МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ

імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

ТЕОРІЯ ІГОР:

КУРС ЛЕКЦІЙ

Навчальний посібник

Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалаври,
за освітніми програмами «Системний аналіз і управління»,
«Системи і методи штучного інтелекту»
спеціальностей 124 «Системний аналіз», 122 «Комп’ютерні науки»

Укладач: Л. В. Барановська

Електронне мережне навчальне видання

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2022

Рецензент: *Чикрій А. О., акад. НАНУ, д-р фіз.-мат. наук, проф.,*

Інститут Кібернетики ім. В. М. Глушкова НАН України

Відповідальний редактор *Романенко В. Д., д-р техн. наук, проф.*

Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
(протокол № 6 від 23.06.2022 р.)
за поданням Вченої ради НН ІПСА
(протокол № 5 від 31.05.2022 р.)

Навчальний посібник складено відповідно до програми дисципліни «Теорія ігор» для спеціальностей «Системний аналіз», «Комп'ютерні науки» і базується на багаторічному досвіді викладання, роботі наукового гуртка «Теорія ігор» для студентів КПІ ім. Ігоря Сікорського та на матеріалах онлайн курсів таких визнаних університетів, як Стенфордський університет та університет Токіо. Посібник включає розділи для обов'язкового вивчення: статичні ігри з повною інформацією, динамічні ігри з повною інформацією, антагоністичні ігри в нормальній формі. Розділи з прийняття рішень з неповною інформацією та з диференціальними іграми винесено на самостійне вивчення студентів. Посібник буде також корисним для магістрів, які навчаються за даними спеціальностями, для набуття компетентностей, що входять у стандарти вищої освіти.

© КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2022

Глава 1. Статичні ігри з повною інформацією

Дії інших людей практично завжди впливають на рішення, які нам доводиться приймати. Чому в деяких ВНЗ студенти списують на іспиті? Якщо списують всі інші, то для кожного окремо взятого студента вигода від списування переважує очікуване покарання від затримання. В пристойних ВНЗ не списує ніхто (або майже ніхто): того, хто «попався», чекає показове покарання, аж до відрахування. Як відбувається обвал фінансового ринку? З тієї ж причини: якщо ви очікуєте, що ціна акції впаде, то вам вигідно від неї позбутися. Якщо всі починають позбуватися від цієї акції, то її ціна падає, виправдовуючи очікування. Звичайно ж, завжди можна міркувати про «стадний інстинкт» і про прагнення людей імітувати один одного - але дуже часто масова паніка має раціональне (на індивідуальному рівні) пояснення.

Теорія ігор - розділ прикладної математики, за допомогою якого вчені (в першу чергу економісти і політологи) моделюють поведінку декількох суб'єктів, коли критерій прийняття рішення кожного залежить від рішень, прийнятих іншими. Найважливіший факт полягає в тому, що рішення ігрової задачі часто відрізняється від рішення оптимізаційної задачі: ВНЗ було б «вигідно», якби ніхто зі студентів не списував. Але остаточно рішення кожен окремий студент приймав сам за себе.

1.1 Статичні ігри з повною інформацією: чисті стратегії

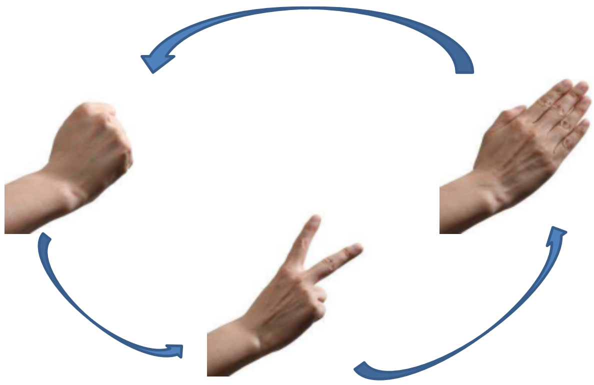
Існує кілька способів класифікувати ігрові задачі. Різниця між ***статичними*** і ***динамічними*** іграми обумовлено можливістю гравців спостерігати за діями один одного і реагувати на них. У статичних іграх гравці приймають рішення одночасно; прийняті рішення не підлягають перегляду. У динамічних іграх існує більш складний порядок ходів.

1.1.1 Ігри в нормальній формі

У дитинстві всі грали в «камінь-ножиці-папір». Кожен з двох гравців викидає одну з трьох фігур. «Камінь» перемагає «ножиці», «папір» - «камінь», «ножиці» - «папір». Як можна математично описати цю гру?

По-перше, нам відомо, що гравців всього двоє. Будемо говорити, що ***множина гравців*** в цій грі складається з двох елементів: $I = \{1,2\}$.

По-друге, ми знаємо, що кожен гравець може вибрати одну з трьох стратегій. Таким чином, ***множина стратегій*** для кожного гравця $i \in I$ буде $S_i =$ {«камінь», «ножиці», «папір»}.



«Камінь-ножиці-папір» - статична гра: вирішуючи, який хід робити, ви не знаєте, що викине ваш противник. Після того, як ви зробили свій хід, у вас немає можливості передумати, причому ваш противник знаходиться в тому ж положенні, що і ви. Прикладами динамічних ігор є карткова гра в «дурня», «хрестики-нулики» або шахи. Стратегія повинна приписувати, який хід треба робити в кожній з можливих ігрових ситуацій. Стратегія, в такому випадку - це товста книга, прочитавши яку, довірена Вами особа може грати в карти або шахи так, як ви вважаєте за потрібне. Множина стратегій в такій грі - це всі можливі способи написання таких книг. Більш докладно про те, як розв’язувати такі ігри, ми розповімо в наступному розділі.

По-третє, ми знаємо, як виграші гравців залежать від тих стратегій, які вони вибрали. У грі «Камінь-ножиці-папір» всього два гравці, причому у кожного гравця скінчене число стратегій. Виграші гравців в такій грі можна представити у вигляді матриці, кожен рядок якої відповідає одній стратегії 1-го гравця, кожен стовпець - однієї стратегії 2-го гравця. Кожна клітинка такої матриці буде відповідати одній з можливих ситуацій розвитку подій. Вона буде містити два числа: виграш 1-го гравця і виграш 2-го гравця. Якщо виграш від перемоги дорівнює 1, виграш від поразки дорівнює -1, а виграш від нічиєї дорівнює 0, то матриця виграшів буде виглядати так:

	Гравець 2			
		камінь	ножиці	папір

Гравець 1	камінь	0, 0	1, -1	-1, 1
	ножиці	-1, 1	0, 0	1, -1
	папір	1, -1	-1, 1	0, 0

Ця матриця задає нам ***функції виграшів гравців*** - тобто те, як їх виграші залежать від стратегій, які граються.

Для того, щоб формально визначити, що таке функція виграшів (її іноді також називають *функцією корисності*), введемо наступне позначення.

Означення 1.1. Нехай $S_1,\ldots,S_N$ —множини. ***Декартовим добутком*** цих множин називається

$$S \equiv \mathop{\times}_{i=1}^{N} S_i = \left\{\left(s_1,\ldots,s_N\right) \middle| s_1 \in S_1,\ldots s_N \in S_N\right\}.$$

Якщо $I = \{1,\ldots,N\}$ —множина гравців, $S_1,\ldots,S_N$ —множина стратегій гравців, то будемо говорити, що ***множина профілів стратегій*** або ***множина стратегій*** у грі є $S \equiv \mathop{\times}_{i=1}^{N} S_i$.

Наприклад, у нашій грі множиною профілів стратегій будуть всі набори вибраних гравцями стратегій *S* = («камінь», «папір»), («ножиці», «камінь»), …, («папір», «ножиці»).

Довільний елемент $s_i \in S_i$ називається ***стратегією гравця*** *i* (тобто, це стратегія, яку вибрав гравець i із множини всіх можливих своїх стратегій $S_i, i = 1,\ldots,N$), довільний елемент $s \in S$ —***профілем стратегій гравців***.

Позначимо через $S_{-i} = \mathop{\times}_{j \neq i} S_j$ множину всіх можливих профілів стратегій для всіх гравців, за винятком гравця *i.* Відповідно, $s_{-i} \in S_{-i}$ —профіль стратегій всіх гравців, за винятком *i*-го: $s_{-i} = \left(s_1,\ldots,s_{i-1},s_{i+1},\ldots,s_N\right)$.

Функція виграшу гравця *i* буде присвоювати кожному профілю стратегій $s \in S$ якийсь виграш $u_i : S \to R.$ Іншими словами, $u_i\left(s_1,\ldots,s_N\right)$ —функція виграшу *i*-го гравця, яка визначена на множині всіх можливих профілів стратегій, $i = 1,\ldots,N$.

Функція $u : S \to R^N = \left(u_1,\ldots,u_N\right)$ називається ***профілем функції виграшів*** гравців.

<u>«Битва» чоловік-жінка</u>

Чоловік і жінка вирішують, де їм провести вихідний. Чоловік хоче піти на футбол (+1), а жінка – на балет (+1). При цьому їм обом хочеться провести час разом (+4).

Множина гравців: $I = \{h, w\}$, де *h* – чоловік, а *w* – жінка.

Множина можливих стратегій:

$$S_h = \{\text{Футбол,Балет}\}, \quad S_w = \{\text{Футбол,Балет}\}.$$

Множина можливих профілів стратегій:

(Футбол,Футбол), (Футбол, Балет), (Балет,Футбол), (Балет,Балет).

Виграші (платежі) гравців:

$$\begin{aligned}
&u_h(\text{Футбол,Футбол}) = 5, \quad && u_w(\text{Футбол,Футбол}) = 4,\\
&u_h(\text{Футбол,Балет}) = 1, && u_w(\text{Футбол,Балет}) = 1,\\
&u_h(\text{Балет, Футбол}) = 0, && u_w(\text{Балет, Футбол}) = 0,\\
&u_h(\text{Балет, Балет}) = 4, && u_w(\text{Балет, Балет}) = 5.
\end{aligned}$$

Матриця гри:

	Жінка		
Чоловік		Футбол	Балет
	Футбол	5, 4	1, 1
	Балет	0, 0	4, 5

Означення 1.2. Набір $G = \langle I, S, u \rangle$ називається ***грою у нормальній формі***.

Таким чином, щоб задати гру у нормальній формі, треба

1. Вказати множину гравців.
2. Вказати множину можливих стратегій кожного гравця.
3. Вказати виграш, який одержить кожний з гравців.

У грі кожен гравець *I* вибирає одну стратегію з множини стратегій *S*. Виграш кожного гравця залежить як від обраної ним стратегії, так і від стратегій, обраних іншими гравцями. Мета аналізу гри - зрозуміти, які стратегії гравці виберуть, в залежності від множини профілів стратегій *S* і профілю функцій виграшів *u*.

1.1.2 Домінування

Наше завдання - скласти прогноз поведінки гравців у грі. Перше (і найбільш очевидне) міркування полягає в тому, що жоден гравець не стане грати стратегію, якщо якась інша стратегія завжди приносить йому більший виграш.

<u>Означення 1.3.</u> Нехай $G = \langle I, S, u \rangle$ - гра у нормальній формі. Тоді для гравця *i* стратегія $s_i \in S_i$ ***сильно домінує стратегію*** $s_i' \in S_i$, якщо для всіх $s_{-i} \in S_{-i}$

$$u_i(s_i, s_{-i}) > u_i(s_i', s_{-i}). \tag{1.1}$$

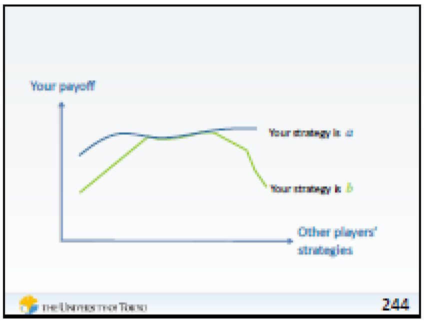
Стратегія $s_i \in S_i$ ***слабо домінує стратегію*** $s_i' \in S_i$, якщо для всіх $s_{-i} \in S_{-i}$

$$u_i(s_i, s_{-i}) \geq u_i(s_i', s_{-i}), \tag{1.2}$$

а хоча б для одного $s_{-i} \in S_{-i}$ має місце (1.1).

Будемо говорити, що стратегія є ***домінованою***, якщо її домінує якась інша стратегій. Тобто, стратегія $s_i \in S_i$ гравця *i* ***строго домінована*** стратегією $s_i' \in S_i$ гравця *i*, якщо $u_i(s_i, s_{-i}) < u_i(s_i', s_{-i})$ для довільного набора стратегій всіх інших гравців $s_{-i} \in S_{-i}$. Позначається: $s_i \prec s_i'$.

Стратегія $s_i \in S_i$ гравця *i* ***слабо домінована*** стратегією $s_i' \in S_i$ гравця *i*, якщо $u_i(s_i, s_{-i}) \leq u_i(s_i', s_{-i})$ для довільного набора стратегій всіх інших гравців $s_{-i} \in S_{-i}$. Позначається: $s_i \preceq s_i'$.



Якщо одна стратегія завжди приносить гравцеві більший виграш, ніж інша, то ми говоримо про сильне домінування. Якщо у гравця є одна стратегія, яка сильно або слабо домінує всі інші, то ми можемо очікувати, з великою впевненості, що він зіграє саме її. Якщо така стратегія є у кожного гравця, то ми отримали рішення гри - прогноз щодо того, що зробить кожен гравець.

Приклад.

	b_1	b_2	b_3	b_4
a_1	2, 7	3, 2	7, 5	5, 6
a_2	1, 9	2, 8	5, 4	3, 0

Яку стратегію вибере перший гравець, якщо другий зіграє стратегію b_1?

Найкращою відповіддю першого гравця буде стратегія a_1.

Яку стратегію вибере перший гравець, якщо другий зіграє стратегію b_2?

	b_1	b_2	b_3	b_4
a_1	•2, 7	•3, 2	7, 5	5, 6
a_2	1, 9	2, 8	5, 4	3, 0

Найкращою відповіддю першого гравця буде стратегія a_1.

Яку стратегію вибере перший гравець, якщо другий зіграє стратегію b_3?

	b_1	b_2	b_3	b_4
a_1	•2, 7	•3, 2	•7, 5	5, 6
a_2	1, 9	2, 8	5, 4	3, 0

Найкращою відповіддю першого гравця буде стратегія a_1.

Яку стратегію вибере перший гравець, якщо другий зіграє стратегію b_4?

	b_1	b_2	b_3	b_4
a_1	•2, 7	•3, 2	•7, 5	•5, 6
a_2	1, 9	2, 8	5, 4	3, 0

Найкращою відповіддю першого гравця буде стратегія a_1.

Отже, у першого гравця є домінуюча стратегія – стратегія a_1.

Знайдемо найкращу відповідь другого гравця на стратегію a_1 першого гравця.

	b_1	b_2	b_3	b_4
a_1	•2, 7^*	•3, 2	•7, 5	•5, 6
a_2	1, 9	2, 8	5, 4	3, 0

Найкращою відповіддю другого гравця буде стратегія b_1.

Найкращою відповіддю другого гравця на стратегію a_2 першого гравця буде стратегія b_1.

	b_1	b_2	b_3	b_4
a_1	•2, 7^*	•3, 2	•7, 5	•5, 6
a_2	1, 9^*	2, 8	5, 4	3, 0

Отже, у другого гравця є домінуюча стратегія – стратегія b_1.

Тут стратегії a_1 та b_1 – сильно домінуючі.

Якщо змінити попередній приклад так:

	b_1	b_2	b_3	b_4
a_1	•2, 7^*	•3, 7	•7, 5	•5, 6
a_2	1, 9^*	2, 8	5, 4	3, 0

то тепер стратегія b_1 другого гравця більше не є строго домінуючою, стратегія b_1 – слабо домінуюча стратегія.

Зауваження. Будь-яка сильно домінуюча стратегія є слабо домінуючою.

Означення 1.4. Набір стратегій $s^* \in S$ є ***рівновагою у сильно (слабо) домінуючих стратегіях***, якщо для всіх i та для всіх $s_i' \in S_i$, $s_i' \neq s_i^*$, стратегія s_i^* сильно (слабо) домінує s_i'.

Приклад 1.

	b_1	b_2	b_3	b_4
a_1	•2, 7*	•3, 2	•7, 5	•5, 6
a_2	1, 9*	2, 8	5, 4	3, 0

Профіль стратегій (a_1, b_1) є рівновагою у сильно домінуючих стратегіях, оскільки стратегії a_1 та b_1 – сильно домінуючі стратегії.

Приклад 2.

	b_1	b_2	b_3	b_4
a_1	•2, 7*	•3, 7*	•7, 5	•5, 6
a_2	1, 9*	2, 8	5, 4	3, 0

Профіль стратегій (a_1, b_1) є рівновагою у слабо домінуючих стратегіях, оскільки стратегії a_1 та b_1 – слабо домінуючі стратегії.

Зауваження. Якщо у гравця є строго домінуюча стратегія, то є всі підстави вважати, що саме цю стратегію він і буде грати.

Дилема в'язня

Два бандити - Петя і Вася - попалися міліції. Їх підозрюють у скоєнні пограбування. Слідчий пропонує кожному з них дати свідчення проти свого товариша. Ніяких доказів проти них немає: якщо ніхто з них не зізнається, то кожен проведе у в'язниці всього один рік за незаконне зберігання зброї. Петя і

Вася сидять в різних камерах і позбавлені можливості спілкуватися один з одним. Якщо один з них дасть свідчення, а інший промовчить, то той, хто промовчав, проведе у в'язниці десять років, а той, хто «розколовся», вийде на свободу. Якщо обидва дали свідчення, то кожен отримає по вісім років. Формально, ми маємо I = {Петя, Вася}, $S_1 = S_2 =$ { «зізнатися», «мовчати»}. Нехай виграш кожного дорівнює, зі знаком мінус, рокам, проведеним за гратами:

	Вася		
Петя		«мовчати»	«зізнатися»
	«мовчати»	-1, -1	-10, 0
	«зізнатися»	0, -10	-8, -8

Як же поведуть себе Петя і Вася? Кожному вигідно зізнатися, незалежно від того, що зробить інший. Іншими словами, чи є у гравців домінуючі стратегії?

Припустимо, що Васі стало відомо, що Петя промовчить. Якщо Вася зізнається, він проведе у в'язниці 0 років; якщо промовчить, то один рік. Отже, якщо Петя буде мовчати, то Вася зізнається:

	Вася		
Петя		«мовчати»	«зізнатися»
	«мовчати»	-1, -1	-10, 0*
	«зізнатися»	0, -10	-8, -8

Тепер припустимо, що Вася знає, що Петя вирішив зізнатися. Васі все одно вигідно зізнатися (так він отримає 8 років замість 10):

	Вася		
Петя		«мовчати»	«зізнатися»
	«мовчати»	-1, -1	-10, 0*
	«зізнатися»	0, -10	-8, -8*

Отже, незалежно від того, що зробить Петя, Вася зізнається. Тобто, у Васі є сильно домінуюча стратегія «зізнатися».

Оскільки виграші симетричні, Петя теж зізнається: профіль стратегій («зізнатися», «зізнатися») є рівновагою в сильно домінуючих стратегіях:

	Вася		
		«мовчати»	«зізнатися»

Петя	«мовчати»	-1, -1	-10, 0*
	«зізнатися»	•0, -10	•-8, -8*

Ефективність за Парето

Зауважимо, що результат «дилеми в'язня» (8 років в'язниці кожному) не є найкращим: якби Петя і Вася зіграли стратегії s = («мовчати», «мовчати»), то кожному з них було б строго краще.

	Вася		
Петя		«мовчати»	«зізнатися»
	«мовчати»	-1, -1	-10, 0*
	«зізнатися»	•0, -10	•-8, -8*

Це - наслідок того, що ми аналізуємо ігрову, а не оптимізаційних задач. Петя і Вася приймають рішення окремо; якби за них обох вирішував хтось один, який максимізує сумарний виграш Петі і Васі, то він би дійсно вибрав s = («мовчати», «мовчати»). Однак в реальності кожен вирішує сам за себе.

Чи можемо ми сказати, який з двох профілів стратегії є найбільш оптимальним?

Означення 1.5. Нехай $G=\langle I,S,u\rangle$ - гра, $s,s'\in S$. Будемо говорити, що профіль стратегій *s* ***Парето-домінує***, якщо для всіх $i\in I$

$$u_i(s)\geq u_i(s'), \tag{1.3}$$

причому хоча б для одного і ця нерівність виконується строго. Профіль стратегій s^0 називається ***Парето-ефективним*** або ***оптимальним за Парето***, якщо не існує $s'\in S$, який Парето-домінує s^0.

Профіль («зізнатися», «зізнатися») не буде оптимальним за Парето, бо профіль («мовчати», «мовчати») Парето-домінує цей профіль.

Згідно цього означення, ми будемо вважати, що перший профіль стратегій краще другого, якщо всі без винятку гравці погоджуються з тим, що перший профіль стратегій не гірше, причому принаймні один гравець вважає, що перший профіль стратегій краще. У грі «дилема в'язня» єдиний профіль стратегій, який не є Парето-ефективним - це стратегії рівноваги («зізнатися», «зізнатися»).

У цьому відображена сувора правда життя. Поведінка гравців в самих різних ситуаціях дуже часто залишає бажати кращого. Трапляється так, що існує варіант дій, який збільшив би виграш всіх без винятку гравців - але він не зобов'язаний бути рівновагою. В результаті може здатися, що в жалюгідному для всіх гравців результаті винна якась невидима сила, якийсь додатковий гравець, про існування якого ми можемо тільки здогадуватися. Однак теорія ігор здатна пояснювати такі результати, не вдаючись до конспірології. Парето-доміновані рівноважні результати трапляються, як би це не було сумно.

Олігополістична конкуренція

На ринку деякого товару присутні дві фірми, які продають цей товар за однаковою ціною. В певний час вони одночасно і незалежно одна від одної приймають рішення про те, чи підвищити ціну на товар, чи ні. Вважається, що це товар першої необхідності, тому покупці готові купляти його навіть за високу ціну. Очевидно, що кожна фірма бажає отримати максимальний прибуток.

Розглянемо платежі гравців: якщо обидві фірми не підвищать ціну, то залишаться «при своїх». Якщо обидві фірми підвищать ціну на товар, то кожна з них одержить додатковий прибуток у розмірі 1000 у.о. Якщо одна фірма підвищить ціну на товар, а друга – ні, то фірма, що підвищила ціну, понесе збитки у розмірі 200 у.о., а друга – одержить додатковий прибуток у розмірі 1400 у.о. Матриця гри виглядає наступним чином:

	Підвищити	Не підвищити
Підвищити	1000, 1000	-200, 1400*
Не підвищити	•1400, -200	•0, 0*

Чи є у гравців сильно домінуючі стратегії?

Стратегія «Не підвищити» - це сильно домінуюча стратегія для кожної з двох фірм.

А профіль стратегій («Не підвищити», «Не підвищити») – це рівновага в сильно домінуючих стратегіях.

Ця гра є аналогом гри Дилеми в’язня. У рівновазі обидві фірми одержать менше, ніж могли б одержати, якщо б домовились і одночасно підвищили ціну на товар. Саме за цією причиною для захисту споживачів у ринковій економіці заборонений зговір фірм.

Аукціон другої ціни

Припустимо, що на продаж виставлено раніше невідома картина великого художника. Дві людини - Володимир і Михайло - вирішили купити цю картину.

Володимир оцінює картину в v_1 грн., Михайло - v_2 в грн. (тобто, за визначенням, і v_1, v_2 - максимальна сума, яку кожен з них готовий заплатити за картину). Аукціон відбувається за такою схемою. Спочатку Володимир і Михайло надсилають свої заявки в закритих пакетах. Картину придбає той, хто запропонує більшу суму грошей, але платить він стільки, скільки вказано в заявці того, хто програв. Припустимо, що, якщо заявки виявляться рівними, кожен покупець виграє з ймовірністю 1/2. Таким чином, якщо s_1 - це заявка Володимира, а s_2 - заявка Михайла, то функція виграшів Володимира виглядає наступним чином:

$$u_1(s_1,s_2)=\begin{cases} v_1-s_2, & s_1>s_2; \\ \dfrac{v_1-s_1}{2}, & s_1=s_2; \\ 0, & s_1<s_2. \end{cases} \tag{1.4}$$

Доведемо, що стратегія $s_1^*=v_1$ слабо домінує всі інші. Нам треба перебрати всі інші стратегії $s_1'\in[0,\infty)$ і показати, що для жодної $s_2\in[0,\infty)$ ми не можемо мати $u_1(s_1',s_2)>u_1(s_1^*,s_2)$.Маємо

$$u_1(v_1,s_2)-u_1(s_1',s_2)=\begin{cases} 0, & s_1'>s_2; \\ \dfrac{v_1-s_2}{2}, & s_1'=s_2; \\ v_1-s_2, & s_1'<s_2, \end{cases} \tag{1.5}$$

при $s_2\le v_1$ та

$$u_1(v_1,s_2)-u_1(s_1',s_2)=\begin{cases} s_2-v_1, & s_1'>s_2; \\ \dfrac{s_2-v_1}{2}, & s_1'=s_2; \\ 0, & s_1'<s_2, \end{cases} \tag{1.6}$$

при $s_2>v_1$.

Обидві ці величини невід’ємні. Тому в аукціоні другої ціни слабо домінуюча стратегія складається у тому, щоб назвати в якості заявки свою істинну оцінку.

1.1.3. Послідовне виключення домінованих стратегій

Як уже зазначалось, якщо рівновага в сильно домінуючих стратегіях існує, то вона є прийнятним прогнозом дій гравців. Нажаль, рівновага в сильно домінуючих стратегіях зустрічається далеко не в усіх іграх. Розглянемо наступну гру:

	b_1	b_2	b_3
a_1	1, 2	2, 1	1, 0
a_2	0, 5	1, 2	7, 4
a_3	-1, 1	3, 0	5, 2

У першого гравця немає домінуючих стратегій. У другого гравця стратегія b_1 домінує стратегію b_2:

	b_1	b_2	b_3
a_1	1, 2	2, 1	1, 0
a_2	0, 5	1, 2	7, 4
a_3	-1, 1	3, 0	5, 2

Тому, якщо другий гравець раціональний, то він не буде грати доміновану стратегію b_2. Якщо перший гравець знає, що другий гравець раціональний, то він може взагалі не враховувати стратегію b_2 другого гравця. Отже, з точки зору першого гравця можна розглядати наступну гру:

	b_1	b_2	b_3
a_1	1, 2	2, 1	1, 0
a_2	0, 5	1, 2	7, 4
a_3	-1, 1	3, 0	5, 2

Якщо перший гравець раціональний і знає, що і гравець другий раціональний, то перший гравець не буде грати свою стратегію a_3, яка домінується стратегією a_2:

	b_1	b_2	b_3
a_1	1, 2	2, 1	1, 0
a_2	0, 5	1, 2	7, 4
a_3	-1, 1	3, 0	5, 2

Тоді з точки зору другого гравця, якщо він раціональний, вірить в раціональність гравця першого, а також у те, що перший гравець вірить в його раціональність, матриця гри буде виглядати так:

	b_1	b_2	b_3
a_1	1, 2	2, 1	1, 0
a_2	0, 5	1, 2	7, 4
a_3	-1, 1	3, 0	5, 2

Тоді другий гравець не буде грати доміновану стратегію b_3, йому вигідніше грати свою стратегію b_1:

	b_1	b_2	b_3
a_1	1, 2	2, 1	1, 0
a_2	0, 5	1, 2	7, 4
a_3	-1, 1	3, 0	5, 2

Але для цього йому треба знати, що перший гравець впевнений в його раціональності. Якщо перший гравець буде впевнений, що другий гравець не стане грати свою стратегію b_3, то гра набуде вигляду:

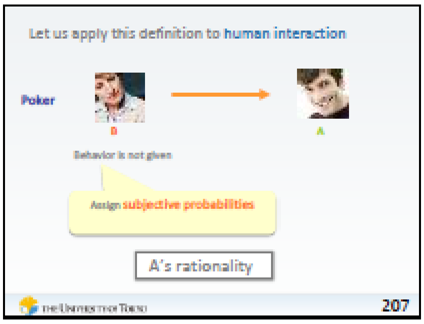
	b_1	b_2	b_3
a_1	1, 2	2, 1	1, 0
a_2	0, 5	1, 2	7, 4
a_3	-1, 1	3, 0	5, 2

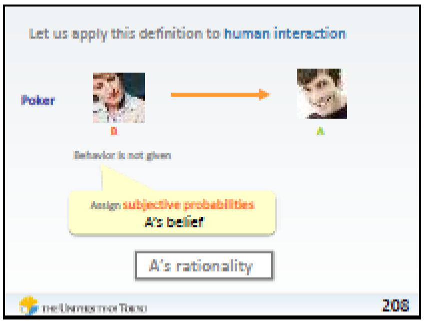
Першому гравцю залишається зіграти стратегію a_1, за умови, що виконані всі попередні ітерації припущень про раціональність:

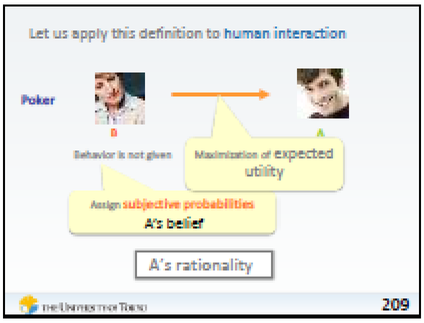
	b_1
a_1	1, 2

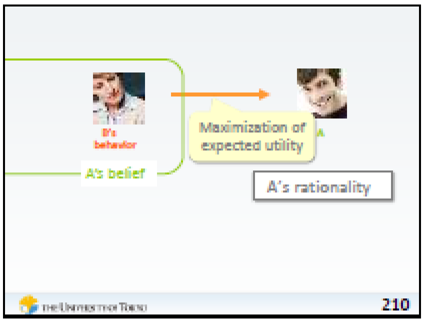
В результаті ми маємо прогноз гри: $s_1^* = a_1, \quad s_2^* = b_1$.

Процедура, яку ми виконали в даному прикладі, називається ***послідовним виключенням домінованих стратегій***.

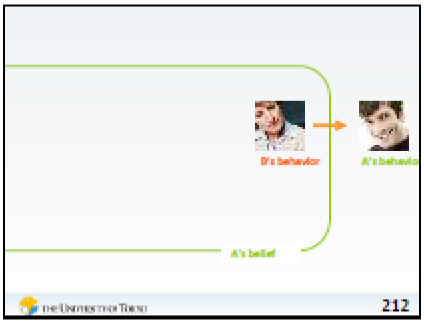

Let us apply this definition to human interaction
Poker
B
A
Behavior is not given
Assign subjective probabilities
A's rationality
207

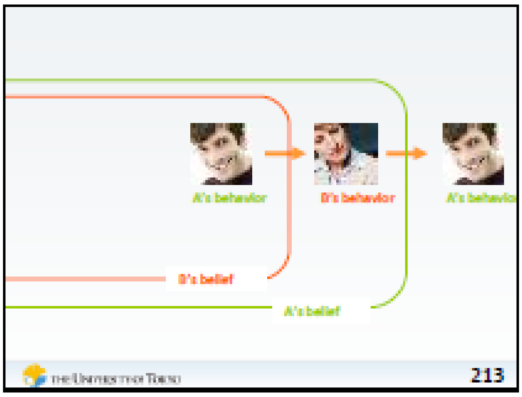

Let us apply this definition to human interaction
Poker
B
A
Behavior is not given
Assign subjective probabilities
A's belief
A's rationality
208

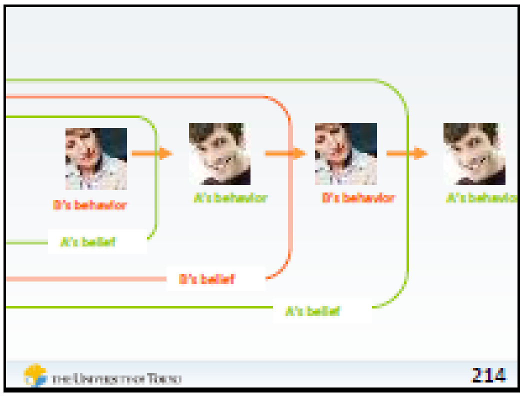

Let us apply this definition to human interaction
Poker
B
A
Behavior is not given
Maximization of expected utility
Assign subjective probabilities
A's belief
A's rationality
209

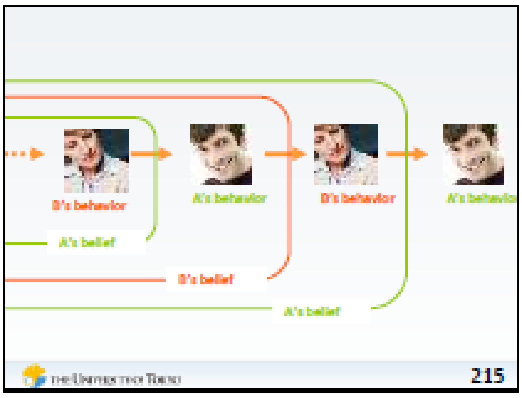

B's behavior
A
Maximization of expected utility
A's belief
A's rationality
210

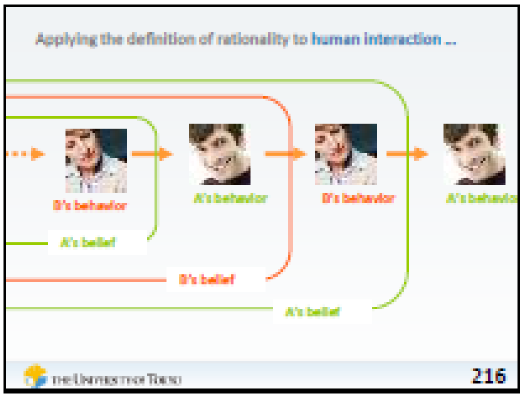

B's behavior
A
Maximization of expected utility
A's belief
A's rationality
The story does not end here, because B is also rational
211

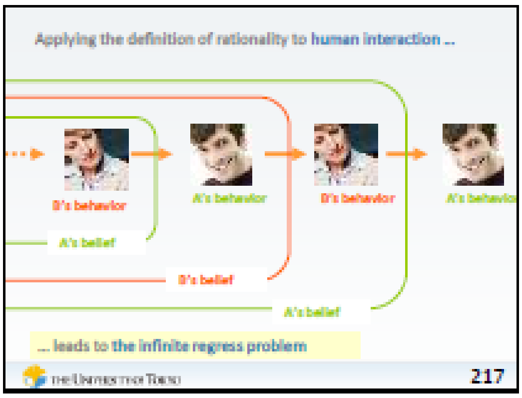

B's behavior
A's behavior
A's belief
212











<u>Означення 1.6.</u> Нехай $G^1, G^2, \ldots$ — послідовність ігор, які одержані наступним чином. Нехай S_i^N — множина стратегій гравця *i* в грі G^N, одержане шляхом виключення домінованих стратегій з множини S_i^{N-1} у грі $G^{N-1} = \langle I, S^{N-1}, u \rangle$.

Нехай S_i^{∞} – границя послідовності $S_i^1 \supseteq S_i^2 \supseteq \ldots$. Тоді гра називається ***розв'язувана за домінуванням***, якщо S_i^{∞} складається з одного елемента s_i^{∞} для всіх i, $i = 1, \ldots, N$. Набір $s^{\infty} = \left(s_1^{\infty}, \ldots, s_N^{\infty}\right)$ називається ***розв'язком гри за домінуванням.***

Зауваження. Не в усіх іграх у нормальній формі можна прийти до матриці 1×1 шляхом послідовного виключення домінованих стратегій. Наприклад, у грі «Битва чоловік-жінка» ні у чоловіка, ні у жінки немає сильно домінованих стратегій. Тому цю та інші ігри не можна розв'язати шляхом послідовного виключення домінованих стратегій.

Зауваження. Послідовність виключення сильно домінованих стратегій не має значення – в якій би послідовності ми не виключали такі стратегії, в результаті прийдемо до одного і того ж профілю.

Зауваження. Послідовність виключення слабо домінованих стратегій має значення. Наприклад, у грі

	b_1	b_2
a_1	5, 5	5, 5
a_2	5, 5	5, 5

Всі стратегії – слабо доміновані. Виключаючи слабо доміновані стратегії в різній послідовності одержимо різні рівноваги.

Зауваження. Розв'язок гри за домінуванням не існує, якщо, наприклад, множини S_i^{∞} містять декілька елементів. Наприклад, розглянемо гру:

	b_1	b_2	b_3
a_1	1, 0	2, 1	0, 0
a_2	0, -1	0, 0	2, 1
a_3	-1, 1	-1, 0	1, 2

Ми виключаємо стратегію a_3 першого гравця, тому що вона сильно домінується стратегією a_2:

	b_1	b_2	b_3
a_1	1, 0	2, 1	0, 0
a_2	0, -1	0, 0	2, 1
a_3	-1, 1	-1, 0	1, 2

Далі ми виключаємо стратегію b_1 другого гравця, тому що вона сильно домінується стратегією b_2:

	b_1	b_2	b_3
a_1	1, 0	2, 1	0, 0

a_2	0, -1	0, 0	2, 1
a_3	-1, 1	-1, 0	1, 2

В результаті залишається гра, яка не розв'язна за домінуванням:

$$S^{\infty} = \{a_1, a_2\} \times \{b_2, b_3\}.$$

<u>Приклад послідовного виключення слабо домінованих стратегій</u>.

Розглянемо матрицю гри:

	b_1	b_2
a_1	1, 1	0, 0
a_2	1, 1	2, 1
a_3	0, 0	2, 1

У першого гравця стратегія a_2 слабо домінує стратегії a_1 і a_3.

І спосіб: Виключимо у першого гравця доміновану стратегію a_1, тоді у другого гравця b_2 буде слабо домінувати b_1:

	b_1	b_2
a_1	1, 1	0, 0
a_2	1, 1	2, 1
a_3	0, 0	2, 1

Виключивши у другого гравця стратегію b_1, ми прийдемо до двох результатів (a_2, b_2), (a_3, b_2):

	b_1	b_2
a_1	1, 1	0, 0
a_2	1, 1	2, 1
a_3	0, 0	2, 1

ІІ спосіб: Виключимо у першого гравця доміновану стратегію a_3, тоді у другого гравця b_1 буде слабо домінувати b_2:

	b_1	b_2
a_1	1, 1	0, 0
a_2	1, 1	2, 1
a_3	0, 0	2, 1

Виключивши у другого гравця стратегію b_2, ми прийдемо до двох результатів (a_1, b_1), (a_2, b_1):

	b_1	b_2
a_1	1, 1	0, 0
a_2	1, 1	2, 1
a_3	0, 0	2, 1

В обох випадках маємо різні значення виграшів.

<u>*Зауваження.*</u> Рівновага, одержана шляхом виключення сильно домінованих стратегій не обов'язково є рівновагою в сильно домінуючих стратегіях. Наприклад, у грі

	b_1	b_2	b_3
a_1	6, 5	•3, 6	3, 9*
a_2	•7, 7*	•3, 0	•4, 1

профіль стратегій (a_2, b_1) – рівновага, одержана шляхом виключення сильно домінованих стратегій, а от рівноваги у сильно домінуючих стратегіях тут немає.

<u>*Зауваження.*</u> Якщо у грі є рівновага в сильно домінуючих стратегіях, но вона буде і рівновагою, одержаною шляхом виключення сильно домінованих стратегій.

1.1.4. Рівновага Неша

Повернемось до Дилеми в'язня:

	Вася	
Петя		«мовчати»	«зізнатися»
	«мовчати»	-1, -1	-10, 0*
	«зізнатися»	•0, -10	•-8, -8*

Як уже розглядалося, у цій грі в обох гравців є домінуюча стратегія «Зізнатися».

Профіль стратегій («зізнатися», «зізнатися») є рівновагою Неша: жодному гравцю не вигідно змінювати свою стратегію за умови, що інший гравець не змінить свою.

<u>***Означення 1.7.***</u> Нехай $G=\langle I,S,u\rangle$ - гра у нормальній формі. Тоді $s^*\in S$ називається ***рівновагою Неша***, якщо для всіх i, для всіх $s_i'\in S_i$ виконується

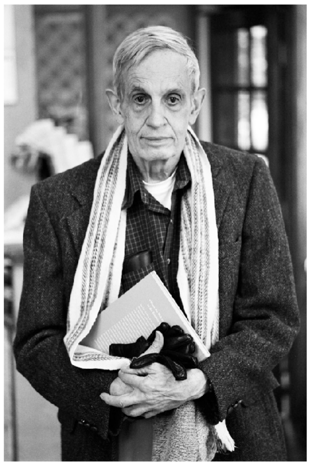
$$u_i\left(s_i^*,s_{-i}^*\right)\geq u_i\left(s_i',s_{-i}^*\right). \qquad (1.8)$$

Рівновага Неша – це такий профіль стратегій, що жоден окремо взяти гравець не захоче змінити свою стратегію, якщо стратегії інших гравців залишаються незмінними.

Рівновагу Неша названо так в честь відомого математика Джона Неша, лауреата Нобелівської премії з економіки 1994 року «За аналіз рівноваги в теорії некооперативних ігор».

Равновесие Нэша

Равновесие Нэша названо так в честь известного математика Джона Нэша, лауреата Нобелевской премии по экономике 1994 года «За анализ равновесия в теории некооперативных игр» (совместно с Райнхардом Зельтеном и Джоном Харсаньи).



John Nash, Jr
by Peter Badge (CC BY-SA 3.0)

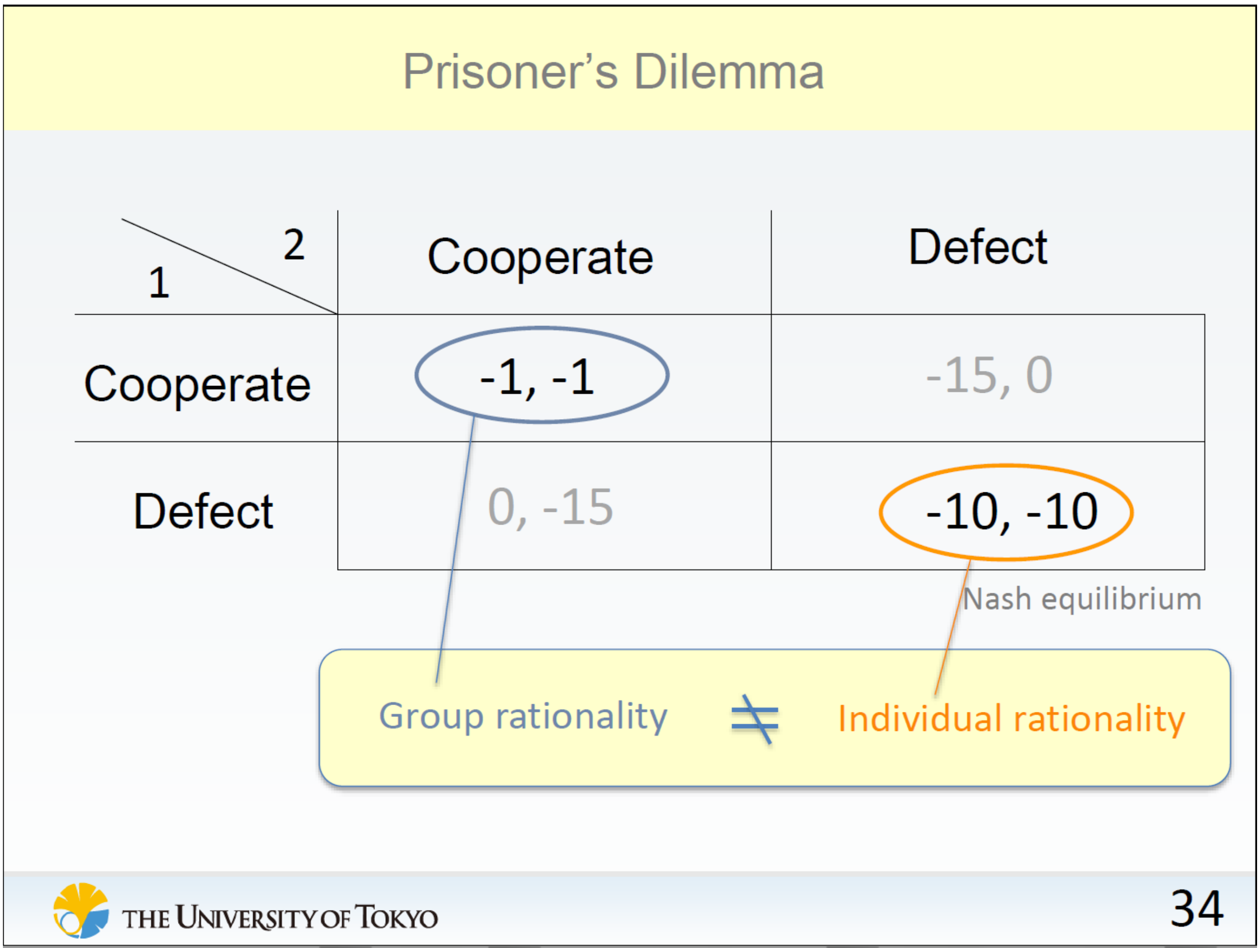
17 / 65

Рівновага Неша є основною концепцією розв’язування теоретико-гральних задач у суспільних науках. Вона задовольняє певному мінімальному набору представлень про раціональність гравців. Іншими словами, рівновага Неша є необхідною умовою «розумної» поведінки гравців. Чи є ця умова достатньою? Тобто, чи існують ігри, в яких профілі стратегій, які формально задовольняють умовам рівноваги Неша, не можуть бути розумними (з інтуїтивної точки зору) прогнозами поведінки гравців? Нажаль, так. В багатьох динамічних іграх, як ми побачимо далі, нам будуть потрібні більш строгі умови для надання прогнозу поведінки гравців. Але все рівно будь-який такий прогноз буде рівновагою Неша.

У Дилемі в’язня

	Вася		
Петя		«мовчати»	«зізнатися»
	«мовчати»	-1, -1	-10, 0*
	«зізнатися»	•0, -10	•-8, -8*

ми бачимо, якщо обидва гравця вибрали б стратегію «Мовчати», то платіж був би -1, у той час, коли в рівновазі Неша платіж кожного -8. Проблема в тому, що профіль («мовчати», «мовчати») не є рівновагою, кожному гравцю завжди вигідно відхилитися і «Зізнатися». Концепція Неша має мало спільного з оптимальністю з суспільної точки зору. Тут «індивідуальна раціональність» гравців (профіль стратегій («зізнатися», «зізнатися»)) не є «груповою раціональністю» (профіль стратегій («мовчати», «мовчати»)).



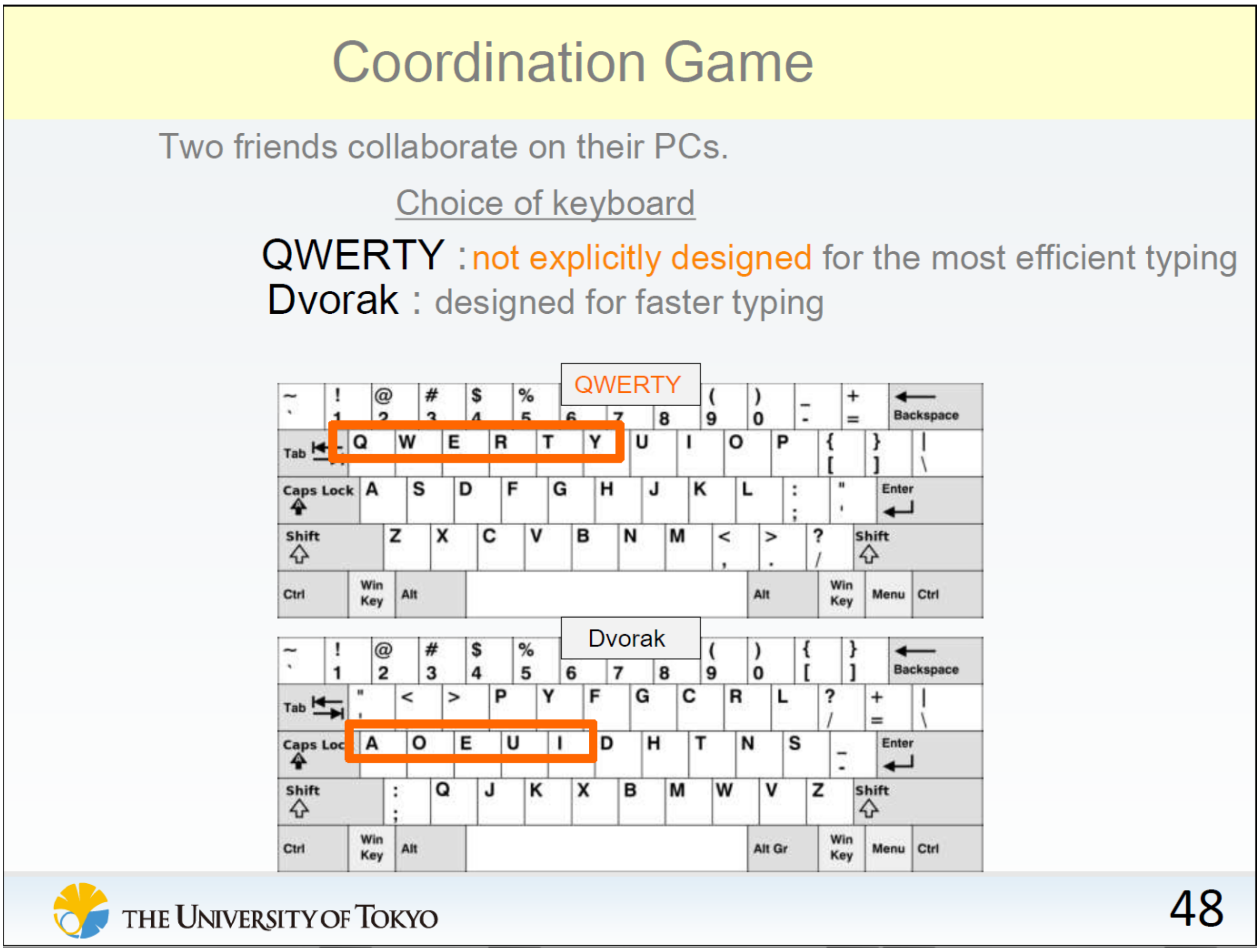
Алгоритм знаходження рівноваги Неша:

1. Для кожної стратегії другого гравця помітимо крапками найкращі відповіді першого гравця.
2. Для кожної стратегії першого гравця помітимо зірочками найкращі відповіді другого гравця.
3. Профілі, які будуть помічені і крапками, і зірочками, є рівновагами Неша.

<u>QWERTY</u>

Якщо ви друкували якийсь текст англійською мовою, то, скоріше за все, робили це на розкладці клавіатури, яка називається QWERTY (за буквами в її лівій верхній частині).

Положення букв на розкладці QWERTY зумовлене тим, що у друкованих машинках кінця XIX ст.. треба було уникати частого зчеплення важелів один з одним у процесі друкування. Тому букви, які частіше всього зустрічаються у тексті поруч, на розкладці QWERTY розташовані далеко одна від одної.



Але сьогодні друкованими машинками майже ніхто не користується. Тому були створені розкладки, які дозволяють більш швидко друкувати: Dvorak, Colemak… Чому ж QWERTY досі розповсюджена?

Це приклад «неоптимальної» рівноваги Неша.

Якщо б усі використовували розкладку Dvorak, то друкування займало б у людей менше часу. Однак жодній фірмі, яка виготовляє комп'ютери, не вигідно випускати розкладки Dvorak, оскільки абсолютна більшість споживачів звикли до QWERTY. Кожному окремому користувачу комп'ютера також не вигідно перевчатися до тих пір, поки знайти комп'ютер з розкладною Dvorak доволі складно.

В результаті, ситуація, в якій (майже) всі користуються розкладкою QWERTY, є рівновагою.

<u>Битва чоловік-жінка</u>

Повернемося до матриці гри:

	Жінка		
Чоловік		Футбол	Балет
	Футбол	•5, 4*	1, 1
	Балет	0, 0	•4, 5*

Порівняємо платежі чоловіка і жінки і побачимо, що у чоловіка немає ні домінуючих, ні домінованих стратегій, т.т. у відповідь на *різні* стратегії жінки чоловіку вигідно грати *різні* стратегії. Те саме можна сказати і про жінку: якщо чоловік піду на футбол, то їй теж краще піти на футбол, а якщо на балет, то їй вигідно піти на білет.

У платіжній матриці утворились дві клітини, в яких кращий вибір чоловіка при фіксованій стратегії жінки співпав з кращим вибором жінки при фіксованій стратегії чоловіки.

Чи захоче хтось з них змінити своє рішення і зіграти стратегію «Балет» за умови, що другий піде на Футбол? Ні, оскільки це зменшить платіж.

	Жінка		
Чоловік		Футбол	Балет
	Футбол	•5, 4*	1, 1
	Балет	0, 0	•4, 5*

Чи захоче хтось з них змінити своє рішення і зіграти стратегію «Футбол» за умови, що другий піде на Балет? Ні, оскільки це зменшить платіж.

	Жінка		
Чоловік		Футбол	Балет
	Футбол	•5, 4*	1, 1
	Балет	0, 0	•4, 5*

Нехай чоловік вирішив піти на футбол, а жінка вибрала балет. Що тоді? Кращою відповіддю чоловіка на стратегію жінки «Балет» 0 теж піти на балет, оскільки тоді його виграш більший, ніж у випадку футболу. За умови, що жінка пішла на балет, чоловіку буде вигідно відхилитися і зіграти стратегію «Балет» замість стратегії «Футбол».

З іншого боку, за умови, що чоловік пішов на футбол, жінці було б краще теж піти на футбол, а не на балет. Тобто жінка теж захоче відхилитися і зіграти стратегію «Футбол» замість «Балет» при фіксованій стратегії чоловіка «Футбол». Тоді її виграш збільшиться з 1 до 4.

	Жінка		
Чоловік		Футбол	Балет
	Футбол	•5, 4*	1, 1
	Балет	0, 0	•4, 5*

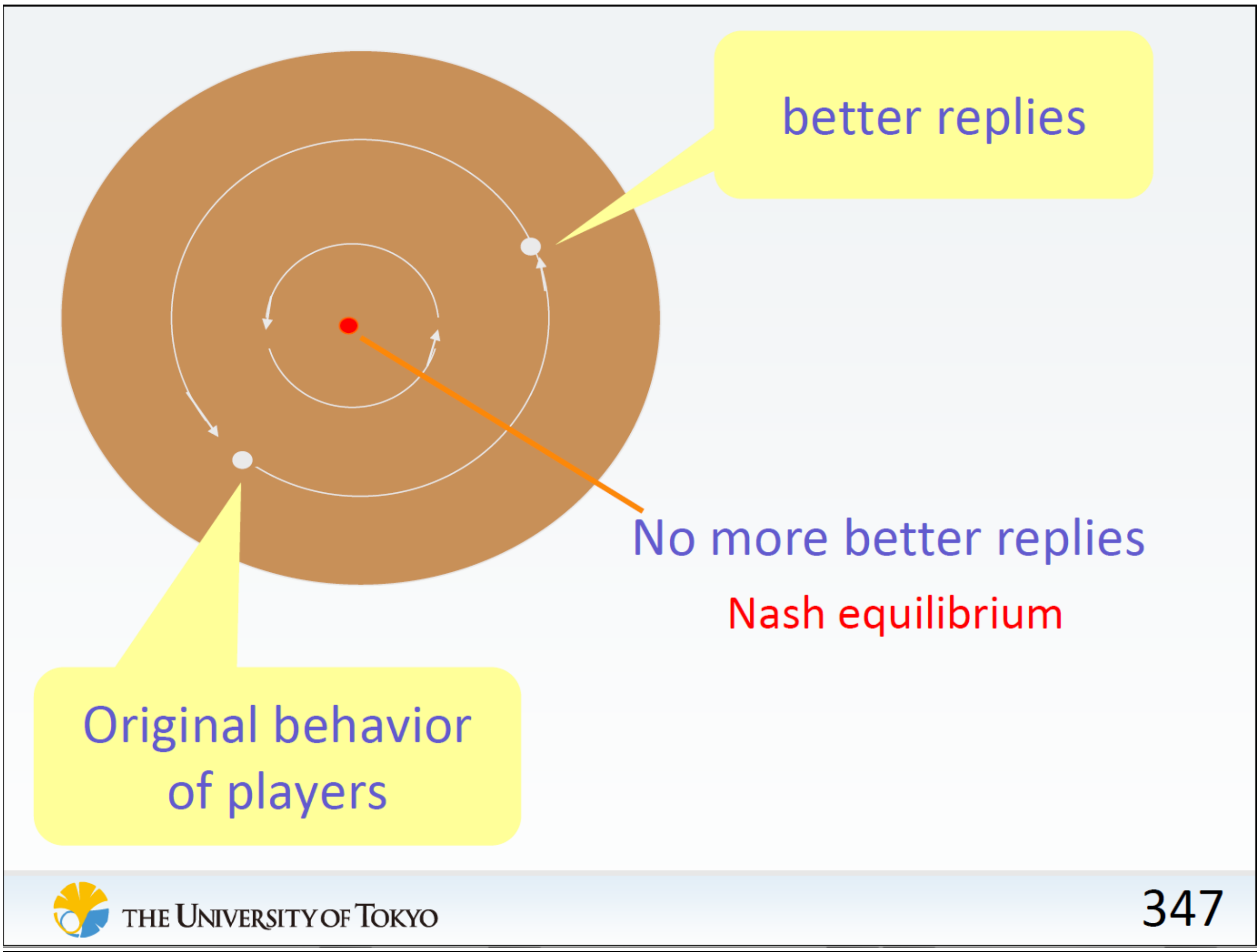
Нехай чоловік вирішив піти на балет, а жінка вибрала футбол. Що тоді?

