

*МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ  
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ  
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»*

*С.О.Подласов, О.В.Матвійчук, О.В. Долянівська, В.І. Моисеєнко*

**ФІЗИКА-1**  
**ВИЗНАЧЕННЯ МОМЕНТІВ ІНЕРЦІЇ**  
**ТВЕРДИХ ТІЛ**  
**ЛАБОРАТОРНИЙ ПРАКТИКУМ**

*Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського як навчальний  
посібник для студентів закладів вищої освіти, які навчаються  
за спеціальністю «Прикладна механіка»*

*Київ  
КПІ ім. Ігоря Сікорського  
2022*

**Рецензент:** С.О.Решетняк завідувач кафедри загальної фізики КПІ ім. Ігоря Сікорського, професор, доктор фізико-математичних наук

**Відповідальний редактор:** В.Й Котовський завідувач кафедри загальної фізики та моделювання фізичних процесів КПІ ім. Ігоря Сікорського, доктор т.н., професор

Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського  
(протокол № 6 від 24 .06.2022 р.)  
за поданням Вченої ради фізико-математичного факультету  
(протокол № 03 від 16.06.2022 р.)

*Електронне мережне навчальне видання*

Подласов Сергій Олександрович, старший викладач кафедри загальної фізики та моделювання фізичних процесів КПІ ім. Ігоря Сікорського

Матвійчук Олексій Васильович, , доцент кафедри загальної фізики та моделювання фізичних процесів КПІ ім. Ігоря Сікорського, канд. пед. Наук  
доцент кафедри загальної фізики КПІ ім. Ігоря Сікорського, к.ф.-м. наук, доцент,

Долянівська Ольга Валеріївна, старший викладач кафедри загальної фізики та моделювання фізичних процесів КПІ ім. Ігоря Сікорського

Володимир Іванович Моисеєнко, старший викладач кафедри загальної фізики та моделювання фізичних процесів КПІ ім. Ігоря Сікорського

*Фізика-1. Визначення моментів інерції твердих тіл. Лабораторний практикум . Навч. посібник / С.О.Подласов, О.В.Матвійчук, О.В. Долянівська, В.І. Моисеєнко – К. : Вид-во «КПІ ім. Ігоря Сікорського», 2022. – 9 с.*

У лабораторному практикумі представлені теоретичні відомості, опис лабораторної роботи з теми «Визначення моментів інерції твердих тіл», наведена методика експерименту, надано контрольні питання для самостійної роботи студентів.

Даний посібник призначений для студентів вищих технічних навчальних закладів, що навчаються за спеціальністю «Прикладна механіка».

Посібник може бути корисним також для студентів інших спеціальностей, для яких робочою програмою передбачено виконання лабораторної роботи з теми «Визначення моментів інерції твердих тіл».

© С.О.Подласов, О.В.Матвійчук,  
О.В. Долянівська, В.І. Моисеєнко, 2022  
© КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2022

# Лабораторна робота №1.17

## ВИЗНАЧЕННЯ МОМЕНТІВ ІНЕРЦІЇ ТВЕРДИХ ТІЛ

**Мета роботи:** експериментальна перевірка розрахунків моментів інерції твердих тіл різної геометричної форми.

**Обладнання:** крутильний маятник, тіла різної геометричної форми, терези.

### 1. СТИСЛІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

#### 1.1. Момент інерції тіла відносно осі z

Мірою інертності тіла, що обертається навколо фіксованої осі, є момент інерції. Моментом інерції матеріальної точки називають добуток її маси  $m$  на квадрат відстані  $r$  до осі обертання:

$$I_z = mr^2. \quad (1)$$

Момент інерції є величиною адитивною, тобто момент інерції тіла дорівнює сумі моментів інерції окремих частин цього тіла:

