ($W_{mn} \neq W_{nm}$). Унаслідок синхронного накладання $(C_{mn}W_{mn} + C_{nn}W_{nm})\cos\omega_{mnt}$ двох власних форм коливань однієї частоти виникає множина вироджених форм коливань, які не є власними (фундаментальними) і не використовуються при побудові загальних розв'язків.

Наприклад, за граничних умов Нав'є власні форми W_{21} та W_{12} коливань квадратної пластинки з частотою $\omega_{21} = \omega_{12}$ при додаванні та відніманні дають вироджені нові форми коливань $W_{21} + W_{12}$ та $W_{21} - W_{12}$.

Лінійна комбінація власних форм W_{31} та W_{13} коливань, шарнірно закріпленої по контуру квадратної пластинки з частотою $\omega_{31} = \omega_{13}$, дає вироджені форми коливань для випадку $C_{31} = C_{13} = 1$.

Складання форм коливань W_{42} та W_{24} шарнірно закріпленої по контуру квадратної пластинки приводить також до виникнення нефундаментальних

(вироджених) форм коливань. Рівняння вузлових ліній вироджених форм коливань визначені з умов

$$\sin \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{a} \mp \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{2\pi y}{a} = 0;$$

$$\sin \frac{3\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{a} \mp \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{3\pi y}{a} = 0;$$

$$\sin \frac{4\pi x}{a} \sin \frac{2\pi y}{a} \mp \sin \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{4\pi y}{a} = 0.$$

При вимушених резонансних коливаннях можливі аналогічні випадки виродження.

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

- 3.1. Наведіть класифікацію пластинок.
- 3.2. Виведіть диференціальне рівняння вимушених згинальних коливань тонкої жорсткої пружної пластинки постійного перерізу.
- 3.3. Запишіть диференціальні залежності для пластини.
- 3.4. Наведіть види однорідних граничних умов для пластини.
- 3.5. Як визначити власні частоти та власні форми коливань тонкої жорсткої пластини за граничних умов Нав'є?
- 3.6. Запишіть загальний розв'язок диференціального рівняння вільних коливань тонкої жорсткої пружної пластини.
- 3.7. Наведіть три випадки точного розв'язання задачі про вільні коливання пластини постійного перерізу.
- 3.8. Охарактеризуйте фігури Хладні для прямокутної тонкої жорсткої пластини за граничних умов Нав'є.
- 3.9. Поясніть фігури Хладні для прямокутної тонкої жорсткої пластини за граничних умов плаваючого закріплення.
- 3.10. Поясніть виродження власних частот та власних форм коливань квадратної пластини за граничних умов Нав'є.

3.11. Розв'яжіть задачу про вимушені коливання прямокутної пластини без тертя під дією довільної поперечної розподіленої сили МГК.

3.12. Наведіть розв'язок задачі про вимушені коливання прямокутної пластини без тертя під дією гармонічної розподіленої сили МГК.

3.13. Запишіть рівняння вимушених коливань прямокутної пластини з урахуванням тертя під дією довільної розподіленої поперечної сили МГК.

3.14. Наведіть умови ортогональності власних форм коливань і формули зведення відносно кінетичної енергії. Чи можна обійтися без умов ортогональності та формул зведення відносно потенціальної енергії?

3.15. Сформулюйте правило кількості вузлових ліній і пучностей тонкої жорсткої пластини у випадку граничних умов Нав'є та інших умов.

Розділ 4

КЛАСИЧНА ТЕОРІЯ КОЛИВАНЬ ТОНКИХ ОБОЛОНОК

4.1. Геометрія і класифікація оболонок

Тонкою оболонкою називають тіло, обмежене двома поверхнями, відстань між якими (товщина) мала порівняно з іншими розмірами тіла. В подальшому товщина вважається постійною. Якщо оболонка не має меж хоча б по одній криволінійній координаті, то вона називається *замкненою*, в іншому випадку вона буде називатися *незамкненою (відкритою)*.

Геометричне місце точок, рівновіддалених від обох граничних поверхонь, називають *серединною поверхнею*. Форма серединної поверхні та товщина h визначають геометрію оболонки. У випадку незамкненої оболонки задається ще й граничний контур. На серединній поверхні вибирається ортогональна система криволінійних координат (рис. 4.1): OZ – перпендикулярна до серединної поверхні, а координатні лінії OX_1 та OX_2 збігаються з лініями головної кривизни $X_1 = \text{const}$, $X_2 = \text{const}$. У цьому випадку рівняння оболонок набувають більш простого вигляду. Рівняння серединної поверхні задають у векторній або скалярній формі [12]:

$$\vec{r} = \vec{r}(x_1, x_2)$$
$$x = x(x_1, x_2); y = y(x_1, x_2); z = z(x_1, x_2).$$

Лінійний елемент серединної поверхні (довжина дуги) визначається першою квадратичною формою (рис. 4.2)

$$dx^2 = H_1^2 dx_1^2 + H_2^2 dx_2^2,$$

де H_1, H_2 – параметри Ляме (масштабні множники), що зв'язують приріст дуг координатних ліній з приростом криволінійних координат:

$$dx_1 = H_1 dx_1 + H_2 dx_2;$$
$$H_1^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x_1} \right)^2;$$

$$H_2^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x_2}\right)^2.$$

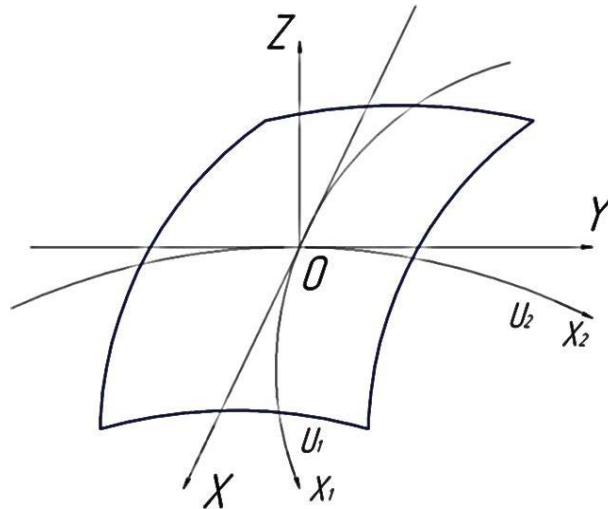


Рис. 4.1. Частина серединної поверхні оболонки

Викривлення серединної поверхні характеризується радіусами кривини R_1 , R_2 нормальних перетинів вздовж координатних ліній (вважаємо, що вони збігаються з лініями головних кривизн, де $R_{12} = 0$). Одна з головних кривизн $\varphi_1 = \frac{1}{R_1}$; $\varphi_2 = \frac{1}{R_2}$ має максимальне, друга – мінімальне значення.

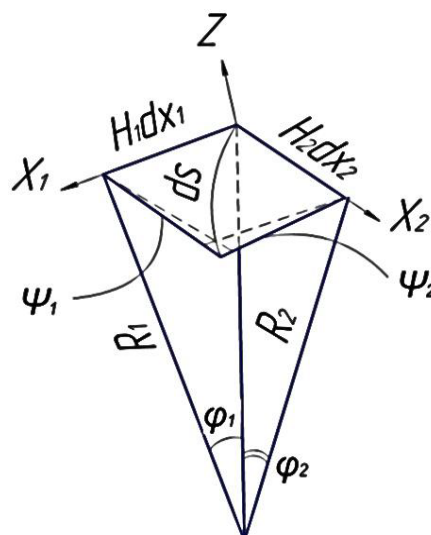


Рис. 4.2. Лінійний елемент серединної поверхні оболонки

Добуток головних кривизн називається гаусовою кривизною поверхні $k = \varrho_1 \varrho_2$ (у загальному випадку $k = \varrho_1 \varrho_2 - \varrho_{12}^2$).

Функції $H_1 = (x_1, x_2)$; $H_2 = (x_1, x_2)$; $R_1 = (x_1, x_2)$; $R_2 = (x_1, x_2)$ визначають поверхню (з точністю до її положення в просторі) лише в тому випадку, коли вони задовольняють умови Кодаці та Гауса:

$$\frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{H_1}{R_1} \right) = \frac{\partial H_1}{\partial x_2} \frac{1}{R_2},$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{H_2}{R_2} \right) = \frac{\partial H_2}{\partial x_1} \frac{1}{R_1},$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{1}{H_1} \frac{\partial H_2}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{1}{H_2} \frac{\partial H_1}{\partial x_2} \right) = \frac{H_1 H_2}{R_1 R_2}.$$

Оболонки по товщині діляться на *тонкі* $\left(\frac{h}{R_{\min}} < \frac{1}{20} \right)$ та *товсті* $\left(\frac{h}{R_{\min}} > \frac{1}{20} \right)$,

де R_{\min} – найменший лінійний радіус її кривизни. Часто оболонки з $\frac{h}{R_{\min}} = \frac{1}{5} \dots \frac{1}{3}$

розраховують за теорією тонких оболонок. Товсті оболонки розраховують за допомогою тривимірної теорії пружності.

Залежно від гаусової кривизни розрізняють оболонки з *додатньою* (сферична оболонка, $R_{12} = 0$), *нульовою* (циліндричні, конічні оболонки), *від'ємною* (сідлообразні оболонки) та *змішаною гаусовою кривизною* (торообразні оболонки).

По властивостям матеріалу розрізняють ізотропні, анізотропні, пружні, в'язкопружні, фізично нелінійні та інші оболонки.

Оболонки можуть мати і конструктивну анізотропію (шари з різних матеріалів, ребра жорсткості та інше). По відносній величині прогину розрізняються оболонки з малим (геометрично лінійні) та з великим прогином (геометрично нелінійні).

Якщо стріла підйому $f \leq \frac{a}{5}$; для тонкої оболонки $\left(\frac{h}{R_{\min}} < \frac{1}{20}\right)$, то оболонка

вважається *пологою*. Для пологої оболонки можна геометрію її поверхні замінити евклідовою геометрією її проекції на площину (план). Так, у випадку прямокутних координат приймається $H_1 = H_2 = I$. Найбільший підйом (довжина нормалі) оболонки над планом називається стрілою підйому f . Найменший розмір плану позначаємо літерою a .

Залежно від форми плану розрізняють прямокутні, круглі, трикутні та інші оболонки в плані.

Серед замкнутих оболонок варто виділити *оболонки обертання*, серединна поверхня яких утворюється з обертанням плоскої кривої навколо осі, яка лежить в її площині кривої. В залежності від виду плоскої кривої отримаємо еліпсоїдальні, сферичні, конічні, циліндричні та інші оболонки обертання.

Легкість, висока міцність та економічність оболонок сприяють широкому використанню їх в різних конструкціях.

4.2. Загальне рівняння коливань тонких оболонок

4.2.1. Припущення класичної теорії оболонок

У класичній теорії оболонок тривимірна задача зводиться до двовимірної (задачі деформування серединної поверхні) за допомогою кінематичних (геометричних) гіпотез Кірхгофа–Лява:

1) *гіпотеза прямих нормалей* (прямолінійний нормальний до серединної поверхні елемент оболонки залишається прямолінійним і нормальним до деформованої серединної поверхні, зберігаючи при цьому свою довжину);

2) *гіпотеза ненадавлюваності шарів*, паралельних серединній поверхні ($\sigma_z \approx 0$, нормальні напруження на паралельних серединній поверхні площадках малі порівняно з нормальними напруженнями на нормальних до серединної поверхні площадках, шари знаходяться в плоскому напруженому стані).

Крім того, рівняння коливань оболонок виводяться в геометрично та фізично лінійному наближенні. Також не враховується інерція обертання перетинів та зсув.

4.2.2. Деформації та переміщення

Процес коливань серединної поверхні оболонки описується трьома двовимірними функціями:

$$u_1 = u_1(x_1 \cdot x_2, t), \quad u_2 = u_2(x_1 \cdot x_2, t), \quad w = w(x_1 \cdot x_2, t). \quad (4.1)$$

Для перших переміщень u_1 , u_2 не виражаються через третє w , як це було у пластині. Крім того, серединна поверхня оболонки, на відміну від серединної поверхні пластини, піддається не тільки згину, а й розтягу та зсуву (враховується мембранна, ланцюгова або тангенційна деформація поряд із згинальною).

Викривлення та перекошування елемента H_1, H_2, dx_1, dx_2 серединної поверхні оболонки визначається відповідно кутам φ_1 , φ_2 та ψ_1 , ψ_2 (див. рис. 4.2):

$$\varphi_1 = \frac{H_1}{R_1} dx_1; \quad \varphi_2 = \frac{H_2}{R_2} dx_2; \quad (4.2)$$

$$\psi_1 = \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_1}{\partial x_2} dx_1; \quad \psi_2 = \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_2}{\partial x_1} dx_2. \quad (4.3)$$

Перекошування пов'язано зі збільшенням сторін елемента до

$$H_2 dx_2 + \frac{\partial H_2}{\partial x_1} dx_1 dx_2 \quad \text{та} \quad H_1 dx_1 + \frac{\partial H_1}{\partial x_2} dx_2 dx_1.$$

Відповідно першій гіпотезі Кірхгофа–Лява отримаємо

$$\left. \begin{aligned} \xi_{12} = \xi_{23} = \xi_{33} = 0; \\ \xi_{12} = \xi_{23} = \xi_{33} = 0 \\ \xi_{11} = e_{11} = -z \mathcal{G}_{11} \\ \xi_{12} = e_{12} = -z \mathcal{G}_{12} \end{aligned} \right\}, \quad (4.4)$$

де відносні деформації складаються з мембранних та згинальних, при цьому

$$\xi_{11} = \frac{1}{H_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{u_2}{H_1 H_{12}} \frac{\partial H_1}{\partial x_2} + \frac{w}{R_1};$$

$$e_{22} = e_{11}(1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 1),$$

$$\xi_{12} = \left[\frac{H_2}{H_1} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{u_2}{H_2} \right) + \frac{H_1}{H_2} \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{u_2}{R_2} \right) \right]; \quad (4.5)$$

$$\wp_{11} = \frac{1}{H_1} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{1}{H_1} \frac{\partial \omega}{\partial x_1} - \frac{u_1}{R_1} \right) + \frac{1}{H_2} \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{1}{H_2} \frac{\partial \omega}{\partial x_2} - \frac{u_1}{R_2} \right);$$

$$\wp_{22} = \wp_{11}(1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 1),$$

$$\begin{aligned} \wp_{12} = \wp_{21} = & \frac{1}{H_1 H_2} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial x_2} \frac{\partial \omega}{\partial x_1} - \right. \\ & \left. - \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial x_1} \frac{\partial \omega}{\partial x_2} \right) - \frac{1}{R_1 H_2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \frac{u_1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial x_2} \right) - \\ & - \frac{1}{H_1 R_2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{u_2}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial x_1} \right) \end{aligned} \quad (4.6)$$

Тут і надалі рівність $\wp_{22} = \wp_{11}(1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 1)$ означає, що для знаходження явного вигляду величини, яка стоїть в її лівій частині, необхідно провести колову заміну індексів в явному виразі величини, яка стоїть у правій частині.

Величини e_{11} , e_{22} , e_{12} характеризують рівномірну за товщиною оболонки деформацію розтягу та зсуву. Величини \wp_{11} , \wp_{22} , \wp_{12} визначають кривизни та кручення серединної поверхні. Шість компонент деформацій пов'язані трьома умовами сумісності деформацій. Ці три умови отримують, виключаючи S_1 , S_2 з перших трьох рівнянь за допомогою четвертого та п'ятого рівнянь такої системи:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial H_2 \wp_{22}}{\partial x_1} - \frac{\partial H_2}{\partial x_1} \wp_{11} + \frac{\partial}{\partial x_2} \left[H_1 \left(-\wp_{12} + \frac{e_{12}}{R_1} \right) \right] + \frac{\partial H_1}{\partial x_2} \left(-\wp_{12} + \frac{e_{12}}{R_2} \right) - H_1 H_2 \frac{\xi_1}{R_1} &= 0 \\ \frac{\partial H_1 \wp_{11}}{\partial x_2} - \frac{\partial H_1}{\partial x_2} \wp_{22} + \frac{\partial}{\partial x_1} \left[H_2 \left(-\wp_{12} + \frac{e_{12}}{R_2} \right) \right] + \frac{\partial H_2}{\partial x_1} \left(-\wp_{12} + \frac{e_{12}}{R_1} \right) + H_1 H_2 \frac{\xi_1}{R_2} &= 0 \\ -\frac{\partial H_2 \xi_2}{\partial x_1} + \frac{\partial H_1 \xi_1}{\partial x_2} - H_1 H_2 \left(\frac{\wp_{22}}{R_1} + \frac{\wp_{11}}{R_2} \right) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.7)$$

$$-\frac{\partial H_2 e_{22}}{\partial x_1} + \frac{\partial H_2}{\partial x_1} e_{11} + \frac{\partial H_1 e_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial H_1}{\partial x_2} e_{12} + H_1 H_2 \xi_2 = 0,$$

$$-\frac{\partial H_1 e_{11}}{\partial x_2} + \frac{\partial H_1}{\partial x_2} e_{22} + \frac{\partial H_2 e_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial H_2}{\partial x_1} e_{12} - H_1 H_2 \xi_1 = 0,$$

$$-\wp_{12} + \wp_{21} = 0.$$

Відповідно до першої гіпотези Кірхгофа–Лява переміщення \tilde{u}_1 , \tilde{u}_2 , \tilde{u}_3 будь-якої точки оболонки, віддаленої на відстань z від серединної поверхні, виражаються через переміщення (4.1) серединної поверхні наступним чином:

$$\tilde{u}_1 = u_1 - z\theta_1; \quad \tilde{u}_2 = u_2 - z\theta_2; \quad \tilde{u}_3 = u_3 - z\theta_3;$$

де θ_1 , θ_2 – кути повороту нормальних перетинів, визначені за формулами

$$\theta_1 = \frac{1}{H_1} \frac{\partial \omega}{\partial x_1} - \frac{u_1}{R_1}; \quad \theta_2 = \frac{1}{H_2} \frac{\partial \omega}{\partial x_2} - \frac{u_2}{R_2}.$$

4.2.3. Напруження та внутрішні зусилля

За законом Гука:

$$\sigma_{11} = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_{11} + \nu\varepsilon_{22}); \quad \sigma_{22} = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_{22} + \nu\varepsilon_{11});$$

$$\sigma_{12} = \frac{E}{1-\nu} \varepsilon_{12}; \quad (4.8)$$

деформаціям (4.4) відповідають напруження, які складаються з постійних мембранних (тангенційних) та змінних за товщиною згинальних складових. Мембранне та моментне напруження стану, утвореного нормальними перетинами елемента оболонки, який має серединну поверхню розміром $H_1 dx_1 \cdot H_2 dx_2$, зображено на рис. 4.3 та рис. 4.4. Для визначеності знаки напружень на вказаних рисунках вибрані додатними, відповідно до правила зовнішньої нормалі, тобто направлені в бік додатних (від’ємних) осей, якщо зовнішня нормаль перетину направлена в додатню (від’ємну) сторону осі. Для напружень σ_{13}'' , σ_{23}'' у нижній половині елемента (рис. 4.4) це правило не використовується, оскільки напрямок (знак) цих напружень (дотичні

напруження при згині) не змінюється під час переходу через серединну поверхню.

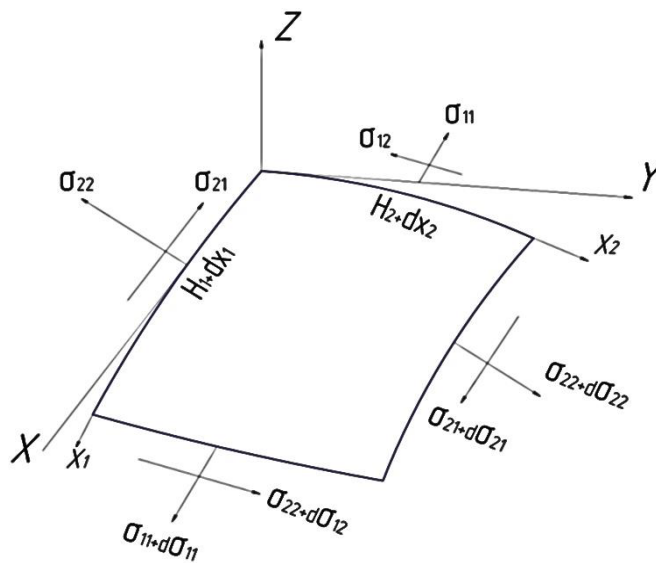


Рис. 4.3. Напружений стан оболонки (мембранний)

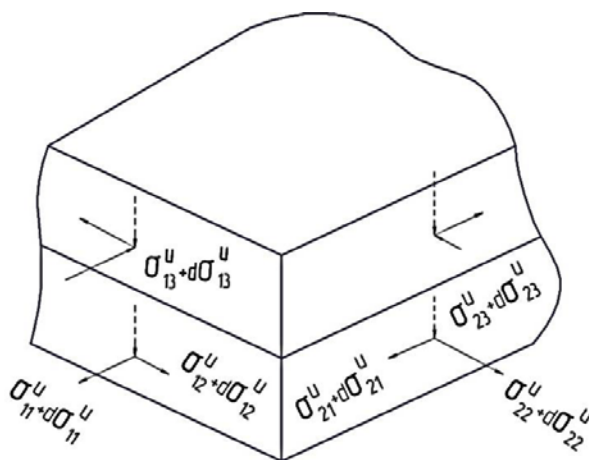


Рис. 4.4. Напружений стан оболонки (моментний)

Вирахуємо зусилля та моменти, сумуючи напруження в межах кожної грані та враховуючи, що знайдений з подібності трикутників (рис. 4.5) приріст розмірів граней по висоті рівний $\frac{H_2 z dx_2}{R_2}, \frac{H_1 z dx_1}{R_1}$. На грань $x_1 = const$ елемента діють нормальне та дотичне мембранне зусилля, а також згинаючий та крутний моменти:

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{11} \left(1 + \frac{z}{R_2}\right) H_2 dx_2 dz; \quad \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma \left(1 + \frac{z}{R_2}\right) H_2 dx_2 dz;$$

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{11}^u \left(1 + \frac{z}{R_2}\right) H_2 dx_2 z dz; \quad \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{12}^u \left(1 + \frac{z}{R_2}\right) H_2 dx_2 z dz;$$

розділивши ці величини на довжину дуги $H_2 dx_2$, знайдемо величини тих же зусиль та моментів, які припадають на одиницю довжини нормального перерізу $x_1 = const$ серединної поверхні оболонки:

$$\left. \begin{aligned} N_{11} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{11} \left(1 + \frac{z}{R_2}\right) dz; & N_{12} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{12} \left(1 + \frac{z}{R_2}\right) dz; \\ M_{11} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{11}^u \left(1 + \frac{z}{R_2}\right) z dz; & M_{12} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{12}^u \left(1 + \frac{z}{R_2}\right) z dz; \end{aligned} \right\} (4.9)$$

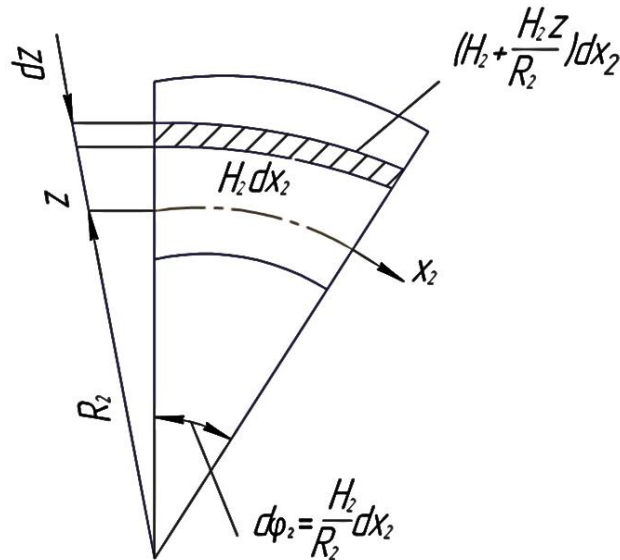


Рис. 4.5. Зміна розмірів граней по товщині оболонки

Малим членам $\frac{z}{R_2}$ порівняно з одиницею можна знехтувати. Формули для зусиль і моментів у перетині $x_2 = const$ отримаємо, проводячи в (4.9) кругову заміну індексів ($1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 1$).

Дотичним напруженням $\sigma_{12}^u, \sigma_{13}^u$ та їх результуючим, що припадають на одиницю довжини нормальних перетинів серединної поверхні, – поперечним зусиллям

$$Q_1 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{13}^u \left(1 + \frac{z}{R_2}\right) dz; \quad Q_2 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{23}^u \left(1 + \frac{z}{R_1}\right) dz;$$

згідно з першою гіпотезою не ставиться у відповідність ніяка деформація, так само як це було в теорії пластин та балок.

Гіпотезу прямих нормалей та гіпотезу плоских перетинів використовують тільки при визначенні деформацій та переміщень. При складанні рівнянь рівноваги всупереч вказаним гіпотезам враховуються і поперечні сили.

Тож ми отримали формули, що зв'язують зусилля та напруження. Навпаки, якщо відомі зусилля, то напруження знаходять за такими формулами:

$$\sigma_{11} = \frac{N_{11}}{h} - \frac{12M_{11}z}{h^3};$$

$$\sigma_{22} = \frac{N_{22}}{h} - \frac{12M_{22}z}{h^3};$$

$$\sigma_{12} = \frac{N_{12}}{h} - \frac{12M_{12}z}{h^3}.$$

4.2.4. Відношення пружності (закон Гука в зусиллях)

Рівняння, що зв'язують внутрішні зусилля з деформаціями та які є інтегральним аналогом закону Гука, називають *відношеннями пружності*. Підставивши (4.4) у (4.8), а результат у (4.9) та нехтуючи малими членами, отримаємо вказані відношення:

$$\begin{aligned}
N_{11} &= A(e_{11} + \nu e_{22}); & N_{22} &= A(e_{22} + \nu e_{11}); \\
N_{12} &= B(e_{12} + \frac{h^2}{12} \frac{\wp_{21}}{R_2}) = B e_{12} - D(1-\nu) \frac{\wp_{21}}{R_2}; \\
N_{21} &= B(e_{21} + \frac{h^2}{12} \frac{\wp_{12}}{R_1}) = B e_{21} - D(1-\nu) \frac{\wp_{12}}{R_1};
\end{aligned} \tag{4.10}$$

$$M_{11} = D(\wp_{11} + \wp_{22}); \quad M_{22} = D(\wp_{22} + \wp_{11}); \quad M_{12} = M_{21} = D(1-\nu)\wp_{12};$$

$$A = \frac{Eh}{1-\nu^2}; \quad B = \frac{Eh}{1+\nu} = A \frac{1-\nu}{2}; \quad D = \frac{Eh}{12(1-\nu^2)}.$$

Складові

$$\frac{h^2}{12} \frac{\wp_{21}}{R_2}, \quad \frac{h^2}{12} \frac{\wp_{12}}{R_1},$$

введені у третю та четверту рівність (4.10), формально за пропозицією Новожилова В. В. та Балабуха Л. І., забезпечують перетворення шостого рівняння рівноваги елемента оболонки в тотожність.

4.2.5. Рівняння динамічної рівноваги елемента серединної поверхні оболонки

На малий елемент серединної поверхні оболонки (рис. 4.6–4.9) діють внутрішні зусилля (замість напружень), а також зовнішнє розподілене навантаження з компонентами інтенсивності q_1 , q_2 , $q_3 = q_z$ (навантаження, що припадає на одиницю площі) відповідно вздовж осей x , y , z . За принципом Д'Аламбера до перерахованих сил приєднуємо три компоненти сил інерції $-\rho h \ddot{u}_1$, $-\rho h \ddot{u}_2$, $-\rho h \ddot{v}$ (рис. 4.6).

На рис. 4.7 кожний момент представлений за правилом правого гвинта у вигляді вектора (з урахуванням напрямів напружень, рис. 4.7). Прикладені до елемента (рис. 4.6–4.8) зусилля вважаємо додатними.

Лінії дії зусиль на рисунках показані з урахуванням кутів перекошування (рис. 4.9).

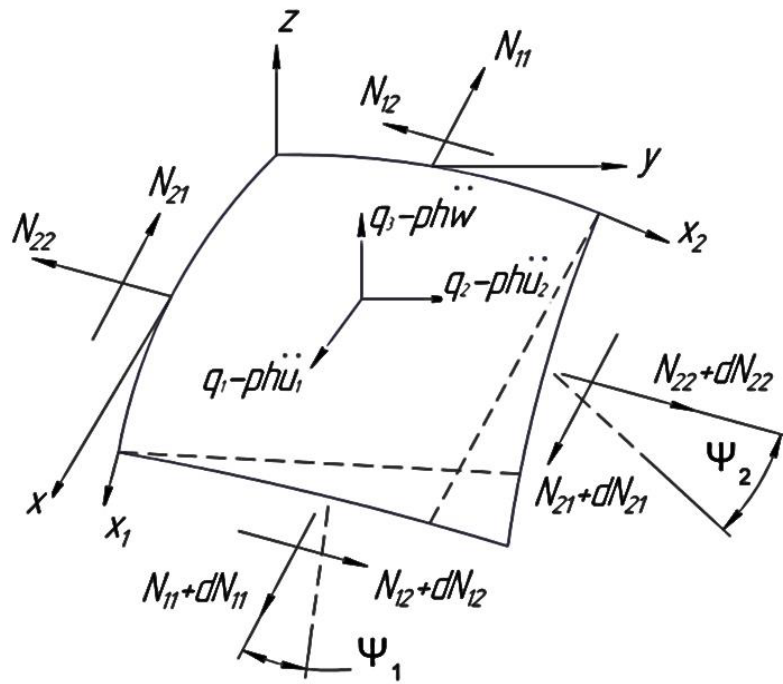


Рис. 4.6. Мембранні зусилля в серединній поверхні оболонки

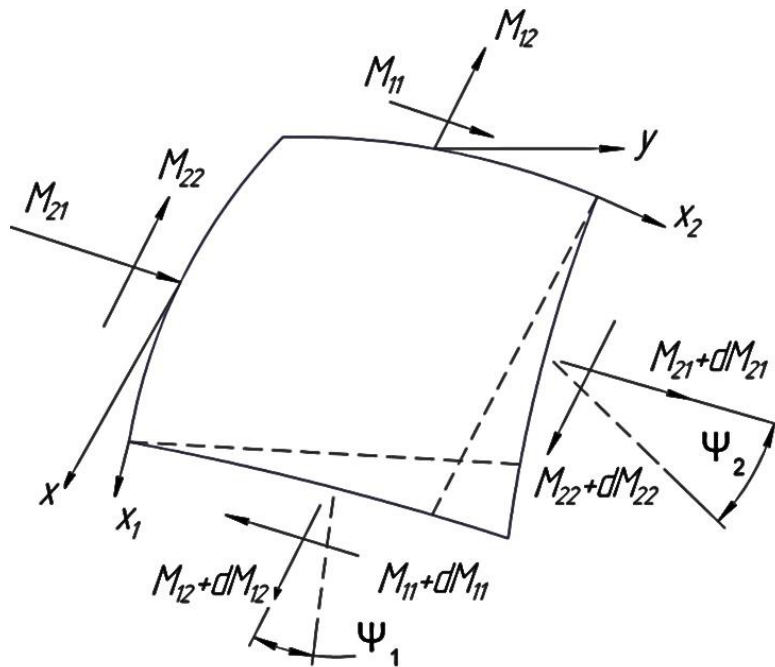


Рис. 4.7. Моментні зусилля, віднесені до довжини кромки серединної поверхні

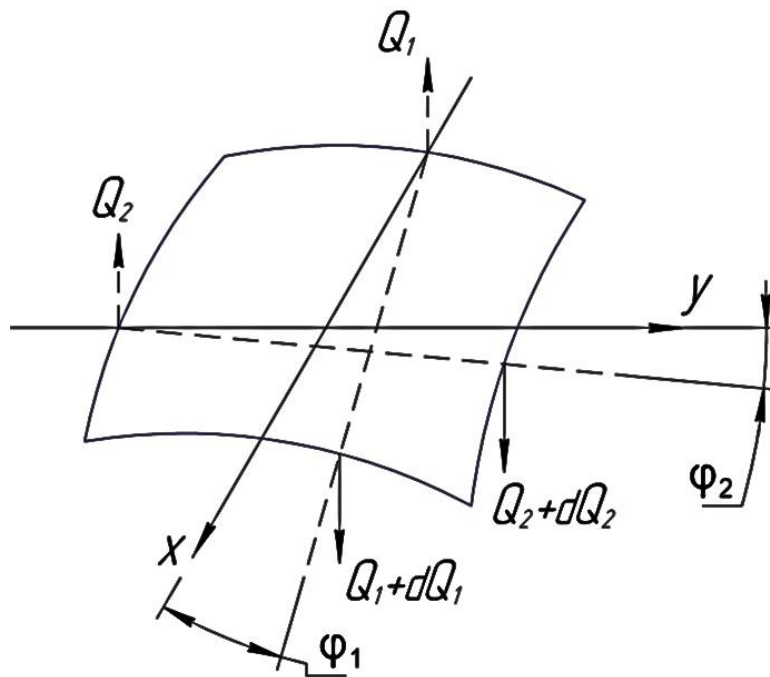


Рис. 4.8. Поперечні зусилля

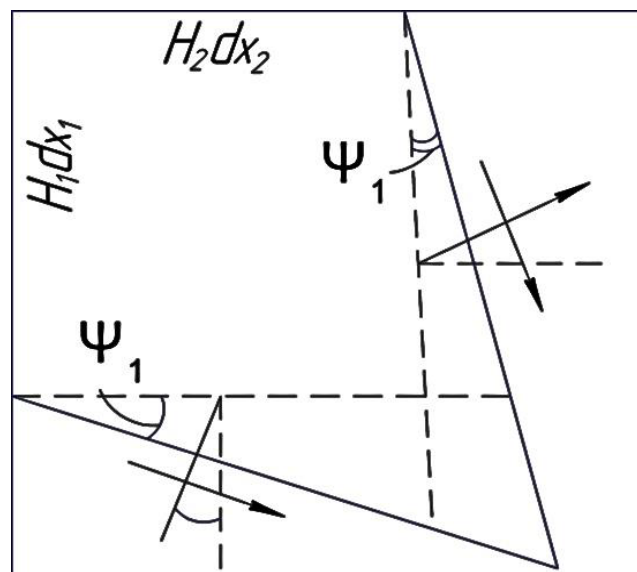


Рис. 4.9. Кути перекошування

Складемо рівняння рівноваги елемента:

$$\begin{aligned} \sum x = 0; \quad \sum y = 0; \quad \sum z = 0; \\ \sum M_{ox} = 0; \quad \sum M_{oy} = 0; \quad \sum M_{oz} = 0. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Застосовуючи для проєкції правило знаків, прийняте в математиці та механіці, а також враховуючи малість кутів викривлення (4.2) та перекошування

(4.3) елемента серединної поверхні при деформуванні (синуси рівні кутам, а косинуси – одиниці). При складанні рівнянь врахуємо, що результуючі проекції сил N_{11} , $N_{11} + dN_{11}$ та N_{21} , $N_{21} + dN_{21}$ на вісь OX з точністю до малих другого порядку включно, відповідно рівні (рис. 4.6) [5, 12]

$$-N_{11}H_2dx_2 + (N_{11} + \frac{\partial N_{11}}{\partial x_1}dx_1)(H_2 + \frac{\partial H_2}{\partial x_1}dx_1)dx_2 = \frac{\partial(H_2N_{11})}{\partial x_1}dx_1dx_2.$$

Сили N_{22} та N_{12} перпендикулярні до осі X проекцій на вісь X не дають, а сили $N_{22} + dN_{22}$ та $N_{12} + dN_{12}$, будучи відхиленими від перпендикулярного напрямку на кути φ_2 та φ_1 дають такі проекції на вісь X :

$$-(N_{22} + \frac{\partial N_{22}}{\partial x_2}dx_2)(H_1 + \frac{\partial H_1}{\partial x_2}dx_2)dx_1\psi_2 = -N_{22} \frac{\partial H_2}{\partial x_1}dx_2dx_1;$$

$$(N_{12} + \frac{\partial N_{12}}{\partial x_1}dx_1)(H_2 + \frac{\partial H_2}{\partial x_1}dx_1)dx_2\psi_1 = N_{12} \frac{\partial H_1}{\partial x_2}dx_1dx_2.$$

Поперечна сила $Q_1 + \frac{\partial Q_1}{\partial x_1}dx_1$ відхиляється від вертикалі на кут $\varphi_1 = \frac{H_1}{R_1}dx_1$.