Те ж саме, що і в попередній ситуації: обом буде вигідно відхилитися при фіксованій стратегії іншого.

	Жінка		
Чоловік		Футбол	Балет
	Футбол	•5, 4*	1, 1
	Балет	0, 0	•4, 5*

Таким чином, профілі стратегій («Футбол», «Футбол») і («Балет», «Балет») в певному сенсі краще за профілі стратегій («Футбол», «Балет») і («Балет», «Футбол»). Якщо чоловік і жінка опинились разом на футболі або балеті, то нікому окремо не вигідно піти в інше місце за умови, що другий залишиться. Якщо подружжя опинилось в різних місцях, то кожному з них вигідно відхилитися від вибраної стратегії.

Одержані профілі стратегій («Футбол», «Футбол») і («Балет», «Балет») є рівновагами Неша.



Координаційні ігри

Розглянемо гру «Зустріч у місті». Двоє студентів, Маша і Андрій, домовились піти в оперний театр. Білети куплено, і за годину до зустрічі вони сідають у метро в різних районах Києва. Театр знаходиться на станції метро «Театральна». Нажаль, вони забули домовитись, де зустрічаються: біля театру, чи у метро. І, припустимо, принаймні у одного з них не працює телефон. Що вони будуть робити? У кожного з них є два варіанти дій: чекати в метро (М) чи біля театру (Т). Матриця гри буде така:

	Андрій		
Маша		М	Т
	М	1, 1	0, 0
	Т	0, 0	1, 1

У цій грі дві рівноваги: (М,М), (Т,Т), причому у жодного гравця немає домінуючої стратегії. Це – класичний приклад координаційної гри.

Чи можна сказати, яка з декількох можливих рівноваг буде реалізована в координаційній грі? Важливу роль має комунікація між гравцями. Якщо перед тим, як вийти, вони домовились зустрітися в метро, то, скоріше за всього, буде реалізована пара стратегій (М,М) – не зважаючи на те, що домовленість не є обов’язковою до виконання.

При відсутності комунікації важливе значення грає культурний і психологічний контекст гри, який не відображений у функціях виграшу гравців. Так Томас Шеллінг описав у своїй книзі (1960) приклад, коли він спитав у своїх студентів: якщо б вам довелось зустрітися з незнайомцем у Нью-Йорку, то в яке б місце ви б прийшли? Частіше відповіддю було: на Time Square. Такі місця зустрічі називаються ***фокальними точками***. Нажаль, існування фокальних точок залежить від однорідності культурного середовища, з якого походять гравці. Людина з іншої країни навряд чи піде шукати вас на Time Square.

В координаційній грі на вибір рівноваги можуть впливати не тільки ментальні фактори, ай історія попередніх взаємодій гравців. Якщо Маша і Андрій завжди зустрічались в метро, то і в наступний раз вони зустрінуться там же.

Таким чином, координаційна гра має властивості залежності від передісторії і від траєкторії. Якщо дана гра повторювалась декілька разів і в ній кожен раз реалізовувалось одна й та сама рівновага, то і в наступний раз, скоріше за все, гравці зіграють ті ж стратегії.

Реалізація однієї тієї ж рівноваги у взаємодіях гравців, що повторюються, може призвести до утворення соціальної конвенції. Масколлел, Уінстон і Грін (1995) приводять такий приклад:

«Кожен день люди, що йдуть на роботу [у центрі Нью-Йорка], повинні вирішувати, якою стороною тротуару слід йти. Згодом формується конвенція, згідно з якою люди йдуть по правій стороні тротуару. Ця конвенція підтримується, так як будь-який індивід, що відхилився [від конвенції] в односторонньому порядку, буде розтоптаний. Звичайно ж, в будь-який день можливо, що який-небудь індивід вирішить йти по лівій стороні, розраховуючи на те, що всі інші раптом вирішать, що конвенція змінилася. Проте, найбільш розумний прогноз, що пішоходи і далі будуть дотримуватися рівноваги: всі йдуть по правій стороні. Зауважимо, що поведінка, для того, щоб стати стійкою конвенцією, має бути рівновагою Неша. Інакше індивіди почнуть відхилятися від конвенції, як тільки та буде сформована».

Дуополія Курно

Першою формальною задачею, яку дослідили за допомогою знаходження положення рівноваги, була модель двох фірм, що конкурують. Її запропонував французький математик-економіст А.А. Курно у 19 ст.

Є дві фірми-виробники певного товару. Обидві фірми повинні вирішити, яку кількість товару виготовити протягом місяця. Припустимо, що можна виготовити (і продати) довільне дробове число товару. Нехай $q_1 = [0, \infty) -$об'єм виробництва першої фірми, $q_2 = [0, \infty) -$об'єм виробництва другої фірми. Функція попиту на товар має вигляд: $p = 1 - q_1 - q_2$, де p - максимальна ціна, по якій можна продати $q_1 + q_2$ штук протягом місяця. Припустимо, що витрати виробництва у фірми *i* дорівнює $c_i q_i$, де $0 \le c_i < 1 -$витрати виробництва однієї одиниці товару. Прибуток фірми дорівнює її виручці за вирахуванням витрат виробництва:

$$\begin{aligned} u_1 &= q_1 p - c_1 q_1 = q_1(1 - q_1 - q_2) - c_1 q_1, \\ u_2 &= q_2 p - c_2 q_2 = q_2(1 - q_1 - q_2) - c_2 q_2. \end{aligned} \tag{1.9}$$

У цій задачі множина стратегій у кожного гравця не є скінченною: кожна фірма може вибрати довільний невід'ємний об'єм виробництва. Функції виграшів фірм є неперервними функціями від їх стратегій. Якщо $(q_1^*, q_2^*) -$ рівновага Неша, то q_1^* повинна максимізувати u_1 при $q_2 = q_2^*$, і навпаки. Розв'язками задач максимізації фірм

$$\max_{q_1} u_1(q_1, q_2), \quad \max_{q_2} u_2(q_1, q_2)$$

будуть

$$\widehat{q_1}(q_2) = \begin{cases} \dfrac{1 - q_2 - c_1}{2}, & q_2 < 1 - c_1 \\ 0, & q_2 \ge 1 - c_1 \end{cases}$$

і

$$\widehat{q_2}(q_1) = \begin{cases} \dfrac{1 - q_1 - c_2}{2}, & q_1 < 1 - c_2 \\ 0, & q_1 \ge 1 - c_2. \end{cases}$$

Це функції реакції для першої та другої фірми. Рівновага Неша – це такі (q_1^*, q_2^*), при яких об'єм виробництва першої фірми максимізує її прибуток при даному об'ємі виробництва другої фірми, і навпаки. Отже, рівновагою буде довільний розв'язок рівняння

$$\widehat{q_1}(q_2) = q_1, \quad \widehat{q_1}(q_1) = q_2.$$

Таким чином, рівновага буде

$$q_1^* = \frac{1 - 2c_1 + c_2}{3}, \quad q_2^* = \frac{1 - 2c_2 + c_1}{3}$$

для $\mathrm{c}_1 \in \left(2\mathrm{c}_2 - 1б \ \frac{1+\mathrm{c}_2}{2}\right)$,

$$q_1^* = \frac{1 - c_1}{2}, \quad q_2^* = 0$$

для $\mathrm{c}_1 \leq 2\mathrm{c}_2 - 1$, і

$$q_1^* = 0, \quad q_2^* = \frac{1 - c_2}{2}$$

для $\mathrm{c}_1 \geq \frac{1+\mathrm{c}_2}{2}$.

1.1.5. Функції реації

Означення 1.8. Функцією реакції гравця *i* є точково-множинне відображення $\breve{s}_i$ між множинами S_{-i} і S_i таке, що для всіх $s_{-i} \in S_{-i}$ маємо

$$\breve{s}_i\left(s_{-i}\right) = \left\{ s_i \in S_i \middle| u_i\left(s_i, s_{-i}\right) = \max_{s_i' \in S_i} u_i\left(s_i', s_{-i}\right) \right\}.$$

У математиці точково-множинне відображення між множинами *А* і *В* означає правило, яке кожному елементу з множини *А* ставить у відповідність якусь підмножину множини *В*. Функція реакції є точково-множинним відображенням, яке показує, які стратегії гравця максимізують його виграш в залежно від профілю стратегій інших гравців. Для профілю стратегій s_{-i} може існувати кілька стратегій гравця *i*, що максимізують його виграш. Наприклад, виграш гравця 2 при $s_1 = B$ в описаній вище грі максимизуется при $s_2 \in \breve{s}_2(B) = \{a, c\}$. Рівновага Неша можна визначити як будь-який такий профіль стратегій, в якому стра-тегія кожного гравця є найкращою реакцією на стратегії інших гравців:

Лемма 1.1. Профіль стратегій s * є рівновага Неша в тому і тільки тому випадку, якщо для всіх *i* ми маємо $s_i^* \in \breve{s}_i\left(s_{-i}^*\right)$.

1.1.6. Рівновага Неша і домінування

Очевидно, що рівновага у домінуючих стратегіях обов'язково є рівновагою Неша (але не навпаки):

Лема 1.2. Нехай $s^* \in S$ – рівновага у домінуючих стратегіях. Тоді s^* – рівновага Неша.

Дійсно, домінуюча стратегія повинна давати гравцю найкращий виграш незалежно від того, які стратегії вибирають інші гравці. Стратегія рівноваги Неша задовольняє більш слабкій умові: вона повинна бути оптимальною за умови, що інші гравці вибирають всої стратегії рівноваги.

Чи може у рівновазі Неша гратися домінована стратегія? Якщо це – сильно домінована стратегія, то ні.

Лема 1.3. Нехай s^* – рівновага Неша. Тоді s^* не містить сильно домінованих стратегій.

Гравець за визначенням не може у рівновазі грати стратегію, якщо їх існує альтернативна, яка завжди (при довільних стратегіях інших гравців) дає більший виграш. Однак, може бути так, що слабо домінована стратегія є рівновагою. Розглянемо гру:

	b_1	b_2
a_1	1, 1	0, 0
a_2	1, 1	2, 1

В цій грі дві рівноваги: (a_1, b_1) і (a_2, b_2). У першому випадку перший гравець грає слабо доміновану стратегію a_1.

Рівновага Неша і множина S^∞ зв'язані. По-перше, при послідовному виключенню сильно домінованих стратегій ми не виключимо рівноважну стратегію:

Лема 1.4. Нехай у грі $G = \langle I, S, u \rangle$ профіль стратегій $s^* \in S$ – рівновага Неша. Тоді $s^* \in S^\infty$.

Доведення:

Доведемо від супротивного. Нехай s^* – рівновага Неша, яка не належить множині S^∞. Припустимо, що рівновага s^* виключається на кроці *N*. Нехай s_i^* –

довільна стратегія, яка виключається на цьому кроці. Тоді існує $s_i' \in S_i^N$, така, що для всіх $s_{-i} \in S_{-i}^N$, маємо

$$u_i\left(s_i', s_{-i}\right) > u_i\left(s_i^*, s_{-i}\right).$$

Але це суперечить умові, що s^* —рівновага Неша, т.т. $u_i\left(s_i^*, s_{-i}^*\right) \geq u_i\left(s_i, s_{-i}^*\right)$ для всіх $s_i \in S_i$, оскільки за побудовою s_i^* виключається із стратегій гравців, що входять у рівновагу, тобто $s_{-i}^* \in S_{-i}^N$.■

<u>Лема 1.5.</u> Нехай гра $G = \langle I, S, u \rangle$ - зі скінченною множиною профілів стратегій *S*. Нехай s^∞ —розв'язок цієї гри за домінуванням. Тоді s^∞ —єдина рівновага Неша.

<u>Доведення:</u>

Доведемо для випадку скінченної гри. Нехай $S^\infty = \{s'\}$ —не рівновага Неша. Тоді існують $i \in I, \quad s_i \in S_i$, такі, що

$$u_i\left(s_i, s_{-i}'\right) > u_i\left(s_i', s_{-i}'\right), \tag{1.9}$$

причому існує *n* таке, що якась $s_i'' \in S_i^n$ сильно домінує s_i у грі G^n, тобто для всіх $s_{-i}'' \in S_{-i}^n$ маємо

$$u_i\left(s_i'', s_{-i}\right) > u_i\left(s_i, s_{-i}\right). \tag{1.10}$$

Оскільки $s_{-i}' \in S_{-i}^n$ для всіх *n,* одержимо

$$u_i\left(s_i'', s_{-i}'\right) > u_i\left(s_i, s_{-i}'\right). \tag{1.11}$$

Розглянемо 2 випадки:

1. $s_i'' = s_i'$. Тоді (1.9) суперечить (1.11).

2. $s_i'' \neq s_i'$. Тоді існує $m > n$ і $s_i''' \in S_i^m$, яка сильно домінує s_i'' у грі G^m.

Замінимо s_i'' на s_i''' у нерівностях (1.10) і (1.11). Якщо $s_i''' = s_i'$, то лему доведено. Якщо $s_i''' \neq s_i'$, то повторимо крок (2).

Оскільки множини S_i скінченні, то таким чином ми в кінці кінців прийдемо до протиріччя. ■

З даних лем ми бачимо, що множина рівноваг Неша і множина S^{∞} є концепціями розв'язку – тобто способами виділити із множини стратегій S деякі підмножини (бажано, складені із невеликої кількості елементів), які будуть прогнозами дій для гравців. Показано, що ці дві концепції взаємозв'язані: стратегія, яка є рівновагою за Нешем, не може бути видалена як сильно домінуюча, в той же час єдиність розв'язку за домінуванням гарантує існування (і єдиність) рівноваги Неша.

<u>*Зауваження.*</u> Рівновага у слабо домінуючих стратегіях не завжди буде єдиною рівновагою Неша. Наприклад, у грі

	b_1	b_2
a_1	$^{\bullet}0, 0^{*}$	$^{\bullet}2, 0^{*}$
a_2	$^{\bullet}0, 2^{*}$	1, 1

Стратегія a_1 слабо доміную стратегію a_2. Стратегія b_1 слабо домінує стратегію b_2. Але рівноваг Неша у даній грі буде три: (a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_2, b_1).

<u>*Зауваження.*</u> Не в кожній грі у нормальній формі є рівновага Неша (у чистих стратегіях). Наприклад, розглянемо гру «Орлянка».

«Орлянка»

Двоє гравців одночасно підкидають монети. Нехай платіжна матриця має вигляд:

	Цифра	Герб
Цифра	$^{\bullet}1, -1$	$-1, 1^{*}$
Герб	$-1, 1^{*}$	$^{\bullet}1, -1$

Відмітимо крапками оптимальну відповідь першого гравця на кожну зі стратегій другого, а зірочками – оптимальну відповідь другого гравця на кожну стратегію першого. Немає жодної клітин, в якій би оптимальна відповідь одного гравця співпала би з даною стратегією іншого. У цій грі немає жодної рівноваги Неша.

<u>**Сценарії знаходження рівноваги Неша**</u>

Розглянемо питання про те, як гравці можуть приходити до рівноваги Неша. Тут не вдається дати розумне роз'яснення, залишаючись на некооперативній точці зору. Можуть бути такі сценарії.

Перший сценарій. Гра розігрується багаторазово, і з попереднього досвіду гравці почитають представляти, як будуть грати інші гравці. Тоді вони вибирають найкращі відповіді і в кінці кінців попадають (?) у ситуацію рівноваги, в якому і залишаються. Однак, формально, ми попадаємо в нову гру з іграми, що повторюються, які розглянемо окремо.

Другий сценарій. Гравці «фіктивно» розігрують гру, їм дозволяється в певному порядку змінювати свої стратегії. Коли положення стабілізувалось, тобто гравці попали в положення рівноваги, гра розігрується реально. Одержане положення рівноваги – рівновага Неша.

Третій сценарій. Кожен гравець сам аналізує гру і знаходить ситуацію рівноваги. Цей сценарій був би ідеальним, якщо рівновага єдина. Але якщо буде декілька нерівноцінних рівноваг, то постає питання вибору. Наприклад, у грі

	b_1	b_2
a_1	3, 3	0, 1
a_2	1, 0	2, 2

є дві рівноваги: (a_1, b_1) і (a_2, b_2). Яке з них вибрати першому гравцю? Здавалося б, перша рівновага (a_1, b_1) краща для обох гравців, і природно було б зупинитися на ньому. Але перший гравець (як і другий) може міркувати так: припустимо, я виберу a_1 в надії на те, що другий вибере b_1. А раптом другий видере b_2? Тоді я (перший) одержу тільки 0. Якщо ж я виберу a_2, то гарантовано одержу 1. Так же не факт, що буде вибрана перша рівновага.

Але навіть якщо рівновага і єдина, знову не факт, що гравці виберуть її. Розглянемо гру:

	b_1	b_2	b_3
a_1	3, 5	4, 8	3, -1000
a_2	5, -1000	6, 8	3, 10

У ній єдине положення рівноваги (a_2, b_3). Але щоб зважитись на b_3, другий гравець повинен бути сильно впевненим, що перший зіграє свою стратегію a_2. Більш «надійною» для другого гравця здається стратегія b_2, що гарантує виграш 8.

Четвертий сценарій. Гравці перед грою затівають переговори і приходять до деякої (необов'язкової) угоди. Якщо ця угода є рівновагою, то є підґрунтя сподіватися, що всі гравці будуть дотримуватись цієї угоди. Але тут треба формалізувати процес переговорів і заключення угоди, це вже нова гра (ігри з повідомленнями).

П'ятий сценарій. Він схожий на четвертий, гравці звертаються до посередника (або аналітика), який аналізує гру і пропонує всім дотримуватись деякого профіля стратегій (який він повідомляє всім гравцям). В принципі кожен гравець може відмовитись і вибрати інше стратегію. Але якщо посередник пропонує рівновагу Неша, то всім вигідніше дотримуватись її. Проте тут ускладнюється ситуація, які рівноваги запропонувати, якщо їх декілька; або чи повідомив посередник інших гравців про рівновагу, яку він запропонував?

1.1.7. Приклади

Лобова атака

У грі з декількома рівновагами вибір стратегій може бути обумовлений історією поведінки гравців у подібних взаємодіях – один з одним або з іншими гравцями.

Два автомобіля їдуть назустріч один одному. Кожен водій вирішує, повернути йому, чи ні. Якщо один водій повернув (П), а другий – ні (Н), то водій, що звернув, вважається боягузом, а той, що не звернув, - крутим. Якщо обидва звернуть, то кожен залишається «при своїх». Якщо жоден не зверне, то вони обоє загинуть. Нехай вподобання водіїв виражається такою матрицею:

	П	Н
П	0, 0	-5, 10
Н	10, -5	-10, -10

У цій грі є дві рівноваги: (П,Н) і (Н,П).

Яка з цих рівноваг буде реалізована? Можливо, відповідь залежить від репутації водіїв. Якщо про першого водія відомо, що в попередніх ігрових взаємодіях він ніколи не звертав, а другий гравець не має такої репутації, то слід очікувати, що другий гравець поверне, а перший – ні. В таких іграх з несиметричними рівновагами репутація буде самопідтримуватись від однієї гри до іншої.

<u>Гра «Інспекція»</u>

На залізничній платформі у поїзд заходять двоє: безбілетник і контролер. Якщо вони заходять в один той самий вагон, то контролер ловить безбілетника і штрафує його на 100 грн. Якщо обидва сядуть в різні вагони, то безбілетник виходить на наступній зупинці і нічого не платить. За штрафування контролер отримує премію 50 грн. Тоді матриця виграшу має вигляд:

	Контролер		
Безбілетник		1 вагон	2 вагон
	1 вагон	-100, 50	0, 0
	2 вагон	0, 0	-100, 50

Ця гра не має рівноваги Неша. Якщо безбілетник сяде в 1 вагон, то контролер максимізує свій виграш, якщо сяде в 1 вагон. Якщо ж безбілетник знає, що контролер сяде в 1 вагон, то він сяде в 2 вагон.

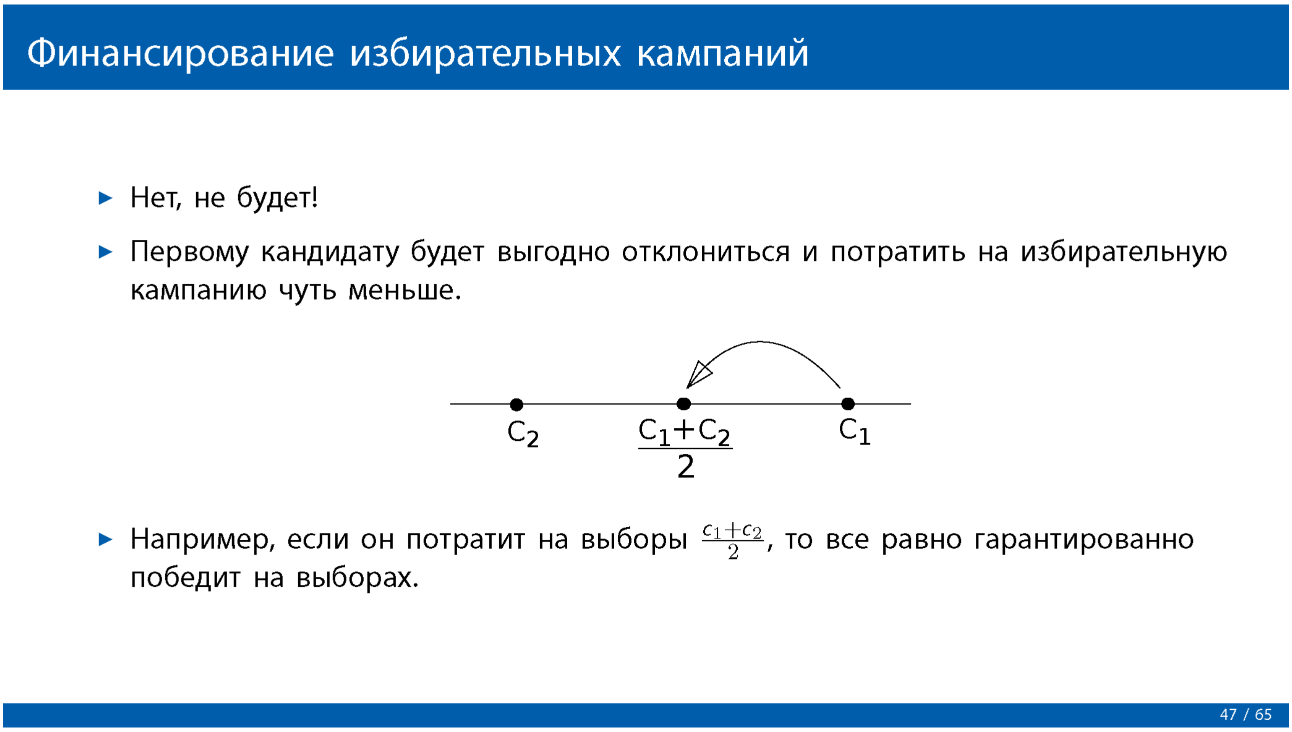
<u>Вибори мера</u>

Нехай на виборах мера певного міста змагаються два кандидати. Результат виборів буде залежати від того, який об’єм фінансування кожний з кандидатів залучить до своєї виборчої компанії.

На виборах переможе той кандидат, який залучить найбільший об’єм фінансування. У випадку, якщо кандидати залучать однакові об’єми фінансування, вони перемагають з рівними ймовірностями.

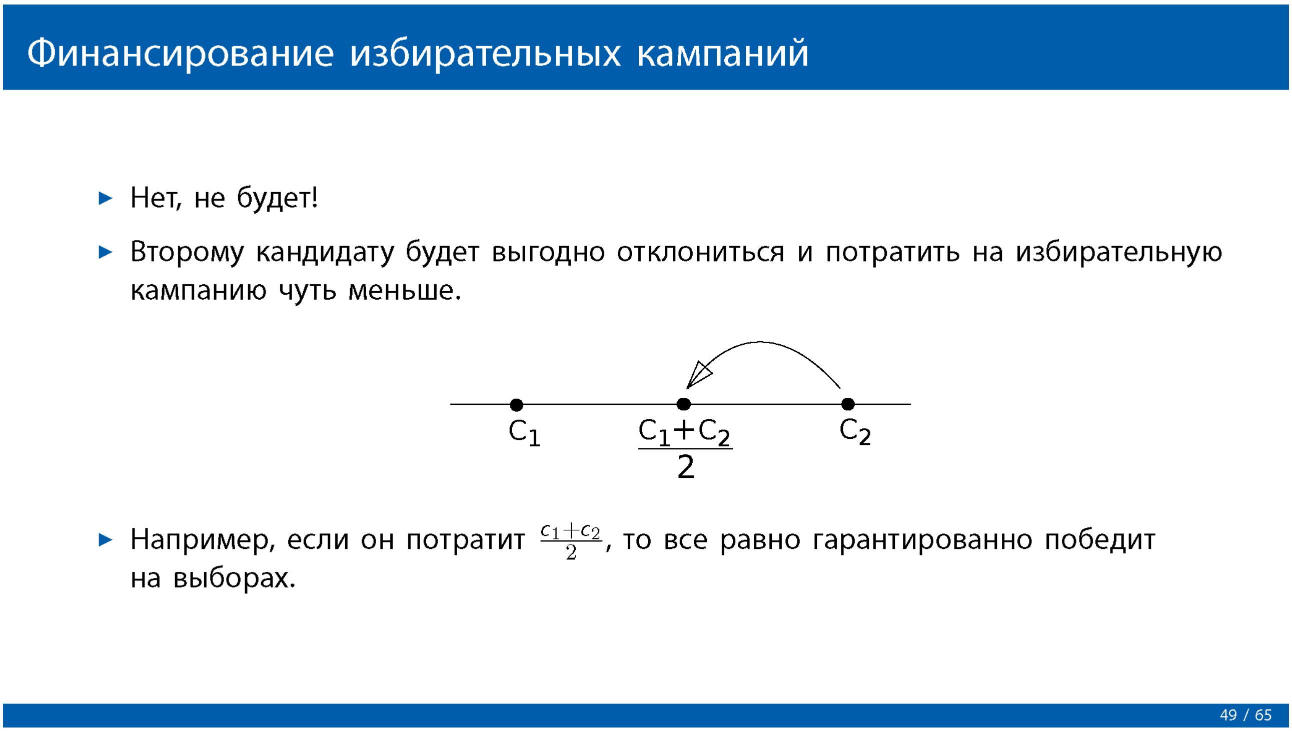
Стратегії кандидатів: кожен кандидат вибирає ту кількість грошей, яку він хоче залучити до своєї виборчої компанії. Позначимо c_1 кількість грошей, яку залучить перший кандидат, а за c_2 –другий кандидат. Кожному кандидату хочеться гарантовано перемогти на виборах. Трохи гірший варіант – перемогти з ймовірністю $1/2$. Однак, кожному кандидату хотілося б витратити як можна менше грошей.

Що буде, якщо c_1 виявиться більше за c_2? Тоді на виборах переможе перший кандидат. Але чи буде така ситуація рівновагою Неша? Ні, тому що першому кандидату буде вигідно відхилитися і витратити на виборчу компанію трохи менше грошей:



Наприклад, якщо він витратить на вибори $\dfrac{c_1+c_2}{2}$, то все рівно він переможе на виборах.

Що буде, якщо c_2 виявиться більше за c_1? Тоді на виборах переможе другий кандидат. Але чи буде така ситуація рівновагою Неша? Ні, тому що другому кандидату буде вигідно відхилитися і витратити на виборчу компанію трохи менше грошей:



Наприклад, якщо він витратить на вибори $\frac{c_1+c_2}{2}$, то все рівно він переможе на виборах.

Що буде, якщо c_2 виявиться рівним c_1? Тоді на виборах кандидати перемагають з рівними ймовірностями. Але чи буде така ситуація рівновагою Неша? Також ні, тому що обом кандидатам буде вигідно відхилитися і витратити на свою виборчу компанію трохи більше грошей і перемогти.

У цій грі немає рівноваги Неша.

Гра «У сумі 100»

Грають двоє: кожний незалежно один від одного пише на папері деяке невід'ємне число.

Якщо сума двох цих чисел виявиться меншою або рівною 100, то кожен одержить те число, що написав.

Якщо ж сума чисел виявиться більшою за 100, то обидва гравця нічого не одержать.

Знайдемо рівновагу Неша.

Нехай перший гравець написав деяке число x, а другий – деяке число y. У цій грі рівновагами Неша будуть всі такі пари (x, y), що $x + y = 100$. Наприклад, (x=50, y=50) *або* (x=5, y=95). Нікому з гравців не вигідно написати менше число, оскільки тоді він одержить менший виграш. Нікому не вигідно також написати більше число, оскільки тоді сума двох чисел буде більша за 100, і обидва гравця нічого не одержать.

Результат, в якому $x + y < 100$, не буде рівновагою, оскільки тоді кожному гравцю буде вигідно відхилитися и трохи збільшити своє число. Наприклад, якщо (x=45, y=50), то перший гравець може збільшити свій виграш.

Результат, в якому $x > 100$, $y < 100$, або $x < 100$, $y > 100$, також не буде рівновагою. Гравцю, який написав число більше за 100, буде вигідно відхилитися і написати таке число, щоб сума двох чисел стала не більша 100, тоді він зможе одержати виграш. Наприклад, якщо (x=90, y=120), то другому гравцю вигідно відхилитися і написати 10 замість 120, тоді він збільшить свій виграш з 0 до 10.

Рівновагами Неша у даній грі також будуть всі такі пари (x, y), що $x \geq 100, \quad y \geq 100$. Наприклад, якщо ($x$=105, y=110), тоді обидва гравця одержать платіж 0, и ніхто не може (не хоче) змінити свою стратегію так, щоб одержати більший виграш, оскільки при фіксованій стратегії іншого гравця сума двох чисел все рівно буде більшою за 100.

Може здаватися нелогічним зі сторони когось з гравців писати число, більше за 100, оскільки тоді гарантований виграш 0. Однак всі результати, у яких $x \geq 100, \quad y \geq 100$, повністю відповідають концепції рівноваги Неша.

<u>«Камінь-ножиці-папір»</u>

Повернемося до цієї гри:

	Гравець 2			
Гравець 1		камінь	ножиці	папір
	камінь	0, 0	1, -1	-1, 1
	ножиці	-1, 1	0, 0	1, -1
	папір	1, -1	-1, 1	0, 0

Рівноваги Неша у цій грі, очевидно, немає.

<u>Гра Штакельберга</u>

Нехай матрична гра двох фірм A і B зображена наступним чином:

	B		
A		Зберігати об'єм	Зменшити об'єм
	Виходити на ринок	-3, -2	4, 4
	Не виходити на ринок	0, 10	0, 10

У фірми A нема домінуючих стратегій; у фірми B є домінуюча стратегія «Зменшити об'єм», яка слабо домінує стратегію «Зберігати об'єм». Тому рівноваги у домінуючих стратегіях у цій грі немає.

Виключенням слабо домінованої стратегії «Зберігати об’єм» одержуємо підгру:

		B
		Зменшити об’єм
A	Виходити на ринок	4, 4
	Не виходити на ринок	0, 10

У даній підгрі стратегія компанії А «Виходити на ринок» сильно домінує стратегію «Не виходити на ринок», тому виключаємо доміновану стратегію і одержимо результат гри:

		B
		Зменшити об’єм
A	Виходити на ринок	4, 4

Тобто оптимальний профіль стратегій, одержаний шляхом викреслювання домінованих стратегій, буде («Виходити на ринок», «Зменшити об’єм»).

Нескладно переконатись, що у даній грі є дві рівноваги Неша: профілі («Не виходити на ринок», «Зберігати об’єм») і («Виходити на ринок», «Зменшити об’єм»).

Нагадаємо, у рівновазі Неша жоден з гравців не зацікавлений у відхиленні від своєї стратегії в цих ситуаціях (профілях).

Також нагадаємо, що профіль гри називається Парето-оптимальним, якщо більше не існує жодного можливого профілю, при якому один із гравців знаходився б в кращих умовах, а інший – в найгірших. Якщо профіль не Парето-оптимальний, то це означає, що гравець може отримати перевагу, не причинивши нікому шкоди. У дилемі в’язня, наприклад, рівновага Неша не Парето-ефективна, оскільки кожен гравець одержав би більший виграш, якщо обидва б змовчали.

Оптимальність за Парето у даній грі визначається перебором усіх чотирьох профілів і перевіркою, чи забезпечує перехід до будь-якої іншої ситуації (профілю) збільшення платежу одночасно для обох гравців. Парето-оптимальність забезпечується тут профілем («Виходити на ринок», «Зменшити об’єм»).

Який же профіль стратегії вибрати, якщо рівноваг декілька? Вихід запропонував Т. Шеллінг, який назвав це ефектом фокальної точки (1960 р.). Виявляється, що із множини рівноваг гравці можуть вибрати одну, виходячи із деяких загальних соціокультурних норм і представлення. Цей «спонтанно» вибраний варіант і називається фокальною точкою.

А яку стратегію вибере Ви у даній грі?

1.2. Змішанні стратегії та існування рівноваги

У грі «Камінь-ножиці-папір» на кожну чисту стратегію існує своя «оборотка». Якщо я буду знати, що другий гравець вибере «ножиці», то я маю зіграти «камінь». Знаючи це, він зіграє «папір», на що я повинен відповісти, вибравши «ножиці». Що робити гравцям? Чи можемо ми якось прогнозувати дії інших? Для аналізу таких ігор необхідно розширити означення гри, дозволивши *змішані стратегії*.

1.2.1. Поняття змішаних стратегій

Припустимо, що у кожного гравця є генератор випадкових чисел, який говорить йому, яку із стратегій треба грати. Наприклад, при наявності двох стратегій гравець може підкидати монетку, в цьому випадку, ймовірність того, що він зіграє кожну стратегію, дорівнює $1/2$. Іншим гравцям відома ця ймовірність, але спостерігати, як впала монетка, вони не можуть. У цьому випадку ми кажемо, що гравець *і* використовує ***змішану стратегію***. Гравець вирішує, з якою ймовірністю він повинен зіграти кожну зі своїх стратегій з множини S_i, які називаються ***чистими стратегіями***. Чиста стратегія – це частинний випадок змішаної стратегії, в якому один із елементів S_i вибирається з ймовірністю 1. Наприклад, у грі «Камінь-ножиці-папір» всього три чисті стратегії. Якщо p_1 –ймовірність, з якою вибирається «камінь», а p_2, p_3 – ймовірності для «ножиць» і «паперу» відповідно, то ми маємо $p_i \geq 0, \quad i=1,2,3,$ та $p_1+p_2+p_3=1$. Формально, множина всіх (p_1, p_2, p_3), які задовольняють ці властивості, називається ***двовимірним симплексом***.

<u>Означення 1.9.</u> Нехай *N* – натуральне число. Тоді симплекс розмірності *N*-1 є множина $\Delta^{N-1} \subset R^N$, яка складається із всіх $(p_1, \ldots, p_N) \in \Delta^{N-1}$, таких, що $\sum_j p_j = 1,\ p_j \geq 0.$

Отже, (*N*-1)-мірний симплекс описує всі можливі розподіли ймовірностей на множині з *N* елементів. Одновимірний симплекс – це відрізок $[0,1]$. Якщо $x \in [0,1]$, то перший елемент множини вибирається з ймовірністю *x*, другий елемент – з ймовірністю 1- *x*.

<u>Означення 1.10.</u> Нехай $G = \langle I, S, u \rangle$ - скінченна гра. Множина $\Delta^{|S_i|-1}$ називається ***множиною змішаних стратегій гравця*** *i*, $\prod_{i=1}^{N} \Delta^{|S_i|-1}$ – ***множиною профілів змішаних стратегій***.

Елементи $\sigma_i \in \Delta^{|S_i|-1}$, $\sigma_{-i} \in \prod_{j \neq i} \Delta^{|S_i|-1}$, $\sigma \in \prod_{i=1}^{N} \Delta^{|S_i|-1}$ називаються ***змішаними стратегіями*** і ***профілями змішаних стратегій***.

Іншими словами, змішані стратегії – це розподіл ймовірностей на множині чистих стратегій. Передбачається, що гравець має можливість випадковим чином вибирати чисті стратегії, але при цьому він контролює ймовірності, з якими реалізуються ці чисті стратегії. Іншими словами, змішана стратегія представляє собою арифметичний вектор (свого роду рандомізація гравцем свого вибору) – набір ймовірностей, з якими вибираються чисті стратегії гравця. Профіль, який складається зі змішаних стратегій, - рівновага у змішаних стратегіях.

Вважаємо, що дії будь-яких двох гравців є незалежними подіями. Нехай $s = (s_1, \ldots, s_N)$ –профіль чистих стратегій, σ – профіль змішаних стратегій, в якому гравець *i* грає чисту стратегію s_i з ймовірністю $\sigma_i(s_i)$. Тоді ймовірність того, що при профілі змішаних стратегій σ буде зіграно профіль чистих стратегій *s*, буде

$$\sigma(s) = \prod_{i=1}^{N} \sigma_i(s_i), \qquad (1.12)$$

а математичне сподівання виграшу гравця *i* –

$$u_i(\sigma) = u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) = \sum_{s \in S} \sigma(s) u_i(s). \qquad (1.13)$$

Тепер можемо визначити гру, в якій гравці можуть користуватися змішаними стратегіями.

<u>Означення 1.11.</u> Нехай $G = \langle I, S, u \rangle$ - скінченна гра у нормальній формі. Гра $\left\langle I, \prod_{i=1}^{N} \Delta^{|S_i|-1}, u \right\rangle$ називається ***змішаним розширенням гри*** *G*. Тоді рівновага у змішаних стратегіях у грі *G* – це рівновага Неша у її змішаному розширенні (і функція $u : \prod_{i=1}^{N} \Delta^{|S_i|-1} \to R$ є продовженням функції $u : S \to R$).

В означенні *u* визначає функцію виграшу у грі як із чистими, так і зі змішаними стратегіями.

Приклад.

Уявимо, що вам запропонували зіграти в лотерею. У цій лотереї з ймовірністю 1/2 Ви виграєте 5 грн., з ймовірністю 1/2 - 5 грн. програєте. Чи захочете ви зіграти в таку лотерею? Скільки в середньому ви будете в цій лотереї вигравати?

У загальному випадку, щоб розрахувати очікуваний виграш гравця в лотереї, потрібно кожен з виграшів помножити на ймовірність, з якої цей виграш реалізується, а потім скласти отримані вирази. Іншими словами, в половині випадків в нашій лотереї ви будете вигравати 5 грн., в половині випадків - програвати 5 грн. Тому очікуваний виграш буде дорівнює 0.

Розглянемо іншу лотерею. У цій лотереї ви отримаєте

10 грн. з ймовірністю 1/2,

30 грн. з ймовірністю 1/3

і 1200 грн. з ймовірністю 1/6.

Чому буде ваш очікуваний виграш дорівнює в цій лотереї? Зробимо точно так же, як і в минулий раз. Складемо очікувані платежі, перемножені на ймовірність реалізації цього платежу.

У половині випадків ви будете отримувати 10, в третині випадків - 30, в 1/6 частки випадків - 1200, тому в сумі очікуваний виграш дорівнює

$$1/2 \cdot 10 + 1/3 \cdot 30 + 1/6 \cdot 1200 = 215 \text{ грн.}$$

Це величина, яку ви можете очікувати отримати в результаті гри в цю лотерею. Виграші в лотереях - це приклад дискретної випадкової величини.

Розглянемо ще одну лотерею. Припустимо, що вам запропонували зіграти в таку лотерею, в якій з ймовірністю 1/2 ви виграєте 2 грн., а з імовірністю 1/2 - програєте 1 грн. Чи варто вам брати участь в цій лотереї, захочете ви в неї зіграти?

Порахуємо математичне сподівання. В середньому ви можете розраховувати на виграш в розмірі 1/2, оскільки в половині випадків ви будете вигравати 2 грн., в половині випадків - програвати 1 грн., значить, математичне сподівання виграшу в цій лотереї дорівнює

$$1/2 \cdot 2 + 1/2 \cdot (-1) = 1/2.$$

Чи випливає з того, що математичне сподівання більше 0, що вам буде вигідно зіграти в цю лотерею? Не факт. Давайте розглянемо такий приклад.

Якщо людині запропонувати 2 опції:

1. гарантовано отримати 1 мільярд грн.

2. з ймовірністю 1/2 отримати 2 мільярди 100 мільйонів грн.,

а з імовірністю 1/2 - не одержати нічого,

то, з одного боку, математичне сподівання лотереї під номером 2 буде вище, ніж математичне сподівання лотереї під номером 1. Але з іншого боку, в реальності слід очікувати, що більшість людей вважатимуть за краще гарантовано отримати 1 мільярд. Це пояснюється ефектом несприйняття ризику. Для багатьох людей гарантовано отримати певний виграш краще, ніж ризикувати заради трохи більшого очікуваного виграшу. Тому математичне сподівання може бути використано як одна з можливих заходів, на яку люди орієнтується при прийнятті своїх рішень. Однак, взагалі кажучи, реальну поведінку людей в тих чи інших ситуаціях в умовах невизначеності може визначатися не тільки математичним сподіванням випадкової величини.

Проте в житті зустрічаються в тому числі і ситуації, де агенти нейтральні до ризику. Наприклад, банки, які здійснюють велика кількість угод, ризику від однієї конкретної угоди, як правило, не бояться, тому що вони знають, що ці ризики будуть врівноважені ризиками від інших укладених угод.

Люди в цілому готові ризикувати, як правило, коли мова йде про невеликі суми грошей. Вони будуть ризикувати більше охоче, ніж в разі, коли їм запропонують зіграти в лотерею з великими виграшами. Для того щоб аналізувати поведінку людей в ситуаціях, коли вони стикаються з вибором в умовах невизначеності, ми будемо робити припущення про те, що всі гравці нейтральні до ризику. Тобто вони будуть еквівалентні між тим, щоб отримати гарантовано деяку суму, і між тим, щоб зіграти в лотерею з математичним сподіванням, рівним цій сумі.

Отже, усюди в цій лекції і далі ми будемо вважати, що гравці максимізують математичне сподівання свого виграшу.

1.2.2. Рівновага у змішаних стратегіях

Теорема 1.1. (Неш, 1950). Нехай *G* – скінченна гра. Тоді у грі *G* існує рівновага у змішаних стратегіях.

Ця теорема - один з найбільш важливих результатів у сучасній науці про суспільство. Фактично вона означає, що рівновага Неша є універсальним інструментом, який можна використовувати для аналізу будь-якої ігрової взаємодії зі скінченним числом гравців і стратегій.

Середні виграші, що очікуються

Ймовірні виграші гравців у грі відображають їх вподобання відносно результатів гри, тобто більші виграші відповідають більш переважним результатам. В цьому сенсі виграші грають роль «порядкової» функції корисності, тобто має значення тільки порядок переваг. Це означає, що, наприклад, виграші 0.8 і 10 можуть бути замінені (з тим же успіхом за порядком переваг) на числа 0.2 і 10.

Якщо результат гри є випадковим, виграші представляють також і «кількісну» корисність. Це означає, що відношення «розмірів» виграшів тепер має значення. Причина тут в тому, що середні очікувані виграші представляють переваги гравців відносно випадкових результатів. Нехай, наприклад, гравець вибирає між «ризикованою» стратегією, яка передбачає результат гри з однаковими ймовірностями (т.т. ½) виграшів 0 або 10 і стратегією, яка гарантує йому «середній за величиною» виграш. У цьому випадку виграші 0.8 і 10 вже не будуть представляти ті ж вподобання гравця, що і виграші 0.2 та 10. Оскільки середній очікуваний виграш від «ризикованої» стратегії рівний 5, що більше 2, але менше 8, то для гравця має значення, чому саме рівний «середній за величиною» виграш – двом чи восьми. Від цього буде залежати вибір гравця.

У якості приклада розглянемо гру для одного гравця, у якій він вирішує, чи підкоритися йому якомусь правилу (скажімо, оплатити паркову), чи порушити його (рис.1).

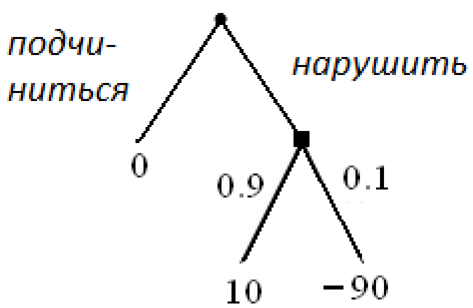


Рис.1.

Якщо гравець вирішує підкоритися, його виграш дорівнює 0. При порушенні правила гравець у 10% випадків ризикую бути пійманим, що приведе до сплати штрафу. У дереві гри штраф відповідає від’ємному виграшу (-90). Відповідно, у 90% випадках гравець, який порушив правило, залишається без наказаним і одержує виграш 10.

Зі вказаними виграшами порушення правила дає середній очікуваний виграш, рівний 0:

$$0.9 \cdot 10 + 0.1 \cdot (-90) = 0,$$

так що жоден з двох варіантів дій не буде більш привабливим для гравця. З точки зору виграшу, гравцю байдуже, який варіант вибрати.

На практиці, гравці, що приймають рішення, як правило негативно ставляться до ризику. Вони віддають перевагу гарантованому виграшу 0 одиниць випадковому розіграшу з середнім очікуваним виграшем, рівним 0.

В теоретико-ігрових моделях з випадковими виграшами, як подібні до даної гри, виграш не обов'язково розглядати як грошову одиницю. Скоріше треба вважати, що відношення гравця до ризику враховується у величині виграшу. У прикладі, коли гравець приймає рішення порушити правило, чи ні, він одержує «покарання» або «нагороду».

Припустимо, що рішення гравця залежить тільки від ймовірності бути спійманим (в нашому прикладі вона рівна 0.1), так що, якщо ця ймовірність буде дорівнювати 0, гравець надасть перевагу порушити правило. Тоді для гравця повинно існувати значення ймовірності бути спійманим, при якому обидва його рішення стають для нього однаково бажані. Припустимо, що для гравця ця ймовірність складає 4%. Тепер ми можемо встановити розмір штрафу (-*u*), який треба накласти спійманому гравцю, щоб забезпечити *однаковий* середній очікуваний виграш стратегіям «підкоритися» і «порушити». Розв'яжемо відповідне рівняння:

$$0.96 \cdot 10 + 0.04 \cdot (-u) = 0,$$

І знайдемо розмір штрафу $u = 9.6/0.04 = 240$. Отже, у нашій грі виграш (-90) требі замінити на (-24)Ю щоб врахувати відношення даного гравця до ризику бути пійманим. При розмірі штрафу 240 одиниць гравець надасть перевагу (з точки зору середнього очікуваного виграшу) підкоритися правилу, якщо ймовірність бути спійманим дорівнює 0.1.

Зміст цих міркувань у тому, щоб показати, що існують і можуть бути сконструйовані виграші, які відображають переваги гравця відносно ризикованих результатів гри; у якості міри переваги грають середні очікувані виграші.

<u>Гра «Інспекція»</u>

Нехай один з гравців, якого будемо називати «П», повинен виконати якусь законну вимогу (наприклад, оплатити проїзд, або заплатити податки). У «П» є спокуса порушити правило. Другий гравець, «І» (інспектор) хотів би бути впевненим, що «П» підкориться правилу, але для цього треба зробити перевірку (інспекцію), що коштує грошей.

Якщо «І» зробить перевірку і спіймає «П» за порушення правила, то «П» повинен виплатити штраф.

На рис. 2 представлені можливі виграші гри.

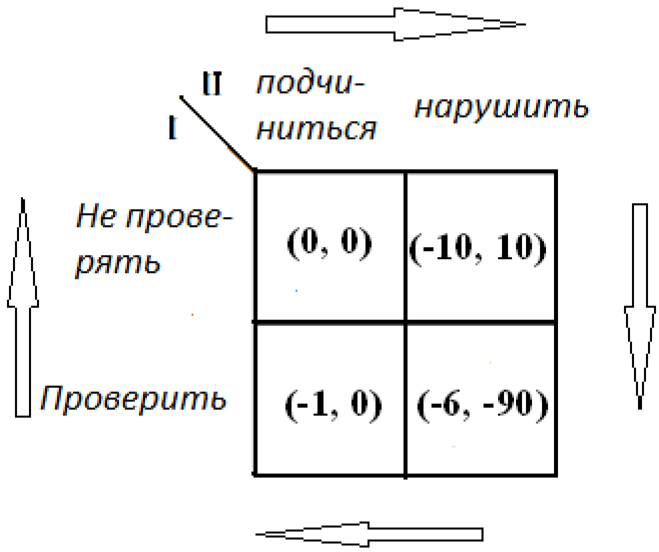


Рис.2.

Результат з парою виграшів (0, 0) відповідає стратегічному профілю, в якому «І» (гравець 1) вибирає стратегію «Не перевіряти», а «П» (гравець 2) – стратегію «Підкоритися» (правилам). Але за відсутності перевірки «П» віддає перевагу стратегії «Порушити», яка дає йому виграш 10 (це найкраща відповідь гравця 2). Гравець «І» одержить при цьому від'ємний виграш (-10), оскільки його робота не виконана. «І» також може вибрати стратегію «Перевіряти». Якщо при цьому «П» підкорився правилу, то перевірка не змінює його виграш, який рівний 0, у той же час «І» одержує від'ємний виграш (-1) (витрати на перевірку). Якщо «П» порушив правила, то при перевірці йому прийдеться заплатити штраф (-90), а «І» виявиться залучений в сутичку (-6).

В будь-якому випадку гравець 1 надав би перевагу, щоб гравець 2 підкорився правилам, але це не є його сфері контролю.

Ця гра не має рівноваги у чистих стратегіях. Якщо який-небудь з гравців робить детермінований вибір (скажімо, гравець 1вирішує «не перевіряти»), то найкраща відповідь іншого гравця буде єдина (в нашому випадку - це стратегія порушити), але вихідний вибір гравця 1 не є найкращою відповіддю на це рішення гравця 2 (гравець 1 воліє влаштувати перевірку, якщо інший гравець порушує правила, а у відповідь на перевірку гравець 2, в свою чергу, вважає за краще підкоритися і т.д.).

Стрілки на рис. 2 показують, як гравці 10 переключаються зі стратегії на стратегію, в пошуках найкращого відповіді на рішення опонента. Стратегії в рівновазі Неша повинні бути найкращими відповідями один на друга, так що в цій грі немає жодного відповідного профілю в чистих стратегіях.

Так що ж робити гравцям в грі з рис. 2? Одна можливість для них - приготуватися до гіршого, що означає вибрати максимінні стратегії. Максимінна стратегія максимізує виграш гравця в найгіршому випадку (тобто при найгіршому для гравця вирішенні опонента). Максимінною (чистою) стратегією гравця I є «Перевірити» (при використанні якої «I» гарантує собі виграш не менше (-6), а для гравця 2 максимінною є стратегія «підкорятися» (що гарантує йому виграш не менше 0).

Однак стратегічний профіль (Перевірити, підкоритися) не є рівновагою Неша і, отже, не є стійкою рекомендацією для гравців, оскільки гравець 1 може поліпшити свій виграш, змінивши свою стратегію, у відповідь на що його опонент теж може поліпшити свій виграш, змінивши стратегію і т.д.

Змішана стратегія гравця 1в цій грі полягає в тому, щоб влаштовувати перевірки випадковим чином з деякою певної ймовірністю. У практичному сенсі випадкові перевірки дозволяють так само скоротити витрати на інспекцію. Навіть якщо невідомо напевно, чи буде перевірка, досить висока ймовірність бути спійманим здатна (принаймні, до деякої міри) утримати «П» від спокуси порушити правила.

Нижче наступні міркування показують, як встановити ту ймовірність інспекції, яка веде до рівноваги в грі. Якщо ймовірність інспекції дуже мала, скажімо, один відсоток, то гравець 2 отримує (незалежно від цієї ймовірності) виграш 0, якщо вирішує підкоритися, і виграш

$$0.99 \cdot 10 + 0.01 \cdot (-90) = 9,$$

що перевищує нуль, якщо вирішує порушити правила. Отже, гравець 2 віддасть перевагу стратегії «порушити», в точності так само, як і при відсутності перевірки.

Якщо ймовірність інспекції набагато вища, наприклад 0.2, то середній очікуваний виграш при стратегії «порушити» складе

$$0.8 \cdot 10 + 0.2 \cdot (-90) = -10,$$

що менше нуля, так що гравець 2 віддасть перевагу підкоритися. Якщо ймовірність інспекції занадто мала або занадто велика, то гравець 2 має єдину найкращу відповідь (причому в чистих стратегіях) на змішану стратегію гравця 1. Як показано вище, чиста стратегія не може бути частиною рівноваги в цій грі.

Єдина ситуація, коли гравець 2 зможе випадковим чином чергувати обидві свої стратегії, виникне в тому випадку, якщо гравець 1 зуміє зробити так, що обидві стратегії гравця 2 даватимуть йому однаковий виграш, тоді він стане байдужий до вибору.

У грі «Інспекція» гравець 1 забезпечить байдужість до вибору гравцеві 2, якщо буде чергувати випадковим чином свої стратегії «Не перевіряти» і «Перевірити» з ймовірностями p_1 і p_2, такими, що середній очікуваний виграш для стратегії «Порушити» гравця 2 буде таким же, як для стратегії «Підкоритися» (тобто рівним нулю). Розв'яжемо відповідну систему рівнянь:

$$10 \cdot p_1 + (-90) \cdot p_2 = 0,$$
$$p_1 + p_2 = 1.$$

Отримаємо, що гравець 1 повинен влаштовувати перевірку з ймовірністю 0.1, оскільки в цьому випадку середній очікуваний виграш для стратегій «Порушити» і «Підкоритися» однаковий:

$$0.9 \cdot 10 + 0.1 \cdot (-90) = 0.$$

Якщо гравець 1 застосовує знайдену змішану стратегію («Не перевіряти» з ймовірністю 0.9 і «Перевірити» з ймовірністю 0.1), то гравець 2 байдужий до вибору між двома своїми стратегіями. Отже, він може їх змішувати (чергувати випадковим чином), не втрачаючи при цьому у виграші.

У свою чергу, змішана стратегія гравця 1 є найкращою відповіддю на дії опонента тільки в тому єдиному випадку, якщо гравець 1 байдужий до вибору між двома своїми стратегіями. Відповідно до виграшів на рис.2, гравець 2 забезпечить необхідну байдужість гравцеві 1, якщо буде вибирати свої стратегії «Підкоритися» і «Порушити» з ймовірностями q_1 і q_2, які задовольняють системі рівнянь:

$$0 \cdot q_1 + (-10) \cdot q_2 = (-1) \cdot q_1 + (-6) \cdot q_2,$$
$$q_1 + q_2 = 1.$$

Розв'язуючи цю систему, отримуємо, що гравцеві 2 слід вибирати «Підкоритися» з ймовірністю 0.8 і «Порушити» з ймовірністю 0.2. Середній очікуваний виграш гравця 1 для стратегії «Не перевіряти» складе

$$0.8 \cdot 0 + 0.2 \cdot (-10) = -2,$$

а для стратегії «Перевіряти»

$$0.8 \cdot (-1) + 0.2 \cdot (-6) = -2,$$

так що гравець 1 справді байдужий до вибору, і його знайдена вище змішана стратегія є найкращою відповіддю на змішану стратегію гравця 2.

Ми знайшли єдину рівновагу Неша в цій грі. У ній використовуються змішані стратегії, тому воно називається змішаною рівновагою. Результуючі очікувані виграші складають (-2) для гравця 1 і 0 для гравця 2.

Попередній аналіз показує, що гра «Інспекція» має змішану рівновагу, в якій гравці повинні вибирати свої чисті стратегії з певними ймовірностями. Ці ймовірності мають декількома властивості. По-перше, змішування стратегій здається парадоксом в тому випадку, коли гравець байдужий до вибору між своїми стратегіями, тобто в рівновазі. Якщо, наприклад, гравець II може з однаковим успіхом (однаковим виграшем) підкоритися або порушити правила, то навіщо йому взагалі покладатися на випадок? Він міг би просто підкоритися і отримати виграш 0 напевно, що простіше і безпечніше. Відповідь така: саме тому, що у гравця немає спокуси віддати перевагу якійсь стратегії, він може їх змішувати, і тільки тому, що гравець змішує стратегії, в грі може існувати рівновага.

Якби гравець 2 вибирав «Підкоритися» напевне, то єдиною оптимальною відповіддю на це гравця 1 була б стратегія «Не перевіряти», що зробило б стратегію «Підкоритися» неоптимальною (і так далі, і так далі ...), то і рівновага б не існувало.

Менш очевидний аспект змішаної рівноваги полягає в тому, що ймовірності, з якими гравець змішує свої стратегії, залежать від виграшів його опонента, а не від його власних виграшів. Наприклад, на перший погляд здається, що в грі «Інспекція» збільшення штрафу за те, щоб впіймати з (-90) до більш значної величини зменшить ймовірність стратегії «Порушити» в рівновазі. Фактично, це не так. Що зміниться насправді, так це ймовірність інспекції, яка зменшиться до такого рівня, при якому «П» знову стане байдужий до вибору між своїми стратегіями.