$$I_z = \sum_i m_i r_i^2. \quad (2)$$

Для твердого тіла момент інерції обчислюють, поділивши тіло на гранично малих об'єми  $dV$ , маса кожного з яких  $dm = \rho dV$ , де  $\rho$  – густина речовини тіла, і замінивши додавання у формулі (2) на інтегруванням:

$$I_z = \int_V \rho(r) r^2 dV, \quad (3)$$

де густина речовини, в загальному випадку, може бути функцією відстані до осі обертання. Для тіл з високою симетрією і простою формою (куля, циліндр, стержень, площина) момент інерції легко обчислюється в аналітичній формі. Якщо ж тіло має складну форму, або складний розподіл густини відносно осі, то на основі формули (3) виконують чисельне інтегрування.

У даній роботі визначаються моменти інерції однорідних симетричних тіл – куба, прямокутного паралелепіпеда та еліпсоїда обертання відносно осей, що

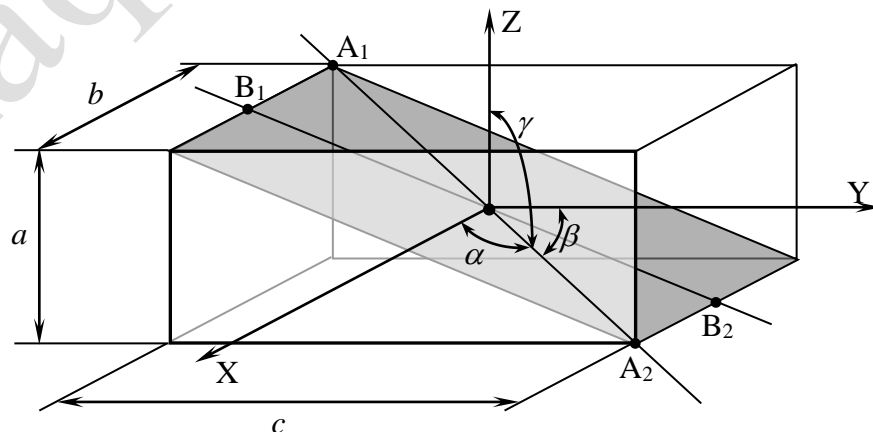


Рис. 1

проходять через центр мас. Для таких тіл введемо прямокутну систему координат OXYZ, початок якої знаходиться в центрі мас, а осі співпадають з

осями симетрії тіла. Для прямокутного паралелепіпеда осі показані на рис. 1. Для осі обертання, що проходить через центр мас і **не співпадає** з осями OX, OY або OZ, момент інерції можна визначити за формулою

$$I = I_x \cos^2 \alpha + I_y \cos^2 \beta + I_z \cos^2 \gamma \quad (4)$$

де  $\alpha, \beta, \gamma$  – напрямні косинуси осі обертання. Для осі обертання  $A_1A_2$  (див. рис. 1), яка проходить через протилежні вершини паралелепіпеда, або куба, напрямні косинуси дорівнюють:

$$\cos \alpha = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \quad \cos \beta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \quad \cos \gamma = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Для осі  $B_1B_2$

$$\cos \alpha = 0, \quad \cos \beta = \frac{c}{\sqrt{b^2 + c^2}}, \quad \cos \gamma = \frac{b}{\sqrt{a^2 + c^2}}.$$

## 2. ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНА УСТАНОВКА

Експериментальна установка для визначення моменту інерції являє собою крутильний маятник, показаний на рис. 2. Основним елементом маятника є рамка 1, яка підвішена на пружній нитці 2, натягнутій між двома кронштейнами 3 (нижній кронштейн на рис.2 не видний). Кронштейни закріплені на вертикальній штанзі 4, встановленій на горизонтальній підставці, на якій розміщений також лічильник часу і кількості коливань. Конструкція рамки така, що дає змогу закріплювати в ній різні тіла з метою визначення їх моментів інерції.

Після повороту рамки на певний кут вона здійснює коливання під дією моменту сили кручення нитки.