Тому її проекція на вісь X :

$$-(Q_1 + \frac{\partial Q_1}{\partial x_1}dx_1)(H_2dx_2 + \frac{\partial H_2}{\partial x_1}dx_1dx_2)\varphi_1 = -Q_1 \frac{H_1H_2}{R_1}dx_1dx_2.$$

Зовнішнє напруження та сили інерції дають наступну величину проекції на вісь

$$(q - \rho h \ddot{u})H_1H_2dx_1dx_2.$$

Сумуючи знайдені проекції, отримаємо рівняння $\sum x = 0$, у розгорненому вигляді:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{H_1H_2} \left[\frac{\partial}{\partial x_1}(H_2N_{11}) - \frac{\partial H_2}{\partial x_1}N_{22} + \frac{\partial}{\partial x_2}(H_1N_{21}) + \right. \\ & \left. + \frac{\partial H_1}{\partial x_1}N_{12} \right] - \frac{Q_1}{R_1} - \rho h \ddot{u} + q_1 = 0. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Таким самим чином приходимо до рівняння $\sum y = 0$. Воно може бути отримане з (4.11) круговою заміною індексів ($1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 1$).

Враховуючи, що проекції сил на вісь Z рівні таким величинам:

$$\begin{aligned} Q_1 H_2 dx_2 - (Q_1 + \frac{\partial Q_1}{\partial x_1} dx_1)(H_2 + \frac{\partial H_2}{\partial x_1} dx_1) dx_2 &\approx -\frac{\partial}{\partial x_1} (H_2 Q_1) dx_1 dx_2; \\ Q_2 H_1 dx_1 - (Q_2 + \frac{\partial Q_2}{\partial x_2} dx_2)(H_1 + \frac{\partial H_1}{\partial x_2} dx_2) dx_1 &\approx -\frac{\partial}{\partial x_2} (H_1 Q_2) dx_2 dx_1; \\ -(N_{11} + \frac{\partial N_{11}}{\partial x_1} dx_1)(H_2 + \frac{\partial H_2}{\partial x_1} dx_1) dx_2 \frac{H_1}{R_1} dx_1 &\approx -N_{11} \frac{H_2 H_1}{R_1} dx_1 dx_2 \\ -(N_{22} + \frac{\partial N_{22}}{\partial x_2} dx_2)(H_1 + \frac{\partial H_1}{\partial x_2} dx_2) dx_1 \frac{H_2}{R_2} dx_2 &\approx -N_{22} \frac{H_1 H_2}{R_2} dx_2 dx_1 \\ &(q_3 - \rho h \ddot{\omega}) H_1 H_2 dx_1 dx_2, \end{aligned}$$

Отримаємо рівняння $\sum z = 0$; у розгорненому вигляді:

$$-\frac{N_1}{R_1} - \frac{N_2}{R_2} - \frac{1}{H_1 H_2} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} (Q H_2) + \frac{\partial}{\partial x_2} (Q_2 H_1) \right] + q_3 - \rho h \ddot{\omega} = 0 \quad (4.13)$$

Складемо рівняння $\sum M_{ox} = 0$. Для цього спроектуємо всі вектор-моменти (рис. 4.6, 4.10, 4.11) на вісь X , враховуючи кути перекошування (4.3). У результаті отримаємо моменти відносно осі X :

$$\begin{aligned} -M_{12} H_2 dx_2 + (M_{12} + \frac{\partial M_{12}}{\partial x_1} dx_1)(H_2 + \frac{\partial H_2}{\partial x_1} dx_1) dx_2 - M_{22} H_1 dx_1 + \\ + (M_{21} + \frac{\partial M_{21}}{\partial x_2} dx_2)(H_1 + \frac{\partial H_1}{\partial x_2} dx_2) dx_1 - (M_{11} + \frac{\partial M_{11}}{\partial x_1} dx_1)(H_2 + \\ + \frac{\partial H_2}{\partial x_1} dx_1) dx_2 \cdot \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_1}{\partial x_2} dx_1 + (M_{21} + \frac{\partial M_{21}}{\partial x_2} dx_2)(H_1 + \\ + \frac{\partial H_1}{\partial x_2} dx_2) dx_1 \cdot \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_2}{\partial x_1} dx_2 \approx \\ \approx \left[\frac{\partial}{\partial x_1} (H_2 M_{12}) + \frac{\partial (H_1 M_{22})}{\partial x_2} - M_{11} \frac{\partial H_1}{\partial x_2} + M_{21} \frac{\partial H_2}{\partial x_1} \right] 2x_1 dx_2 \end{aligned}$$

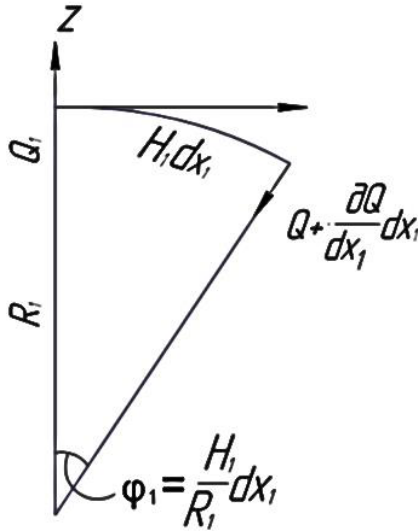


Рис. 4.10. Проекція поперечних сил на вертикальну вісь Z

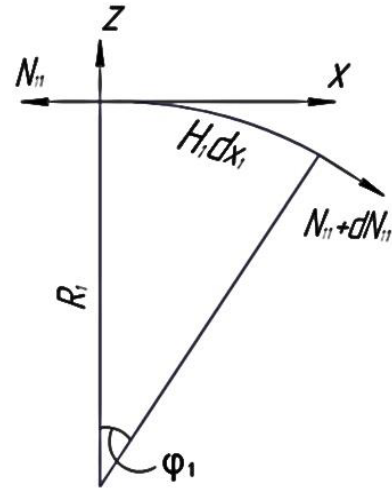


Рис. 4.11. Проекція осевих сил на вертикальну вісь Z

Відносно осі X поперечна сила $(Q_2 + \frac{\partial Q_2}{\partial x_2} dx_2)(H_1 + \frac{\partial H_1}{\partial x_2} dx_2)dx_1$ має плече

$H_2 dx_2$ (рис. 4.8) та утворює вектор-момент, направлений в від'ємний бік осі:

$$(Q_2 + \frac{\partial Q_2}{\partial x_2} dx_2)(H_1 + \frac{\partial H_1}{\partial x_2} dx_2)dx_1 \cdot H_2 dx_2 \approx -Q_2 H_1 H_2 dx_1 dx_2.$$

Тоді рівняння $\sum M_{0x} = 0$ набуде вигляду

$$\frac{\partial}{\partial x_2} (H_1 M_{22}) - \frac{\partial H_1}{\partial x_2} M_{11} + \frac{\partial (H_2 M_{12})}{\partial x_1} + M_{21} \frac{\partial H_2}{\partial x_1} - Q_2 H_1 H_2 = 0. \quad (4.14)$$

Таким самим чином знаходимо розгорнутий вираз рівняння $\sum M_{0y} = 0$. Він може бути отриманий з (4.14) круговою заміною індексів $(1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 1)$.

При побудові шостого рівняння (4.11) врахуємо, що вектор-моменти $M_{12} + dM_{12}$ та $M_{21} + dM_{21}$ (рис. 4.7; 4.12; 4.13) дають вертикальні проекції (на вісь Z):

$$\begin{aligned} & - (M_{12} + \frac{\partial M_{12}}{\partial x_1} dx_1)(H_2 + \frac{\partial H_2}{\partial x_1} dx_1)dx_2 \cdot \frac{H_1}{R_1} dx_1 + (M_{21} + \frac{\partial M_{21}}{\partial x_2} dx_2)(H_1 + \\ & + \frac{\partial H_1}{\partial x_2} dx_2)dx_1 \frac{H_2}{R_2} dx_2 \approx (-\frac{M_{12}}{R_1} + \frac{M_{21}}{R_2})H_1 H_2 dx_1 dx_2, \end{aligned}$$

а сили $N_{12} + dN_{12}$ та $N_{21} + dN_{21}$ мають плечі $H_1 dx_1$ та $H_2 dx_2$ відносно осі Z , і саме тому теж дають вектор-моменти (рис. 4.6), направлені відповідно в додатню та від'ємну сторони осі

$$(N_{12} + \frac{\partial N_{12}}{\partial x_1} dx_1)(H_2 + \frac{\partial H_2}{\partial x_1} dx_1) dx_2 \cdot H_1 dx_1 -$$

$$- (N_{21} + \frac{\partial N_{21}}{\partial x_2} dx_2)(H_1 + \frac{\partial H_1}{\partial x_2} dx_2) dx_1 \cdot H_2 dx_2 \approx (N_{12} - N_{21}) H_1 H_2 dx_1 dx_2.$$

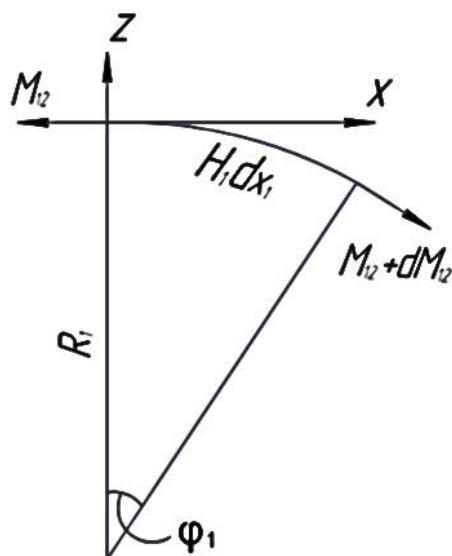


Рис. 4.12. Проекція вектор-моментів на вісь X

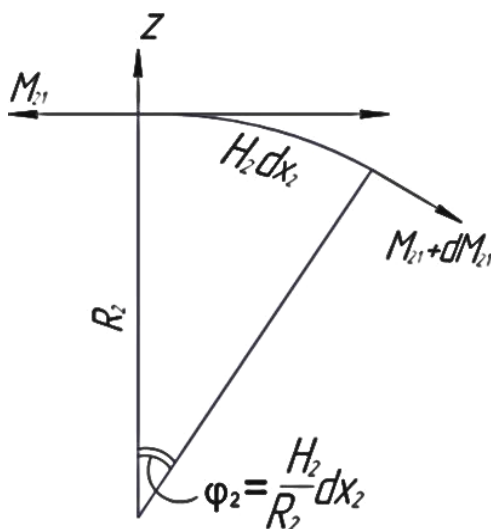


Рис. 4.13. Проекція вектор-моментів на вісь Y

У результаті отримаємо в розгорнутому вигляді рівняння $\sum Z = 0$:

$$N_{12} - N_{21} - \frac{M_{12}}{R_1} + \frac{M_{21}}{R_2} = 0.$$

Це рівняння в силу відношень теорії пружності (4.10) обертається в тотожність.

Таким чином, коливання тонких пружних оболонок описуються системою п'яти рівнянь у зусиллях. Це рівняння (4.12), (4.13), (4.14), а також отримані круговою заміною індексів $1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 1$ у рівняннях (4.12) та (4.14).

Указана система п'яти рівнянь вимушених коливань тонкої пружної оболонки має вигляд:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{H_1 H_2} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} (H_2 N_{11}) - \frac{\partial H_2}{\partial x_1} N_{22} + \frac{\partial}{\partial x_2} (H_1 N_{21}) + \frac{\partial H_1}{\partial x_2} N_{12} \right] - \frac{Q_1}{R_1} - \rho h \ddot{u} + q_1 &= 0 \\ \frac{1}{H_1 H_2} \left[\frac{\partial}{\partial x_2} (H_1 N_{22}) - \frac{\partial H_1}{\partial x_2} N_{11} + \frac{\partial}{\partial x_1} (H_2 N_{12}) + \frac{\partial H_2}{\partial x_1} N_{21} \right] - \frac{Q_2}{R_1} - \rho h \ddot{u}_2 + q_2 &= 0 \\ -\frac{N_1}{R_1} - \frac{N_2}{R_2} - \frac{1}{H_1 H_2} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} (Q_1 H_2) + \frac{\partial}{\partial x_2} (Q_2 H_1) \right] - \rho h \ddot{w} + q_3 &= 0 \end{aligned} \right\} (4.15)$$

$$\left. \begin{aligned} Q_2 &= \frac{1}{H_1 H_2} \left[\frac{\partial}{\partial x_2} (H_1 M_{22}) - \frac{\partial H_1}{\partial x_2} M_{11} + \frac{\partial (H_2 M_{12})}{\partial x_1} + M_{21} \frac{\partial H_2}{\partial x_1} \right] \\ Q_1 &= \frac{1}{H_2 H_1} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} (H_2 M_{11}) - \frac{\partial H_2}{\partial x_1} M_{22} + \frac{\partial (H_1 M_{21})}{\partial x} + M_{12} \frac{\partial H_1}{\partial x_2} \right] \end{aligned} \right\} (4.16)$$

Статична задача розрахунку оболонки ($N_{11}, N_{22}, N_{12}, M_{11}, M_{22}, M_{12}, Q_1, Q_2$) про знаходження восьми невідомих зусиль буде тричі статично невизначеною. Через це необхідно побудувати ще три рівняння нерозривності деформації (4.7) або переходити до рівнянь у переміщеннях. При вирішенні динамічної задачі систему (4.15), (4.16) необхідно доповнити граничними та початковими умовами.

4.2.6. Загальні рівняння коливань пружних тонких оболонок у переміщеннях

Підставляючи Q_1, Q_2 із (4.16) в (4.15), отримаємо три рівняння відносно шести внутрішніх зусиль. Внутрішні зусилля за допомогою відношень теорії

пружності (4.10) та залежностей (4.5), (4.6) виразимо через переміщення u_1 , u_2 , w . Отримаємо:

$$N_{11} = A \left[\frac{1}{H_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{u_2}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial x_2} + \frac{w}{R_1} + v \left(\frac{1}{H_2} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{u_1}{H_2 H_1} \frac{\partial H_2}{\partial x_1} + \frac{w}{R_2} \right) \right];$$

$$N_{22} = N_{11}(1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 1),$$

$$N_{12} = B \left[\frac{H_2}{H_1} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{u_2}{H_2} \right) + \frac{H_1}{H_2} \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{u_1}{H_1} \right) - D(1-v) \left(\frac{1}{H_1 H_2} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial x_2} \frac{\partial w}{\partial x_1} - \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial x_1} \frac{\partial w}{\partial x_2} - \frac{1}{R_2 H_2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \frac{u_1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial x_2} \right) - \frac{1}{R_2 H_1} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{u_2}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial x_1} \right) \right) \right];$$

$$N_{21} = N_{12}(1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 1),$$

$$M_{11} = D \left\{ \frac{1}{H_1} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{1}{H_1} \frac{\partial w}{\partial x_1} - \frac{u_1}{R_1} \right) + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial x_2} \left(\frac{1}{H_2} \frac{\partial w}{\partial x_2} - \frac{u_2}{R_2} \right) + \left[\frac{1}{H_2} \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{1}{H_2} \frac{\partial w}{\partial x_2} - \frac{u_2}{R_2} \right) + \frac{1}{H_2 H_1} \frac{\partial H_1}{\partial x_1} \left(\frac{1}{H_1} \frac{\partial w}{\partial x_1} - \frac{u_1}{R_1} \right) \right] \right\}$$

$$M_{22} = M_{11}(1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 1),$$

$$M_{12} = M_{21} = D(1-v) \left[\left(\frac{1}{H_1 H_2} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial x_2} \frac{\partial w}{\partial x_1} - \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial x_1} \frac{\partial w}{\partial x_2} \right) - \frac{1}{R_2 H_2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \frac{u_1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial x_2} \right) - \frac{1}{R_2 H_1} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{u_2}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial x_1} \right) \right]$$

Після підстановки цих виразів у знайдені три рівності зусиль прийдемо до системи трьох загальних рівнянь коливання тонкої пружної оболонки в переміщеннях:

$$\begin{aligned} A_1 \ddot{u}_1 + c_{11} u_1 + c_{12} u_2 + c_{12} w &= q_1(x_1, x_2, t), \\ A_2 \ddot{u}_2 + c_{21} u_1 + c_{22} u_2 + c_{23} w &= q_2(x_1, x_2, t), \\ A_3 \ddot{w} + c_{31} u_1 + c_{32} u_2 + c_{33} w &= q_3(x_1, x_2, t), \end{aligned} \quad (4.17)$$

де A_1, A_2, A_3 – інерційні диференціальні оператори (точніше – множники при інерційних диференційних операторах); c_{11}, \dots, c_{33} – пружні диференціальні оператори; u_{11}, u_{22}, w – компоненти переміщення серединної поверхні оболонки; q_1, q_2, q_3 – проекції на координатні осі навантаження, яке діє на одиницю площі серединної поверхні.

Систему (4.17) можна подати одним матричним рівнянням

$$[A]\{\ddot{u}\} + [c]\{u\} = \{q\},$$

в якому діагональна матриця диференціальних інерційних операторів $[A]$, матриця пружних диференціальних операторів $[c]$, матриці-стовпці переміщень $\{u\}$ та інтенсивності поверхневого навантаження $\{q\}$ по координатних напрямках мають вигляд

$$[A] = \begin{bmatrix} \rho h & 0 & 0 \\ 0 & \rho h & 0 \\ 0 & 0 & \rho h \end{bmatrix}; \quad [c] = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}; \quad \{u\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ w \end{Bmatrix}; \quad \{q\} = \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix}.$$

Елементи матриці $[c]$ являють собою суми простих диференціальних операторів. Елементи $c_{11}, c_{12}, c_{21}, c_{22}$ включають в себе по 18 складових та є сполученими відносно головної та неголовної діагоналей (можуть бути отримані один з іншого круговою заміною індексів $1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 1$). Елементи c_{13} та c_{23} взаємно сполучені та складаються із 24 складових. Елементи c_{31} та c_{32} також взаємно сполучені та складаються з 20 складових. Елемент c_{33} включає в себе 32 складові.

Коливання пружної оболонки описуються трьома двовимірними функціями $u_1(x_1, x_2, t)$, $u_2(x_1, x_2, t)$, $w(x_1, x_2, t)$, що задовольняють систему (1.32) 16-го порядку, граничним умовам (по 4 на краю) та шести початковим умовам. Загальний розв'язок системи (4.17) з 16 постійними інтегрування (по просторових координатах) невідомий.

Явні вирази елементів матриці $[c]$ можна подати таким чином:

$$\begin{aligned}
-c_{11}u_1 = & \frac{A}{H_1H_2} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{H_2}{H_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + v \frac{\partial H_2}{\partial x_1} \frac{u_1}{H_1} \right) - \frac{\partial H_2}{\partial x_1} \left(\frac{\partial H_2}{\partial x_1} \frac{u_1}{H_2H_1} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{v}{H_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) \right] + \frac{B}{H_1H_2} \left(\frac{\partial}{\partial x_2} \frac{H_1^2}{H_1} \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{u_1}{H_1} + \frac{\partial H_1}{\partial x_2} \frac{H_1}{H_2} \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{u_1}{H_1} \right) + \\
& \frac{D(1-v)}{H_1H_2} \left[\frac{\partial}{\partial x_2} \frac{H_1}{R_1^2H_2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \frac{\partial H_1}{\partial x_2} \frac{u_1}{H_1} \right) + \frac{\partial H_1}{\partial x_2} \frac{1}{R_2R_1} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \frac{\partial H_1}{\partial x_2} \frac{u_1}{H_1} \right) \right] + \\
& \frac{D}{H_2H_1R_1} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{H_2}{H_1} - \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{u_1}{R_1} + \frac{v}{H_1} \frac{\partial H_2}{\partial x_1} \frac{u_1}{R_1} \right) - \frac{\partial H_2}{\partial x_1} \left(\frac{1}{H_2H_1} - \frac{\partial H_2}{\partial x_1} \frac{u_1}{R_1} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{v}{H_1} \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{u_1}{R_1} \right) \right] + \frac{D(1-v)}{H_2H_1R_1} = \left[\frac{\partial}{\partial x_2} \frac{H_1}{R_1H_2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \frac{\partial H_1}{\partial x_2} \frac{u_1}{H_1} \right) + \frac{\partial H_1}{\partial x_2} \frac{1}{R_1H_2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \frac{\partial H_1}{\partial x_2} \frac{u_1}{H_1} \right) \right]; \quad (4.18)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_{12}u_{21} = & \frac{A}{H_1H_2} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial H_1}{\partial x_1} \frac{u_2}{H_1} + v \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) - \frac{\partial H_2}{\partial x_1} \left(\frac{1}{H_2} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + v \frac{\partial H_1}{\partial x_2} \frac{u_2}{H_1H_2} \right) \right] + \\
& + \frac{D(1-v)}{H_1H_2} \left[\frac{\partial}{\partial x_2} \frac{1}{R_1R_2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial H_2}{\partial x_1} \frac{u_2}{H_2} \right) + \frac{D}{H_2H_1R_1} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial x_2} \frac{u_2}{R_2} + v \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{u_2}{R_2} \right) - \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{\partial H_2}{\partial x_1} \left(\frac{1}{H_2} \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{u_2}{R_2} + \frac{v}{H_2H_1} \frac{\partial H_1}{\partial x_2} \frac{u_2}{R_2} \right) + \frac{D(1-v)}{H_2H_1R_1} \left[\frac{\partial}{\partial x_2} \frac{1}{R_2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial H_2}{\partial x_1} \frac{u_2}{H_2} \right) + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{\partial H_1}{\partial x_2} \frac{1}{R_2H_1} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial H_2}{\partial x_1} \frac{u_2}{H_2} \right) \right] \right]; \quad (4.19)
\end{aligned}$$

$$C_{21} = C_{12}(1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 1), \quad C_{22} = C_{11}(1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 1); \quad (4.20)$$

$$\begin{aligned}
c_{13}w = & \frac{A}{H_1H_2} \left[\frac{\partial}{\partial x_2} H_2 \left(\frac{w}{R_1} + v \frac{w}{R_2} \right) - \frac{\partial H_2}{\partial x_1} \left(\frac{w}{R_2} + v \frac{w}{R_1} \right) \right] - \\
& - \frac{D(1-v)}{H_1H_2} \left[\frac{\partial}{\partial x_2} \frac{1}{R_1H_2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial x_2} \frac{\partial w}{\partial x_1} - \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial x_1} \frac{\partial w}{\partial x_2} \right) + \right. \\
& \left. \frac{\partial H_1}{\partial x_2} \frac{1}{R_1H_1H_2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial x_1} \frac{\partial w}{\partial x_2} - \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial x_2} \frac{\partial w}{\partial x_1} \right) \right] - \\
& - \frac{D(1-v)}{H_2H_1R_1} \left[\frac{\partial}{\partial x_2} \frac{1}{H_2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial x_2} \frac{\partial w}{\partial x_1} - \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial x_1} \frac{\partial w}{\partial x_2} \right) + \right. \\
& \left. + \frac{\partial H_1}{\partial x_2} \frac{1}{H_1H_2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial x_2} \frac{\partial w}{\partial x_1} - \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial x_1} \frac{\partial w}{\partial x_2} \right) \right]; \quad (4.21)
\end{aligned}$$

$$C_{23} = C_{13}(1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 1), \quad (4.22)$$

$$\begin{aligned}
c_{32}u_2 = & \frac{A}{R_1} \left(\frac{\partial H_1}{\partial x_2} \frac{u_2}{H_1 H_2} + \frac{\nu}{H_2} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) + \frac{A}{R_2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2} \frac{1}{H_2} + \nu \frac{\partial H_1}{\partial x_2} \frac{u_2}{H_1 H_2} \right) - \\
& - \frac{D}{H_1 H_2} \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{1}{H_1} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial x_2} \frac{u_2}{R_2} + \nu \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{u_2}{H_2} \right) - \frac{\partial H_2}{\partial x_1} \left(\frac{1}{H_2} \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{u_2}{R_2} + \frac{\nu}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial x_2} \frac{u_2}{R_2} \right) \right] - \\
& - \frac{D(1-\nu)}{H_1 H_2} \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{1}{H_1} \times \left[\frac{\partial}{\partial x_2} \frac{1}{R_2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial H_2}{\partial x_1} \frac{u_2}{H_2} \right) \right] - \frac{D}{H_1 H_2} \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{1}{H_2} \times \\
& \times \left[\frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{H_1}{H_2} \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{u_2}{R_2} + \frac{\nu}{H_2} \frac{\partial H_1}{\partial x_2} \frac{u_2}{R_1} \right) - \frac{\partial H_1}{\partial x_2} \left(\frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial x_2} \frac{u_2}{R_2} + \frac{\nu}{H_2} \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{u_2}{R_2} \right) \right] - \\
& - \frac{D(1-\nu)}{H_1 H_2} \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{1}{H_2} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \frac{H_2}{R_2 H_1} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial H_2}{\partial x_1} \frac{u_2}{H_2} \right) \right] + \\
& + \frac{\partial H_2}{\partial x_1} \frac{1}{R_2 H_1} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial H_2}{\partial x_1} \frac{u_2}{H_2} \right); \quad (4.23)
\end{aligned}$$

$$C_{31} = C_{32}(1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 1) \quad (4.24)$$

$$\begin{aligned}
C_{33}w = & \frac{A}{R_1} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{\nu}{R_2} \right) \nu + \frac{D}{H_1 H_2} \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{1}{H_1} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\frac{H_2}{H_1} \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{1}{H_2} \frac{\partial w}{\partial x_1} \right. \right. \\
& + \left. \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial x_2} \frac{\partial w}{\partial x_2} + \nu \left(\frac{\partial}{\partial x_2} \frac{1}{H_2} \frac{\partial w}{\partial x_2} + \frac{1}{H_1^2} \frac{\partial H_2}{\partial x_1} \frac{\partial w}{\partial x_1} \right) \right] - \\
& - \frac{\partial H_2}{\partial x_1} \left[\frac{1}{H_2} \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{1}{H_2} \frac{\partial w}{\partial x_2} + \frac{1}{H_2 H_1^2} \frac{\partial H_2}{\partial x_1} \frac{\partial w}{\partial x_1} + \nu \left(\left[\frac{1}{H_1} \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{1}{H_1} \frac{\partial w}{\partial x_1} \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. + \frac{1}{H_2 H_1^2} \frac{\partial H_1}{\partial x_2} \frac{\partial w}{\partial x_2} \right) \right] \right\} + \frac{D(1-\nu)}{H_1 H_2} \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{1}{H_1} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_2} \left[\frac{1}{H_2} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial x_2} \frac{\partial w}{\partial x_1} - \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial x_1} \frac{\partial w}{\partial x_2} \right] + \frac{\partial H_1}{\partial x_2} \left[\frac{1}{H_1 H_2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial x_2} \frac{\partial w}{\partial x_1} - \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial x_1} \frac{\partial w}{\partial x_2} \right) \right] \right\} \\
& (4.25)
\end{aligned}$$

усі попередні складові, але в них проводиться кругова заміна індексів $1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 0.$,

$$A = \frac{Eh}{1-\nu^2}; \quad B = \frac{Eh}{2(1-\nu)}; \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}.$$

У цих елементах матриці $[c]$ одні доданки пропорційні h , інші h^3 , тобто значно відрізняються за величиною, що дозволяє спростити загальні рівняння, нехтуючи малими складовими. Формули (4.18) – (4.25) можна перетворити за допомогою умов теорії Кодаці–Гауса.

При розгляданні вимушених резонансних коливань ($\omega = \omega_{mn}$) не можна отримати відповідне рішення системи (4.17) без врахування тертя. Для врахування внутрішнього тертя, в'язкого або гістерезисного типу, необхідно помножити елементи матриці жорсткості (пружності) на оператори $I + b_1 \frac{\partial}{\partial t}$ або $I + \frac{\alpha_1}{\omega_{mn}} \frac{\partial}{\partial t}$. У цьому можна переконатись, якщо замість закону Гука

взяти, наприклад, закон Фойхта:

$$\sigma_{11} = \frac{E}{1 - \nu^2} \left(1 + b_1 \frac{\partial}{\partial t}\right) (\varepsilon_{11} + \nu \varepsilon_{22}); \quad \sigma_{22} = \frac{E}{1 - \nu^2} \left(1 + b \frac{\partial}{\partial t}\right) (\varepsilon_{22} + \nu \varepsilon_{11});$$

$$\sigma_{12} = \frac{E}{1 - \nu^2} \left(1 + b \frac{\partial}{\partial t}\right) \varepsilon_{12}$$

та зробити викладки від (4.8) до (4.18) – (4.25).

Зовнішнє в'язке тертя вводиться у вигляді додаткових складових $b_2 \rho \dot{u}_1$, $b_2 \rho \dot{u}_2$, $b_2 \rho h \dot{\omega}$. Таким чином, тут приймається припущення про пропорціональність матриць внутрішнього та зовнішнього тертя відповідно до матриці жорсткості та матриці інерції. Таке припущення не порушує досягнутого при вирішенні задач методом головних координат поділу змінних, а також враховує існуючі можливості експериментального визначення характеристик тертя (b_1, α_1, b_2) лише при гармонічних резонансних (головних) та вільних одночастотних коливаннях. При розгляді вимушених коливань вдалині від резонансу тертя не потрібно враховувати, так як воно мало впливає на рішення.

4.3. Початкові та крайові умови

До системи (4.17) додається шість початкових умов:

$$u_1 = u_{10}; u_2 = u_{20}; w = w_0 \quad \dot{u}_1 = \dot{u}_{10};$$

$$\dot{u}_2 = \dot{u}_{20}; \dot{w} = \dot{w}_0 \quad \text{при } t = 0$$

та по чотири граничних умови на кожному краю незамкненої оболонки. Якщо по будь-якій координаті (x_1, x_2) оболонка є замкнутою, то відповідні крайові умови замінюються умовою періодичності за цією координатою (табл. 4.1).

Таблиця 4.1. Вісім типів однорідних граничних умов (наприклад, для $X_1 = 0$)*

| Номер з/п | Вид закріплення | Умова на краю $X_1 = 0$ |
|-----------|--|--|
| 1 | Опертий край, вільний у напрямку X_1 (умова Нав'є) | $w = M_{11} = N_{11} = u_2 = 0$ |
| 2 | Опертий нерухомий край | $w = M_{11} = u_1 = u_2 = 0$ |
| 3 | Опертий край, вільний у тангенційних напрямках | $w = M_{11} = u_1 = N_{12} - \frac{1}{R_2} M_{12} = 0$ |
| 4 | Повністю защемлений край | $w = \theta_1 = u_1 = u_2 = 0$ |
| 5 | Защемлений край, вільний у напрямку | $w = \theta_1 = N_{11} = u_2 = 0$ |
| 6 | Защемлений край, вільний у напрямку | $w = \theta_1 = N_{12} - \frac{M_{12}}{R_2} = u_1 = 0$ |
| 7 | Защемлений край у тангенційних напрямках | $w = \theta_1 = N_{11} = N_{12} - \frac{M_{12}}{R_2} = 0$ |
| 8 | Вільний край | $Q_1 = \frac{1}{H_2} \frac{\partial M_{12}}{\partial x_2} = M_{11} = N_{11} = N_{12} - \frac{M_{12}}{R_2} = 0$ |

*Дані взято з роботи [2].