Гра «Орлянка»

Давайте розглянемо гру «Орлянку». Як завжди в неї грають двоє гравців: Вася і Петя. Кожен з гравців, незалежно один від одного, пише на папері одне з двох слів: або «Герб», або «Цифра». Потім вони порівнюють зроблений ними одночасно і незалежно один від одного вибір. Якщо на папері виявляються написані однакові слова, то перемагає Вася, а якщо різні, то Петя. Припустимо, що вони грають на 1 у.о. У кожного з гравців є дві чисті стратегії: або написати слово «Герб», або написати слово «Цифра».

Матриця платежів влаштована наступним чином:

	Петя		
Вася		Г	Ц
	Г	1, -1	-1, 1
	Ц	-1, 1	1, -1

Подивимося на окремі профілі в цій грі. Якщо хлопці написали різні слова, то тоді, за умовою, виграв Петя. Але тоді Васі вигідно відхилитися і написати таке ж слово, що і Петя. І перемогти. Якщо хлопці написали однакові слова, то тоді вже Петі було б вигідно відхилитися і написати слово, відмінне від Васиного. Значить, рівноваг Неша в чистих стратегіях в цій грі немає.

Однак припустимо, що тепер хлопці домовилися зіграти в цю гру 100 раз поспіль. Яку стратегію вибрати гравцеві в цій грі?

Якщо Вася весь час буде грати стратегію «Герб», то рано чи пізно Петя розгадає його план і знайде стратегію, яка буде обігравати цю стратегію. Значить, напевно, 100 раз поспіль писати «Герб» не є оптимальною стратегією Васі. Тому, щоб заплутати суперника, Вася ходить наступним чином: він дістав шестигранний кубик і перед кожною наступною грою підкидає його. Він вирішив, що якщо на кубику випаде число від 1 до 4, то він напише слово «Герб», а якщо на кубику випаде число 5 або число 6, то він напише «Цифра». Петя теж зрозумів, що якщо він весь час буде писати одне і те ж слово, то програє, оскільки Вася розгадає його план і знайде хороший відповідь проти такої стратегії. Тому Петя вирішив вчинити наступним чином. Він теж хоче заплутати Васю. Він дістав сто папірців, на п'ятдесяти з них написав слово «Герб», на інших п'ятдесяти написав слово «Цифра», і перед кожним раундом гри він витягує з цієї купи папірців одну єдину, дивиться, що на ній написано, і грає ту стратегію, яку наказує йому написане на цьому папірці слово. На які очікувані платежі можуть розраховувати в цій грі хлопці? З ймовірністю 1/2 Петя напише слово «Герб», з ймовірністю 1/2 - «Цифра». Вася в 4 випадках з 6 напише «Герб» і в 2 випадках з 6 - «Цифра».

Таким чином, гра може закінчитися в різних профілях, в різних результатах. Це означає, що виграш Васі і виграш Петі в цій грі є випадковою величиною. А значить, ми будемо орієнтуватися на прийняття рішень Васею і Петром про свої стратегії виходячи з припущення, що вони максимізують свій очікуваний платіж.

З якою ймовірністю буде зіграний кожен з профілів? Профіль (Герб, Герб) буде зіграний з ймовірністю 1/3, тому що з імовірністю 4/6 Вася напише «Герб», з ймовірністю 1/2 Петя напише «Герб». Вони приймають це рішення незалежно один від одного, тому ймовірність того, що вони обидва одночасно напишуть «Герб», - це добуток ймовірностей того, що кожен з них пише «Герб», а, відповідно, $4/6 \cdot 1/2 = 1/3$. Гра закінчиться в одному окремому раунді в профілі (Герб, Герб) з ймовірністю 1/3.

Точно так знайдемо ймовірності, з якими закінчиться гра в кожному з решти профілів.

У профілі (Герб, Цифра) гра закінчиться з ймовірністю $4/6 \cdot 1/2 = 1/3$. У профілі (Цифра, Герб) гра закінчиться з ймовірністю $2/6 \cdot 1/2 = 1/6$. Нарешті, в профілі (Цифра, Цифра) гра закінчиться з ймовірністю $2/6 \cdot 1/2 = 1/6$.

З якою ймовірністю хлопці напишуть однакові слова? Вони напишуть однакові слова в одному з двох випадків: або в профілі (Герб, Герб), або в профілі (Цифра, Цифра). Як ми тільки що підрахували, профіль (Герб, Герб) буде зіграний з ймовірністю 1/3, а профіль (Цифра, Цифра) - з ймовірністю 1/6. Значить, сумарна ймовірність того, що хлопці напишуть однакові слова, дорівнює 1/3 + 1/6, тобто 1/2.

Імовірність того, що вони напишуть різні слова, відповідно, дорівнює 1/6 + 1/3 - теж 1/2.

		Петя	
Вася		Г	Ц
	Г	$4/6 \cdot 1/2 = 1/3.$	$4/6 \cdot 1/2 = 1/3.$
	Ц	$2/6 \cdot 1/2 = 1/6.$	$2/6 \cdot 1/2 = 1/6.$

Давайте порахуємо, який платіж отримає Вася. З ймовірністю 1/2 хлопці пишуть однакові слова, і, за умовами гри, тоді Вася виграє. З ймовірністю 1/2 хлопці пишуть різні слова, і, за умовами гри, в цьому випадку Вася програє. Значить, очікуваний платіж Васі буде дорівнює $1/2 \cdot 1 + 1/2 \cdot (-1) = 0.$ В середньому, Вася в цій грі буде отримувати 0, якщо гравці вибрали саме такі стратегії.

Очікуваний платіж Петі можна порахувати точно таким же чином. З ймовірністю 1/2 хлопці пишуть різні слова, і тоді Петя виграє. З ймовірністю 1/2 хлопці пишуть однакові слова, тоді Петя програє. І очікуваний платіж Петі дорівнює $1/2 \cdot 1 + 1/2 \cdot (-1) = 0.$

Взагалі кажучи, платіж Петі можна було б порахувати і по-іншому. Оскільки це гра з нульовою сумою, тобто антагоністична гра, в якій в будь-якому профілі платіж Петі протилежний платежу Васі, то нескладно показати, що якщо очікуваний платіж Васі дорівнює 0, то і очікуваний платіж Петі в такій грі буде дорівнює 0.

Давайте запам'ятаємо, що стратегії, вибрані Васею і Петром, взагалі кажучи, відрізняються від чистих стратегій, які ми розглядали. Раніше ми забороняли гравцям використовувати гральний кубик при прийнятті своїх рішень. Тепер же Петя змішує дві свої чисті стратегії з вагами 1/2, а Вася грає чисту стратегію «Герб» з вагою 2/3 і чисту стратегію «Цифра» з вагою 1/3.

Таким чином, ми розширили множину можливих стратегій кожного з гравців. До тих можливостей, які у гравця були раніше, коли він міг грати тільки чисті стратегії, ми додали можливість використовувати цей самий генератор чисел. Принесли йому, і тепер перед кожним запуском гри він має право програмувати цей генератор випадкових чисел таким чином, в залежності від того, яку змішану стратегію він хоче зіграти, які ваги тієї чи іншої чистої стратегії надати, і ось ця ось програма, ось ця ось реалізація випадкової величини і буде зіграної чистої стратегією гравця.

Тепер, спираючись на цей факт, який ми тільки що вивели, спробуємо проаналізувати, а які, власне, змішані стратегії в цій грі хлопці в рівновазі можуть грати?

Зафіксуємо змішану стратегію Васі p Г + (1 - p) Ц.

Тобто з ймовірністю p Вася грає стратегію «Герб» і з імовірністю (1 - p) Вася відіграє стратегію «Цифра».

			Петя	
Вася			Герб	Цифра
	p	Герб	1, -1	-1, 1
	1-p	Цифра	-1, 1	1, -1
			-1·p+1·(1-p)= =1-2p	

Тоді, якщо Петя зіграє чисту стратегію «Герб», то очікуваний виграш Петі можна порахувати:

$$u_{\Pi}\left(p\Gamma+(1-p)Ц,\Gamma\right)=p\cdot(-1)+(1-p)\cdot 1=1-2p.$$

тому що з імовірністю p гра закінчиться в профілі (Герб, Герб), і тоді Петя отримає платіж, що дорівнює -1. З ймовірністю (1 - p) гра закінчиться в профілі (Цифра, Цифра), і тоді Петя отримає платіж, що дорівнює 1. Сума дорівнює (1 – 2p).

Залежно від p, тобто в залежності від ваги, з якою Вася змішує обидві свої стратегії, очікуваний платіж Петі буде відрізнятися.

Якщо Петя зіграє стратегію «Цифра», то ми теж можемо порахувати очікуваний платіж, який він отримає. Тоді з ймовірністю p гра закінчиться в профілі (Герб, Цифра), і відповідно, Петя отримає платіж, що дорівнює 1.

З ймовірністю (1 - p) гра закінчиться в профілі (Цифра, Цифра), і тоді Петя отримає -1.

Тому очікуваний платіж Петі, в разі, якщо він грає чисту стратегію «Цифра», у відповідь на змішану стратегію Васі pГ + (1 - p) Ц дорівнює (2p - 1).

			Петя	
Вася			Герб	Цифра
	p	Герб	1, -1	-1, 1
	1-p	Цифра	-1, 1	1, -1
			1-2p	$1\cdot p+(-1)\cdot(1-p)=$ $=2p-1$

При різних значеннях p або стратегія «Герб», або стратегія «Цифра» може приносити йому більше вигоди. Відповідно, якщо p таке, що одна з цих стратегій приносить більше, ніж інша, тобто якщо Вася грає таку суміш, що Петі вигідніше використовувати одну зі своїх чистих стратегій, змішувати свої стратегії Петі не матиме ніякого сенсу.

Єдина можлива ситуація, при якій Петі має сенс змішувати дві свої чисті стратегії «Герб» і «Цифра» - це ситуація, в якій обидві ці чисті стратегії приносять однаковий очікуваний платіж. Але тоді ми можемо просто записати рівняння

$$2p - 1 = 1 - 2p,$$

тобто очікувані платежі, які Петі приносить чиста стратегія «Герб» і чиста стратегія «Цифра», рівні, і звідси ми знаходимо, що

$$p = 1/2.$$

Значить, тільки лише при одній стратегії Васі, а саме, при стратегії, в якій Вася змішує обидві свої чисті стратегії з ймовірністю 1/2, Петі буде вигідно змішувати свої стратегії. У всіх інших випадках, при всіх інших p, Петі буде вигідно грати одну зі своїх чистих стратегій.

Ще одне спостереження. Якщо Вася грає стратегію 1/2 Г + 1/2 Ц, то тоді будь-яка змішана стратегія Петі принесе йому однаковий платіж. Тому що як стратегія

«Герб», так і стратегія «Цифра» буде приносити Петі рівно 0. Значить, будь-яка суміш буде приносити Петі рівно 0.

Тепер зафіксуємо стратегію Петі. Нехай Петя з ймовірністю q відіграє стратегію «Герб», а з ймовірністю (1 - q) відіграє стратегію «Цифра».

Давайте з'ясуємо, коли Васі може мати сенс змішувати свої чисті стратегії? Якщо Вася зіграє чисту стратегію «Герб», то тоді Васі очікуваний платіж можемо обчислити аналогічно: з ймовірністю q гра закінчиться в профілі (Герб, Герб), і Вася отримає платіж, що дорівнює 1. З ймовірністю (1 - q) гра закінчиться в профілі (Герб, Цифра), і Вася отримає платіж, що дорівнює -1. І значить, очікуваний платіж Васі буде дорівнює (2 q - 1).

	Петя			
		q	1-q	
		Г	Ц	
Вася	Г	1, -1	-1, 1	1·q+(-1)·(1-q)= =2q-1
	Ц	-1, 1	1, -1	

Якщо Вася зіграє чисту стратегію «Цифра», то тоді з ймовірністю q гра закінчиться в профілі (Цифра, Герб), і Вася отримає -1. З ймовірністю (1 - q) гра закінчиться в профілі (Цифра, Цифра), і Вася виграє - отримає 1. Значить, очікуваний платіж Васі буде дорівнює (1 - 2 q).

	Петя			
		q	1-q	
		Г	Ц	
Вася	Г	1, -1	-1, 1	2q-1
	Ц	-1, 1	1, -1	-1·q+1·(1-q)= =1-2q

Знову використовуємо наше золоте правило, що стосується змішаних стратегій, а саме, що змішувати має сенс тільки в тому випадку, якщо кожна з чистих стратегій, що входять в суміш, приносить гравцеві однаковий очікуваний платіж. Складаємо рівняння

$$1 - 2q = 2q - 1$$

і отримуємо, що змішувати Васі має сенс в одному єдиному випадку: якщо Петя змішує свої стратегії з ймовірністю $q=1/2$.

Але якщо Петя змішує свої стратегії з ймовірністю 1/2, то будь-яка стратегія Васі принесе йому однаковий очікуваний платіж. З якими б вагами Вася ні змішував свої чисті стратегії, його очікуваний платіж не зміниться, тому що кожна з чистих стратегій приносить однаковий очікуваний платіж.

Отже, давайте підсумуємо ті результати, які ми отримали.

Щоб Васі було вигідно змішувати свої стратегії, Петя повинен грати стратегію 1/2 Г + 1/2 Ц.

Щоб Петі було вигідно змішувати свої стратегії, Вася також повинен грати стратегію 1/2 Г + 1/2 Ц.

В цьому випадку жодному з гравців НЕ буде вигідно відхилитися і зіграти іншу стратегію. Дійсно, в профілі, в якому обидва хлопці змішують кожну зі своїх чистих стратегій з ймовірністю 1/2, будь-яка змішана стратегія Васі буде приносити йому однаковий очікуваний платіж, який дорівнює 0. Будь-яка змішана стратегія Петі буде приносити йому однаковий очікуваний платіж, який дорівнює 0, у відповідь на стратегію Васі. Тому відхилятися від цього профілю, в якому обидва змішують кожну зі своїх чистих стратегій з ймовірністю 1/2, не має сенсу.

Таким чином, ми знайшли рівновагу Неша в змішаних стратегіях. Визначення рівноваги Неша залишається точно таким же, як і раніше. Профіль називається рівновагою Неша, якщо для будь-якого гравця *i* та для його будь-якій його стратегії з множини його можливих стратегій - тільки тепер це множина можливих стратегій включає не тільки чисті стратегії, але в тому числі і всі змішані стратегії - так ось, яку б іншу стратегію s_i з множини його можливих стратегій ні зіграв *i*-й гравець, відхиляючись від профілю, він не повинен отримати більше, ніж граючи стратегію з розглянутого профілю стратегій.

Тобто якщо кожен з гравців відіграє оптимально при фіксованих стратегіях всіх інших гравців, то такий профіль називається рівновагою Неша в змішаних стратегіях.

Отже, ми довели, що ніяких інших рівноваг Неша в змішаних стратегіях, в яких кожен з гравців змішує обидві свої стратегії з ненульовими вагами, немає.
І тепер єдине, що нам залишається перевірити, - що в цій грі немає рівноваг Неша, в яких гравці грають чисті стратегії, або рівноваг Неша, в яких один з гравців грає чисту стратегію, а інший - змішує свої стратегії.

Справа в тому, що ми істотним чином в нашому рішенні використовували той факт, що кожен з гравців змішує кожну з двох своїх стратегій з ненульовими вагами, коли складали рівняння. Це рівняння вірно тільки в тому випадку, якщо обидві ці стратегії, обидві чисті стратегії, гравець дійсно грає. Якщо він грає тільки одну стратегію, то очікувані платежі, які отримує він від зіграної стратегії і від тієї стратегії, яку він не грає, тобто грає з ймовірністю 0, вони не повинні бути рівні.

Отже, перевіримо, що, по-перше, в нашій грі немає рівноваг в чистих стратегіях. Це ми насправді перевірили ще раніше. І, друге, в нашій грі немає рівноваг, в яких один з хлопців грає чисту стратегію, а інший змішує обидві свої чисті.

Дійсно, якщо, припустимо, Вася грає чисту стратегію «Герб», то тоді одна з чистих стратегій буде приносити Петі платіж, що дорівнює 1, а інша стратегія - платіж, що дорівнює -1. Відповідно, Петі немає ніякого сенсу змішувати гарну стратегію, яка приносить 1, і погану стратегію, яка приносить -1.

Тому, аналогічно, перевіривши, що немає рівноваг, в яких Вася грав чисту стратегію «Решка», а Петя змішував би обидві свої чисті стратегії, і перевіривши, що немає рівноваг, в яких Петя грав би будь-яку зі своїх чистих стратегій, а Вася змішував, ми можемо зробити висновок, що в цій грі є всього одне рівновагу в змішаних стратегіях. І ця рівновага, в якому кожен з гравців змішує обидві свої стратегії з ймовірністю 1/2.

Зверніть увагу: в чистих стратегіях рівноваг немає, в змішаних воно з'явилося. Виявляється, що рівновага в змішаних стратегіях є в будь-який кінцевої грі в нормальній формі. Цей результат довів Джон Неш, він носить його ім'я, «Теорема Неша», і, зокрема, за це Джон Неш в 1994 році отримав Нобелівську премію спільно з Зелтеном і Харшані.

Тепер знайдемо рівновагу Неша в змішаних стратегіях в цій ж самій грі по-іншому. Нехай Вася змішує обидві свої чисті стратегії з вагами p і 1-p відповідно, а Петя - з вагами q і 1-q.

		Петя		
			q	1-q
			Г	Ц
Вася	p	Г	1, -1	-1, 1
	1-p	Ц	-1, 1	1, -1

Тоді для профілю, в якому обидва гравці грають ці стратегії, обчислюємо очікуваний виграш Васі:

$$
\begin{aligned}
&u_B\left(p\Gamma+(1-p)Ц,\ q\Gamma+(1-q)Ц\right)= \\
&=pqu_B(\Gamma,\Gamma)+(1-p)qu_B(Ц,\Gamma)+ \\
&+p(1-q)u_B(\Gamma,Ц)+(1-p)(1-q)u_B(Ц,Ц).
\end{aligned}
$$

Ми знаємо, що

$$
u_B(\Gamma,\Gamma)=u_B(Ц,Ц)=1,\quad u_B(\Gamma,Ц)=u_B(Ц,\Gamma)=-1,
$$

тому

$$
\begin{aligned}
&u_B\left(p\Gamma+(1-p)Ц,\ q\Gamma+(1-q)Ц\right)= \\
&=pq\cdot 1+(1-p)q\cdot(-1)+ \\
&+p(1-q)\cdot(-1)+(1-p)(1-q)\cdot 1= \\
&=-2q+1+2p(2q-1).
\end{aligned}
$$

І тепер Вася вибирає, яка зі змішаних стратегій приносить йому максимальний очікуваний платіж, тобто він максимізує цей очікуваний платіж по параметру p:

$$
u_B\left(p\Gamma+(1-p)Ц,\ q\Gamma+(1-q)Ц\right)=-2q+1+2p(2q-1)\to\max_p
$$

Він сприймає параметр q як заданий, на цей параметр він впливати не може - q вибирає Петя, і ось при кожному q Вася повинен визначитися, яке значення параметра p є для нього оптимальним.

Звернемо увагу, що -2q + 1 Вася сприймає як константу, на цю величину він вплинути не може, і, отже, залишається максимізувати вираз 2p (2q-1).

Якщо q < 1/2, то вираз 2q-1 від’ємний. А це означає, що Вася повинен намагатися вибирати найменше можливе p, і він в цьому випадку вибирає α = 0.

Якщо q > 1/2, то тоді вираз 2q-1 додатний. А це означає, що Вася повинен намагатися вибрати максимально можливе p. Він вибирає p, що дорівнює 1.

Нарешті, якщо q = 1/2, то 2β-1 = 0, і це означає, що будь-яке p не вибрав Вася, він буде отримувати однаковий очікуваний платіж.

Таким чином, найкращу відповідь Васі на стратегію Петі, в якій Петя змішує стратегію «Герб» з ймовірністю q і стратегію «Цифра» з ймовірністю 1-q, виглядає так: грати чисту стратегію «Герб», якщо q <1/2, грати чисту стратегію

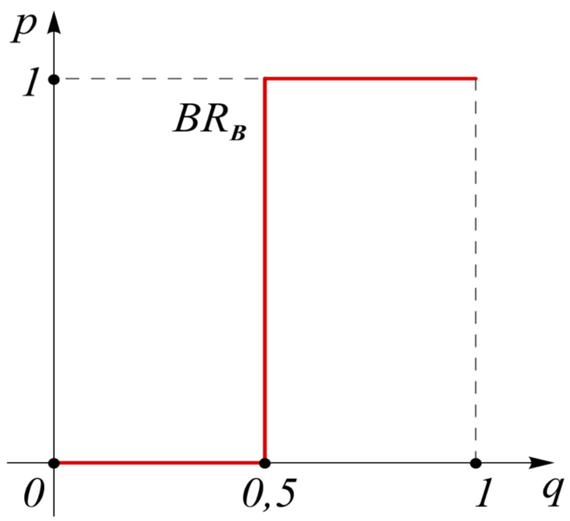
«Цифра», якщо q> 1/2, і грати будь-яку зі своїх змішаних стратегій, якщо q = 1/2:

$$BR_{\text{В}}(q\Gamma + (1-q)\text{Ц}) = \begin{cases} p = 0, & \text{якщо } q < \dfrac{1}{2}; \\ p = 1, & \text{якщо } q > \dfrac{1}{2}; \\ 0 \le p \le 1, & \text{якщо } q = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Давайте покажемо найкращу відповідь Васі на стратегію Петі на графіку.

На площині pq, тобто на площині, в якій по вертикалі відкладаємо ймовірність, з якої Вася грає стратегію «Герб», а по горизонталі відкладаємо параметр q - ймовірність, з якої Петя грає стратегію «Герб», так ось на цій площині кожна точка відповідає тому чи іншим профілем змішаних стратегій. Параметри p і q варіюються в інтервалах від 0 до 1, оскільки це ваги.

І, відповідно, давайте відзначимо червоним кольором ті профілі, в яких Вася грає найкращий відповідь на стратегію Петі.



Але тепер точно так же ми можемо вступити і з пошуком оптимальної стратегії Петі. Обчислюємо очікуваний виграш Петі в профілі, в якому Вася грає свою змішану стратегію, Петя грає свою змішану стратегію. Цей очікуваний платіж дорівнює:

$$\begin{aligned} & u_{П}\left(p\Gamma+(1-p)Ц, q\Gamma+(1-q)Ц\right)= \\ & =pqu_{П}\left(\Gamma,\Gamma\right)+(1-p)qu_{П}\left(Ц,\Gamma\right)+ \\ & +p(1-q)u_{П}\left(\Gamma,Ц\right)+(1-p)(1-q)u_{П}\left(Ц,Ц\right). \end{aligned}$$

Ми знаємо, що

$$u_{П}(Г,Г)=u_{П}(Ц,Ц)=-1, \quad u_{П}(Г,Ц)=u_{П}(Ц,Г)=1,$$

тому

$$\begin{aligned}
&u_{П}\left(pГ+(1-p)Ц,\, qГ+(1-q)Ц\right)=\\
&=pq\cdot(-1)+(1-p)q\cdot 1+\\
&+p(1-q)\cdot 1+(1-p)(1-q)\cdot(-1)=\\
&=2q(1-2p)+2p-1.
\end{aligned}$$

І тепер максимізували очікуваний виграш Петі по параметру q.

$$u_{П}\left(pГ+(1-p)Ц,\, qГ+(1-q)Ц\right)=2q(1-2p)+2p-1\to\max_{q}$$

Сприймаємо 2p-1 як константу, на яку Петя ніяк вплинути не може. Розглядаємо знак вираження 1-2p. Якщо p <1/2, то 1-2p додатне, і тому Петя повинен вибирати максимально можливе значення q, це максимально можливе значення q дорівнює 1.

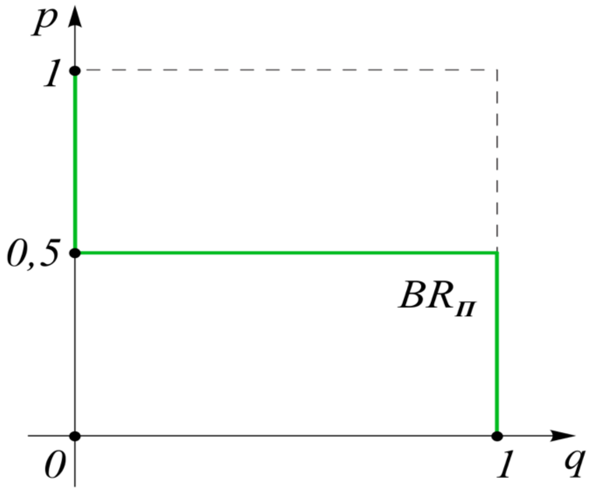
Якщо p > 1/2, то вираз 1-2p від'ємний, значить, Петя повинен вибирати найменше можливе значення q, тобто значення q, рівне 0.

І нарешті, якщо p = 1/2, тобто якщо Вася змішує обидві стратегії з ймовірністю 1/2, то тоді Петя може вибирати абсолютно будь-яку свою змішану стратегію - вони будуть приносити йому однаковий очікуваний платіж.

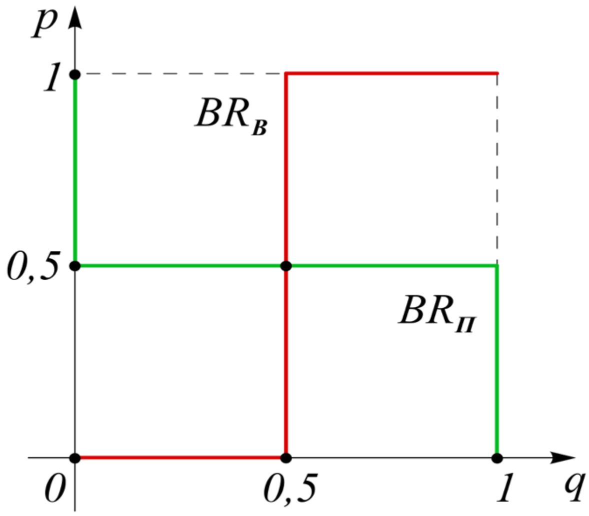
Таким чином, найкращу відповідь Петі на стратегію Васі, в якій Вася змішує стратегію «Герб» з ймовірністю p і стратегію «Цифра» з ймовірністю 1-p, виглядає так:

$$BR_{\Pi}(p\Gamma+(1-p)\text{Ц})=\begin{cases} q=1, \text{ якщо } p<\dfrac{1}{2};\\ q=0, \quad \text{якщо } p>\dfrac{1}{2};\\ 0\le q\le 1, \quad \text{якщо } p=\dfrac{1}{2}.\end{cases}$$

Точно так же опишемо на площині pq зеленим кольором ті профілі, які мають наступну властивість - Петя грає оптимально у відповідь на стратегію Васі. Ці профілі, зображені зеленим кольором, наведені на Рис.



Давайте об'єднаємо цю інформацію на одному графіку на площині pq. У нас червоним кольором зображені оптимальні відповіді одного гравця, зеленим кольором - оптимальні відповіді іншого гравця. Значить, рівновагами Неша є ті профілі, які одночасно виявилися пофарбовані як зеленим, так і червоним кольором, тобто мають обома властивостями. І перший гравець грає оптимально у відповідь на стратегію другого, і другий гравець грає оптимально у відповідь на стратегію першого.



Рівно один профіль має такі властивостями - це профіль, в якому кожен з гравців змішує кожну зі своїх чистих стратегій з ймовірністю 1/2.

1.2.3. Матричне означення очікуваних виграшів

Розглянемо гру двох гравців, у якій гравець 1 має *m* стратегій та гравець 2 має *n* стратегій. Чисті стратегії гравця 1, що утворюють *m* рядків у біматричній грі, позначаються буквами $i = 1,\ldots,m,$ а чисті стратегії гравця 2, що утворюють *n* стовпчиків у біматричній грі, $j = 1,\ldots,n.$

Змішану стратегію гравця визначають ймовірності, які приписані його чистим стратегіям. Для гравця 1 його змішану стратегію x визначимо як *m*-вимірний набір ймовірностей $(x_1,\ldots,x_m)$, приписаних чистим стратегіям $i=1,\ldots,m$ гравця 1. Ми можемо, відповідно, розглядати *x* як елемент (вектор) *m*-вимірного арифметичного простору, яке позначають R^m. Надалі будемо записувати *x* як вектор-рядок, тобто матрицю розмірності $1\times m$:

$$x=\left(x_1,\ldots,x_m\right).$$

Змішана стратегія *y* гравця 2 – це *n*-вимірний набір ймовірностей, в якому кожна ймовірність y_j приписана чистій стратегії $j=1,\ldots,n$ цього гравця. Отже, *y* є елементом (вектором) *n*-вимірний арифметичного простору R^n. Ми будемо записувати *y* як вектор-стовпчик, тобто матрицю розмірності $n\times 1$:

$$y=\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}=\left(y_1,\ldots,y_n\right)^T.$$

Припустимо, що гравець 1 використовує змішану стратегію *x* і гравець 2 використовує змішану стратегію *y*. В рамках наших угод, ми зможемо коротко записати очікуваний виграш гравця 1 як *xAy*, і очікуваний виграш гравця 2 як *xBy*. Величини *xAy* і *xBy* представляють собою результати множення матриць. Це можливо, оскільки *x* має розмірність 1 × *m*, обидві матриці *A* і *B* мають розмірності *m* × *n*, і *y* має розмірність *n* × 1. Результатом матричного множення в кожному випадку буде матриця розмірності 1 × 1, тобто єдине дійсне число - очікуваний виграш відповідного гравця на парі змішаних стратегій (*x, y*).

Знаходження величини *xAy* краще розглядати як результат множення *x (Ay)*, як добуток вектора-рядка *x* на вектор-стовпець *Ay* (В іншій термінології, ми знаходимо скалярний добуток векторів *x* і *Ay*.) Будемо позначати як $(Ay)_i$ компоненту вектор стовпчика *Ay* з номером *i*. Ця компонента стоїть в рядку з тим же і та обчислюється так:

$$Ay=\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11}y_1+ & \ldots & +a_{1n}y_n \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}y_1+ & \ldots & +a_{mn}y_n \end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\left(Ay\right)_i=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}y_j,\quad 1\le i\le m. \qquad (1.14)$$

Оскільки елементи a_{ij}, які стоять в *i*-тому рядку матриці виграшів *A* гравця 1, множаться на величини y_j, то величина $(Ay)_i$ представляє собою очікуваний виграш гравця 1, якщо він грає стратегію (рядок) *i* проти змішаної стратегії *y* гравця 2.

Якщо розглянути стовпчики матриці *A* як елементи арифметичного простору R^m, то вектор *Ay* представляє собою лінійну комбінацію даних вектор-стовпчиків. Кожен із вектор-стовпчиків у цій лінійній комбінації множиться на коефіцієнт – ймовірність y_j, з якою саме цей стовпчик буде розіграний при використанні змішаної стратегії *y*. Одержимо, що линина комбінація *Ay* – це вектор очікуваних виграшів гравця 1, де очікуваний виграш $(Ay)_i$ відповідає *i*-му рядку.

Більш того, величина *xAy* представляє собою очікуваний виграш гравця 1, коли гравці використовують пару стратегій (*x, y*), оскільки

$$x(Ay) = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (Ay)_1 \\ \vdots \\ (Ay)_m \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11}y_1 + \ldots + a_{1n}y_n \\ \vdots \\ a_{m1}y_1 + \ldots + a_{mn}y_n \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$x(Ay) = \sum_{i=1}^{m} x_i (Ay)_i = \sum_{i=1}^{m} x_i \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \right) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (x_i y_j) a_{ij}. \quad (1.15)$$

Оскільки обидва гравці вибирають свої стратегії *i* та *j* незалежно, то ймовірність вибору пари чистих стратегій (*i, j*) являє собою добуток ймовірностей вибору кожної з них, тобто число ($x_i \cdot y_j$), яке і є коефіцієнтом при значенні виграшу a_{ij} в попередній формулі для *x (Ay).*

Аналогічно, величина *xBy* є очікуваний виграш гравця 2, коли гравці використовують пару змішаних стратегій (*x, y*). Знаходження величини *xBy* краще розглядати як результат множення (*xB)y*. Вектор *xB*, як результат множення матриці розміру 1 × *m* на матрицю розміру *m* × *n*, являє собою вектор-рядок. Кожен елемент (він же стовпець) цього рядка відповідає стратегії *j* гравця 2, де $1 \le j \le n$. Позначимо *j* -й елемент рядка *xB* через $(xB)_j$.

$$xB = (x_1 \ldots x_m) \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & \ldots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \ldots & b_{mn} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$(xB)_j = \sum_{i=1}^{m} x_i b_{ij}, \quad 1 \le j \le n.$$

Елемент $(xB)_j$ – результат скалярного добутку x та j-го стовпчика матриці B.

Таким чином, $(xB)_j$ представляє собою очікуваний виграш гравця 2, коли гравець 1 використовує *x* і гравець 2 використовує чисту стратегію *j*. Коли числа $(xB)_j$ множаться на відповідні ймовірності y_j і додаються один з одним, результатом стає очікуваний виграш гравця 2 на парі змішаних стратегій (*x, y*). Цей виграш обчислюється за формулою:

$$(xB)y = \sum_{j=1}^{n} (xB)_j \, y_j = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} x_i b_{ij} \right) y_j =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} (x_i y_j) b_{ij}.$$

1.2.4. Випуклі комбінації і множини змішаних стратегій

Розглянемо вектори змішаних стратегій як геометричні об'єкти. Змішана стратегія *x* гравця 1 приписує ймовірність x_i чистій стратегії *i*. Чисті стратегії, в свою чергу, представляють собою частинні випадки змішаних стратегій і описуються одиничними векторами у просторі R^m. Наприклад, при m=3 чисті стратегії задаються векторами (1,0,0), (0,1,0) і (0,0,1). Тоді змішана стратегія (x_1, x_2, x_3) є лінійною комбінацією чистих стратегій, а саме:

$$(x_1, x_2, x_3) = x_1 \cdot (1,0,0) + x_2 \cdot (0,1,0) + x_3 \cdot (0,0,1),$$

де лінійні коефіцієнти – це ймовірності. Така лінійна комбінація називається ***випуклою***, якщо її лінійні коефіцієнти невід'ємні та їх сума дорівнює одиниці.

На рис.3 зображено дві точки *t* та *s* (вони зображені на площині, але ситуацію можна перенести у простір і більш високої розмірності).

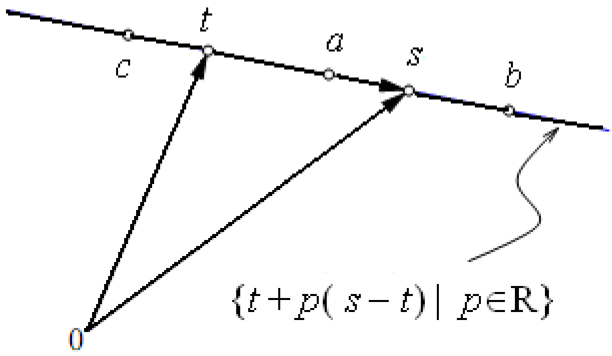


Рис.3.

Лінійна комбінація цих точок $t+p(s-t),\ p\in R,$ утворює пряму. Розглянемо радіус-вектори цих точок, позначивши їх тими самими буквами. Довільну точку, що лежить на прямій, що проходить через *t* та *s*, можна одержати, якщо до (вектора) *t* додати (вектор) $(s-t)$, помножений на деяке число. Результуючий вектор $t+p(s-t),\ p\in R,$ дає *t* при *p*=0, та *s* при *p*=1. Інші приклади дають точки *a, b* і *c*. Точку *a* одержимо при *p*=0.6, точку *b* при *p*=1.5, точку *c* при *p*=-0.4.

Коли значення параметра *p* обмежено межами $0\le p\le 1,$ як у випадку точки *a*, результатом лінійної комбінації є точка відрізка, що з'єднує *t* та *s.*

Вираз $t+p(s-t)$ можна переписати у формі $(1-p)t+ps,$ де задані точки *t* та *s* зустрічаються тільки один раз. Цей вираз дає можливість встановити відповідність між відрізком прямої, що сполучає *t* та *s*, та числовим інтервалом $[0,1]$ можливих значень параметра *p*. Кінці 0 і 1 числового інтервалу $[0,1]$ відповідають кінцям *t* та *s* відрізка прямої.

У загальному випадку, ***випуклою комбінацією*** точок $z_1, z_2, \ldots, z_k$ деякого простору називають їх лінійну комбінацію

$$p_1\cdot z_1+p_2\cdot z_2+\ldots+p_k\cdot z_k,$$

таку, що всі її лінійні коефіцієнти $p_1,\ldots,p_k$ невід'ємні і в сумі дають одиницю:

$$p_1+p_2+\ldots+p_k=1.$$

Довільна ***множина точок*** називається ***випуклою***, якщо для довільного набору точок $z_1, z_2, \ldots, z_k$, що належать даній множині, вона містить також і їх довільну випуклу комбінацію.

Можна сформулювати ще по-іншому: множина випукла, якщо разом з довільної парою точок вона містить також і відрізок, що їх сполучає; одержати випуклу комбінацію довільного числа *k* точок при $k \geq 2$ можна, послідовно конструюючи випуклі комбінації двох точок.

Коефіцієнти у випуклій комбінації можна також розглядати як ймовірності. І навпаки, ймовірнісний розподіл на скінченній множині (у нашому випадку ми говоримо про скінченну множину чистих стратегій) можна представити як випуклу комбінацію одиничних векторів.

У грі двох осіб, де гравець 1 має *m* чистих стратегій, а гравець 2 має *n* чистих стратегій, множини змішаних стратегій цих гравців ми позначимо *X* і *Y* відповідно:

$$X = \left\{ \left(x_1, \ldots, x_m\right) \middle| x_i \geq 0, \quad 1 \leq i \leq m, \quad \sum_{i=1}^{m} x_i = 1 \right\},$$

$$Y = \left\{ \left(y_1, \ldots, y_n\right)^T \middle| y_j \geq 0, \quad 1 \leq j \leq n, \quad \sum_{j=1}^{n} y_j = 1 \right\}.$$

Як уже вказувалось, *X* містить вектор-рядки, а *Y* – вектор-ставпчики. Очевидно, що в загальному випадку *X* і *Y* є випуклими множинами.

1.2.5. Умова найкращої відповіді та існування змішаних рівноваг

Змішана рівновага представляє собою профіль змішаних стратегій, який має таку властивість, що жоден з гравців не може збільшити свій виграш (в порівнянні з цим профілем), змінюючи свою стратегію *наодинці*. У грі для двох гравців, рівновага – це пара (*x, y*) змішаних стратегій, таких, що *x* є найкращої відповіддю на *y* і навпаки. Це означає, що гравець 1 не може одержати виграш більший, ніж *xAy*, якщо вибере замість *x* іншу стратегію, а гравець 2 не зможе збільшити свій очікуваний виграш *xBy*, якщо відхилиться від *y*.

На перший погляд не так і легко вияснити, чи є *x* найкращою відповіддю на *y*, тобто чи максимізує *x* величину виграшу *xAy* серед усіх можливих змішаних стратегій на множині *X*.

<u>Теорема (Умова найкращої відповіді).</u> Нехай *x* і *y* - змішані стратегії гравців 1 і 2, відповідно. Стратегія *x* є найкращою відповіддю на *y* в тому і тільки тому випадку, якщо для довільної чистої стратегії *i* гравця 1, із $x_i > 0$ випливає

$$\left(Ay\right)_i = \max\left\{\left(Ay\right)_k \middle| 1 \leq k \leq m\right\}. \tag{1.16}$$

<u>*Доведення:*</u>

$\left(Ay\right)_i$ - це *i*-та компонента вектора *Ay*, і це значення очікуваного виграшу гравця 1, коли він розігрує рядок (стратегію) з номером *i*. Введемо позначення

$$u = \max\left(\left(Ay\right)_k \middle| 1 \le k \le m\right)$$

Для максимального значення очікуваного виграшу серед усіх чистих стратегій гравця 1. Тоді

$$xAy = \sum_{i=1}^{m} x_i \left(Ay\right)_i = \sum_{i=1}^{m} x_i \left(u - \left(u - \left(Ay\right)_i\right)\right) =$$
$$= \sum_{i=1}^{m} x_i u - \sum_{i=1}^{m} x_i \left(u - \left(Ay\right)_i\right) = u - \sum_{i=1}^{m} x_i \left(u - \left(Ay\right)_i\right).$$

Оскільки для довільної чистої стратегії *i* величина x_i невід’ємна, і різниця між максимальним виграшем *u* та виграшем $\left(Ay\right)_i$ при використанні стратегії *i* теж невід’ємна, то

$$\sum_{i=1}^{m} x_i \left(u - \left(Ay\right)_i\right) \ge 0.$$

Це означає, що $xAy \le u.$ Очікуваний виграш xAy досягає максимуму *u* у тому і тільки тому випадку, коли додатне значення ймовірності x_i тягне за собою рівність $\left(Ay\right)_i = u,$ як і стверджує теорема. ■

Що означає фраза «*x* є найкращою відповіддю на *y*» в даній теоремі? Це означає, що серед усіх змішаних стратегій гравця 1 з множини *X*, стратегія *x* дає максимальний очікуваний виграш гравцю 1. Однак, у виразі (1.16) з формулювання теореми мова йде про найкращі відповіді *y* в чистих стратегіях гравця 1. Кожна чиста стратегія відповідає рядку *i* в матриці виграшів; виграші a_{ij} множаться на ймовірності y_j (які відповідають стовпчикам матриці) і додаються по всім стовпчикам, даючи, згідно (1.14), очікуваний виграш $\left(Ay\right)_i$ при використанні чистої стратегії і. Ця чиста стратегія є найкращою відповіддю у тому і тільки тому випадку, коли жодний інший рядок не дає більшого виграшу.

Застосовуючи цю теорему, можна легко вияснити, чи є дана чиста стратегія найкращою відповіддю на *y*. Для перевірки треба тільки обчислити *m* очікуваних виграшів $\left(Ay\right)_i$ для $i = 1, \ldots, m.$

<u>Приклад 1.</u> Гравці мають по 3 чисті стратегії (*m*=3):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 5 & 4 \\ 5 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 2/4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Тоді

$$Ay = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 5 & 4 \\ 5 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/4 \\ 2/4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/4 \\ 14/4 \\ 14/4 \end{pmatrix}.$$

Очікувані виграші дорівнюють

$$(Ay)_1 = 7/4, \quad (Ay)_2 = 14/4, \quad (Ay)_3 = 14/4,$$

Так що тільки дві останні чисті стратегії гравця 1 є найкращими чистими відповідями на *y*.

Очевидно, що найкращі чисті відповіді існують, оскільки числа $(Ay)_k$ в (1.16) досягають максимуму *u* хоча б для одного *k*. Теорема стверджує, що якщо змішана стратегія *x* повинна бути найкращою відповіддю на *y*, то тільки та чиста стратегія *i* може увійти в *x* з додатною ймовірністю $x_i > 0$, яка є найкращою чистою відповіддю на *y*. У даному прикладі у змішану стратегію, яка буде найкращою відповіддю на *y*, з додатними ймовірностями можуть ввійти тільки стратегії 2 і 3.

Ще одним наслідком теореми є той факт, що жодна змішана стратегія не може дати гравцю більший виграш, ніж його найкраща чиста стратегія (лема 1.6). Справа в тому, що очікуваний виграш для змішаної стратегії *x* обчислюється за формулою «середньої зваженої» (див. 1.15)). Вагами є ймовірності, і зважування відбувається за множиною «чистих» стратегій. Значення середньої величини не може бути *більше* максимального елемента множини, по якій проводилось усереднення. Для того, щоб «середній» виграш гравця не зменшився, в його найкращій змішаній стратегії повинні змішатися тільки ті чисті стратегії, які дають однаковий, найбільший виграш.

Твердження теореми і спосіб знаходження найкращих чистих відповідей легко переноситься на випадок другого гравця. Розглянемо приклад.

<u>Приклад 2.</u> Гравці мають 3 чисті стратегії:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & 2 \\ 5 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad x = (1/3, \quad 1/3, \quad 1/3).$$

Тоді

$$x \cdot B = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & 2 \\ 5 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6/3, & 5/3, & 5/3 \end{pmatrix}.$$

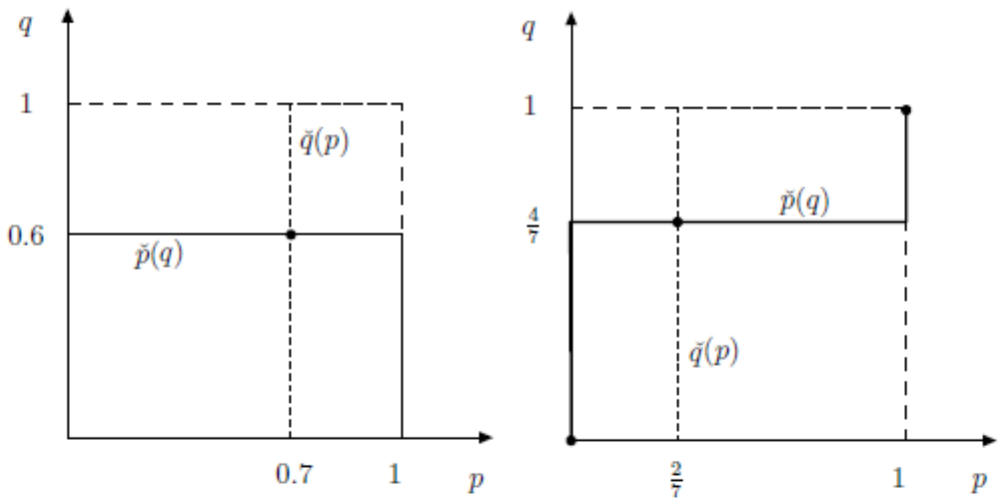
Очікувані виграші дорівнюють

$$(xB)_1 = 6/3, \quad (xB)_2 = 5/3, \quad (xB)_3 = 5/3,$$

Так що тільки перша чиста стратегія гравця 2 є найкращою чистою відповіддю на *x*.

1.2.7. Приклад знаходження змішаної рівноваги в грі типу «інспекція»

Фінал турніру Уїмблдону, Роджер Федерер проти Рафаеля Надаля. Федерер стоїть на задній лінії і збирається відбити м'яч, посланий йому Надалем. Федерер вирішує, в який бік йому відбити м'яч: направо вздовж краю корту (DL) або наліво навскоси (CC). Одночасно, Надаль намагається вгадати напрямок, в якому полетить м'яч. Він також може побігти відбивати подачу прямо, вздовж краю корту (DL) або навскоси наліво (CC, дивись рис. 1.5 (a)).



(a) Игра в теннис (b) Битва полов

Рис. 1.5: Функции реакции для различных игр 2 × 2.

		Жена	
		балет	футбол
Муж	балет	3,5	0,0
	футбол	0,0	4,2

Обидва дуже добре грають у теніс. Поки Федерер не вдарить, Надаль не побіжить відбивати: інакше Федерер вдарить в іншу сторону, і виграє гейм. Але якщо Надаль буде чекати, поки Федерер завдасть удар, то він теж програє, так як удари в професійному тенісі дуже сильні. Таким чином, обидва гравці одночасно вирішують, що їм робити. При цьому множини чистих стратегій у Федерера і у Надаля однакові: $S_1 = S_2 =$ {CC, DL}. Виграш Федерера дорівнює ймовірності того, що він виграє розіграш, виграш Надаля дорівнює ймовірності того, що цього не станеться. Отже, сума виграшів обох гравців не залежить від профілю стратегій. Записуючи матрицю виграшів в такій грі, для кожного профілю стратегій досить вказати тільки виграш першого гравця. У нашому випадку матриця буде такою:

	Надаль		
Федерер		DL	CC
	DL	0.5	0.8
	CC	0.9	0.2

Якщо Надаль правильно вгадує напрямок удару, то він має хороші шанси відбити м'яч - дуже хороші, якщо Федерер б'є навскоси. Але якщо Надаль не вгадує, то ймовірність того, що він зуміє «наздогнати» м'яч і врятувати гру, невелика. Ця гра не має рівновагу в чистих стратегіях і належить до того ж класу ігор, як і гра контролера з зайцем.

Знайдемо рівновагу в змішаних стратегіях. Нехай $p \in [0,1]$ - змішана стратегія Федерера, тобто ймовірність того, що він ударить уздовж краю корту (BL). Аналогічно, позначимо за $q \in [0,1]$ ймовірність того, що Надаль побіжить відбивати в цьому ж напрямку. Знайдемо математичне сподівання виграшів обох гравців:

$$u_F(p,q) = 0.5pq + 0.8p(1-q) + 0.9(1-p)q + 0.2(1-p)(1-q)$$

$$u_N(p,q) = -0.5pq - 0.8p(1-q) - 0.9(1-p)q - 0.2(1-p)(1-q).$$

Знайдемо рівновагу у цій грі. Припустимо, що q відоме Федереру. Тоді його максимізацій на задача буде $\max\limits_{q\in[0,1]} u_F\left(p,q\right)$, а її розв'язок –

$$\breve{p}(q) = \begin{cases} 1, & q < 0.6 \\ \left[0,1\right], & q = 0.6 \\ 0, & q > 0.6. \end{cases}$$

Аналогічно, для Надаля задача $\max\limits_{q\in[0,1]} u_N\left(p,q\right)$ має розв'язок

$$\breve{q}(p)=\begin{cases}1, & p>0.7\\ [0,1], & p=0.7\\ 0, & p<0.7.\end{cases}$$

Функції $\breve{p}(q)$ і $\breve{q}(p)$ є функціями реакції обох гравців. Рівновагою Неша буде розв'язок системи

$$\breve{p}(q)=q,$$

$$\breve{q}(p)=p.$$

На рисунку 1.5 (а) зображені графіки функцій реакції обох гравців. Ці графіки мають єдину точку перетину (p *, q *) = (0.7, 0.6). Це і є рівновага Неша в змішаних стратегіях. Таким чином, Федерер у рівновазі буде грати DL з ймовірністю 0.7 і CC з ймовірністю 0.3, а Надаль - DL з ймовірністю 0.6 і CC з ймовірністю 0.4.

1.2.8. Рівновага у змішаних стратегіях у грі «битва чоловік-жінка»

Розглянемо матрицю гри:

	Жінка		
Чоловік		Балет (q)	Футбол (1-q)
	Балет (p)	•3, 5*	0, 0
	Футбол (1-p)	0, 0	•4, 2*

Це класичний приклад координаційної гри: зразу видно, що існує дві рівноваги у чистих стратегіях. Чи існує рівновага у змішаних стратегіях? Нехай p і q – ймовірності, з якими чоловік і жінка вибирають балет. Тоді виграш чоловіка буде

$$u_1(p,q)=3pq+(1-p)q\cdot 0+p(1-q)\cdot 0+4(1-p)(1-q),$$

	Жінка		
Чоловік		Балет (q)	Футбол (1-q)
	Балет (p)	•3, 5*	0, 0
	Футбол (1-p)	0, 0	•4, 2*

а виграш жінки буде

$$u_2(p,q)=5pq+0\cdot(1-p)q+0\cdot p(1-q)+2(1-p)(1-q):$$

	Жінка

Чоловік		Балет (q)	Футбол (1-q)
	Балет (p)	•3, 5*	0, 0
	Футбол (1-p)	0, 0	•4, 2*

А їх функції реакції –

$$\breve{p}(q)=\begin{cases}1, & q>\frac{4}{7},\\ [0,1], & q=\frac{4}{7},\\ 0, & q<\frac{4}{7};\end{cases}\qquad \breve{q}(p)=\begin{cases}1, & p>\frac{2}{7},\\ [0,1], & p=\frac{2}{7},\\ 0, & p<\frac{2}{7}.\end{cases}$$

У цієї гри три рівноваги: дві у чистих стратегіях (p=1, q=1 І p=0, q=0) і одна у змішаних стратегіях: p=$\frac{2}{7}$, q= $\frac{4}{7}$ (рис. 1.5б)).

У змішаному розширені скінченної гри виграш кожного гравця є лінійною функцією від ймовірності зіграти ту чи іншу стратегію. Завдяки цьому рівновага у змішаних стратегіях має дві властивості, які використовуються.

<u>Лема 1.6.</u> Нехай $G=\langle I,S,u\rangle$ - гра, σ^* —рівновага Неша у змішаних стратегіях. Нехай $S_i^{\sigma_i^*}\subseteq S_i$ —носій стратегії σ_i^*, тобто є множиною всіх чистих стратегій, які граються з додатною ймовірністю при змішаній стратегії σ_i^*. Тоді для всіх $s_i\in S_i^{\sigma_i^*}$ маємо

$$u_i\left(s_i,\sigma_{-i}^*\right)=u_i\left(\sigma_i^*,\sigma_{-i}^*\right),$$

а для всіх $s_i'\notin S_i^{\sigma_i^*}$

$$u_i\left(s_i',\sigma_{-i}^*\right)\le u_i\left(\sigma_i^*,\sigma_{-i}^*\right).$$

<u>Доведення</u>:

Припустимо, що це не так. Нехай σ^* —рівновага Неша у змішаних стратегіях, причому $s_1, s_1'\in S_i$ граються з ймовірностями $p>0, p'>0.$ Нехай $u_i\left(s_1,\sigma_{-i}^*\right)>u_i\left(s_1',\sigma_{-i}^*\right)$. Легко перевірити, що стратегія σ_i', яка відмінна від σ_i^* тим, що s_1 грається з ймовірністю $p+p'$, а s_1' —з ймовірністю 0, дає виграш, більший на $p'\left(u_i\left(s_1,\sigma_{-i}^*\right)-u_i\left(s_1',\sigma_{-i}^*\right)\right)$. Що протирічить припущенню про те, що σ^* —рівновага Неша.■

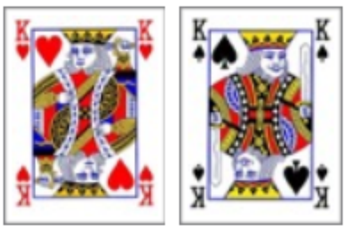
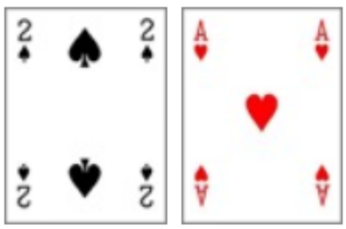
<u>Лема 1.7.</u> Нехай у скінченній грі *G* існує рівновага $s^*=\left(s_1^*,\ldots,s_N^*\right)$. Тоді у змішаному розширенні гри G існує рівновага, в якій гравець *i* грає стратегію s_i^* з ймовірністю 1.

1.2.9. Приклад знаходження змішаної рівноваги в одній грі карточного типу

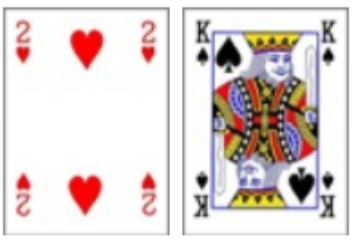
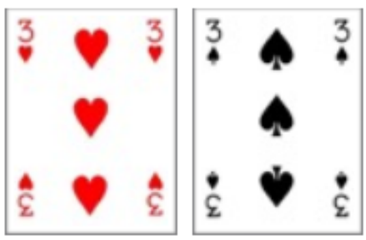
Дана гра була придумана професором Університету Каліфорнії Лос-Анджелеса (UCLA) Баррі О'Нілом*, який виявив, що в результаті серії експериментів поведінка людей в цій картковій грі дивно близька до передбаченної рівноваги Неша.

* B. O'Neill. Nonmetric Test of the Minimax Theory of Two-Person Zerosum Games // Proceedings of the National Academy of Science, U.S.A. – Vol. 84. – P. 2106-2109.

Є два гравці: Червоний і Чорний. У кожного гравця є чотири карти. У Чорного: король, двійка, трійка, туз пік; у Червоного: король (К), двійка (2), трійка (3), туз (А) Чирва. Кожен гравець вибирає одну карту і показує своєму противнику одночасно з ним. Червоний виграє, якщо випали обидва короля або різні карти (Не королі):

Чорний виграє, якщо випав тільки один король або обидві карти одного номіналу:

Сформулюємо такі три питання: 1) оскільки правила гри, як ми бачимо, «несиметричні», тому можливо, що один з гравців має деяку перевагу і у кого є перевага: у Червоних або у Черних; 2) яка ставка виграшу кожного гравця, наскільки ймовірним є перемоги Червоних і Чорних; 3) чи можемо ми що-небудь сказати про розподіл карт кожного гравця?

Швидше за все, відповідь на перше питання ми можемо отримати емпіричним шляхом, граючи багато разів поспіль, тобто перевіряючи характер гри. Але друге і третє питання - обчислення виграшної ставки для кожного гравця і обчислення розподілу карт кожного гравця - досить важкі. Тому застосуємо теоретико-ігровий підхід до даної гри. Запишемо гру в нормальній формі, тобто таблицю виграшів, і по ній обчислимо стратегічну рівновагу Неша.