Період коливань маятника вимірюється з допомогою фотоелектричного датчика 6, закріпленого на середньому кронштейні штанги. До однієї із сторін рамки прикріплений прапорець 5, який у процесі коливань рамки перетинає світловий промінь фотодатчика, в результаті чого на електричний вхід секундоміра-лічильника часу і періоду коливань надходить відповідний електричний сигнал.

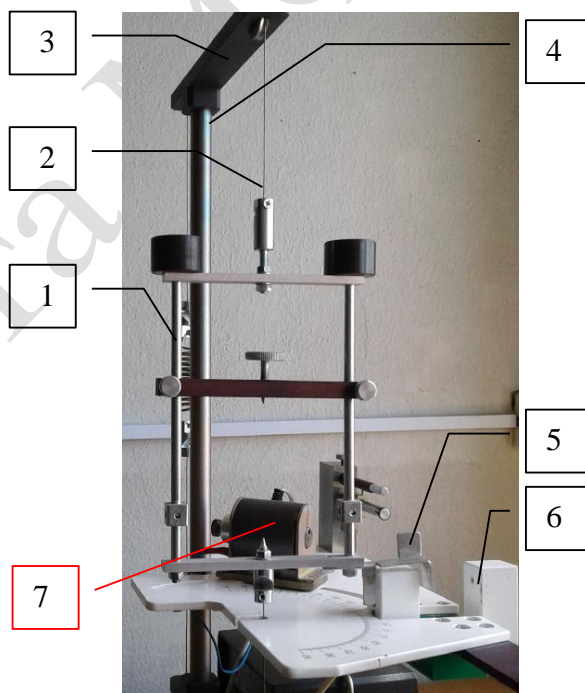


Рис. 2

## 3. МЕТОДИКА ЕКСПЕРИМЕНТУ

Період коливань крутильного маятника визначається як

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{c}}, \quad (5)$$

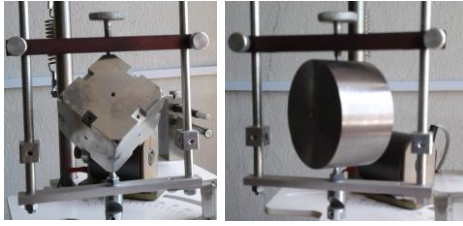


Рис. 3

де  $c$  – жорсткість нитки, момент інерції системи.

Оскільки момент інерції є величиною адитивною, то якщо в рамку вставити тіло (рис. 3), то результуючий момент інерції дорівнюватиме сумі моменту інерції рамки  $I_p$  та моменту інерції досліджуваного тіла  $I_T$ .  $I = I_p + I_T$ , отже формула (9) матиме вигляд

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_p + I_T}{c}}. \quad (6)$$

У цьому виразі невідомі момент інерції тіла і рамки та жорсткість нитки. Для виключення невідомих скористаємось еталонним тілом для якого момент інерції  $I_e$  відомий. Якщо таке тіло вставити в рамку, то момент інерції системи становитиме  $I_p + I_e$  і період коливань дорівнюватиме

$$T_e = 2\pi \sqrt{\frac{I_p + I_e}{c}} \quad (7)$$

Урахувавши, що період коливань рамки (без вставлених в неї тіл) дорівнює

$$T_p = 2\pi \sqrt{\frac{I_p}{c}}, \quad (8)$$

виключивши з рівнянь (6), (7), (8) невідомі  $I_p$  та  $c$ , після нескладних перетворень одержимо:

$$I_T = I_e \frac{T^2 - T_p^2}{T_e^2 - T_p^2}. \quad (9)$$

*Таким чином, для визначення моменту інерції заданого тіла спочатку треба виміряти період коливань рамки без будь-якого тіла та період коливань рамки разом з еталонним тілом.*

#### 4. ПРОВЕДЕННЯ ВИМІРЮВАНЬ

1. Приєднати секундомір-лічильник до мережі і на задній стінці увімкнути його живлення. Дати погрітися приладу і на передній панелі (див. рис. 4) натиснуту кнопку «Сброс».