4.4. Деякі спрощені варіанти теорії коливань

тонких пружних оболонок

Загальні рівняння коливань тонких пружних оболонок застосовуються при малих частотах, коли довжина хвилі деформації більша за товщину оболонки. При великих частотах треба замість трьох рівнянь (4.17) брати п'ять більш

складних рівнянь, які враховують деформацію зсуву та інерцію обертання. Класичні рівняння оболонок ускладнюються також при фізичній та геометричній нелінійностях, анізотропії фізичних або геометричних властивостей оболонки, багатошаровості та інше.

Поряд з цим загальні рівняння коливань оболонок можна спростити, звужуючи їх за рахунок відкидання незначних членів або за рахунок вибору конкретної форми серединної поверхні.

З отриманих першим способом методів мають широке застосування такі спрощені варіанти: рівняння технічної теорії, рівняння пологих оболонок, рівняння безмоментної теорії, рівняння крайового ефекту та інші. Другим способом отримані загальні рівняння коливань оболонок обертання, сферичних, конічних та циліндричних оболонок. Ці рівняння, у свою чергу, піддаються спрощенню першим способом. У результаті з'явилася велика кількість варіантів теорії тонких оболонок. Найбільш прості з них поєднують спрощення обох способів.

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

- 4.1. Наведіть класифікацію тонких пружних оболонок.
- 4.2. Які припущення застосовують у класичній теорії оболонок?
- 4.3. Запишіть формули для визначення внутрішніх зусиль у теорії оболонок.
- 4.4. Наведіть формули для визначення напруженого стану в теорії оболонок.
- 4.5. Запишіть параметри Ламе та охарактеризуйте їх значення.
- 4.6. Виведіть диференціальні рівняння коливань оболонок у зусиллях.
- 4.7. Наведіть загальні рівняння коливань оболонок в операторній формі.
- 4.8. Сформулюйте граничні умови Нав'є для оболонок.
- 4.9. Як спростити загальні рівняння оболонок за рахунок простої форми і геометрії оболонок?

4.10. Як спростити загальні рівняння оболонок за рахунок нехтування малими членами рівнянь?

4.11. Запишіть умови ортогональності для власних форм коливань оболонок.

4.12. Наведіть формули зведення відносно кінетичної енергії для власних форм коливань оболонок.

4.13. Запишіть рівняння вільних коливань оболонок.

4.14. Наведіть рівняння вимушених коливань оболонок без тертя під дією довільної сили.

4.15. Наведіть рівняння вимушених коливань оболонок з урахуванням в'язкого тертя під дією довільної сили.

Розділ 5

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ ПОКООРДИНАТНОГО СПУСКУ ДЛЯ РОЗРАХУНКУ КОЛИВАНЬ СТЕРЖНІВ, ПЛАСТИН ТА ОБОЛОНОК

Усі механічні об'єкти, які використовують у сучасних машино- та приладобудуванні та в ракетній космічній техніці, моделюються стержнями і стержневими системами, масивними тілами, багатозв'язаними пластинами та просторовими пластинчато-оболонковими конструкціями в різноманітних комбінаціях.

Аналітичні методи розрахунку коливань подібних конструкцій, як правило, не відбивають з необхідною точністю картину дійсного становища. Тому необхідно розвивати універсальні та ефективні чисельні методи для розрахунку прикладних задач, які б дозволили визначити оптимальні параметри елементів конструкцій або інструментів, які перебувають під дією інтенсивних вібраційних навантажень.

Серед чисельних методів, на які спираються розрахунки коливань, найбільш поширеними натеper є метод скінченних різниць (МСР), метод скінченних елементів (МСЕ) та метод граничних елементів (МГЕ). Однак у кожного з них є власні певні недоліки. Для багатьох елементів машинобудівних конструкцій, які мають складну геометричну форму, використовувати рівномірну сітку МСР недоцільно. Оскільки будемо мати або велику кількість невідомих, або недостатню точність визначення шуканих величин у місцях різкої зміни геометричної форми, необхідно використовувати нерівномірну сітку, що дуже ускладнює структуру різницевого оператора і не дозволяє раціонально автоматизувати розрахунки та процес проектування. Метод скінченних елементів потребує використання спеціальних методів оптимізації матриць жорсткості та мас, а це ускладнює алгоритм та швидкість розрахунків.

Останнім часом отримали розвиток альтернативні по відношенню до МСР та МСЕ підходи, зокрема МГЕ. Серед інших чисельно-аналітичних методів МГЕ має очевидні переваги: проста логіка алгоритму, менша порівняно з МСЕ та МКР кількість арифметичних операцій при розв'язанні задач. Однак іноді для елементів конструкції у вигляді пластин, які мають складну геометричну форму, при дискретизації важко підібрати комбінацію з прямокутних та колових модулів. Крім того, потрібна синхронізація при заміні фундаментальних функцій, що потребує необхідних умінь і знань проектувальника.

Задачі розрахунку реальних конструкцій під дією вібраційних навантажень пов'язані з необхідністю визначення власних частот і форм коливань і, як правило, ці задачі мають велику кількість степенів вільності. Тому пошуки універсальних та ефективних підходів до розв'язку цих задач, які б дозволяли уникнути вищезгаданих труднощів, мають бути пов'язані з ітераційними методами.

5.1. Варіаційна постановка задачі про власні коливання пружних систем

Однією з важливіших задач при розрахунку коливань пружних систем є визначення власних частот та власних форм коливань, які їм відповідають. Аналітичне вирішення цієї задачі можливо лише для обмеженого кола задач, тому виникає необхідність чисельного визначення частот і власних форм коливань, при цьому доводиться обмежувати число розшукуваних власних частот і форм коливань, що їм відповідають. На практиці, як правило, при розрахунку конструкції чи її елементів, схильних до дії вібраційних навантажень, треба знати до 20 перших власних частот і відповідних їм власних форм коливань. У цілому проблема їх відшукування під час розв'язання задач про вимушені коливання реальних механічних систем вельми працемістка і потребує великих часових затрат навіть у разі наявності сучасних ЕОМ. Машинобудівні конструкції та їх конструктивні елементи є суцільними тілами.

З варіаційного принципу для нелінійних власних коливань випливає, що коли характеристики руху змінюються періодично із частотою ω , то існує функціонал

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_V L(x, u^k, u_{,t}^k, u_{,i}^k) dV dt,$$

точки стаціонарності якого відповідають дійсним рухам тіла за заданих граничних умов (наприклад, $u^k = 0$ на ∂V).

Якщо як проміжок часу взяти один період $T = \frac{2\pi}{\omega}$, то функціонал набуде вигляду

$$\int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} \int_V L(x, u^k, u_{,t}^k, u_{,i}^k) dV dt,$$

якщо $u^k(x, -\frac{\pi}{\omega}) = u^k(x, \frac{\pi}{\omega})$.

Якщо зробити заміну $t \rightarrow \Theta$, $\omega t = \Theta$, $-\pi \leq \Theta \leq \pi$, то отримаємо

$$\int_{-\pi}^{\pi} \int_V L(x, u^k, \omega u_{,t}^k, u_{,i}^k) dV d\Theta.$$

Коли лагранжیان $L = K - U$, де $K \geq 0$ – кінетична енергія, $U \geq 0$ – потенціальна енергія та K – однорідна функція другого порядку за $u_{,t}^k$, тобто для будь-якого $\omega > 0$

$$K(x; u^k, \omega u_{,t}^k) = \omega^2 K(x; u^k, u_{,t}^k),$$

причому K та U строго опуклі за сукупністю своїх аргументів і виконується умова

$$\int_{-\pi}^{\pi} \int_V K(x, u^k, u_{,t}^k) dV d\Theta = A^2,$$

де A – постійна, то використовують метод невизначених множників Лагранжа й отримують функціонал

$$I = \int_{-\pi V}^{\pi} U dV d\Theta - \lambda \left(\int_{-\pi V}^{\pi} K dV d\Theta - A^2 \right),$$

де λ – множник Лагранжа. Стационарна точка функціонала справджується за $\lambda = \omega^2$. Якщо $q = c \sin(\omega t + \varphi)$, то після інтегрування за часом функціонал набуде вигляду

$$I = \int_V \bar{U} dV - \omega^2 \int_V \bar{K} dV,$$

де \bar{U} та \bar{K} – квадратичні форми:

$$\bar{U} = B(c, c) = \frac{1}{2} \sum_{S=1}^N \sum_{K=1}^N C_{SK} c_K c_S,$$

$$\bar{K} = K(c, c) = \frac{1}{2} \sum_{S=1}^N \sum_{K=1}^N A_{SK} c_K c_S,$$

та є амплітудами потенціальної та кінетичної енергії.

У роботі ітераційний процес будується таким чином:

$$\vec{c}^{k+1} = \vec{c}^k + \gamma_i^{k+1} \vec{e}_i,$$

де \vec{c}^k – вектор вузлових невідомих; \vec{e}_i – одиничний вектор у напрямку \vec{c}^k ; γ_i^{k+1} – крок. Функціонал у $k+1$ наближенні записують у вигляді

$$I^{k+1} = (Bc^{k+1}, c^{k+1}) - (K(\omega_1^{(1)})^2 c^k, c^{k+1}),$$

де $(\omega^k)^2 = \frac{B(c^k, c^k)}{K(c^k, c^k)}$, а $(\omega^k)^2 (Kc^k, e_i) = f_i^k$, і ця величина може бути використана

як сила інерції, тоді функціонал набуде вигляду

$$I^{k+1} = (Bc^k + \gamma_i^{k+1} e_i, c^k + \gamma_i^{k+1} e_i) - [\omega^{(k)}]^2 (Kc^k, c^k + \gamma_i^{k+1} e_i),$$

у результаті функціонал набуде вигляду

$$I^{k+1} = (Bc^k, c^k) + 2\gamma_i^{k+1} (Bc^k, e_i) + (\gamma_i^{k+1})^2 (Be_i, e_i) - [\omega^{(k)}]^2 (Kc^k, c^k) - \gamma_i^{k+1} [\omega^{(k)}]^2 (Kc^k, e_i)$$

Прирошення функціонала на $k + 1$ -му наближенні

$$\Delta I^{k+1} = 2\gamma_i^{k+1} (Bc^k, e_i) + (\gamma_i^{k+1})^2 (Be_i, e_i) - \gamma_i^{k+1} [\omega_1^{(k)}]^2 (Kc^k, e_i).$$

Величину кроку визначають з умови максимальної швидкості зменшення ΔI^{k+1} :

$$\frac{\partial \Delta I^{k+1}}{\partial \gamma_i^{k+1}} = 0,$$

тоді

$$2(Bc^k, e_i) + 2\gamma_i^{k+1}(Be_i, e_i) - [\omega_1^{(k)}]^2(Kc^k, e_i) = 0,$$

звідси величину кроку знаходять таким співвідношенням:

$$\gamma^{k+1} = -\frac{2(Bc^k, e_i) - [\omega_1^{(k)}]^2(Kc^k, e_i)}{2(Be_i, e_i)}.$$

Таким чином ітераційний процес спрощується і формула для визначення кроку має ту саму структуру, що і для статичної задачі. Другу власну форму коливань і власну частоту визначають на підпросторі, ортогональному першій власній формі коливань. Вектор, ортогональний першій власній формі коливань, отримують зі співвідношення

$$\vec{u}^k = \vec{c} - \left[\sum_{s=1}^N (Kc^s, c^s) \vec{c}^{(1)} \right],$$

де $\vec{c}^{(1)}$ – нормований власний вектор, який відповідає першій власній частоті.

Тоді величину кроку при переході до $k + 1$ наближено записують як

$$\gamma^{k+1} = -\frac{2(Bc^k, e_i) - [\omega_1^{(k)}]^2(Kc^k, e_i) + [\omega_1^{(k)}]^2(Kc^l, e_i)(Kc^k, c^{(l)})}{2(Be_i, e_i)},$$

аналогічно визначають крок при знаходженні вищих власних частот і відповідних їм форм коливань:

$$\gamma^{k+1} = -\frac{2(Bc^k, e_i) - [\omega_1^{(k)}]^2(Kc^k, e_i) + \sum_{l=1}^M [\omega_1^{(k)}]^2(Kc^l, e_i)(Kc^k, c^{(l)})}{2(Be_i, e_i)},$$

де $[\omega_e]^2$ – квадрат кругової l -ї власної частоти; $c^{(l)}$ – l -та власна форма коливань; M – кількість шуканих власних частот і відповідних їм власних форм коливань. Таким чином, розв'язуючи систему (5.14) та застосовуючи

відношення Релея–Рітца визначають необхідне число власних частот і відповідних їм власних форм коливань.

Для прискорення збіжності ітераційного процесу використовують метод неповної релаксації, в якому $k+1$ -наближення будується у вигляді

$$c^{k+1} = c^k + \tau \gamma_i^{k+1} e_i,$$

де τ – параметр релаксації. Як критерій зупинки ітераційного процесу використовують таку умову:

$$\|\gamma_i^N\| \leq \varepsilon \|\gamma_i^1\|.$$

Тут ε – наперед задана мала стала.

Для реалізації запропонованого методу було розроблено обчислювальні програми визначення власних частот і відповідних їм власних форм коливань, при поздовжніх, крутильних та згінних коливаннях стержнів, при поздовжніх та згінних коливаннях пластин, при вільних коливаннях пластинчато-оболонкових конструкцій, а також при коливаннях тривимірних тіл.

Розв’язання тестових і практичних задач показало, що процес сходиться і дозволяє із заданою точністю визначити власні частоти і відповідні їм власні форми коливань.

Необхідно також зазначити, що порівняно із традиційним підходом мінімізації відношення Релея–Рітца методом покоординатного спуску (МПС) для знаходження власних частот і відповідних форм коливань, такий підхід дозволив у декілька разів зменшити час розв’язку задач, що вельми істотно при розв’язанні прикладних задач.

5.2. Збіжність схем приблизного розв’язання для задач на власні значення

Задачі на власні значення пружних систем можна подати у такій варіаційній формі:

$$\beta_l = \min_{u \in H} I[u] \equiv I[v_l], l = 1, 2, \dots$$

за умов

$$\begin{aligned} M(u) &= 1, \\ M(u, v_k) &= 0, k = 1, \dots, l-1, l \geq 2. \end{aligned}$$

Тут $M(u)$ – квадратичний функціонал; β_l – квадрат l -ї власної частоти.

Наближену задачу визначення власних частот записують у вигляді

$$\beta_l^h = \min_{u^h \in S} I[u^h] \equiv I[v_l^h], l = 1, 2, \dots, N,$$

за умов

$$\begin{aligned} M(u^h) &= 1, \\ M(u^h, v_k^h) &= 0, \quad k = 1, \dots, l-1, l \geq 2. \end{aligned}$$

При цьому $S \subset M_L$.

Для доказу збіжності введемо оператор проектування B такий, що $Bu \in S$, якщо $u \in M_L$, де Bu – складальна вектор-функція u в просторі $S \subset M_L$, відносно енергетичного скалярного добутку $I(u, v)$:

$$I(u - Bu, v^h) = 0, \forall v^h \in S.$$

Відомо, що

$$I(u - Bu) = \min_{v^h \in S} I(u - v^h).$$

Справді, нехай $v^h = Bu + v^h$, тоді

$$I(u - Bu - v^h) = I(u - Bu) + I(w^h) - 2I(\bar{u} - P\bar{u}, v^h) \geq I(u - Pu)$$

і рівність можлива лише за $w^h \equiv 0$.

Оскільки $u_l \in S$, то визначимо інтерполянт для $u_l \in M$ як значення вузлових параметрів для u та u_l . Тоді

$$I(u - Bu) \leq I(u - u_l) \leq D_1 \|u - u_l\|_H^2,$$

де $\|v\|_M$ – норма у просторі $M(\Omega)$.

Остання нерівність, як відомо, виконується для всіх операторів, розглянутих вище. Оскільки має виконуватись співвідношення

$$D_1 \|u\|_M^2 \geq I(u) \geq \gamma_1 \|u\|_H^2, K_1, \gamma_1 > 0,$$

то

$$\|u - Bu\|_M^2 \leq \frac{1}{\gamma_1} I(u - Bu) \leq \frac{D_1}{\gamma_1} \|u - u_I\|_M^2.$$

Оцінки ж $\|u - u_I\|_M$ для різних просторів МСЕ відомі й мають вигляд

$$\|u - u_I\|_M^2 \leq C_1 h^{2(k-m+1)}, C_1 > 0.$$

В останньому рівнянні $u \in W_2^{k+1}(\Omega)$; k – ступень простору, апроксимуючого початковий простір M_L ; m – порядок диференціального оператора.

Таким чином,

$$I(u - Bu) \leq C_2 h^{2(k-m+1)}, \|u - Bu\|_M \leq C_3 h^{2(k-m+1)}, C_2, C_3 > 0.$$

Відомо також, що для розглянутих вище операторів справедлива оцінка

$$\|u - Pu\|_0 \leq C_4 h^{k+1}, C_4 > 0.$$

У цьому рівнянні $\|v\|_0 = \int_{\Omega} v^2 d\Omega$.

Для розглянутих тут задач на власні значення можна записати принцип мінімаксу:

$$\begin{aligned} \beta_l^h &= \min_{S_l \subset S} \left\{ \max_{u^h \in S_l} P(u^h) \right\}, l = 1, 2, \dots, N, \\ \beta_l &= \min_{S_l \subset S} \left\{ \max_{u \in H} P(u^h) \right\}, l = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (5.1)$$

($P[u] = I(u) / M(u)$). Звідси слідує $\beta_l \leq \beta_l^h$.

Для отримання оцінки зверху введемо підпростір $V_l \in H$ відповідно до власних функцій v_1, v_2, \dots, v_l , початкової задачі. Через $K_l = Bv_l$ позначимо підпростір у S , відповідно, на Bv_1, Bv_2, \dots, Bv_l , і візьмемо його як S_l в (5.1).

Введемо також множину z_l , одиничних елементів у K_l , і візьмемо

$$\tau_l^h = \max |2M(u, u - Bu) - M(u - Bu)|. \quad (5.2)$$

Можна показати, що

$$\beta_l^h \leq \frac{\beta_l}{1 - \tau_l^h},$$

якщо $\tau_l^h < 1$,

$$M(u, u - Bu) = \sum_{i=1}^l \frac{C_l}{\beta_l} I(v_i - Bv_i, u - Bu),$$

якщо $u \in z_l$ та $u_h = \sum_{i=1}^l C_i v_i$.

Оцінимо тепер τ_l^h , виходячи з (5.2). Оскільки

$$2|M(u, u - Bu)| = 2 \left| \sum_{i=1}^l \frac{C_l}{\beta_l} I(v_i - Pv_i, u - Pu) \right| \leq 2K_1 \|w_l - Pw_l\|_M \|u - Pu\|_M,$$

$$\left(\partial e_{-} v_l = \sum_{i=1}^l \frac{C_i}{\beta_i} v_{-u} - |I(u, v)| \leq D_1 \|u\|_M \|v\|_M \right),$$

маємо

$$2|M(u, u - Pu)| \leq C_5 h^{2(k-m+1)}, C_5 > 0,$$

якщо

$$v_i \in W_2^{k+1}(\Omega), i = 1, 2, \dots, l.$$

Другий член у τ_l^h оцінюємо так:

$$M(u - Pu) \leq D_1 \|u - Bu\|_0^2 \leq C_6 h^{2k+2}, C_6 > 0, u \in z_l,$$

тобто маємо більш високий порядок відносно h , ніж $M(u, u - Bu)$.

Тому можна записати:

$$\tau_l^h \leq C_7 h^{2(k-m+1)}, C_7 > 0.$$

За достатньо малого значення h маємо $\tau_l^h \leq \frac{1}{2}$, тоді отримуємо оцінку для

β_l^h зверху:

$$\beta_l^h \leq \frac{\beta_l}{1 - \tau_l^h} \leq \beta_l (1 + 2\tau_l^h) \leq \beta_l + C_8 h^{2(k-m+1)}, C_8 > 0.$$

Таким чином,

$$\beta_l \leq \beta_l^h \leq \beta_l + Ch^{2(k-m+1)}, l \leq l < N,$$

якщо власні функції задачі $v_l \in W_2^{k+1}(\Omega)$.

5.3. Вибір ефективного способу реалізації методу квазістатичних ітерацій у задачах динаміки

Застосування методу квазістатичних ітерацій, як і всіх ітераційних методів, залежить від швидкості збіжності ітераційного процесу. Дослідження швидкості збіжності методу квазістатичних ітерацій подібне дослідженню швидкості збіжності релаксаційного методу розв'язання лінійної задачі. Тому дослідження швидкості збіжності має сенс почати з лінійної задачі, оскільки це дає можливість з'ясувати основні параметри ітераційного процесу, що визначають швидкість збіжності.

При використанні неповної релаксації наступне наближення будується у вигляді

$$\vec{c}^{k+1} = \vec{c}^k + \tau \gamma_i^{k+1} \vec{e}_i, \quad (5.3)$$

де $\tau \in (0,2)$ – коефіцієнт релаксації.

Доведено, що при $\tau \in (0,2)$ ітераційний процес (5.3) зійдеться для додатньо визначених операторів.

Швидкість збіжності залежить від коефіцієнта релаксації τ і досягає максимуму за $\tau = \tau_{opt}$, у цьому випадку швидкість збіжності значно підвищується зі збереженням об'єму обчислювань. Результати чисельних експериментів показали, що більш висока швидкість збіжності досягається при верхній релаксації, коли $\tau > 1$.

Оптимальна величина коефіцієнта релаксації визначається спектром операторів переходу на кожному кроці ітераційного процесу. Зазвичай спектри операторів переходу невідомі й задача їх визначення складніша за рішення СЛАР. Унаслідок цього визначення τ_{opt} здійснюється на основі різних

априорних оцінок або адаптивних процедур. Якщо коефіцієнт релаксації τ змінюється під час ітераційного процесу, то процес є нестационарним, тоді $k + 1$ -наближення будують у вигляді

$$\vec{c}^{k+1} = \vec{c}^k + \tau^{k+1} \gamma_i^{k+1} \vec{e}_i, \quad i = 1, \dots, N.$$

Коефіцієнт релаксації необхідно визначити з умови максимізації швидкості збіжності ітераційного процесу.

Аналіз швидкості збіжності запропонованого методу почнемо з дослідження статичної задачі $Lz = f$, для якої зазвичай k -е-наближення має вигляд

$$z^k = z^{k-1} - (E - \tau K)^{-1} \tau L z^{k-1} + (E - \tau K)^{-1} \tau f.$$

Для розширення можливостей вибору коефіцієнта релаксації введемо діагональну матрицю θ .

Якщо обрати $\theta = \tau E$, то справджується звичайний спосіб, а зі співвідношення отримаємо

$$\gamma^k = (E - \theta K)^{-1} (E - \theta - \theta R) \gamma^{k-1},$$

де γ^k – крок.

Оператор переходу в цьому випадку має вигляд

$$M = (E - \theta K)^{-1} (E - \theta - \theta R).$$

Швидкості збіжності визначають величиною спектрального радіуса, що дорівнює максимальному власному числу V_{\max} оператора переходу M .

Таким чином як критерій релаксації τ можна використовувати вимоги максимального зменшення спектрального радіуса оператора M . Швидкість збіжності зручніше досліджувати, розглядаючи задачу в матричній формі. У задачах статистичної теорії пружності мінімізація потенціальної енергії може бути зведена до розв'язання лінійної системи $Lu = f$, де L – несиметрично додатньо визначена матриця жорсткості; u – шуканий вектор переміщень; f – вектор сил.

Відомо, що матрицю жорсткості τ можна подати у вигляді

$$\tilde{L} = \tilde{K} + \tilde{N} + \tilde{K}'.$$

Використовуючи перетворення $\tilde{N}^{-\frac{1}{2}} \tilde{L} \tilde{N}^{-\frac{1}{2}}$, можна перейти до матриці, подібної до одиничної діагональної E , що зручно для аналізу. Тоді оператор переходу має вигляд

$$M = (E + \theta K)^{-1} (E - \theta - \theta K'),$$

де θ – діагональна матриця.

Збільшення швидкості збіжності може досягатися двома шляхами:

- 1) елементи діагональної матриці θ обирають різними;
- 2) усі елементи матриці θ однакові.

Метод вибору елементів матриці θ , якщо вони різні, не досліджений. Якщо елементи матриці θ однакові, то ітераційний процес збігається для додатньо визначеної матриці жорсткості за $0 < \tau < 2$ і що малими змінами коефіцієнта релаксації можна збільшити швидкість збіжності порівняно з повною релаксацією.

Оскільки швидкість збіжності збільшується зі зменшенням максимального власного числа оператора переходу, то оптимальною матрицею релаксації є та, при якій максимальне власне число оператора переходу дорівнює нулю. Тоді $M^N = 0$ при деякому скінченному числі N і в цьому випадку ітераційний процес сходиться за скінченну кількість ітерацій. У цьому випадку ітераційний метод переходить у прямий. Продовження ітераційного процесу вище N ітерацій еквівалентне ітераційному уточненню рішення, отриманому прямими методами.

Як відомо, такі способи використовують для зменшення похибки рішення, отриманого прямими методами.

Розглянемо задачу вибору матриці релаксації θ , вимагаючи рівності нулю усіх власних чисел оператора переходу для тридіагональної матриці жорсткості. У цьому випадку коефіцієнт релаксації визначають таким рекурентним співвідношенням:

$$\tau_i = (1 - \tau_{i-1} m_{ii-1} m_{i-1i})^{-1},$$

де m_{ii} – елементи матриці жорсткості.

Такий підхід визначення оптимальної матриці релаксації можна використовувати для систем із майже трикутною матрицею.

Якщо матриця жорсткості M довільна, то задача побудови діагональної матриці релаксації θ може бути зведена до задачі визначення її елементів з умови, що степені матриці переходу, вищі за N -у степінь, дорівнюють нулю. Розглянемо метод прискорення збіжності за умови сталості коефіцієнта релаксації протягом однієї ітерації. Доведено, що в цьому випадку ітераційний процес збігається, якщо система рівнянь має симетричну позитивно визначену матрицю, за умови $0 < \tau < 2$ і малих змін τ можна збільшити швидкість збіжності. Задача визначення коефіцієнта релаксації τ не розв'язана, практично її визначають чисельним експериментом.

Тому, як і в розглянутому вище підході, необхідно визначити такий коефіцієнт релаксації τ , за якого максимальне власне значення \mathcal{G}_{\max} буде мінімальним.

Доведено, що коли власні числа оператора переходу дійсні, то спектральний радіус $\rho(M) = \mathcal{G}_{\max}$ є мінімальним і швидкість збіжності максимальна за

$$\tau = 2(1 + \sqrt{mn})^{-1},$$

де m – максимальне, n – мінімальні власні числа матриці оператора переходу. Цей результат дає можливість визначити оптимальне τ_{opt} , але практичне використання формули нераціональне, тому що вимагає знаходження меж спектру матриці оператора переходу.

На підставі проміжної інформації, яка надходить під час обчислювального процесу, отримуємо величину параметра релаксації:

$$\tau^e = 2 \left[1 + \sqrt{\frac{(Lu^l, u^l)}{(Bu^l, u^l)}} \right]^{-1}.$$

Хоча цей результат отримано недостатньо строго, на практиці він є достатньо ефективним, оскільки не вимагає визначення меж спектру. Його недолік у тому, що при кожному визначенні τ необхідно знаходити величину (Lu^l, u^l) , яка являє собою потенціальну енергію деформації. Якщо вектор переміщення рівний u^l , це вимагає значних затрат часу і збільшення часу однієї ітерації, тому практично τ визначають не на кожній ітерації, а через деяку кількість циклів. Крім того, цей підхід неможливо поширити на неквадратичний функціонал, тобто на нелінійні системи рівнянь. Збільшення швидкості збіжності засновано на такому: l -й та $l+1$ -й кроки пов'язані співвідношенням

$$u^{l+1} = Mu^l. \quad (5.4)$$

Матриця оператора переходу M завжди може бути подана у вигляді

$$M = B + H, \quad (5.5)$$

де B – діагональна матриця, елементами якої є власні числа оператора M , а H – нільпотент. Якщо матриця M проста, тобто її можна діагоналізувати, то $H = 0$. Подамо квадрат норми кроку на $l+1$ -му наближенні у вигляді

$$(u^{l+1}, u^{l+1}) = (Mu^l, Mu^l). \quad (5.6)$$

Тоді для простої матриці

$$(u^{l+1}, u^{l+1}) = (Bu_i^l, Bu_i^l) \quad (5.7)$$

чи

$$(u^{l+1}, u^{l+1}) = \sum_{i=1}^N \mathcal{G}_i^2 u_i^2, \quad (5.8)$$

де \mathcal{G}_i – власні числа оператора переходу M , а u_0 – проекції вектора u^l на осі координат. Якщо поділити ліву і праву частини цього співвідношення на (u^l, u^l) і ввести величини

$$\beta_i^2 = u_i^2 (u^l, u^l)^{-1}, \quad (5.9)$$

то отримаємо

$$(u^{l+1}, u^{l+1})(u^l, u^l) = \sum_{i=1}^N \mathcal{G}_i^2 \beta_i^2, \quad (5.10)$$

причому $\sum_{i=1}^n \beta_i^2 = 1$. Права частина цього рівняння являє собою зважене середнє арифметичне квадрата власних чисел оператора M , яке в цьому випадку не перевищує квадрата максимального власного числа. Таким чином, задачу прискорення збіжності можна сформулювати як задачу мінімізації величини:

$$\rho = \sum_{i=1}^n \beta_i^2 \mathcal{G}_i^2. \quad (5.11)$$

Це можна виконати мінімізацією арифметичного квадрата власних чисел $\lambda = \sum_{i=1}^N \mathcal{G}_i^2$ оператора M , тому що $\rho < \lambda$. Відповідно до співвідношення між

середнім арифметичним і середнім геометричним $\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathcal{G}_i^2 \geq \sqrt[N]{\prod_{i=1}^N \mathcal{G}_i^2}$. Середнє арифметичне досягає мінімуму, коли воно рівне середньому геометричному. Це відбувається тільки тоді, коли всі квадрати власних чисел, а отже й їх абсолютні величини, будуть рівні. Оскільки $|M^2| = (1 - \tau)^{2N}$, то верхня оцінка оптимального коефіцієнта верхньої релаксації має вигляд

$$\tau_0 = 1 + \frac{|\gamma^{l+1}|}{|\gamma^l|}. \quad (5.12)$$

Цей метод вибору оптимального коефіцієнта релаксації на практиці є найкращим, тому що він використовує лише норми двох передостанніх кроків, які є побічним результатом обчислювального процесу, і не вимагає додаткових затрат часу і пам'яті ЕОМ. Суттєвий результат отриманого методу визначення τ полягає в тому, що він значно збільшує швидкість збіжності, причому, як показали чисельні експерименти, швидкість збіжності зростає в 1,8-4 рази

навіть порівняно з постійним оптимальним τ , який визначають класичним методом через межі спектру оператора переходу.

У загальному випадку оператор переходу не може бути діагоналізований, оцінку для оптимального коефіцієнта релаксації доводиться зв'язувати не із сумою квадратів власних чисел, а із сумою квадратів сингулярних чисел оператора переходу M . При цьому оцінка стає більш завищеною і це необхідно враховувати під час її використання.

Ще одна велика перевага останнього методу визначення τ полягає в тому, що його можна використовувати у випадку, коли функціонал, що підлягає мінімізації, не квадратичний, тобто відповідна задача є нелінійною. Це можливо завдяки тому, що на кожному кроці ітераційного процесу дійсний функціонал фактично замінюється наближеним квадратичним.

5.4. Визначення власних частот і власних форм коливань при поздовжніх коливаннях стержнів

При поздовжніх коливаннях стержня амплітудні значення потенціальної і кінетичної енергій визначають формулами

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l EA u_{,x} u_{,x} dx, \quad (5.13)$$

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l \rho A u_{,x} u_{,x} dx, \quad (5.14)$$

де $u(x)$ – переміщення, напрямлені вздовж осі X ; $u_{,x}$ – деформація відносного подовження; E – модуль Юнга; A – площа поперечного перерізу; ρ – густина матеріалу.

Вид функціонала, з урахуванням виразів (5.13) та (5.14) для поздовжніх коливань стержня, обумовлює можливість апроксимації переміщень $u(x)$ поліномом 1-го степеня, що дозволяє забезпечити існування перших похідних, які входять до функціонала:

$$u(x) = u_i + \frac{u_j - u_i}{l} x, \quad (5.15)$$

де u_i та u_j – переміщення i та j -го вузлів.

Враховуючи (5.15), амплітудні значення потенціальної і кінетичної енергії для скінченновимірного простору набудуть вигляду

$$U = \sum_{n=1}^2 \frac{EA}{l} (u_j - u_i)^2, \quad (5.16)$$

$$T = \frac{1}{6} \rho Al \sum_{n=1}^2 (u_i^2 + u_j^2 + u_i u_j). \quad (5.17)$$

Оскільки при прирощенні кроку змінюються амплітудні значення потенціальної і кінетичної енергії скінченних елементів (СЕ), пов'язаних з i -м вузлом, враховуємо внесок в їх значення тільки від цих СЕ.

Перші і другі похідні від амплітудних значень потенціальної і кінетичної енергії мають вигляд

$$U_{,u_i} = \sum_{n=1}^2 EA \frac{(u_i - u_j)}{l}. \quad (5.18)$$

$$U_{,u_i u_i} = \sum_{n=1}^2 \frac{EA}{l}. \quad (5.19)$$

$$T_{,u_i} = \sum_{n=1}^2 \frac{\rho Al}{6} (2u_i + u_j). \quad (5.20)$$

$$T_{,u_i u_i} = \sum_{n=1}^2 \frac{\rho Al}{3}. \quad (5.21)$$

5.5. Визначення власних частот та власних форм коливань при крутильних коливаннях стержнів

Амплітудні значення потенціальної і кінетичної енергії при крутильних коливаннях стержня виглядають так:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l G I_p \varphi_{,x} \varphi_{,x} dx, \quad (5.22)$$

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l \rho I_p \dot{\varphi}^2 dx, \quad (5.23)$$

де $\varphi(x)$ – кут закручування; G – модуль пружності другого роду; I_p – полярний момент інерції.