Чорний / Червоний	К	З	2	А
К	1;0	0;1	0;1	0;1
З	0;1	0;1	1;0	1;0
2	0;1	1;0	0;1	1;0
А	0;1	1;0	1;0	0;1

Оскільки в цій грі важливо зробити себе непередбачуваним, тому єдиною рівновагою тут є рівновага в змішаних стратегіях*. Знайдемо цю рівновагу, при цьому кожен гравець вибирає карти з певною ймовірністю. Визначимо розподіл ймовірностей по стратегіям Чорного гравця: К, 2, 3, А. Припустимо, що він вибирає 3 з ймовірністю p, 2 з ймовірністю q, А з ймовірністю r. З залишилася ймовірністю (1-p-q-r) Чорний гравець вибирає стратегію К. Визначимо їх значення. Оскільки карти 2, 3, А мають дуже схожу роль, будемо вважати, що Чорний гравець вибирає їх з рівними можливостями p. Тоді з ймовірністю 1-3p він вибирає К.

* Martin J. Osborn. An Introduction to Game Theory. – Oxford University Press, 2002. – 89 p.

Тепер припустимо, що ми - Червоний гравець і наш опонент, Чорний гравець, змішує свої карти з розглянутим розподілом ймовірностей. Що буде, якщо ми виберемо К? З ймовірністю 1-3p Чорний теж вибере К і ми виграємо, у всіх інших випадках ми програємо. Отже, якщо ми вибираємо К, наша ймовірність виграшу становить 1-3p і наша переможна ставка, ймовірність виграшу, становить

$$1 \times (1\text{-}3p) + 0 \times p + 0 \times p + 0 \times p = 1\text{-}3p.$$

Що буде, якщо ми виберемо 3? З ймовірністю 1-3p Чорний теж вибере К і ми програємо, з імовірністю p Чорний обере 3 і ми програємо, з імовірністю p Чорний вибере 2 і ми виграємо, з імовірністю p Чорний вибере А і ми виграємо. Отже, якщо ми вибираємо 3, наша переможна ставка, ймовірність виграшу, становить

$$0 \times (1\text{-}3p) + 0 \times p + 1 \times p + 1 \times p = 2p.$$

Аналогічні обчислення буду для випадків, якщо ми виберемо 2 або А:

Чорний / Червоний	К	3	2	А	Переможна ставка Червоного гравця
К	1;0	0;1	0;1	0;1	→ $1-3p$
3	0;1	0;1	1;0	1;0	→ $2p$
2	0;1	1;0	0;1	1;0	→ $2p$
А	0;1	1;0	1;0	0;1	→ $2p$

У положенні рівноваги Червоний гравець повинен змішувати всі свої карти, а це означає, що виграшні ставки повинні бути ідентичні в усіх чотирьох випадках. В іншому випадку, якщо, наприклад, число 1-3p було найбільшим з усіх переможних ставок, то гравець вибирав би К з ймовірністю 1. Але в рівноважної стратегії всі виграшні ставки «хороші». Тобто отримаємо

$$1\text{-}3p = 2p \Longrightarrow p = 0.2.$$

Таким чином, всі виграшні ставки Червоного гравця рівні 0.4, а також отримали імовірнісний розподіл ходів Чорного гравця:

Імовірносний розподіл ходів Червоного	0.4	0.2	0.2	0.2	
Чорний / Червоний	К	3	2	А	Переможна ставка Червоного гравця
К	1;0	0;1	0;1	0;1	→ $1-3p$
3	0;1	0;1	1;0	1;0	→ $2p$
2	0;1	1;0	0;1	1;0	→ $2p$
А	0;1	1;0	1;0	0;1	→ $2p$

Аналогічно визначимо розподіл ймовірностей по стратегіям Червоного гравця:

Імовірносний розподіл ходів Червоного	Чорний / Червоний	К	3	2	А
1-3q	К	1;0	0;1	0;1	0;1
q	3	0;1	0;1	1;0	1;0
q	2	0;1	1;0	0;1	1;0
q	А	0;1	1;0	1;0	0;1

Тоді переможна ставка Чорного гравця:

Імовірносний розподіл ходів Червоного	Чорний / Червоний	К	3	2	А
1-3q	К	1;0	0;1	0;1	0;1
q	3	0;1	0;1	1;0	1;0
q	2	0;1	1;0	0;1	1;0
q	А	0;1	1;0	1;0	0;1
	Переможна ставка Чорного гравця	↓ $3q$	↓ $1-3q+q$	↓ $1-3q+q$	↓ $1-3q+q$

У рівноважної стратегії отримаємо:

$$3q = 1-3q + q \Rightarrow q = 0.2.$$

Таким чином, всі виграшні ставки Чорного гравця рівні 0.6, а також отримали імовірнісний розподіл ходів Червоного гравця:

Імовірносний розподіл ходів Червоного	Чорний / Червоний	К	3	2	А
0.4	К	1;0	0;1	0;1	0;1
0.2	3	0;1	0;1	1;0	1;0
0.2	2	0;1	1;0	0;1	1;0

0.2	A	0;1	1;0	1;0	0;1
	Переможна ставка Чорного гравця	**↓ 0.6**	**↓ 0.6**	**↓ 0.6**	**↓ 0.6**

В результаті ми отримали, що виграшна ставка Чорного дорівнює 0.6, що більше, ніж виграшна ставка Червоного 0.4. Іншими словами, Чорний гравець «сильніше», тобто має перевагу в рамках правил даної гри. Щодо розподілу карт можна зробити висновок, що король тут грає «частіше» (40%), а всі інші карти - рідше (20%).

Порівняємо теоретичне прогнозування з фактичними даними. Згідно з теоретичними розрахунками, рівновагою Неша буде:

	Червоний гравець	Чорний гравець
Рівновага Неша	0.4	0.6

Наші очікування такі, що якщо, наприклад, Червоний виграє з ймовірністю в діапазоні 0.3 - 0.5, то теоретико-ігрове «пророцтво» працює так собі; в діапазоні 0.35 - 0.45 - добре; 0.39-0.41 - дуже добре.

Тепер подивимося на реальні результати. У 2015 р. студенти курсу "Welcome to Game Theory"* зіграли 30 разів в гру в 670 парах; в 2014 р. студенти професора Michihiro Kandori Університету Токіо грали 105 разів в 105 парах; в 2009 р. вони ж грали 105 разів в 1-2 парах; в 2017 р. студенти НТУУ «КПІ ім. Ігоря Сікорського» доцента Барановської Л.В. грали 30 разів в 22 парах.

* Coursera. Welcome to Game Theory. Режим доступа: https://www.coursera.org/learn/game-theory-introduction.

	Червоний гравець	Чорний гравець
Рівновага Неша	**0.4**	**0.6**
Студенти Coursera (2015)	0.415	0.585
Студенти Університету Токіо (2014)	0.414	0.586
Студенти Університету Токіо (2009)	0.409	0.591
Студенти НТУУ «КПІ ім. Ігоря Сікорського» (2017)	0.4045	0.5955

Наведемо результати розподілу карт:

	Червоний гравець				Чорний гравець			
	К	А	2	3	К	А	2	3
Рівновага Неша	**0.4**	**0.2**	**0.2**	**0.2**	**0.4**	**0.2**	**0.2**	**0.2**
2015	0.36	0.24	0.21	0.2	0.37	0.24	0.19	0.2
2104	0.38	0.21	0.2	0.21	0.44	0.2	0.17	0.18
2009	0.39	0.21	0.2	0.2	0.42	0.2	0.19	0.19
2017	0.36	0.22	0.22	0.2	0.43	0.24	0.17	0.17

Результати гри 2017 (студенти НТУУ «КПІ ім. Ігоря Сікорського»), як видно, також дуже близькі до рівноважних.

Глава 2. Динамічні ігри з повною інформацією

2.1. Ігри у розгорнутій формі

Динамічна гра - більш складний об'єкт, ніж статична гра. Для того, щоб описати динамічне ігрове взаємодія декількох суб'єктів, нам потрібні дві речі дві речі. Нам треба знати послідовність дій гравців при можливі сценарії розвитку подій в грі, а також виграші, одержувані гравцями в залежності від що сталися в грі подій. Ми також повинні знати, що кожному гравцеві може бути відомо відносно ходів, вже зроблених іншими гравцями. У першому випадку ми говоримо про дерево гри; у другому - про інформаційні множини гравців.

2.1.1. Дерево гри

Розглянемо гру «хуліган з гранатою». У вас в кишені гаманець. До вас підходить хуліган з гранатою в руках, і пропонує вам такий вибір: або ви віддаєте йому гаманець, або він підриває гранату, і ви обидва гинете. Ваші переваги (в порядку спадання) такі: залишитися в живих з гаманцем, залишитися в живих без гаманця, бути підірваним. Уподобання хулігана точно такі ж. Найбільше йому підійде, якщо ви відразу віддасте йому гаманець. На другому місці альтернатива, коли ви відмовляєтеся віддавати гаманець, але він не підриває гранату і залишається в живих, але без гаманця. Нарешті, найменше, як і вам, йому хочеться бути підірваним.

Чи станете ви віддавати гаманець? Якщо ви не віддасте, то у хулігана буде нелегкий вибір. Він погрожував вам підірвати гранату, але тепер вважатиме за краще не реалізовувати цю загрозу. Якщо він недостатньо принциповий, то він передумає і не стане висмикувати чеку після того, як ви відмовилися віддавати йому гаманець. В цьому випадку ви повинні відповісти йому відмовою, тому що його загроза нереалізована. Однак, якщо він є принциповим і ніколи не змінює своїх рішень, то вам краще зробити так, як він каже, і віддати гаманець. Якщо ви не віддасте, то будете підірвані.

Цей приклад показує важливість порядку, в якому приймаються рішення. Загроза хулігана підірвати гранату є нездійсненною, якщо хуліган має можливість переглянути своє рішення після того, як ви остаточно і безповоротно відмовилися ділитися з ним своїми заробленими грошима. Ситуація набуває зовсім інший характер, якщо хуліган запрограмований виконувати дані раніше обіцянки.

У динамічних іграх, по-перше, нам (як і в статичній грі) потрібно визначити множину гравців. Для того, щоб моделювати випадкові події, що впливають на виграш гравців, нам необхідно ввести ще одного гравця - природу. Таким чином, ми маємо $I = \left\{1, \ldots, N\right\}$ і {природа}. По-друге, потрібно визначити, в якому порядку гравці ходять, і які дії їм доступні на кожному ході. Наприклад, в грі «хуліган з гранатою» перший хід робить перехожий; йому доступні дії «віддати» і «не віддавати». У разі, якщо вибрано дію «чи не віддати», робить хід хуліган; його можливі дії - «підірвати» і «не підірвати». Цю інформацію ми можемо представити у вигляді наступного дерева (або графа) гри, зображеного на рис. 2.1.

Дерево гри складається з ***вершин*** і з'єднують їх відрізків. Кожна вершина означає або момент прийняття рішення одним з гравців, або момент закінчення гри. Моменти прийняття рішення позначені жирними точками; їх на нашому дереві два - прийняття рішення перехожим, і прийняття рішення хуліганом. ***Стратегія*** гравця у грі в розгорнутій формі - набір дій гравця в кожній вершині, у якій йому належить хід.

Всього існує три варіанти закінчення гри: якщо перехожий віддає гаманець, якщо перехожий не віддає гаманець і хуліган підриває гранату, і якщо перехожий не віддає гаманець, і хуліган не вибухає. У дереві гри завжди існує одна вершина, відповідна початку гри. У нашому випадку це - вершина, в якій робить хід перехожий.

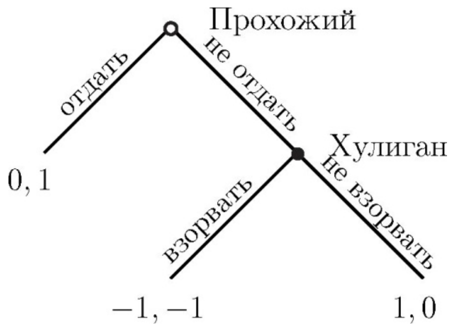


Рис.

Нарешті, по-третє, нам треба визначити, як виграші гравців залежать від ходів, які були зроблені. Формально, для кожної кінцевої вершини дерева гри ми визначаємо виграші для кожного гравця. Ми припускаємо, що виграш кожного гравця дорівнює -1 в разі вибуху гранати; 0 в разі, якщо вибуху немає, але гравець залишився без гаманця; і 1, якщо вибуху не було, і гаманець залишився у гравця.

Кожному ходу, який гравець робить в якійсь вершині, відповідає вершина, в якій гра виявляється після зробленого ходу. Наприклад, після ходу перехожого «віддати», гра переходить в кінцеву вершину з виграшем (0,1). Перший платіж означає платіж першого гравця (перехожий), другий платіж = другого гравця (хулігана). Після ходу «чи не віддати» гра переходить в вершину, в якій хід робить хуліган. Будемо говорити, що вершина, в якій робить хід перехожий, лежить вище, ніж вершина, в якій робить хід хуліган. У будь-якому дереві гри для будь-якої вершини, крім початкової, однозначно задається історія гри - тобто послідовність вершин, через які гра вже встигла пройти. Зокрема, для будь-якої вершини (знову ж, крім початкової) існує тільки одна вершина, безпосередньо передує даній. Це виключає такі графи, як наприклад, що зображений на Рис. 2.2. (у однієї з вершини існує декілька вершин, які безпосередньо передують їй).

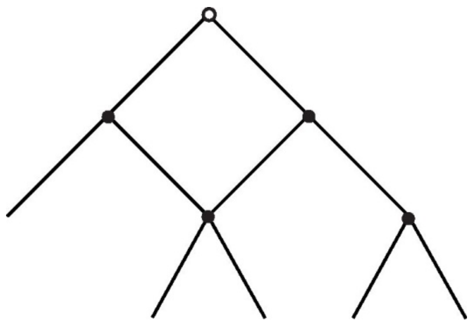


Рис.

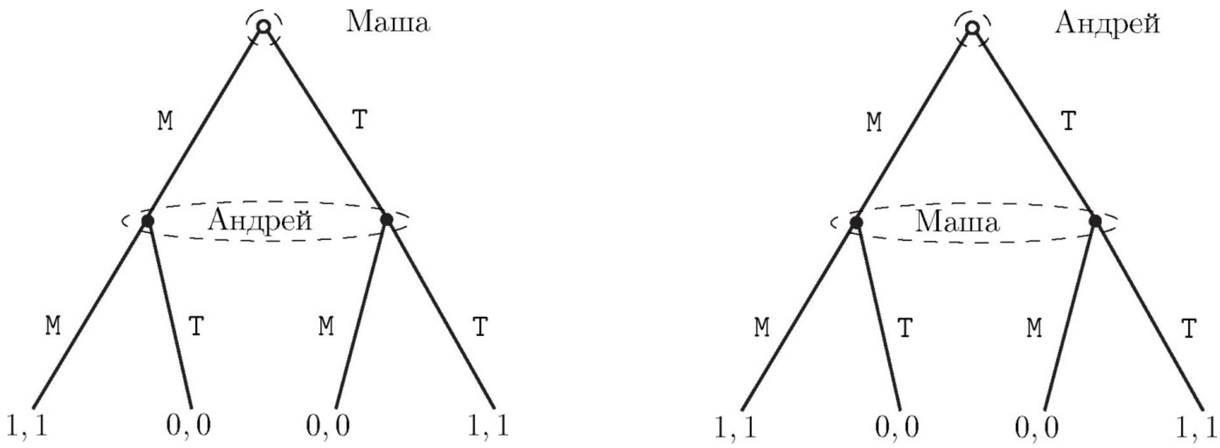
2.1.2. Інформаційні множини і стратегії в динамічної грі

Розглянемо задачу «Зустріч в місті» з Глави 1 (1.1.4). Нагадаємо, що у вихідній задачі йшлося про гру 2 х 2 з наступною матрицею виграшів:

	Андрій		
		М	Т

Маша	M	1, 1	0, 0
	T	0, 0	1, 1

Ми припускали, що коли Маша і Андрій приймають рішення, між ними відсутній зв'язок; отже, на момент прийняття рішення Андрій не знає про рішення Маші, і навпаки. На рис. 2.3 показані два еквівалентних способи записати цю гру як розгорнуту.



а) б)

Рис. 2.3

На рис. 2.3 (a) намальовано дерево гри, в якій Маша робить перший хід, але Андрій не знає, який хід зробила Маша - тобто, на момент прийняття рішення, Андрій не може сказати, в який з двох своїх вершин він знаходиться. Це припущення досягається об'єднанням двох вершин, в яких Андрій приймає рішення, в одну ***інформаційну множину***. На рис. 2.3 (b) показаний другий варіант запису тієї ж гри в розгорнутій формі (як правило, виграші гравців в кінцевих вершинах гри вказуються в порядку, приблизно відповідному черговості ходів гравців).

Кожна інформаційна множина містить одну або кілька вершин, в яких приймається рішення який-небудь один гравець. Якщо кілька вершин знаходяться в одній інформаційній множині, то відповідний гравець не спостерігає, в якій саме вершині він знаходиться. Наприклад у грі, зображеної на рис. 2.4, гравець 2 не може сказати, який з двох ходів - M або L - зробив гравець 1, оскільки вершини, в яких гравець 2 приймає рішення після цих ходів гравця 1, лежать в одній інформаційній множині. Однак, якщо гравець 1 зробить хід l, то гра закінчиться, і гравець 2 про це дізнається.

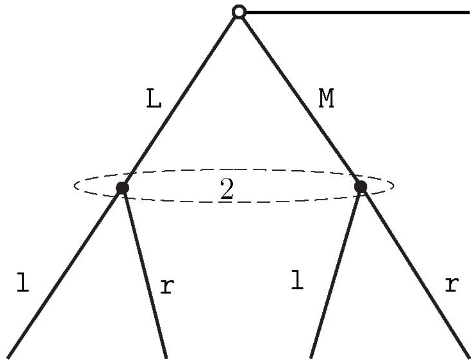


Рис. 2.4

За визначенням, кожна вершина в грі повинна належати до якоїсь інформаційної множини. Якщо інформаційна множина містить кілька вершин, то на малюнку їх зазвичай обводять пунктирною лінією. Якщо воно містить всього одну вершина, то ця вершина пунктиром не обводиться.

Означення.

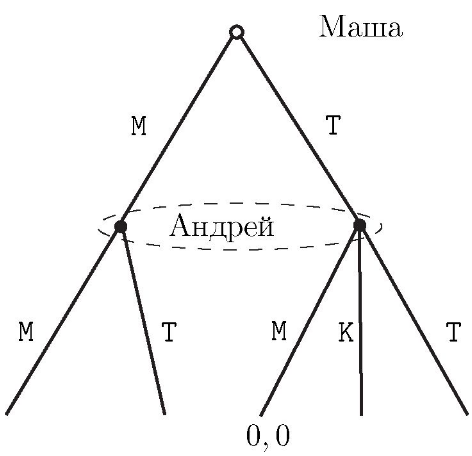
Множина вершин *M* дерева гри називається інформаційною множиною гравця і, якщо:

1) в усіх вершинах множини M хід належить гравцю *i*,

2) гравець *i* не може відокремити одну від одної вершини, які входять у цю множину *M*,

3) гравець *i* може відокремити вершини множини *M* від довільної вершини, які не входить у множину *M*.

Ми вимагаємо, щоб у всіх вершинах, що належать до однієї інформаційної множини, кожному гравцеві були доступні одні і ті ж дії. В іншому випадку - як, наприклад, на рис. 2.5 (а) - гравець зможе визначити вершину, в якій він знаходиться, по числу доступних йому дій, що суперечить припущенню про те, що дві вершини належать до однієї інформаційної множини.



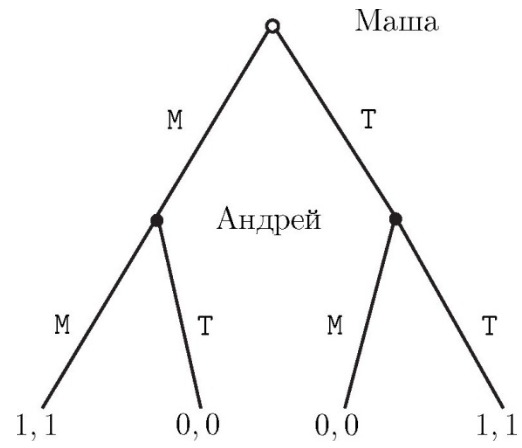


Рис. 2.5

У тих іграх, в яких гравці можуть спостерігати за попередніми діями всіх других гравців - включаючи Природу - кожна інформаційна множина містить рівно одну вершину. Якщо в нашому прикладі між Машею і Андрієм є односторонній зв'язок - наприклад, якщо Маша може надсилати Андрію СМСки, але Андрій не може на них відповідати - інформаційна множина Андрія розбивається на дві множини (рисунок 2.5 (b)), кожна з яких відповідає одному з вибраних Машею дій.

У Маші, як і раніше, всього одна інформаційна множина, так як при наявності однобічного зв'язку вона приймає рішення раніше Андрія. У Андрія інформаційних множин дві, кожна з яких відповідає одній вершині, в якій він приймає рішення (коли в інформаційній множині всього одна вершина, ми не обводимо її пунктиром на малюнку).

Які стратегії доступні гравцям в грі, зображеної на рис. 2.5 (b)? У Маші лише два варіанти дій: M або T. Вибір Андрія, однак, є більш багатим. У нього можуть бути різні плани в залежності від ходу, зробленого Машею. Перерахуємо всі стратегії Андрія:

TT: грати T, якщо Машин хід був T; грати T, якщо Машин хід був M.

TM: грати T, якщо Машин хід був T; грати M, якщо Машин хід був M.

MT: грати M, якщо Машин хід був T; грати T, якщо Машин хід був M.

MM: грати M, якщо Машин хід був T; грати M, якщо Машин хід був M.

Отже, що у Андрія всього 4 стратегії. Кожна стратегія вказує, що робити в *кожній* інформаційній множині.

<u>Означення 2.1.</u> У грі Г у розгорнутій формі ***множина чистих стратегій*** гравця *і* буде

$$S_i = \underset{h_i \in H_i}{\times} A(h_i),$$

де H_i містить усі інформаційні множини, в яких робить хід гравець *і*, а $A(h_i)$ - всі дії, які доступні гравцю *і* у інформаційній множині h_i.

При цьому число чистих стратегій у гравця і буде

$$N_i = \prod_{h_i \in H_i} \left| A(h_i) \right|. \tag{2.1}$$

Наприклад, якщо в якійсь грі у якогось гравця є 3 інформаційні множини, в яких можливо по 3,4 і 5 дій, то число його чистих стратегій дорівнює 3 Х 4 Х 5 = 60.

Сукупність дерева гри і інформаційних множин гравців дозволяє нам визначити множину стратегій для кожного гравця. Так як виграш кожного гравця однозначно визначається стратегіями, обраними гравцями, то це дозволяє нам говорити про рівновагу Неша в іграх у розгорнутій формі. Однак, як ми переконаємося на наступному прикладі, в динамічних іграх далеко не всі рівноваги відповідають нашому уявленню про раціональність гравців.

<u>Означення 2.2.</u> Гра в розгорнутій формі є сукупність Г наступних об'єктів:

1. Множини гравців $I = \{1, \ldots, N\} \cup$ {природа}.
2. Дерева гри - $(X, \mapsto)$, де

   a) X – множина вершин;
   b) $\mapsto$ - це відношення успадкування: $x \mapsto y$ означає «*x* відбувається раніше, ніж *y*» або "*y* лежить нижче, ніж *x*». Нехай це відношення має такі властивості:
      I. $\mapsto$ транзитивне: якщо $x' \mapsto x, x \mapsto x''$, то $x' \mapsto x''$.
      II. $\mapsto$ антисиметричне: не виконується $x \mapsto x$.
      III. Якщо $x' \mapsto x, x'' \mapsto x$,то або $x' \mapsto x''$, або $x'' \mapsto x'$.
   c) Множина кінцевих вершин $Z \subset X$: для $z \in Z$, не існує $x \in X$, такий, що $z \mapsto x$.
   d) Початкова вершина $o \in X$, така, що $o \mapsto x$ для всіх $x \in X$.

3. Функцій виграшів: $u_i : Z \to R$ для $I = \{1, \ldots, N\}$.
4. Почерговості ходів *i*: $X \setminus Z \to I$.

5. Множини дій А. Нехай А (х) - дії, доступні в вершині $x \in X \setminus Z$.
6. Інформаційних множин. Нехай *H* - розбиття $X \setminus Z$ на підмножини, таке, що

a) Для всіх $h \in H$, якщо $x \in h$ та $x' \in h$, то $i(x) = i(x')$, тобто в кожній інформаційній множині об'єднані вершини, в яких ходить тільки один гравець, і
b) Якщо $x, x' \in h$, то $A(x) = A(x')$. Тобто у всіх вершинах, що входять в інформаційної множини, гравцеві доступний один і той же набір дій.

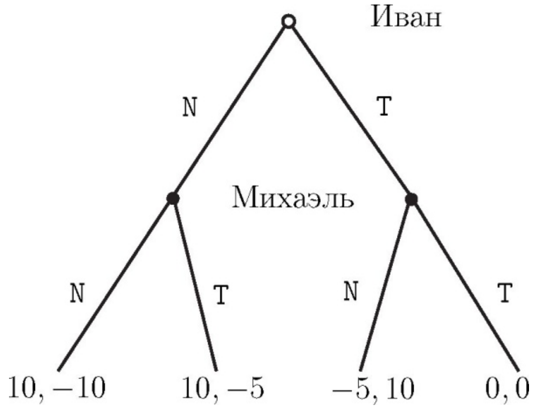
Множина Х і відношення $\mapsto$ визначає ***спрямований граф***. Умови на відношення $\mapsto$ гарантують, що граф є ***деревом***. Початкова вершина *о* відповідає моменту початку гри. Кожна вершина, яка не є кінцевою, означає або прийняття рішення одним з гравців, або випадковий хід, який робить природа. Кожна кінцева вершина відповідає закінченню гри і якомусь вектору виграшів гравців. Інформаційні множини показують, що відомо гравцям про ходи, зроблених раніше іншими гравцями.

«Я - Міхаель Шумахер, і я ніколи не повертаю першим»

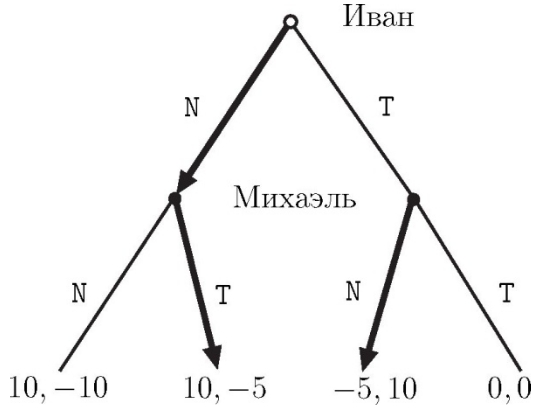
Розглянемо задачу «Лобова атака» (п.1.1.7). Два автомобіля їдуть назустріч один одному. За кермом першої машини Іван - водій зі середньостатистичними навичками водіння. За кермом другої машини сидить Міхаель Шумахер, семикратний володар чемпіонського титулу гонок Формули-1. Кожен водій може звернути – Т, або не звернути - N. Нехай, як і в п. 1.1.7, виграші гравців задані такою матрицею:

		Міхаель	
		T	N
Іван	T	0, 0	-5, 10
	N	10, -5	-10, -10

Реакція Міхаеля Шумахера набагато краще, ніж у Івана. Тому рішення про те, звернути йому чи ні, Іван приймає перший. Після того, як Іван визначився зі своїм вибором (і не в змозі його змінити), Шумахер все ще має в запасі декілька секунд, достатніх для прийняття рішення. У нас виходить динамічна гра, в якій Іван робить перший хід (рисунок 2.6 (a)).



а) Вихідна гра



b) Рівновага (N, NT)

Рис. 2.6

У Івана в цій грі є дві стратегії: $S_1 = \{T, N\}$, у Міхаеля – чотири: $S_2 = \{TT, TN, NT, NN\}$ (перша буква означає дію Міхаеля у тому випадку, якщо Іван звернув; друга – дію Махаеля, якщо Іван не звернув):

TT: Міхаель звертає, якщо Іван звернув; Міхаель звертає, якщо Іван не звернув;

TN: Міхаель звертає, якщо Іван звернув; Міхаель не звертає, якщо Іван не звернув;

NT: Міхаель не звертає, якщо Іван звернув; Міхаель звертає, якщо Іван не звернув;

NN: Міхаель не звертає, якщо Іван звернув; Міхаель не звертає, якщо Іван не звернув.

Які профілі будуть рівновагою? Запишемо матрицю виграшів у цій грі:

		Шумахер			
		TT	TN	NT	NN
Іван	T	0, 0	0, 0	-5, 10	-5, 10
	N	10, -5	-10, -10	10, -5	-10, -10

Спробуємо проаналізувати цю гру як статичну. Формально, ми отримаємо три рівноваги Неша: (N, TT), (N, NT) і (T, NN). Однак в двох з них - (N, TT) і (T, NN) - Міхаель вибирає неоптимальні для нього дії поза *траєкторії гри*. Розглянемо, наприклад, (T, NN). Ця пара стратегій наказує Міхаелю ніколи не звертати - навіть в тому випадку, якщо Іван з якоїсь причини відхилиться від своєї рівноважної стратегії T і не зверне. У Міхаеля буде ще декілька секунди для того, щоб передумати. Дотримуючись стратегії NN, Міхаель буде змушений розбити машину і отримати виграш -10, маючи можливість ухилитися і отримати всього -5.

Зате пара стратегій (N, NT) наказує Шумахеру оптимально, з його точки зору, реагувати на будь-який перший хід Івана. Шумахер звертає, якщо Іван не зверне, і їде прямо, якщо Іван поступається йому (рисунок 2.6 (b)). Знаючи, що Шумахер діє таким чином, Іван фактично вибирає між виграшами в -5 (якщо він зверне) і 10 (якщо він не зверне). Ця рівновага, отримана «задом наперед» - знаходженням оптимальної стратегії спочатку для Шумахера, що робить останній хід, потім для Івана, що ходить першим. Як ми побачимо в наступному розділі, такий алгоритм дозволяє знайти рівновагу в будь-якій скінченній грі, в якій гравці мають усю інформацією про всі зроблені раніше ходи.

2.1.3. Ігри з досконалою інформацією

Найбільш простим для вивчення підкласом динамічних ігор є ігри, в яких гравці роблять свої ходи строго по черзі, причому в кожен момент часу кожному гравцеві відомі всі ходи, зроблені попередніми гравцями.

Означення 2.2. Нехай кожне інформаційна множина в грі Г містить рівно одну вершину. Така гра називається ***грою з досконалою інформацією***.

В іграх з досконалою інформаціє гравець вибирає стратегію у кожній вершині, в якій йому належить хід.

Гра «лобова атака» між Іваном і Шумахером і гра «хуліган з гранатою» є прикладами ігор з досконалою інформацією. До цього ж класу відносяться такі настільні ігри, як шашки, шахи та хрестики-нулики. Підкидний дурень, навпаки, не є грою з досконалою інформацією: гравець не бачить карт інших гравців; отже, деякі (насправді, майже всі) інформаційні множини містять більше одного елемента.

Ми показали, що в грі «лобова атака» можна побудувати рівновагу, спочатку знаходячи оптимальну дію гравця, що робить останній хід. Аналогічний алгоритм можна застосувати і до будь-якої гри з досконалою інформацією, якщо кількість ходів в цій грі скінченна.

Теорема 2.1. (Кун, 1953) У будь-якій скінченній грі з досконалою інформацією є рівновага в чистих стратегіях.

Доведення:

Доведення теореми проводиться за індукцією.

Ідея наступна. Нам потрібно побудувати профіль стратегій - тобто для кожної інформаційної множини (або для кожної вершини, так як мова йде про гру з досконалою інформацією), знайти дію гравця в цій множині. Візьмемо всі вершини, такі, що нижче цих вершин гра закінчується. Знайдемо оптимальну дію кожного гравця в кожній такій вершині. Якщо оптимальних дій декілька, то візьмемо будь-яку з них. Далі розглянемо вершини одним рівнем вище і знайдемо оптимальні дії гравців в них; так як гра є скінченною, ми рано чи пізно прийдемо до початкової вершини.

Нехай Г - динамічна гра, $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_T$ – наступне сімейство ігор:
1. $\Gamma_1 = \Gamma$.
2. Γ_{t+1} одержується з гри Γ_t наступним чином:

a) Візьмемо вершину $x \in \Gamma_t$, таку, що всі вершини, які йдуть за x, є кінцевими. Нехай *i* - гравець, що робить хід у вершині *x*. Нехай $Z = \{z_1, \ldots, z_M\}$ – кінцеві вершини, які відповідають ходам гравця *i* в вершині *x*.
b) Нехай в вершині $z^* \in Z$ виграш гравця *i* максимальний серед всіх $z \in Z$. Нехай $s(x)$ – відповідна дія гравця *i*. Вилучимо вершини *Z* з дерева гри. Оголосимо *x* кінцевою вершиною з виграшами гравців $u(x) = u(z^*)$.
c) Повторюємо цю процедуру до тих пір, поки від гри не залишиться одна початкова вершина *o*.

Так як гра є скінченною, то дана процедура визначає хід $s(x)$ для всіх вершин *x* вихідної гри *Г*. За побудовою, профіль стратегій *s* утворює рівновагу. Дійсно, нехай гравець *i* в вершині *x* вибере дію $s'(x) \neq s(x)$. Якщо *Г* - гра, *s* - профіль стратегій і $x \in \Gamma$ - одна з вершин графа гри, то будемо говорити, що *x* лежить на траєкторії гри при стратегіях *s*, якщо існує додатна ймовірність того, що гра пройде через вершину *x*. Якщо *x* лежить на траєкторії гри, то виграш гравця *i* зменшиться або залишиться незмінним. Якщо *x* не лежить на траєкторії гри, то виграш гравця *i* залишиться незмінним. ■

Означення 2.3. Нехай *Г* - гра у розгорнутій формі, *x* - некінцева вершина дерева гри. ***Піддеревом гри*** *Г* з вершини *x* назвемо сукупність всіх вершин, що лежать нижче *x*, і самої вершини *x*. Піддерево називається ***підгрою***, якщо будь-яка інформаційна множина гри *Г* або цілком міститься в піддереві, або не перетинається з ним.

Отже, такі ігри, як шашки, шахи та хрестики-нулики можуть бути розв'язаними за допомогою методу зворотної індукції. Між цими іграми немає принципової різниці, однак практична можливість знаходження такого рішення залежить від числа ходів у грі. Легко перевірити, що в «хрестики-нуликах» кожен гравець може забезпечити собі нічию (або виграш, якщо його противник помилиться і відхилиться від рівноваги). Нещодавно таким же чином була вирішена одна з різновидів шашок. Комп'ютерна програма Chinook, створена професором Джонатаном Шейфером з канадського Університету штату Альберта, реалізує рівновагу, що забезпечує як мінімум нічию при будь-якої стратегії супротивника (Шейфер та ін., 2007). Теоретично, схожий результат повинен існувати і для шахів. Однак рішення шахів поки не представляється можливим, тому що дерево цієї гри дуже велика. У шашках існує близько 10^{20} можливих позицій; при цьому рішення шашок вимагало кілька місяців роботи сотень персональних комп'ютерів. У шахах число позицій перевищує 10^{40}, так що з точки зору складності стратегій, шахи настільки складніше шашок, наскільки шашки складніше гри «хрестики-нулики».

<u>Спалювання мостів</u>

Генерал командує армією, яка захищає місто, що знаходиться на березі річки. Між містом і іншим берегом прокладено міст, по якому армія може, при необхідності, відступити. На місто готується напасти ворожа армія. Генерал має можливість знищити міст до того, як ворог наважиться атакувати (B), або не нищити міст (N). Після того, як ворог спостерігає дію генерала, він вирішує, атакувати місто (A), чи ні (S). Якщо ворог напав і міст не знищений, то генерал може або прийняти рішення боротися (F), або відступити (R). Якщо міст знищений і ворог напав, то генерал може тільки битися. Виграш кожного боку становить 10, якщо на кінець гри вона володіє містом, але битви не відбулося; 0 якщо бою не було, але сторона залишилася без міста; і -5, якщо був бій.

Дерево цієї гри і його рішення показано на рисунку 2.7. У нашій грі генерал прийме рішення спалити міст для того, щоб перекрити собі можливість до відступу. Така рівновага можливо, якщо обидві сторони вважають, що збитки від бою вище, ніж цінність володіння містом.

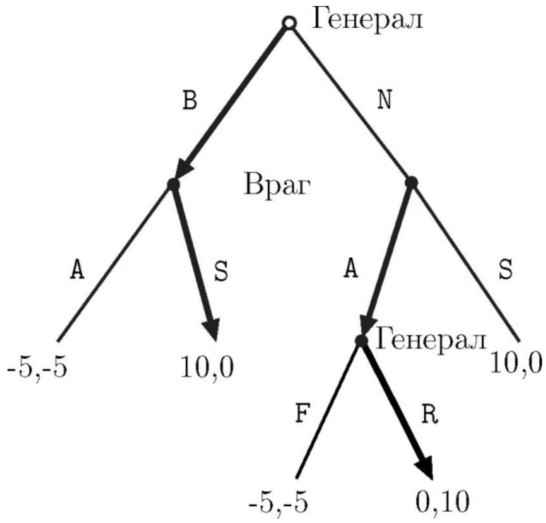


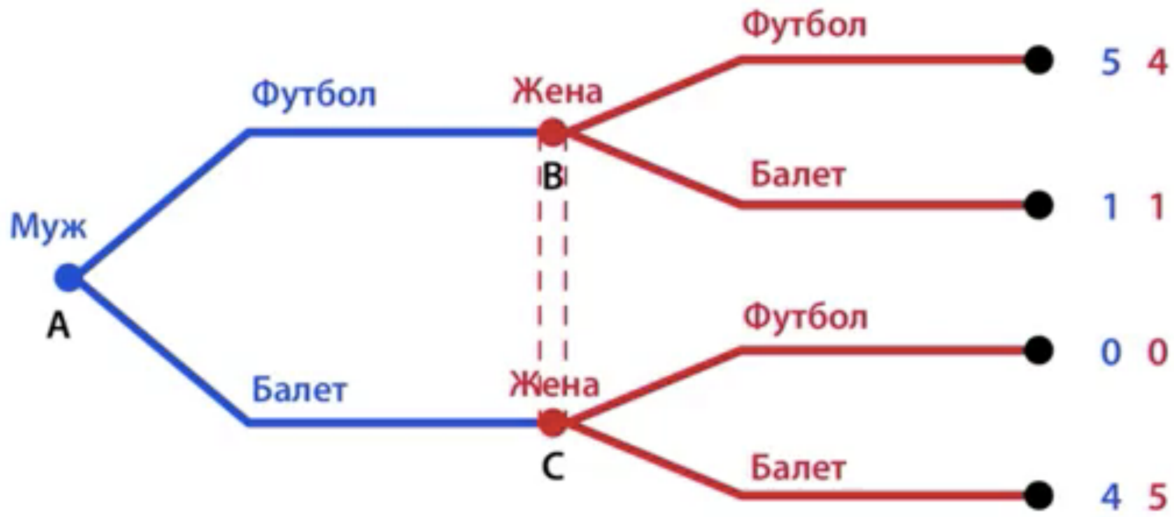
Рис. 2.7.

2.1.4. Ігри з недосконалою інформацією

Нагадаємо матрицю гри «Битва Чоловік-Жінка».

	Жінка		
Чоловік		Футбол	Балет
	Футбол	5, 4	1, 1
	Балет	0, 0	4, 5

Нагадаємо, що раніше розглядалася гра в нормальній формі, коли гравці вибирали свої стратегії одночасно (і незалежно один від одного). Припустимо тепер, що чоловік вибирає свою стратегію раніше жінки, але не повідомляє жінці, яку саме стратегію він обрав. У цьому випадку гра стає послідовною і зображується деревом гри:



У цій грі у жінки одна інформаційна множина. Вона складається двох вершин: B і C. Жінка не знає в якій саме вершині вона знаходиться. У чоловіка теж одна інформаційна множина. Вона складається з однієї вершини A і він точно знає, що він в ній знаходиться.

Означення.

Якщо хоча б у одного з гравців існує інформаційна множина, яка складається з двох або більше вершин, то така гра називається грою з недосконалою інформацією.

Стратегією гравця є набір дій гравця в усіх інформаційних множинах, в яких йому належить хід. В іграх з неповною інформацією гравець вибирає стратегію в кожній своїй інформаційній множині (на відміну від ігор з досконалою інформацією, де гравець вибирає стратегію у кожній вершині, в якій йому належить хід.

Таким чином, у даній грі з недосконалою інформацією жінка не може сказати «я буду вибирати Футбол, якщо чоловік вибере Футбол» і «я буду вибирати Балет, якщо чоловік вибере Балет». Таких стратегій у неї вже нема. У жінки буде тільки дві стратегій: Футбол, Балет, які не можуть відрізнятися для двох вершин її інформаційної множини.

Отже, можна надати більш загальне означення стратегії гравця.

Означення.

Стратегією гравця називається набір дій гравця в усіх інформаційних множинах, в яких йому належить хід.

У даній грі множини стратегій описуються таким чином:

$$S_h=\{\text{Футбол, Балет}\},\ S_w=\{\text{Футбол, Балет}\}.$$

Також, з урахуванням ігор з неповною інформацією, можна надати більш загальне означення підгри.

Означення.

В іграх з досконалою інформацією підгрою називається частина дерева, яка починається з однієї з його нетермінальної вершини.

Однак, в іграх з недосконалою інформаціє може бути так, що інформаційна множина одного з гравців не буде повністю лежати у підгрі. Тоді піддерево не можна розглядати як самостійну підгру, оскільки хтось з гравців не буде впевнений, що він взагалі знаходиться в цій підгрі.

Означення.

Підгрою в іграх з неповною інформацією називається таке довільне піддерево, що довільна інформаційна множина, яка перетинається з цим піддеревом, повністю у ньому лежить.

Наприклад, у грі «Битва чоловік-жінка», наведена вище, є всього одна підгра, яка співпадає з усією грою. Тобто, частину дерева, яка, наприклад, починається з вершини В, не можна розглядати як самостійну гру. Жінка не впевнена чи взагалі знаходиться вона в цьому піддереві, чи ні.

Ввівши ігри з недосконалою інформацією, ми можемо тепер представляти не тільки ігри в розгорнутій формі через нормальну форму, а й навпаки: довільну гру в нормальній формі можемо зобразити у вигляді гри в розгорнутій формі.

2.1.4. Змішані стратегії в динамічній грі

Як нам визначити змішані стратегії для ігор у розширеній формі? Звичайно, можна просто розширити множину чистих стратегій до множини розподілів ймовірності на ній. Як уже вказувалось в (2.1), множина чистих стратегій у грі в розширеній формі є $\prod_{h_i \in H_i} |A(h_i)|$, тобто множина всіх можливих комбінацій дій гравця у всіх його інформаційних множинах. Формально, множиною змішаних стратегій гравця і буде

$$\Delta^{\left|\prod_{h_i \in H_i} |A(h_i)| - 1\right|}.$$

Якої довжини вектор необхідний, щоб задати змішану стратегію? У грі «Лобова атака» змішана стратегія для Міхаеля Шумахера буде складатися з ймовірностей $p_1, p_2, p_3, 1 - p_1 - p_2 - p_3$, з якими він буде грати свої чисті стратегії. Для Івана змішана стратегія буде визначатися ймовірностями *q* і 1-*q*:

		Шумахер				
		TT	TN	NT	NN	
Іван	T	0, 0	0, 0	-5, 10	-5, 10	q
	N	10, -5	-10, -10	10, -5	-10, -10	1-q
		p_1	p_2	p_3	$1-p_1-p_2-p_3$	

У загальному випадку, довжина вектора, що визначає змішану стратегію, буде дорівнювати числу чистих стратегій мінус 1:

$$\dim\left(\Delta^{\left|\prod_{h_i \in H_i} |A(h_i)| - 1\right|}\right) = \prod_{h_i \in H_i} |A(h_i)| - 1. \tag{2.2}$$

Тут $\dim(\cdot)$ означає розмірність множини. Так, у Шумахера змішана стратегія задається трьома параметрами p_1, p_2, p_3.

Проте, випадкову поведінку гравців можна задати і більш простим способом. Припустимо, що Міхаель та Іван грають змішані стратегії $(p_1, p_2, p_3, 1 - p_1 - p_2 - p_3)$ і $(q, 1-q)$. Підрахуємо ймовірність того, що Міхаель зверне (тобто вибере дію T) *у тому випадку, якщо Іван зверне* (T):

$$p_1' = p_1 + p_2.$$

Аналогічно, у тому випадку, коли Іван не зверне, Міхаель зверне з ймовірністю

$$p_2' = p_1 + p_3.$$

Ймовірності (p_1', p_2') є стратегіями поведінки Міхаеля.

<u>Означення 2.3.</u> Множиною стратегій поведінки гравця i є множина

$$B_i = \underset{h_i \in H_i}{\times} \Delta^{|A(h_i)|-1}.$$

Стратегія поведінки вказує для кожної інформаційної множини з якою ймовірністю треба вибирати кожну з дій. Дослідити гру за допомогою стратегії поведінки простіше, ніж за допомого змішаних стратегій. Дійсно,

$$\dim(B_i) = \sum_{h_i \in H_i} \left(|A(h_i)| - 1 \right).$$

Якщо у гравця три інформаційні множини, в яких можливо по 3, 4 і 5 дій, то розмірність вектора стратегії поведінки буде дорівнювати 3+4+5-3=9, а розмірність вектора змішаної стратегії –

$$3 \cdot 4 \cdot 5 - 1 = 59.$$

У грі з ***досконалою пам'яттю*** кожний гравець у кожній інформаційній множині пам'ятає всю послідовність зроблених ним ходів, а також не забуває всі побачені ним ходи інших гравців.

Розглянемо приклад гри ***без досконалої пам'яті***. Водій їде додому в злегка нетверезому стані (рис. 2.8). На дорозі два повороти, на яких можна повернути праворуч (R) або поїхати прямо (S). Водієві потрібно повернути праворуч на другому повороті. Але проїхавши перший поворот, він тут же забуває, що його проїхав.

Рис. 2.8

У грі дві чисті стратегії: R і S. Обидві приносять нульовий виграш. Відповідно, виграш при будь змішаної стратегії теж буде нульовим: якщо гравець з імовірністю p відразу звертає на першому повороті (тобто грає чисту стратегію R), і з ймовірністю 1 - p ніколи не звертає (чиста стратегія S), то його очікуваний виграш буде $0 \cdot p + 0 \cdot (1-p) = 0$. Якщо ж гравець приймає стратегію поведінки «при першій-ліпшій можливості, повертати направо з ймовірністю p», то його очікуваний виграш буде $0 \cdot p + (1-p) \cdot (4 \cdot p + 0 \cdot (1-p)) = 4p(1-p)$. Стратегія поведінки $p = 1/2$ принесе йому очікуваний виграш, рівний 1. Отже, в цій грі змішані і стратегії поведінки не еквівалентні.

Вірю - не вірю

У колоді, сорочкою догори, лежать дві карти: шістка і туз. Перший гравець бере одну карту, дивиться її, і називає її величину (6 або туз). Якщо перший гравець сказав «6», то він програє другому гравцеві 1 грн. Якщо перший гравець сказав «туз», то другий гравець може повірити або не повірити. Якщо другий гравець повірив, то він програє першому гравцеві 1 грн. Якщо другий гравець не повірив, то перший гравець відкриває карту. Якщо це туз, то перший виграє 2 грн. Якщо це шістка, то перший гравець програє 2 грн.

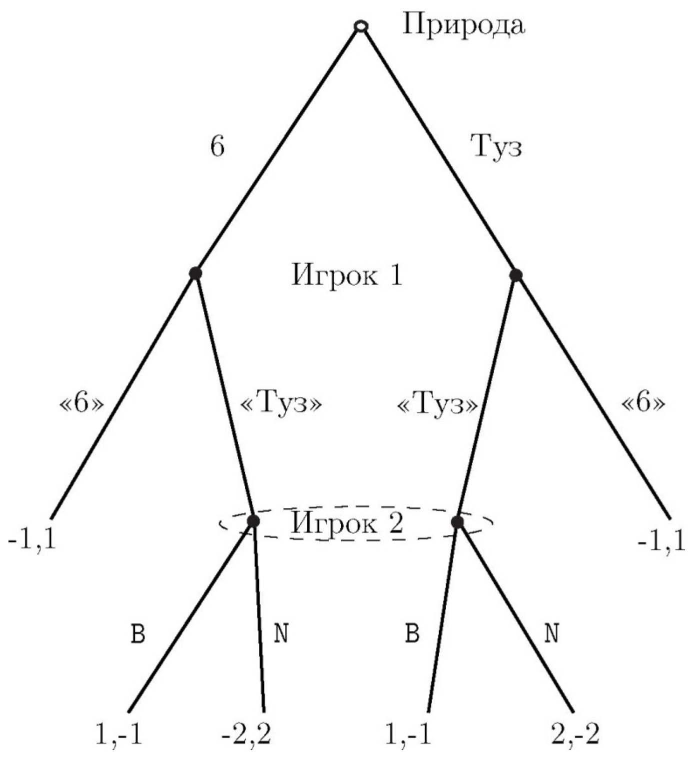


Рис. 2.9

Дерево цієї гри показано на рис.2.9. Перший хід робить Природа - вона вирішує, яку карту отримає перший гравець. У першого гравця дві інформаційні множини, і, відповідно, чотири стратегії. Однак будь-яка стратегія, яка наказує заявляти «6» при наявності туза, домінується стратегією, яка при наявності туза наказує говорити «туз». Тому поведінкової стратегією Гравця 1 будемо вважати величину *p*, рівну ймовірності того, що цей гравець заявить «туз» за умови, що у нього на руках шістка. Стратегія гравця 2 - ймовірність *q* сказати «не вірю». Виразимо очікувані виграші обох гравців через *p* і *q*:

$$u_1(p,q) = -\frac{1-p}{2} - 2q\frac{p}{2} + (1-q)\frac{p}{2} + 2\frac{1}{2}q + \frac{1}{2}(1-q) =$$
$$= p - \frac{3}{2}pq + \frac{q}{2},$$
$$u_2(p,q) = -u_1(p,q).$$

Рівновагою Неша тут є $p^* = \frac{1}{3}, \quad q^* = \frac{2}{3}$. Вона є змішаною. Дійсно, якщо другий гравець завжди вірить, то першому гравцеві буде вигідно завжди говорити «туз». В такому випадку, другий гравець повинен весь час перевіряти карту першого гравця. Однак, якщо другий гравець завжди перевіряє, то перший гравець повинен завжди говорити «6», отримавши шістку. Але тоді, якщо перший гравець ніколи не бреше, другому немає сенсу перевіряти його карту! По суті, ми маємо гру типу одноперіодної гри «інспекція». Черговість ходів тут компенсується асиметричною інформацією: перший гравець знає, яка карта у нього на руках, а другий - ні.

<u>«Лимонізація ринку»</u>

Моделі теорії ігор часто мають справу з **невизначеністю**. Джерелом невизначеності можуть бути:
- зовнішні події, що настають з певною ймовірністю (погода, карта, яка випала у грі ...),
- конфліктна природа самої гри (наступний хід в шахах залежить від багатьох факторів, але, в основному, від суперника),
- недостатня інформація про елементи гри (наприклад, різні гравці використовують різні стратегії у покері; інформація про тип гравця може значно допомогти).

Розглянемо простий приклад. Вам пропонують купити на відкритому аукціоні закриту коробку в якій може бути 1 гривня або 100 - з рівною ймовірністю. Як міг би проходити такий аукціон? Ну, за початкову ставку 1 гривня всі б хотіли купити коробку. За 20 - 30 гривень теж було б досить багато бажаючих ризикнути. Очікувана вартість коробки 50.5 (100*0.5 + 1*0.5) і, якщо всі учасники аукціону володіють однаковою інформацією про коробку і ймовірності, купити коробку за 50.5 грн означає отримати нульовий очікуваний виграш. Однак, деякі учасники можуть зробити і таку ставку - це буде залежати від готовності ризикнути, азартності. Азартність кожного гравця відома тільки йому, інші учасники її не знають. Стратегічні ситуації, коли один учасник знає щось важливе про гру, а інші - ні, отримали назву ігор з асиметричною інформацією.

Для ілюстрації проблем, що виникають за умов асиметричної інформації, розглянемо ринок вживаних автомобілів. На жаргоні “лимоном” називають машину з проблемами, “персиком” - у дуже хорошому стані.

Розглянемо гру, у якій покупець заходить у магазин та вибирає автомобіль, який йому подобається. З рівною ймовірністю цей автомобіль може виявитися “лимоном” або “персиком”.

Для спрощення пояснення головної ідеї будемо вважати, що для продавця “лимон” коштує $999, “персик” - $4999. Покупець готовий купити “лимон” не дорожче $2000, а “персик” - не дорожче $6000.

Угода здійснюється наступним чином: покупець вибирає машину і робить одну пропозицію БЕРИ-АБО-Я-ЙДУ (тобто ультиматум), продавець погоджується або ні, і гра закінчується (така постановка може здатися дещо штучною, але вона дозволяє продемонструвати суть проблеми). Ми також обмежимо можливі ціни, які може запропонувати покупець і розглянемо три варіанти: 1000, 3000, 5000. Це не дуже суттєве обмеження, оскільки ці три ціни відповідають наступним ситуаціям:

- ціна 1000 вигідна при купівлі “лимона” обом, при купівлі “персика” вигідна тільки покупцю і за будь-яку меншу ціну продавець не буде продавати жодну машину.
- ціна 3000 вигідна при купівлі “лимона” продавцю і невигідна покупцю, при купівлі “персика” вигідна тільки покупцю.
- ціна 5000 вигідна при купівлі “лимона” тільки продавцю, при купівлі “персика” - обом.

Тобто, охоплюють всі цікаві для аналізу варіанти. Намалюємо дерево гри у розширеній формі. Спочатку покупець вибирає машину, яка може виявитися одним з типів з ймовірністю 0.5 (і учасники це знають до початку торгівлі). Далі покупець робить пропозиції (сині лінії), після цього покупець погоджується або ні (чорні лінії). Кожна стратегічна ситуація закінчується виграшами: перше число - виграш покупця, друге - виграш продавця (рис. 1).

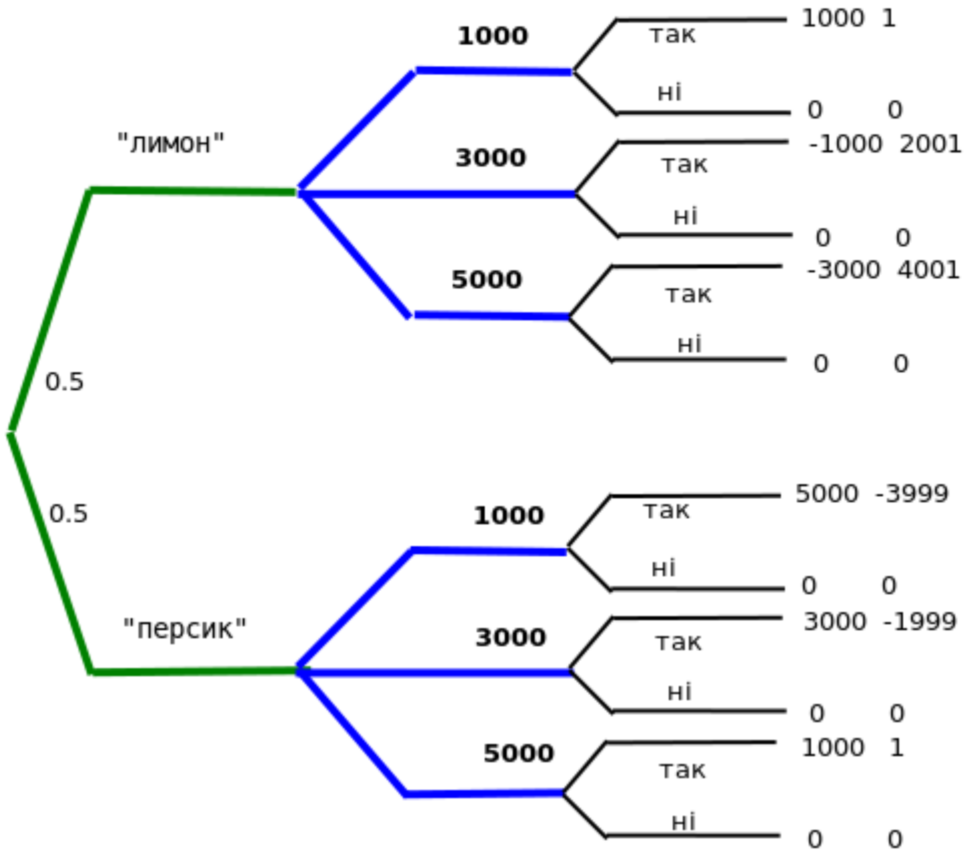


Рис. 1. Дерево гри з повною інформацією

Як розв’язувати таку гру? Метод зворотної індукції пропонує для кожного вузла виділити гілку, що дає максимальний виграш гравцю, який ухвалює рішення на цьому вузлі. Починаючи з кінцевих ланок графу, виділимо червоними найкращий вибір у кожній точці гри (рис. 2). В результаті, отримуємо два розв’язки, які є рівноважними: якщо вибраний “лимон”, покупець пропонує 1000 і продавець погоджується. Якщо вибраний “персик”, покупець пропонує 5000 і продавець погоджується.