2. Рамку повернути так, щоб прапорець торкнувся магніта (на рис. 1 позначений 7) і натиснути кнопку «ЭМ» на передній панелі лічильника.

3. Натиснути кнопку «Пуск» і слідкувати за показами лічильника кількості коливань на передній панелі. В момент, коли на панелі з'явиться цифра 9 натиснути кнопку «Стоп». Записати в таблицю 1 кількість коливань і покази секундоміра.

4. Пункти 2 і 3 повторити 5 разів.

5. Вставити в рамку еталонне тіло. Слідкуйте, щоб фіксуючі гвинти попали в спеціальні отвори і тіло рухалося разом з рамкою, не ковзаючи. Виконайте



Рис. 4

вимірювання, описані в п. 2 – 4.

6. Виміряти розміри досліджуваного тіла. **Тіло задає викладач.** Маса тіл наведені в Додатку

7. Вставити в рамку досліджуване тіло так, щоб вісь обертання співпадала з однією з головних осей інерції  $OX$ ,  $OY$ ,  $OZ$ , і виконати вимірювання, описані в п. 2 – 4.

8. Повторити вимірювання для двох інших головних осей інерції.

9. Вставити досліджуване тіло в рамку так, щоб вісь обертання **не** співпадала з головною віссю інерції (**вісь обертання задає викладач**) і повторити вимірювання, описані в п.2 – 4. Дані записати в таблицю 3.

Таблиця 1. Результати вимірювання

| Рамка |                          |     |        | Еталонне тіл |                          |     |        |
|-------|--------------------------|-----|--------|--------------|--------------------------|-----|--------|
| №     | Кількість коливань       | Час | Період | №            | Кількість коливань       | Час | Період |
| 1     |                          |     |        | 1            |                          |     |        |
| 2     |                          |     |        | 2            |                          |     |        |
| 3     |                          |     |        | 3            |                          |     |        |
| 4     |                          |     |        | 4            |                          |     |        |
| 5     |                          |     |        | 5            |                          |     |        |
|       | Середнє значення періоду |     |        |              | Середнє значення періоду |     |        |
|       | Похибка періоду          |     |        |              | Похибка періоду          |     |        |

Таблиця 2. Параметри еталонного тіла - циліндра

|             |                    |
|-------------|--------------------|
| Маса (кг)   | $928,2 \pm 0,01$ г |
| Діаметр (м) | $65,4 \pm 0,1$ мм  |
| Висота (м)  | $36 \pm 0,1$ мм    |

Таблиця 3. Результати вимірювань досліджуваного тіла

| Досліджуване тіло. Вісь 1 |                          |     |        | Досліджуване тіло. Вісь 2 |                          |     |        |
|---------------------------|--------------------------|-----|--------|---------------------------|--------------------------|-----|--------|
| №                         | Кількість коливань       | Час | Період | №                         | Кількість коливань       | Час | Період |
| 1                         |                          |     |        | 1                         |                          |     |        |
| 2                         |                          |     |        | 2                         |                          |     |        |
| 3                         |                          |     |        | 3                         |                          |     |        |
| 4                         |                          |     |        | 4                         |                          |     |        |
| 5                         |                          |     |        | 5                         |                          |     |        |
|                           | Середнє значення періоду |     |        |                           | Середнє значення періоду |     |        |
|                           | Похибка періоду          |     |        |                           | Похибка періоду          |     |        |