Аналогічно, як і в разі поздовжніх коливань, апроксимацію кута закручування $\varphi(x)$ запишемо у вигляді полінома 1-го степеня:

$$\varphi(x) = \varphi_i + \frac{\varphi_j - \varphi_i}{l} x, \quad (5.24)$$

де φ_i та φ_j – кути закручування i - та j -го вузлів.

Тоді з урахуванням (5.24) для скінченновимірного простору амплітудні значення потенціальної і кінетичної енергії набудуть вигляду

$$U = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^2 \frac{GI_p}{l} (\varphi_j - \varphi_i)^2, \quad (5.25)$$

$$T = \frac{1}{6} \sum_{n=1}^2 \rho I_p l (\varphi_i^2 + \varphi_j^2 + \varphi_i \varphi_j). \quad (5.26)$$

Перші та другі похідні від амплітудних значень потенціальної і кінетичної енергії мають вигляд

$$U_{,\varphi_i} = \sum_{n=1}^2 \frac{GI_p}{l} (\varphi_i - \varphi_j); \quad (5.27)$$

$$U_{,\varphi_i \varphi_i} = \sum_{n=1}^2 \frac{GI_p}{l}; \quad (5.28)$$

$$T_{,\varphi_i} = \sum_{n=1}^2 \frac{\rho I_p l}{6} (2\varphi_i + \varphi_j); \quad (5.29)$$

$$T_{,\varphi_i \varphi_i} = \sum_{n=1}^2 \frac{\rho I_p l}{3}. \quad (5.30)$$

5.6. Визначення власних частот та власних форм коливань при згінних коливаннях стержнів

У випадку плоских згінних коливань стержня область системи у цьому випадку одновимірна: $\Omega = l$.

Амплітудні значення потенціальної і кінетичної енергії у цьому випадку виглядають так:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l EI w^2{}_{,xx} dx, \quad (5.31)$$

$$T = \frac{1}{2} \omega^2 \int_0^l \rho A w^2 dx. \quad (5.32)$$

У такому випадку для апроксимації переміщень використовують поліном 3-го порядку з чотирма членами:

$$w(x) = w_i \frac{1}{l^3} (2x^3 - 3x^2l + l^3) + w_j \frac{1}{l^3} (3x^2l - 2x^3) + \varphi_i \frac{1}{l^2} (xl^2 - 2x^2l + x^3) + \varphi_j \frac{1}{l^2} (x^3 - lx^2) \quad (5.33)$$

Тоді, враховуючи (5.33), для скінченновимірного простору амплітудні значення потенціальної і кінетичної енергії набудуть такого вигляду:

$$U = \frac{12}{l^3} \sum_{n=1}^2 EI \left(\frac{1}{2} w_i^2 + \frac{1}{2} w_j^2 + \frac{1}{6} \varphi_i^2 l^2 + \frac{1}{6} \varphi_j^2 l^2 - w_i w_j + \frac{1}{2} w_i \varphi_i l + \frac{1}{2} w_i \varphi_j l - \frac{1}{2} w_j \varphi_i l - \frac{1}{2} w_j \varphi_j l + \frac{1}{6} l^2 \varphi_j \varphi_i \right); \quad (5.34)$$

$$T = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^2 \rho A l \left(\frac{13}{35} w_i^2 + \frac{13}{35} w_j^2 + \frac{\varphi_i^2 l^2}{105} + \frac{\varphi_j^2 l^2}{105} + \frac{11}{105} w_i \varphi_i l - \frac{11}{105} w_j \varphi_j l + \frac{9}{35} w_i w_j - \frac{13}{210} \varphi_j w_i l + \frac{13}{210} \varphi_i w_j l - \frac{\varphi_i \varphi_j}{70} l^2 \right) \quad (5.35)$$

Перші та другі похідні від амплітудних значень потенціальної і кінетичної енергії необхідні для реалізації алгоритму записують так:

$$U_{,w_i} = \frac{12}{l^3} \sum_{n=1}^2 EI \left(w_i - w_j + \frac{1}{2} \varphi_i l + \frac{1}{2} \varphi_j l \right), \quad (5.36)$$

$$U_{,w_i w_i} = \sum_{n=1}^2 \frac{12}{l^3} EI, \quad (5.37)$$

$$T_{,w_i} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^2 \rho A l \left(\frac{26}{35} w_i + \frac{11}{105} \varphi_i l + \frac{9}{35} w_j - \frac{13}{210} \varphi_j l \right), \quad (5.38)$$

$$T_{,w_i w_i} = \sum_{n=1}^2 \frac{13 \rho A F l}{35}. \quad (5.39)$$

5.7. Визначення власних частот та власних форм коливань просторових стержневих систем

Нехай просторова стержнева система займає область Ω . Оберемо для неї глобальну систему координат $OXYZ$ та здійснимо дискретизацію Ω на скінченні елементи $\Omega = U\Omega_n$. Введемо до розгляду локальну систему координат $0\hat{x}\hat{y}\hat{z}$, де \hat{x} – вісь, яка збігається з поздовжньою віссю стержня: \hat{y} , \hat{z} , – осі, які збігаються з головними центральними осями поперечного перерізу. Тоді амплітудні значення потенціальної і кінетичної енергії кожного СЕ складаються із суми амплітудних значень потенціальних і кінетичних енергій згину стержня у двох площинах, плюс амплітудні значення кінетичної і потенціальної енергій поздовжніх і крутильних коливань стержня

$$\hat{U}_n(\hat{u}_i, \dots, \hat{\psi}_i) = \hat{U}_n^{uz}(\hat{w}_i, \hat{\phi}_i) + \hat{U}_n^{vz}(\hat{v}_i, \hat{\phi}_i) + \hat{U}_n^{kp}(\hat{\phi}_i) + \hat{U}_n^{np}(\hat{u}_i), \quad (5.40)$$

$$\hat{T}_n(\hat{u}_i, \dots, \hat{\psi}_i) = \hat{T}_n^{uz}(\hat{w}_i, \hat{\phi}_i) + \hat{T}_n^{vz}(\hat{v}_i, \hat{\phi}_i) + \hat{T}_n^{kp}(\hat{\phi}_i) + \hat{T}_n^{np}(\hat{u}_i), \quad (5.41)$$

де вузловими невідомими є переміщення $\hat{u}_i, \hat{v}_i, \hat{w}_i$ у напрямках локальних осей $\hat{x}_i, \hat{y}_i, \hat{z}_i$ і кути повороту $\hat{\phi}_i, \hat{\psi}_i, \hat{\gamma}_i$ відносно локальних осей.

Вирази для відповідних амплітудних значень потенціальної і кінетичної енергій у глобальних координатах наведено у формулах (5.16), (5.17), (5.25), (5.30), (5.34), (5.35), де підсумовування відбувається від $n = 1, \dots, N$, де N – кількість СЕ, що оточують i -й вузол.

Обираючи як вузлові невідомі переміщення $\hat{u}_i, \hat{v}_i, \hat{w}_i$ та кути повороту $\hat{\phi}_i, \hat{\psi}_i, \hat{\gamma}_i$ відносно локальних осей $\hat{x}_i, \hat{y}_i, \hat{z}_i$, перетворимо амплітудні значення

потенціальної і кінетичної енергій СЕ до глобальних координат. Для цього скористаємося таким перетворенням:

$$\begin{aligned}
 \hat{u}_i &= u_i \cos(\hat{x}, x) + v_i \cos(\hat{x}, y) + w_i \cos(\hat{x}, z) \\
 \hat{g}_i &= u_i \cos(\hat{y}, x) + v_i \cos(\hat{y}, y) + w_i \cos(\hat{y}, z) \\
 \hat{\omega}_i &= u_i \cos(\hat{z}, x) + v_i \cos(\hat{z}, y) + w_i \cos(\hat{z}, z) \\
 \hat{\phi}_i &= \varphi_i \cos(\hat{x}, x) + \psi_i \cos(\hat{x}, y) + \gamma_i \cos(\hat{x}, z) \\
 \hat{\psi}_i &= \varphi_i \cos(\hat{y}, x) + \psi_i \cos(\hat{y}, y) + \gamma_i \cos(\hat{y}, z) \\
 \hat{\gamma}_i &= \varphi_i \cos(\hat{z}, x) + \psi_i \cos(\hat{z}, y) + \gamma_i \cos(\hat{z}, z)
 \end{aligned} \tag{5.42}$$

Підставляючи (5.7.3) у (5.7.1) та (5.7.2), отримуємо

$$\hat{U}_n(u_i, \dots, \psi_i) = \hat{U}_n^{uz}(w_i, \varphi_i) + \hat{U}_n^{uz}(v_i, \varphi_i) + U_n^{kp}(\varphi_i) + U_n^{np}(u_i); \tag{5.43}$$

$$\hat{T}_n(u_i, \dots, \psi_i) = \hat{T}_n^{uz}(w_i, \varphi_i) + \hat{T}_n^{uz}(v_i, \varphi_i) + \hat{T}_n^{kp}(\varphi_i) + T_n^{np}(u_i). \tag{5.44}$$

Визначення локальних координат $\hat{x}_i, \hat{y}_i, \hat{z}_i$ здійснюють аналогічно (5.42).

Якщо початок локальної та глобальної систем координат збігається, то:

$$\begin{aligned}
 \hat{x}_i &= x_i \cos(\hat{x}, x) + y_i \cos(\hat{x}, y) + z_i \cos(\hat{x}, z); \\
 \hat{y}_i &= x_i \cos(\hat{y}, x) + y_i \cos(\hat{y}, y) + z_i \cos(\hat{y}, z); \\
 \hat{z}_i &= x_i \cos(\hat{z}, x) + y_i \cos(\hat{z}, y) + z_i \cos(\hat{z}, z).
 \end{aligned} \tag{5.45}$$

Напрямні косинуси визначають за формулами

$$\begin{aligned}
 x_{ij} &= x_j - x_i; \quad y_{ij} = y_j - y_i; \quad z_{ij} = z_j - z_i; \\
 \cos(\hat{x}, x) &= \frac{x_{ij}}{l_{ij}}; \quad \cos(\hat{x}, y) = \frac{y_{ij}}{l_{ij}}; \quad \cos(\hat{x}, z) = \frac{z_{ij}}{l_{ij}};
 \end{aligned} \tag{5.46}$$

$$l_{ij} = \sqrt{x_{ij}^2 + y_{ij}^2 + z_{ij}^2}. \tag{5.47}$$

5.8. Визначення власних частот та власних форм коливань при поздовжніх коливаннях пластинки у своїй площині

У тих випадках, коли реалізується плоска деформація чи плоский напружений стан, пластинка здійснює коливання у своїй площині.

Вирази для потенціальної і кінетичної енергій у цьому випадку мають вигляд

$$U = \frac{Et}{2(1-\mu^2)} \int_{\Omega} \left[(u_{,x})^2 + (v_{,y})^2 + 2\mu u_{,x} v_{,y} + \frac{1-\mu}{2} (u_{,y} + v_{,x})^2 \right] dx dy, \quad (5.48)$$

$$T = \frac{1}{2} \frac{\gamma}{g} \int_{\Omega} \left[(u_{,t})^2 + (v_{,t})^2 \right] dx dy, \quad (5.49)$$

де $u_{,y}$ – переміщення вздовж координатних осей x, y ; E – модуль Юнга; t – товщина, γ – щільність матеріалу.

Зробимо триангуляцію серединної поверхні пластинки.

Візьмемо лінійну залежність розподілу від x, y й задамо апроксимуючі функції переміщень у вигляді лінійних поліномів:

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y; \\ v(x, y) &= \alpha_4 + \alpha_5 x + \alpha_6 y; \end{aligned} \quad (5.50)$$

де

$$\alpha_1 = \frac{\begin{vmatrix} u_1 & x_1 & y_1 \\ u_2 & x_2 & y_2 \\ u_3 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}}{\Delta}; \quad \alpha_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & u_1 & y_1 \\ 1 & u_2 & y_2 \\ 1 & u_3 & y_3 \end{vmatrix}}{\Delta}; \quad \alpha_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & x_1 & u_1 \\ 1 & x_2 & u_2 \\ 1 & x_3 & u_3 \end{vmatrix}}{\Delta}; \quad \Delta = \frac{\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}}{\Delta}, \quad (5.51)$$

де Δ – подвійна площа трикутника 1-2-3; $\alpha_4, \alpha_5, \alpha_6$ – визначаються аналогічно.

Підставивши (5.51) у (5.50), отримаємо вирази для апроксимації переміщень:

$$u(x, y) = d_1 u_1 + d_2 u_2 + d_3 u_3, \quad (5.52)$$

де

$$d_1 = (a_1 + b_1 x + c_1 y); \quad d_2 = (a_2 + b_2 x + c_2 y); \quad d_3 = (a_3 + b_3 x + c_3 y); \quad (5.53)$$

$$a_1 = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}; \quad b_1 = -\frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} 1 & y_2 \\ 1 & y_3 \end{vmatrix}; \quad c_1 = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} 1 & x_2 \\ 1 & x_3 \end{vmatrix}; \quad (5.54)$$

значення $a_2, b_2, c_2, a_3, b_3, c_3$ визначають за допомогою циклічної перестановки індексів вузлів.

Функція $v(x, y)$ залежить від переміщень v_1, v_2, v_3 таким чином:

$$v(x, y) = d_1 v_1 + d_2 v_2 + d_3 v_3. \quad (5.55)$$

Тоді потенціальна і кінетична енергії з урахуванням (5.56) та (5.55) набудуть вигляду

$$U_h = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^M D^{11} \left[B_u^1 + C_u^1 + 2\mu B_u C_u + \frac{1-\mu}{2} (B_v + C_u) \right], \quad (5.56)$$

де $D^{11} = \frac{Et}{4(1-\mu^2)}$:

$$\begin{aligned} B_{,u} &= b_i u_i + b_j u_j + b_k u_k; \\ C_{,v} &= c_i v_i + c_j v_j + c_k v_k; \\ B_{,v} &= b_i v_i + b_j v_j + b_k v_k; \\ C_{,u} &= c_i u_i + c_j u_j + c_k u_k; \end{aligned} \quad (5.57)$$

$$\begin{aligned} T_h &= \frac{1}{12} \frac{\gamma}{g} \sum_{m=1}^M \Delta (u_i^2 + u_j^2 + u_k^2 + u_i u_j + u_i u_k + u_j u_k + v_i^2 + v_j^2 + v_k^2 + \\ &+ v_i v_j + v_i v_k + v_j v_k) \end{aligned} \quad (5.58)$$

де M – кількість трикутників з i -м вузлом, тобто підсумування у (5.57), (5.58) здійснюється за трикутниками, які оточують i -й вузол.

5.9. Визначення власних частот та власних форм коливань при вільних згінних коливаннях пластин

Під час виведення рівнянь потенціальної та кінетичної енергій вважають, що справедливі гіпотези Кірхгофа–Лява (гіпотеза прямих нормалей реалізується лінійно, що змінюється за товщиною, узагальнений плоский лінійний стан, крім того вважаємо, що задача фізично і геометрично лінійна). Нехай серединна поверхня пластини розміщена у площині OXY , зсувом і інерцією повороту при згінних коливаннях нехтуємо. З урахуванням вище викладеного потенціальна і кінетична енергії мають вигляд

$$U = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} D \left\{ (w_{,xx} + w_{,yy})^2 + 2(1 - \mu) \left[(w_{,xy})^2 - w_{,xx} w_{,yy} \right] \right\} dx dy, \quad (5.59)$$

$$T = \frac{1}{2} \iint \frac{\gamma}{g} \dot{w}^2 dx dy, \quad (5.60)$$

де $D = \frac{Et^3}{12(1 - \mu^2)}$ – циліндрична жорсткість пластини; E – модуль Юнга; μ – коефіцієнт Пуассона; t – товщина пластинки; γ – густина матеріалу; g – прискорення вільного падіння.

Зробимо триангуляцію серединної поверхні Ω на скінченну кількість трикутників $\Omega_n \cup_n \Omega$. Вершини кожного трикутника позначимо i, j, k , пронумеруємо їх проти годинникової стрілки.

Апроксимацію прогину в межах кожного трикутника задамо у вигляді неповного кубічного полінома:

$$\begin{aligned} w_h = & w_i L_i + w_j L_j + w_k L_k + c_1 L_i^2 L_j + c_2 L_i^2 L_k + c_3 L_j^2 L_i + c_4 L_j^2 L_k + \\ & + c_5 L_k^2 L_i + c_6 L_k^2 L_j + 2c_7 L_i L_j L_k \end{aligned} \quad (5.61)$$

У формулі використано відомі L координати й

$$\begin{aligned} c_1 &= w_i - w_j - d_k \varphi_i - a_k \psi_i; \\ c_2 &= w_i - w_k - d_j \varphi_j - a_j \psi_i; \\ c_3 &= w_i - w_j - d_k \varphi_j - a_k \psi_j; \\ c_4 &= w_j - w_k - d_i \varphi_j - a_i \psi_j; \\ c_5 &= w_k - w_i - d_j \varphi_k - a_j \psi_k; \\ c_6 &= w_i - w_j - d_i \varphi_k - a_i \psi_k; \\ c_7 &= \frac{1}{4} \sum_{S=1}^6 \end{aligned} \quad (5.62)$$

де $\varphi_i = (w_{i,y})$, $\psi_i = (w_{i,x})$ – кути повороту відносно осей OX та OY в i -му вузлі.

Коефіцієнти d_i та a_i , відповідно,

$$d_i = y_i - y_k, \quad c_i = x_k - x_j, \quad (5.63)$$

решту коефіцієнтів d_j, d_k, c_j, c_k визначають за допомогою циклічної перестановки індексів.

Таким чином потенціальна енергія має вигляд

$$U_h = \sum_{m=1}^M \frac{K}{\Delta^3} \left\{ D_1^2 + D_2^2 + D_3^2 + D_1 D_2 + D_2 D_3 + D_1 D_3 + P_1^2 + \right. \\ \left. + P_2^2 + P_3^2 + P_1 P_2 + P_2 P_3 + P_1 P_3 + \mu [D_1(2P_1 + P_2 + P_3) + \right. \\ \left. D_2(2P_2 + P_1 + P_3) + D_3(2P_3 + P_1 + P_2) + 2(1 - \mu)(N_1^2 + N_2^2 + N_3^2 + \right. \\ \left. N_1 N_2 + N_2 N_3 + N_1 N_3) \right\} \quad (5.64)$$

де $K = \frac{Et^3}{576(1 - \mu^2)}$; Δ – площа трикутника:

$$D_1 = d_j^2 w_k + d_k^2 c_2 + 2(d_i d_j w_i + d_j d_k c_1 + d_i d_k w_j), \quad (5.65)$$

$$D_2 = d_i^2 w_i + d_k^2 c_3 + 2(d_i d_j w_k + d_j d_k c_1 + d_i d_k c_4), \quad (5.66)$$

$$D_3 = d_i^2 w_j + d_j^2 c_1 + 2(d_i d_j c_4 + d_j d_k c_3 + d_i d_k c_3), \quad (5.67)$$

$$P_1 = a_i^2 w_k + a_k^2 c_2 + 2(a_i a_j w_i + a_j a_k c_1 + a_i a_k w_j), \quad (5.68)$$

$$P_2 = a_i^2 w_i + a_k^2 c_3 + 2(a_i a_j w_k + a_j a_k c_1 + a_i a_k c_4), \quad (5.69)$$

$$P_3 = a_i^2 w_j + a_j^2 c_1 + 2(a_i a_j c_4 + a_j a_k c_3 + a_i a_k c_3), \quad (5.70)$$

$$N_1 = d_j a_j w_k + d_k a_k c_2 + (d_i a_j + d_j a_i) w_i + (d_j a_k + d_k a_j) c_4 \\ + (d_k a_i + d_i a_k) w_j \quad (5.71)$$

$$N_2 = d_i a_i w_i + d_k a_k c_3 + (d_i a_j + d_j a_i) w_k + (d_j a_k + d_k a_j) c_1 + \\ + (d_k a_i + d_i a_k) c_4 \quad (5.72)$$

$$N_3 = d_i a_i w_j + d_j a_j c_1 + (d_i a_j + d_j a_i) c_4 + (d_j a_k + d_k a_j) c_3 \\ + (d_k a_i + d_i a_k) c_2 \quad (5.73)$$

Кінетична енергія, відповідно, має такий вигляд:

$$\begin{aligned}
 T_h = G \sum_{m=1}^M & \left[w_i(w_i + w_j) + w_j(w_j + w_k) + w_k(w_k + w_i) + \frac{1}{70}(w_i^2 + w_j^2 + \right. \\
 & + w_k^2 + c_1^2 + c_2^2 + c_3^2) + \left(\frac{1}{5}w_i^2 + \frac{1}{5}w_iw_j + \frac{2}{15}w_iw_k + \frac{1}{5}w_ic_1 + \right. \\
 & + \frac{2}{15}w_ic_2 + \frac{1}{15}w_ic_3 + \frac{2}{15}w_ic_4) + \left(\frac{1}{5}w_kw_i + \frac{2}{15}w_jw_k + \frac{1}{15}w_k^2 + \right. \\
 & + \frac{2}{15}c_1 + \frac{1}{5}w_kc_2 + \frac{1}{5}w_kc_3 + \frac{2}{15}w_kc_4) + w_i \left(\frac{1}{70}w_j + \frac{3}{140}w_k + \frac{1}{140}c_1 + \right. \\
 & + \frac{1}{140}c_2 + \frac{1}{210}c_3 + \frac{3}{140}c_4) + w_j \left(\frac{1}{140}w_k + \frac{1}{210}c_1 + \frac{3}{140}c_2 + \right. \\
 & + \frac{1}{140}c_3 + \frac{1}{70}c_4) + w_k \left(\frac{1}{70}c_1 + \frac{1}{210}c_2 + \frac{1}{140}c_3 + \frac{1}{70}c_4) + \right. \\
 & \left. + c_1 \left(\frac{1}{140}c_2 + \frac{3}{140}c_3 + \frac{1}{70}c_4) + \frac{1}{70}c_2(c_3 + c_4) + \frac{1}{70}c_2c_3c_4 \right] \quad (5.74)
 \end{aligned}$$

де $G = \frac{\gamma t}{12g}$.

5.10. Вільні коливання однорідних оболонок

Введемо криволінійну систему координат α, β, z , причому координатні лінії на серединній поверхні (α та β – лінії) збігаються з лініями головних кривизни з радіусами кривизни R_1 та R_2 , координата z відраховується по нормалі до поверхні.

Тоді у межах гіпотез Кірхгофа–Лява вирази для значень потенціальної і кінетичної енергій мають вигляд:

$$\begin{aligned}
 U_0 = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \frac{Et}{1-\nu^2} & \left[(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22})^2 - 2(1-\nu)(\varepsilon_{11}\varepsilon_{22} - \varepsilon_{12}^2) \right] + \\
 & + D \left[(k_{11} + k_{22})^2 - 2(1-\nu)(k_{11}k_{22} - k_{12}^2) \right] H_1 H_2 d\alpha d\beta, \quad (5.75)
 \end{aligned}$$

$$T = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \rho t \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] H_1 H_2 d\alpha d\beta, \quad (5.76)$$

де $H_1, H_2, H_3 = 1$ – коефіцієнти Ламе; u, v, w – компоненти переміщень вздовж осей α, β та z відповідно.

Компоненти деформацій визначають таким чином:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{1}{H_1} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \beta} v + \frac{w}{R_1} \\ \varepsilon_{22} &= \frac{1}{H_2} \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha} u + \frac{w}{R_2} \\ \varepsilon_{12} &= \frac{1}{2} \left[\frac{H_1}{H_2} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{u}{H_1} \right) + \frac{H_2}{H_1} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{v}{H_2} \right) \right] \end{aligned} \right\} \quad (5.77)$$

Кривизни $k_{11}, k_{22}, k_{12} = k_{21}$, відповідно, становлять:

$$\left. \begin{aligned} k_{11} &= \frac{1}{H_1} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{H_1} \frac{\partial w}{\partial \alpha} - \frac{u}{R_1} \right) + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \beta} \left(\frac{1}{H_2} \frac{\partial w}{\partial \beta} - \frac{v}{R_2} \right) \\ k_{22} &= \frac{1}{H_2} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{1}{H_2} \frac{\partial w}{\partial \beta} - \frac{v}{R_2} \right) + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{H_1} \frac{\partial w}{\partial \alpha} - \frac{u}{R_1} \right) \\ k_{12} &= \frac{1}{H_1 H_2} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \beta} - \frac{\partial H_1}{\partial \beta} \left(\frac{1}{H_1} \frac{\partial w}{\partial \alpha} - \frac{u}{R_1} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial H_2}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{H_2} \frac{\partial w}{\partial \beta} - \frac{v}{R_2} \right) - \frac{H_1}{R_1} \frac{\partial u}{\partial \beta} - \frac{H_2}{R_2} \frac{\partial v}{\partial \alpha} \right] \end{aligned} \right\} \quad (5.78)$$

Відповідно до прийнятих допущень переміщення точок оболонки мають вигляд

$$\begin{aligned} u(\alpha, \beta, z) &= u_0(\alpha, \beta) + z\Theta_1(\alpha, \beta) \\ v(\alpha, \beta, z) &= v_0(\alpha, \beta) + z\Theta_2(\alpha, \beta) \\ z(\alpha, \beta, z) &= w_0(\alpha, \beta), \end{aligned} \quad (5.79)$$

де Θ_1 та Θ_2 – кути повороту нормалі, відповідно, у площинах $\alpha = const$, $\beta = const$.

Кути повороту визначають за формулами

$$\Theta_1 = \frac{1}{H_1} \frac{\partial w}{\partial \alpha} - \frac{u}{R_1}; \quad \Theta_2 = \frac{1}{H_2} \frac{\partial w}{\partial \beta} - \frac{v}{R_2}; \quad (5.80)$$

u_0, v_0, w_0 – компоненти переміщення точок серединної поверхні в напрямку координатних ліній у прийнятій системі координат α, β, z .

При переході до скінченномірної задачі серединна поверхня оболонки розбивається на базові підобласті й будується апроксимація шуканих функцій.

Апроксимуючи поверхню оболонки плоскими трикутниками, вершини яких лежать на ній, і використовуючи описану вище апроксимацію переміщень, знаходимо потенціальну і кінетичну енергію деформації кожного трикутника як суму енергій згину і плоского напруженого стану. Вирази для потенціальної і кінетичної енергій у локальній системі координат мають вигляд:

$$\begin{aligned}
 U_h = & \frac{1}{2} \sum_{m=1}^M D^{11} \left[B_u^1 + C_u^1 + 2\mu B_u C_u + \frac{1-\mu}{2} (B_u + C_u) \right] + \\
 & + \sum_{m=1}^M \frac{k}{\Delta^3} \left\{ D_1^2 + D_2^2 + D_3^2 + D_1 D_2 + D_2 D_3 + D_1 D_3 + P_1^2 + P_2^2 + P_3^2 + \right. \\
 & + P_1 P_2 + P_2 P_3 + P_1 P_3 + \mu [D_1(2P_1 + P_2 + P_3) + D_2(2P_2 + P_1 + P_3) + \\
 & \left. D_3(2P_3 + P_1 + P_2)] + 2(1-\mu)(N_1^2 + N_2^2 + N_3^2 + N_1 N_2 + N_2 N_3 + N_1 N_3) \right\}. \quad (5.81)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 T_h = & \frac{1}{12} \frac{\gamma}{g} \sum_{m=1}^M \Delta (u_i^2 + u_j^2 + u_k^2 + u_i u_j + u_j u_k + u_k u_i + v_i^2 + v_j^2 + v_k^2 + \\
 & + v_i v_j + v_j v_k + v_i v_k) + \frac{1}{12} \frac{\gamma}{g} \sum_{m=1}^M [w_i(w_i + w_j) + w_j(w_j + w_k) + w_k(w_k + w_i) + \\
 & + \frac{1}{70}(w_i^2 + w_j^2 + w_k^2 + c_1^2 + c_2^2 + c_3^2) + \left(\frac{1}{5} w_i^2 + \frac{1}{5} w_i w_j + \frac{2}{15} w_j w_k + \frac{1}{15} w_k^2 + \right. \\
 & + \frac{2}{15} c_1 + \frac{1}{5} w_k c_2 + \frac{1}{5} w_k c_3 + \frac{2}{15} w_k c_4) + w_i \left(\frac{1}{70} w_j + \frac{3}{140} w_k + \frac{1}{140} c_1 + \frac{1}{140} c_2 + \right. \\
 & + \frac{1}{210} c_3 + \frac{3}{140} c_4) + w_j \left(\frac{1}{140} w_k + \frac{1}{210} c_1 + \frac{3}{140} c_2 + \frac{1}{140} c_3 + \frac{1}{70} c_4) + \\
 & \left. w_k \left(\frac{1}{70} c_1 + \frac{1}{210} c_2 + \frac{1}{140} c_3 + \frac{1}{70} c_4 \right) + c_1 \left(\frac{1}{140} c_2 + \frac{3}{140} c_3 + \frac{1}{70} c_4 \right) + \right. \\
 & \left. \frac{1}{70} c_2 (c_3 + c_4) + \frac{1}{70} c_2 c_3 c_4 \right] \quad (5.82)
 \end{aligned}$$

5.11. Визначення власних частот і власних форм коливань просторових пластинчато-оболонкових конструкцій

Пластинчато-оболонковим конструкціям належить одне з важливих місць у сучасному машинобудуванні, авіабудуванні, суднобудуванні тощо. Ці конструкції зазвичай піддаються інтенсивним динамічним навантаженням, тому необхідно знати спектр власних частот і відповідних їм форм коливань, що потрібні для розв'язання задачі про вимушені коливання пластинчато-оболонкових конструкцій. Введемо у розгляд глобальну систему координат $OXYZ$ і здійснимо дискретизацію серединної поверхні пластинчато-оболонкової конструкції на кінцеву кількість трикутних елементів Ω_n , причому серединна поверхня трикутного елемента лежить у площині $O\hat{X}\hat{Y}\hat{Z}$, де система координат $O\hat{X}\hat{Y}\hat{Z}$ є локальною. У цьому випадку потенціальна і кінетична енергії кожного елемента складається із суми невідомих енергій плоского напруженого стану та енергії згину. Вирази для амплітудних значень потенціальної і кінетичної енергій для плоского напруженого стану і згину у глобальних координатах наведено у формулах (5.57), (5.58), (5.64), (5.74), де підсумування необхідно робити від $\mu = 1, \dots, M$, де M – кількість трикутників, що оточують i -й вузол. Переміщення апроксимуємо у межах кожного трикутного елемента відповідно для плоского напруженого стану у вигляді (5.50), для згину у вигляді (5.61), у локальній системі координат.

Скориставшись відомою методикою і формулами (5.50) та (5.61), обираючи як невідомі переміщення u_i, v_i, w_i в напрямку глобальних осей x, y, z та кути повороту $\varphi_i, \psi_i, \gamma_i$ відповідно навколо осей x, y, z , зведемо їх до глобальної системи координат. Локальні координати $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ визначають аналогічно (5.45), а напрямні косинуси – співвідношенням (5.47).

Тоді:

$$\begin{aligned}\hat{U}_h &= (\hat{u}_i, \dots, \hat{\gamma}_i) = \hat{U}_h^{nl}(u_i, v_i) + \hat{U}_h^{uz}(w_i, \dots, \gamma_i); \\ \hat{T}_h &= (\hat{u}_i, \dots, \hat{\gamma}_i) = \hat{T}_h^{nl}(u_i, v_i) + \hat{T}_h^{uz}(w_i, \dots, \gamma_i).\end{aligned}\tag{5.83}$$

Таким чином отримуємо вирази для амплітудних значень потенціальної та кінетичної енергій трикутного елемента шести невідомих $u_i, v_i, w_i, \varphi_i, \psi_i, \gamma_i$ відносно глобальної системи координат. Якщо всі трикутники, що оточують i -й вузол, компланарні, то матриці інерції та жорсткості стають виродженими.

5.12. Визначення власних частот і власних форм тривимірних призматичних тіл

Для дискретизації області V використовують розбиття на тетраїдальні елементи, за допомогою яких з деяким наближенням можна подати будь-яке тіло довільної форми (рис. 5.1).

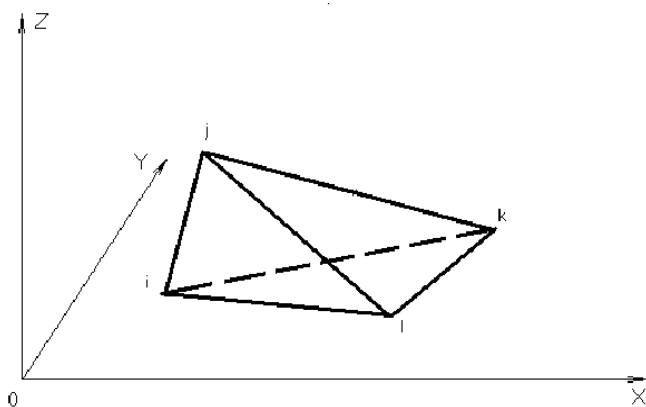


Рис. 5.1. Тетраїдальний елемент i, j, k, l у правій системі координат XYZ

Переміщення кожного вузла визначається трьома компонентами u, v, w в напрямку координатних осей XYZ .