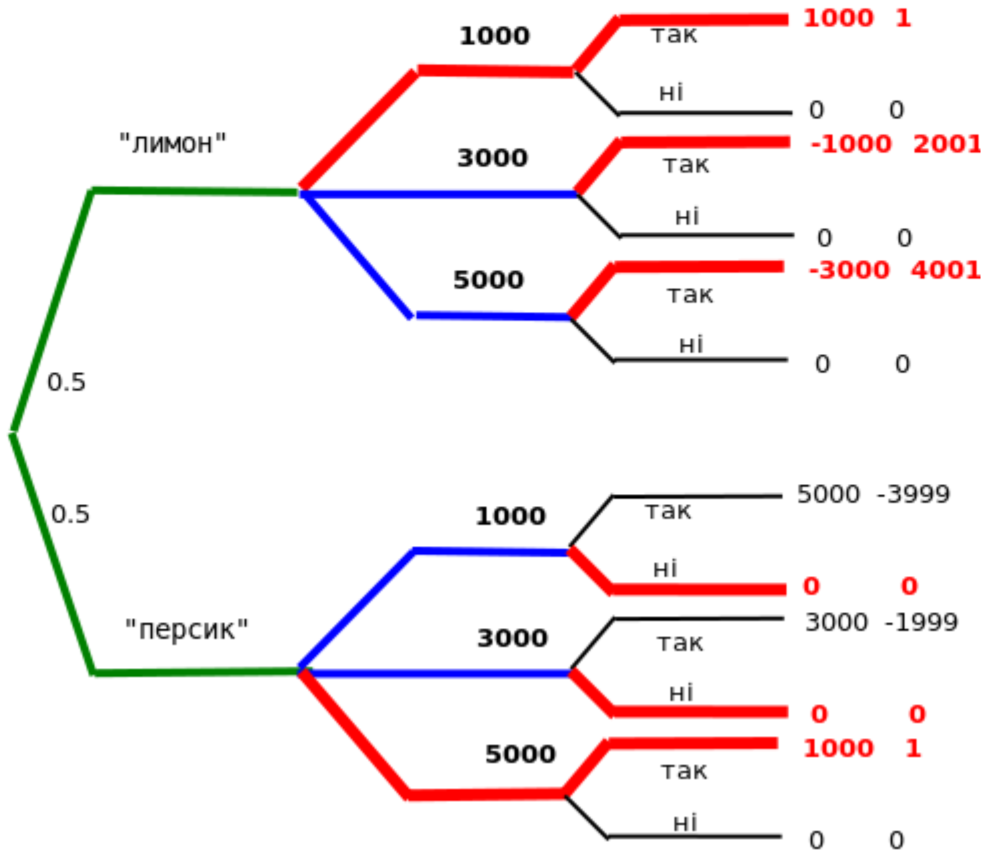


Рис. 2. Розв’язок гри з повною інформацією

Ці ціни відповідають мінімально прийнятній вартості для ухвалення угоди, очевидно, що в реальній ситуації продавець буде вимагати більшу ціну. Описана модель відповідає ситуації повної інформації, коли всі гравці знають все про гру.

Чи зміниться ситуація, якщо обидва гравці не будуть знати, за яку машину вони торгуються? Виявляється, не дуже.

Дійсно, розглянемо гру (рис. 3), в якій інформація про те, чи є машина “лимоном” або “персиком” розкривається після продажу. В цьому разі гравці максимізують очікувані виграші. Наприклад, якщо покупець пропонує 1000 і продавець погоджується, тоді у половині випадків покупець отримує “лимон” (виграші 1000 і 1) і у половині “персик” (виграші 5000 і -3999). Їх усереднена сума і буде очікуваним виграшем : 3000 і -1999. Оскільки останній вузол відповідає рішенню продавця і його очікуваний виграш від вибору рішення Так -1999, він відмовиться продавати машину за таку ціну і отримає більший виграш 0.

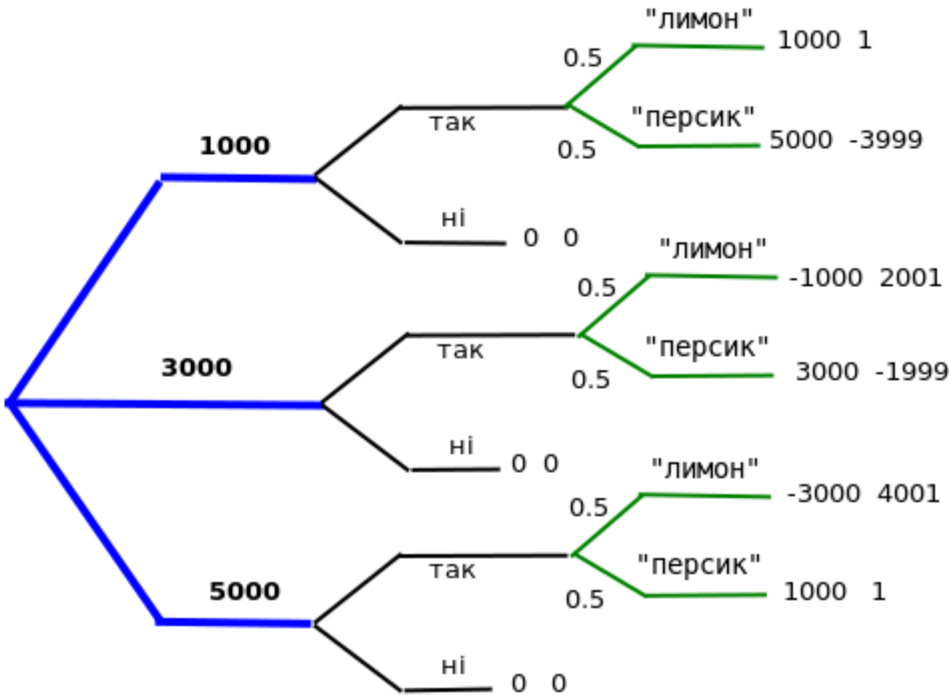


Рис. 3 Гра з неповною симетричною інформацією

Продовжуючи так само для всіх вузлів (Рис 4.), отримаємо дерево рішень для покупця (Рис. 5).

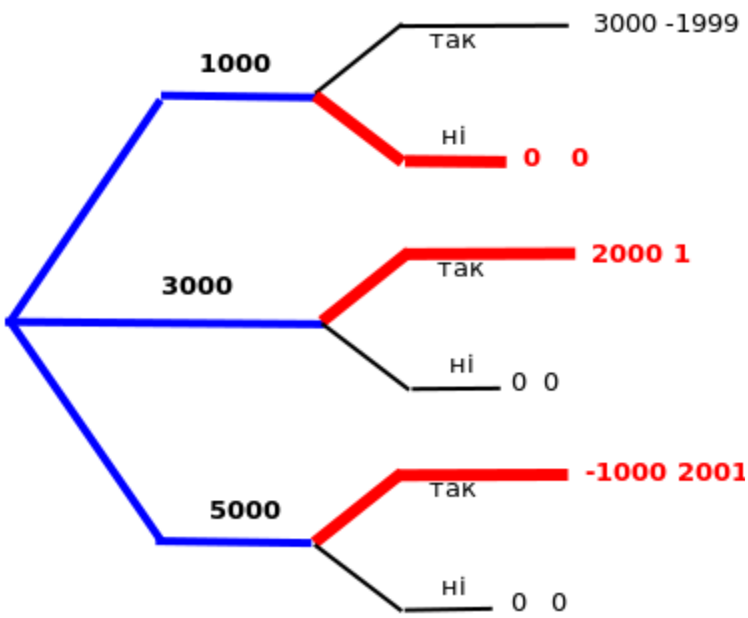


Рис. 4. Очікувані виграші

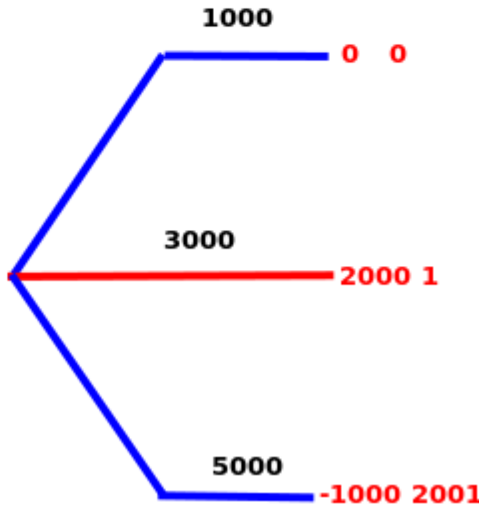


Рис. 5. Рішення покупця

У результаті найкраща стратегія покупця за умов даної гри «пропонувати 3000». Це дає прийнятний очікуваний виграш обом гравцям, але слід розуміти, що ця стратегія є ймовірносною - виграш є математичним сподіванням, тому конкретний покупець може отримати “лимон” за 3000, але може і “персик” за 3000.

Висновок: якщо обоє володіють повною інформацєю, покупець пропонує 1000 за “лимон”, 5000 за “персик” і продавець погоджується. Якщо ніхто не знає справжнього стану автомобіля, гравці максимізують очікувані виграші - покупець пропонує 3000 і продавець погоджується.

Але тепер розглянемо третій, найбільш цікавий варіант. Для неспеціаліста відрізнити “лимон” від “персика” непросто. А от продавець, який цим професійно займається і, до того ж, має можливість дослідити машину до продажу, може це зробити. Що буде, якщо продавець, на відміну від покупця, знає, за що йдуть торги? На рис. 6 зображена гра з асиметричною інформацією. Цей факт описується пунктирною лінією, що з’єднує точки ухвалення рішення для покупця. Покупець пропонує свою ціну в ситуації, коли він не знає “лимон” чи “персик” перед ним. А от продавець це знає, тому його рішення розділені на окремі вузли.

Застосуємо метод зворотної індукції. Рішення гравців позначені червоними лініями. Але тепер…. все інакше - якщо покупець пропонує 1000, то якщо він потрапляє на “лимон”, транзакція відбувається, а якщо на “персик”, продавець відмовляється. Для інших варіантів все ще гірше. Пропонуючи 3000, покупець може розраховувати тільки на “лимон”, а пропонуючи 5000 він може отримати “персик”, але лише з ризиком отримати “лимон”. Його очікуваний виграш в цьому разі дорівнює -1000. Повний розв’язок показаний на рис. 7.

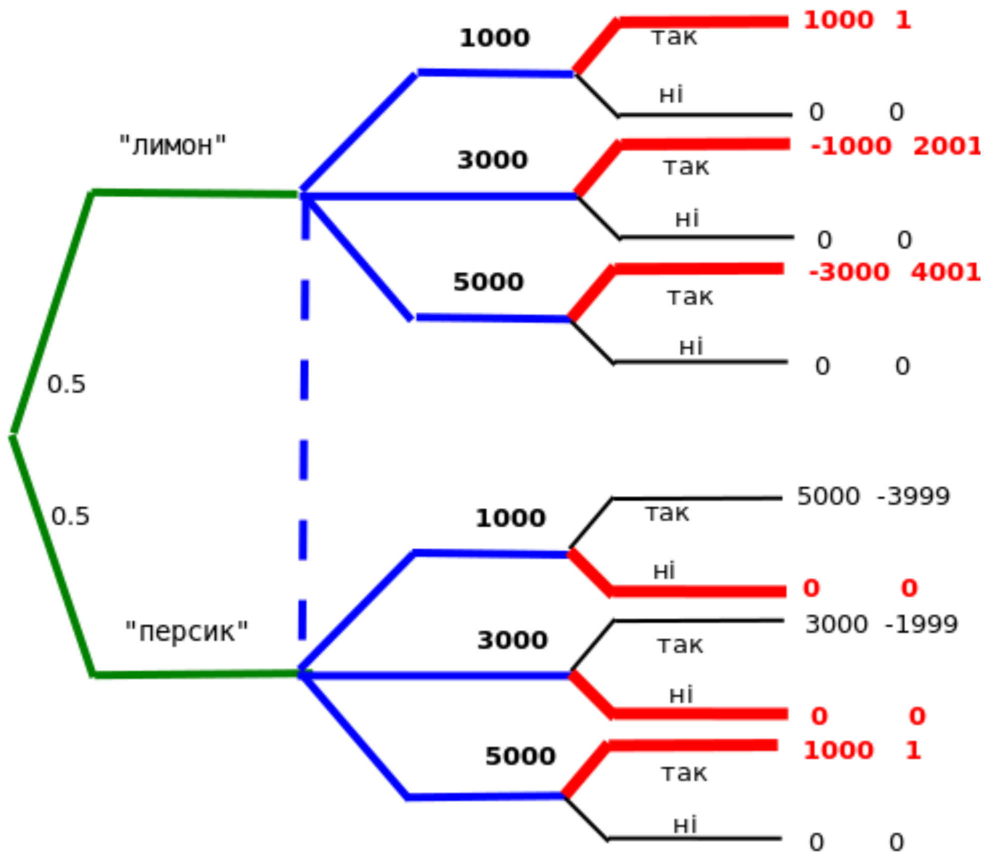


Рис. 6. Гра з асиметричною інформацією

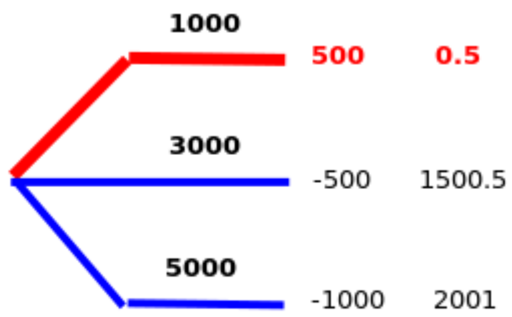


Рис 7. Варіанти для покупця

Вперше ця ідея була висловлена в статті [Akerlof, George A. "The market for “lemons”: Quality uncertainty and the market mechanism." Uncertainty in Economics. 1978. 235-251.].

Цікаво, що Акерлоф не міг певний час опублікувати цю роботу. Перші три спроби виявились невдалими, оскільки рецензенти двічі давали негативну оцінку через “очевидність” і один раз через “неправильність” (мотивація була така, що якби це було вірно - економіка не могла б існувати). Однак після опублікування виявилось, що ідея впливу асиметричної інформованості на учасників ринку не така очевидна, як здається. Акерлоф, в решті решт, отримав Нобелівську премію з економіки (2001 року), а його стаття має 28552 посилання (дані Google Scholar).

Підкреслимо ще деякі моменти:

- Асиметрична інформація руйнує ринок “персиків”. Їх неможливо купити, неможливо продати (для раціональних гравців), залишається тільки ринок “лимонів”. Це явище отримало назву «лимонізація ринку».
- Припустимо, Ви все одно бажаєте купити “персик”. Ви вибираєте автомобіль, питаєте у продавця: Це “персик”? Продавець запевняє, що це найкраща машина у його салоні. В результаті довгих торгів Ви знижуєте ціну до $3000 і … продавець погоджується. В цей момент з’являється відчуття, що щось тут не так. Згода продавця - це сигнал, який означає, що ця машина точно не “персик”. Такий от цікавий наслідок - на твої умови погодились і ти зрозумів, що треба тікати.
- Взагалі структура гри створює продавцям стимул продавати тільки “лимони”. Після публікації роботи стало зрозуміло, що процеси лимонізації зустрічаються у багатьох областях.
- Одним із способів боротьби з лимонізацією ринку вживаних автомобілів став carfax - база даних з історією всіх вживаних автомобілей Америки. Вона з’явилася в 1984 році.

2.1.5. Досконалість по підіграм

Метод оберненої індукції можна застосовувати не тільки для ігор з досконалою інформацією.

<u>Означення 2.4.</u> Нехай Г – гра у розгорнутій формі. ***Підгра*** $\Gamma(x)$ – це частина дерева гри, яка починається з деякої вершини *x*, і задовольняє наступним властивостям:

1. *x* – єдиний елемент у своїй інформаційній множині;
2. Інформаційні множини, які містять вершини з підгри $\Gamma(x)$, не містять вершин, що лежать поза дерева підгри $\Gamma(x)$.

Наведемо приклад - варіацію на тему гри «спалювання мостів». Генерал повинен захищати місто на березі річки. До того, як ворог нападає, генерал приймає рішення, спалювати міст, що з'єднує місто з іншим берегом (B), чи ні (N). На цей раз ворог не є гравцем, і нападає автоматично. Далі командири двох загонів (підлеглі генерала) приймають рішення: бігти з поля бою (R), чи ні (F).

У разі, коли міст не зруйнований, виграші командирів в залежності від прийнятих ними рішень такі:

		Командир 2	
		R	F
Командир 1	R	3, 3	5, 2
	F	2, 5	4, 4

Якщо міст знищений, то відступаючому загону доведеться наводити переправу під час бою. Виграші командирів тоді будуть:

		Командир 2	
		R	F
Командир 1	R	1, 1	3, 2
	F	2, 3	4, 4

Нарешті, виграш генерала дорівнює 1, якщо місто залишилишився захищати хоча б один загін, і 0, якщо обидва загону втікли. Дерево цієї гри показано на рис. 2.10.

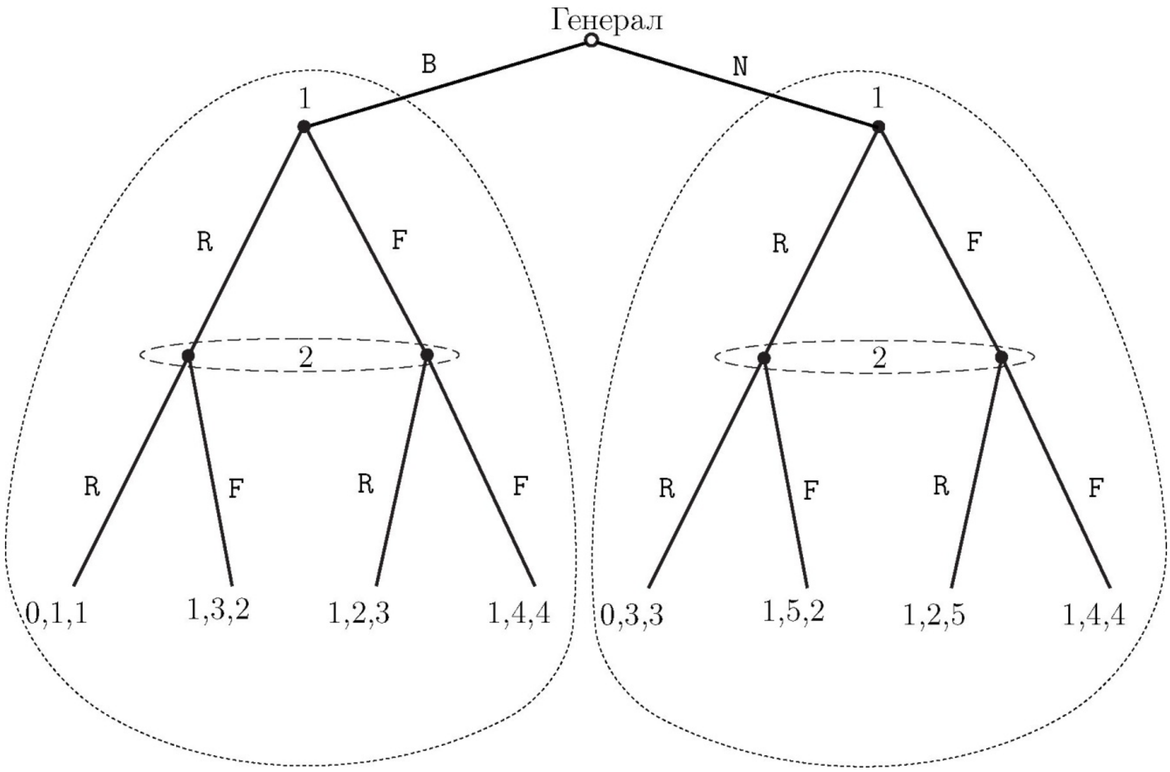


Рис. 2.10

Формально, ця гра не є грою з досконалою інформацією, так як після першого ходу генерала, два командира приймають рішення одночасно. Однак цю гру можна вирішити способом, дуже схожим на метод зворотної індукції, який використовується нами для вирішення ігор з досконалою інформацією. У нас дві підгри, що відповідають кожній з двох можливих дій генерала. У першій підгрі, коли міст не спалений, рівноважний профіль стратегій першого і другого командира буде (R, R). У другій підгрі, коли міст спалений, рівновагою буде (F, F). Отже, генерал отримує виграш 0, якщо робить хід N, і 1, якщо робить хід B. Дамо визначення рівноваги, яке ми отримали.

Означення 2.5. Нехай *Г* - динамічна гра. Профіль стратегій є ***досконалим за підіграми***, якщо він є рівновагою для кожної з підгри *Г*.

Будь-яка рівновага, яка отримана методом зворотної індукції, є досконалою за підіграми.

У грі «лобова атака» дві підгри. У кожній підгрі Міхаель Шумахер приймає рішення, звернути йому чи ні. Кожна підгра відповідає одному з рішень Івана (звернути / не звернути).

2.2. Ігри, що повторюються

Дуже часто ігрові взаємодії між одними і тими ж гравцями повторюються. Дві фірми, що конкурують одна з одною, розраховують на те, що їх конкуренція триватиме і в наступному році, і через два роки. Люди, що відповідають за кредитно-грошову політику в центральному банку, швидше за все, будуть відповідати за неї і через рік. Чи може характер ігрових взаємодій, що повторюються, впливати стратегії гравців? Як правило, відповідь на це питання залежить від того, чи є горизонт планування гравців скінченним, чи ні; результати нашого аналізу будуть якісно відрізнятися для ігор , які скінченне і нескінченне разів повторюються.

2.2.1. Ігри, які повторюються скінченне число разів

Розглянемо гру «Дилема в’язня» з такою матрицею виграшів:

		Вася	
		D (мовчати)	H (зізнатися)
Петя	D (мовчати)	3, 3	0, 5
	H (зізнатися)	5, 0	1, 1

Як поведуть себе Петро та Василь, якщо їм доведеться зіграти в «дилему в'язня» два рази поспіль? На рис. 2.11 показано (без виграшів) дерево цієї гри.

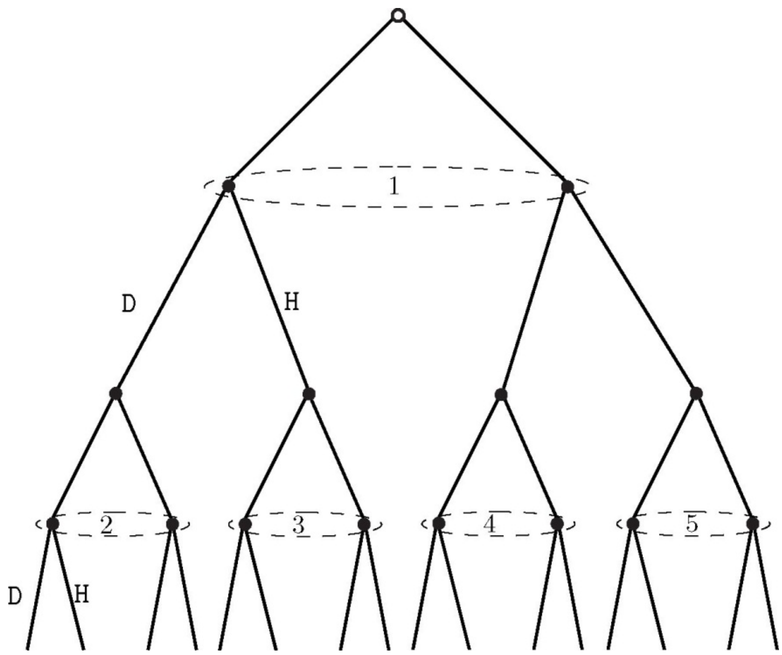


Рис. 2.11

Цифрами 1-5 позначені інформаційні множини другого гравця (Васі). Множина 1 відповідає прийняттю рішення: мовчати (D) або зізнатися (H) в момент часу 1, тобто коли Вася і Петя грають «дилему в'язня» в перший раз.

Множини 2-5 відповідають прийняттю рішення в момент часу 2, для кожного з чотирьох можливих варіантів результату гри на першому етапі. Дотримуючись формального визначення чистої стратегії в динамічній грі, виходить, що у Васі (і, відповідно, у Петі) $2^5 = 32$ чистих стратегій. Деякі з цих стратегій є еквівалентними. Дійсно, розглянемо Василя стратегії DDHDH і DDDDD. Вони відрізняються одна від одної тільки інструкцією щодо дій в інформаційних множинах 3 і 5. Однак кожна з цих стратегій передбачає дію D в інформаційній множині 1, що робить досягнення множин 3 і 5 неможливим, незалежно від стратегії, обраної іншим гравцем. Формально, DDHDH і DDDDD відповідають наступним визначенням:

Означення 2.6. Нехай *Г* – гра у розгорнутій формі. Стратегії σ_i, σ_i' гравця *і* є еквівалентними, якщо $u_j\left(\sigma_i, \sigma_{-i}\right) = u_j\left(\sigma_i', \sigma_{-i}\right)$ для всіх j, σ_{-i}.

Можна підрахувати, що в «дилемі в'язня», зіграної 2 рази, у кожного гравця 8 нееквівалентний стратегій. При цьому досконале за підіграми рівновага в цій грі одна. Дійсно, в кожній з чотирьох підігор на другому етапі в рівновазі обидва гравці виберуть H. Це означає, що виграш кожного гравця у всій грі дорівнює його виграшу на першому етапі плюс одиниця (виграш на другому етапі). Отже, в момент часу 1 гравці також виберуть H. Якщо «дилема в'язня» повторюється скінченне число разів, то рівновага, досконала за підіграми, все одно єдина: (H, H) в кожен момент часу.

Означення 2.7. Нехай *Г* – гра у розгорнутій формі, $T > 1$ –натуральне число. Позначимо за $G(T)$ динамічну гру, у якій гра *Г* повторюється *Т* разів, а виграш гравця і складає

$$u_i = \sum_{t=1}^{T} u_i\left(a_t\right),$$

де $a_t \in A$ –дії гравців у моменти $t = 1, \ldots, T.$

Саму гру *G* ми будемо називати ***покроковою грою***, а елементи множини стратегій покрокової гри $a \in A$ - діями.

Що ми можемо сказати про множину досконалих рівноваг у грі, що повторюється?

<u>Теорема 2.3.</u> Нехай $G = \left\langle I, A, u \right\rangle$ – гра в нормальній формі з єдиною рівновагою $a^*, \quad T > 1$. Тоді в грі $G(T)$ існує єдина досконала за підіграми рівновага Неша, така, що в кожної підгрі, що починається з $t \geq 1$, гравці виберуть дії a^*.

Доведення цієї теореми проходить за індукцією. Всі підігри $G(T)$, що починаються в момент часу $t = T$ збігаються з покрокової грою *G*. Отже, всі підігри, що починаються з $t = T - 1$, збігаються з покрокової грою *G*, з точністю до додавання $u(a^*)$ до функцій виграшів, і дії рівноваги в момент $t = T - 1$ теж будуть a^*. Згідно з принципом індукції, це вірно для всіх $t = 1, \ldots, T.$

Що зміниться, якщо в покрокової грі декілька рівноваг? Зауважимо, що кожному профілю стратегій рівноваги в покрокової грі відповідає досконала рівновага в грі, що повторюється, в якій цей профіль грається в усі моменти часу, в тому числі і у всіх вершинах, що лежать поза траєкторії гри. Однак, як видно з наступного прикладу, можуть існувати й інші рівноваги.

Ігри, що повторюються, з декількома рівновагами

Якщо покрокова гра має єдину рівновагу Неша, то у грі, яка повторюється скінченну кількість разів, на кожному етапі в будь-якій підгрі реалізується профіль дій, відповідний рівновазі в покрокової грі. Переконаємося, що для ігор з декількома рівновагами це не так. Розглянемо таку гру, повторену два рази.

		Гравець 2		
		A	B	C
Гравець 1	A	1, 1	5, 0	0, 0
	B	0, 5	4, 4	0, 0
	C	0, 0	0, 0	3, 3

Як побудувати множину досконалих за підіграми рівноваги в цій грі? У момент часу t = 2 гравці повинні реалізовувати рівноважні стратегії: або (A, A), або (C, C). Причому профіль стратегій, зіграних в t = 2 може залежати від дій, зіграних в t = 1. Всього в покрокової грі можливо 9 профілів дій; кожному профілю дій в момент t = 1 відповідає одна з двох рівноваг в t = 2. Отже, для того, щоб знайти всі досконалі рівноваги в грі, що повторюється 2 рази, нам необхідно знайти всі рівноваги в кожній з 2^9 = 512 ігор, утворених таким чином. Нехай, наприклад, гравці в t = 2 реалізують (C, C) тільки якщо в t = 1 було реалізовано (B, B). Це відповідає наступній грі в t = 1:

		Гравець 2		
		A	B	C
Гравець 1	A	2, 2	6, 1	1, 1
	B	1, 6	7, 7	1, 1

	C	1, 1	1, 1	4, 4

У цій грі три рівноваги: (A, A), (B, B) і (C, C). При цьому профіль дій (B, B) не є рівновагою в покрокової грі. Однак, він може бути реалізований в момент часу t = 1 гри, що повторюється - якщо гравці очікують, що тільки в цьому випадку вони зіграють Парето-ефективне рівновагу (B, B) в момент часу t = 2. Це - ще одне свідчення того, що очікування щодо поведінки в майбутньому можуть впливати на поведінку в сьогоденні.

Однак даний підхід до конструювання досконалих за підіграми рівноваг в іграх, що повторюються скінченне число разів, може бути підданий критиці. Припущення про те, що кожному з профілів дій в перший момент часу може бути присвоєно будь-яка з можливих рівноваг в другий момент часу, може здатися занадто сміливим, так як у вихідній грі одні рівноваги можуть Парето-домінувати інші; якщо ми припустимо, що гравці в підіграх не гратимуть Парето-домінованих рівноваг (тобто будуть «передомовлятися»), то множина досконалих за підіграми рівноваг звузиться.

Практична цінність стратегії «око за око»

> Дружин і дітей в таких випадках не переселяють, так як навіть в разі «війни» їм не загрожує небезпека. В іншому випадку це стало б найбільш вразливим місцем кожного сімейства, і будь-яка подібна операція привела б до такої ж у відповідь. (М. П'юзо, «Хрещений батько».)

У своїй знаменитій книзі «Еволюція кооперації», професор Мічиганського університету Роберт Аксельрод описує турнір між комп'ютерними програмами, які змагалися в гру «дилема в'язня» з повтореннями. Кожна програма реалізовувала якусь марківську стратегію. У першому турнірі брало участь 15 програм, представлених різними фахівцями в галузі економічних наук, математики, психології, інформаційних технологій. Кожна програма п'ять разів грала проти кожної іншої програми, на кшталт футбольного чемпіонату. Число ходів в кожній грі було випадковим і в середньому дорівнювало 150. Успіх програми за кожну гру дорівнював її середньому виграшу за хід. Так само визначався і підсумковий рейтинг програми.

Найбільш успішним алгоритмом виявилася найпростіша програма - стратегія «око за око». Вона поєднувала в собі три якості. По-перше, ця стратегія була «хорошою», тобто перший хід був кооперативним; ця програма першою не починала війну. По-друге, якщо програма - суперник грала некооперативного стратегію H, то стратегія «око за око» зраху відповідала тим же. Таким чином, ця стратегія не давала себе експлуатувати. Нарешті, по-третє, стратегія «око за око» володіла короткою пам'яттю. Якщо суперник переключався з некооперативного стратегії на кооперативну, то «око за око» теж переключалася на кооперативну стратегію і забувала про минулий конфлікт. Це дозволяло уникати затяжних конфліктів, і дозволило стратегії виграти не тільки цей турнір, але і наступний, в якому брало участь 63 програми (деякі з яких містили понад 100 рядків коду).

У стратегії «око за око» є ще одна перевага, що не реалізоване при грі між комп'ютерними програмами, але вкрай важливе в людських відносинах: ця стратегія є зрозумілою іншим гравцям. Як приклад Аксельрод приводить систему негласних домовленостей між окремими підрозділами ворогуючих армій, яка існувала на Західному фронті під час Першої світової війни. На Західному фронті більшу частину часу ворогуючі армії проводили в окопах, розділених декількома сотнями метрів нейтральної території. Під час активних бойових дій обидві сторони несли величезні втрати; однак за часів затишшя солдати ворогуючих армій уникали стріляти один в одного (Аксельрод, стор. 74). Мало того, командири невеликих підрозділів часто не дозволяли артилерійським батареям стріляти на поразку, бо точне попадання у ворожий об'єкт викликало негайну реакцію з боку противника; артилерійський вогонь був призначений для того, щоб створити видимість ведення бойових дій і відзвітувати перед вищим начальством (яке було розквартировано на достатньому видаленні від лінії фронту і чиї життя не перебували в безпосередній небезпеці). Ця негласна система отримала назву «живи і дай жити іншим» - проіснувала майже до кінця війни. Британські воєначальники стали вимагати від своїх підлеглих проводити невеликі рейди на ворожу територію, і в якості звіту про виконану роботу пред'являти або захоплених в полон солдатів противника, або власні людські втрати. Це зруйнувало систему взаємної довіри, що існувала між солдатами протиборчих сторін. При досить великій ймовірності нападу з боку супротивника найкращою стратегією буде вести попереджуючий вогонь на поразку, замість того, щоб стріляти повз в надії, що противник не стане потім стріляти в вас. Така зміна тактики з боку британського керівництва зробило війну більш кровопролитної і прискорило її кінець.

Глава 3. Антагоністичні ігри в нормальній формі

3.1. Означення антагоністичної гри у нормальній формі

<u>Означення 3.1.</u> Система $\Gamma = \left(X, Y, K\right)$, де *X* і *Y* – непорожні множини, і функція $K : X \times Y \to R^1$, називається ***антагоністичною грою у нормальній формі***.

Елементи $x \in X$, $y \in Y$ називаються ***стратегіями*** гравців 1 та 2 відповідно у грі *Г*, елементи декартового добутку $X \times Y$ (т.т. пари стратегій

(x, y), де $x \in X, \quad y \in Y$) – ***ситуаціями***, а функція *K* називається ***функцією виграшу*** гравця 1. Множини стратегій розглядаємо скінченні. Виграш гравця 2 в ситуації (x, y) покладається рівним (-*K*), тому функція *K* також називається функцією виграшу самої гри *Г*, а гра *Г* – ***грою з нульовою сумою***.

Для того, щоб задати гру, необхідно визначити множини стратегій *X* і *Y* гравців 1 і 2, а також функцію виграшу *K*.

Гравці одночасно і незалежно один від одного вибирають стратегії $x \in X, \quad y \in Y$. Після чого гравець 1 одержує виграш, рівний $K(x, y)$, а гравець 2 одержує виграш -$K(x, y)$.

Нехай гравець 1 у матричній грі $\Gamma = (X, Y, K)$ має *m* стратегій. Впорядкуємо множину *X* стратегій першого гравця, тобто встановимо взаємно однозначну відповідність між множинами $M = \{1, 2, \ldots, m\}$ і *X*. Аналогічно, якщо гравець 2 має n стратегій, то можна встановити взаємно однозначну відповідність між множинами $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ і *Y*. Тоді гра *Г* повністю визначається заданням матриці $A = (a_{ij}), \quad a_{ij} = K(x_i y_i), \quad (i, j) \in M \times N$, $(x_i y_i) \in X \times Y, \quad i \in M, \quad j \in N$ (звідси і назва гри – матрична). При цьому гра *Г* реалізується наступним чином. Гравець 1 вибирає рядок $i \in M$, а гравець 2 (одночасно з ним) – стовпчик $j \in N$. Після цього гравець 1 одержує виграш a_{ij}, а другий – (-a_{ij}). Якщо $a_{ij} < 0$, то це означає програш першого гравця і виграш другого.

Гру *Г* з матрицею виграшу А позначимо Γ_A і назвемо $(m \times n)$–грою. Інколи індекс А будемо опускати.

Нумерація стратегій в матричної грі може проводитися різними способами, тому кожному відношенню порядку, строго кажучи, відповідає своя матриця. Таким чином, кінцева антагоністична гра може бути описана різними матрицями, відрізняються один від одного лише порядком рядків і стовпців.

Приклад 1. (Оборона міста)

Цей приклад відомий в літературі під назвою «**гра полковника Блотто**» [4]. Полковник Блотто має *m* полків, а його супротивник – *n* полків. Противник захищає дві позиції. Позиція буде зайнята полковником Блотто, якщо на ній наступаючі полки виявляться в чисельній перевазі. Протиборчим сторонам потрібно розподілити полки між двома позиціями.

Визначимо виграш полковника Блотто (гравця 1) на кожній з позиції. Якщо у нього на позиції полків більше, ніж у супротивника (Гравця 2), то його виграш на цій позиції дорівнює числу полків противника плюс один (заняття позиції рівносильно захоплення одного полку). Якщо у гравця 2 полків на позиції більше, ніж у гравця 1, то гравець 1 втрачає всі свої полки на цій позиції і ще одиницю (за втрату позиції). Якщо обидві сторони мають однакове число полків на позиції, то має місце нічия і кожна зі сторін нічого не отримає. Загальний виграш гравця 1 дорівнює сумі виграшів на обох позиціях.

Гра, очевидно, антагоністична. Опишемо стратегії гравців.

Нехай, для визначеності, $m > n.$ Гравець 1 має наступні стратегії:

$x_0 = (m,0)$ – це послати всі полки на першу позицію,

$x_1 = (m-1,1)$ – це $(m-1)$ полк послати на першу позицію, а один – на другу,

$x_2 = (m-2,2)$ – це $(m-2)$ полк послати на першу позицію, а два – на другу, і т.д.,

$$x_{m-1} = (1,m-1), \quad x_m = (0,m).$$

Його противник (гравець 2) має такі стратегії:

$$y_0(n,0), \quad y_1 = (n-1,1),\ldots,y_n = (0,n).$$

Нехай гравець 1 вибрав стратегію x_0, а гравець 2 – стратегію y_0. Знайдемо виграш a_{00} гравця 1 у цій ситуації. Його виграш дорівнює *n*+1 (одиниця за здержування позиції). На другій позиції – нічия. Тому в сумі a_{00} = *n*+1. Обчислимо a_{01}. Оскільки $m > n-1$, то на першій позиції виграш гравця 1 дорівнює *n*-1+1= *n*. На другій позиції виграє гравець 2. Тому гравець 1 має на другій позиції програш, рівний -1. Таким чином, $a_{01} = n-1.$

Міркуючи аналогічно, одержуємо $a_{0j} = n - j + 1 - 1 = n - j, \quad 1 \le j \le n.$

Якщо $m-1 > n$, то $a_{10} = n+1+1 = n+2, \quad a_{11} = n-1+1 = n,\ldots,$

$$a_{1j} = n - j + 1 - 1 - 1 = n - j - 1, \quad 2 \le j \le n.$$

У загальному випадку елементи $a_{ij}, \quad i = 1,\ldots,m, \quad j = 1,\ldots,n,$ матриці виграшів обчислюються наступним чином:

$$a_{ij}K\left(x_i, y_j\right)=\begin{cases} n+2, & m-i>n-j, i>j; \\ n-j+1, & m-i>n-j, i=j; \\ n-j-i, & m-i>n-j, i<j; \\ -m+i+j, & m-i<n-j, i>j; \\ j+1, & m-i=n-j, i>j; \\ -m-2, & m-i<n-j, i<j; \\ -i-1, & m-i=n-j, i<j; \\ -m+i-1, & m-i<n-j, i=j; \\ 0, & m-i=n-j, i=j. \end{cases}$$

Так, наприклад, при m=4, n=3, розглянувши всі можливі ситуації, одержимо матрицю виграшів A для цієї гри:

$$A=\begin{array}{c} \\ x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} y_0 & y_1 & y_2 & y_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \end{array}$$

<u>Приклад 2. (Гра на відхилення)</u>

Гравці 1 та 2 вибирають цілі числа І та j між 1 і n, при цьому гравець 1 виграє величину $|i-j|$. Гра антагоністична. Матриця виграшів цієї гри квадратні, розмірності $(n\times n)$, де $a_{ij}=|i-j|$. Так, наприклад, якщо n=4, то матриця А гри має вигляд:

$$A=\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

<u>Приклад 3. (Гра «Напад-захист»)</u>

Нехай гравець 1 планує атакувати один із об'єктів $c_1,\dots,c_n$, які мають додатні цінності $\tau_1>0,\dots,\tau_n>0.$ Гравець 2 захищає один із цих об'єктів. Будемо вважати, що якщо атаковано незахищений об'єкт $c_i,$ то він з достовірністю уражається (гравець 1 виграє τ_i), а захищений – уражається з ймовірністю $1>\beta_i>0$ (об'єкт $c_i,$ витримує напад з ймовірністю $1-\beta_i>0$), тобто гравець 1 виграє (в середньому) $\beta_i\tau_i,\quad i=1,\dots,n.$

Тоді задачу вибору об'єкта нападу (для гравця 1) і об'єкта захисту (для гравця 2) зводиться до гри з матрицею виграшів

$$A=\begin{pmatrix} \beta_1\tau_1 & \tau_1 & \dots & \tau_1 \\ \tau_2 & \beta_2\tau_2 & \dots & \tau_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \tau_n & \tau_n & \dots & \beta_n\tau_n \end{pmatrix}.$$

Приклад 4. (Гра дискретного пошуку)

Маємо *n* комірок. Гравець 2 ховає предмет в одній з цих комірок, а гравець 1 хоче його знайти. При перевірці *i*-ої комірки гравець 1 витрачає $\tau_i>0$ зусиль, причому ймовірність знайти предмет в *i*-й комірці (якщо він там схований) дорівнює $0<\beta_i\le 1,\quad i=1,\dots,n.$ Якщо предмет знайдено, то гравець 1 одержує прибуток α. Стратегіями гравців є номери комірок, в яких гравці відповідно шукають і ховають предмет. Виграш гравця 1 дорівнює різниці між очікуваним прибутком і зусиллями, які затрачено на пошук. Таким чином, задача пошуку предмета зводиться до матричної гри з матрицею виграшів:

$$A=\begin{pmatrix} \alpha\beta_1-\tau_1 & -\tau_1 & -\tau_1 & \dots & -\tau_1 \\ \tau_2 & \alpha\beta_2-\tau_2 & -\tau_2 & \dots & -\tau_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\tau_n & -\tau_n & -\tau_n & \dots & \alpha\beta_n-\tau_n \end{pmatrix}.$$

Приклад 5. (Пошук «шумного» об'єкта)

Припустимо, що гравець 1 веде пошук рухомого об'єкта (гравця 2) з метою його виявлення. Гравець 2 має протилежну мету (тобто прагне відхилитися від зустрічі). Гравець 1 може рухатися зі швидкостями $\alpha_1=1,\quad \alpha_2=2,\quad \alpha_3=3,$ а гравець 2 – відповідно зі швидкостями $\beta_1=1,\quad \beta_2=2,\quad \beta_3=3.$ Дальність дії засобу виявлення гравця 1 в залежності від швидкості руху учасників гри приведено у матриці:

$$D = \begin{array}{c} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \\ \beta_1 \quad \beta_2 \quad \beta_3 \end{array}$$

Стратегіями гравців є швидкості руху, а в якості виграшу гравця 1 в ситуації (α_i, β_j) візьмемо продуктивність пошуку $a_{ij} = \alpha_i d_{ij}$, $i = 1,2,3$, d_{ij} – елемент матриці D. Тоді задача вибору швидкостей гравців при пошуку-відхиленні може бути представлена матричною грою з матрицею

$$A = \begin{array}{c} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 6 & 8 & 10 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}. \\ \beta_1 \quad \beta_2 \quad \beta_3 \end{array}$$

3.2. Максимінні та мінімаксні стратегії

Розглянемо антагоністичну гру $\Gamma = (X, Y, K)$. Тут кожний з гравців вибором стратегії прагне максимізувати свій виграш. Але для гравця 1 він визначається функцією *K (x, y)*, а для другого - (-*K (x, y)*), т. т. цілі гравців прямо протилежні. При цьому зауважимо, що виграш гравця 1 (2) визначено на ситуаціях $(x, y) \in X \times Y$, що складаються в процесі гри. Але кожна ситуація, а отже, і виграш гравця залежать не тільки від його вибору, але і від того, яка стратегія буде обрана противником. Тому, прагнучи отримати якомога більший виграш, кожен гравець повинен враховувати поведінку супротивника.

Пояснимо сказане на прикладі гри «оборона міста». Якщо гравець 1 хоче отримати максимальний виграш, то він повинен прийняти стратегію x_0 (або x_4). В цьому випадку, якщо гравець 2 застосує стратегію y_0 (y_3), то перший отримає виграш, рівний 4 одиницям. Але якщо гравець 2 застосує стратегію y_3 (відповідно y_0), то гравець 1 отримає виграш, рівний 0, т. т. втратить 4 одиниці. Аналогічні міркування можна провести і для гравця 2.

У теорії ігор передбачається, що обидва гравці діють розумно, т. т. прагнуть до отримання максимального виграшу, вважаючи, що суперник діє найкращим (для себе) чином. Що може собі гарантувати гравець 1? Нехай гравець 1 вибрав стратегію *x*. Тоді в гіршому випадку він виграє $\min\limits_{y} K(x,y)$. Тому гравець 1 завжди може гарантувати собі виграш $\max\limits_{x}\min\limits_{y} K(x,y)$. Якщо відмовитися від припущення досяжності екстремуму, то гравець 1 може завжди одержати виграш, як завгодно близький до величини

$$\underline{v} = \sup_{x\in X}\inf_{y\in Y} K(x,y), \tag{3.1}$$

яку називають ***нижнім значенням гри***. Якщо зовнішній екстремум у функції (3.1) досягається, то величина $\underline{v}$ також називається ***максиміном***. Принцип побудови стратегії *x*, що базується на *максимізації мінімального виграшу*, називається ***принципом максиміна***, а вибрана за цим принципом стратегія *x* – ***максимінною стратегією*** гравця 1.

Для гравця 2 можна провести аналогічні міркування. Нехай він обрав стратегію *y*. Тоді у найгіршому випадку він програє $\max\limits_{x} K(x,y)$. Тому другий гравець завжди може собі гарантувати програш, рівний $\min\limits_{y}\max\limits_{x} K(x,y)$. Число

$$\overline{v} = \inf_{y\in Y}\sup_{x\in X} K(x,y) \tag{3.2}$$

називається ***верхнім значенням гри*** *Г*, а у випадку досягнення зовнішнього ектстремума в (3.2), - ***мінімаксом***. При цьому принцип побудови стратегії *y*, що базується на *мінімізації максимальних програшів*, називається принципом мінімакса. Стратегія *y*, обрана за таким принципом, називається ***мінімаксоною стратегією*** гравця 2.

Існування мінімаксної (максимінної) стратегії визначається досяжністю зовнішнього ектремума в (3.2) ((3.1)). Нехай задана матрична $(m\times n)-$гра Γ_A. Тоді екстремуми в (3.1) і (3.2) досягаються, а нижнє і верхнє значення гри відповідно рівні

$$\underline{v} = \max_{1\le i\le m}\min_{1\le j\le n} a_{ij}, \tag{3.3}$$

$$\overline{v} = \min_{1\le j\le n}\max_{1\le i\le m} a_{ij}. \tag{3.4}$$

Мінімакс і максимін для гри Γ_A можуть бути знайдені за наступною схемою:

$$\begin{array}{ll} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} & \left.\begin{array}{c} \min\limits_{j} a_{1j} \\ \min\limits_{j} a_{2j} \\ \dots \\ \min\limits_{j} a_{mj} \end{array}\right\} \max\limits_{i} \min\limits_{j} a_{ij} = \underline{v}. \\ \underbrace{\max\limits_{i} a_{i1} \quad \max\limits_{i} a_{i2} \quad \dots \quad \max\limits_{i} a_{in}}_{\min\limits_{j} \max\limits_{i} a_{ij} = \bar{v}} & \end{array}$$

Так, наприклад, у грі Γ_A з матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 5 & 3 & 8 \\ 6 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Нижнє значення гри (максимін) $\underline{v}$ та максимальна стратегія i_0 першого гравця дорівнюють $\underline{v} = 3, \quad i_0 = 2;$ а верхнє значення (мінімакс) $\bar{v}$ та мінімаксна стратегія j_0 другого гравця: $\bar{v} = 3, \quad j_0 = 2.$

<u>**Теорема 3.1.**</u> В антагоністичній грі $\Gamma = (X, Y, K)$

$$\underline{v} = \bar{v} \tag{3.5}$$

або

$$\sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} K(x, y) \le \inf_{y \in Y} \sup_{x \in X} K(x, y). \tag{3.6}$$

<u>*Доведення*</u>:

Нехай $x \in X$ –довільна стратегія гравця 1. Тоді маємо

$$K(x, y) \le \sup_{x \in X} K(x, y),$$

Звідки одержуємо

$$\inf_{y \in Y} K(x, y) \le \inf_{y \in Y} \sup_{x \in X} K(x, y).$$

Зауважимо, що у правій частині останньої нерівності стоїть константа, а значення $x \in X$ вибиралося довільно. Тому виконується нерівність (3.6). ■

3.3. Ситуації рівноваги

Розглянемо питання про оптимальність поведінки гравців к антагоністичній грі. Природньо вважати оптимальною у грі $\Gamma = (X, Y, K)$ таку стратегію $(x^*, y^*) \in X \times Y$, від якої жодному з гравців невигідно відхилятися. Така ситуація (x^*, y^*) називається ***рівновагою***, а принцип оптимальності, що базується на побудові рівноваги, - ***принципом рівноваги***.

Для антагоністичних ігор, як це буде нижче показано, *принцип рівноваги еквівалентний принципам мінімакса та максиміна.* Звичайно, для цього необхідне існування рівноваги.

Означення 3.2. В антагоністичній грі $\Gamma = (X, Y, K)$ ситуація (x^*, y^*) називається ***ситуацією рівноваги*** або ***сідловою точкою***, якщо

$$K(x, y^*) \le K(x^*, y^*), \tag{3.7}$$

$$K(x^*, y) \ge K(x^*, y^*) \tag{3.8}$$

для всіх $x \in X, \quad y \in Y$.

Множину всіх ситуацій рівноваги у грі *Г* позначимо

$$Z(\Gamma),\ Z(\Gamma) \subset X \times Y.$$

Для матричної гри Γ_A мова йде про сідлові точки матриці виграшів *A*, тобто точках (i^*, j^*), що для всіх $i \in M, \quad j \in N$ виконуються нерівності

$$a_{ij^*} \le a_{i^*j^*} \le a_{i^*j}.$$

У сідловій точці елемент матриці $a_{i^*j^*}$ є одночасно мінімумом по рядку та максимумом у своєму стовпчику. Наприклад, у грі з матрицею

$$\begin{array}{c} \left(\begin{matrix}1&0&4\\5&3&8\\6&0&1\end{matrix}\right)\left.\begin{matrix}1\\3\\0\end{matrix}\right\}3 \\ \underbrace{\begin{matrix}6&3&8\end{matrix}}_{3} \end{array}$$

Нижнє значення (максимін) $\underline{v}$ та максимальна стратегія i_0 першого гравця дорівнюють $\underline{v}=3, \quad i_0=2;$ а верхнє значення (мінімакс) $\overline{v}$ та мінімаксна стратегія j_0 другого гравця: $\overline{v}=3, \quad j_0=2.$

Множина ситуацій рівноваги в антагоністичній грі *Г* має властивості, які дозволяють говорити про оптимальність ситуації рівноваги и стратегій, що до неї входять.

Теорема 3.2. Нехай $\left(x_1^*, y_1^*\right), \quad \left(x_2^*, y_2^*\right)$– дві довільні ситуації рівноваги в антагоністичній грі $\Gamma=\left(X,Y,K\right)$. Тоді

1) $K\left(x_1^*, y_1^*\right)=K\left(x_2^*, y_2^*\right); \quad K\left(x_1^*, y_2^*\right)=K\left(x_2^*, y_1^*\right);$
2) $\left(x_1^*, y_2^*\right)\in Z\left(\Gamma\right), \quad \left(x_2^*, y_1^*\right)\in Z\left(\Gamma\right).$

Доведення:

З означення ситуації рівноваги для всіх $x\in X, \quad y\in Y$ маємо

$$K\left(x, y_1^*\right)\le K\left(x_1^*, y_1^*\right)\le K\left(x_1^*, y\right); \tag{3.9}$$

$$K\left(x, y_2^*\right)\le K\left(x_2^*, y_2^*\right)\le K\left(x_2^*, y\right). \tag{3.10}$$

Підставимо у ліву частину нерівності (3.9) x_2^*, а в праву - y_2^*, в ліву частину нерівності (3.10) - x_1^*, в праву - y_1^*. Тоді одержимо

$$K\left(x_2^*, y_1^*\right)\le K\left(x_1^*, y_1^*\right)\le K\left(x_1^*, y_2^*\right)\le K\left(x_2^*, y_2^*\right)\le K\left(x_2^*, y_1^*\right).$$

Звідки випливає рівність

$$K\left(x_1^*, y_1^*\right)=K\left(x_2^*, y_2^*\right)=K\left(x_1^*, y_2^*\right)=K\left(x_2^*, y_1^*\right). \tag{3.11}$$

Покажемо справедливість другого з тверджень. Розглянемо ситуацію $\left(x_2^*, y_1^*\right)$. Тоді з (3.9)-(3.11) маємо

$$K\left(x,y_1^*\right)\le K\left(x_1^*,y_1^*\right)=K\left(x_2^*,y_1^*\right)=K\left(x_2^*,y_2^*\right)\le K\left(x_2^*,y\right)$$

для всіх $x\in X,\quad y\in Y$. Доведення рівноваги ситуації $\left(x_1^*,y_2^*\right)$ проводиться аналогічно. ■

З теореми 3.2. випливає, що функція виграшу набуває одне й те саме значення у всіх ситуаціях рівноваги. Тому доцільно ввести наступне означення.

Означення 3.3. Нехай $\left(x^*,y^*\right)$ – ситуація рівноваги в антагоністичній грі $\Gamma=\left(X,Y,K\right)$. Тоді число

$$v=K\left(x^*,y^*\right)$$

називається ***значенням гри*** *Г*.

З другого твердження теореми 3.2. випливає, зокрема, такий факт. Позначимо X^* і Y^* проекції множини $Z\left(\Gamma\right)$ на *X* і *Y* відповідно, тобто

$$X^*=\left\{x^*\middle|x^*\in X,\exists y^*\in Y,\left(x^*,y^*\right)\in Z\left(\Gamma\right)\right\},$$

$$Y^*=\left\{y^*\middle|y^*\in Y,\exists x^*\in x,\left(x^*,y^*\right)\in Z\left(\Gamma\right)\right\}.$$

Тоді множину $Z\left(\Gamma\right)$ можна представити у вигляді

$$Z\left(\Gamma\right)=X^*\times Y^*.$$

Означення 3.4. Множина X^* (або Y^*) називається ***множиною оптимальних стратегій*** гравця 1 (або гравця 2) в антагоністичній грі Г, а його елементи – ***оптимальними стратегіями*** гравця 1 (або 2).

Зауважимо, що рівність (3.11) вказує на взаємозаміну стратегій, тобто *довільна пара оптимальних стратегій утворює ситуацію рівноваги, а виграш у ній дорівнює значенню гри*.

Оптимальності поведінки гравців не зміняться, якщо у грі множини стратегій залишаються незмінними, а функція виграшу множиться на додатну константу (або до неї додається константа).

Теорема 3.3. Нехай $\Gamma=\left(X,Y,K\right)$ і $\Gamma'=\left(X,Y,K'\right)$ дві антагоністичні гри, причому

$$K'=\beta K+\alpha,\quad \beta>0,\alpha=const,\beta=const.$$

Тоді

$$Z(\Gamma') = Z(\Gamma), \quad v_{\Gamma'} = \beta v_{\Gamma} + \alpha.$$

<u>*Доведення*</u>:

Нехай (x^*, y^*) – ситуація рівноваги у грі *Г*. Тоді маємо

$$K'(x^*, y^*) = \beta K(x^*, y^*) + \alpha \le \beta K(x^*, y) + \alpha = K'(x^*, y),$$
$$K'(x, y^*) = \beta K(x, y^*) + \alpha \le \beta K(x^*, y^*) + \alpha = K'(x^*, y^*)$$

для всіх $x \in X, \quad y \in Y$. Тому $(x^*, y^*) \in Z(\Gamma'), \quad Z(\Gamma) \subset Z(\Gamma')$.