Досліджуване тіло. Вісь 3

Досліджуване тіло. Задана вісь

| № | Кількість коливань       | Час | Період | № | Кількість коливань       | Час | Період |
|---|--------------------------|-----|--------|---|--------------------------|-----|--------|
| 1 |                          |     |        | 1 |                          |     |        |
| 2 |                          |     |        | 2 |                          |     |        |
| 3 |                          |     |        | 3 |                          |     |        |
| 4 |                          |     |        | 4 |                          |     |        |
| 5 |                          |     |        | 5 |                          |     |        |
|   | Середнє значення періоду |     |        |   | Середнє значення періоду |     |        |
|   | Похибка періоду          |     |        |   | Похибка періоду          |     |        |

## 5. ОБРОБКА РЕЗУЛЬТАТІВ ВИМІРЮВАНЬ

1. Обчислити середні значення періодів коливань рамки та еталонного тіла, а також випадкову похибку і записати результати в таблиці 1 і 3.

2. Обчислити моменти інерції досліджуваного тіла відносно осей OX, OY, OZ. Результати записати в табл.4.

3. Для куба та паралелепіпеда виміряти розміри  $a$ ,  $b$ ,  $c$  й обчислити напрямні косинуси для заданої осі обертання. Результати занести в табл. 5.

4. Розрахувати момент інерції тіла відносно заданої осі за формулою (6) та формулою (4), порівняти результати розрахунків і зробити висновки. Якщо задана вісь обертання тіла не співпадає з осями  $A_1A_2$ , або  $B_1B_2$ , напрямні косинуси необхідно визначити самостійно.

Таблиця 4. Моменти інерції тіл

| Момент інерції | Значення моменту інерції<br>кг·м <sup>2</sup> |
|----------------|---|
| Еталонне тіло  |   |
| $I_x = I_y$    |   |
| $I_z$          |   |

Таблиця 5. Розміри тіла. Напрямні косинуси.

| Розміри, мм | Напрямні косинуси |
|-------------|-------------------|
| $a =$       | $\cos \alpha =$   |
| $b =$       | $\cos \beta =$    |
| $c =$       | $\cos \gamma =$   |

Момент інерції тіла за результатами експерименту (за формулою (9))

$$I = \dots\dots\dots \text{ кг}\cdot\text{м}^2$$

Момент інерції тіла відносно заданої викладачем осі, розрахований за формулою (4):

$$I = \dots\dots\dots \text{ кг}\cdot\text{м}^2$$

## 6. КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Момент імпульсу точки і твердого тіла відносно осі обертання. Основне рівняння динаміки обертального руху.
2. Момент інерції відносно осі: матеріальної точки, сукупності матеріальних точок та твердого тіла.
3. Дії, необхідні для виведення формули моменту інерції.
4. Виведення формул моментів інерції: тонкого кільця, диска, тонкого стержня, куба, кулі.
5. Формулювання і доведення теореми Штейнера.
6. Виведення формули періоду крутильних коливань.
7. Пояснення методики визначення моменту інерції тіл методом крутильних коливань

## 7. ЛІТЕРАТУРА

1. Барьяхтар В.Г., Барьяхтар И.В., Гермаш Л.П., Довгий С.А. Механіка. К.: Інститут магнетизма НАН України и МОН України, 2004. С. 198 – 211.
2. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Т. 1. МЕХАНИКА. М.: «Наука», 1974. §33, 35,36.
3. Кучерук І.М. та ін. Загальний курс фізики. Т.1 Механіка. Молекулярна фізика і термодинаміка. К.: «Техніка», 1999. § 4.2



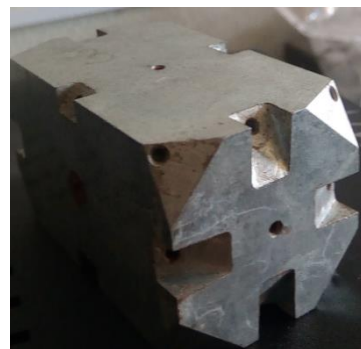
## Додаток



$m = 793,7 \text{ г}$



$m = 850,5 \text{ г}$



$m = 844,9 \text{ г}$

Каф 3Ф Та 1