Таким чином, вектор переміщень має вигляд

$$\vec{u} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix}. \quad (5.84)$$

Переміщення в тетраїдальному елементі задаємо у вигляді

$$u = \frac{1}{6V_{\Delta}} [(a_i + b_i x + c_i y + d_i z)u_i + (a_j + b_j x + c_j y + d_j z)u_j + (a_k + b_k x + c_k y + d_k z)u_k + (a_l + b_l x + c_l y + d_l z)u_l]; \quad (5.85)$$

де V є об'ємом тетраедра:

$$6V_{\Delta} = \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i & z_i \\ 1 & x_j & y_j & z_j \\ 1 & x_k & y_k & z_k \\ 1 & x_l & y_l & z_l \end{vmatrix}; \quad (5.86)$$

з коефіцієнтами a_i, b_i, c_i, d_i , що є визначниками:

$$a_i = \det \begin{vmatrix} x_j & y_j & z_j \\ x_k & y_k & z_k \\ x_l & y_l & z_l \end{vmatrix}; \quad b_i = -\det \begin{vmatrix} 1 & y_j & z_j \\ 1 & y_k & z_k \\ 1 & y_l & z_l \end{vmatrix};$$

$$c_i = \det \begin{vmatrix} 1 & x_j & z_j \\ 1 & x_k & z_k \\ 1 & x_l & z_l \end{vmatrix}; \quad d_i = -\det \begin{vmatrix} x_j & y_j & 1 \\ x_k & y_k & 1 \\ x_l & y_l & 1 \end{vmatrix}; \quad (5.87)$$

Інші коефіцієнти отримують циклічною перестановкою індексів i, j, k, l . Таким чином переміщення елемента визначається дванадцятьма компонентами переміщень його вузлів.

Амплітудні значення потенціальної U_{II} та кінетичної T енергій тривимірного тіла в цьому випадку мають вигляд

$$U_{II} = \iiint_V \frac{E}{2(1+\nu)} \cdot \left\{ \frac{\nu}{1-2\nu} (U_{,x} + V_{,y} + W_{,z})^2 + (U_{,x})^2 + (V_{,y})^2 + (W_{,z})^2 + \frac{1}{2} [(W_{,y} + V_{,x})^2 + (W_{,y} + V_{,z})^2 + (W_{,x} + U_{,z})^2] \right\} dx dy dz; \quad (5.88)$$

$$T = \frac{\rho}{2} \iiint_{V_0} (U^2 + V^2 + W^2) dx dy dz. \quad (5.89)$$

Тут E – модуль Юнга; μ – коефіцієнт Пуассона; ρ – густина матеріалу.

З урахуванням (5.85) амплітудні значення потенціальної та кінетичної енергій для скінченних елементів, що оточують i -й вузол тривимірного тіла скінченновимірного простору, набудуть вигляду

$$U_h = \sum_n \frac{E}{2(1+\mu)} \frac{1}{36V_{\Delta}} \cdot \left\{ \frac{\nu}{1-2\nu} [b_i u_i + b_j u_j + b_k u_k + b_l u_l + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + c_i v_i + c_j v_j + c_k v_k + c_l v_l + d_i w_i + d_j w_j + d_k w_k + d_l w_l]^2 + \\
& + (b_i u_i + b_j u_j + b_k u_k + b_l u_l)^2 + (d_i w_i + d_j w_j + d_k w_k + d_l w_l)^2 + \\
& + (c_i v_i + c_j v_j + c_k v_k + c_l v_l)^2 + \frac{1}{2} [(c_i w_i + c_j w_j + c_k w_k + c_l w_l + \\
& + d_i v_i + d_j v_j + d_k v_k + d_l v_l)^2 + (c_i u_i + c_j u_j + c_k u_k + c_l u_l + \\
& + b_i v_i + b_j v_j + b_k v_k + b_l v_l)^2 + (b_i w_i + b_j w_j + b_k w_k + b_l w_l + \\
& + d_i u_i + d_j u_j + d_k u_k + d_l u_l)^2] \}; \tag{5.90}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T = \frac{\rho}{72V_{\Delta}} \cdot \sum_n \{ & (u_i^2 + v_i^2 + w_i^2)[a_i \Phi + b_i^2 \Phi_1 + c_i^2 \Phi_2 + d_i^2 \Phi_3 + \\
& + 2(b_i c_i \Phi_{12} + b_i d_i \Phi_{13} + c_i d_i \Phi_{23})] + \\
& + (u_j^2 + v_j^2 + w_j^2)[a_j \Phi + b_j^2 \Phi_1 + c_j^2 \Phi_2 + d_j^2 \Phi_3 + \\
& + 2(b_j c_j \Phi_{12} + b_j d_j \Phi_{13} + c_j d_j \Phi_{23})] + \\
& + (u_k^2 + v_k^2 + w_k^2)[a_k \Phi + b_k^2 \Phi_1 + c_k^2 \Phi_2 + d_k^2 \Phi_3 + \\
& + 2(b_k c_k \Phi_{12} + b_k d_k \Phi_{13} + c_k d_k \Phi_{23})] + \\
& + (u_l^2 + v_l^2 + w_l^2)[a_l \Phi + b_l^2 \Phi_1 + c_l^2 \Phi_2 + d_l^2 \Phi_3 + \\
& + 2(b_l c_l \Phi_{12} + b_l d_l \Phi_{13} + c_l d_l \Phi_{23})] + \\
& + (u_i u_j + v_i v_j + w_i w_j)[a_i a_j \Phi + b_i b_j \Phi_1 + c_i c_j \Phi_2 + d_i d_j \Phi_3 + \\
& + \Phi_{12}(b_i c_j + c_i b_j) + \Phi_{13}(b_i d_j + d_i b_j) + \Phi_{23}(c_i d_j + d_i c_j)] + \\
& + (u_i u_k + v_i v_k + w_i w_k)[a_i a_k \Phi + b_i b_k \Phi_1 + c_i c_k \Phi_2 + d_i d_k \Phi_3 + \\
& + \Phi_{12}(b_i c_k + c_i b_k) + \Phi_{13}(b_i d_k + d_i b_k) + \Phi_{23}(c_i d_k + d_i c_k)] + \\
& + (u_i u_l + v_i v_l + w_i w_l)[a_i a_l \Phi + b_i b_l \Phi_1 + c_i c_l \Phi_2 + d_i d_l \Phi_3 + \\
& + \Phi_{12}(b_i c_l + c_i b_l) + \Phi_{13}(b_i d_l + d_i b_l) + \Phi_{23}(c_i d_l + d_i c_l)] + \\
& + (u_j u_k + v_j v_k + w_j w_k)[a_j a_k \Phi + b_j b_k \Phi_1 + c_j c_k \Phi_2 + d_j d_k \Phi_3 + \\
& + \Phi_{12}(b_j c_k + c_j b_k) + \Phi_{13}(b_j d_k + d_j b_k) + \Phi_{23}(c_j d_k + d_j c_k)] + \\
& + (u_k u_l + v_k v_l + w_k w_l)[a_k a_l \Phi + b_k b_l \Phi_1 + c_k c_l \Phi_2 + d_k d_l \Phi_3 + \\
& + \Phi_{12}(b_k c_l + c_k b_l) + \Phi_{13}(b_k d_l + d_k b_l) + \Phi_{23}(c_k d_l + d_k c_l)] \}; \tag{5.91}
\end{aligned}$$

де $\Phi, \Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_{12}, \Phi_{13}, \Phi_{23}$ – коефіцієнти, що, відповідно, дорівнюють:

$$\Phi = V_{\Delta}; \quad (5.92)$$

$$\Phi_1 = \frac{V_{\Delta}}{20} \cdot (x_i^2 + x_j^2 + x_k^2 + x_l^2); \quad (5.93)$$

$$\Phi_2 = \frac{V_{\Delta}}{20} \cdot (y_i^2 + y_j^2 + y_k^2 + y_l^2); \quad (5.94)$$

$$\Phi_3 = \frac{V_{\Delta}}{20_{\Delta}} \cdot (z_i^2 + z_j^2 + z_k^2 + z_l^2); \quad (5.95)$$

$$\Phi_{12} = \frac{V_{\Delta}}{20} \cdot (x_i y_i + x_j y_j + x_k y_k + x_l y_l); \quad (5.96)$$

$$\Phi_{13} = \frac{V_{\Delta}}{20} \cdot (x_i z_i + x_j z_j + x_k z_k + x_l z_l); \quad (5.97)$$

$$\Phi_{23} = \frac{V_{\Delta}}{20} \cdot (z_i y_i + z_j y_j + z_k y_k + z_l y_l). \quad (5.98)$$

Перші та другі похідні від амплітудного значення потенціальної та кінетичної енергій, необхідні для реалізації алгоритму, мають вигляд

$$\begin{aligned} U_{,U_i} = & \sum_n \frac{E}{2(1+\mu)} \frac{1}{18V_{\Delta}} \cdot \left\{ \frac{1-\nu}{1-2\nu} (b_i u_i + b_j u_j + b_k u_k + b_l u_l) b_i + \right. \\ & + \frac{\nu}{1-2\nu} (c_i v_i + c_j v_j + c_k v_k + c_l v_l + d_i w_i + d_j w_j + d_k w_k + d_l w_l) b_i + \\ & + \frac{1}{2} [(c_i u_i + c_j u_j + c_k u_k + c_l u_l + b_i v_i + b_j v_j + b_k v_k + b_l v_l) c_i + \\ & \left. + (b_i w_i + b_j w_j + b_k w_k + b_l w_l + d_i u_i + d_j u_j + d_k u_k + d_l u_l) d_i \right\]; \quad (5.99) \end{aligned}$$

$$U_{,U_i U_i} = \sum_n \frac{E}{2(1+\mu)} \frac{1}{18V_{\Delta}} \cdot \left[\frac{1-\nu}{1-2\nu} b_i^2 + \frac{1}{2} (c_i^2 + d_i^2) \right]. \quad (5.100)$$

$$\begin{aligned} T_{,U_i} = & \frac{\rho}{72V_{\Delta}} \cdot \sum_n \left\{ 2u_i \cdot [a_i \Phi + b_i^2 \Phi_1 + c_i^2 \Phi_2 + d_i^2 \Phi_3 + \right. \\ & \left. + 2(b_i c_i \Phi_{12} + b_i d_i \Phi_{13} + c_i d_i \Phi_{23})] + \right. \\ & + u_i \cdot [a_i a_j \Phi + b_i b_j \Phi_1 + c_i c_j \Phi_2 + d_i d_j \Phi_3 + \\ & + \Phi_{12} (b_i c_j + c_i b_j) + \Phi_{13} (b_i d_j + d_i b_j) + \Phi_{23} (c_i d_j + d_i c_j)] + \\ & + u_k \cdot [a_i a_k \Phi + b_i b_k \Phi_1 + c_i c_k \Phi_2 + d_i d_k \Phi_3 + \\ & \left. + \Phi_{12} (b_i c_k + c_i b_k) + \Phi_{13} (b_i d_k + d_i b_k) + \Phi_{23} (c_i d_k + d_i c_k)] + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + u_l \cdot [a_i a_l \Phi + b_i b_l \Phi_1 + c_i c_l \Phi_2 + d_i d_l \Phi_3 + \\
& + \Phi_{12}(b_i c_l + c_i b_l) + \Phi_{13}(b_i d_l + d_i b_l) + \Phi_{23}(c_i d_l + d_i c_l)]; \quad (5.101)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{,U_i U_i} = \sum_n T_{,w_i w_i} = \frac{\rho}{36V_\Delta} \cdot [a_i^2 \Phi + b_i^2 \Phi_1 + c_i^2 \Phi_2 + d_i^2 \Phi_3 + \\
+ 2(b_i c_i \Phi_{12} + b_i d_i \Phi_{13} + c_i d_i \Phi_{23})]; \quad (5.102)
\end{aligned}$$

5.13. Перевірка вибору оптимального коефіцієнта релаксації

З метою перевірки ефективності визначення оптимального коефіцієнта релаксації τ проводився чисельний експеримент. Розв'язувалась задача визначення перших чотирьох власних частот згинних вільних коливань квадратної пластинки, жорстко защемленої по двох протилежних сторонах і вільних по інших. Задача розв'язувалась на трьох нерегулярних сітках у 97 вузлів, 176 вузлів та 293 вузла.

Коефіцієнт релаксації задавався примусово від $\tau = 1,3 \div 1,9$ із кроком 0,1 та фіксувалась кількість ітерацій, за яких помилка визначення власних частот не перевищувала 4 % (табл. 5.1).

З аналізу отриманих результатів видно, що на сітці в 97 вузлів помилка у визначенні власних частот не перевищувала 3,9 % за умови, що коефіцієнт релаксації не змінюється протягом ітераційного процесу. Оптимальний коефіцієнт релаксації, знайдений у процесі чисельного експерименту з табл. 5.1, дорівнює 1,8.

Зміни коефіцієнта релаксації під час обчислювального процесу, який визначається за запропонованим методом, зображені на рис. 5.2, *а-г*.

Залежності зміни τ_{opt} від кількості ітерацій наведені при визначенні чотирьох перших частот. Аналіз отриманих залежностей показує, що τ_{opt} , визначене за розробленою методикою, наближається до τ_{opt} , визначеного на підставі чисельного експерименту. Із наведених залежностей (рис. 5.2,) видно,

що для отримання значення власних частот із заданою точністю потребує меншої кількості ітерацій при автоматичному виборі оптимального коефіцієнта релаксації τ_{opt} , ніж при знайденому на підставі чисельного експерименту.

Таблиця 5.1. Результати чисельного експерименту

| Коефіцієнт релаксації τ | Квадрати власних частот / кількість ітерацій | | | |
|--|--|------------------|------------------|------------------|
| | Сітка 97 вузлів | | | |
| | ω_1^2 / N | ω_2^2 / N | ω_3^2 / N | ω_4^2 / N |
| 1,3 | 2149125/350 | 16841952/430 | 29759488/190 | 66328128/250 |
| 1,4 | 2149127/280 | 16841984/350 | 29759520/150 | 66327232/210 |
| 1,5 | 2149112/220 | 16842048/210 | 29759472/100 | 66327040/170 |
| 1,6 | 2149121/170 | 16841920/200 | 29759360/100 | 66328064/140 |
| 1,7 | 2149107/120 | 16842000/150 | 29759616/90 | 66327568/110 |
| 1,75 | 2149122/100 | 16841920/120 | 29759344/80 | 66327008/90 |
| 1,8 | 2149121/80 | 16841968/90 | 29759488/50 | 66328112/80 |
| 1,9 | 2149126/100 | 16842032/120 | 29759600/110 | 66328016/120 |
| Сітка 97 вузлів | | | | |
| τ_{opt} | 2149126/100 | 16841936/130 | 29759312/70 | 66327168/130 |
| Сітка 176 вузлів | | | | |
| τ_{opt} | 2004896/210 | 16563694/310 | 28206992/180 | 69926288/50 |
| Сітка 294 вузла | | | | |
| τ_{opt} | 1918304/70 | 1634306/70 | 27490224/50 | 62759328/80 |
| Тестові значення квадратів власних частот | | | | |
| — | 20164400 | 16646400 | 27562500 | 62410000 |

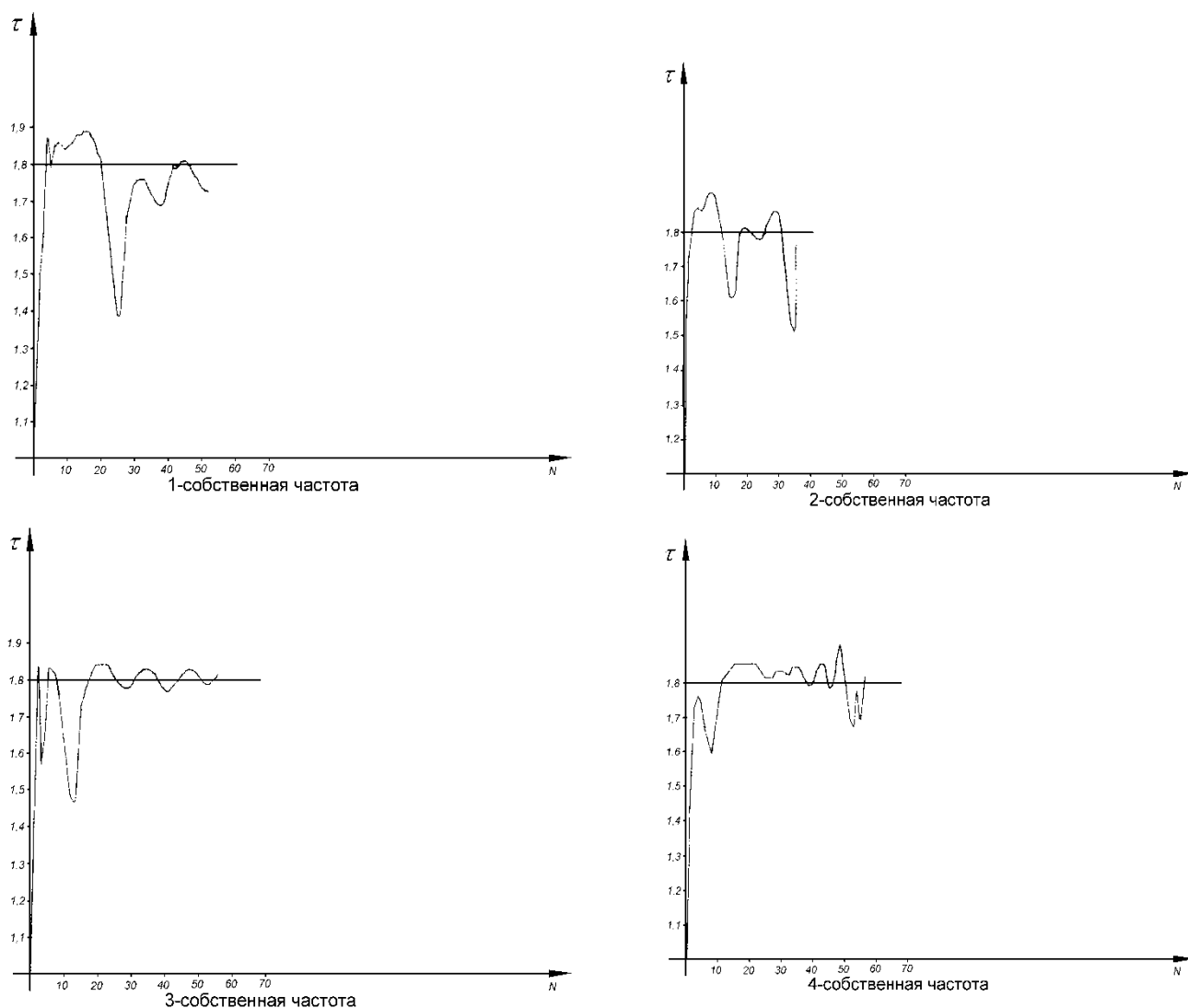


Рис. 5.2. Графіки залежності τ_{opt} від кількості ітерацій

5.14. Вимушені коливання систем зі скінченним числом степенів вільності

5.14.1. Вимушені гармонічні коливання недисипативних систем

Рівняння вимушених коливань має вигляд

$$A\ddot{q} + Cq = F_0 \cos \omega t, \quad (5.103)$$

де q – вектор узагальнених координат; A та C – матриці інерційних і квазіпружних коефіцієнтів; F_0 – вектор амплітуд зовнішніх змушувальних сил.

Представляючи вектор узагальнених координат у вигляді $q = q_0 \cos \omega t$ та підставивши його у (5.103), отримаємо:

$$(C - \omega^2 A)q_0 = F_0. \quad (5.104)$$

Подамо q_0 у вигляді

$$q_0 = V \wp, \quad (5.105)$$

де V – матриця, складена по стовпцях із власних форм коливань, \wp – матриця-стовпець шуканих координат.

Введення таких координат із математичної точки зору міститься у перетворенні, що приводить одночасно до головних осей матриці інерційних і квазіпружних коефіцієнтів. У результаті відбувається розчленування початкової системи на окремі, незалежні один від одного рівнянні.

Підставивши (5.105) у (5.104) й помноживши V^T , отримаємо:

$$V^T C V \wp - \omega^2 V^T A V \wp = V^T F_0. \quad (5.106)$$

Зважаючи на те, що власні вектори нормовані відносно кінетичної енергії, тоді:

$$V^T A V = E, \quad V^T C V = \omega^2 \beta, \quad (5.107)$$

де E – одинична матриця, β – діагональна матриця квадратів власних частот.

Тоді з урахуванням (5.107) отримаємо вираз для (5.106):

$$\beta_i \wp_i - \omega^2 \wp_i = V_i^T F_0, \quad i = 1, \dots, N. \quad (5.108)$$

$$\text{Звідси } \wp_i = \frac{V_i^T F_0}{(\beta_i)^2 - \omega^2};$$

5.14.2. Вимушені гармонічні коливання дисипативних систем зі скінченним числом степенів вільності

Рівняння руху дисипативної системи зі скінченним числом степенів вільності під дією гармонічних сил записують у вигляді

$$A\ddot{q} + D\dot{q} + Cq = F_0 \cos \omega t, \quad (5.109)$$

де A – матриця інерції; C – матриця жорсткості; D – матриця коефіцієнтів демпфірування, що може розглядатися як симетрична. Системи зі скінченним

степенем вільності поділяють на системи з повною і неповною дисипацією. Для систем із повною дисипацією амплітуди при резонансних коливаннях стають скінченними, зникають антирезонанси. У системі з неповною дисипацією можливі випадки нескінченних значень амплітуд при визначених власних частотах.

Розглянемо систему зі скінченним числом степенів вільності за наявності в'язкого тертя. У цьому випадку матриця коефіцієнтів демпфірування пропорційна матриці квазіпружних коефіцієнтів:

$$D = \eta C, \quad (5.110)$$

де η – коефіцієнт, який визначають зі співвідношення $\lambda_i = \eta \omega_i$ (λ_i – логарифмічний декремент головних коливань із частотою ω_i).

Тоді із врахуванням (5.110) рівняння руху з урахуванням в'язкого тертя системи з N – степенями вільності запишемо як

$$A\ddot{q} + \eta C\dot{q} + Cq = F_0 \cos \omega t. \quad (5.111)$$

Введемо перетворення:

$$q = f_1 \cos \omega t + f_2 \sin \omega t. \quad (5.112)$$

Підставивши (3.2.4) у рівняння (3.2.3), отримуємо:

$$\begin{aligned} -\omega^2 A f_1 \cos \omega t - \omega^2 A f_2 \sin \omega t - \omega \eta C f_1 \sin \omega t + -\omega C \eta f_2 \cos \omega t + \\ + C f_1 \cos \omega t + C f_2 \sin \omega t = F_0 \cos \omega t \end{aligned} \quad (5.113)$$

Зібравши вираз при $\cos \omega t$ та $\sin \omega t$, отримаємо систему, складену з двох рівнянь:

$$\begin{cases} -\omega^2 A f_1 + \omega \eta C f_2 + C f_1 = F_0 \\ -\omega \eta C f_1 - \omega^2 A f_2 + C f_2 = 0 \end{cases} \quad (5.114)$$

Введемо таке перетворення:

$$f_1 = V \wp_1; f_2 = V \wp_2, \quad (5.115)$$

де \wp_1, \wp_2 – шукані координати.

Підставивши вираз (5.115) у систему рівнянь (5.114) та помноживши на V^T , отримаємо таке співвідношення:

$$\begin{cases} -\omega^2 E \varphi_1 + \omega \eta \beta \varphi_2 + \beta \varphi_1 = V^T F_0 \\ -\omega^2 E \varphi_2 + \omega \eta \beta \varphi_1 + \beta \varphi_2 = 0 \end{cases} \quad (5.116)$$

Вирішуючи систему (5.116) відносно шуканих координат, отримаємо:

$$\varphi_1^i = \frac{V_i^T F_0}{\beta_i - \omega^2 + \omega^2 \eta \beta_i / (\beta_i - \omega^2)}; \quad (5.117)$$

$$\varphi_2^i = \frac{\omega \eta \beta_i V_i^T F_0}{(\beta_i - \omega^2) [\beta_i - \omega^2 + \omega^2 \eta \beta_i / (\beta_i - \omega^2)]}, \quad (5.118)$$

тоді

$$q_i = f_1^i + f_2^i. \quad (5.119)$$

5.14.3. Коливання недисипативних систем зі скінченним числом степенів вільності при кінематичному збудженні

Розглянемо випадок кінематичного збудження, коли всім точкам системи зі скінченним числом степенів вільності надається однаковий переносний рух, наприклад за гармонічним законом

$$q^e = B \cos \omega t, \quad (5.120)$$

де q^e – вектор узагальнених координат переносного руху; B – вектор амплітуд переносного руху; ω – частота переносного руху.

Тоді відносно системи координат, що рухається за заданим законом, точки пружної скінченновимірної системи здійснюють коливання q^r . За рахунок відносного руху виникають відновлюючі сили Cq^r (C – матриця коефіцієнтів жорсткості), а за рахунок абсолютного руху

$$q = q^e + q^r \quad (5.121)$$

виникають сили інерції $A\ddot{q}$ (A – матриця коефіцієнтів інерції).

Спочатку розглянемо коливання без врахування розсіяння енергії. Використовуючи матричне рівняння методу переміщень і підставляючи в нього вираз для сил інерції, отримаємо:

$$A\ddot{q} + Cq^r = 0. \quad (5.122)$$

Рівняння (5.122) з урахуванням рівнянь (5.121) та (5.120) приводить до рівняння коливань системи відповідно у відносній та абсолютній системах відку:

$$A\ddot{q}^r + Cq^r = AB\omega^2 \cos \omega t. \quad (5.123)$$

У результаті розглянуте кінематичне збудження пружної системи приводить до вимушених коливань, де змушуючою силою є сила інерції переносного руху.

Введемо перетворення $q^r = q_0^r \cos \omega t$, тоді рівняння (5.123) запишемо у вигляді

$$-\omega^2 Aq_0^r + Cq_0^r = \omega^2 AB. \quad (5.124)$$

Зведемо систему рівнянь (5.124) до канонічного (діагонального) вигляду. За методом головних координат:

$$q_0^r = V \wp, \quad (5.125)$$

де V – матриця, складена зі стовпців раніше знайдених форм власних коливань; \wp – матриця-стовпець шуканих координат. Підставивши (5.125) у (5.124) і помноживши на V^T , отримаємо:

$$-\omega^2 V^T A V \wp + V^T C V \wp = V^T A B \omega^2. \quad (5.126)$$

Оскільки власні вектори нормовані відносно кінетичної енергії, то

$$V^T A V = E; \quad V^T C V = \beta, \quad (5.127)$$

де E – одинична матриця; β – діагональна матриця квадратів власних частот.

Тоді рівняння (5.126) набуде вигляду відносно головної i -ї координати:

$$\beta_i \wp_i - \omega^2 \wp_i = \omega^2 V_i^T A B, \quad i = 1 \dots M. \quad (5.128)$$

Звідси отримаємо вираз для головних координат:

$$\wp_i = \frac{\omega^2 V_i^T A B}{\beta_i - \omega^2}. \quad (5.129)$$

Тоді

$$q_i^r = V_i \frac{\omega^2 V_i^T AB}{\beta_i - \omega^2} \cos \omega t, \quad (5.130)$$

де β_i – квадрат власної i -ї частоти.

Розглянемо випадок в'язкого внутрішнього тертя у системі з N степенями вільності при кінематичному збудженні.

Рівняння, що описує коливання, у цьому випадку набуде вигляду

$$A\ddot{q}^r + C\eta\dot{q}^r + Cq^r = \omega^2 AB \cos \omega t. \quad (5.131)$$

Введемо заміну:

$$q^r = q_0^r \cos(\omega t - \varphi) = q_0 \cos \varphi \cos \omega t - q_0 \sin \varphi \sin \omega t. \quad (5.132)$$

Позначимо:

$$D^{(1)} = q_0 \cos \varphi; \quad D^{(2)} = q_0 \sin \omega t. \quad (5.133)$$

Тоді

$$q^r = D^{(1)} \cos \omega t + D^{(2)} \sin \omega t. \quad (5.134)$$

Підставивши (5.133) у (5.130) та зібравши вирази при $\cos \omega t$ та $\sin \omega t$, отримаємо систему із двох рівнянь:

$$\begin{cases} -\omega^2 AD^{(1)} + \omega b_1 CD^{(2)} + CD^{(1)} = \omega^2 AB \\ -\omega^2 AD^{(2)} - \omega b_1 CD^{(1)} + CD^{(2)} = 0 \end{cases} \quad (5.135)$$

За методом головних координат введемо заміну:

$$D^{(1)} = V^{(2)} \wp; \quad D^{(2)} = V^{(2)} \wp; \quad (5.136)$$

а з урахуванням (5.136) система рівнянь (5.135) набуде вигляду

$$\begin{cases} -\omega^2 E \wp_1 + \omega 2\beta \wp_2 + \beta \wp_1 = \omega^2 V^T AB \\ -\omega^2 E \wp_2 + \omega 2\beta \wp_1 + \beta \wp_1 = 0 \end{cases} \quad (5.137)$$

Із системи рівнянь (5.137) отримаємо вираз для шуканих координат $\wp_i^{(1)}$ та $\wp_i^{(2)}$:

$$\varphi_1^{(i)} = \frac{\omega^2 V^T AB}{\beta - \omega^2 + \frac{\omega^2 \eta \beta_i^2}{\beta_i - \omega^2}}; \quad \varphi_2^{(i)} = \frac{\omega^2 \eta \beta_i}{\beta_i - \omega^2} \cdot \frac{\omega^2 V_i^T AB}{\beta_i - \omega^2 + \frac{\omega^2 \eta \beta_i}{\beta_i - \omega^2}}. \quad (5.138)$$

Тоді

$$q_i^r = D_i^{(1)} \cos \omega t + D_i^{(2)} \sin \omega t. \quad (5.139)$$

З аналізу формули (5.139) випливає, що при гармонічному кінематичному збудженні встановлюються коливання системи з частотою кінематичного збудження за формою коливань, яка змінюється залежно від частоти. При $\beta_i = \omega^2$ виникає резонанс i -го порядку (резонанс на i -й власній частоті).

У випадку кінематичного збудження із врахуванням в'язкого внутрішнього тертя, як видно з (5.138), при резонансі немає необмеженого росту амплітуди коливань.

5.15. Автоматизована система розрахунку на вільні та вимушені коливання стержнів, пластин та пластинчато-оболонкових систем на основі запропонованого методу

Для реалізації запропонованого методу було розроблено алгоритми та пакети прикладних програм (ППП). Макроструктуру та схему функціонування ППП подано на рис. 5.3. Пакет прикладних програм являє собою сукупність двох проблемно орієнтованих підсистем: «вільні коливання» та «вимушені коливання». Кожна підсистема включає п'ять блоків: «стержні», «просторові стержневі системи», «пластини», «просторові пластинчато-оболонкові системи», «тривимірні призматичні тіла». Пакет прикладних програм побудовано за модульним принципом, що дозволяє вдосконалювати його структуру за допомогою сервісних програм, а також видозмінювати та додатково розробляти програми для нових задач.

Пакет прикладних програм характеризується високим рівнем автоматизації та економічністю з точки зору пам'яті ЕОМ. Пакет прикладних програм

налагоджувався і вдосконалювався на великій кількості тестових та прикладних задач різної складності. Чисельні результати порівнювались із результатами, отриманими аналітичними або іншими чисельними методами, а також з відповідними експериментальними даними.

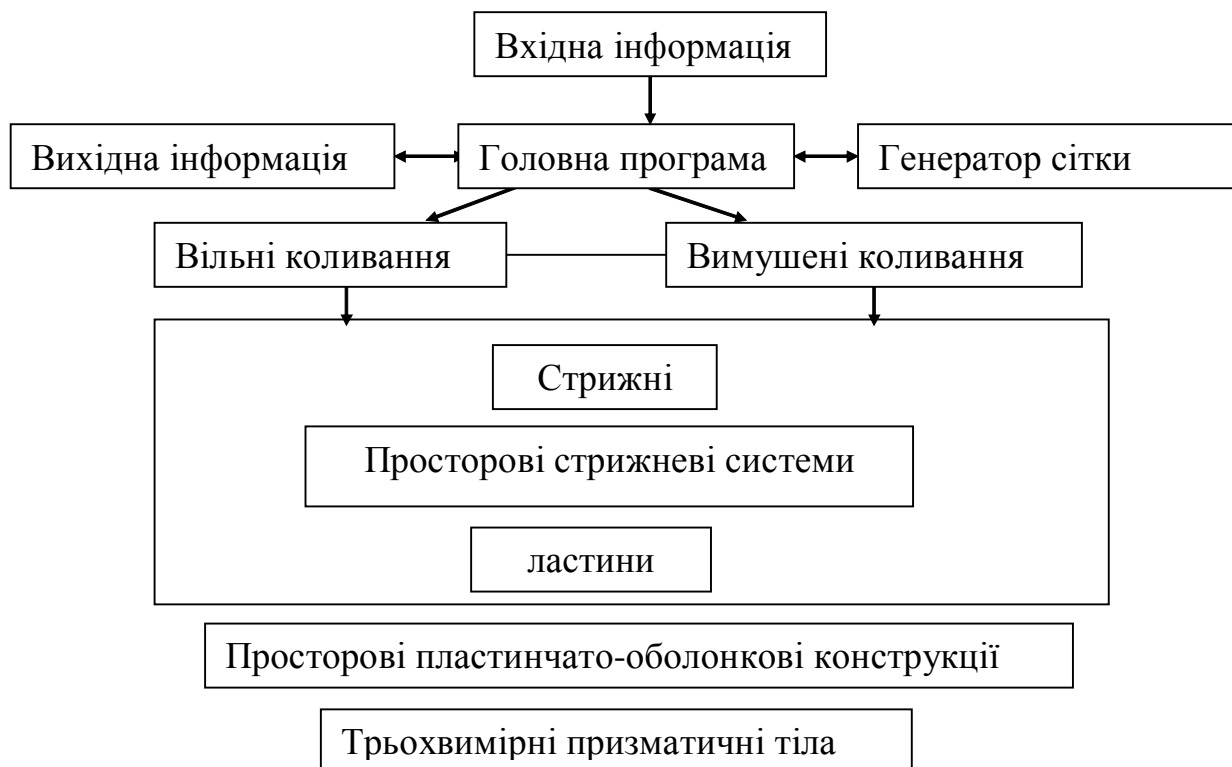


Рис. 5.3. Макроструктура та схема функціонування ППП

За тестовий приклад було взято шарнірно-оперту на кінцях балку (рис. 5.4).