Навпаки, нехай $(x, y) \in Z(\Gamma')$. Тоді

$$K(x, y) = (1/\beta) K'(x, y) - \alpha/\beta$$

і, міркуючи аналогічно, одержимо, що $(x, y) \in Z(\Gamma)$. Тому $Z(\Gamma') = Z(\Gamma)$, при цьому виконується рівність

$$v_{\Gamma'} = K'(x^* y^*) = \beta K(x^* y^*) + \alpha = \beta v_{\Gamma} + \alpha. \blacksquare$$

<u>**Теорема 3.4.**</u> Для того, щоб у грі $\Gamma = (X, Y, K)$ існувала ситуація рівноваги, необхідно і достатньо, щоб існували мінімакс і максимін

$$\min_y \sup_x K(x, y), \quad \max_x \inf_y K(x, y) \tag{3.12}$$

і виконувалась рівність

$$\underline{v} = \max_x \inf_y K(x, y) = \min_y \sup_x K(x, y) = \overline{v}. \tag{3.13}$$

<u>*Доведення*</u>:

Необхідність. Нехай $(x^*, y^*) \in Z(\Gamma)$. Тоді для всіх $x \in X, \quad y \in Y$ виконуються нерівності

$$K(x, y^*) \le K(x^*, y^*) \le K(x^*, y), \tag{3.14}$$

звідси

$$\sup_x K\left(x, y^*\right) \le K\left(x^*, y\right). \qquad (3.15)$$

Разом з тим маємо

$$\inf_y \sup_x K\left(x, y\right) \le \sup_x K\left(x, y^*\right). \qquad (3.16)$$

Порівнюючи (3.15), (3.16), одержимо

$$\inf_y \sup_x K\left(x, y\right) \le \sup_x K\left(x, y^*\right) \le K\left(x^*, y^*\right). \qquad (3.17)$$

Міркуючи аналогічно, прийдемо до нерівностей

$$K\left(x^*, y^*\right) \le \inf_y K\left(x^*, y\right) \le \sup_x \inf_y K\left(x, y\right). \qquad (3.18)$$

Таким чином,

$$\inf_y \sup_x K\left(x, y\right) \le \sup_x \inf_y K\left(x, y\right).$$

З іншого боку, завжди виконується обернена нерівність (3.6). Отже, одержимо

$$\sup_x \inf_y K\left(x, y\right) = \inf_y \sup_x K\left(x, y\right),$$

При цьому нерівності (3.17) і (3.18) виконуються як рівності

$$\inf_y \sup_x K\left(x, y\right) = \sup_x K\left(x, y^*\right) = K\left(x^*, y^*\right),$$

$$\sup_x \inf_y K\left(x, y\right) = \inf_y K\left(x^*, y\right) = K\left(x^*, y^*\right),$$

тобто зовнішні екстремуми у мінімакса і маскиміна досягаються у точках y^* і x^* відповідно.

Достатність. Нехай існують мінімакс та максимін

$$\max_x \inf_y K\left(x, y\right) = \inf_y K\left(x^*, y\right);$$

$$\min_y \sup_x K\left(x, y\right) = \sup_x K\left(x, y^*\right)$$

і виконується рівність (3.13). Покажемо, що ситуація $\left(x^*, y^*\right)$ є рівновагою. Дійсно,

$$K\left(x^*, y^*\right) \geq \inf_y K\left(x^*, y\right) = \max_x \inf_y K\left(x, y\right); \tag{3.19}$$

$$K\left(x^*, y^*\right) \leq \sup_x K\left(x, y^*\right) = \min_y \sup_x K\left(x, y\right). \tag{3.20}$$

Згідно рівності (3.13) мінімакс дорівнює максиміну, а з (3.19), (3.20) випливає, що він рівний також і величині $K\left(x^*, y^*\right)$, тобто нерівності (3.19), (3.20) виконуються як рівності. Тепер маємо

$$K\left(x^*, y^*\right) = \inf_y K\left(x^*, y\right) \leq K\left(x^*, y\right),$$
$$K\left(x^*, y^*\right) = \sup_x K\left(x, y^*\right) \geq K\left(x, y^*\right)$$

для всіх $x \in X, \quad y \in Y$. Тобто $\left(x^*, y^*\right) \in Z\left(\Gamma\right)$. ■

<u>Наслідок 1.</u> Якщо мінімакс та максимін в (3.12) існують і досягаються на $\bar{y}$, $\bar{x}$ відповідно, то

$$\max_x \inf_y K\left(x, y\right) \leq K\left(\bar{x}, \bar{y}\right) \leq \min_y \sup_x K\left(x, y\right).$$

Ігри, в яких існують ситуації рівноваги, називаються цілком визначені. Тому дана теорема встановлює критерій цілковитої визначеності і може бути сформульована так: для того, щоб гра була цілком визначеною, необхідно і достатньо, щоб існували мінімакс і максимін в (3.12) та виконувалась рівність (3.13).

Зауважимо, що у матричній грі Γ_A екстремуми в (3.12) завжди досягаються, тому теорема набуває наступного вигляду.

<u>Наслідок 2.</u> Для того, щоб матрична $\left(m \times n\right)-$гра Γ_A була цілком визначеною, необхідно і достатньо виконання рівності

$$\max_{i=1,\ldots,m} \min_{j=1,\ldots,n} a_{ij} = \min_{j=1,\ldots,n} \max_{i=1,\ldots,m} a_{ij}$$

Наприклад, у грі з матрицею

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & 7 \end{pmatrix}$$

ситуація (2,1) є рівновагою. При цьому

$$\max_{i=1,\ldots,m}\min_{j=1,\ldots,n} a_{ij} = \min_{j=1,\ldots,n}\max_{i=1,\ldots,m} a_{ij} = 2.$$

З іншого боку, гра з матрицею

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

не має ситуації рівноваги, оскільки

$$\min_{j=1,\ldots,n}\max_{i=1,\ldots,m} a_{ij} = 1 > \max_{i=1,\ldots,m}\min_{j=1,\ldots,n} a_{ij} = 0.$$

Наприклад, у грі «Пошук «шумного» об’єкта» значення гри v=6:

$$A = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 6 & 8 & 10 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \left.\begin{matrix} 4 \\ 6 \\ 3 \end{matrix}\right\} 6 \\ \underbrace{\begin{matrix} 6 & 8 & 10 \end{matrix}}_{6} \end{array} .$$

А, наприклад, у грі з матрицею виграшів

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 3 & 1 & 20 \\ 5 & 5 & 4 & 6 \\ -4 & -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

Маємо сідлову точку (2, 3), оскільки 4 є мінімумом другого рядка і максимумом третього стовпчика. Отже, при грі з такою матрицею, оптимальним вибором для гравця 1 є 2, для гравця 2 – 3. Ціна гри дорівнює 4. Вибравши 2, перший гравець може бути впевненим, що він одержить щонайменше 4, а вибравши 3, другий гравець може не допустити, щоб гравець 1 одержав більше 4. Доцільно відмітити, що коли ми говоримо, що оптимальним вибором для гравця 1 є 2, ми не маємо на увазі, що для нього найрозумніше вибирати 2 при всіх обставинах. Наприклад, припустимо, що гравець 1 знає, що гравець 2 вибере 4 (нехай гравець 1 знає, що гравець 2 завжди діє за порадою деякої людини, і гравець 1 «підкупив» цю людину, щоб вона завжди радила гравцю 2 вибирати 4); тоді, звичайно, найкраще для гравця 1 вибирати 1 замість 2, оскільки при цьому він одержить 20 замість 6. Але гравець може знати про наміри іншого гравця лише у виняткових випадках, тому загалом краще грати математично оптимальним способом.

Таким чино, для того випадку, коли матриця гри має сідлову точку, ми маємо теорію, яка вказує, як краще всього грати в цю гру. Однак у нас залишається питання про те, як грати у гру з матрицею, наприклад

$$\begin{pmatrix} 1 & -7 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},$$

Яка не має сідловок точки.

3.4. Основна теорема для прямокутних ігор

3.4.1. Змішані стратегії

Розглянемо прямокутну антагоністичну гру, задану матрицею виграшів

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Оскільки матриця не має сідловок точки, побудованої раніше теорії недостатньо, щоб знайти оптимальні стратегії для гравців 1 та 2. Крім того, у такій грі гравцю 1 байдуже, що вибирати: 1 чи 2, оскільки в обох випадках він одержить 1 або -1, якщо, відповідно, гравець 2 зробить такий же протилежний вибір. З іншого боку, якщо гравець 2 знає, який вибір зробить гравець 1, то другий гравець може походити так, що гравець 1 повинен буде заплатити йому 1 (для цього він має зробити протилежний вибір). Таким чином, виявляється, що для гравця 1 дуже важливо зробити так, щоб гравець 2 не знав про його вибір. Одним із способів, як цього досягти, є випадковий вибір.

Припустимо, що гравець 1 вирішує зробити свій вибір шляхом підкидання монетки: він вибере 1, якщо випаде Герб, і вибере 2, якщо випаде Цифра. Оскільки ймовірності того, що випаде Герб або Цифра, дорівнюють $1/2$ в обох випадках, то математичне сподівання виграшу для гравця 1 у випадку, якщо гравець 2 вибере 1, дорівнює

$$1\cdot 1/2+(-1)\cdot 1/2=0,$$

			Гравець 2	
			1	2
Гравець 1	1/2	1	1	-1
	1/2	2	-1	1

і воно буде таким же, якщо гравець 2 вибере 2:

(-1)·1/2+1· 1/2=0,

			Гравець 2	
			1	2
Гравець 1	1/2	1	1	-1
	1/2	2	-1	1

Отже, якщо гравець 1 вибирає таким способом, то математичне сподівання його виграшу буде дорівнювати 0, незалежно від того, що вибере другий гравець.

Насправді це *єдиний спосіб*, яким гравець 1 може грати у таку гру, не підлягаючи ризику, навіть у тому випадку, якщо гравець 2 довідається, який вибір він збирається робити.

Припустимо, що гравець 1 застосовує метод випадкового вибору стратегій, якій визначає, що ймовірність вибору стратегії 1 дорівнює *p*, а ймовірність вибору 2 дорівнює 1-*p*. Припустимо, що *гравець 2 знає, який випадковий механізм застосовує гравець 1*. Тоді математичне сподівання виграшу гравця 1, якщо гравець 2 вибирає 1, дорівнює

$$1\cdot p+(-1)(1-p)=2p-1,$$

І якщо другий гравець вибере 2, математичне сподівання виграшу гравця 1 дорівнює

$$(-1)p+1(1-p)=1-2p.$$

Якщо $p>\frac{1}{2}$, то $1-2p<0$, так що математичне сподівання виграшу гравця 1, якщо гравець 2 вибере 2, менше нуля. Якщо $p<\frac{1}{2}$, то $1-2p<0$, так що математичне сподівання виграшу гравця 1, якщо гравець 2 вибере 1, менше нуля.

Звідси випливає, що оптимальний варіант грати у цю гру для першого гравця (і за тими ж причинами і другого) – вибирати 1 або 2, кожне з ймовірністю ½. ***Ціна гри*** для першого гравця (тобто математичне сподівання його виграшу, якщо він грає оптимальним способом) дорівнює нулю.

Інколи замість випадкових механізмів визначення ймовірності виборів говорять про відносні частоти різних виборів.

Розглянемо гру з матрицею

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Оскільки матриця не має сідловок точки, то для гравців бажано грати тільки з певними частотами. Припустимо, що гравець 1 вибирає 1 з частотою *p* і 2 з частотою 1-*p* $\left(p>0,\quad 1-p>0\right)$, а гравець 2 вибирає 1 з частотою *q* і 2 з частотою 1-*q* $\left(q>0,\quad 1-q>0\right)$. Тоді математичне сподівання для першого гравця дорівнює

$$E\left(p,q\right)=1pq+3p\left(1-q\right)+4\left(1-p\right)q+2\left(1-p\right)\left(1-q\right).$$

Маємо:

$$\begin{aligned} E\left(p,q\right)&=-4pq+p+2q+2= \\ &=-4\left(p-\frac{1}{2}\right)\left(q-\frac{1}{4}\right)+\frac{5}{2}. \end{aligned} \tag{3.21}$$

Звідси видно, що якщо гравець 1 вибере $p=\frac{1}{2}$, то математичне сподівання його виграшу щонайменше буде $\frac{5}{2}$. Більш того, він не може собі забезпечити виграш, більше $\frac{5}{2}$, оскільки взявши $q=\frac{1}{4}$, гравець 2 може гарантувати, що очікуваний виграш у гравця 1 буде як раз $\frac{5}{2}$, і не більше, ніж $\frac{5}{2}$. Отже, гравець 1 може ставити на $\frac{5}{2}$ і, вибравши $p=\frac{1}{2}$, одержать цю суму. Подібно до цього гравець 2 може змиритися з тим, що він одержить -$\frac{5}{2}$, і, вибравши $q=\frac{1}{4}$, одержати цю суму. Таким чином, для цієї гри ми можемо сказати, що оптимальний спосіб гри для гравця 1 – вибирати 1 і 2 однаково часто, а оптимальний спосіб для гри другого гравця – вибирати 1 з ймовірністю $\frac{1}{4}$ і вибирати 2 з ймовірністю $\frac{3}{4}$. Очевидно, що $\frac{5}{2}$ і цьому випадку можна прийняти за ціну гри.

Із рівності (3.21) ми маємо, що для всіх $p,q:\quad 0\le p\le 1,\quad 0\le q\le 1,$

$$E\left(p,\frac{1}{4}\right)\le E\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)\le E\left(\frac{1}{2},q\right). \tag{3.22}$$

Отже, точка $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ є сідловою точкою функції $E(p,q)$. Нерівність (3.22) взагалі можна прийняти за визначення ***оптимальних частот*** для довільної прямокутної гри з матрицею 2×2.

<u>Означення 3.5.</u> Нехай $E(p,q)$ - математичне сподівання виграшу першого гравця у грі, коли гравець 1 вибирає стратегії 1 і 2 з відносними частотами *p* і 1-*p*, а другий гравець вибирає 1 і 2 з відносними частотами *q* і 1-*q*. Тоді x^* є ***оптимальною частотою*** для гравця 1, а y^* – оптимальна частота для гравця 2, якщо для всіх $p, q: \quad 0 \le p \le 1, \quad 0 \le q \le 1$, якщо

$$E(x, y^*) \le E(x^*, y^*) \le E(x^*, y).$$

Розглянемо прямокутну гру з матрицею

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

<u>Означення 3.6.</u> ***Змішаною стратегією*** для гравця 1 називається упорядкована система *m* дійсних невід'ємних чисел, що задовольняють умову $\sum_{i=1}^{m} p_i = 1;$ причому числа можна розглядати як частоти, з якими гравець 1 вибирає числа 1, 2, …, *m*.

Позначимо через S_m множину *m*-вимірних векторів (змішаних стратегій).

Аналогічно, змішаною стратегією для гравця 2 називається елемент множини S_n, тобто впорядковану систему невід'ємних чисел $(q_1 \dots q_n)$, що задовольняють умову $\sum_{i=1}^{n} q_i = 1.$

Інколи ми будемо називати самі числа 1, 2, …, *m* ***чистими стратегіями*** гравця 1, а числа 1, 2, …, *n* – чистими стратегіями гравця 2. Очевидно, що для гравця 1 гра з чистою стратегією k еквівалентна грі зі змішаною стратегією $(p_1 \dots p_m)$, де $p_k = 1, \quad p_i = 0, \quad i \ne k.$

Якщо гравець 1 застосовує змішану стратегію $X = \left(p_1 \ldots p_m\right)$, а гравець 2 – змішану стратегію $Y = \left(q_1 \ldots q_n\right)$, то математичне сподівання виграшу для гравця 1 визначається формулою

$$E\left(X,Y\right) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_i q_j .$$

Якщо виявляється, що для деякого $X^* \in S_m$ і для деякого $Y^* \in S_n$ для всіх $X \in S_m, \quad Y \in S_n$

$$E\left(X,Y^*\right) \le E\left(X^*,Y^*\right) \le E\left(X^*,Y\right), \tag{3.33}$$

то $X^*, \quad Y^*$ називаються ***оптимальними змішаними стратегіями*** для гравців 1 та 2, $E\left(X^*,Y^*\right)$ - ***ціною гри*** для гравця 1, а впорядковану пару $\left(X^*,Y^*\right)$ - ***розв'язком гри*** або ***стратегічною сідловою точкою***.

Таким чином, якщо $X^*, \quad Y^*$ - змішані стратегії, що задовольняють умову (3.33), то застосовуючи X^*, гравець 1 може гарантувати собі, що він одержить щонайменше $E\left(X^*,Y^*\right)$, не залежно від того, як гратиме гравець 2. Аналогічно, використовуючи Y^*, гравець 2 може не дати гравцю 1 одержати більше за $E\left(X^*,Y^*\right)$. Отже, $E\left(X^*,Y^*\right)$ представляє ту суму, яку гравець 1 може надіятися одержати.

Якщо дві величини

$$v_1 = \max_{X \in S_m} \min_{Y \in S_n} E\left(X,Y\right)$$

і

$$v_2 = \min_{Y \in S_n} \max_{X \in S_m} E\left(X,Y\right)$$

існують і рівні між собою, то за теоремою 3.4. існують змішані стратегії, що задовольняють (3.33), так що гра має ціну і є оптимальні стратегії для обох гравців.

3.4.2. Геометрична інтерпретація

Евклідовим n-вимірним простором E^n називається множина всіх упорядкованих систем *n* чисел $\left(x_1 \ldots x_n\right)$, де $x_1, \ldots, x_n$ – дійсні числа. Якщо

$X^{(1)} = \left(x_1^{(1)} \ldots x_n^{(1)}\right)$ і $X^{(2)} = \left(x_1^{(2)} \ldots x_n^{(2)}\right)$ – дві точки множини E^n, то ***відстань*** між $X^{(1)}$ і $X^{(2)}$ обчислюється за формулою

$$d\left(X^{(1)}, X^{(2)}\right) = \sqrt{\left(x_1^{(1)} - x_1^{(2)}\right)^2 + \ldots \left(x_n^{(1)} - x_n^{(2)}\right)^2}.$$

Підмножина *X* множини E^n називається ***обмеженою***, якщо існує таке число *M*, що для всіх точок $X^{(1)}$ і $X^{(2)}$ із *X* $d\left(X^{(1)}, X^{(2)}\right) \le M$.

Легко показати, що необхідною і достатньою умовою обмеженості множини є знаходження її в деякій гіперсфері, тобто існування точки *a* множини E^n і числа *R* таких, що для всякого $x \in X \quad d(x,a) \le R.$

Точка *x* простору E^n називається ***граничною точкою підмножини*** *A* із E^n, якщо $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists y \in A, \quad y \ne x: \quad d(x,y) < \varepsilon.$

Так, якщо *A* є множиною точок $(x \quad y)$ простору E^2, для яких $x^2 + y^2 < 1,$ то довільна точка $(x_0 \quad y_0)$, для якої ${x_0}^2 + {y_0}^2 = 1,$ є граничною точкою множини *A*. Зауважимо, що скінченна множина точок не має граничних точок. З іншого боку, довільна обмежена нескінченна множина точок має щонайменше одну граничну точку.

Замиканням множини називається множина, яка одержана шляхом добавлення до даної множини всіх її граничних точок. Так, замиканням множини *A*, що згадувалась вище, є множина точок $(x \quad y)$ простору E^2, для яких $x^2 + y^2 \le 1.$

Скінченна множина співпадає зі своїх замиканням. Множина називається ***замкненою***, якщо вона співпадає зі своїм замиканням. Таким чином, довільна скінченна множина замкнена, так само, як, наприклад, множина, що складається із $(x \quad y)$ простору E^2, для яких $x^2 + y^2 \ge 1.$

Множина називається ***відкритою***, якщо її доповнення замкнене. Так, наприклад, множина *A* (точки $(x \quad y)$ простору E^2, для яких $x^2 + y^2 < 1$) відкрита. Деякі множини не є ні відкритими, ні замкненими, як, наприклад, множина точок *x* простору E^2, для яких $0 < x \le 1.$ Внутрішньою частиною довільної скінченної множини є порожня множина. Замикання довільної множини замкнене і внутрішня частина довільної множини відкрита.

Доповнення довільної замкненої множини відкрито, а доповнення довільної відкритої множини замкнене.

Множина E^n для довільного *n* відкрита і замкнена, теж саме справедливе для порожньої множини; це єдині з множин, які відкриті і замкнені.

Межею множини називається перетин його замикання з замиканням його доповнення. Так, межею множини *A* (точки $(x \quad y)$ простору E^2, для яких $x^2+y^2<1$) є множина всіх точок $(x \quad y)$ простору E^2, для яких $x^2+y^2=1$.

Якщо *B* є множиною всіх точок $(x \quad y)$ простору E^2, таких, що *x* і *y* є раціональні числа, то межею множини є весь простір E^2.

Множина називається ***зв'язною***, якщо її неможливо представити у вигляді суми двох множина, які не перетинаються, жодне з яких не містить граничної точки іншої. Так, приведена вище множина А – зв'язна; те ж саме справедливе і для множини всіх точок $(x\ y\ z)$ простору E^3, для яких $3x+2y+5z=7$.

Якщо С є множиною всіх точок $(x \quad y)$ простору E^2, для яких $x \neq 0$, то множина С незв'язна. Дійсно, якщо C_1 – множина всіх точок $(x \quad y)$, для яких $x>0$, а C_2 – множина всіх точок $(x \quad y)$, для яких $x<0$, то С є сумою множин C_1 і C_2, і жодна з цих множин не містить граничної точки іншої.

Нехай

$$x^{(1)}=\left(x_1^{(1)}\ldots x_n^{(1)}\right),$$
$$x^{(2)}=\left(x_1^{(2)}\ldots x_n^{(2)}\right),$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$x^{(r)}=\left(x_1^{(r)}\ldots x_n^{(r)}\right)$$

і

$$x=\left(x_1\ldots x_n\right)$$

є точки простору E^n; $\left(a_1\ldots a_r\right)-$елемент множини S_r, тобто $a_i\geq 0,\quad i=1,\ldots,r,\quad a_1+\ldots+a_r=1$. Припустимо, що

$$x_j=a_1x_j^{(1)}+a_2x_j^{(2)}+\ldots+a_rx_j^{(r)},\quad j=1,\ldots,n.$$

Тоді *x* є ***випуклою лінійною комбінацією*** точок $x^{(1)},\ldots,x^{(r)}$ з вагами $a_1,\ldots,a_n$, що записується:

$$x = a_1 x^{(1)} + \ldots + a_r x^{(r)}.$$

Так, наприклад, точка $\begin{pmatrix}0 & 15\end{pmatrix}$ простору E^2 є випуклою лінійною комбінацією точок $\begin{pmatrix}6 & 12\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-9 & 15\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}4 & 16\end{pmatrix}$ з вагами $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$.

Аналогічно точка $\begin{pmatrix}-1 & 2 & 11\end{pmatrix}$ простору E^3 є випуклою лінійною комбінацією точок $\begin{pmatrix}3 & 6 & 9\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-3 & 0 & 12\end{pmatrix}$ з вагами $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$.

Підмножина X простору E^n називається ***випуклою***, якщо довільна випукла лінійна комбінація точок множини X є точкою множини X.

Так, наприклад, множина A, що складається з точок $\begin{pmatrix}x & y\end{pmatrix}$, таких, що $x^2 + y^2 < 1$, і множина B, що складається з точок $\begin{pmatrix}x & y\end{pmatrix}$, таких, що $x^2 + y^2 \leq 1$, обидві випуклі. Множина C, що складається з точок $\begin{pmatrix}x & y\end{pmatrix}$, таких, що $x^2 + y^2 = 1$, і множина D, що складається з точок $\begin{pmatrix}x & y\end{pmatrix}$, таких, що $x^2 + y^2 \geq 1$, обидві не є випуклими, бо точка $\begin{pmatrix}0 & 0\end{pmatrix}$ є випуклою лінійною комбінацією (з вагами $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$) точок $\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-1 & 0\end{pmatrix}$, які належать і множині C, і множині D, сама ж точка $\begin{pmatrix}0 & 0\end{pmatrix}$ не належить ні C, ні D.

Ми визначили випуклу множину як множину X, таку, що коли $y^{(1)},\ldots,y^{(p)}$ – елементи множини X і $\left(a_1 \ldots a_p\right)$ належать S_p, то і

$$y = a_1 y^{(1)} + \ldots + a_p y^{(p)}$$

також належить X.

Випуклою оболонкою множини X називається перетин всіх випуклих множин, підмножиною яких є X.

Так, наприклад, випуклою оболонкою множини D всіх точок $\begin{pmatrix}x & y\end{pmatrix}$, таких, що $x^2 + y^2 = 1$, є множина всіх точок $\begin{pmatrix}x & y\end{pmatrix}$, таких, що $x^2 + y^2 \leq 1$. Випуклою оболонкою множини всіх точок $\begin{pmatrix}x & y\end{pmatrix}$, таких, що $x^2 + y^2 > 1$, є вся площина E^2.

Оскільки простір E^n випуклий, очевидно, довільна множина міститься щонайменше в одній випуклій множині, і тому довільна множина має випуклу оболонку. Можна показати, що випукла оболонка множини Х складається як раз із тих точок, які є випуклими лінійними комбінаціями точок множини Х.

Теорема Френкеля. Якщо Х є деякою підмножиною простору E^n, то довільна точка випуклої оболонки підмножини Х може бути представлена як випукла лінійна комбінація n+1 точки із Х. Якщо, крім того, підмножина Х зв'язна, то довільна точки випуклої оболонки підмножини Х може бути представлена як випукла лінійна комбінація n точок Х.

Зауваження. Для пояснення теореми, припустимо, що Х складається з чотирьох точок $A\begin{pmatrix}0 & 0\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix}$, $D\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}$ простору E^2, тобто Х складається з 4 вершин квадрата. Тоді випуклою оболонкою Х, очевидно, є весь квадрат, включаючи його межу. Кожну точку трикутника ABD можна представити як випуклу лінійну комбінацію трьох точок A, B, D, і аналогічно довільну точку трикутника BCD можна представити як випуклу лінійну комбінацію трьох точок B, C, D. Точка $\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{4}\end{pmatrix}$, яка не знаходиться на жодній зі сторін квадрата, ні на жодній з діагоналей AC і BD, не може бути представлена як випукла лінійна комбінація двох точок підмножини Х.

З іншого боку, якщо Х – зв'язна множина, яка складається з усіх точок, що лежать на межі квадрата, то випукла оболонка буде тією ж підмножиною; в цьому випадку довільну точку випуклою оболонки можна представити як випуклу лінійну комбінацію двох точок множини Х.

Нехай $a_1,\ldots,a_n$ - n дійсних чисел, що не всі дорівнюють нулю, і нехай b – довільне дійсне число. Тоді множина точок $\left(x_1 \ldots x_n\right)$ простору E^n таких, що

$$a_1x_1+\ldots+a_nx_n=b,$$

називається ***гіперплощиною*** простору E^n.

Так, наприклад, множина точок $\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & x_3 & x_4\end{pmatrix}$, для яких $2x_1+3x_2-7x_3+x_4=7$, є гіперплощиною простору E^4. Гіперплощиною простору E^2 є звичайна площина, а гіперплощиною простору E^1 є точка.

Якщо $a_1x_1+\ldots+a_nx_n=b$ –рівняння гіперплощини, то під двома ***підпросторами***, що відповідають даній гіперплощині, будемо розглядати множину точко $\left(x_1 \ldots x_n\right)$, які задовольняють умові $a_1x_1+\ldots+a_nx_n>b$, і множину точок $\left(x_1 \ldots x_n\right)$, які задовольняють умові $a_1x_1+\ldots+a_nx_n<b.$

Очевидно, гіперплощина і два підпростори не перетинаються, а їх сума складає E^n.

Теорема . Нехай X – довільна замкнена випукла підмножина простору E^n, *x* – точка простору E^n, яка не належить множині X. Тоді існує гіперплощина P, яка містить *x*, така, що X є підпростором однієї з півплощин, які визначаються гіперплощиною P.

Якщо X – підмножина простору E^n, то ***екстремальною множиною*** K(X) називається множина точок x, що належать X, які не можуть бути представлені у вигляді $x = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2$, де x_1 і x_2 — різні точки множини X.

Так, наприклад, екстремальною множиною замкненого круга − межа круга. Екстремальною множиною замкненого трикутника є множина, яка складається з трьох вершин трикутника.

Очевидно, у не порожньої множини може бути порожня екстремальна множина. Так, екстремальна множина всього простору E^n порожня, оскільки довільна відкрита множина має порожню екстремальну множину.

Теорема. Нехай X – не порожня обмежена замкнена випукла підмножина простору E^n. Тоді K(X) – непорожня множина, а X – випукла оболонка множини

K(X).

Лема. Нехай задано матрицю

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \cdots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Тоді

1) або існує елемент $\left(x_1 \dots x_m\right)$ множини S_m, такий, що

$$a_{1j}x_1 + \ldots + a_{mj}x_m \geq 0, \quad j = 1, \ldots, n,$$

2) або існує елемент $\left(y_1 \dots y_n\right)$ множини S_n, такий, що

$$a_{i1}y_1 + \ldots + a_{in}y_n \leq 0, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Теорема. Нехай

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \cdots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} -$$

деяка матриця, і нехай математичне сподівання виграшу $E(X,Y)$ для довільних $X=(x_1\dots x_m)$ і $Y=(y_1\dots y_n)$, які є відповідно елементами множин S_m і S_n, визначено наступним чином:

$$E(X,Y)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_i y_j.$$

Тоді величини $\max\limits_{X\in S_m}\min\limits_{Y\in S_n}E(X,Y)$ і $\min\limits_{Y\in S_n}\max\limits_{X\in S_m}E(X,Y)$ існують і рівні між собою.

<u>*Доведення*</u>:

Для кожного $Y=(y_1\dots y_n)$ функція $E(X,Y)$ є неперервною лінійною функцією від $X=(x_1\dots x_m)$, що визначена на замкнутій підмножині S_m простору E^m, звідси

$$\max_{X\in S_m}E(X,Y)$$

Існує для довільного *Y* з S_n. Також $\max\limits_{X\in S_m}E(X,Y)$ э неперервною кусково-лінійною функцією $(y_1\dots y_n)$. Оскільки S_n є замкненою підмножиною простору E^n, то існує

$$\min_{Y\in S_n}\max_{X\in S_m}E(X,Y).$$

Аналогічно можна показати, що існує

$$\max_{X\in S_m}\min_{Y\in S_n}E(X,Y).$$

Якщо перша умова попередньої леми виконується, то існую елемент $(x_1\dots x_m)$ множини S_m такий, що

$$a_{1j}x_1+\ldots+a_{mj}x_m\geq 0,\quad j=1,\ldots,n,$$

І, отже, такий, що для довільного $Y\in S_n$

$$E(X,Y)=\sum_{j=1}^{n}\left(a_{1j}x_1+\ldots+a_{mj}x_m\right)y_j\geq 0.$$

Оскільки ця нерівність справедлива для довільного $Y\in S_n$, то

$$\min_{Y\in S_n}E(X,Y)\geq 0$$

І, отже,

$$\max_{X\in S_m}\min_{Y\in S_n}E(X,Y)\geq 0. \qquad (3.34)$$

Аналогічно, якщо друга умови леми виконується, то

$$\min_{Y\in S_n}\max_{X\in S_m}E(X,Y)\leq 0. \qquad (3.35)$$

Але оскільки виконується або перша, або друга умова леми, то щонайменша, одна із нерівностей (3.34) або (3.35) повинна виконуватись, і, отже, нерівність

$$\max_{X\in S_m}\min_{Y\in S_n}E(X,Y)<0<\min_{Y\in S_n}\max_{X\in S_m}E(X,Y) \qquad (3.36)$$

не може мати місце.

Нехай A_k —матриця, яка одержується з *A* при відніманні k з кожного елементі матриці *A*, тобто

$$A_k=\begin{pmatrix} a_{11}-k & \ldots & a_{1n}-k \\ \cdots & \ldots & \ldots \\ a_{m1}-k & \ldots & a_{mn}-k \end{pmatrix},$$

і нехай E_k —математичне сподівання виграшу для A_k, так що для довільних *X* і *Y*, які є відповідно елементами множин S_m і S_n, маємо

$$E_k(X,Y)=\sum_{i=}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left(a_{ij}-k\right)x_i y_j. \qquad (3.37)$$

Тоді, точно так, як ми показали, що нерівність (3.36) невірна, ми можемо показати, що нерівність

$$\max_{X\in S_m}\min_{Y\in S_n}E_k(X,Y)<0<\min_{Y\in S_n}\max_{X\in S_m}E_k(X,Y) \qquad (3.38)$$

невірна для A_k. Але з нерівності (3.37) бачимо, що

$$E_k(X,Y) = E(X,Y) = k, \tag{3.39}$$

а з умов (3.38) і (3.39) невірна нерівність

$$\max_{X\in S_m}\min_{Y\in S_n} E(X,Y) - k < 0 < \min_{Y\in S_n}\max_{X\in S_m} E(X,Y) - k.$$

Отже, невірна і нерівність

$$\max_{X\in S_m}\min_{Y\in S_n} E(X,Y) < k < \min_{Y\in S_n}\max_{X\in S_m} E(X,Y).$$

Оскільки остання нерівність невірна для довільного k, то нерівність

$$\max_{X\in S_m}\min_{Y\in S_n} E(X,Y) < \min_{Y\in S_n}\max_{X\in S_m} E(X,Y)$$

невірна. Звідси має місце нерівність

$$\max_{X\in S_m}\min_{Y\in S_n} E(X,Y) \ge \min_{Y\in S_n}\max_{X\in S_m} E(X,Y).$$

З іншого боку, за теоремою 3.1. маємо, що

$$\max_{X\in S_m}\min_{Y\in S_n} E(X,Y) \le \min_{Y\in S_n}\max_{X\in S_m} E(X,Y).$$

Тоді з останніх двох нерівностей випливає, що

$$\max_{X\in S_m}\min_{Y\in S_n} E(X,Y) = \min_{Y\in S_n}\max_{X\in S_m} E(X,Y). \blacksquare$$

<u>Теорема (основна теорема теорії прямокутних ігор).</u> *Довільна прямокутна гра має ціну гри; гравець у прямокутній грі завжди має оптимальну стратегію*.

Інколи визначити ціну гри можна з інтуїтивних міркувань або з безпосереднього розгляду гри. У таких випадках для знаходження оптимальних стратегій для обох гравців часто буває зручною наступна теорема.

Теорема. Нехай *E* – математичне сподівання виграшу в прямокутній грі з матрицею порядку $m \times n$, яка має ціну v. Тоді, для того, щоб елемент X^* множини S_m був оптимальною стратегією для гравця 1, необхідно і достатньо, щоб для кожного елемента *Y* множини S_n мала місце нерівність

$$v \le E(X^*, Y).$$

Аналогічно, для того, щоб елемент Y^* множини S_n був оптимальною стратегією для гравця 21, необхідно і достатньо, щоб для кожного елемента *X* множини S_m мала місце нерівність

$$E\left(X,Y^*\right)\le v.$$

Доведення:

Якщо X^* − оптимальна стратегія для гравця 1, то існує елемент Y^* множини S_n такий, що $\left(X^*\ Y^*\right)$ –сідлова точка функції $E\left(X,Y\right)$, і, отже, такої, що для довільного $Y\in S_n$

$$v=E\left(X^*,Y^*\right)\le E\left(X^*,Y\right),$$

що і треба було довести.

З іншої сторони, припустимо, що X^* − елемент множини S_m такий, що для довільного $Y\in S_n$

$$v\le E\left(X^*,Y\right). \tag{3.40}$$

За основною теоремою теорії прямокутних ігор існує точка $\left(X'\ \ Y'\right)$, така, що для всіх $X\in S_m,\quad Y\in S_n$

$$E\left(X,Y'\right)\le E\left(X',Y'\right)\le E\left(X',Y\right), \tag{3.41}$$

а оскільки *v* є ціною гри за умовою, то маємо

$$E\left(X',Y'\right)=v. \tag{3.42}$$

З (3.40) і (3.42) робимо висновок, що

$$E\left(X',Y'\right)\le E\left(X^*,Y\right). \tag{3.43}$$

Замінюючи *Y* на Y' у нерівності (3.43), а *X* на X^* в першій частині нерівності (3.41), одержимо

$$E\left(X^*,Y'\right)\le E\left(X',Y'\right)\le E\left(X^*,Y'\right). \tag{3.44}$$

Отже,

$$E\left(X',Y'\right)=E\left(X^*,Y'\right). \tag{3.45}$$

З (3.42), (3.44), (3.45) одержуємо, що

$$E\left(X,Y'\right)\le E\left(X^*,Y'\right)\le E\left(X^*,Y\right),$$

так що $\left(X^* \quad Y'\right)$– сідлова точка функції $E\left(X,Y\right)$ і, отже, X^*– оптимальна стратегія для гравця 1, що і треба було довести. Доведення другої частини теореми аналогічне. ■

Глава 4. Кооперативні ігри

Коаліційні (кооперативні) ігри

У сучасній теорії ігор розглядають як некооперативні (безкоаліційні) ігри, так і кооперативні (коаліційні ігри). У некоопартивних іграх вивчається основне питання: які стратегії необхідно вибрати гравцям, щоб досягти деякого бажаного (рівноважного) стану. Саме тому некооперативні ігри називають стратегічними.

Кооперативні (коаліційні) ігри відрізняються від ігор іншої категорії, некоопертивних (безкоаліційних) ігор, тим, що на першому місці стоять проблеми утворення коаліцій гравців, в них можливі так звані зобов'язуючі угоди між гравцями. Такі угоди називаються зобов'язуючими, тому що вони безумовно дотримуються гравцями в силу самої природи гри; наслідками же цих угод є укладення союзів між гравцями (точніше, створення коаліцій) і трансфери, тобто передача корисностей (виграшу) від одних гравців іншим. Вибір узгоджених дій, стратегій, ходів в конкретних позиціях – це об'єкт вивчення теорій стратегічних і позиційних ігор. У кооперативних іграх більш важливим є той аспект, який має справу з поділом виграшів, отриманих коаліцією, серед учасників даної коаліції.

У свою чергу кооперативні ігри поділяються на ігри з транферабельною корисністю та ігри з нетрансферабельною користністю. В іграх з транферабельною корисністю корисність вимірюється в універсальних, загальноприйнятих для всіх гравців одиницях і може передаватися від одного гравця іншому без втрат і трансформації. В інших випадках мають справу з іграми з нетранферабельною корисністю. Класичним прикладом транферабельної корисністі є гроші (хоча й буває, що гравці в різних умовах по різному можуть оцінювати одну й ту ж суму грошей). Класичним прикладом ігор з транферабельною корисністю є казка «Лисиця і журавель»: частування, яка цінне для лисиці, виявилось неприйнятним для журавля, і навпаки.

Розглянемо гру, яка називається «Сороконіжка».

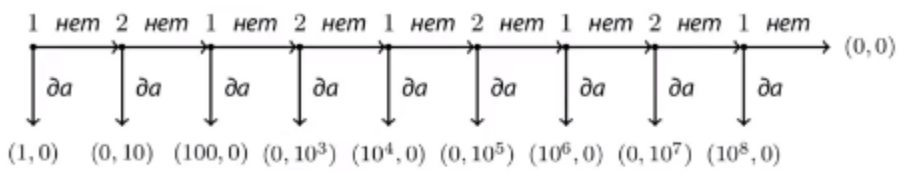
Хід гри. Уявимо, що уряд деякої держави хоче надати фінансову допомогу одному з двох найбільших університетів країни. Щоб визначити, якому університету і в якому обсязі дістанеться фінансова допомога, ректорам пропонують зіграти в гру.

Спочатку уряд пропонує першому ректору 1 $. Якщо перший ректор погодиться на цю пропозицію, то гра закінчується. Перший університет отримає 1 $, другий університет не отримає нічого. Якщо перший ректор відмовиться від цієї пропозиції, то тоді уряд збільшить пропоновану суму в 10 разів. Однак ця пропозиція буде зроблена вже другому ректору. І вже у другого ректора буде вибір: погодитися на цю суму (в цьому випадку гра закінчиться, другий університет отримає 10 $, а перший університет не отримає нічого) або відмовитися.

Кожного разу уряд буде збільшувати суму в 10 разів і робити по черзі цю пропозицію то першому, то другому ректору. Так буде тривати до тих пір, поки сума не збільшиться до 100 000 000 $.

Перший ректор на останньому кроці (а саме першому ректору буде зроблено пропозицію в розмірі 100 000 000 $, якщо до цього ніхто не погодиться на меншу суму) зможе отримати 100 000 000 $, в разі, якщо він погодиться, тоді другий не отримає нічого. А якщо перший ректор відмовиться, то тоді жоден з університетів не зможе отримати взагалі нічого. Платіж кожного університету буде дорівнювати нулю.

Дерево гри



У рівновазі Неша, зіграною на підіграх, кожен ректор на кожній підгрі буде забирати гроші.

Дійсно, якщо почати розглядати цю гру з кінця (застосувати метод Цермело-Куна), то в останній момент, коли першому ректору пропонують 100 000 000 $, йому вигідніше погодитися на ці гроші, ніж відмовитися. Тоді він отримає 100 000 000 $, а не нуль.

Знаючи це, - повертаємось на одну підгру назад, - другий ректор, якому роблять пропозицію в розмірі 10 000 000 $, повинен погоджуватися, тому що він знає, що якщо він відмовиться, то перший ректор погодиться на 100 000 000 $, і другий не отримає нічого. Значить, другий ректор буде погоджуватися на 10 000 000 $.

Знову повертаємось на одну підгру назад. Перший ректор, якому роблять пропозицію в розмірі 1 000 000 $, якщо погодиться, отримає саме цей мільйон, а якщо відмовиться, то зіткнеться з тим, що другий ректор погодиться на 10 000 000, і перший отримає нуль. Значить, перший ректор буде погоджуватися і на 1 000 000 $, і так далі.

Значить, в найперший момент часу перший ректор в рівновазі Неша, зіграній на підіграх, погодиться на допомогу в розмірі 1 $. І цим гра і закінчиться. Перший університет отримає 1 $, другий не отримає нічого.

Однак такий результат гри виглядає дещо штучним. Сумнівно очікувати, що ректори не зможуть домовитися, почекати якийсь час, поки пропозиція буде збільшена, і потім, наприклад, поділити цю суму навпіл.

Якщо вони домовляться про це, то зможуть істотно збільшити суму свого виграшу в цій грі.

У некооперативних іграх, змови заборонені. У коаліційних або в кооперативних іграх – ми будемо ці терміни використовувати як синоніми – змови дозволені. Гравці вступають в коаліції і тим самим намагаються збільшити свій платіж.

Відмінності кооперативних і некооперативних ігор якраз в цьому і полягають. У кооперативних (коаліційних) іграх гравці можуть об'єднуватися в різні групи-коаліції і укладати угоди. У некооперативних іграх кожен гравець приймає рішення окремо, не укладаючи угоду.

Коаліції

Кооперативна гра з трасферабельною корисністю задається множиною гравців N і характеристичною функцією v: (N, v).

Означення. *Коаліцією K* називають будь-яку підмножину множини усіх гравців.

Означення. *Великою коаліцією* називають множину всіх гравців.

Приклад

Нехай N = {Борис, Микола, Марічка}

Всі можливі коаліції: ø, {Борис}, {Микола}, {Марічка}, {Борис, Микола}, {Борис, Марічка}, {Микола, Марічка}, {Борис, Микола, Марічка} – велика коаліція.

Означення. *Характеристична функція v* - це функція, яка ставить у відповідності кожній коаліції К ⊆ N її виграш, тобто відображає множину всіх можливих підмножин множини гравців у множину дійсних чисел:

$$v: 2^N \to R.$$

Кооперативна гра називається *несуттєвою*, якщо виграш довільної її коаліції дорівнює сумі виграшів її учасників, т.т.

$$v(K) = \sum_{i \in K} v(i).$$

Різниця між тим, що одержує коаліція, і тим, що можуть одержати її учасники (як гравці, так і коаліції), називається *побічним платежем* (*виграшем*). Ігри з нетрасферабельною корисністю, в яких в загальному випадку неможливо безпосередньо співставити результати коаліції з результатами її складових, також називають *іграми без побічних платежів*.

Приклад.

Нехай N = {Борис, Микола, Марічка}, характеристична функція

$$v(K) = \begin{cases} 5, & \text{якщо } |K| = 3, \\ 2, & \text{якщо } |K| = 2, \\ 0, & \text{інше.} \end{cases}$$

Властивості характеристичної функції:

1. Монотонність — властивість, при якій у великих коаліціях (у сенсі включення) виплати більші:

$$A \subseteq B \Rightarrow v(A) \le v(B)$$

2. Супераддитивність — властивість, при якій для довільних коаліцій A і B, які не перетинаються, сума їх окремих вигід не більша за їх вигоду при об'єднанні:

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow v(A \cup B) \ge v(A) + v(B)$$

3. Опуклість — характеристична функція є опуклою:

$$v(A \cup B) + v(A \cap B) \ge v(A) + v(B)$$

Оскільки для довільних коаліцій A і B, які не перетинаються, $v(A \cap B) = 0$, то довільна опукла гра є супераддитивною. Однак, навпаки твердження – невірне. Розглянемо гру, у якої

$$v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = 1,$$

$$v(\{1,2\}) = v(\{1,3\}) = v(\{2,3\}) = 3, \qquad v(\{1,2,3\}) = 4.$$

Легко переконатися, що гра є супераддитивною. Наприклад, $v(\{1,2\}) \geq v(\{1\}) + v(\{2\})$ і т.д. Але гра не є опуклою. Наприклад, для коаліцій $A = \{1,2\}$ і B= $\{1,3\}$ маємо:

$$v(A \cup B) = v(\{1,2\} \cup \{1,3\}) = v(\{1,2,3\}) = 4,$$

$$v(A \cap B) = v(\{1\}) = 1,$$

але

$$v(A \cup B) + v(A \cap B) = 4 + 1 < v(A) + v(B) = 3 + 3 = 6.$$

Змістовно властивість супераддитивності означає, що додавання довільного гравця в довільну коаліцію не зменшує її корисноті. Властивість супераддитивності - це властивість, що відокремлює хороші характеристичні функції, які зрозуміло як аналізувати, від ненадто хороших, аналіз яких може бути складним. Дійсно, дивно очікувати, що коаліції будуть об'єднуватися одна з однією, якщо в результаті цього вони отримують менший платіж, ніж вони могли отримати окремо. Тому в подальшому ми завжди будемо вважати, що всі характеристичні функції коаліційних ігор, які ми будемо розглядати, мають властивість супераддитивності.

З визначення випливає, що в супераддитивних іграх гравці зацікавлені у формуванні великої коаліції. Вона буде отримувати найбільший виграш. При вирішенні коаліційних ігор ми будемо припускати, що гравці поводяться кооперативно, формують велику коаліцію, і питання, яке перед ними стоїть, - це як поділити виграш великої коаліції між гравцями. Розподіл виграшу між гравцями будемо представляти у вигляді вектора виграшів.

Означення. *Вектором виграшів* (ще кажуть *розподіл виграшів*) гравців називають довільний вектор

x = $(x_1, \ldots, x_n) \in R^n$, де:

- x_1 – виграш (корисність), який отримує перший гравець,
- …
- x_n - виграш, який отримує n -ий гравець.

Через x(S) позначається та корисність, яку розподіл виграшів віддає коаліції S:

$$x(S) = \sum_{i \in S} x_i.$$

Однак очевидно, що довільними виграші бути не можуть. Тому вводиться визначення допустимого вектора виграшів.

Означення. *Допустимий вектор виграшів* - це вектор x, такий, що

$$\sum_{i \in S} x_i \leq v(S).$$

Сума виграшів гравців не перевищує виграш великої коаліції.

Умова $x(\text{К}) = v(\text{К})$ називається ***умовою групової раціональності***: розподіл виграшів повинен повністю розподіляти корисність, яка одержується при об'єднанні всіх гравців у велику коаліцію К.

Умова $x_i \geq v(\{i\})$ називається ***умовою індивідуальної раціональності***: розподіл виграшів повинен давати кожному гравцю не менше, ніж він може одержати, не входячи в жодну з коаліцій.

Означення. Вектор х, який задовільняє тільки умові групової раціональності, називається ***передрозподілом***.

Рішенням коаліційної гри будемо називати деяку множину допустимих векторів виграшів гравців. Взагалі, ця множина матиме різний вигляд в залежності від того, яку концепцію рішення ми виберемо, тобто як і в разі некооперативних ігор, ми спочатку фіксуємо концепцію рішення, тобто припускаємо, якою повинна бути поведінка гравців - в разі некооперативних ігор, а тут - яким набором хороших властивостей повинен володіти вектор виграшів. І після цього, зробивши припущення про ці набори хороших властивостей, ми фіксуємо концепцію рішення гри і намагаємося вирішити гру за допомогою цієї концепції, тобто знайти множину допустимих векторів виграшів, які задовольняють зробленим припущенням.

Ми можемо придумувати різні концепції рішення. Все залежить від того, які хороші властивості ми будемо вважати важливими для вирішення ігор. Ми детально розглянемо дві відомі концепції вирішення коаліційних ігор, а саме: ядро і вектор Шеплі.

Як уже зазначалося, основним предметом сучасних дослідженi в кооперативних іграх є закономірності і наслідки об\єднань гравців в коаліції. Зокрема, рішення кооперативної гри повинно давати нам відповідь на питання: на які долі у виграшу великої коаліції можуть розраховувати гравці при існуючій конфігурації різних можливостей коаліцій? В загальному вигляді рішення - це деяке правило, яке певному класу ігор ставить у відповідність множину розподілів за певною коцепцією, яка, задовільняє наперед заданим аксіомам.

Взагалі рішення гри може бути як однозначним (у цьому випадку для кожної гри рішенням буде єдиний розподіл виграшів), так і багатозначним (коли для кожної гри можуть бути визначені декілька розподілів виграшів). Прикладами однозначних рішень є N-ядро і вектор Шеплі, прикладами багатозначних – С-ядро і К-ядро.

Ядро

Розглянемо коаліційну гру з характеристичною функцією *v*. Припустимо, що гравці ведуть себе кооперативно та формується велика коаліція. Гравці отримують виграші $(x_1, ..., x_n)$. Ми хочемо, щоб вектор $(x_1, ..., x_n)$ мав наступні властивості:

1. ***Ефективність*** - весь виграш великої коаліції повинен бути

   розподілений між гравцями.

   Будемо говорити, що вектор виграшів є ефективним, якщо сума

   виграшів гравців дорівнює виграшу великої коаліції.

$$\sum_{i \in N} x_i = v(N)$$

2. ***Коаліційна раціональність*** - не повинно бути такої коаліції, яка

   захотіла б покинути велику коаліцію.

   Будемо говорити, що вектор виграшів є коаліційно раціональним, якщо яку б коаліцію К ми не взяли, гравці, що входять в коаліцію К, отримують в цьому векторі виграшів в сумі не менше того виграшу, який вони отримали б, якби коаліція К відкололася від великої коаліції, і в результаті цього, відповідно, вони змогли б отримати виграш *v* (К).

$$\sum_{i \in N} x_i \geq v(K) \quad \forall K \subseteq N$$

Означення. *Ядро C* (v) - це множина векторів платежів, які мають наступні властивості:

- Ефективність,
- Коаліційна раціональність.

У рамках цієї концепції акцент робиться на стабільності рішення, тобто на тому, що ніхто не захоче відколотися і покинути велику коаліцію.

Означення. Говорять, що коаліція К ***блокує розподіл виграшів*** x, якщо знайдеться інший розподіл виграшу y такий, що $\sum_{i\in N} y_i \leq v(K)$ і для довільного гравця $i \in K$ виконується: $y_i \geq x_i$. Тоді ***С-ядром кооперативної гри*** називається множина розподілів виграшів, які не можуть бути заблоковані жодною коаліцією.

Властивості С-ядра:

1. С-ядро задається системою лінійний рівнянь і нестрогих нерівностей, у зв'язку з чим воно є опуклим багатогранником.

2. С-ядро може бути порожнім.

Приклад 1

Нехай Борис і Микола продають млинці на вулиці. Микола вміє пекти млинці, а Борис - робити начинку.

За один день Борис не може заробити нічого, а Микола здатен заробити 200$. Разом вони здатні заробити 300$, адже млинці з начинкою будуть смачніші і будуть коштувати дорожче, аніж просто млинці.

Питання: при якому розподілі виручки вони погодяться працювати разом?

Для відповіді на це питання, знайдемо ядро в цій грі.

Множина гравців N = {Борис, Микола}.

Можливі коаліції: ø, {Борис}, {Микола}, {Борис, Микола}.

Для кожної коаліції вкажемо платіж:

v (ø) = v ({Борис}) = 0.

v ({Микола}) = 200.

v ({Борис, Микола}) = 300.

Будемо шукати такі вектори виграшів $(x_{\text{Борис}}, x_{\text{Микола}})$, які мають властивості ефективності та коаліційної раціональності.

За визначенням ядро цієї гри задається системою:

v ({Борис}) ≥ 0;

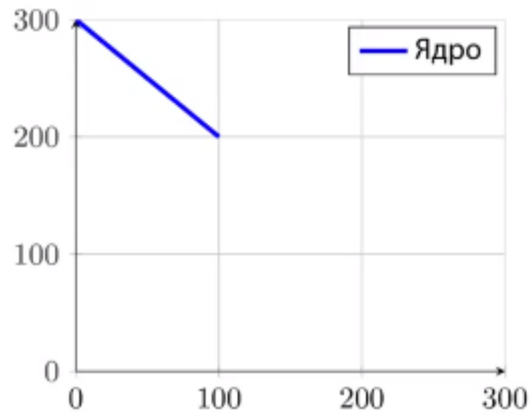
v ({Микола}) ≥ 200;

v ({Борис, Микола}) $= 300$.

Тоді ядром буде наступний набір векторів:

$C(v) = \{(x_{\text{Борис}}, 300 - x_{\text{Борис}}) | x_{\text{Борис}} \in [0;\ 100]\}$

$x_{\text{Микола}}$



$x_{\text{Борис}}$

Приклад 2

Борис, Микола, Марічка вирішують, як їм поділити піцу.

Коаліція, що складається з більшості гравців, може заволодіти всією піцою і поділити її між гравцями, що входять в коаліцію.

Який розподіл піци задовольнив би всіх?

Множина гравців N = {Борис, Микола, Марічка}.

Коаліції: ø, {Борис}, {Микола}, {Марічка}, {Борис, Микола}, {Борис, Марічка}, {Микола, Марічка}, {Борис, Микола, Марічка}.

Платежі коаліцій:

v (К) = 1, якщо $|К| \geq 2$;

v (К) = 0, інакше.

Ядро цієї гри задається системою:

$x_i \geq 0$ для будь − якого і; (1)

$x_{\text{Борис}} + x_{\text{Микола}} \geq 1;$ (2)

$x_{\text{Борис}} + x_{\text{Марічка}} \geq 1;$ (3)

$x_{\text{Микола}} + x_{\text{Марічка}} \geq 1;$ (4)

$x_{\text{Микола}} + x_{\text{Марічка}} + x_{\text{Борис}} = 1;$ (5)

З (2) - (4) випливає, що $x_{\text{Микола}} + x_{\text{Марічка}} + x_{\text{Борис}} \geq 3/2;$ а з (5) випливає, що $x_{\text{Микола}} + x_{\text{Марічка}} + x_{\text{Борис}} = 1$. Одержали протиріччя.

Отже, C (v) = ø.

Тобто велика коаліція ніколи не буде стабільною. Яким би не був розподіл платежів всередині цієї великої коаліції, завжди знайдуться гравці, які захочуть об'єднатися в коаліцію і відколотися від великої коаліції. Ці два приклади 1 і 2 проілюстрували, що насправді у ядра є кілька недоліків.

По-перше, ядро може бути великим, тобто складатися з великої кількості різних векторів платежів.

З іншого боку, ядро може бути порожнім. І таким чином, цю концепцію можна застосувати для аналізу не кожної коаліційної гри.

Однак, існують концепції, які дозволяють однозначно вирішити будь-яку коаліційну гру. До таких концепцій відноситься вектор Шеплі.

Вектор Шеплі

Американським економістом і математиком Ллойдом Шеплі (Lloyd Stowell Shapley) була побудована система вимог для «справедливих» рішень кооперативних ігор.

Розглянемо коаліційну гру з характеристичною функцією v. Припустимо, що гравці ведуть себе кооперативно та формується велика коаліція. Гравці отримують виграші $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$.

Вектор $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ має мати наступні властивості:

1. ***Ефективність -*** весь виграш великої коаліції повинен бути розподілений між гравцями.

Будемо говорити, що вектор виграшів є ефективним, якщо сума виграшів гравців дорівнює виграшу великої коаліції:

$$\sum_{i \in N} \varphi_i = v(N)$$

2. ***Симетричність -*** гравці, які вносять однаковий вклад, повинні отримувати однакові платежі.

Означення

Симетричними будемо називати гравців i та j, такі, що

$$v(K \cup \{i\}) = v(K \cup \{j\}) \ \forall K \subseteq N \setminus \{i, j\}.$$

При приєднанні до будь-якої коаліції, в якій немає гравців i та j, симетричні гравці вносять однаковий вклад.

3. ***Аксіома бовдура -*** гравці, що не приносять користі, не повинні отримувати нічого.

Означення

Бовдуром називають гравця i, такого, що

$$v(K \cup \{i\}) = v(K) \ \forall K \subseteq N \setminus \{i\}.$$

Бовдури не вносять ніякого вкладу в жодну з коаліцій.

Аксіома бовдура: Якщо гравець i - бовдур, то

$\varphi_i(v) = 0.$

4. ***Лінійність -*** виграш гравця в сумі ігор повинен дорівнювати сумі його виграшів в кожній грі.

Для будь-яких двох гравців з характеристичними функціям v та w:

$\varphi_i(v + w) = \varphi_i(w) + \varphi_i(v)$ для кожного $i \in N$.

Виграш будь-якого гравця в грі, яка є комбінацією двох коаліційних ігор, повинен дорівнювати сумі його виграшів в двох цих іграх окремо.