Рис. 5.4. Шарнірно-оперта балка

Було прийнято, що момент інерції, щільність, площа поперечного перерізу дорівнюють одиниці. Довжину балки взяли рівною π . У загальному випадку форма прогину балки має вигляд

$$\sin \frac{n\pi x}{l},$$

де l – довжина балки. Для цього прикладу $\sin(nx)$. Відповідно, кути дорівнюватимуть $n \cos(nx)$. Результати вирішення завдань показали, що для опису форми балки достатньо чотирьох ділянок на довжині півхвилі на підставі таблиць і графіків (табл. 5.2 та 5.3).

Таблиця 5.2. Залежність точності визначення частоти від кількості ділянок

| Номер частоти | Аналітичне рішення | Чисельне рішення (кількість ділянок) | | | |
|---------------|--------------------|--------------------------------------|-----------|-----------|-----------|
| | | 1 ділянка | 2 ділянки | 3 ділянки | 4 ділянки |
| 1 | 1 | 1,11 | 1,0039 | 1,0008 | 1,0003 |
| 2 | 4 | 4,4397 | 4,0158 | 4,0032 | 4,001 |
| 3 | 9 | 9,9892 | 9,0355 | 9,0073 | 9,0023 |
| 4 | 16 | 17,7586 | 16,0632 | 16,013 | 16,0042 |
| 5 | 25 | 27,7479 | 25,0987 | 25,0202 | 25,0065 |
| 6 | 36 | 39,9570 | 36,1421 | 36,0291 | 36,0093 |
| 7 | 49 | 54,3859 | 49,1934 | 49,0397 | 49,0127 |
| 8 | 64 | 71,0347 | 64,2526 | 64,0518 | 64,166 |
| 9 | 81 | 89,9033 | 81,3197 | 81,0656 | 81,021 |
| 10 | 100 | 110,9918 | 100,395 | 100,081 | 100,026 |

**Таблиця 5.3. Відхилення переміщення
залежно від кількості ділянок і номера частоти**

| Номер частоти | Кількість ділянок | | | |
|---------------|-------------------|--------|--------|--------|
| | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 1 | 0,0387 | 0,0087 | 0,0026 | 0,0003 |
| 2 | 0,0387 | 0,0087 | 0,0026 | 0,0003 |
| 3 | 0,0387 | 0,0087 | 0,0026 | 0,0003 |
| 4 | 0,0387 | 0,0087 | 0,0026 | 0,0003 |
| 5 | 0,0387 | 0,0087 | 0,0026 | 0,0003 |
| 6 | 0,0387 | 0,0087 | 0,0026 | 0,0003 |
| 7 | 0,0387 | 0,0087 | 0,0026 | 0,0003 |
| 8 | 0,0387 | 0,0087 | 0,0026 | 0,0003 |
| 9 | 0,0387 | 0,0087 | 0,0026 | 0,0003 |
| 10 | 0,0387 | 0,0087 | 0,0026 | 0,0003 |

На графіках (рис. 5.5–5.8) використаноттакі позначення:

- пунктирна лінія – чисельне рішення,
- суцільна лінія – аналітичне рішення.

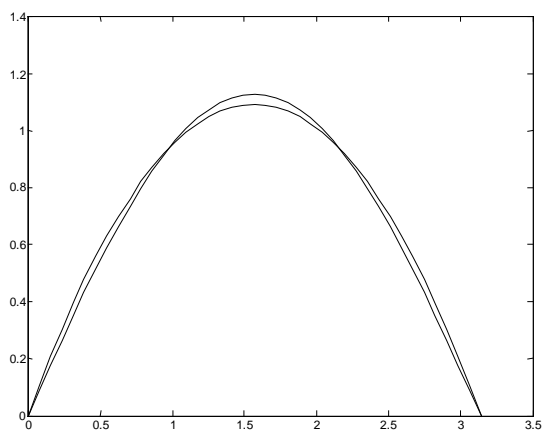


Рис. 5.5. Графік першої частоти при одній ділянці розбиття

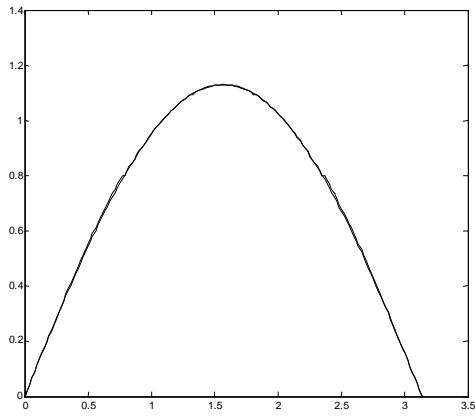


Рис. 5.6. Графік першої частоти при двох ділянках розбиття

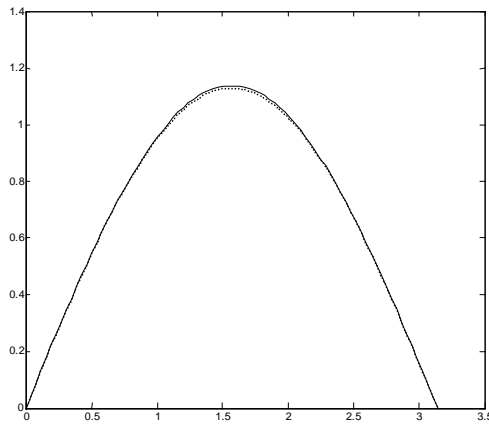


Рис. 5.7. Графік першої частоти при трьох ділянках розбиття

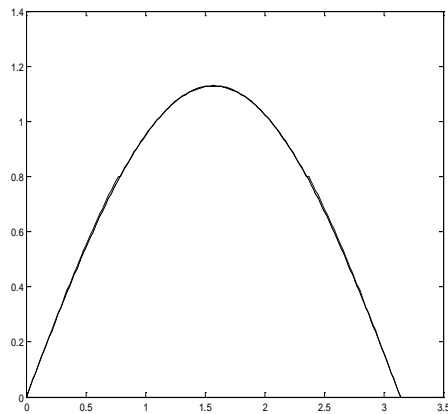


Рис. 5.8. Графік першої частоти при чотирьох ділянках розбиття

Як тестова розв'язувалась задача визначення власних частот та відповідних їм форм коливань квадратної пластинки, жорстко закріпленої по 4 сторонах; 2 суміжних, а також по 2 протилежних сторонах, при її згинних коливаннях. У результаті дискретизації було отримано 121 вузол та 300 трикутників, похибка у визначенні шести власних частот порівняно з аналітичним розв'язком не перевищувала 6,4 %, причому знайдені частоти мали менше значення, ніж при аналітичному розрахунку за методом Релея–Рітца.

Розглядалась також задача визначення власних частот та форм коливань пластинки, яка має форму прямокутного трикутника, жорстко закріпленого по одній стороні біля прямого кута. Було визначено шість власних частот, які порівнювались з експериментальними даними та даними, отриманими за аналітичними методами (методом Релея–Рітца та методом розбиття на систему балок). У результаті дискретизації було отримано 83 вузли та 128 трикутників. Похибка у визначенні власних частот не перевищувала 3-4 % порівняно з експериментальними даними.






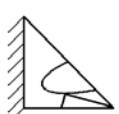
У табл. 5.4 у чисельнику подано зведені власні частоти пластинки, що має форму прямокутного трикутника, а у знаменнику – відносний час рахунку, а також зведені набуті значення частот за МПС, методом підвищення жорсткостей (МПЖ) й квазістатичним методом (КСМ) та дані експерименту. Кількість вузлів дорівнювала 83, трикутників – 129. Помилка у визначенні власних частот не перевищувала 3 %.

Зведені частоти $\tilde{\omega} = \omega a^2 \sqrt{\frac{\rho h}{D}}$ пластинки, що має форму прямокутного трикутника, NP = 83, NE = 129.

Як контрольний приклад розглядалися вільні коливання напівсферичної оболонки, жорстко защемленої по контуру малого отвору (рис. 5.9). У результаті дискретизації було отримано 100 вузлів та 168 трикутників. Результати розрахунку порівнювались із даними, отриманими аналітичними

методами та експериментально (табл. 5.5). Похибка у визначенні власних частот не перевищувала 6 %.

Таблиця 5.4. Результати розрахунків власних частот та форм коливань

| Номер частоти | Вузлові лінії | Експеримент | МПС | МПЖ | КСМ |
|---------------|---|-------------|--------|----------|----------|
| 1. |  | 4,17 | 4,35/1 | 4,42/1 | 4,32/0,1 |
| 2. |  | 16,4 | 16,8/1 | 16,9/0.5 | 16,4/0,1 |
| 3. |  | 23,0 | 23,0/1 | 23,7/0.6 | 23,0/0,1 |
| 4. |  | 39,3 | 38,9/1 | 43,5/0.7 | 39,5/0,1 |
| 5. |  | 53,3 | 53,4/1 | 53,4/0.6 | 53,4/0,1 |
| 6. |  | 69,9 | 69,7/1 | 69,8/0.7 | 69,9/0,1 |

Зведені частоти $\tilde{\omega} = \omega a^2 \sqrt{\frac{\rho h}{D}}$ пластинки, що має форму прямокутного трикутника, NP = 83, NE = 129.

Як контрольний приклад розглядалися вільні коливання напівсферичної оболонки, жорстко защемленої по контуру малого отвору (рис. 5.9). У результаті дискретизації було отримано 100 вузлів та 168 трикутників. Результати розрахунку порівнювались із даними, отриманими аналітичними методами та експериментально (табл. 5.5). Похибка у визначенні власних частот не перевищувала 6 %.

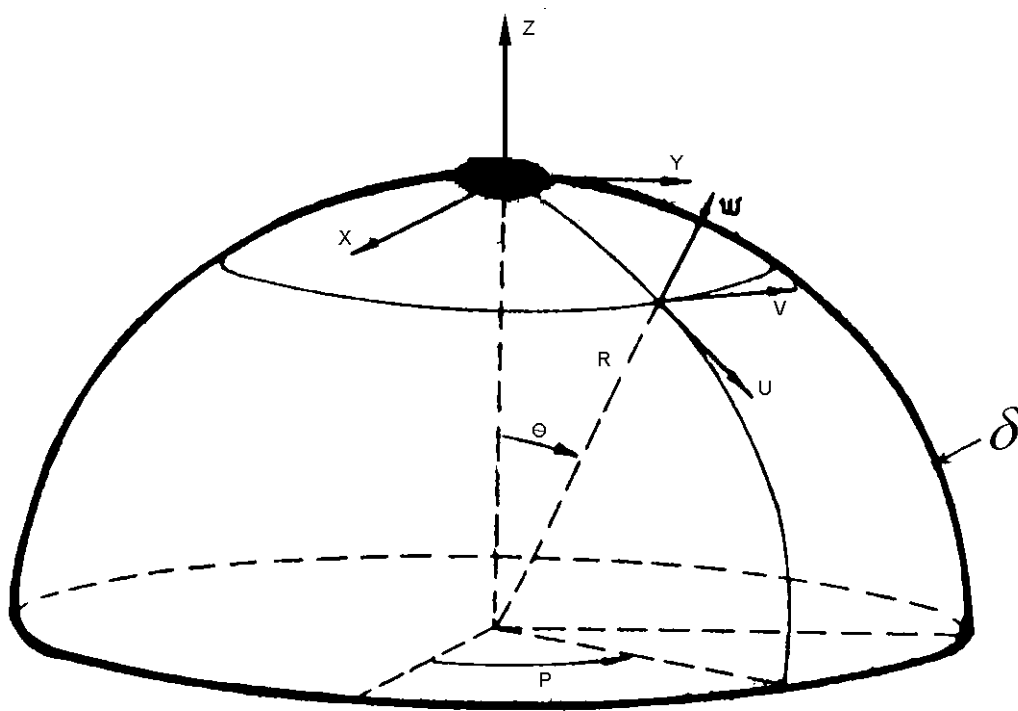


Рис. 5.9. Напівсферична оболонка

Фізико-механічні та геометричні характеристики напівсферичної оболонки такі:

Модуль пружності матеріалу

при розтягу – стиску

$$E = 7000 \text{ МПа},$$

Коефіцієнт Пуасона

$$\nu = 0,7,$$

Густина матеріалу

$$\rho = 2300 \text{ кг/м}^3,$$

Діаметр вільного краю

$$D = 58 \text{ мм},$$

Діаметр защемлення

$$d = 7,2 \text{ мм},$$

Товщина стінки

$$\delta = 3 \text{ мм}.$$

Зведена безрозмірна власна частота $\omega_* = \frac{d}{D} \delta \sqrt{\frac{\rho}{E}}$.

Як тестовий приклад розв'язувалась задача про просторові коливання консольної та шарнірно-опертої балки як тривимірного тіла. Розглядалися балки зі сталим перерізом у вигляді правильного шестикутника. У результаті дискретизації на тетраедральні елементи отримано 350 вузлів та 1050 степенів вільності.

Таблиця 5.5. Зведені частоти $\omega_* \cdot 10^{-3}$ коливань напівсферичної оболонки

| Номер частоти | Результат розрахунків | Літературні дані | Експериментальні дані |
|---------------|-----------------------|------------------|-----------------------|
| 1. | 1,064969 | – | 0,995625-1,096875 |
| 2. | 1,064979 | – | 0,995625-1,096875 |
| 3. | 1,700332 | 1,647675 | 1,670625-1,738125 |
| 4. | 1,700671 | 1,647675 | 1,670625-1,738125 |
| 5. | 3,160087 | – | 3,088125-3,206250 |
| 6. | 4,300438 | 4,274775 | 4,185000-4,387500 |
| 7. | 4,300886 | 4,274775 | 4,185000-4,387500 |
| 8. | 5,245506 | – | 4,860000-5,079375 |
| 9. | 7,378495 | 7,677450 | – |
| 10. | 7,378972 | 7,677450 | – |

Розбіжність між квадратом першої власної частоти для шарнірно-опертої та консольної балок та результатами, отриманими на основі аналітичного розв'язку, не перевищувала, відповідно, 2,1 та 1,8 %.

Як прикладна розв'язувалась задача визначення 10 власних частот та відповідних їм форм при коливаннях дискової пили у своїй площині. Розглядалась фреза із жорстким защемленням по внутрішньому діаметру, який дорівнював 91 мм, та зовнішнім 270 мм. Товщина фрези дорівнювала 2,5 мм, модуль пружності $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, густина матеріалу $\rho = 7,8 \text{ г/см}^3$. У результаті дискретизації було отримано 264 вузли та, відповідно, 464 трикутники. У табл. 5.6 наведено значення 10 власних колових частот.

Розв'язувалась задача про вільні згинні коливання дискової пили. У процесі експлуатації дискова пила перезаточується, тому змінюється її зовнішній діаметр. Були визначені двадцять власних частот та відповідних їм форм коливань 39 типорозмірів дискових пил із постійним внутрішнім діаметром, рівним 91 мм, а зовнішній обирався, відповідно, 200 мм, 245 мм, 250 мм, 255 мм, 260 мм, 265 мм, 270 мм, 275 мм, 300 мм, 325 мм,

350 мм, 375 мм, 400 мм, 425 мм, 450 мм, при сталих товщинах 2,5 мм та 1,8 мм, а також для змінних товщин від 1,8 мм до 1,5 мм. Квадрати власних колових частот наведено в табл. 5.6 для трьох типорозмірів дискових пил. На рис. 5.10 зображено 20 власних форм коливань для дискової пили із зовнішнім діаметром 250 мм та сталою товщиною 2,5 мм (табл. 5.7).

Таблиця 5.6. Власні колові частоти фрези при її коливаннях у своїй площині

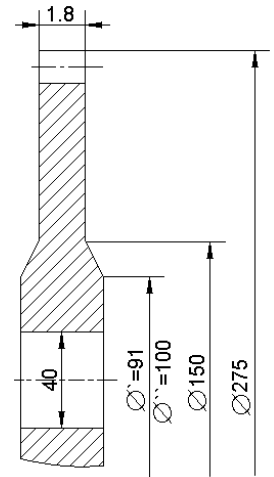
| Номер частоти | ω |
|---------------|----------|
| 1 | 24 660,6 |
| 2 | 43 989,0 |
| 3 | 43 989,0 |
| 4 | 69 214,8 |
| 5 | 89 532,9 |
| 6 | 89 532,9 |
| 7 | 94 579,8 |
| 8 | 94 579,8 |
| 9 | 95 474,5 |

Як прикладна розв'язувалась задача визначення трьох власних частот та відповідних їм власних форм коливань лопатки колеса відцентрового компресора. Лопатки коліс відцентрових компресорів являють собою оболонки змінної товщини, жорстко закріплені на ділянці з'єднання з диском та вільні по інших сторонах.

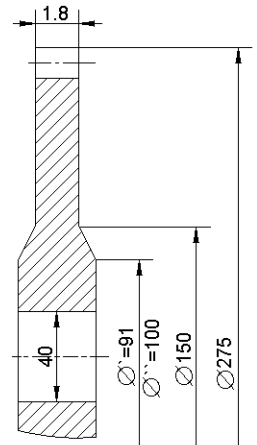
Звичайно руйнування таких лопаток є наслідком втоми і трапляються при резонансі. Найбільш небезпечними в більшості випадків є перші три власні частоти та відповідні їм власні форми коливань, тому необхідно, щоб резонансні частоти обертання для цих форм коливань були вищі за робочий діапазон.

Таблиця 5.7. Квадрати власних колових частот згинних коливань дискової пили

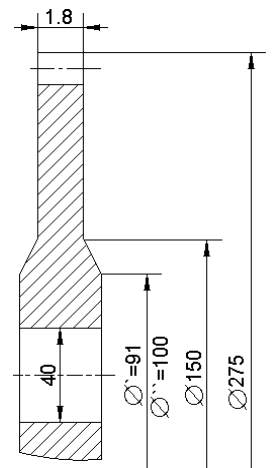
| Внутрішній діаметр 91, зовнішній 275, товщина 1,8 | | | |
|--|----------------|----|----------------|
| 1 | 0,10791600E+07 | 11 | 0,23616922E+08 |
| 2 | 0,10838300E+07 | 12 | 0,44446538E+08 |
| 3 | 0,10932200E+07 | 13 | 0,46445394E+08 |
| 4 | 0,15340700E+07 | 14 | 0,47248705E+08 |
| 5 | 0,15345400E+07 | 15 | 0,48113154E+08 |
| 6 | 0,38737454E+07 | 16 | 0,48223976E+08 |
| 7 | 0,38817579E+07 | 17 | 0,60377435E+08 |
| 8 | 0,10277521E+08 | 18 | 0,60857493E+08 |
| 9 | 0,10330582E+08 | 19 | 0,83761894E+08 |
| 10 | 0,23488638E+08 | 20 | 0,83915892E+08 |

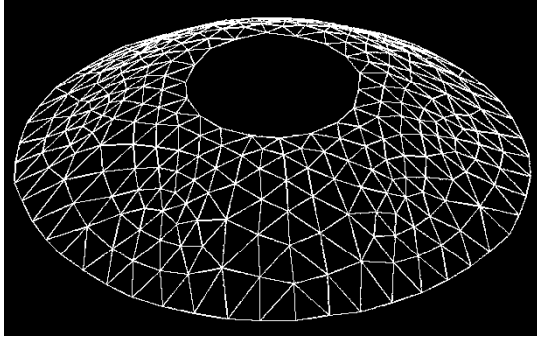


| Внутрішній діаметр 91, зовнішній 275, товщина 2,5 | | | |
|--|----------------|----|----------------|
| 1 | 0,20817100E+07 | 11 | 0,45557334E+08 |
| 2 | 0,20907100E+07 | 12 | 0,85737920E+08 |
| 3 | 0,21088300E+07 | 13 | 0,89593738E+08 |
| 4 | 0,29592400E+07 | 14 | 0,91143335E+08 |
| 5 | 0,29601500E+07 | 15 | 0,92810869E+08 |
| 6 | 0,74725000E+07 | 16 | 0,93024645E+08 |
| 7 | 0,74879600E+07 | 17 | 0,11646882E+09 |
| 8 | 0,19825500E+08 | 18 | 0,11739485E+09 |
| 9 | 0,19927800E+08 | 19 | 0,16157773E+09 |
| 10 | 0,45309873E+08 | 20 | 0,16187479E+09 |

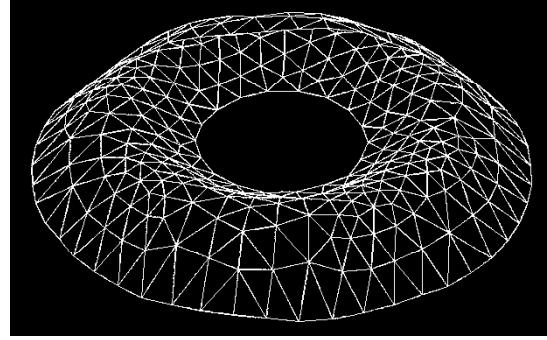


| Внутрішній діаметр 91, зовнішній 275, товщина 2,5 | | | |
|--|----------------|----|----------------|
| 1 | 0,24769900E+06 | 11 | 0,10085677E+08 |
| 2 | 0,24931800E+06 | 12 | 0,10926068E+08 |
| 3 | 0,27487400E+06 | 13 | 0,12273383E+08 |
| 4 | 0,41668300E+06 | 14 | 0,12278230E+08 |
| 5 | 0,41697000E+06 | 15 | 0,17153396E+08 |
| 6 | 0,14540700E+07 | 16 | 0,17242729E+08 |
| 7 | 0,14571200E+07 | 17 | 0,19939749E+08 |
| 8 | 0,42859800E+07 | 18 | 0,20286280E+08 |
| 9 | 0,43068231E+07 | 19 | 0,28070334E+08 |
| 10 | 0,10036873E+08 | 20 | 0,28273684E+08 |

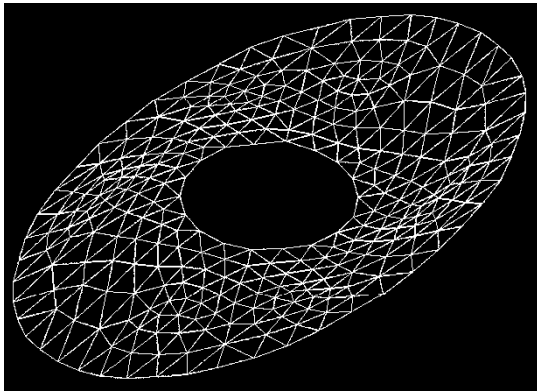




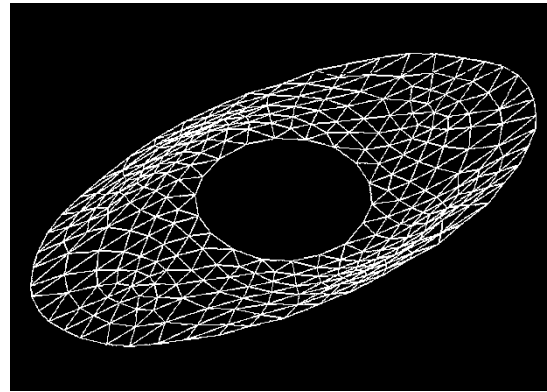
1-форма



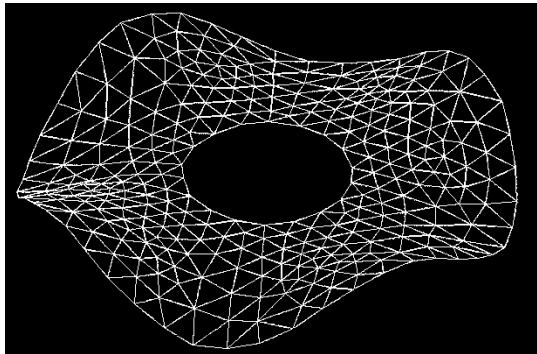
2-форма



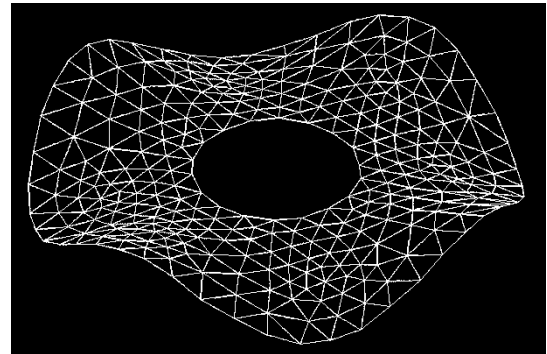
3-форма



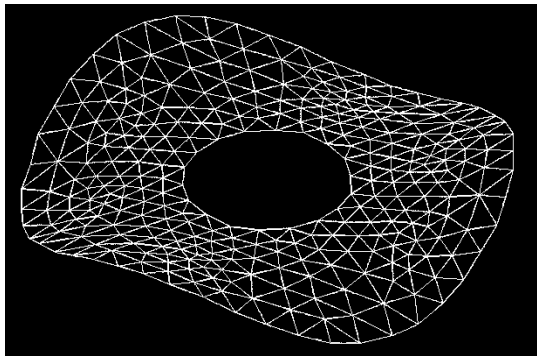
4-форма



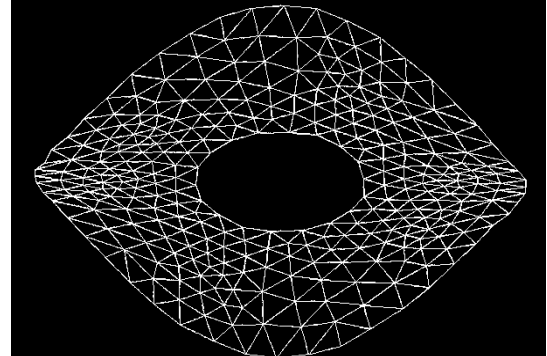
5-форма



6-форма

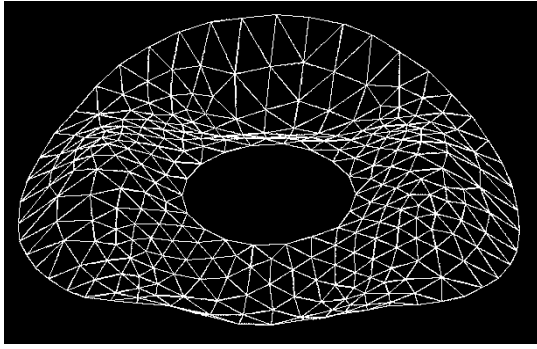


7-форма

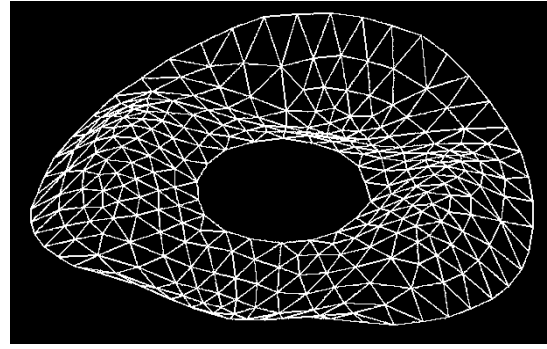


8-форма

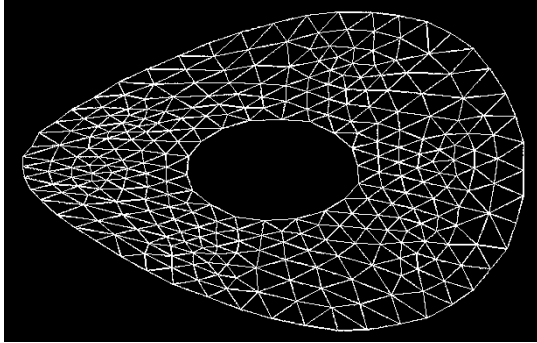
Рис. 5.10. Вільні форми згинних коливань фрези



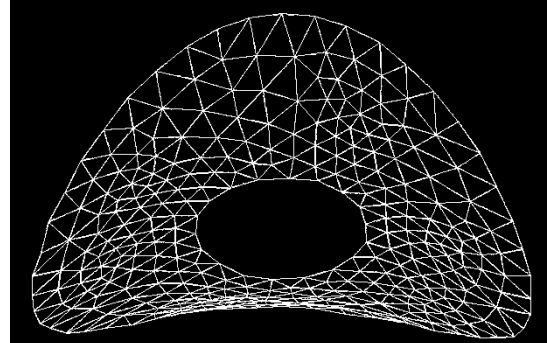
9-форма



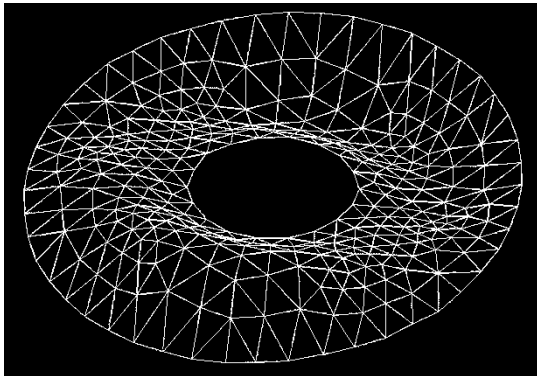
10-форма



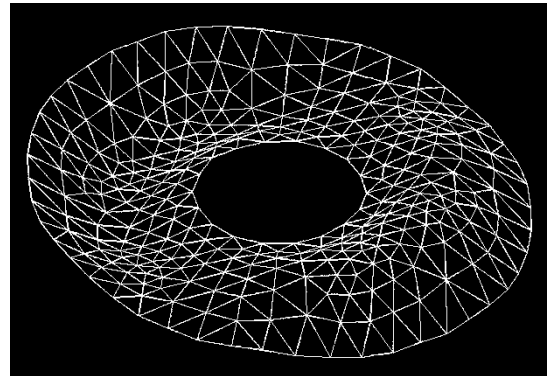
11-форма



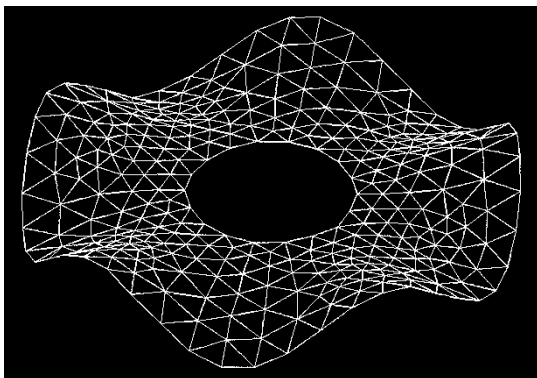
12-форма



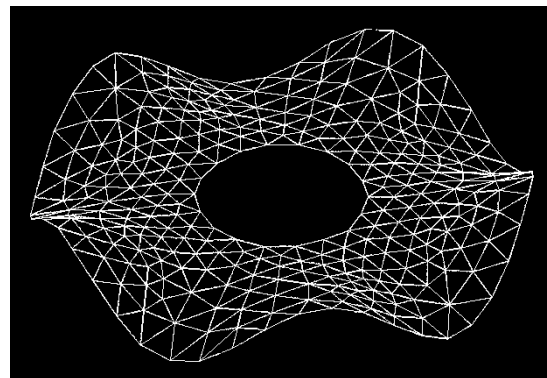
13-форма



14-форма

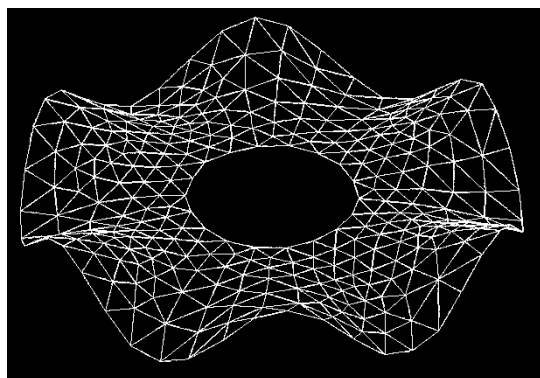


15-форма

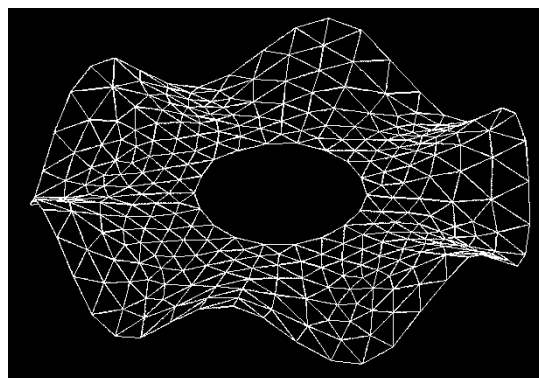


16-форма

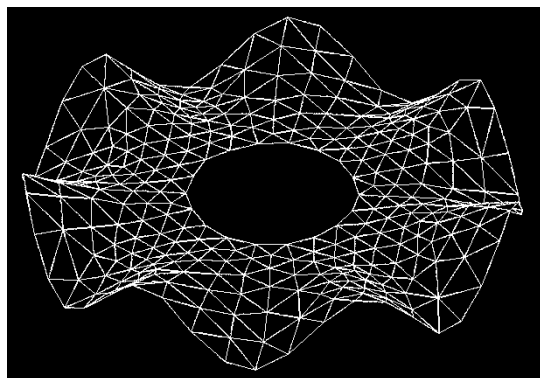
Рис. 5.10. Продовження (початок див. с. 213)



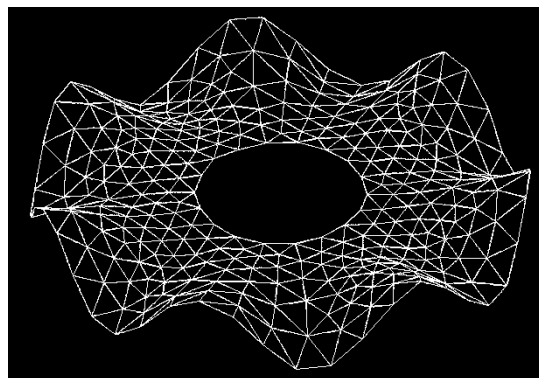
17-форма



18-форма



19-форма



20-форма

Рис. 5.10. Закінчення (початок див. с. 213)

Було визначено три перші власні частоти лопатки, вказаної на рис. 5.11. Значення власних частот та дані експерименту наведено в табл. 5.8.

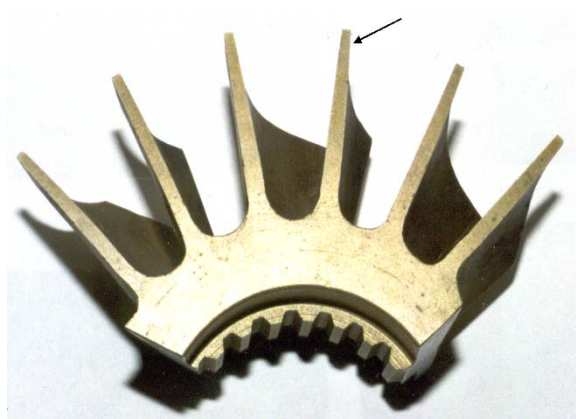


Рис. 5.11. Фрагмент колеса відцентрового компресора

Таблиця 5.8. Частоти коливань лопатки f , Гц

| Дослідження | f_1 | f_2 | f_3 |
|---------------------|---------|-----------|-----------|
| Чисельні розрахунки | 6714,97 | 16 422,14 | 41 204,65 |
| Експеримент | 6705,00 | 16 415,50 | 41 190,80 |

Показано, що в усіх випадках відхилення значення отриманих власних частот не перевищувало 6 % від результатів, одержаних аналітичними, чисельними та експериментальними способами.

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

- 5.1. Сформулюйте варіаційну постановку задачі про коливання.
- 5.2. Охарактеризуйте коливання пластинчатих систем.
- 5.3. Наведіть збіжність наближеного розв'язку задачі про коливання.
- 5.4. У чому полягає метод підвищення жорсткостей?
- 5.5. Які особливості вільних коливань пластин у своїй площині?
- 5.6. Які особливості згинальних коливань пластин?
- 5.7. Охарактеризуйте коливання пластинчато-оболонкових систем.
- 5.8. У чому полягає метод покоординатного спуску?
- 5.9. Як максимізувати швидкості збіжності ітераційного процесу?
- 5.10. Запишіть умови ортогональності та формули зведення відносно кінетичної енергії для власних форм коливань для пластинок.
- 5.11. У чому полягає метод Релея?
- 5.12. Проаналізуйте фігури Хладні для пластинок.
- 5.13. Яке призначення пакета прикладних програм для розрахунку коливань механічних систем?
- 5.14. Наведіть макроструктуру програмного комплексу для розрахунку коливань механічних систем.
- 5.15. У чому полягає ідея ітераційного підходу для розрахунку коливань механічних систем?

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

Основна література

1. Асланян А. Г. Распределение собственных частот тонких упругих оболочек / А. Г. Асланян, В.Б. Лидский. – М. : Наука, 1974. – 156 с.
2. Бабаков И. М. Теория колебаний / И. М. Бабаков. – Л. : Наука, 1968. – 650 с.
3. Бабенко А. Е. Применение и развитие метода покоординатного спуска в задачах определения напряженно-деформированного состояния при статических и вибрационных нагрузках : монография; используется как учеб. пособие // А. Е. Бабенко, Н. И. Бобырь, О. О. Боронко, С. Л. Бойко. – Киев : Инрес, 2005. – 264с.
4. Бабенко А.Є. Теорія коливань та стійкості руху : навч. посіб. : зб. завдань до курс. проектув. та практ. занять ; для студ. напряму підготов. 6.050501 «Прикладна механіка» / А. Є. Бабенко, М. І. Бобир, О. О. Боронко, С. І. Трубочев. – Київ : Гама-Принт, 2010. – 172 с.
5. Бабенко А. Є. Теорія пружності : підручник / А. Є. Бабенко, М. І. Бобир, С. Л. Бойко, О. О. Боронко. – Київ : Основа, 2009. – 244 с.
6. Бабенко А. Є. Теорія коливань та стійкості руху: Коливальні системи з розподіленими параметрами : курсовий проект [Електронний ресурс] : навч. посіб. для студ. денної форми навчання спец. 131 «Прикладна механіка», спеціалізації «Динаміка і міцність машин» та «Інформаційні системи та технології авіабудуванні» / А. Є. Бабенко, О. О. Боронко, А. П. Грабовський, А. М. Бабак ; КПІ ім. Ігоря Сікорського. – Електронні текстові дані (1 файл: 2,1 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2018. – 67 с.
7. Бабенко А. Є Коливання неконсервативних механічних систем : монографія / А. Є. Бабенко, О. О. Боронко, Я. І. Лавренко, С. І. Трубочев. – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2020. – 153 с.

8. Боголюбов Н. Н. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний / Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский. – М. : Наука, 1974. – 504 с.
9. Болотин В. В. Случайные колебания упругих систем / В. В. Болотин. – М. : Наука, 1979. – 336 с.
10. Бидерман В. Л. Теория механических колебаний / В. Л. Бидерман. – М. : Высш. шк., 1980. – 408 с.
11. Бидерман В. Л. Теория механических колебаний / В. Л. Бидерман. – М. : Высш. шк., 1980. – 408 с.
12. Василенко М. В. Теорія коливань і стійкості руху : підручник / М. В. Василенко, О. М. Алексейчук. – Київ : Вища шк., 2004. – 525 с.: іл.
13. Василенко Н. В. Теория колебаний / Н. В. Василенко. – Киев : Вища шк., 1992. – 430 с.
14. Василенко Н. В. Расчет колебаний стержней, пластин и оболочек : учеб. пособие / Н. В. Василенко, А. Е. Бабенко, Е. Е. Онищенко и др. – Киев : КПИ, 1985. – 87 с.
15. Василенко Н. В. Расчет колебаний, стержней и оболочек ; учеб. пособие / Н. В. Василенко ; утв. ученым советом ин-та. – Киев : КПИ, 1985. – 87 с.
16. Вибрации в технике : справочник. В 6-ти т. Т. 1. Колебания линейных систем / под ред. В. В. Болотина. – М. : Машиностроение, 1978. – 352 с.
17. Вибрации в технике: Справочник в шести томах. Т. 3. Колебания линейных систем. – М.; Машиностроение, 1980. – 544 с.
18. Зенкевич О. К. Метод конечных элементов в технике / О. К. Зенкевич. – М. : Мир, 1975. – 539 с.
19. Подгорный А. Н. Основы и методы прикладной теории упругости : учеб. пособие для вузов / А. Н. Подгорный, Г. А. Марченко, В. Н. Пустынных. – Киев : Вища шк., Голов. вид-во, 1981. – 328 с.

20. Прочность, устойчивость, колебания : справочник. Т. 3. – М. : Машиностроение, 1968. – 567 с.
21. Справочник по динамике сооружений. – М. : Стройгудат, 1972. – 512 с.
18. Прочность, устойчивость, колебания : справочник. В 3-х т. Т. 3. – М. : Машиностроение, 1978. – 352 с.
19. Светлицкий В. А. Сборник задач по теории колебаний / В. А. Светлицкий, И. В. Стасенко. – М. : Высш. шк., 1979. – 368 с.
20. Тимошенко С. П. Колебания в инженерном деле / С. П. Тимошенко, Д. Х. Янг, У. Уинвер. – М. : Машиностроение, 1985. – 472 с.
21. Шидловський М. С. Методи досліджень механічних властивостей матеріалів та виробів динамічними методами : практич. посіб. для студ. напрямку підготов. 6.050501 «Прикладна механіка» // М. С. Шидловський, О.О. Боронко, Д. Ю. Шпак. – Київ : НТУУ «КПІ», 2014. – 81 с.
22. Яблонский А. А. Курс теории колебаний / А. А. Яблонский, С. С. Норейко. – М. : Высш. шк., 1975. – 248 с.

Нормативні посилання

23. ДСТУ 2473-94 Механічні коливання. Терміни та визначення. – Київ : Держсѡандарт України, 1994. – 53 с. – чинний від 01.01.95.
24. ГОСТ 24346-80 Вибрация. Термины и определения. – М. : Стандартиформ, 2010. – 28 с. – Введен с 01.01.81.
25. ГОСТ 24347-80 Вибрация. Обозначения и единицы величин. – М. : Госкомитет СССР по стандартам, 1986. – 6 с. – Введен с 01.01.81.

Додатки

ТЕРМІНИ ТА ПОЗНАЧЕННЯ

Д.1. Загальні терміни теорії коливань

ДСТУ 2473-94 Механічні коливання. Терміни та визначення [23] установлює терміни та визначення основних понять у галузі механічних коливань. Терміни, встановлені цим стандартом, обов'язкові для використання у всіх видах документації, науково-технічній, навчальній, довідковій літературі та комп'ютерних інформаційних системах.

Для кожного поняття встановлено один стандартний термін. Використання термінів-синонімів забороняється.

У першій частині цього розділу терміни розташовані в алфавітному порядку. До деяких термінів стандарту наведені пояснення.

Після алфавітної частини розподіл термінів наданий за розділами.

Алфавітний розділ

Автоколивання – коливання системи, що виникають унаслідок самозбудження.

Амплітуда гармонічних коливань; амплітуда – найбільше за модулем відхилення коливної величини від її середнього значення в гармонічних коливаннях

Амплітудний спектр – спектр коливань, гармонічні складові яких характеризуються їхніми амплітудами.

Амплітудно-фазова частотна характеристика – залежність комплексної амплітуди вимушених коливань системи від частоти гармонічного збудження сталої амплітуди.

Амплітудно-частотна характеристика – залежність амплітуди вимушених коливань від частоти гармонічного збудження сталої амплітуди.

Антирезонансна частота – частота, з якою відбуваються антирезонансні коливання.

Антирезонансні коливання – вимушені коливання системи, що має два чи більше ступені вільності, із частотою, що відповідає одному з мінімумів амплітудно-частотної характеристики.

Антифазні гармонічні коливання; антифазні коливання – синхронні гармонічні коливання зі зсувом фаз π радіан у будь-який момент часу.

Безперервний спектр – спектр коливань або частот, у якому частоти гармонічних складових коливань утворюють безперервну множину.

Биття – коливання, що є результатом складання двох і більше гармонічних коливань із близькими частотами.

Вимушені коливання – коливання системи, що спричинені й підтримуються силовим та (чи) кінематичним збудженням.

Випадкові коливання – коливання, що являють собою випадковий процес.

Вища гармоніка – гармоніка, частота якої більша від основної частоти.

Відновлювальна сила – сила, що виникає за умови відхилення механічної системи від стану рівноваги й спрямована протилежно цьому відхиленню. Цей термін поширюється і на моменти сил (див. Примітки нижче).

Відносне демпфірування – відношення коефіцієнта демпфірування системи до її критичного коефіцієнта демпфірування.

Вільні коливання – коливання системи, які зумовлені початковим запасом механічної енергії й відбуваються без надходження енергії ззовні.

Власна форма коливань; власна форма – форма коливань системи з однією із власних частот.

Власна частота – кожна із частот вільних незатухаючих коливань лінійної системи.

Вузол коливань; вузол – нерухома точка системи, що відповідає зміні знака переміщень у коливаннях певної форми. Сукупність таких точок може утворювати вузлову лінію або вузлову поверхню.

Вузькосмугові випадкові коливання – випадкові коливання, для яких характерна вузька смуга частот (див. Примітки нижче).

Гармоніка періодичних коливань; гармоніка – кожна складова періодичних коливань, які подані як сума гармонічних коливань.

Гармонічне збудження коливань; гармонічне збудження – силове чи кінематичне збудження коливань механічної системи за синусоїдальним законом.

Гармонічний аналіз коливань; гармонічний аналіз – подання коливань у вигляді суми гармонічних коливань.

Гармонічні коливання – періодичні коливання, коливні величини яких змінюються у часі за синусоїдальним законом. Гармонічні коливання описуються функцією $A \sin(\omega t + \varphi)$, де A – амплітуда коливної величини, t – час, φ – початкова фаза, ω – кутова частота, $\omega t + \varphi$ – фаза коливань.

Головні коливання – гармонічні коливання системи з однією із власних частот, у яких усі її точки одночасно досягають положення найбільшого відхилення та одночасно проходять положення рівноваги.

Демпфірування коливань; демпфування – зменшення розмаху коливних величин унаслідок дії дисипативних сил.

Детерміновані коливання – коливання, що являють собою детермінований процес.

Динамічна жорсткість – відношення амплітуди гармонічної змущувальної сили до амплітуди гармонічних вимушених коливань.

Динамічна податливість – величина, обернена динамічній жорсткості.

Дисипативна сила – сила, що виникає під час руху і йому перешкоджає та спричиняє розсіяння енергії механічних коливань. Цей термін поширюється і на моменти сил (див. Примітки нижче).

Дискретний спектр – спектр коливань або частот, у якому частоти гармонічних складових коливань утворюють дискретну множину.

Добротність коливальної системи; добротність – значення коефіцієнта динамічного підсилення коливань за переміщеннями або прискореннями при резонансній частоті.

Дорезонансні коливання – вимушені коливання, частота яких менша за розглядувану резонансну частоту системи.

Еліптичні коливання точки – коливання точки по еліптичній траєкторії.

Енергетичний спектр – спектр коливань, гармонічні складові яких характеризуються квадратом амплітуди узагальненої швидкості, що визначає їхню питому енергію.

Жорстка характеристика відновлювальної сили; жорстка характеристика – відношення приросту відновлювальної сили до відновлювального приросту узагальненої координати, яке зростає із зростанням абсолютного значення узагальненої координати, відрахованої від положення рівноваги. Цей термін поширюється і на моменти сил (див. Примітки нижче).

Жорстке самозбудження коливань; жорстке самозбудження – самозбудження коливань, що виникає після досить великого відхилення системи від стану рівноваги.

Зарезонансні коливання – вимушені коливання, частота яких більша за розглядувану резонансну частоту системи.

Затухаючі коливання – коливання, розмах яких зменшується у часі.

Збудження коливань; збудження – дія, що викликає коливання механічної системи.

Зв'язані коливання – коливання, у яких зміна однієї узагальненої координати призводить до зміни інших.

Згинні коливання тіла – коливання тіла, що зумовлені деформацією згину.

Змушувальна сила – зовнішня сила, змінна у часі та незалежна від стану механічної системи, що спричиняє коливання цієї системи. Цей термін поширюється і на моменти сил (див. Примітки нижче).

Зсув фаз гармонічних коливань, зсув фаз – різниця фаз двох гармонічних синхронних коливань.

Ізохронізм коливань – властивість незалежності частоти вільних коливань системи від розмаху.

Кінематичне збудження коливань; кінематичне збудження – збудження коливань механічної системи примусовим наданням будь-яким її точкам заданих рухів, незалежних від стану системи.

Коефіцієнт в'язкого опору – відношення модуля дисипативної сили до модуля узагальненої швидкості лінійної системи з одним ступенем вільності.

Коефіцієнт демпфірування – відношення коефіцієнта в'язкого опору до подвоєної маси системи.

Коефіцієнт динамічного підсилення коливань за переміщеннями; коефіцієнт динамічності за переміщеннями – відношення амплітуди гармонічних коливань до статичного переміщення системи під дією сили, що дорівнює амплітуді силового гармонічного збудження, чи до амплітуди кінематичного гармонічного збудження.

Коефіцієнт динамічного підсилення коливань за прискореннями; коефіцієнт динамічності за прискореннями – відношення амплітуди прискорення гармонічних вимушених коливань до амплітуди прискорення кінематичного гармонічного збудження.

Коефіцієнт поглинання – відношення енергії гармонічних коливань системи, що розсіюється за один період, до максимальної потенціальної енергії системи.

Коливання – процес почергового зростання та зменшення у часі якої-небудь величини.

Коливна величина – скалярна величина, значення якої коливається.

Комбіновані коливання – вимушені коливання, частота яких у дробове число разів відрізняється від частоти гармонічного збудження.

Комплексна амплітуда гармонічних коливань – комплексна величина, модуль якої дорівнює амплітуді, а аргумент – початковій фазі гармонічних коливань.

Комплексна динамічна жорсткість – відношення амплітуди гармонічної змущувальної сили до комплексної амплітуди гармонічних вимушених коливань.

Комплексна динамічна податливість – величина, обернена комплексній динамічній жорсткості.

Критичний коефіцієнт в'язкого опору – значення коефіцієнта опору, в разі перевищення якого механічна система перестане бути коливальною.

Критичний коефіцієнт демпфірування – значення коефіцієнта демпфірування, у разі перевищення якого механічна система перестане бути коливальною.

Крутильні коливання тіла – коливання тіла, що зумовлені деформацією кручення.

Кутова частота періодичних коливань; кутова частота – кількість періодів коливань за 2π одиниць часу.

Кутові коливання тіла – коливання твердого тіла навколо певної осі або точки.

Лінійна характеристика відновлювальної сили; лінійна характеристика – пропорційна залежність між відновлювальною силою та відповідною узагальненою координатою. Цей термін поширюється і на моменти сил (див. Примітки нижче).

Лінійні коливання – коливання, що їх описують лінійними диференціальними рівняннями зі сталими коефіцієнтами.

Логарифмічний декремент коливань; логарифмічний декремент – натуральний логарифм відношення двох послідовних максимальних чи міні-

мальних значень коливної величини в одночастотних затухаючих вільних коливаннях.

Логарифмічний рівень коливань; рівень коливань – десятковий логарифм відношення значення коливної величини в певний момент часу до прийнятого початкового її значення.

Для енергетичних величин (енергія, потужність та ін.) рівень вимірюється в белах $L = \lg a/a_0$ або в децибелах $L = 10 \lg a/a_0$, де a – значення енергії (потужності та ін.), що оцінюється, a_0 – початкове значення енергії (потужності та ін.).

Для швидкості, прискорення, сили та ін. рівень вимірюється в белах $L = 2 \lg b/b_0$, де b – значення швидкості (прискорення та ін.), що оцінюється, b_0 – початкове значення швидкості (прискорення та ін.).

Прийняті при обчисленні початкові значення a_0 та b_0 мають бути зазначені в кожному конкретному випадку. Наприклад, у міжнародній практиці за початкові значення швидкості механічних коливань беруть $10^{-9} \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$, прискорення – $10^{-6} \text{ м} \cdot \text{с}^{-2}$, якщо немає інших вказівок.

Механічна рухливість – величина, обернена механічному імпедансу.

Механічний імпеданс; імпеданс – відношення амплітуди гармонічної змушувальної сили до комплексної амплітуди швидкості заданої точки лінійної системи під час її гармонічних вимушених коливань.

Механічні коливання – коливання, яким властиві коливні величини, що характеризують рух або стан тіл механічної системи.

М'яка характеристика відновлювальної сили; м'яка характеристика – відношення приросту відновлювальної сили до відповідного приросту узагальненої координати, яке убуває із зростанням абсолютного значення узагальненої координати, відрахованої від положення рівноваги. Цей термін поширюється і на моменти сил (див. Примітки нижче).

М'яке самозбудження коливань; м'яке самозбудження – самозбудження коливань, що виникає після як завгодно малого відхилення системи від стану рівноваги.

Наближено гармонічні коливання – коливання, близькі до гармонічних. У разі наближено гармонічних коливань A , ω , φ (див. «гармонічні коливання») функції, що повільно змінюються у часі. Деякі, зокрема, з них можуть бути сталими. Зазначені функції, що повільно змінюються, задовольняють нерівності:

$$\left| \frac{dA}{dt} \right| \leq A\omega, \quad \left| \frac{d\omega}{dt} \right| \leq \omega^2, \quad \left| \frac{d\varphi}{dt} \right| \leq \omega.$$

Наближено-періодичні коливання – коливання, в яких значення коливної величини наближено повторюються через рівні проміжки часу.

У разі проведення гармонічного аналізу наближено-періодичні коливання подаються як сума гармонічних складових гармонічних коливань із частотами, що не перебувають у відношенні цілих натуральних чисел, а неперіодичні коливання – у вигляді інтеграла Фур'є, що визначає спектральну щільність.

Наростаючі коливання – коливання, розмах яких збільшується у часі.

Незв'язані коливання – коливання, в яких зміна однієї узагальненої координати не призводить до зміни інших.

Нелінійні коливання – коливання, що їх описують нелінійними диференціальними рівняннями.

Несинфазні гармонічні коливання; несинфазні коливання – синхронні гармонічні коливання з фазами, що відрізняються одна від одної в будь-який момент часу.

Номер гармоніки – ціле число, що дорівнює відношенню частоти гармоніки до частоти першої гармоніки.

Номери форм коливань; номери форм – цілі числа, що позначають власні форми коливань системи у порядку зростання їхніх частот.

Основна власна форма коливань; основна форма – форма коливань системи з найменшою власною частотою.

Основна частота – найменша частота підсумованих коливань.

Основні коливання – вимушені гармонічні коливання, частота яких збігається з частотою гармонічного збудження.

Параметричне збудження коливань; параметричне збудження – збудження коливань механічної системи внаслідок зміни у часі одного чи декількох її інерційних, пружних чи дисипативних параметрів.

Параметричні коливання – коливання системи, що спричинені й підтримуються параметричним збудженням.

Парціальна частота – власна частота системи з одним ступенем вільності, утворена із системи зі скінченим числом ступенів вільності, якщо всі узагальнені координати, крім однієї, вважати постійними.

Переважаюча частота – частота, якій відповідає абсолютний максимум амплітудного чи енергетичного спектра.

Перехідні коливання – процес переходу від стану спокою до усталених коливань чи від одних до інших усталених коливань.

Період коливань; період – найменший проміжок часу, через який у періодичних коливаннях повторюється кожне значення коливної величини.

Періодичні коливання – коливання системи, в яких кожне значення коливної величини повторюється через рівні проміжки часу. У разі проведення гармонічного аналізу періодичні коливання подаються як сума гармонічних складових, що утворюють ряд Фур'є.

Перша (основна) гармоніка – гармоніка, частота якої є основою.

Пікове значення коливної величини – найбільше за модулем значення коливної величини в певному проміжку часу.

Площинні коливання точки – коливання точки по площинній траєкторії.

Поздовжні коливання тіла – коливання тіла, що зумовлені деформаціями розтягу та стиску.

Полігармонічні коливання – коливання, що являють собою суму двох і більше гармонічних коливань з раціональним відношенням частот.

Поступальні коливання тіла – коливання твердого тіла, в якому всі точки тіла описують однакові траєкторії.

Початкова фаза гармонічних коливань; початкова фаза – фаза гармонічних коливань у початковий момент часу.

Просторові коливання точки – коливання точки по просторовій траєкторії.

Прямолінійні коливання точки – коливання точки по прямій лінії.

Пучність коливань; пучність – точка коливальної системи, розмах переміщень якої має максимум за певної форми коливань. Сукупність таких точок може утворювати лінію пучності або поверхню пучності.

Резонансна частота – частота, з якою відбуваються резонансні коливання.

Резонансні коливання – вимушені коливання з частотою, що відповідає одному з максимумів амплітудно-частотної характеристики.

Розмах коливної величини; розмах – алгебраїчна різниця між найбільшим і найменшим значеннями коливної величини у певному проміжку часу.

Самозбудження коливань; самозбудження – збудження коливань механічної системи надходженням до неї енергії від неколивального джерела, що регулюється рухом самої системи.

Середнє значення модуля коливної величини – середнє арифметичне чи середнє інтегральне абсолютних значень коливної величини в певному проміжку часу. Якщо маємо n дискретних значень x коливної величини, то середнє значення її модуля

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |x_i|.$$

Якщо маємо частково неперервну функцію $x(t)$, що визначає коливну величину в деякому інтервалі часу $t_1 \leq t \leq t_2$, то середнє значення модуля

$$\bar{x} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} |x(t)| dt .$$

Середнє квадратичне значення модуля коливної величини – квадратний корінь із середнього арифметичного чи середнього інтегрального значення квадрата коливної величини в певному проміжку часу. Якщо маємо n дискретних значень x коливної величини, то середнє квадратичне значення

$$\tilde{x} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2} .$$

Якщо маємо частково неперервну функцію $x(t)$, що визначає коливну величину в деякому інтервалі часу $t_1 \leq t \leq t_2$, то середнє квадратичне значення

$$\tilde{x} = \sqrt{\frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} x^2 dt} .$$

Середньогометрична частота смуги; середньогометрична частота – частота, що дорівнює квадратному кореню із добутку граничних частот смуги.

Силове збудження коливаний; силове збудження – збудження коливаний механічної системи змушувальною силою.

Синфазні гармонічні коливання; синфазні коливання – синхронні гармонічні коливання зі збіжними в будь-який момент часу фазами.

Синхронні коливання – періодичні коливання, які відбуваються одночасно, з однаковими частотами.

Скелетна крива – середня лінія між гілками амплітудно-частотної характеристики, що відображає залежність між частотою та амплітудою вільних коливаний системи.

Смуга частот – сукупність частот у розглядуваному діапазоні.

Спектр власних частот – сукупність власних частот системи, які розташовані в порядку зростання.

Спектральний аналіз коливаний; спектральний аналіз – визначення спектра коливаний або частот.

Спектр коливань – сукупність значень параметрів, що відповідають гармонічним складовим коливань та розташовані у порядку зростання їхніх частот. Періодичним та наближено періодичним коливанням відповідає дискретний спектр, неперіодичним – неперервний спектр.

Спектр частот періодичних коливань – сукупність частот гармонічних складових коливань, розташованих у порядку зростання.

Субгармонічні коливання – вимушені гармонічні коливання, частота яких у ціле число разів менша за частоту гармонічного збудження.

Супергармонічні коливання – вимушені гармонічні коливання, частота яких у ціле число разів більша за частоту гармонічного збудження.

Усталені коливання – вимушені періодичні коливання, що встановлюються в системі через деякий час від початку збудження чи зміни коливань.

Фаза гармонічних коливань; фаза – аргумент функції, яка описує гармонічні коливання.

Фазовий спектр – спектр коливань, гармонічні складові яких характеризуються їхніми початковими фазами.

Фазочастотна характеристика – залежність зсуву фаз між вимушеними коливаннями системи та гармонічним збудженням сталої амплітуди від частоти збудження.

Форма коливань системи; форма коливань – сукупність значень узагальнених координат у довільний момент часу, яка визначає з точністю до сталого множника конфігурацію відхилень від стану рівноваги точок системи в одночастотних незатухаючих коливаннях.

Характеристика відновлювальної сили – залежність відновлювальної сили від відповідної узагальненої координати, що відраховується від положення рівноваги. Цей термін поширюється і на моменти сил (див. Примітки нижче).

Характеристика дисипативної сили – залежність дисипативної сили від однієї чи декількох коливальних величин. Цей термін поширюється і на моменти сил (див. Примітки нижче).

Частота биття – частота коливань значень розмаху під час биття. У разі складання двох гармонічних коливань частота биття дорівнює різниці їхніх частот.

Частота періодичних коливань; частота – кількість періодів коливань за одиницю часу (величина, обернена періоду).

Широкосмугові випадкові коливання – випадкові коливання, для яких характерна широка смуга частот (див. Примітки нижче).

Примітки

1. Визначення сил та їх характеристики (терміни «Змушувальна сила», «Відновлювальна сила» та ін.) справедливі для визначення відповідних моментів сил та їх характеристик.

2. Поняття вузької чи широкої смуги частот коливань залежить від проблеми, що досліджується. Щоб уникнути різних тлумачень, потрібні відповідні вказівки. Звичайно вузькими смугами вважають третинооктавні та більш вузькі смуги, широкими – октавні та більш широкі смуги. Про ширину смуги слід робити застереження в кожному конкретному випадку.

Розподіл термінів за темами (за ДСТУ 2473-94 Механічні коливання. Терміни та визначення)

1. Загальні поняття.

1. Коливання.
2. Коливна величина.
3. Механічні коливання.
4. Змушувальна сила.
5. Відновлювальна сила.
6. Характеристика відновлювальної сили.

7. Дисипативна сила.
8. Характеристика дисипативної сили.
9. Збудження коливань; збудження.
10. Силове збудження коливань; силове збудження.
11. Кінематичне збудження коливань; кінематичне збудження.
12. Параметричне збудження коливань; параметричне збудження.
13. Гармонічне збудження коливань; гармонічне збудження.
14. Самозбудження коливань; самозбудження.
15. Демпфірування коливань; демпфування.

2. Види механічних коливань.

16. Вільні коливання.
17. Вимушені коливання.
18. Параметричні коливання.
19. Автоколивання.
20. Лінійні коливання.
21. Нелінійні коливання.
22. Періодичні коливання.
23. Наближено періодичні коливання.
24. Гармонічні коливання.
25. Наближено гармонічні коливання.
26. Усталені коливання.
27. Перехідні коливання.
28. Синхронні коливання.
29. Синфазні гармонічні коливання; синфазні коливання.
30. Несинфазні гармонічні коливання; несинфазні коливання.
31. Антифазні гармонічні коливання; антифазні коливання.
32. Полігармонічні коливання.
33. Основні коливання.
34. Супергармонічні коливання.

35. Субгармонічні коливання.
36. Комбіновані коливання.
37. Биття.
38. Резонансні коливання.
39. Дорезонансні коливання.
40. Зарезонансні коливання.
41. Антирезонансні коливання.
42. Затухаючі коливання.
43. Наростаючі коливання.
44. Детерміновані коливання.
45. Випадкові коливання.
46. Вузькосмугові випадкові коливання.
47. Широкосмугові випадкові коливання.
48. Зв'язані коливання.
49. Незв'язані коливання.
50. Головні коливання.
51. Прямолінійні коливання точки.
52. Площинні коливання точки.
53. Еліптичні коливання точки.
54. Просторові коливання точки.
55. Поступальні коливання тіла.
56. Кутові коливання тіла.
57. Поздовжні коливання тіла.
58. Крутильні коливання тіла.
59. Згинні коливання тіла.

3. Параметри та характеристики механічних коливань.

60. Розмах коливної величини; розмах.
61. Середнє значення модуля коливної величини.
62. Середнє квадратичне значення модуля коливної величини.

63. Пікове значення коливної величини.
64. Логарифмічний рівень коливань; рівень коливань.
65. Період коливань; період.
66. Частота періодичних коливань; частота.
67. Кутова частота періодичних коливань; кутова частота.
68. Частота биття.
69. Амплітуда гармонічних коливань; амплітуда.
70. Комплексна амплітуда гармонічних коливань.
71. Фаза гармонічних коливань; фаза.
72. Початкова фаза гармонічних коливань; початкова фаза.
73. Зсув фаз гармонічних коливань, зсув фаз.
74. Власна частота.
75. Парціальна частота.
76. Резонансна частота.
77. Антирезонансна частота.
78. Форма коливань системи; форма коливань.
79. Власна форма коливань; власна форма.
80. Основна власна форма коливань; основна форма.
81. Номери форм коливань; номери форм.
82. Вузол коливань; вузол.
83. Пучність коливань; пучність.
84. Гармоніка періодичних коливань; гармоніка.
85. Номер гармоніки.
86. Перша (основна) гармоніка.
87. Основна частота.
88. Вища гармоніка.
89. Гармонічний аналіз коливань; гармонічний аналіз.
90. Спектр коливань.
91. Спектр частот періодичних коливань.

92. Спектр власних частот.
93. Дискретний спектр.
94. Безперервний спектр.
95. Амплітудний спектр.
96. Фазовий спектр.
97. Енергетичний спектр.
98. Спектральний аналіз коливань; спектральний аналіз.
99. Смуга частот.
100. Середньогометрична частота смуги; середньогометрична частота.
101. Переважаюча частота.
102. М'яке самозбудження коливань; м'яке самозбудження.
103. Жорстке самозбудження коливань; жорстке самозбудження.
104. Лінійна характеристика відновлювальної сили; лінійна характеристика.
105. М'яка характеристика відновлювальної сили; м'яка характеристика.
106. Жорстка характеристика відновлювальної сили; жорстка характеристика.
107. Ізохронізм коливань.
108. Механічний імпеданс; імпеданс.
109. Механічна рухливість.
110. Амплітудно-частотна характеристика.
111. Фазочастотна характеристика.
112. Амплітудно-фазова частотна характеристика.
113. Скелетна крива.
114. Динамічна жорсткість.
115. Динамічна податливість.
116. Комплексна динамічна жорсткість.
117. Комплексна динамічна податливість.
118. Коефіцієнт в'язкого опору.

119. Критичний коефіцієнт в'язкого опору.
120. Коефіцієнт демпфірування.
121. Критичний коефіцієнт демпфірування.
122. Відносне демпфірування.
123. Логарифмічний декремент коливань; логарифмічний декремент.
124. Коефіцієнт поглинання.
125. Коефіцієнт динамічного підсилення коливань за переміщеннями; коефіцієнт динамічності за переміщеннями.
126. Коефіцієнт динамічного підсилення коливань за прискореннями; коефіцієнт динамічності за прискореннями.
127. Добротність коливальної системи; добротність.

Д.2. Терміни в галузі вібрації

ГОСТ 24346-80 «Вибрация. Термины и определения» [24] встановлено основні терміни та визначення в галузі вібрації. Терміни загальної теорії коливань, наведені в цьому стандарті, обов'язкові лише щодо вібрації. Встановлені ГОСТ 24346-80 терміни обов'язкові для застосування в документації усіх видів, науково-технічній, навчальній та довідковій літературі.

Наведені у стандарті визначення можна за необхідністю потреби змінювати за формою висловлення, не допускаючи порушення границь понять.

Для кожного поняття встановлено єдиний стандартизований термін. Застосування термінів-синонімів до стандартизованого терміна забороняється. Недопустимі до застосування терміни-синоніми наведено у стандарті як довідникові та позначено «Ндп».