Аксіома лінійності (аксіома адитивності) означає, що не важливо, розігрувати ігри v і w окремо чи разом - підсумкові вектори платежів в обох випадках повинні бути однаковими.

Теорема

Існує єдиний вектор виграшів гравців, що задовольняє властивостям ефективності, симетричності, лінійності та аксіомі бовдура.

Цей вектор називається ***вектором Шеплі.*** У рамках цієї концепції акцент ставиться на справедливості рішення.

Теорема

Вектором Шеплі є вектор виграшів $\varphi(v) = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$, такий, що

$$\varphi_i(v) = \sum_{K \ni i} \frac{(k-1)!(n-k)!}{n!}\Big(v(K) - v(K \setminus \{i\})\Big),$$

де k = |K| - число гравців в коаліції K.

Інтерпретація вектора Шеплі

Нехай у нас велика коаліція формується крок за кроком, гравці у випадковому порядку приєднуються один за одним.

Приклад

Нехай є три гравця (n = 3), тобто велика коаліція може сформуватись шістьма способами:

1←2←3 2←1←3 3←1←2

1←3←2 2←3←1 3←2←1

До першого гравця приєднується другий гравець, потім до них двох приєднується третій гравець і т.д.

Таким чином, для n гравців вибрати гравця, який приєднається до коаліції першим, можна n способами; вибрати гравця, який приєднається до коаліції другим, можна n-1 способами, і т.д., вибрати останнього гравця можна єдиним способом. Разом всього існує n! варіантів утворення каоліції.

Повернемось до формули для знаходження вектора Шеплі та розглянемо її послідовно.

Нехай i-тий гравець приєднується після того, як зібралася деяка коаліція $K\setminus\{i\}$. Вклад i-го гравця, який він принесе, приєднуючись до цієї коаліції, виділено червоним у загальній формулі:

$$\varphi_i(v) = \sum_{K \ni i} \frac{(k-1)!(n-k)!}{n!} \Big(v(K) - v\big(K \setminus \{i\}\big) \Big),$$

У чисельнику дробу фігурує кількість порядків, в яких може сформуватися коаліція, у яку i-тий гравець прєднався k-тим:

$$\varphi_i(v) = \sum_{K \ni i} \frac{(k-1)!(n-k)!}{n!} \Big(v(K) - v\big(K \setminus \{i\}\big) \Big),$$

У знаменнику дробу фігурує загальна кількість способів упорядкувати n гравців:

$$\varphi_i(v) = \sum_{K \ni i} \frac{(k-1)!(n-k)!}{n!} \Big(v(K) - v\big(K \setminus \{i\}\big) \Big),$$

Усереднюємо за всіма можливими способами формування великої коаліції. А в кінці сумуємо це по усім коаліціям, в які входить гравець i.

Приклади

Повернемось до прикладу 1 з Борисом та Миколою, які готують млинці. *Питання:* як справедливо розділити виручку?

Для знаходження відповіді на це питання, знайдемо вектор Шеплі.

N = {Борис, Микола}, n = 2.

Платежі залишаються тими ж, що і раніше:

v (ø) = v ({Борис}) = 0.

v ({Микола}) = 200.

v ({Борис, Микола}) = 300.

Борис входить у дві коаліції: {Борис}, {Борис, Микола}. Знайдемо компоненту вектора Шеплі для Бориса, яка буде складатись з двох доданків (червоним виділено доданок, який відповідає коаліції, яка складається з одного Бориса, і він дорівнює нулю; другий доданок показує скільки приносить Борис, приєднавшись до Миколи):

$$\varphi_{\text{Борис}}(v) =$$

$$= \frac{(1-1)!(2-1)!}{2!} \cdot (0-0) + \frac{(2-1)!(2-2)!}{2!} \cdot (300-200) =$$
$$= 0 + \frac{1}{2} \cdot 100 = 50$$

Вектор Шеплі говорить про те, що Борис має одержати 50.

Аналогічно робимо розрахунки для Миколи.

Коаліції, в які входить Микола: {Микола}, {Борис, Микола}.

$$\varphi_{\text{Микола}}(v) =$$

$$= \frac{(1-1)!(2-1)!}{2!} \cdot (200-0) + \frac{(2-1)!(2-2)!}{2!} \cdot (300-0) =$$
$$= \frac{1}{2} \cdot 200 + \frac{1}{2} \cdot 300 = 250$$

Отже, вектор Шеплі показує скільки має одержати кожен з гравців в такій коаліції:

$$\varphi(v) = (\varphi_{\text{Борис}}, \varphi_{\text{Микола}}) = (50, 250).$$

Те саме можна продемонструвати у вигляді таблиці:

	Вклад Бориса	Вклад Миколи
Борис ← Микола	0	300
Микола ← Борис	100	200 =(300-100)
Загальний вклад гравця Компонента вектора Шеплі	100 50	500 250

Зауважимо, що вектор Шеплі $\varphi(v) = (\varphi_{\text{Борис}}, \varphi_{\text{Микола}}) = (50, 250)$

в грі єдиний. Більш того, вектор Шеплі лежить в ядрі:

$C(v) = \{(x_{\text{Борис}}, 300 - x_{\text{Борис}}) | x_{\text{Борис}} \in [0;\ 100]\}$.

Повернемося до прикладу 2 з Борисом, Миколою, Марічкою, які замовили піцу. Як їм справедливо розділити піцу? Ми раніше встановили, що ядро в цій грі порожнє. Знайдемо вектор Шеплі.

Множина гравців N = {Борис, Микола, Марічка}, n=3.

Виграш кожної коаліції

$$v(K) = \begin{cases} 1, \text{якщо } |K| \geq 2, \\ 0, \quad\quad \text{інакше.} \end{cases}$$

Знайдемо компоненту вектора Шеплі для Бориса. Борис входить у чотири різні коаліції: {Борис}, {Борис, Микола}, {Борис, Марічка}, {Борис, Микола, Марічка}. Отже, у компоненту вектора Шеплі для Бориса буде входити чотири доданки. У першому доданку стоїть виграш з коаліції {Борис}. Виграш порожньої коаліції дорівнює нулю, до неї приєднався Борис, який приніс у коаліцію нуль. Виграш коаліції {Борис, Микола}: спочатку сам Микола одержував нуль, до нього приєднався Борис, ця коаліція одержує 1 (цілу піцу). Всього кількість формування такої коаліції дорівнює 1. І ділимо на загальну кількість порядків формування великої коаліції (3!) і одержуємо другий доданок. Аналогічно одержуємо третій доданок, який відповідає коаліції {Борис, Марічка}. І нарешті вклад Бориса у велику коаліцію {Борис, Микола, Марічка} дорівнює нулю. Тому що якщо спочатку коаліцію формували Микола і Марічка, то вони претендували на всю піцу, до них приєднується Борис, але Микола і Марічка знову ж претендують на всю піцу. Тобто Борис нічого не приносить у цю коаліцію.

$$\varphi_{\text{Боря}}(v) = \frac{(1-1)!(3-1)!}{3!} \cdot (0-0) + \frac{(2-1)!(3-2)!}{3!} \cdot (1-0) +$$

$$+ \frac{(2-1)!(3-2)!}{3!} \cdot (1-0) + \frac{(3-1)!(3-3)!}{3!} \cdot (1-1) =$$

$$= 0 + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + 0 = \frac{1}{3}$$

Таким чином, усереднений вклад Бориса, в усі можливі коаліції, до яких він може принести, дорівнює 1/3. Це і є компонента вектора Шеплі для Бориса.

Аналогічно розраховується компоненти для вектора Шеплі для Миколи і Марічки. Зауважимо, що в цій грі Борис, Микола і Марічка – ***симетричні гравці***. Тому в силу властивостей симетричності і ефективності, гравці мають розділити піцу на три рівні частини.

Другий спосіб знаходження вектора Шеплі у цій грі – табличний:

	Вклад Бориса	Вклад Миколи	Вклад Марічки
Борис ← Микола ← Марічка	0	1	0
Борис ← Марічка ← Микола	0	0	1
Микола ← Борис ← Марічка	1	0	0
Микола ← Марічка ← Борис	0	0	1
Марічка ← Борис ← Микола	1	0	0
Марічка ← Микола ← Борис	0	1	0
Загальний вклад гравця	**2**	**2**	**2**
Компонанта вектора Шеплі	**2/6**	**2/6**	**2/6**

Вектор Шеплі цієї гри:

$$\varphi(v) = \left(\varphi_{\text{Борис}}, \varphi_{\text{Микола}}, \varphi_{\text{Марічка}}\right) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right).$$

Вектор Шеплі єдиний і не лежить у ядрі (ядро в цій грі порожнє).

Прості ігри

Означення. Коаліційна гра називається *простою,* якщо для кожної коаліції

$K \subseteq N$ виграш v(К) дорівнює або 0, або 1, і $v(N) = 1$.

Коаліція, для якої виграш дорівнює 1, називається такою, що виграє.

Коаліція, для якої виграш дорівнює 0, називається такою, що програє.

Клас простих ігор дозволяє дуже легко моделювати голосування.

Приклад.

Розглянемо просту гру з характеристичною функцією:

v(К) = 1, |K|≥n /2;

v(К) = 0,   інакше.

За допомогою такої характеристичної функції моделюються голосування, в яких рішення приймається простою більшістю голосів.

Означення

Гравець i називається ***вето-гравцем***, якщо він входить в усі коаліції, що виграють, або, що те саме, якщо $N\backslash\{i\}$ — коаліція, яка програє.

Тобто виграш великої коаліції, з якої вийшов i-тий гравець, дорівнює нулю (програє).

Приклад простої гри з вето-гравцем.

Керівник і двоє співробітників – Оля і Андрій – думають чи почати їм спільну роботу над проєктом. Щоб прийняти остаточне рішення, вони вирішують голосувати. Рішення про початок роботи приймається простою більшістю голосів за умови, якщо керівник проголосував «за». У випадку позитивного рішення на реалізацію проєкту виділяється бюджет у розмірі 1.

Опишемо формально цю гру. $N = \{\text{Керівник}, \text{Оля}, \text{Андрій}\}, n = 3$. Керівник – це вето-гравець. Тоді характеристична функція гри:

$$v(K) = \begin{cases} 1, \text{якщо } \lceil K \rceil > \dfrac{n}{2} \;\; i \;\; \text{Керівник} \in K, \\ \quad\quad\quad 0, \;\; \text{інакше.} \end{cases}$$

Ядро цієї гри задається системою

$$\begin{cases} x_i \geq 0 \;\; \text{для довільного} \;\; i, \\ x_{\text{Керівник}} + x_{\text{Оля}} \geq 1, \\ x_{\text{Керівник}} + x_{\text{Борис}} \geq 1, \\ x_{\text{Керівник}} + x_{\text{Оля}} + x_{\text{Борис}} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_i \geq 0 \;\; \text{для довільного} \;\; i, \\ x_{\text{Оля}} \leq 0, \\ x_{\text{Борис}} \leq 0, \\ x_{\text{Керівник}} + x_{\text{Оля}} + x_{\text{Борис}} = 1. \end{cases}$$

Тоді виграші $x_{\text{Керівник}} = 1$, $x_{\text{Оля}} = 0$, $x_{\text{Борис}} = 0$.

Таким чином, всі гравці, крім Керівника, одержують 0. Керівник забирає собі весь бюджет.

Теорема. У простій грі з вето-гравцями вето-гравці ділять весь виграш великої коаліції між собою, а всі інші гравці одержують 0.

Теорема. Ядро простої гри непорожнє тоді і тільки тоді, коли є хоча б один вето-гравець.

Індекс Шеплі-Шубіка

У 1954 році Шеплі і Шубік вперше запропонували використовувати вектор Шеплі для аналізу голосувань. Тепер вектор Шеплі, що використовується для простих ігор, зазвичай називають ***індексом впливу Шеплі-Шубік***. Відповідна компонента вектора Шеплі - ***індексом впливу того чи іншого гравця***. Інша інтерпретація індуксу Шеплі-Шубіка: відповідна компонента цього вектора φ_i відповідає частині послідовностей, в яких гравець i виявляється ключовим при прийнятті рішення голосуванням.

Означення. Гравець i називається ***ключовим***, якщо після його приєднання до коаліції К \ {i}, коаліція з тої, що програє, перетворюється в ту, що виграє, тобто

$$v(K \setminus \{i\}) = 0, \text{ a } v(K) = 1.$$

Тоді для простих ігор формулу для вектора Шеплі можна представити у спрощеному вигляді:

$$\varphi_i(v) = \sum_{K \ni i,} \frac{(k-1)!(n-k)!}{n!},$$

де К - коаліція, що виграє, i - ключовий гравець, k – розмір коаліції К, n – загальна кількість гравців, замість формули

$$\varphi_i(v) = \sum_{K \ni i} \frac{(k-1)!(n-k)!}{n!} \Big(v(K) - v(K \setminus \{i\}) \Big).$$

Означення. Голосування з квотою - це проста гра з характеристичною функцією вигляду

v(К) = 1, якщо $\sum_{i \epsilon K} w_i \ \geq q$;

v(К) = 0, інакше.

$w_i \geq 0$- кількість голосів (або вага) гравця i.

$q > 0$- мінімальна кількість голосів, яку потрібно набрати для перемоги (квота).

Приклад

Нехай $N = \{1, 2, 3, 4\}$. У кожного з гравців є відповідна кількість голосів:

$w_1 = 4$; $w_2 = 2$; $w_3 = w_4 = 1$. Квота $q = 5$, тобто для прийняття рішення потрібно набрати щонайменше 5 голосів. Тобто виграш коаліції:

$$v(K) = 1, \text{якщо} \sum_{i \in K} w_i \geq 5;$$

$$v(K) = 0, \qquad \text{інакше.}$$

Випишемо коаліції, що виграють:

$\{1,2\}$ $\{1,4\}$ $\{1,2,4\}$ $\{1,2,3,4\}$

$\{1,3\}$ $\{1,2,3\}$ $\{1,3,4\}$

Подивимось, які гравці в яких коаліціях є ключовими. Складемо наступну таблицю:

	1	2	3	4
$\{1,2\}$	1	1		
$\{1,3\}$	1		1	
$\{1,4\}$	1			1
$\{1,2,3\}$	1			
$\{1,2,4\}$	1			
$\{1,3,4\}$	1			
$\{1,2,3,4\}$	1			

Одиницю ставимо для тих гравців, які є ключовими для відповідних коаліцій. Порахуємо компоненту індекса впливу Шеплі-Шубіка для першого гравця. Він є ключовим для трьох коаліцій розміру 2, для трьох коаліцій розміру 3 і для одної коаліції розміру 4. Отже, компонента індекса впливу Шеплі-Шубіка дорівнює

$$\varphi_1(v) = 3 \cdot \frac{(2-1)!(4-2)!}{4!} +$$
$$+ \ 3 \cdot \frac{(3-1)!(4-3)!}{4!} +$$
$$+ \ \frac{(4-1)!(4-4)!}{4!} =$$
$$= \ \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4};$$

Для другого, третього та четвертого гравців:

$$\varphi_2(v) = \frac{(2-1)!(4-2)!}{4!} = \frac{1}{12};$$
$$\varphi_3(v) = \frac{1}{12};$$
$$\varphi_4(v) = \frac{1}{12}.$$

Таким чином, індекс Шеплік-Шубріка у цій грі:

$$\varphi(v) = \left(\frac{3}{4}, \frac{1}{12}, \frac{1}{12}, \frac{1}{12}\right)$$

Перший гравець, у якого чотири голоса, має більший вплив на результат голосування, аніж інші гравці.

Зауважимо також, що перший гравець є вето-гравцем: якби ми шукали ядро, то він би отримав 1, а усі інші - 0. Також зауважимо, що компоненти вектора Шеплі-Шубіка для другого, третього, четвертого гравці рівні, хоча «ваги» цих гравців різні: у другого гравця є 2 голоси, у третього і четвертого гравця є по одному голосу, але, як виявилось, переговорна сила їх всіх трьох повністю однакова.

Приклад.

Оцінемо вплип різних партій, які представлені у парламенті Ісландії («альтинг») після виборів 2013 року. Всього в альтингу 63 місця. Проста більшість складає 32 голоси. Всього у парламент входить 6 партій:

1) Партія незалежності (19) - НЕЗ

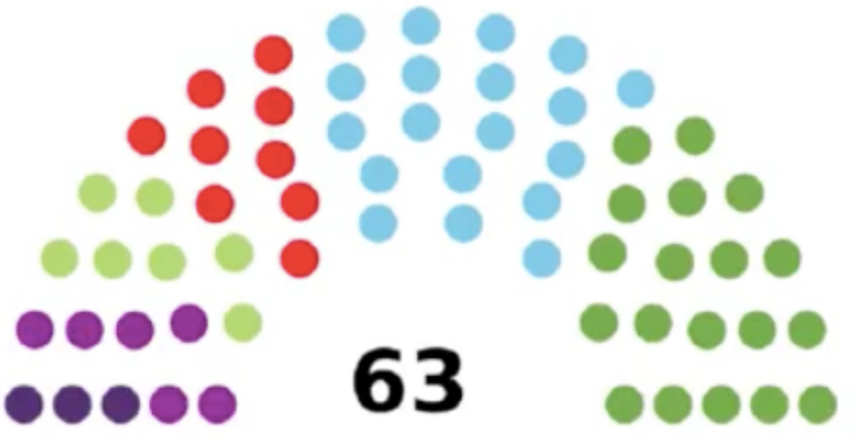
2) Прогресивна партія (19) - ПР

3) Соціал-демократичний ал'янс (9) - СД

4) Ліво-зелений рух (7) - ЛЗ

5) Світле майбутнє (6) - СМ

6) Піратська партія (3) - ПП



Icelandic Althing Composition 2013 by JackWilfred / CC BY-SA 3.0

Опишемо формальну дану гру.

N = {НЕЗ, ПР, СД, ЛЗ, СМ, ПП}

Ваги: $w_{\text{НЕЗ}} = 19, w_{\text{ПР}} = 19, w_{\text{СД}} = 9 \;\; w_{\text{ЛЗ}} = 7, w_{\text{СМ}} = 6 \;\; w_{\text{ПП}} = 3.$

Квота: q = 32.

Виграш коаліції:

$$v(K) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } \sum_{i \in K} w_i \geq 32, \\ 0, & \text{інакше.} \end{cases}$$

Знайдемо індект Шеплі-Шубіка для кожної партії за формулою

$$\varphi_i(v) = \sum_{K \ni i,} \frac{(k-1)!(n-k)!}{n!}$$

Виграшні коаліції, в яких Партія незалежності (НЕЗ) є ключовою (всього 16):

{НЕЗ, ПР}, {НЕЗ, ПР, ПП}, {НЕЗ, ПР, СД, ПП}, {НЕЗ, СД, ЛЗ, ПП}, {НЕЗ, ПР, СД}, {НЕЗ, СД, ЛЗ}, {НЕЗ, ПР, ЛЗ, ПП}, {НЕЗ, СД, СМ, ПП}, {НЕЗ, ПР, ЛЗ}, {НЕЗ, СД, СМ}, {НЕЗ, ПР, СМ, ПП}, {НЕЗ, ЛЗ, СМ, ПП}, {НЕЗ, ПР, СМ}, {НЕЗ, ЛЗ, СМ}, {НЕЗ, СД, ЛЗ, СМ}, {НЕЗ, СД, ЛЗ, СМ, ПП}.

Відповідно компонента індекса Шеплі-Шубіка для партії НЕЗ дорівнює

$$\varphi_{\text{НЕЗ}}(v) = \frac{(2-1)!\,(6-2)!}{6!} + 7 \cdot \frac{(3-1)!\,(6-3)!}{6!} + 7 \cdot \frac{(4-1)!\,(6-4)!}{6!} +$$

$$+\frac{(5-1)!(6-5)!}{6!} = \frac{1}{30} + \frac{7}{60} + \frac{7}{60} + \frac{1}{30} = \frac{18}{60} = 0{,}3.$$

Для Прогресивної партії (ПР), у якої теж 19 місць в парламенті,

$$\varphi_{\text{ПР}}(v) = \varphi_{\text{НЕЗ}}(v) = 0{,}3.$$

Для Соціал-демократичного ал'янсу (СД) виграшні коаліції, в яких СД є ключовою:

{НЕЗ, СД, ЛЗ}, {ПР, СД, ЛЗ}, {НЕЗ, СД, ЛЗ, ПП}, {ПР, СД, ЛЗ, ПП}, {НЕЗ, СД, СМ}, {ПР, СД, СМ}, {НЕЗ, СД, СМ, ПП}, {ПР, СД, СМ, ПП}.

Відповідно компонента індекса Шеплі-Шубіка для ал'янсу (СД) дорівнює

$$\varphi_{\text{СД}}(v) = 4 \cdot \frac{(3-1)!\,(6-3)!}{6!} + 4 \cdot \frac{(4-1)!\,(6-4)!}{6!} =$$

$$=\frac{1}{15} + \frac{1}{15} = \frac{2}{15} \approx 0{,}13.$$

Для Ліво-зеленого руху (ЛЗ) виграшні коаліції, в яких ЛЗ є ключовим:

{НЕЗ, СД, ЛЗ}, {ПР, СД, ЛЗ}, {НЕЗ, СД, ЛЗ, ПП}, {ПР, СД, ЛЗ, ПП}, {НЕЗ, ЛЗ, СМ}, {ПР, ЛЗ, СМ}, {НЕЗ, ЛЗ, СМ, ПП}, {ПР, ЛЗ, СМ, ПП}.

Відповідно компонента індекса Шеплі-Шубіка для ал'янсу (СД) дорівнює

$$\varphi_{\text{ЛЗ}}(v) = \varphi_{\text{СД}}(v) = 4 \cdot \frac{(3-1)!\,(6-3)!}{6!} + 4 \cdot \frac{(4-1)!\,(6-4)!}{6!} =$$

$$=\frac{1}{15} + \frac{1}{15} = \frac{2}{15} \approx 0{,}13.$$

Для Світлого майбутнього (СМ) виграшні коаліції, в яких СМ є ключовим:

{НЕЗ, ЛЗ, СМ}, {ПР, ЛЗ, СМ}, {НЕЗ, ЛЗ, СМ ПП}, {ПР, ЛЗ, СМ, ПП}, {НЕЗ, СД, СМ}, {ПР, СД, СМ}, {НЕЗ, СД, СМ, ПП}, {ПР, СД, СМ, ПП}.

Відповідно компонента індекса Шеплі-Шубіка для ал'янсу (СД) дорівнює

$$\varphi_{\text{СМ}}(v) = \varphi_{\text{ЛЗ}}(v) = \varphi_{\text{СД}}(v) = 4 \cdot \frac{(3-1)!\,(6-3)!}{6!} + 4 \cdot \frac{(4-1)!\,(6-4)!}{6!} =$$

$$=\frac{1}{15} + \frac{1}{15} = \frac{2}{15} \approx 0{,}13.$$

А у Піратської партії компонента індекса Шеплі-Шубіка дорівнює нулю, тому що ПП не є ключовою в жодній з виграшних коаліцій:

$$\varphi_{\text{ПП}}(v) = 0.$$

Розподіл впливу партій в альтингу представимо у наступному вигляді:

Гравець	Вага	Індекс
Партія незалежності	19 = 30,16 %	0,3
Прогресивна партія	19 = 30,16 %	0,3
Соціал-демократичний ал'янс	9 = 14,39 %	0,13
Ліво-зелений рух	7 = 11,11 %	0,13
Світле майбутнє	6 = 9,52 %	0,13
Піратська партія	3 = 4,76 %	0

Індекс впливу характеризує переговорну силу кожної з партій.

Рада Європейського Союзу

Рада Європейського Союзу (Рада міністрів) складається з національних міністрів з певних глузей від кожної країни-члена ЄС та одного відповідального за цю галузь єврокомісара, який не має права голосувати. Рішення в Раді ухвалюються голосуванням міністрів країн-членів. У більшості випадків рішення приймаються кваліфікованою більшістю.

Кваліфікована більшість (англ. *Qualified Majority Voting*, QMV) — кількість голосів, необхідних для ухвалення рішень в Раді ЄС за процедурою більшості (на відміну від одностайного способу). Рада складалася з 25 міністрів – по одному від кожної держави ЄС. (без Болгарії, Румунія) Але голоси держав-членів мають різні вагові коефіцієнти відповідно до кількості населення цих країн з певною поправкою, яка дає змогу маленьким державам мати гарантоване мінімальне представництво.

З 1958 р. По 1973 р. в ЄС входило 6 країн.

Вагомість голосу в Раді міністрів ЄС:

Франція, Німеччина, Італія – 4 голоси, Бельгія, Нідерланди – 2 голоси, Люксембрг – 1 голос.

Квота: q=12 із 16 (75%).

Завдання: обчислити індекс Шеплі-Шубіка для такого складу Ради ЄС, зробити виснокок щодо Люксембургу.

Сверджується, що «В Європейському Союзі з 15 країн ця система гарантувала леґітимність ухвалених рішень. “Великі” країни не могли об’єднатися, залишивши “маленькі” у меншості, і навпаки». Перевіримо це твердження.

Велика Британія, Італія, Німеччина та Франція мали по 10 “голосів” кожна, Іспанія – 8; Бельгія, Греція, Нідерланди та Португалія – по 5; Австрія та Швеція – по 4; Данія, Ірландія і Фінляндія – по 3; Люксембурґ – 2. Порогова кількість голосів, необхідна для ухвалення рішень (кваліфікована більшість) дорівнювала 62 з 87 (71%).

Завдання: обчислити індекс Шеплі-Шубіка для старого складу Ради ЄС.

З огляду на розширення, Ніццький договір переглянув вагові коефіцієнти голосів, зросла відносна вага голосів найбільших за кількістю населення країн, щоб забезпечити леґітимність ухвалюваних рішень з позицій демографічного представництва. П’ять найбільших країн тепер набирають в сумі 60% голосів (а не 55%, як раніше). Змінилось і саме визначення кваліфікованої більшості. Ухвалення рішення за процедурою кваліфікованої більшості тепер обумовлюється двома вимогами (подвійна більшість):

- рішення повинно набрати щонайменше порогову кількість голосів – 232 (з 321, див. таблицю),
- здобути підтримку більшості держав-членів (в окремих випадках – дві третини).

Крім того, будь-яка держава в Раді може вимагати перевірки, з метою пересвідчитися, що ухвалене рішення отримало підтримку (через національних представників) щонайменше, 62% населення ЄС. Нова система набрала чинності 1 листопада 2004 року.

З розвитком інтеграції та поглибленням інституційних реформ, процедура ухвалювання рішень кваліфікованою більшістю дедалі більше витісняє одностайне голосування, яке стримує ефективне впровадження політики Спільноти (завдяки праву будь-якої країни-члена накласти на рішення вето). Ніццький договір поширив процедуру голосування кваліфікованою більшістю ще на 27 положень, які раніше передбачали одностайне рішення.

Втім, одностайність лишається головним інструментом в галузі спільної зовнішньої та безпекової політики, фіскальної політики, регіональної політики тощо.

Вагомість голосу в Раді міністрів ЄС:

Велика Британія – 29, Італія – 29, Німеччина - 29, Франція – 29, Іспанія – 27, Польща – 27, Нідерланди – 13, Бельгія – 12, Греція – 12, Чехія – 12, Португалія -12, Угорщина – 12, Австрія – 10, Швеція – 10, Данія – 7, Ірландія – 7, Литва – 7, Словаччина – 7, Фінляндія – 7, Естонія – 4, Кіпр – 4, Латвія – 4, Люксембур – 4, Словенія – 4, Мальта – 3.

Загалом: 321. Порогова кількість голосів, необхідна для ухвалення рішень (кваліфікована більшість) дорівнювала q=232 (72,3%)

Завдання: обчислити індекс Шеплі-Шубіка для складу 25 членів Ради ЄС.

Сюжет «Право на сумку»

Розглянемо сюжет про «справедливість визначення прав на сумку».

Множина гравців: {Маргарита, Аліса, Дарина}:={1, 2, 3}. Одна з подруг вважала, що сумку за 10 тис. грн. вважається дуже дорогою. Друга подруга вважала, що 10 тис. грн. для пристойної сумки – це ніщо, а от 30 тис. грн. – це дорога сумка. У кінці кінців, вони зійшлися на 20 тис. грн. Таким чином, в загальній сумі 20 тис. грн. долі подруг склали:

Маргарита – 9 тис. грн., Аліса – 7 тис. грн., Дарина – 4 тис. грн.

Перед застосуванням теорії кооперативних ігор корисно замислитися про шляхи вирішення даної проблеми, виходячи з повсякденного досвіду.

Перше, що з’являється на думці, - це поділити пропорційно до вкладів подруг. Але тут же з’являється і заперечення від Дарини, що без її долі ніякої сумки взагалі б не було. На це, звичайно, знайдеться і контраргумент, що Маргарита з Алісою могли б якось «піднапрягтись» і обійтися без Дарининих 4 тис. грн.

Тут можна було б заперечити, що «піднапрягтись» могли б і Маргарита з Дариною без Аліси, але вже на 7 тис. грн. Тут для Маргарити коаліція з Дариною може здатися більш привабливою, ніж з Алісою, адже Дарина реально буде користуватися сумкою менше за Алісу. А як щодо коаліції Аліси і Дарини, то тут вже нереально, бо від 11 тис. грн. до 20 тис. грн. вже дуже далеко…

Розглянемо дану проблему з точки зору теорії кооперативних ігор з трансферабельною корисністю. Припустимо, що множина значень характеристичної функції – відрізок [0, 1], де 1 – повне володіння сумкою, 0 – відсутність прав на сумку.

Коаліції, які складаються з одного гравця, точно не одержують сумку:

$$v(\{1\})=v(\{2\})=v(\{3\})=0.$$

Коаліція з Маргарити (гравець 1) і Аліси (гравець 2) «майже» одержить сумку. Це «майже» якраз і може бути оцінено відношенням їх сумарних витрат до ціни сумки:

$$v(\{1,2\}) = \frac{9+7}{20} = \frac{4}{5} = 0{,}8.$$

Коаліція з Маргарити (гравець 1) і Дарини (гравець 3) в принципі теж може одержати сумку:

$$v(\{1,3\}) = \frac{9+4}{20} = \frac{13}{20} = 0{,}65.$$

Коаліція з Аліси (гравець 2) і Дарини (гравець 3), як не старайся, залишиться без сумки:

$$v(\{2,3\}) = 0.$$

Велика коаліція повністю одержить сумку:

$$v(\{1,2,3\}) = 1.$$

Знайдемо вектор Шеплі для даної гри.

Доля (ступінь) володіння сумкою Маргарити:

$$\varphi_1(v) = \frac{0!\cdot(3-0-1)!}{3!}\cdot[v(\{1\}) - v(\emptyset)] +$$

$$+\frac{1!\cdot(3-1-1)!}{3!}\cdot[v(\{1,2\}) - v(\{2\})] +$$

$$+\frac{1!\cdot(3-1-1)!}{3!}\cdot[v(\{1,3\}) - v(\{3\})] +$$

$$+\frac{2!\cdot(3-2-1)!}{3!}\cdot[v(\{1,2,3\}) - v(\{2,3\})] =$$

$$= \tfrac{1}{3}\cdot 0 + \tfrac{1}{6}\cdot 0{,}8 + \tfrac{1}{6}\cdot 0{,}65 + \tfrac{1}{3}\cdot 1 = 0{,}575$$

Доля (ступінь) володіння сумкою Аліси:

$$\varphi_2(v) = \frac{0! \cdot (3-0-1)!}{3!} \cdot [v(\{2\}) - v(\emptyset)] +$$

$$+\frac{1! \cdot (3-1-1)!}{3!} \cdot [v(\{1,2\}) - v(\{1\})] +$$

$$+\frac{1! \cdot (3-1-1)!}{3!} \cdot [v(\{2,3\}) - v(\{3\})] +$$

$$+\frac{2! \cdot (3-2-1)!}{3!} \cdot [v(\{1,2,3\}) - v(\{1,3\})] =$$

$$= \tfrac{1}{3} \cdot 0 + \tfrac{1}{6} \cdot 0{,}8 + \tfrac{1}{6} \cdot 0 + \tfrac{1}{3} \cdot 0{,}35 = 0{,}25.$$

Доля (ступінь) володіння сумкою Дарини:

$$\varphi_2(v) = \frac{0! \cdot (3-0-1)!}{3!} \cdot [v(\{3\}) - v(\emptyset)] +$$

$$+\frac{1! \cdot (3-1-1)!}{3!} \cdot [v(\{1,3\}) - v(\{1\})] +$$

$$+\frac{1! \cdot (3-1-1)!}{3!} \cdot [v(\{2,3\}) - v(\{2\})] +$$

$$+\frac{2! \cdot (3-2-1)!}{3!} \cdot [v(\{1,2,3\}) - v(\{1,2\})] =$$

$$= \tfrac{1}{3} \cdot 0 + \tfrac{1}{6} \cdot 0{,}65 + \tfrac{1}{6} \cdot 0 + \tfrac{1}{3} \cdot 0{,}2 = 0{,}175.$$

Отже, відповідно до вектора Шеплі ступені (долі) володіння сумкою між Маргаритою, Алісою і Дариною мають бути розподілені як (0,575; 0,25; 0,175).

Означення. Вектор виграшу x ***домінує виграш*** y ***за коаліцією*** S, якщо

$$x_i > y_i \;\; \forall i \in N,$$

$$x(S) \leq v(S).$$

Виграш x ***домінує виграш*** y, якщо знайдеться хоча б одна коаліція, по якій він домінує.

Тому можна С-ядром назвати множину недомінованих розподілів виграшів у грі (К, v):

$$C(v) = \{x \in R^n \,|\, x(N) = v(N), \qquad x(K) \geq v(K) \;\; \forall K \subset N\}.$$

Поняття С-ядра було введено канадським математиком Дональдом Джиллісом (Donald Bruce Gillies) у 1953 р. У змістовному плані С-ядро представляє множину розподілів виграшів, які не можуть бути об'єктивно оскаржені жодною з коаліцій. З даним рішенням пов'язані дві проблеми:

- У деяких ситуаціях С-ядро може бути «дуже великим», що породжує неоднозначність вибору «кращого» розподілу виграшу з нього,
- Можливі ситуації, в яких С-ядро буде порожнім.

Щодо зв'язку вектора Шеплі і С-ядра, то можна зауважити, що у випадку опуклої гри вектор Шеплі завжди належить С-ядру, проте у випадку супераддитивності та неопуклості він може не належати С-ядру навіть у випадку його непорожності.

Зобразимо геометричну інтерпретацію для С-ядра у сюжеті «Право на сумку».

Зауважимо, що це можливо, бо кількість гравців 3, тому будуємо у тривимірному просторі.

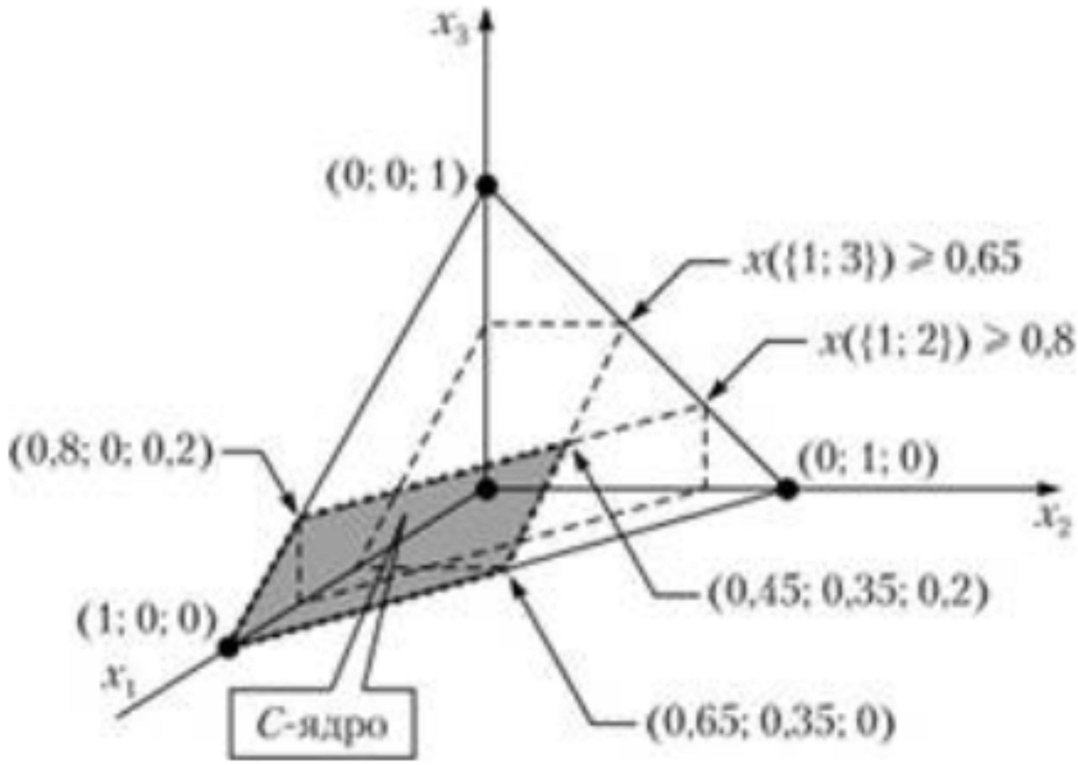


Рис. Геометрична інтерпретація С-ядра сюжету «Право на сумку»

Умова групової раціональності розподілу виграшу (необхідність повного розподілу виграшу великої коаліції) має вигляд:

$$x(\{1,2,3\}) = x_1 + x_2 + x_3 = v(\{1,2,3\}) = 1.$$

Йому відповідає площина, що перетинає осі в точках (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1).

Умови індивідуальної раціональності гравців мають вигляд:

$$x(\{1\}) \geq 0, x(\{2\}) \geq 0, x(\{3\}) \geq 0.$$

Дійсно, кожен гравець окремо «заробляє» нуль, з чого випливає, що розподіли виграшу не повинні давати йому менше нуля. Тому вирізається трикутник з побудованої вище площини, представлений на рис. Таким чином, множина розподілів виграшу у грі представляє собою 2-сімплекс з вершинами (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1).

Для отримання С-ядра необхідно врахувати обмеження на можливості коаліцій. У цій грі їх два:

1) $x(\{1,2\}) = x_1 + x_2 \geq v(\{1,2\}) = 0{,}8$ –розподіл, який належить С-ядру, не повинен давати коаліцію з першого і другого гравця (Маргарити та Аліси) менше, ніж 0,8 (інакше їм краще не вступати у велику коаліцію, а діяти в рамках коаліції К={1, 2});

2) $x(\{1,3\}) = x_1 + x_3 \geq v(\{1,3\}) = 0{,}65$ – розподіл, який належить С-ядру, не повинен давати коаліцію з першого і третього гравця (Маргарити та Дарини) менше, ніж 0,65.

Оскільки коаліція К={2, 3} не одержує сумки, то виконання обмежень, які вона накладає ($x(\{2,3\}) = x_2 + x_3 = 0$) автоматично випливають з умови *індивідуальної раціональності* ($x_i \leq v(\{i\})$).

Множина розподілів виграшів, які задовільняють нерівність $x(\{1,3\}) \geq v(\{1,3\})$, лежить вище площини $x_1 + x_3 = 0{,}65$, а множина розподілів, яка задовільняє нерівності $x(\{1,2\}) \geq v(\{1,2\})$, лежить в півпросторі, породженому площиною $x_1 + x_2 = 0{,}8$, який не містить початок координат. Результат їх перетину з площиною $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ дає паралелограм, виділений сірим кольором. Він і є геометричним місцем точок, які належать С-ядру гри.

Зауважимо, що дана гра належить до тих ситуацій, в яких С-ядро «досить велике». Його екстремальні точки відповідають досить спірним рішенням:

- (1; 0; 0) – все одержує Маргарита,
- (0,8; 0; 0,2) - сумку ділять між собою Маргарита і Дарина
- (0,45; 0,35; 0,2) – Аліса і Дарина дуже зменшують долю Маргарити,
- (0,65; 0,35; 0) – сумку ділять між собою Маргарита і Аліса.

Основний конструктивний висновок, який може бути зроблений з такої різноманітності, - це наявність об'єктивних причин для існування створеної ними коаліції.

На сьогоднішній день в теорії кооперативних ігор с транферабельною корисністю існує немало різних концептуальних підходів до визначення їх рішень. Серед найбільш відомих можуть бути названі рішення за Нейманом-Моргенштерном, переговорна множина, К-ядро, N-ядро.

Багато з концепцій рішень кооперативних ігор ґрунтуються на понятті ексцеса.

Означення. ***Ексцесом*** коаліції К за розподілом виграшів x називають величину

$$e(K, x) = v(K) - x(K), \text{ де } x(K) = \sum_{i \in K} x_i.$$

Додатній ексцес $(e(K, x) > 0)$ є показником міри незадоволення коаліції розподілом виграшів x, оскільки він дає їй менше, ніж вона може одержати самостійно (v(K)>x(K)).

Від'ємний ексцес, навпаки, відображає степінь задоволеності коаліції від розподілу, оскільки згідно нього учасники коаліції одержують більше за свої індивідуальні можливості поза великої коаліції (v(K)<x(K)).

Означення. LC-ядром (найменшим С-ядром) називається така множина передрозподілів, на якій досягається мінімальне значення для максимального серед ексцесів, обчислених за всіма коаліціями S даної гри (N, v):

$$\min_x \left(\max_{S \neq \emptyset, N} \{e(S, x)\} \right).$$

Змістовно LC-ядро – це така множина рішень, на якій найбільш невдоволена коаліція відчуває себе найменш ображеною. Дане визначення LC-ядра ніяк не пов'язане з фактом того, що С-ядро порожнє. У випадку, коли С-ядро непорожнє, LC-ядро представляє собою деяку підмножину, яка належить С-ядру.

LC-ядро, як і С-ядро, може бути неоднозначним. Від цього позбавлене інше рішення корпоративної гри, яке одержало назву N-ядра. Вперше даний термін запропонував ізраїльський математик і економіст Давид Шмайдлер (David Schmeidler). Ми обмежимося тільки змістовним представленням основної ідеї, яка лежить в основі концепції N-ядра.

Проблема неоднозначності (багатозначності) LC-ядра суттєво визначається тим, що досягнення мінімума максимального ексцеса виявляється на деякій конкретній коаліції S' за результатом порівняння значень v(S') І x(S'). У випадку, коли S' об'єднує декілька гравців, може знайтися багато розподілів, які по різному розподіляють виграші між ними, але в сумі забезпечують x(S'). Для того, щоб уникнути дану неоднозначність, використовується спеціальне правило порівняння розподілів.

Пояснимо це на конкретному прикладі «Право на сумку». Розглянемо два можливих розподіли виграшів:

$$x^1 = (0{,}65; 0{,}25; 0{,}1), \qquad x^2 = (0{,}8; 0{,}1; 0{,}1).$$

У табл. містяться значення ексцесів за даними розподілів гри (N,v), розрахованих за всіма можливими коаліціями за виключенням $\emptyset, N$.

Табл. Значення ексцесів для розподілів x^1 та x^2 за можливими колаіціями

	{1}	{2}	{3}	{1; 2}	{1;3}	{2; 3}
u(*S*)	0	0	0	0,8	0,65	0
x^1	0,65	0,25	0,1	—	—	—
x^1 (S)	0,65	0,25	0,1	0,9	0,75	0,35
e(S, x^1)	-0,65	-0,25	-0,1	-0,1	-0,1	-0,35
x^2	0,8	0,1	0,1	—	—	—
x^2 (S)	0,8	0,1	0,1	0,9	0,9	0,2
e(S,x^2)	-0,8	-0,1	-0,1	-0,1	-0,25	-0,2

Отримані значення ексцесів впорядкуємо за спаданням:

x^1	-0,1	-0,1	-0,1	-0,25	-0,35	-0,65
x^2	-0,1	-0,1	-0,1	-0,25	-0,2	-0,8

У результаті на першому місці опиниться розподіл самої невдоволеної коаліції і т.д. за мірою зменшення невдоволення.

Далі виконується лексикографічне порівняння рядів, впорядкованих за спаданням ексцесів: знаходиться перший стовпчик з нерівними значеннями, за цими значеннями визначається який з наборів (векторів) є більшим. На відміну від покомпонентного порівняння векторів інші елементи не порівнюються.

Відповідно лексикографічно менший ряд впорядкованих ексцесів визначає «кращий» з відповідних розподілів. У даному випадку «переможцем» виявляється розподіл x^1, оскільки -0,35 < -0,2.

Ідея, яка закладена у даному підході до пошуку рішення кооперативної гри, досить прозора: при співпадінні розподілів за найгіршим (найбільшим) ексцесом треба віддавати перевагу тому, у якого раніше зустрічався менший ексцес.

Взагалі поняття N-ядра (від англ. *nucleolus* – ядерце) може бути введене для довільної множини, а не тільки для множини розподілів. На принциповому рівні це можна представити як деяку «центральну» точку множини, яку одержують в результаті взаємного зустрічного руху його меж. Фундаментальної властивістю N-ядра є те, що для компактної опуклої множини (тобто, зокрема, для множини розподілів виграшів у кооперативній грі) воно завжди існує і складається з однієї точки.

Платою за ті переваги, якими наділене N-ядро кооперативної гри, є суттєва трудомісткість обчислювальних процедур з його знаходження.

На наступному рис. множину розподілів гри «Право на сумку» показано на 2-вимірній проекції площини $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ на площину сторінки.

Поруч з «суттєвими» точками множини розподілів вказано їх координати у 2-вимірному просторі.

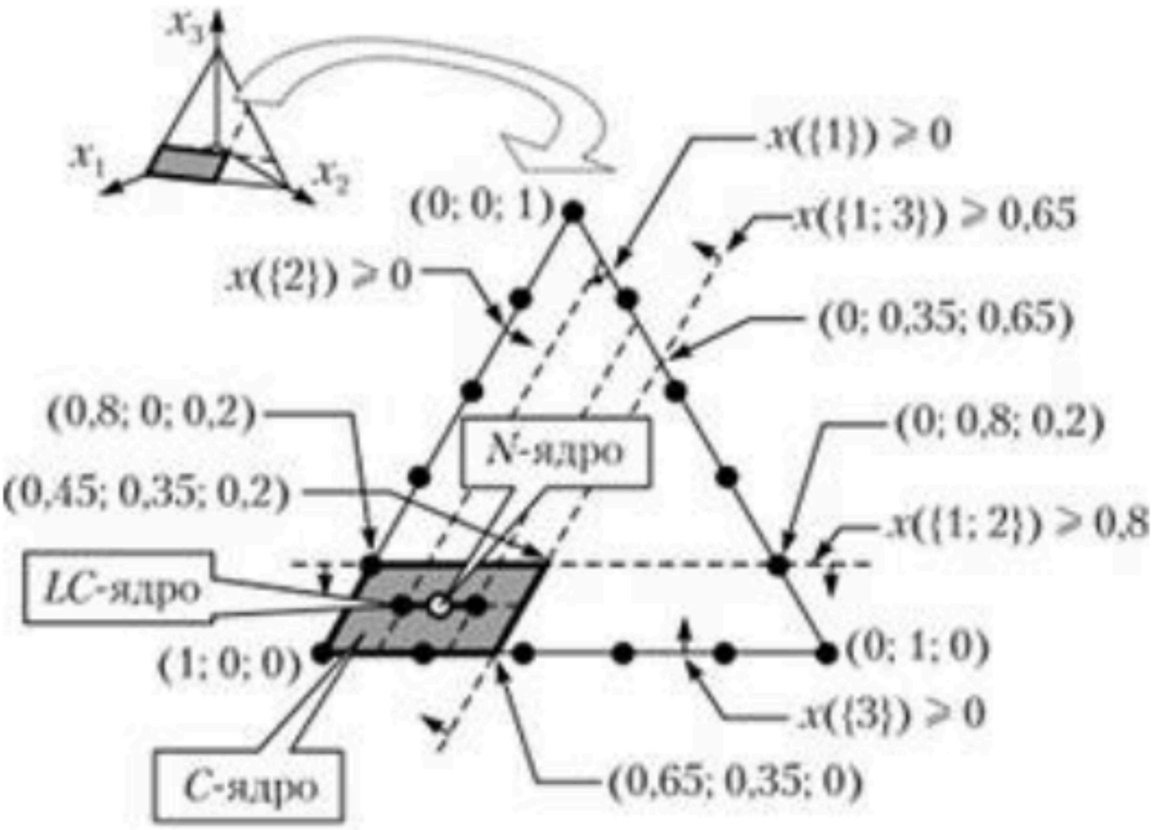


Рис. Сюжет «Право на сумку», геометрична характеризація C-ядра, LC-ядра, N-ядра

Уявімо процедуру з послідовного паралельного зближення меж, які утворюють C-ядро, назустріч одна одній. У тому випадку, коли якісь межі «зустрінуться», рух зупиняється. Процес відбувається до тих пір, поки межі не зійдуться в одну точку. Дана точка буде N-ядром.

У нашій грі першими «зустрінуться» верхня і нижня межі C-ядра, утворив відрізок розподілів між точками $x^1 = (0{,}65; 0{,}25; 0{,}1)$, $x^2 = (0{,}8; 0{,}1; 0{,}1)$. Даний відрізок є LC-ядром гри, тобто на всіх його точках досягається мінімальне значення найбільшого з ексцесів за всіма можливими коаліціями (-0,1). Однак розподіли, які належать даному відрізку, «намертво» зафіксував долю третього гравця (Дарини» як 0,1, є нерівнозначними для першого і другого гравця (Маргарити і Аліси). У результаті зустрічного руху рухи лівої і правої меж LC-ядра досягається середня точка між x^1 і x^2, яка є N-ядром гри.

Глава 5. Аукціони. Переговори

Аукціони, торги і конкурси

Ще зовсім нещодавно типове уявлення про аукціон було наступним: аукціонер-британець зарозумілим голосом оголошує ціни в притихлому залі, де на стільцях епохи Людовіка XIV сидять в ошатному вбранні і обвішані коштовностями колекціонери творів мистецтва і подають умовні знаки, щоб запропонувати свою ціну. З появою платформи eBay аукціони стали більш демократичними.

За означенням, **аукціон** (*ліцитація*, *цінóвка*; нім. *Auktion*, від лат. *auctio* — збільшення) — спеціально організований і періодично діючий ринок продажу товарів, майна з публічного торгу покупцеві, який запропонував найвищу ціну.

Аукціони — продаж об'єкту конкуруючим претендентам на нього - проводилися з давніх-давен. Грецький історик Геродот у V ст. до зв. е. згадує аукціони, що проводилися у стародавньому Вавилон. У Римській імперії кредитори регулярно використовували аукціони на продаж активів, вилучених за несплату у боржників.

У 193 р. н. е. преторіанська гвардія, вбивши імператора Пертінакса, виставила імперію – точніше, титул імператора – на аукціон. Найстаріший з нині існуючих аукціонних будинків у Стокгольмі був заснований у 1674 р. У 1744 р. лондонці С. Бейкер та Дж. Лей заснували аукціонний будинок — у наш час уславлений будинок Sotheby's, найпрестижніший майданчик для продажу предметів мистецтва.

Найвідоміший різновид аукціону – коли товар виставляється на продаж, і перемагає учасник, що запропонував найвищу ціну. На аукціоні Sotheby’s може бути виставлений предмет антиквариату, на eBay-усілякі дрібниці, за винятком людських органів, сайти Google і Yahoo! проводять аукціони на розміщення реклами, заробляючи понад 10 мільярдів доларів. В Австралії на аукціоні можна продавати навіть будинки. У всіх аукціонів є одна спільна риса: в них беруть участь один продавець і багато покупців. Покупці конкурують один з одним за те, щоб отримати виставлений на продаж товар, а виграє той, хто запропонував найвищу ціну.

Приклад: органи місцевої влади вирішують побудувати дорогу і оголошують тендер для визначення компанії, що буде її будувати. Переможцем тендеру стає той, хто пропонує найнижчу ціну, оскільки органи влади мають на меті витратити щонайменше грошей на дану послугу. Такі торги, в яких є один покупець і багато продавців, які бажають укласти угоду на надання певних послуг з покупцем, позначаються терміном «закупівельний аукціон».

Розглянемо основні види аукціонів.

Англійський аукціон

Англійський (прямий, відкритий) аукціон — тип аукціону, ґрунтується на встановленні мінімальної ціни як відправної, базисної для подальших торгів, у процесі яких ця ціна покроково збільшується і ставки відомі всім учасникам.

Англійський аукціон проводиться в наступному порядку.

Аукціон веде в присутності організатора найманий ним ліцитатор. Аукціон починається з оголошення ліцитатором найменування, основних характеристик і початкової ціни предмета торгів і кроку аукціону.

Крок аукціону встановлюється організатором (не менше 5 % від стартової ціни) і залишається сталим протягом торгів. Учасникам аукціону видаються пронумеровані квитки, що їх вони піднімають після оголошення ліцитатором чергової ціни в разі, якщо готові купити предмет торгів за цією ціною.

Кожну наступну ціну ліцитатор призначає збільшенням поточної ціни на крок аукціону. Після оголошення чергової ціни ліцитатор називає номер квитка учасника аукціону, який першим підняв квиток. Потім ліцитатор повідомляє наступну ціну згідно з кроком аукціону.

При відсутності учасників аукціону, готових купити предмет торгів за названою ліцитатором ціною, останній повторює цю ціну три рази.

Аукціон завершується, якщо після трикратного оголошення чергової ціни жоден з учасників аукціону не підняв квиток. Переможцем аукціону визнається учасник, номер квитка якого був названий аукціоністом останнім.

Ця оптимальна стратегія торгів досить проста. Ви берете участь в торгах до тих пір, поки ціна не перевищить цінність даного предмета торгів для вас, а коли це відбувається, ви виходите з торгів.

Японський аукціон

Існує більш прозорий різновид англійського аукціону. Під час такого аукціону (який називають японським) його учасники починають торги, піднявши руку або натиснувши кнопку. Ставки підвищуються за таймером, який може бути виставлений, скажімо, на 30, а потім відраховує 31, 32 ... і так далі. Ви берете участь в торгах до тих пір, поки ваша рука піднята; опустивши руку, ви виходите з торгів. Хитрість в тому, що, якщо хтось опустив руку, він не може підняти її знову. Аукціон завершується, коли залишається один учасник торгів.

Перевага японського аукціону в тому, що завжди видно, скільки залишилося учасників торгів. В англійському аукціоні хтось із аукціонерів може зберігати мовчання, хоча він все ж готовий запропонувати свою ціну. Такий учасник аукціону може здивувати всіх, вступивши в боротьбу на завершальному етапі. У японському аукціоні ви точно знаєте, скільки конкурентів у вас залишилося, і навіть ціну, при досягненні якої кожен з них виходить з гри. Отже, японський аукціон багато в чому нагадує англійський, в якому кожен учасник піднімає руку.

Результат японського аукціону легко передбачити. Оскільки його учасники виходять з торгів, коли ціна запропонованого на продаж предмета перевищує його цінність, останнім аукціонером стане той, для кого цей предмет торгів представляє найвищу цінність. Ціна, яку заплатить переможець, буде дорівнювати найвищій цінності предмета торгів для наступного учасника, і ось чому: аукціон закінчується в той момент, коли з гри виходить учасник, для якого предмет торгів представляє другу найвищу цінність. Остання ціна предмета торгів еквівалентна його цінності для учасника торгів з другої максимальної цінністю.

Таким чином, виставлений на продаж предмет продається людині, для якого він представляє собою найбільшу цінність, а продавець отримує суму, еквівалентну другій найвищій цінності цього предмета торгів.

Закриті аукціони

Нехай є N незалежних агентів, що хочуть придбати один предмет. Вважається, що учасники подають заявки в конвертах організаторам, які в залежності від усіх ставок вирішують, якому агентові віддати цей предмет і за яку ціну.

Будемо вважати, що можлива внутрішня вартість агента i визначається випадковою величиною x_i. Нехай x_i рівномірно розподілена на відрізку $[0; \varpi]$ і має неспадну функцію розподілу $F: [0; \varpi] \to [0; 1]. E(x_i) < \infty$.

Нехай агент i знає всі $x_{j,}, i \neq j$ і знає свою ставку x_i. При цьому конкретні значення, що поставили інші агенти, агент i не знає.

Також вважатимемо, що усі x_i мають однакову функцію розподілу, і агенти знають про це.Така система називається симетричною.

Розглянемо аукціони першої та другої ціни.

Аукціон першої ціни

Функція прибутку виграшу *i*:

$$\Pi_\mathrm{i} = \begin{cases} x_i - max_{i\neq j} b_j, \text{якщо } b_i > max_{i\neq j} b_j \\ 0, \text{якщо } b_i < max_{i\neq j} b_j \end{cases}$$

Якщо декілька агентів подають однакові ставки, то в якості переможця аукціону обираємо одного з них з однаковою ймовірністю.

Такий аукціон не буде правдивим, оскільки при повідомленні реальної ціни агент завжди хоче отримати прибуток 0, що еквівалентно неучасті в аукціоні. Тому агенти повинні брехати.

Розглянемо їхні стратегії $\beta(\mathrm{x})$-ставка агента з внутрішньою цінністю *x.* Властивості стратегії β:

1. $\beta(0)$=0 і $\forall\ x \in [0; \varpi]$: $\beta(x) \leq \beta(\varpi)$
2. $\beta(x)$ – неспадна функція.