Для окремих стандартизованих термінів наведені їх короткі форми, які дозволяється застосовувати, коли виключена можливість їх різного тлумачення. Стандартизовані терміни набрані напівжирним шрифтом, їх короткі форми – світлим, а недопустимі – курсивом.

Алфавітний вказівник, пояснення до деяких термінів та іноземні еквіваленти стандартизованих термінів німецькою, англійською та французькою мовами наведені у ГОСТ 24346-80.

Таблиця Д.2. Терміни та визначення в галузі вібрації

| Термін | Визначення |
|--|--|
| 1. Коливання скалярної величини | Процес почергового зростання та убування звичайно в часі значень будь-якої величини. <i>Примітки:</i> 1. В області вібрації термін «коливання» застосовується тільки для випадків зміни величини у часі. 2. Величину, значення якої коливається, називають коливною величиною |
| 2. Механічні коливання | Коливання значень кінематичної або динамічної величини, яка характеризує механічну систему |
| 3. Вібрація Ндп. <i>Вібрації</i> | Рух точки або механічної системи, при якому відбуваються коливання скалярних величин, що його характеризують |
| 4. Вібраційна техніка Вібротехніка Ндп. <i>Техніка коливальна</i> | Сукупність методів та засобів збудження, корисного використання та вимірювання вібрації, вібраційної діагностики, вібраційного захисту та вібраційних випробувань |
| 5. Віброзбудник Ндп. <i>Віброгенератор</i> <i>Вібратор</i> | Пристрій, який призначений для збудження вібрації та використовується самостійно або у складі іншого пристрою |
| 6. Вібраційна машина Вібромашина Ндп. <i>Колівальна машина</i> | Машина, виконавчий орган якої піддається вібрації для здійснення або інтенсифікації виконуваного процесу або підвищення якості виконуваної роботи |
| 7. Віброметрія | Сукупність методів та засобів вимірювання величин, які характеризують вібрацію |
| 8. Вібраційний захист Віброзахист | Сукупність методів та засобів зменшення вібрації, яка діє на об'єкти, що захищаються. <i>Примітка.</i> Під зменшенням вібрації розуміють зменшення будь-яких визначених величин, які характеризують вібрацію |
| 9. Вібраційна стійкість Вібростійкість | Властивість об'єкта при заданій вібрації виконувати задані функції та зберігати в межах норм значення параметрів |
| 10. Вібраційна міцність Віброміцність | Міцність при заданій вібрації та після неї |
| 11. Вібраційні випробування Вібровипробування | Випробування об'єкта при заданій вібрації |

| | |
|--|--|
| 12. Вібраційна діагностика | Технічна діагностика, основана на аналізі вібрації об'єкта діагностування |
| 13. Вібропереміщення Ндп. <i>Коливальне переміщення, віброзміщення</i> | Складова переміщення, яка описує вібрацію |
| 14. Віброшвидкість Ндп. <i>Коливальна швидкість</i> | Похідна від вібропереміщення за часом |
| 15. Віброприскорення Ндп. <i>Коливальне прискорення</i> | Похідна від віброшвидкості за часом |
| 16. Прямолінійна вібрація точки Ндп. <i>Лінійна вібрація</i> | Вібрація точки по прямолінійній траєкторії |
| 17. Плоска вібрація точки Ндп. <i>Площинна вібрація</i> | Вібрація точки по площинній траєкторії |
| 18. Просторова вібрація точки Ндп. <i>Лінійна вібрація</i> | Вібрація точки по просторовій траєкторії |
| 19. Поступальна вібрація | Вібрація твердого тіла при його поступальному русі |
| 20. Кутова вібрація Ндп. <i>Обертальна вібрація, крутильна вібрація</i> | Вібрація твердого тіла при його обертальному русі |
| 21. Розмах коливань Розмах Ндп. <i>Подвійна амплітуда</i> | Різниця між найбільшим та найменшим значеннями коливної величини в певному інтервалі часу |
| 22. Пікове значення коливної величини Пікове значення | Найбільше абсолютне значення екстремумів коливної величини в певному інтервалі часу |
| 23. Середнє значення модуля коливної величини Середнє значення модуля Ндп. <i>Середньовипрямлене значення</i> | <p>Середнє арифметичне або середнє інтегральне абсолютних значень коливної величини у певному інтервалі часу.</p> <p><i>Примітка.</i> Якщо маємо n дискретних значень x_i коливної величини, то середнє значення модуля</p> $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i .$ <p>Якщо маємо кусково-неперервну функцію $x(t)$, яка визначає коливну величину в деякому інтервалі часу $t_1 \leq t \leq t_2$, то середнє значення модуля</p> $\bar{x} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} x(t) dt$ |
| 24. Середнє квадратичне значення коливної величини Середнє квадратичне значення | Квадратний корінь із середнього арифметичного або середнього інтегрального абсолютних значень коливної величини в певному інтервалі часу. |

| | |
|--|---|
| <p>Ндп. <i>Середньоквадратичне значення, ефективне значення, діюче значення</i></p> | <p>Примітка. Якщо маємо n дискретних значень x_i коливної величини, то середнє квадратичне значення</p> $\tilde{x} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2} .$ <p>Якщо маємо кусково-неперервну функцію $x(t)$, яка визначає коливну величину в деякому інтервалі часу $t_1 \leq t \leq t_2$, то середнє квадратичне значення</p> $\tilde{x} = \sqrt{\frac{t}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} x^2(t) dt}$ |
| <p>25. Періодичні коливання (вібрація)</p> | <p>Коливання (вібрація), за яких кожне значення коливної величини (яка характеризує вібрацію) повторюється через рівні інтервали часу</p> |
| <p>26. Період коливань (вібрації) Період</p> | <p>Найменший інтервал часу, через який при періодичних коливаннях повторюється кожне значення коливної величини (яка характеризує вібрацію)</p> |
| <p>27. Частота періодичних коливань (вібрації) Частота</p> | <p>Величина, обернена до періоду коливань (вібрації)</p> |
| <p>28. Синхронні коливання (вібрації)</p> | <p>Два або більше одночасних періодичних коливань (вібрацій), які мають рівні частоти</p> |
| <p>29. Гармонічні коливання (вібрація)</p> | <p>Коливання (вібрація), за яких значення коливної величини (яка характеризує вібрацію) змінюються за законом</p> $A \sin(\omega t + \varphi),$ <p>де t – час; A – амплітуда; $\omega t + \varphi$ – фаза; φ – початкова фаза; ω – кутова частота (A, ω, φ – постійні параметри)</p> |
| <p>30. Амплітуда гармонічних коливань (вібрації) Амплітуда Ндп. <i>Одинична амплітуда</i></p> | <p>Максимальне значення величини (яка характеризує вібрацію) при гармонічних коливаннях (вібрації) (див. термін 29)</p> |
| <p>31. Фаза гармонічних коливань (вібрації) Фаза</p> | <p>Аргумент синуса, якому пропорційне значення коливної величини (яка характеризує вібрацію) при гармонічних коливаннях (вібрації) (див. термін 29)</p> |
| <p>32. Початкова фаза</p> | <p>Фаза гармонічних коливань (вібрацій)</p> |

| | |
|--|--|
| гармонічних коливань (вібрації) Початкова фаза | у початковий момент часу (див. термін 29) |
| 33. Зсув фаз синхронних гармонічних коливань (вібрацій) Зсув фаз | Різниця фаз двох синхронних гармонічних коливань (вібрацій) у будь-який момент часу |
| 34. Кутова частота гармонічних коливань (вібрацій) Кутова частота Ндп. <i>Циклічна частота, кругова частота</i> | Похідна за часом від фази гармонічних коливань (вібрацій), що дорівнює частоті, помноженій на 2π (див. термін 29) |
| 35. Комплексна амплітуда гармонічних коливань Комплексна амплітуда | Комплексна величина, модуль якої дорівнює амплітуді, а аргумент – початковій фазі гармонічних коливань $Ae^{i\varphi}$ (див. термін 29) |
| 36. Синфазні гармонічні коливання (вібрації) Синфазні коливання | Синхронні гармонічні коливання (вібрації) з рівними фазами в будь-який момент часу |
| 37. Антифазні гармонічні коливання (вібрації) Антифазні коливання | Два синхронні гармонічні коливання (вібрації), в яких зсув фаз у будь-який момент часу дорівнює π |
| 38. Наближено гармонічні коливання (вібрації) | Коливання (вібрації), за яких значення коливної величини (яка характеризує вібрацію) змінюються в часі за законом $A \sin(\omega t + \varphi),$ де функції часу повільно змінюються (зокрема, деякі з них можуть бути постійними). Примітка. Зазначені функції задовольняють нерівність $\left \frac{dA}{dt} \right \leq A\omega, \left \frac{d\omega}{dt} \right \leq \omega^2, \left \frac{d\varphi}{dt} \right \leq \omega$ |
| 39. Биття | Коливання, розмах яких – періодично коливна величина і які є результатом складання двох гармонічних коливань з близькими частотами |
| 40. Частота биття | Частота коливань значень розмаху при биттях, що дорівнює різниці частот коливань, що додаються |
| 41. Гармонічний аналіз коливань (вібрації) | Подання коливань (вібрації), що аналізуються, у вигляді суми гармонічних коливань. Примітки: 1. Гармонічні коливання, що додаються, називають гармонічними складовими. 2. Періодичні коливання подають у вигляді ряду Фур'є, майже періодичні – у вигляді суми гармонічних коливань з непорівнянними |

| | |
|--|--|
| | частотами, а неперіодичні коливання – у вигляді інтеграла Фур'є, що визначає спектральну щільність |
| 42. Гармоніка | Гармонічна складова періодичних коливань. <i>Примітка.</i> Частоти гармоніки кратні частоті коливань, що аналізуються |
| 43. Номер гармоніки | Ціле число, яке дорівнює відношенню частоти гармоніки до частоти періодичних коливань, які аналізуються |
| 44. Перша гармоніка | Гармоніка, номер якої дорівнює одиниці |
| 45. Вища гармоніка | Гармоніка, номер якої більший за одиницю |
| 46. Спектр коливань (вібрацій) Спектр | Сукупність відповідних гармонічним складовим значень величини, що характеризує коливання (вібрацію), в якій зазначені значення розташовуються в порядку зростання частот гармонічних складових. <i>Примітки:</i> 1. Періодичним і майже періодичним коливанням відповідає дискретний спектр, неперіодичним – неперервний спектр. 2. Приклади спектрів коливань див. терміни 50-52 |
| 47. Спектр частот | Сукупність частот гармонічних складових коливань, розташованих у порядку зростання |
| 48. Дискретний спектр | Спектр коливань або частот, в якому частоти гармонічних складових коливань утворюють дискретну множину |
| 49. Неперервний спектр | Спектр коливань або частот, в якому частоти гармонічних складових коливань утворюють неперервну множину |
| 50. Амплітудний спектр | Спектр коливань, в якому величинами, що характеризують гармонічні складові коливань, є їх амплітуди |
| 51. Фазовий спектр | Спектр коливань, в якому величинами, що характеризують гармонічні складові коливань, є їх початкові фази |
| 52. Енергетичний спектр | Спектр коливань, в якому величинами, що характеризують гармонічні складові коливань, є квадрати амплітуд швидкості, що характеризують питому енергію зазначених складових |
| 53. Спектральний аналіз коливань (вібрацій) Спектральний аналіз | Визначення спектра коливань (вібрацій) або спектра частот |
| 54. Переважаюча частота | Частота, якій відповідає глобальний максимум енергетичного або амплітудного спектра коливань з різними частотами |

| | |
|---|---|
| 55. Наближено періодичні коливання (вібрація) Ндп. <i>Квазіперіодичні коливання</i> | Коливання (вібрація), за яких кожне значення коливної величини наближено повторюється через деякі постійні інтервали часу |
| 56. Затухаючі коливання (вібрація) | Коливання (вібрація) із значеннями розмаху, що зменшується. <i>Примітка.</i> Для затухаючих коливань, які описуються залежністю $Ae^{-ht} \sin(\omega t + \varphi),$ частотою коливань вважають частоту синусоїдального множника: $\sin(\omega t + \varphi)$ |
| 57. Наростаючі коливання (вібрація) | Коливання (вібрація) із значеннями розмаху, що збільшується. <i>Примітка.</i> Для наростаючих коливань які описуються залежністю $Ae^{ht} \sin(\omega t + \varphi),$ частотою коливань вважають частоту синусоїдального множника: $\sin(\omega t + \varphi)$ |
| 58. Логарифмічний рівень коливань Рівень коливань | Характеристика коливань, яка порівнює дві однойменні фізичні величини, пропорційна десятковому логарифму відношення початкового значення величини та значення, що оцінюється. <i>Примітки:</i> 1. Для енергетичних величин (енергії, потужності та под.) рівень, який вимірюється у белах, $L = \lg \frac{a}{a_0}$ Рівень, який вимірюється в децибелах, $L = 10 \lg \frac{a}{a_0}$ де a – значення енергії (потужності та под.), що оцінюється, a_0 – початкове значення енергії (потужності та под.). Для швидкості, прискорення, сили та под. рівень, який вимірюється в белах, $L = 2 \lg \frac{b}{b_0}$ рівень, який вимірюється в децибелах, $L = 20 \lg \frac{b}{b_0}$, де b – значення швидкості (прискорення та ін.), що оцінюється, b_0 – початкове значення швидкості (прискорення та под.). 2. Прийняті при обчисленні початкові значення |

| | |
|---|---|
| | a_0, b_0 мають бути зазначені в кожному конкретному випадку |
| 59. Смуга частот | Сукупність частот у розглядуваному діапазоні |
| 60. Декадна смуга частот Декада | Смуга частот, у якій відношення верхньої граничної частоти до нижньої дорівнює 10 |
| 61. Октавна смуга частот Октава | Смуга частот, у якій відношення верхньої граничної частоти до нижньої дорівнює 2 |
| 62. Напівоктавна смуга частот Напівоктава | Смуга частот, у якій відношення верхньої граничної частоти до нижньої дорівнює $\sqrt{2}$ |
| 63. Третиннооктавна смуга частот Третина октави | Смуга частот, у якій відношення верхньої граничної частоти до нижньої дорівнює $\sqrt[3]{2}$ |
| 64. Середньогометрична частота смуги Середньогометрична частота | Квадратний корінь з добутку граничних частот смуги |
| 65. Рухома хвиля (біжна хвиля) Хвиля | Поширення збудження в середовищі. Примітка. Величину, яка слугує мірою стану середовища (переміщення, напруги, деформації та под.) у випадку постійної швидкості поширення хвилі можна подати у вигляді функції $F = F_1(q) \cdot F_2(q - ct),$ де q – криволінійна просторова координата, вздовж якої відбувається поширення хвилі, t – час, c – постійна швидкість поширення хвилі |
| 66. Гармонічні хвилі | Хвилі, за яких усі точки середовища здійснюють гармонічні коливання |
| 67. Довжина гармонічної хвилі Довжина хвилі | Відстань між двома сусідніми максимумами або мінімумами переміщення середовища |
| 68. Хвильове число | Величина, яка дорівнює відношенню власної частоти до фазової швидкості (поширення звуку в матеріалі) |
| 69. Фронт гармонічної хвилі Фронт хвилі | Однозв'язна поверхня в середовищі, яка є геометричним місцем синфазно коливних (хитких) точок середовища гармонічної рухомої хвилі |
| 70. Швидкість гармонічної хвилі Швидкість хвилі | Швидкість поширення фронту гармонічної хвилі |
| 71. Плaska хвиля | Хвиля, фронт якої являє собою площину, перпендикулярну до напрямку поширення хвилі |
| 72. Циліндрична хвиля | Хвиля, фронт якої являє собою сферичну поверхню, радіуси якої збігаються з напрямками поширення хвилі |

| | |
|---|--|
| 73. Сферична хвиля | Хвиля, фронт якої являє собою сферичну поверхню, радіуси якої збігаються з напрямками поширення хвилі |
| 74. Поздовжня хвиля | Хвиля, напрямом поширення якої колінарно траєкторіям коливних точок середовища |
| 75. Поперечна хвиля | Хвиля, напрямом розповсюдження якої ортогональний траєкторіям коливних точок середовища |
| 76. Стійка хвиля | Стан середовища, за якого розташування максимумів та мінімумів переміщень коливних точок середовища не змінюється в часі. <i>Примітка.</i> Стійку хвилю можна розглядати як результат накладання двох однакових рухомих хвиль, які поширюються назустріч одна одній |
| 77. Вузол коливань | Нерухома точка середовища при стійкій хвилі. <i>Примітка.</i> Сукупність таких точок може утворити вузлову лінію пучності та вузлову поверхню |
| 78. Пучність коливань Пучність | Точка середовища при стійкій хвилі, в якій розмах переміщень має максимум. <i>Примітка.</i> Сукупність таких точок може утворити лінію пучності та поверхню пучності |
| 79. Форма коливань (вібрації) системи Форма коливань (вібрації) | Конфігурація сукупності характерних точок системи, які здійснюють періодичні коливання (вібрації), у момент часу, коли не всі відхилення цих точок від їх середніх положень дорівнюють нулю |
| 80. Детерміновані коливання (вібрації) | Коливання (вібрації), які являють собою детермінований процес |
| 81. Випадкові коливання (вібрації) | Коливання (вібрації), які являють собою випадковий процес |
| 82. Вузькосмугові випадкові коливання (вібрації) | Випадкові коливання (вібрації) зі спектром частот, розташованим у вузькій смузі частот. <i>Примітка.</i> Поняття вузької полоси частот залежить від досліджуваної проблеми |
| 83. Широкопсмугові випадкові коливання (вібрації) | Випадкові коливання (вібрації) зі спектром частот, які розташовані в широкій полосі частот. <i>Примітка.</i> Поняття широкої смуги частот залежить від досліджуваної проблеми. Якщо можливі різні трактування, необхідно дати відповідні вказівки |
| 84. Змушувальна сила (момент) Ндп. <i>Збурювальна сила (момент)</i> | Зовнішня сила (момент), що змінюється в часі, яка не залежить від стану системи і підтримує її вібрацію |

| | |
|--|---|
| 85. Силове збудження вібрації Силове збудження Динамічне збудження | Збудження вібрації системи змушувальними силами та (або) моментами |
| 86. Кінематичне збудження вібрації Кінематичне збудження | Збудження вібрації системи |
| 87. Параметричне збудження коливань (вібрації) Параметричне збудження | Збудження коливань (вібрації) системи зміною в часі одного чи декількох її параметрів (маси, моменту інерції, коефіцієнта жорсткості, коефіцієнта опору) |
| 88. Самозбудження коливань (вібрації) Самозбудження | Самозбудження коливань (вібрації) системи за рахунок надходження енергії від неколивного джерела, яке регулюється рухом самої системи |
| 89. М'яке самозбудження коливань (вібрації) М'яке самозбудження | Самозбудження коливань (вібрації), яке виникає після якомога меншого збудження стану рівноваги системи |
| 90. Жорстке самозбудження коливань (вібрації) Жорстке самозбудження | Самозбудження коливань (вібрації), яке виникає лише після достатньо великого збудження стану рівноваги системи |
| 91. Демпфірування вібрації Демпфірування | Зменшення вібрації внаслідок розсіювання механічної енергії (див. примітки до терміна 8) |
| 92. Лінійне демпфірування | Демпфірування вібрації при лінійній характеристиці дисипативної (розсіювальної) сили |
| 93. Відновлювальна сила (момент) | Сила (момент), яка виникає при відхиленні системи від стану рівноваги та спрямована протилежно цьому відхиленню |
| 94. Характеристика відновлювальної сили (моменту) | Залежність відновлювальної сили (моменту) від відповідної узагальненої координати, відліченої від положення рівноваги. <i>Примітка.</i> Визначення дано для системи з одним ступенем вільності |
| 95. Коефіцієнт жорсткості Жорсткість | Похідна характеристики відновлювальної сили чи моменту, яку беруть із протилежним знаком (див. примітку до терміна 94) |
| 96. Лінійна характеристика відновлювальної сили (моменту) Лінійна характеристика | Характеристика відновлювальної сили (моменту), за якої коефіцієнт жорсткості не залежить від узагальненої координати (див. примітку до терміна 94) |
| 97. Жорстка характеристика відновлювальної сили (моменту) Жорстка характеристика | Характеристика відновлювальної сили (моменту), за якої коефіцієнт жорсткості зростає зі збільшенням абсолютного значення відповідної узагальненої координати, відліченої від положення рівноваги |

| | |
|--|---|
| 98. М'яка характеристика відновлювальної сили (моменту) М'яка характеристика | Характеристика відновлювальної сили (моменту), за якої коефіцієнт жорсткості спадає з ростом абсолютного значення відповідної узагальноної координати, відліченої від положення рівноваги (див. примітку до терміна 94) |
| 99. Коефіцієнт податливості Податливість | Величина, обернена коефіцієнту жорсткості (див. примітку до терміна 94) |
| 100. Дисипативна сила (момент) | Сила (момент), яка виникає при русі механічної системи та викликає розсіювання механічної енергії |
| 101. Характеристика дисипативної сили (моменту) | Залежність дисипативної сили (моменту) від відповідної узагальноної швидкості (див. примітку до терміна 94) |
| 102. Коефіцієнт опору Опір | Відношення дисипативної сили або моменту до відповідної узагальноної швидкості для лінійної системи, яке беруть із протилежним знаком (див. примітку до терміна 94) |
| 103. Коефіцієнт демпфірування системи Коефіцієнт демпфірування | Відношення коефіцієнта опору до подвійної маси або подвійного моменту інерції (див. примітку до терміна 94) |
| 104. Критичний коефіцієнт демпфірування системи Критичний коефіцієнт демпфірування | Коефіцієнт демпфірування, за якого система перестає бути коливальною (див. визначення 115 та примітку до терміна 94) |
| 105. Відносне демпфірування системи Відносне демпфірування | Відношення коефіцієнта демпфірування системи до її критичного коефіцієнта демпфірування (див. примітку до терміна 94) |
| 106. Добротність системи Добротність | Величина, обернена до подвійного відносного демпфірування системи (див. примітку до терміна 94) |
| 107. Логарифмічний декремент коливань Логарифмічний декремент | Натуральний логарифм відношення двох послідовних максимальних чи мінімальних значень коливної величини при затухаючих вільних коливаннях |
| 108. Коефіцієнт поглинання | Відношення енергії гармонічних коливань системи, що розсіюється за один період, до максимальної потенціальної енергії системи (див. примітку до терміна 94) |
| 109. Вільні коливання (вібрація) | Коливання (вібрація) системи, які здійснюються без змінного зовнішнього впливу та надходження енергії іззовні |
| 110. Вимушені коливання | Коливання системи, що підтримуються силовим та (чи) кінематичним збудженням |
| 111. Параметричні коливання | Коливання системи, що спричинені й підтримуються параметричним збудженням |

| | |
|---|---|
| 112. Автоколивання | Коливання системи, що виникають внаслідок самозбудження |
| 113. Усталені коливання (вібрація) | Періодичні або майже періодичні коливання (вібрації) системи, які встановлюються в системі через деякий час від початку збудження чи зміни коливань |
| 114. Перехідні коливання (вібрації) | Процес переходу від стану спокою до усталених коливань чи від одних до інших усталених коливань |
| 115. Коливна система | Система, здатна здійснювати вільні коливання |
| 116. Власна частота коливань (вібрації) лінійної системи Власна частота | Будь-яка з частот вільних коливань (вібрацій) лінійної системи. <i>Примітка.</i> Якщо можливі інші трактування, необхідно дати відповідні уточнення: «власна частота консервативної системи» чи «власна частота системи з лінійним демпфіруванням» |
| 117. Спектр власних частот системи Спектр власних частот | Сукупність власних частот системи, які розташовані у порядку зростання |
| 118. Власна форма коливань (вібрації) системи Власна форма | Форма коливань системи з однією із власних частот |
| 119. Ізохронізм коливань (вібрацій) | Властивість незалежності частоти вільних коливань (вібрацій) від розмаху |
| 120. Комплексна жорсткість | Відношення амплітуди гармонічної вимушеної сили до комплексної амплітуди переміщень при гармонічній вимушеній вібрації лінійної системи |
| 121. Комплексна податливість | Величина, обернена до комплексної жорсткості |
| 122. Механічний імпеданс Імпеданс | Відношення амплітуди гармонічної змушувальної сили до комплексної амплітуди швидкості заданої точки лінійної системи під час її вимушених коливань |
| 123. Амплітудно-частотна характеристика | Залежність амплітуди вимушених коливань або вібрації системи від частоти гармонічного збудження з постійною амплітудою |
| 124. Фазочастотна характеристика | Залежність зсуву фаз між вимушеними коливаннями системи та гармонічним збудженням сталої амплітуди від частоти збудження |
| 125. Амплітудно-фазова частотна характеристика Амплітудно-фазова характеристика | Залежність комплексної амплітуди вимушених коливань системи від частоти гармонічного збудження сталої амплітуди |
| 126. Резонансні коливання (вібрації) Резонанс | Вимушені коливання з частотою, що відповідає одному з максимумів амплітудно-частотної характеристики |

| | |
|---|--|
| 127. Антирезонансні коливання (вібрації) | Вимушені коливання (вібрація) системи з двома чи більше степенями вільності, які відповідають одному з мінімумів амплітудно-частотної характеристики |
| 128. Резонансна частота коливань системи Резонансна частота | Частота, за якої здійснюється резонанс. <i>Примітка.</i> У системі з демпфіруванням резонансні частоти переміщень, швидкості чи прискорення різні |
| 129. Дорезонансні коливання (вібрації) | Вимушені коливання, частота яких менша від розглядуваної резонансної частоти системи |
| 130. Зарезонансні коливання | Вимушені коливання, частота яких більша від розглядуваної резонансної частоти системи |
| 131. Субгармонічні коливання | Вимушені коливання, частота яких у ціле число разів менша за частоту гармонічного збудження |
| 132. Супергармонічні коливання | Вимушені коливання, частота яких у ціле число разів більша за частоту гармонічного збудження |
| 133. Коефіцієнт гармонічного підсилення | Відношення амплітуди прискорення гармонічних вимушених коливань до амплітуди прискорення кінематичного гармонічного збудження |
| 134. Зв'язні коливання координат системи Зв'язні коливання | Коливання, у яких зміна однієї узагальненої координати призводить до зміни інших |
| 135. Незв'язні коливання | Коливання, у яких зміна однієї узагальненої координати не призводить до зміни інших |
| 136. Нормальні координати | Узагальнені координати системи, коливання яких є незв'язними коливаннями |
| 137. Активний віброзахист | Вібраційний захист, який використовує енергію допоміжного джерела |
| 138. Пасивний віброзахист | Вібраційний захист, який не використовує енергію допоміжного джерела |
| 139. Віброізоляція | Метод вібраційного захисту за допомогою пристроїв, які встановлюють між джерелом збудження та захисним об'єктом |
| 140. Динамічне гасіння вібрації | Метод вібраційного захисту за допомогою приєднання до об'єкта захисту, реакції якого зменшують розмах вібрації об'єкта в точках приєднання системи |
| 141. Віброізолятор | Прилад, який здійснює віброізоляцію |
| 142. Рівночастотний віброізолятор | Віброізолятор, який забезпечує постійність власної частоти системи при зміні в заданих границях ваги ізольованого тіла |
| 143. Багатокаскадна віброізоляція | Віброізоляція, за якої між об'єктом, який захищається, та джерелом вібрації послідовно встановлені віброізолятори, розділені інерційними елементами |

| | |
|--|--|
| 144. Демпфер | Віброзахисний прилад чи його частина, яка створює демпфірування вібрації |
| 145. Лінійний демпфер | Демпфер з лінійною характеристикою дисипативної сили |
| 146. Динамічний віброгасник | Прилад, який здійснює динамічне гасіння вібрацій |
| 147. Коефіцієнт ефективності вібраційного захисту | Відношення пікового або середньо квадратичного значення вібропереміщення (віброшвидкості, віброприскорення об'єкта, який захищають, або сили, що на нього діють) до набуття віброзахисту того значення тієї ж величини, що і після введення віброзахисту |
| 148. Коефіцієнт передачі при віброізоляції | Відношення амплітуди вібропереміщення (віброшвидкості, віброприскорення об'єкта, який захищають, або сили, що на нього діє) до амплітуди тієї ж величини джерела збудження при гармонічній вібрації |

Д.3. Позначення та одиниці вимірювань у сфері вібрації

ГОСТ 24347-80 «Вибрация. Обозначения и единицы величин» [25] встановлює позначення та одиниці величин, які характеризують вібрацію. Позначення величин призначені для застосування в державних стандартах.

Терміни, які використовуються у цьому розділі, наведені у Додатку Д.2 та відповідають ГОСТ 24346-80.

Таблиця Д.3. Терміни, позначення та одиниці вимірювання

| Величина | | | Одиниця |
|---|------------|-------------|--------------|
| Найменування | Позначення | Розмірність | Найменування |
| 1. Вібропереміщення | S | L | м |
| 2. Розмах вібропереміщення | S_r | L | м |
| 3. Пікове значення вібропереміщення | S_p | L | м |
| 4. Амплітуда вібропереміщення | S_a | L | м |
| 5. Середньоквадратичне значення вібропереміщення | S_e | L | м |
| 6. Довжина гармонічної хвилі | λ | L | м |

| | | | |
|---|---|------------------|---------------------|
| 7. Початкова фаза гармонічних коливань | φ | l | рад |
| 8. Зсув фаз синхронних гармонічних коливань | $\Delta\varphi$ | l | рад |
| 9. Період коливань | T | T | с |
| 10. Частота періодичних коливань | f | T ⁻¹ | Гц |
| 11. Резонансна частота | f _r | T ⁻¹ | Гц |
| 12. Середньгеометрична частота смуги | f _c | T ⁻¹ | Гц |
| | f _c = $\sqrt{f_{\min} \cdot f_{\max}}$, де f _{min} , f _{max} – граничні частоти смуги | | |
| 13. Власна частота консервативної системи | f ₀ | T ⁻¹ | Гц |
| 14. Власна частота системи з демпфуванням | f _d | T ⁻¹ | Гц |
| 15. Кутова частота гармонічних коливань | ω | T ⁻¹ | рад·с ⁻¹ |
| 16. Власна кутова частота консервативної системи | ω_0 | T ⁻¹ | рад·с ⁻¹ |
| 17. Власна кутова частота системи з демпфуванням | ω_d | T ⁻¹ | рад·с ⁻¹ |
| 18. Частотне відношення | $\eta = \frac{\omega}{\omega_0}$ | l | – |
| 19. Віброшвидкість | $v = \frac{ds}{dt}$ | LT ⁻¹ | м·с ⁻¹ |
| 20. Розмах віброшвидкості | v _r | LT ⁻¹ | м·с ⁻¹ |
| 21. Пікове значення віброшвидкості | v _p | LT ⁻¹ | м·с ⁻¹ |
| 22. Амплітуда віброшвидкості | v _a | LT ⁻¹ | м·с ⁻¹ |
| 23. Середнє квадратичне значення віброшвидкості | v _e | LT ⁻¹ | м·с ⁻¹ |
| 24. Віброприскорення | $a = \frac{dv}{dt}$ | LT ⁻² | м·с ⁻² |
| 25. Розмах віброприскорення | a _r | LT ⁻² | м·с ⁻² |
| 26. Пікове значення віброприскорення | a _p | LT ⁻² | м·с ⁻² |
| 27. Амплітуда віброприскорення | a _a | LT ⁻² | м·с ⁻² |

| | | | |
|---|--|----------------|-----------------------------------|
| 28. Середнє квадратичне значення віброприскорення | a_e | $L T^{-2}$ | $m \cdot c^{-2}$ |
| 29. Коефіцієнт жорсткості | c | $M T^{-2}$ | $H \cdot m^{-1}$ |
| | Для випадку, коли за узагальнену координату прийнято лінійне переміщення | | |
| | c_φ | $L^2 M T^{-2}$ | $H \cdot m \cdot \text{рад}^{-1}$ |
| Для випадку, коли за узагальнену координату прийнято кутове переміщення | | | |
| 30. Коефіцієнт передачі при віброізоляції | μ | 1 | – |
| 31. Коефіцієнт опору | b | $M T^{-1}$ | $H \cdot m^{-1} \cdot c$ |
| 32. Коефіцієнт демпфірування | δ | T^{-1} | c^{-1} |
| 33. Критичний коефіцієнт демпфірування системи | δ_k | T^{-1} | c^{-1} |
| 34. Відносне демпфірування | β | 1 | – |
| 35. Коефіцієнт згасання | ϕ | 1 | – |
| 36. Логарифмічний декремент коливань | A | 1 | – |
| 37. Добротність системи | Q | 1 | – |
| 38. Коефіцієнт динамічного підсилення | z | 1 | – |
| 39. Механічний імпеданс | Z_m | $M T^{-1}$ | $H \cdot m^{-1} \cdot c$ |
| 40. Логарифмічний рівень віброшвидкості | L_v | 1 | дБ |
| 41. Логарифмічний рівень віброприскорення | L_a | 1 | дВ |

Навчальне видання

Бабенко Андрій Єлисейович
Боронко Олег Олександрович
Лавренко Ярослав Іванович
Трубачев Сергій Іванович

Коливання стержнів, пластин та оболонок

Підручник

В авторській редакції

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
Свідоцтво про державну реєстрацію: серія ДК № 5354 від 25.05.2017 р.
просп. Перемоги, 37,
м. Київ, 03056

Підп. до друку 27.06. 2022. Формат 60×84¹/₁₆. Папір офс. Гарнітура Times.
Спосіб друку – електрографічний. Ум. друк. арк. 10,69. Обл.-вид. арк. 14,21. Наклад пр.
Зам. № 22-XXX.

Видавництво «Політехніка» КПІ ім. Ігоря Сікорського
вул. Політехнічна, 14, корп. 15
м. Київ, 03056
тел. (044) 204-81-78