Теорема 1. Стратегія $\beta(\mathrm{x}) = E[y_i | y_i < x]$ є рівноважною в аукціоні першої гри.

Аукціон другої ціни (Вікрі)

В аукціоні Вікрі усі заявки із запропонованими цінами подаються у закритих конвертах. Для того, щоб визначити переможця, конверти відкривають, і перемагає той учасник, хто запропонував найвищу ціну.

Функція прибутку виграшу *i*:

$$\Pi_\mathrm{i} = \begin{cases} x_i - max_{i\neq j} b_j, \text{якщо } b_i > max_{i\neq j} b_j \\ 0, \text{якщо } b_i < max_{i\neq j} b_j \end{cases}$$

Якщо декілька агентів подають однакові ставки, то в якості переможця аукціону обираємо одного з них з однаковою ймовірністю.

Теорема 2. В аукціоні другої ціни стратегія робити ставку $b_i(x) = x$ є слабо домінуючою. x – реальна внутрішня вартість для агента *i.*

Зрозуміло, що аукціон Вікрі дає той же результат, що і англійський (японський), тільки він проводиться в один етап. В обох випадках аукціон виграє той, для кого предмет торгів становить найбільшу цінність. Крім того, в обох випадках переможець платить другу найвищу ціну.

В англійському (японському) аукціоні кожен учасник торгів підвищує ціну до рівня, що відповідає цінності предмета торгів для нього, тому аукціон закінчується, коли ціна підвищується до другої максимальної цінності. Учасник торгів, що залишився - це людина, для якого предмет торгів становить найбільшу цінність. Якщо враховувати крок пропозиції, учасник-переможець торгів сплачує ціну, на якій виходить з гри передостанній учасник торгів, а саме ціну, відповідну другій найбільшої цінності.

В аукціоні Вікрі кожен учасник пропонує ціну, відповідну істинній цінності даного предмета торгів для нього. Отже, учасник, для якого цей предмет представляє найбільшу цінність, і є переможець. Згідно з правилами проведення аукціону Вікрі, ця людина повинна заплатити другу запропоновану ціну, яка відповідає другій максимальній цінності даного предмета торгів.

Таким чином, створюється враження, що ці два типи аукціонів призводять в точності до одного і того ж результату. Виграє той же учасник торгів, який платить ту ж ціну. Безумовно, завжди залишається актуальним питання про крок пропозиції: людина, для якого цінність предмета торгів становить 95 одиниць, може вийти з гри при досягненні ціни 90, якщо крок пропозиції дорівнює 10 одиницям. Однак в разі невеликого кроку пропозиції цей учасник торгів вийде з гри точно в той момент, коли ціна досягне значення цінності предмета торгів для цієї людини.

Між цими двома типами аукціонів існує невелика різниця. В англійському аукціоні учасник торгів може отримати інформацію про те, як оцінюють предмет торгів інші учасники, побачивши декілька їхніх пропозицій. В японському аукціоні учасники торгів можуть отримати більшу кількість інформації. Всі бачать, на якій ціні учасник виходить з гри. Навпаки, в аукціоні Вікрі переможцю торгів недоступна інформація про інші пропозиції до завершення аукціону. Зрозуміло, якщо предмет торгів має особисту цінність для учасника, йому байдуже, що думають про цінність цього предмета інші. Отже, додаткова інформація є просто марною. Це дозволяє зробити висновок про те, що якщо предмет торгів має для учасників аукціону особисту цінність, продавець заробить одну і ту ж суму як на аукціоні Вікрі, так і англійському (або японському).

Інтернет-аукціони

Хоча аукціон Вікрі з'явився ще за часів Гете, до недавнього часу він використовувався порівняно рідко. Зараз його можна назвати стандартним на онлайнових аукціонах. Розглянемо аукціон eBay. Тут ви не підвищуєте ставки самі. Ви виставляєте тільки ставку, яка отримала назву «проксі-ставка». По суті, ви дозволяєте eBay автоматично підвищувати за вас ставки до тим пір, поки не буде досягнуто виставлену вами проксі-ставку. Таким чином, якщо ви призначаєте проксі-ставку в розмірі 100 доларів, а поточна найвища ставка становить 12 доларів, eBay спочатку зробить за вас ставку 13 доларів. Якщо вона виявиться досить високою, щоб перемогти, система припиняє робити ставки. Але якщо хтось виставив проксі-ставку в розмірі 26 доларів, тоді eBay підвищить ставку за цю людину до 26 доларів, а ваша підвищиться до 27 доларів.

На перший погляд може здатися, що цей аукціон в точності відповідає аукціону Вікрі. Уявіть собі, що проксі-ставки - це звичайна пропозиція ціни на аукціоні Вікрі. Людина, що запропонувала найвищу проксі-ставку, стане переможцем, а сума, яку вона заплатить за відповідний предмет торгів, дорівнює другій найвищій проксі-ставці.

Розглянемо цей процес на конкретному прикладі. Уявіть собі, що є три проксі-ставки:

А: 26 доларів; Б: 33 долари; В: 100 доларів

Проксі-ставка А вийде з гри, коли ставки підвищаться до 26 доларів. Підвищення ставок до цього рівня відбувається під впливом проксі-ставки Б. А проксі-ставка В підвищує ставки до 34 доларів. Таким чином, В виграє аукціон і заплатить за даний лот ціну, еквівалентну попередній найвищій проксі-ставці.

Якби всі учасники аукціону виставляли свої проксі-ставки в один і той же час і тільки один раз, така гра дійсно була б аналогом аукціону Вікрі, і ми могли б порадити кожному учаснику грати чесно і пропонувати ціну, відповідну істинній цінності, яку представляє для нього предмет торгів. Пропозиція ціни, що відповідає істинній цінності, була б в такому випадку домінуючою стратегією.

Однак ця гра проходить не зовсім так, а невеликі труднощі, які при цьому виникають, змушують учасників вдаватися до всяких хитрощів, роблячи ставки. Одна з труднощів полягає в тому, що на аукціоні eBay часто виставляється на продаж декілька схожих предметів одночасно. Так, якщо ви хочете купити стару ударну установку Pearl Export, можете вибрати одну з десяти таких установок, виставлених на продаж в один і той же час. Можливо, ви захочете виставити проксі-ставку 400 доларів на найдешевшу установку. Хоча ви готові заплатити до 400 доларів за одну з установок, ви навряд чи захочете пропонувати 300 доларів за одну установку, якщо іншу можна купити за 250. Крім того, ви можете віддати перевагу участі в тому аукціоні, термін якого закінчується раніше, щоб вам не довелося чекати новин про те, виграли ви аукціон чи ні.

Таким чином, цінність, яку представляє для вас предмет торгів, залежить від того, що ще виставлено на продаж в поточний момент і буде продаватися в майбутньому. Отже, ви не можете визначити цю цінність незалежно від того, що відбувається на аукціоні.

Снайпінг

Проаналізуємо випадок, коли терміни і число предметів, виставлених на продаж, не мають значення. Розглянемо аукціон з продажу єдиного в своєму роді продукту. Чи є тепер причини не грати чесно і не відображати істинну цінність цього продукту в проксі-ставці?

Практика показує, що в подібних обставинах люди рідко поводяться чесно. Вони чекають до останньої хвилини або секунди, перш ніж ввести свою оптимальну проксі-ставку. Такий образ дій учасників аукціону позначається терміном снайпінг. Насправді існують інтернет-сервіси (Bidnapper і інші), які виконають процедуру снайпінгу за вас, так що вам не доведеться чекати завершення аукціону, щоб подати свою ставку.

Чому виникає необхідність в снайпінгу? Як вже було сказано, пропозиція ціни, що відповідає істинній цінності, яку представляє для вас предмет торгів, - це домінуюча стратегія в аукціоні Вікрі. Необхідність в снайпінгу виникає через тонкі відмінності між подачею проксі-ставок і аукціоном Вікрі. Основна відмінність полягає в тому, що інші учасники аукціону можуть отримати інформацію про вашу проксі-ставку до завершення аукціону. Якщо отримані відомості вплинуть на те, як вони роблять ставки, тоді ви зацікавлені в тому, щоб тримати свою ставку (навіть проксі-ставку) в таємниці.

Якщо ви виставите свою проксі-ставку на початку аукціону, то розкриєте цінну інформацію. Наприклад, якщо меблевий дилер робить ставку на конкретний стілець Bauhaus, ви цілком обгрунтовано можете припустити, що цей предмет меблів автентичний і представляє історичний інтерес. Якщо дилер готовий купити цей стілець за 1000 доларів, тоді ви були б раді купити його за 1200 доларів (це більш вигідна ціна, ніж та, за яку ви купили б цей стілець у того ж дилера). Отже, дилер не хоче, щоб хтось знав про те, до якого рівня він готовий підвищувати свої ставки. Отже, він вирішує почекати і виставить свою ставку в самому кінці аукціону. У цей момент і вам, і іншим учасникам аукціону вже занадто пізно буде робити які-небудь дії. Коли ви побачите, що дилер пропонує свою ставку, аукціон вже закінчиться. Безумовно, при цьому мається на увазі, що справжня особистість учасника аукціону відома і що він не може брати участь в торгах під вигаданим ім'ям. Оскільки снайпінг - досить поширене явище, це говорить про те, що існують і інші пояснення.

На наш погляд, краще пояснення снайпінгу полягає в тому, що багато учасників аукціону просто не знають, яку цінність представляє для них предмет торгів. Розглянемо в якості ілюстрації приклад з вінтажним Porsche 911. Торги починаються з 1 долара. Безумовно, ми не оцінюємо цей автомобіль в 1 долар. Ми оцінюємо його в 100 або навіть в 1000 доларів. За умови, що запропоновані ставки не перевищують 1000 доларів, можна з упевненістю стверджувати, що це хороша угода. Нам не потрібно шукати вартість цього автомобіля в «Синій книзі» і навіть обговорювати зі своєю дружиною (чоловіком) необхідність у ще одній машині. Справа в тому, що ми просто ліниві. Для того щоб визначити справжню цінність того чи іншого продукту, необхідно попрацювати. Якщо ми можемо виграти аукціон, не витративши на це ніяких зусиль, ми віддамо перевагу цьому більш легкому шляху.

Тут і вступає в гру снайпінг. Уявіть собі, що покупець оцінює Porsche 911 в 19 тисяч доларів. Цьому покупцеві вигідно утримувати пропоновані ставки на низькому рівні як можна довше. Якщо він введе проксі-ставку в розмірі 19 тисяч доларів на самому початку аукціону, то наша легковажна проксі-ставка в 1000 доларів підніме ціну саме до цього рівня. У цей момент ми зрозуміємо, що нам потрібна додаткова інформація. Можливо, до цього часу дружина вирішить теж взяти участь в процесі і дозволить підвищити ставку до дев'яти тисяч доларів. Це може підняти остаточну ціну до дев'яти тисяч доларів або вище, якщо інші учасники аукціону скористаються можливістю підготуватися до нього належним чином.

Однак якщо учасник аукціону, готовий запропонувати проксі-ставку в розмірі 19 тисяч доларів, ретельно відстежує весь цей процес, то ставки можуть і не піднятися вище 1000 доларів до останніх хвилин аукціону, коли нам вже занадто пізно вводити більш високу ставку, навіть якщо ми уважно відстежуємо хід аукціону і можемо швидко отримати згоду подружжя на підвищення ставки.

Мета снайпінгу полягає в тому, щоб тримати інших аукціонерів в невіданні щодо їх власних оцінок. Вам не потрібно, щоб інші учасники торгів дізналися про те, що їх лінива ставка не має жодних шансів на перемогу. Дізнавшись про це досить рано, вони зможуть підготуватися, а це значить, що вам доведеться платити більше, якщо ви все ж виграєте.

Голландський аукціон

Операції з акціями проводяться на Нью-Йоркській фондовій біржі. Електроніка продається в районі Токіо під назвою Акихабара. А в Нідерланди весь світ їде за квітами. «Аукціонний дім», в якому проводиться аукціон з продажу квітів в Аалсмере, займає площу майже 65 гектарів, де щодня продається близько 14 мільйонів зрізаних і 1 мільйон горщиків квітів.

Аукціон в Аалсмері і інші голландські аукціони відрізняються, скажімо, від Sotheby's тим, що торги на них проходять в зворотному порядку. Замість того, щоб починати з низької ціни і поступово її підвищувати, в ході голландського аукціону спочатку оголошується найвища ціна, а потім ставки знижуються. Уявіть собі таймер, який починає зворотний відлік з сотні, потім відраховує 99, 98 і так далі. Перший учасник аукціону, який зупинить таймер, виграє аукціон і платить ту суму, на якій зупинився таймер.

Голландський аукціон - це зворотний варіант японського. У японському аукціоні всі покупці позначають свою участь в торгах. Ціни підвищуються до тих пір, поки не залишиться один покупець. У голландському аукціоні оголошується найвища ціна, яка поступово знижується, поки перший покупець не подасть сигнал про свою участь. Якщо під час голландського аукціону ви піднімете руку, аукціон зупиняється і ви виграєте.

Для того, щоб взяти участь в голландському аукціоні, не потрібно їхати в Голландію. Можна відправити туди свого агента, який буде робити заявки за вас і сказати йому, щоб він чекав, поки ціна на петунії не впаде до 86,3 євро, і тільки тоді зробити заявку на їх покупку. Розмірковуючи, які інструкції дати агенту, потрібно виходити з того, що, якщо ставки взагалі будуть знижені до 86,3 євро, ви виграєте аукціон. Якби ви були присутні в аукціонному домі, ви знали б, що інші учасники аукціону ще не робили ніяких дій. Тому ви не захочете змінювати свою заявку, адже подальше очікування може привести до того, що в гру вступить інший учасник аукціону, який займе ваше місце.

Безумовно, до цього треба бути готовим в будь-який момент: поки ви чекаєте, інший учасник аукціону вступить в гру. Проблема в тому, що чим довше ви чекаєте,
тим більший прибуток ризикуєте втратити. Чим довше чекаєте, тим більша ймовірність того, що один з учасників торгів ось-ось зробить свою заявку. Пропозицію ціни можна вважати оптимальною, якщо економія від її зниження вже не варта того, щоб і далі ризикувати втратою всього виграшу.

Багато в чому цей процес нагадує те, що відбувається під час закритого аукціону. Дати вказівки агенту, який виступає на торгах від вашого імені, - те ж саме, що записати свою ціну на папері і подати заявку в закритому конверті. Всі інші учасники аукціону діють так само. В одному випадку перемагає учасник торгів, який написав найвищу ціну, в іншому - той, хто першим підняв руку.

Єдина відмінність між голландським і закритим аукціонами полягає в тому, що в першому випадку ви дізнаєтеся про свою перемогу в момент, коли пропонуєте свою ціну. У закритому аукціоні ви зможете дізнатися, виграли ви його чи ні, тільки через якийсь час. В закритому аукціоні потрібно робити пропозицію так, немов ви вже виграли. Слід виходити з того, що всі інші учасники торгів пропонують нижчу ціну. Те ж саме відбувається, коли ви берете участь в голландському аукціоні.

Вивчення аукціонів

У перші десятиліття XXI ст. Теорія аукціонів стала ядром економічної теорії. Прямо чи опосередковано до неї зробили внесок кілька нобелівських лауреатів з економіки. Мілтон Фрідмен, лауреат 1976, запропонував використовувати аукціони для розміщення облігацій державних позик. Рональд Коуз (премія 1991 р.) першим запропонував використовувати аукціони для створення конкурентних ринків. У 1996 р. Премію отримав Вільям Вікрі, який першим почав систематичне вивчення різних форматів аукціонів. За роботи, безпосередньо пов'язані з теорією аукціонів, Нобелівської премії було удостоєно Роджера Майєрсона та Ерік Маскін (2007). Джон Неш та Джон Харшаньї (1994) отримали премію за створення економічних концепцій та математичних інструментів, за допомогою яких було побудовано теорію. Зі створенням та регулюванням конкурентних ринків пов'язаний основний науковий внесок Елвіна Рота та Ллойда Шеплі (2012), а також Жана Тіроля (2014).

Роберт Вілсон та Пол Мілгром, лауреати 2020 р., зробили фундаментальний внесок, розробивши теорії аукціонів із загальною компонентою цінності та пояснивши роль інформації, приватної та публічної, у формуванні ціни, очікуваних виграшів учасників та доходів продавця. Вони та група фахівців, багато з яких були їхніми учнями у Стенфордському університеті, відіграли вирішальну роль у дизайні найбільших аукціонів останніх 40 років – від перших аукціонів на радіочастоти на початку 1990-х років до комбінаторних аукціонів другого десятиліття XXI ст. Їхні роботи пов'язали абстрактні результати високої теорії з конкретними додатками.

Щоб розуміти, яким чином економіка працює як система, як один ринок пов'язаний з іншим, як інформація впливає на формування ринкової ціни та як, навпаки, ринкова ціна виступає головним каналом передачі інформації в економіці потрібна теоретична модель. Теорія аукціонів, як під збільшувальним склом, показує мікроекономіку товарного обміну, у якому від учасника до учасника передаються біти інформації. Можна бачити — і ми продемонструємо це і в теоретичній моделі, і в обговоренні реальних аукціонів, як ця інформація, що передається при кожній трансакції, перетворюється з приватного знання індивідуальних суб'єктів економіки інформацію, доступну всім.

Основний метод вивчення аукціонів у сучасній економічній науці – за допомогою набагато більш загального підходу, «теорії механізмів». Цей підхід щодо аукціонів виглядає так. Продавець-аукціоніст вигадує стратегічну гру з неповною інформацією. У цій грі виділяється якась рівновага за Байєсом-Нешем, а результат гри в рівновазі — передача об'єкта комусь із учасників. (Звичайно, за певних обставин продавець може залишити об'єкт у себе.) Цей погляд виявився надзвичайно продуктивним у розвиток економічної теорії та практики. Можна змінювати правила гри, домагаючись результату, потрібного аукціоністу.

З точки зору практики найважливіший крок в історії аукціонів був зроблений на початку 1990-х, коли Федеральна комісія з комунікацій, регулятор ринку зв'язку в США, зважаючи на різко збільшений попит, вирішила розподіляти на аукціонах радіочастоти, що використовуються для пейджингового та мобільного зв'язку, радіо і телебачення. До цього основними методами розподілу ресурсу були конкурсні комісії або жеребій, що було пов'язано з очевидними проблемами з точки зору ефективності та конкурентності. За 40 років до цього Коуз пропонував використовувати аукціони на цих ринках, попередньо створивши права власності на радіочастоти (Coase, 1959).

Оптимальний формат аукціонів радіочастот одразу став викликом для економістів, тому що з'явилися нові складності, пов'язані, насамперед, з тим, що потенційні покупці могли одночасно претендувати на кілька об'єктів. У цьому випадку виникають проблеми, які відсутні під час продажу одного об'єкта, — стратегічне заниження попиту, змова, спеціальні стратегії, спрямовані на покарання конкурентів за надто агресивну боротьбу, тощо. Мілгром та Вілсон стали лідерами колективу економістів, який у середині 1990-х років розробив формат одночасного висхідного аукціону для кількох об'єктів, що став зразком для аукціонів по всьому світу, а у 2000-х роках створили два нові формати — «комбінаторний часовий аукціон» та двосторонній аукціон, за допомогою якого уряд не лише продає, а й купує радіочастоти.

Теорія аукціонів та базова модель ринку

Одне з основних питань економічної теорії — як у суспільстві досягається ефективне розподіл ресурсів? Як виходить, що активи опиняються в руках або під керуванням тих, хто може розпоряджатися ними краще за інших? А. Сміт правильно наголосив на ролі «невидимої руки ринку», але як у реальності відбувається перерозподіл? Фундаментальна ідея Ф. фон Хайєка, нобелівського лауреата 1974 р., полягала в тому, що ключову роль відіграє ринкова ціна - носій інформації (Hayek, 1937, 1945). На рівні ринку загалом зміна ціни сигналізує про дефіцит (якщо ціна зростає) або надлишок (якщо ціна падає). Виробники товарів зчитують цей сигнал та у відповідь збільшують або скорочують виробництво, щоб збільшити прибуток. Хайєк сформулював теорію: ціна на ринку складається, агрегуючи інформацію, розпорошену серед безлічі потенційних продавців та покупців.

Для Хайєка ключова роль ринкової ціни давала серйозні переваги вільному ринку планової економіки. Звичайно, перевага ринкової економіки над плановою була доведена в результаті емпірично — на прикладі економіки соціалістичних країн, історія яких після двох десятиліть стагнації завершилася крахом і вимушеним переходом до ринку. За півстоліття до кінця планової економіки аргументи Хайєка теоретично доводили переваги ринкової системи.

Сучасне розуміння тези Хайєка про ключову роль цін у передачі інформації почало складатися після робіт Л. Гурвіца, нобелівського лауреата 2007 р. Гурвіц першим сформулював ключове поняття «сумісність за стимулами»: щоб гарантувати досягнення якогось результату в економічній системі, дії індивідуальних суб'єктів, що призводять до цього результату, мають бути оптимальними з погляду їхньої власної індивідуальної оптимізації. У плановій економіці це означає, що центральний планувальник повинен вказати, кому і скільки виробляти і споживати, щоб кожен агент мав стимули робити те, що йому наказано. Складність полягає в тому, що визначення оптимальних, з точки зору планувальника, стимулів для економічного агента вимагає використання інформації, яку агент вважає за краще зберігати в таємниці. Наприклад, якщо план передбачає отримання фіксованої плати за якусь кількість годин роботи, то ефективнішому співробітнику немає сенсу працювати, використовуючи весь свій потенціал.

У децентралізованій капіталістичній економіці єдиного планувальника немає. Тим не менш зручно уявляти собі ринок як майданчик, на якому, крім потенційних покупців та продавців, існує гіпотетичний аукціоніст. Економічні агенти, спостерігаючи поточну ціну, визначають оптимальні обсяги виробництва та споживання та повідомляють їх аукціоністу. Аукціоніст підраховує сукупні пропозиції і попит і оголошує новий вектор ціни всі товари, підвищуючи ціни товари, куди попит перевищує пропозицію, і знижуючи — інші. Процес обміну інформацією між планувальниками та агентами припиняється, коли на жодний товар немає надмірного попиту. Гіпотетичного аукціоніста із цієї моделі називають вальрасівським, тому що він знаходить загальну (вальрасівську) рівновагу. Нестача «вальрасівської» аукціонної моделі — припущення у тому, кожен агент на ринку, визначаючи свій попит чи пропозицію, дивиться лише на ціну і не враховує можливого впливу своїх рішень на неї та на поведінку інших.

Теоретично аукціонів були побудовані моделі визначення ціни на одному окремому ринку, і, таким чином, створено мікроекономічний фундамент для моделі вальрасівського аукціоніста на новому рівні. Тепер у цій моделі враховуються стратегічні міркування агентів. Ключовий елемент моделі в тому, що учасники не знають, яку цінність представляє об'єкт продажу для інших учасників; цього не знає й аукціоніст. Задавши правила аукціону, аукціоніст запрошує потенційних покупців взяти участь у взаємодії, результатами якого будуть передача об'єкта комусь із покупців та визначення ціни. Під час аукціону учасники роблять дії, які ґрунтуються одночасно на публічній та приватній (прихованої від інших) інформації. Оскільки ціна є наслідком дій, заснованих на приватній інформації (у разі аукціону — у скільки оцінює об'єкт кожен учасник), в результаті аукціону приватна інформація перетворюється на загальнодоступну. Це не означає, що аукціон виявляє всю приватну інформацію — як ми побачимо, за підсумками відкритого аукціону зі зростанням ціни всі дізнаються оцінки об'єкта для всіх учасників, крім переможця аукціону. Про переможця аукціону буде лише відомо, що цінність об'єкта для нього вища за ціну, яку він заплатить.

Аукціони, розроблені Мілгромом та його співавторами, роблять мікроекономічну модель формування ціни на ринку ще точнішою. Фактично, кожен із учасників має можливість робити ставку у вигляді «пакета», тобто пропонувати ціну відразу за якийсь обраний самим учасником обсяг товару. (Технічні деталі моделі наведені нижче.) Перевага цієї моделі над моделлю вальрасівського аукціоніста полягає в тому, що в моделі Мілгрома учасники поводяться стратегічно — вони беруть участь у процесі, беручи до уваги поведінку інших учасників та враховують наслідки власних дій. Наприклад, для учасника, який хотів би отримати великий обсяг товару, є сенс «занизити попит»: якщо учасник враховує вплив своєї ставки на кінцеву ціну, то він може збільшити свій кінцевий виграш за рахунок того, що заплатить менше за менший обсяг. На практиці цей ефект спостерігається на аукціонах радіочастот; в теорії він показує обмеження вільного ціноутворення. Виявляється, той факт, що вальрасівський аукціоніст призводить конкурентний ринок до ефективного результату, в теорії спирається на припущення, що учасники ринку не діють на ньому стратегічно. Така ситуація, природно, зустрічається на ринках, де вхід вільний і дешевий, а конкурують велика кількість виробників та споживачів. Проте на багатьох ринках вхід ускладнений, а конкурують у ньому кілька великих агентів. У цьому випадку не можна стверджувати, що конкурентний ринок є ефективним.

Зокрема, важко очікувати ефективності в ситуації, коли на ринку лише два учасники — покупець та продавець, і кожен із них не знає точно, як оцінює об'єкт інший гравець. Важливий результат в економічній теорії, теорема Майєрсона-Саттертуейта, показує, що в багатьох ситуаціях не існує навіть теоретично такого механізму перепродажу, який би гарантував передачу об'єкта від того, хто його цінує нижче, до того, хто його цінує вище (Myerson, Satterthwaite, 1983). Незважаючи на абстрактність, цей результат дуже важливий для практики. Він означає, що якщо завдання аукціоніста — передати актив до найефективнішого власника, то не можна механічно покладатися на вільний вторинний ринок. У ситуаціях, коли йдеться про рідкісні, специфічні об'єкти, де немає великого та ліквідного ринку для продажу цього об'єкта, вторинний ринок не забезпечить ефективності.

Теорія аукціонів дає інструментарій для аналізу найважливішого економічного механізму — утворення ринкової ціни, яка агрегує та робить публічною приватну інформацію різних економічних агентів. Цей механізм забезпечує перевагу децентралізованої, ринкової економіки над плановою. У той самий час сучасна модель аукціону, застосована до абстрактного процесу ціноутворення над ринком, показує, що у багатьох ситуаціях важко очікувати досягнення ефективного результату у ринковій рівновазі. Важливо, що аукціонна модель ринкової рівноваги дозволяє зрозуміти природу неефективності — зокрема, що виникає внаслідок стратегічних процесів економічних агентів.

Модель аукціона і основні результати

Розглянемо гру Байєса з N учасниками. У кожного *i*-го гравця є тип v_i, відомий самому гравцю і розподілений, з точки зору інших учасників та продавця, із щільністю $F_i(\cdot)$ на відрізку [0, T]. Це цінність/оцінка об'єкта для учасника – максимальна ціна, яку він готовий заплатити і при цьому не втратити корисність. Відповідно, виграш переможця аукціону — різниця між цією цінністю та ціною, яку він заплатить.

Рівноваги в аукціоні першої ціни

В аукціоні першої ціни стратегія *i*-го учасника – функція $b_i: [0, T] \to [0, +\infty)$. Платіж *i*-го учасника складає $v_i - b_i(\tau_i)$, якщо ставка цього учасника виявилась самою високою, і 0, якщо ні.

Припустимо, що оцінки учасників аукціону розподілені як незалежні випадкові величини. У випадку двох учасників аукціону – назвемо їх Ганна та Борис – і рівномірного розподілу на відрізку [0, t] описати рівновагу нескладно. Ганна вирішує наступну задачу: як для кожної можливої цінності $v_A \in [0, 1]$ вибрати оптимальну ставку $b_A(\tau_A)$, щоб максимізувати очікуваний виграш

$$EU_A(\tau_A) = \big(v_i - b_A(\tau_A)\big) \cdot P\{b_A(\tau_A) > b_B\},$$

де b_B – ставка Бориса, яка є з точки зору Ганни в момент прийняття рішення випадковою величиною. Нескладно перевірити, що пара функцій $b_A(\tau_A) = 1/2\, v_A$, $b_B(\tau_B) = 1/2\, v_B$ – рівновага за Баєсом-Нешем. У випадку N учасників рівноважні ставки *i*-го учасника виглядають так: $b_A(\tau_A) = ((N-1)/N)v_A$. Більш складним є факт, що це єдина рівновага в даній грі.

Про що думає учасник аукціону першої ціни щодо своєї ставки? Підвищення ставки збільшує, по-перше, можливість виграшу, а по-друге, ціну, яку заплатить цей учасник, якщо виявиться переможцем. Ці два стимули діють у протилежних напрямках: з одного боку, хочеться виграти з більшою ймовірністю, з іншого — хочеться, якщо вже виграв, заплатити поменше. У рівновазі, описаній вище, очікуваний виграш аукціоніста (ціна продажу) дорівнює $E(1/2 \max\{v_A, v_B\}) = 1/3$, а очікуваний виграш переможця аукціону відповідно рівний

$$E(\max\{v_A, v_B\} - 1/2 \max\{v_A, v_B\}) = 1/3.$$

У знайденій рівновазі об’єкт завжди дістається учаснику, для якого цінність об’єкта вища, тобто аукціон призводить до ефективного розміщення активів. Цей результат сильно залежить від припущення про повну симетричність учасників: наприклад, якщо цінність об’єкта для Ганни рівномірно розподілена на відрізку $[0, 1]$, а для Бориса – на відрізку $[0, 2]$, то в єдиній рівновазі за Нешем переможцем не завжди (не з ймовірністю 1) буде той, хто цінить об’єкт більше. Дійсно, припустимо, що цінність об’єкта для Бориса близька до 2, тобто він більш ефективний кінцевий власник об’єкта. Коли він визначає кінцеву ставку, йому може бути вигідно пожертвувати, з деякою ймовірністю, перемогою на аукціоні ради того, щоб з додатковою ймовірністю заплатити найменше у випадку виграшу. Це аналогічно класичній задачі монополіста на ринку, який жертвує продажом частини товара, навіть якщо ціна перевищує граничну вартість виробництва, заради збільшення прибутку за кожну продану одиницю.

Рівновага в англійському аукціоні і аукціони другої ціни

На відміну від аукціону першої ціни, у відкритому аукціоні на зростання існує рівновага за Нешем в домінуючих стратегіях. Іншими словами, кожен учасник має стратегію, яка є оптимальною відповіддю на будь-які стратегії інших учасників: торгуватися, підвищуючи ціну доти, доки вона не досягне власної оцінки v_i, після чого торгівлю припинити. В результаті переможцем виявляється учасник, цінність об'єкта для якого є максимальною, тобто аукціон ефективний. Ціна, яку заплатить переможець, дорівнює в очікуванні другій за величиною цінності серед учасників аукціону, тобто ціною, до якої торгується передостанній учасник.

Проста рівновага у домінуючих стратегіях існує і в аукціоні другої ціни. Незалежно від того, що роблять решта учасників, оптимальна ставка виглядає так:

$$b_i(v_i) = v_i.$$

Довести цей результат можна за допомогою простої міркування. Уявімо, що всі учасники, окрім *i*-го, вже зробили свої ставки, але *i*-му учаснику ці ставки невідомі. Важливо, що ціна *p*, яку заплатить *i*-тий учасник, якщо переможе на аукціоні, не залежить від його ставки: ця ціна є максимальною зі зроблених ставок. Від ставки *i*-го учасника залежить лише одне — стане він переможцем чи ні. Ставка $b_i(v_i) = v_i$ забезпечує максимально можливий очікуваний виграш: учасник *i* виграє, якщо цінність v_i вище ціни *p*, і програє, якщо цінність v_i нижче ціни *p*. Це теоретична властивість аукціону другої ціни - основна причина його активного використання в ситуаціях, коли ризик змови невеликий (наприклад, в аукціонах контекстної реклами, див: Edelman et al., 2007).

Через простоту рівноважних стратегій і в англійському аукціоні, і в аукціоні другої ціни легко обчислити очікувані результати.

За наших припущень ціна дорівнює 1/3 у разі двох учасників та (N – 1)/(N + 1) у разі N учасників. І очікуваний прибуток продавця, і очікувані виграші учасників аукціону збігаються з показниками аукціону першої ціни. Як побачимо нижче, це не випадковий збіг.

Теорема про еквівалентність прибутків

Теорема про еквівалентність прибутків, доведена у загальному випадку Майерсоном у 1981 р., стала однією з центральних результатів у сучасної економічної теорії. У ній узагальнюються результати, отримані Вікрі у перших теоретичних роботах про аукціони (Vickrey, 1961; також огляд інших робіт, в яких у тій чи іншій формі з'явилася ця теорема, див.: Klemperer, 1999). Крім самого результату, важливу роль відіграє доказ, метод якого вперше з'явився на роботах 1970-х років, де моделювалися відносини принципала та агента; це стандартний прийом аналізу в теорії фірми та теорії контрактів.

Теорема (Myerson, 1981). Якщо оцінки учасників аукціону розподілені незалежно та однаково, а розподіл $F_i(\cdot)$ на відрізку [0, T] невироджений, то очікувані прибутки продавця та очікувані виграші учасників не залежать від формату аукціону.

Перш ніж довести теорему, необхідно точно сформулювати поняття «будь-який формат аукціону». Під цим ми розумітимемо будь-яку Байєсівську гру, в якій типи учасників - це їх оцінки, а результат гри визначається - в рівновазі по

Байєсу-Нешу - для кожного *i*-го учасника двома функціями: по-перше, ймовірністю отримати об'єкт в залежності від типу, *Pi*(*v*); по-друге, очікуваною сумою, яку доведеться виплатити, $T_i(v)$. Кожен із стандартних аукціонів, описаних вище, буде окремим випадком цього загального визначення. Наприклад, ймовірність виграти в будь-якому з обговорюваних аукціонів з N учасниками дорівнює

$$P_i(v) = F^{N-1}(v)$$

Перший крок у доведенні теореми полягає у твердженні, що замість будь-якої Байєсової гри у визначенні «будь-якого формату аукціону» достатньо розглядати лише Байєсові ігри, в яких безліч стратегій кожного гравця — безліч його типів (можливих цінностей об'єкта для цього гравця). Крім того, можна обмежитись розглядом рівноваг у цій грі, в яких стратегія кожного типу *i*-го гравця – «правдиво» вибирати свій справжній тип. Той факт, що це не обмежує спільність міркування, називається в економічній теорії «принципом виявлення» (Myerson, 1981).

Тепер запишемо формулу для очікуваного виграшу *i*-го учасника з цінністю об’єкта *v*. Згідно введеним позначенням, це

$$EU_i(v) = vP_i(v) - T_i(v)$$

Оскільки, у відповідності з принципом виявлення, вибирати власний тип – це рівноважна і, значить, оптимальна стратегія, для довільних двох типів *v* та *w* *i*-го гравця одержуємо:

$$EU_i(v) \geq vP_i(w) - T_i(w) = EU_i(w) + (v - w)P_i(v)$$

Оскільки це виконується для довільних двох типів, а ймовірносний розподіл типів невироджений, то з цього виразу випливає, що

$\frac{dEU_i(v)}{dv} = P_i(v)$ для довільних $w \in [a, b]$.

Використавши формулу Ньютона-Лейбніца, одержимо:

$$EU_i(v) = EU_i(0) + \int_0^v \frac{dEU_i(x)}{dx} dF(x) = EU_i(0) + \int_0^v P_i(x)\, dF(x)$$

Ця формула фактично завершує доведення теореми. Ми бачимо, що очікуваний виграш *i*-го учасника, що оцінює об'єкт в *v*, залежить тільки від двох речей: від $EU_i(0)$— очікуваного виграшу учасника, коли цінність об'єкта для нього мінімально можлива; і від можливості отримати об'єкт $P_i(x)$. З цього випливає, зокрема, що будь-який механізм, в якому учасник з мінімально можливою оцінкою має очікуваний виграш, що дорівнює 0, і виграє учасник з максимальною оцінкою, приносить учасникам та продавцеві однаковий очікуваний виграш.

Подивимося на стандартні аукціони (англійська, голландська, першої ціни, другої ціни та аукціон, де платять усі учасники). У всіх цих аукціонах виконуються обидві вимоги: учасник з мінімально можливою оцінкою має очікуваний виграш, що дорівнює 0, та виграє учасник з максимальною оцінкою. Отже, всі стандартні аукціони приносять учасникам та продавцю рівні очікувані виграші.

Теорема про еквівалентність прибутків та суміжні результати стали великим кроком у розумінні ролі інформації та стимулів у людській поведінці. Виявляється, завдання стимулів, які змушують суб'єктів економіки обирати, максимізуючи власну корисність, те, що потрібно планувальнику (наприклад, організатору аукціону), повністю визначає очікувані трансферти та виграші. Якщо стимули, ефективність яких обмежена наявністю приватної інформації в агента, задані, більше ніяких ступенів волі у планувальника немає. У контексті аукціонів може здаватися, що вибір формату — це прерогатива організатора, але виявляється, якщо завдання поставлене (щоб об'єкт дістався тому, хто цінує його найвище), то від вибору формату нічого не залежить. Так само в теорії контрактів створення для агента стимулів повністю визначає, скільки йому слід заплатити (Ізмалков, Сонін, 2017).

Аукціони із «загальним компонентом цінності»

Найважливіший випадок, коли порушуються припущення теореми про еквівалентність прибутків, — продаж об'єктів із «загальним компонентом цінності». Вілсон і Мілгром внесли важливий внесок і в розвиток загальних підходів до таких продаж, і в аналіз конкретних прикладів та розробку практичних додатків. У ранніх статтях Вілсона (Wilson, 1967, 1979) дано перші приклади та сформульовані перші гіпотези, включаючи гіпотезу про «прокляття переможця».

У статтях Мілгрома (насамперед див.: Milgrom, Weber, 1982) було роз'яснено, як поява нової інформації впливає на прибутки аукціоніста залежно від формату аукціону. Тепер, коли теорема про еквівалентність доходів не виконується, стандартні аукціонні формати виявляються впорядкованими за величиною очікуваних прибутків та ефективності. Це стало підставою для прийняття правил про формат масштабних аукціонів радіочастот у середині 1990-х років.

Розглянемо ситуацію, коли цінності об'єкта учасників якимось чином пов'язані (раніше ми припускали, що вони незалежні). Наприклад, продається право на розробку нафтової ділянки, і кожен потенційний покупець робить оцінку запасів нафти, наприклад, провівши виміри на сусідній ділянці або опитавши експертів. Ці попередні оцінки можуть сильно відрізнятися - хтось взяв пробу в хорошому місці, а хтось, навпаки, у поганому; експерти могли по-різному оцінити запаси нафти. Проте, хоч би хто став переможцем аукціону, цінність ділянки дорівнює ринковій вартості реальних запасів нафти на ньому, тобто однакова для всіх учасників. Однак при виборі стратегії (заявки у закритому аукціоні; поведінка у відкритому) кожен учасник змушений спиратися тільки на власну попередню оцінку. Щоб зробити свою оцінку точнішою, йому потрібно знати інформацію інших учасників.

Якщо всі учасники ex ante симетричні, то середнє за оцінками учасників буде найкращою, у статистичному сенсі, можливою оцінкою, що враховує всю інформацію, що є в учасників.

У 1967 р. Уілсон пояснив, що з продажу об'єкта із загальним компонентом цінності може виникнути «прокляття переможця» (Wilson, 1967). Візьмемо найпростіший приклад із двома симетричними покупцями, яких знову назвемо Ганною та Борисом. Кожен з них отримав окремо оцінку цінності об'єкта, який, як вони знають, буде в кінцевому рахунку однаково цінний для них.

Нехай V - справжня, невідома Ганні та Борису, цінність об'єкта, випадкова величина. Отримана ними оцінка («сигнал», мовою економічної теорії) виглядає так: $x_i = v + \varepsilon_i$, де v – якесь значення випадкової величини V, ε_i – якесь значення незалежно розподіленої випадкової величини із середнім 0. Тоді найкраща оцінка цінності об'єкта для Ганни - $E[V|x_A] = x_A$. Якщо аукціон влаштований таким чином, що ставки учасників монотонно зростають із сигналами, які вони отримали, то вигравши аукціон, Ганна знатиме, що $x_B < x_A$. У цей час найкращою оцінкою цінності об'єкта буде $E[V|x_A, x_B < x_A\,] < x_A$. У цьому полягає «прокляття переможця»:

учасник, який переміг на аукціоні із загальною цінністю, знає, що своєю перемогою він завдячує «сверхоптимістичному шуму». (У нашому прикладі це означає, що $\varepsilon_B < \varepsilon_A$). Практичний наслідок «прокляття переможця»: в аукціонах із загальним компонентом цінності учасники торгуються дуже обережно, роблячи ставки з урахуванням того, що, одержавши перемогу, вони виявляться надто оптимістичними. У результаті продажі таких об'єктів мають приносити менші прибутки продавцю, ніж у разі, коли цінності цілком приватні.

Розвиваючи цю логіку, Вілсон запропонував модель аукціонів цінних паперів (Wilson, 1979). У таких аукціонах – як і взагалі в аукціонах із загальною цінністю для учасників – немає проблеми ефективного розміщення об'єкта продажу (бо будь-яке розміщення однаково ефективно). Проте є, звісно, проблема визначення ставок на первинному аукціоні. Якщо учасники виходять із того, що після первинного розміщення паперів (наприклад, акцій великої компанії на IPO) для них сформується повноцінний вторинний ринок, то ціна на цьому вторинному ринку, невідома учасникам первинного розміщення, задає загальну цінність об'єкта.

У моделі Вілсона учасник спочатку отримував окрему оцінку цінності об'єкта, після чого пропонував «меню ставок» — скільки він готовий заплатити за скільки паперів. Розглядалося два формати аукціонів — аукціон із рівномірною ціною (одна ціна за кожну акцію) та аукціон, у якому ціни відрізнялися залежно від обсягу пакета. (Обидва аукціони є узагальненням аукціону першої ціни на випадок кількох об'єктів.) Тут вперше було отримано два фундаментальні та очевидні результати. По-перше, у цій ситуації учасники мають стимули «стримувати попит» — на відміну від ситуації, коли на аукціоні продається лише один об'єкт. По-друге, той факт, що ставки мають вигляд «меню», уможливлює змову — хоча змова в аналогічному аукціоні для одного об'єкта неможлива.

Практика: одночасні аукціони кількох об'єктів

Коли на початку 1990-х років Федеральна комісія з комунікацій США розпочала підготовку масштабного аукціону радіочастот, роботи Вілсона та Мілгрома відіграли ключову роль у виборі формату. Незважаючи на те, що в більшості теоретичних моделей розглядався продаж одного об'єкта, формат вибирався саме на їх основі. Більше того, ідея використання аукціонів, висловлена Коузом за 30 років до цього, стала серйозно обговорюватися як заміна конкурсних комісій та жеребкування саме після появи глибоко опрацьованих теоретичних моделей.

Основні елементи аукціонів радіочастот

Перше важливе практичне рішення, яке вимагало опори на серйозну теорію, — як має бути поставлена задача з організації аукціонів. Було вирішено, що основна мета аукціону — передача радіочастот найефективнішому власнику, тобто фірмам, які, володіючи частотами, зможуть витягти їх максимальний прибуток. При цьому потрібно було відразу досягти максимальної ефективності за підсумками аукціону, не розраховуючи на вторинний ринок, що не існує. Крім того, із самого початку було поставлено завдання створити конкуренцію на ринку товарів фірм, які використовують частоти, за підсумками продажу. Відповідно були зроблені обмеження на обсяг частот, які могли потрапити в одні руки.

Наступне принципове питання — чи має аукціон бути відкритим чи закритим? Завдання ефективного розміщення об'єктів передбачало рішення на користь відкритості аукціону: чим більше виявляється інформації, тим вища ймовірність того, що виграє учасник, який цінує об'єкт найвище. Аргумент на користь закритого аукціону полягав у тому, що на ньому набагато складніше змовлятися. Саме через проблему можливої змови учасників не використали «комбінаторний аукціон Вікрі» — повноцінний аналог аукціону другої ціни для кількох об'єктів.

Комбінаторний аукціон Вікрі влаштований так. Є *M* об'єктів на продаж; результатом може бути будь-яка функція *k*: *M* → *N*, розподіл *M* об'єктів за *N* учасниками. Позначимо множину всіх розподілів об'єктів *K* = {*k* | *k*: *M* → *N*} і припустимо, кожен потенційний покупець *i* знає цінність $v_i(k)$ кожної комбінації об'єктів *k*. Учасники аукціону роблять ставки на всі можливі пакети, тобто стратегія b_i учасника *i* – відображення з *K* у множину невід'ємних чисел. Коли всі учасники зробили ставки, розподіл об'єктів $k^* = argmax_k \sum_i b_i(k)$ вибирається як остаточний, а кожен *i*-тий учасник сплачує індивідуальну ціну $p_i = max_k \sum_{j \neq i} b_j(k) - \sum_{j \neq i} b_j(k^*)$. Ця ціна за змістом є компенсацією за екстерналію, яку накладає на решту учасників аукціону *i*-тий учасник. Використовувати свої реальні оцінки як ставки, $b_i(k) = v_i(k)$ для кожного k — рівновага в (слабко) домінуючих стратегіях.

Комбінаторний аукціон Вікрі дозволяє учасникам робити ставки на будь-які комбінації об'єктів, що продаються, і забезпечує ефективний результат у рівновазі, якщо учасники роблять на всі можливі комбінації ставки, рівні їх оцінкам. Наступний приклад (Ausubel, Milgrom, 2002) ілюструє проблеми, що виникають, коли учасники мають можливість робити ставки не на окремі об'єкти, але в комбінації («пакети»).

Два учасники, Ганна та Борис, претендують на два об'єкти, A та B. Ганна вважає A та B товарами-комплементами та готова платити 20 за пакет {A, B}. Окремо A та B для неї цінності не становлять. Борис готовий заплатити 10 за пакет {A, B}, а окремо – 5 за A та 5 за B. Якщо обидва учасники роблять свої ставки «чесно» (це рівновага), то пакет {A, B} йде Ганні за ціною 10, тобто результат ефективний.

Однак припустимо, що Борис робить ставку 20 на об'єкт A, 0 на об'єкт B і створює фіктивного учасника, «Володимира», який робить ставку 20 на об'єкт B та 0 на об'єкт A. Якщо Ганна дотримується тієї ж стратегії, то виникає нова рівновага, у якій обидва об'єкти йдуть Борису та «Володимиру» (тому ж Борису) і переможець платить за них 0.

Цей приклад можна модифікувати, щоб замість створення фіктивного учасника з самого початку було три учасники і змова двох із них проти Ганни призводила до неефективного результату та нульових доходів продавця. Основна вразливість — наявність учасника, для якого об'єкти доповнюють одне одного, і це поширене явище на практиці.

Додатковим аргументом на користь відмови від пакетних ставок була складність для учасників процедури, при якій необхідно робити ставки на різні комбінації об'єктів. При цьому вважалося, що змова в англійському аукціоні, в якому торгівля відбувається публічно, є малоймовірною. У результаті було обрано формат відкритого зростаючого аукціону за фіксовані об'єкти (ліцензії на радіочастоти у різних районах), але ризики змови виявилися недооцінені (див. нижче). Відкритість означала, що всім учасникам були відомі всі ставки, ким вони зроблені і скільки ліцензій доступно кожному учаснику. Крім того, відкритий зростаючий аукціон знижував, відповідно до результатів теорії Мілгрома-Вебера, «прокляття переможця», тобто не змушував учасників бути надмірно обережними під час торгівлі.

Важливим питанням також було наступне: якщо продавати багато подібних об'єктів, потрібно це робити одночасно чи послідовно? З тих самих міркувань ефективності вирішили зробити аукціони одночасними — великим фірмам, які тендували на багато ліцензій, це значно полегшувало завдання пошуку оптимальної комбінації. Технічні питання були такі: чи мають ставки бути дискретними чи неперервними? (Були обрані неперервні – учасники могли робити ставку, яку вони хотіли.) Які мінімальна ставка та мінімальний крок аукціону? Скільки раундів торгівлі на день? На найбільшому аукціоні 1994-1995 років на перших етапах (у перші два місяці) проводилося по одному раунду на день, наприкінці аукціону - по одному раунду на 20 хвилин. Штраф за відмову платити визначався за формулою max {0, ціна відмови – остаточна ціна}, та попередній платіж був такого розміру, щоб покрити усі можливі штрафи; у разі відсутності порушень його повертали власнику.

Щоб не збільшувати час аукціону, було запроваджено спеціальні правила, які змушують учасників продовжувати торгівлю в кожному раунді: одночасно проводиться багато стандартних англійських аукціонів, на кожному з яких продається ліцензія на володіння певними радіочастотами у певному районі. Причина можливих затримок — учасникам вигідно чекати, приховуючи власну інформацію, поки інші учасники зроблять ставки. Тому в правилах було застережено, що будь-який учасник процесу має право робити підвищувальні ставки на будь-якому з цих аукціонів, але загальна кількість ставок, які він може зробити, обмежена та в одному раунді не повинна перевищувати певної кількості, яка, у свою чергу, залежить від поточної активності.

Обмеження розраховувалося за допомогою двох параметрів: поточної кількості доступних лотів K та поточної активності (кількість лотів, на яких ставка учасника була за підсумками раунду найвищою) A. І той та інший параметр розраховувалися в обсязі радіочастот на кількість населення в районі дії ліцензії.

Мілгром і Вілсон розділили весь аукціон на три етапи: на першому мало дотримуватися правила $A > K/3$; на другому, після переходу за правилом $K_{\text{нове}} = 3A_{\text{переходу}}$, - $A > 2K/3$; на третьому, після переходу $K_{\text{нове}} = 1{,}5A_{\text{переходу}}$, - $A > K$. Після цього набирало чинності обмеження $K_{\text{нового}} = \text{А}$. Щоб уникнути непорозумінь, учасникам належало по п'ять «індульгенцій», що дозволяють не знижувати кількість доступних лотів після раунду. Деякі аукціони використовували інші правила для підтримки активності учасників.

Окрім задачі ринкової ефективності та конкурентності ринку кінцевого продукту, організатори вбудовували в аукціон механізми підтримки окремих учасників. Серед іншого було виділено спеціальні пакети радіочастот, торгуватися за які могли лише дрібні фірми. Додаткові переваги надавалися на деяких лотах фірмам, якими керували або володіли жінки чи представники етнічних меншин: кредити до 50% ставки та безоплатна допомога до 40% ставки. Цікаво, що в аукціоні, де безоплатна допомога становила 25%, жоден такий учасник не став переможцем. А там, де була допомога у 40%, у тих лотах, за якими пільга надавалась, перемогли лише «пільговики», причому ціна перевищувала ціну на аналогічні ліцензії без пільговиків майже на 40%.

Аукціони радіочастот, проведені в 1994—1995 рр., принесли американському уряду вдвічі більше, ніж було заплановано — майже 20 млрд дол. (35 млрд дол. у цінах 2020 р.). Наступні аукціони мобільного спектру США принесли ще більше. Іншим показником успіху були відносно близькі ціни на порівняні об'єкти – це непряма ознака ефективності аукціону. У Великобританії 2000 р. прибуток від приватизації радіочастот виявився у 1,5 рази більше запланованого (Binmore, Klemperer, 2002). Формат аукціонів, розроблений командою під керівництвом Мілгрома та Вілсона, успішно використовувався для приватизації частот у Німеччині, Індії, Іспанії, Канаді, Норвегії, Польщі, Фінляндії, Швеції та інших країнах.

Практичний виклик одночасних аукціонів: змова учасників

Як показали перші масштабні аукціони радіочастот у США, укладання домовленостей, явних чи неявних між учасниками аукціону було реальною проблемою. Багато учасників спробували сигналізувати своїми ставками про бажання «застовпити» у себе той чи інший об'єкт; багато хто діяв, зчитуючи подібні сигнали своїх конкурентів.

Можливість змови під час аукціону залежить від формату. Припустимо, що продається лише один об'єкт за допомогою англійського аукціону та учасники зуміли дізнатися, хто цінує об'єкт найвище (це в принципі може бути складним завданням). Тоді вони можуть домовитися про наступне: на початку аукціону той, кому вони домовилися віддати об'єкт, зробить мінімальну ставку, щоб розпочати торгівлю, а решта ніяких ставок не робитиме. В результаті переможець заплатить мінімальну ціну, а продавець позбудеться практично всього очікуваного прибутку. Важливо, якщо змова відбулася, то виконувати її умови буде рівновагою Неша. Справді, обраний учасник не відхилятиметься від неї, тому що й так отримує максимум, а будь-який інший учасник не стане цього робити, тому що в результаті не збільшить своєї корисності. Якщо хтось ще почне торгуватися всерйоз, обраний учасник теж почне торгуватися і оскільки, за припущенням, цінність об'єкта для нього вища, переможе. Отже, решті вигідно дотримуватися умов змови.

Ще простіше підтримувати змову на аукціоні другої ціни. Учасники можуть домовитися так: один учасник робить дуже високу ставку *x*, а решта — 0. Тоді цей учасник отримує об'єкт безкоштовно, а змова знову буде рівновагою. Відхилення від умовленої стратегії принесе іншому учаснику той самий результат, 0, або від’ємний виграш, якщо він переб'є ставку *x*. Ця рівновага використовує стратегії, що слабо домінують, проте це рівновага Неша.

Аукціон першої ціни принципово відрізняється. У ньому, щоб обраний за умовами змови переможець заплатив якусь мінімальну ε, необхідно, щоб решта учасників зробили ставку 0. Тепер кожен із учасників має дуже сильний стимул порушити договір. В аукціоні першої ціни підтримка змови не буде рівновагою!

В аукціоні, на якому продається кілька об'єктів на паралельних торгах, змова є ще простішою — учасники можуть просто «розділити ринок». Якби вони змовилися, якось зв'язуючись, це було б незаконно. Однак можна обійтися без переговорів. Наприклад, в 1999 р. уряд Німеччини продав 10 рівноцінних блоків частот спектру для мобільного зв'язку на одночасному англійському аукціоні. За правилами продаж триває доти, доки хтось із учасників збільшує ставку хоча б на один блок. Мінімальне збільшення ставки – 10%. Поряд з декількома невеликими фірмами, боротьбу вели два телекомунікаційних гіганти - Mannesman і T-Mobile. У першому раунді фірма Mannesman робить таку ставку:

- 18,18 млн марок на блоки з номерами 1-5;

- 20,00 млн марок на блоки з номерами 6-10.

Як заявив після аукціону один із керівників T-Mobile, «ми ні про що не домовлялися з Mannesman перед аукціоном, але їхня перша ставка була дуже ясною пропозицією [розділити ринок]». У T-Mobile добре зрозуміли цю пропозицію: у другому раунді T-Mobile поставила 20 млн = 18,18 млн + 10% на блоки 1-5, аукціон закінчився (інших ставок не було). Таким чином, T-Mobile отримала блоки 1-5, заплативши за кожен 20 млн. марок, а Mannesman отримала блоки 6-10 за ту ж ціну. Змова відбулася без прямих переговорів співробітників фірм, що, згідно із законом, вважається основною ознакою картельної змови.

Інший приклад некооперативної змови, коли учасники замість таємних переговорів спілкуються за допомогою сигналів — типовий приклад того, що відбувалося на найбільшому у світі аукціоні мобільного спектру в США. Як і в аукціонах, які ми обговорювали вище, на одночасному англійському аукціоні продавалися ліцензії на мобільний зв'язок у різних округах США. Округи були неоднорідні: ліцензія для великого міста з багатим населенням (Каліфорнія та Північний Схід) коштувала вдесятеро більше, ніж аналогічна ліцензія в іншій частині країни. У різних операторів були різні пріоритети — наприклад, USWest дуже хотілося мати ліцензію в районі 378 (місто Рочестер, штат Міннесота).

У таблиці 1 наведено історію ставок. У перші два місяці (до 59-го раунду — дня аукціону) USWest не виявляла жодного інтересу до районів 283 і 452, в яких вже зробила ставку компанія McLeod. Однак дві компанії вели запеклу боротьбу за ліцензію в районі 378. Роблячи ставку на ліцензію в районі 452 у 59-му раунді, USWest не стала округляти її до тисяч доларів — ставка була 313 378 доларів. McLeod могла прочитати цей сигнал наступним чином: якщо ви не перестанете торгуватися з нами за район 378, ми змусимо вас заплатити більше за (непотрібний нам) район 452. Оскільки McLeod не відреагувала на цей сигнал, USWest повторила цей хід у 64-му раунді, зробивши ставку 62 378 в районі 283. Після цього ринок був розділений: McLeod перебила ставки USWest в 283 і 452 районі і перестала боротися за 378.

Ця історія з «некооперативною змовою щодо поділу ринку», який укладали учасники в процесі аукціону, була типовою. Підраховано, що 153 фірми-учасниці використовували шифровані листи або явно намагалися карати опонентів за серйозну конкуренцію (Cramton, Schwartz, 2000). Ці учасники виграли 470 (з 1479) ліцензій та заплатили за виграні ліцензії значно менше (на 20—35%), ніж фірми, які не використовували ці стратегії. Теоретично сигналом, що попереджає конкурента про небажаність його участі в торгівлі, можуть бути сторонні інвестиції фірми і навіть непродуктивні витрати (Daley et al., 2012).

Табл. 1. Хід аукціона компанії USWest та McLeod [Cranton, Schwartz, 2000]

Раунд	Marshalltown, IA		Rochester, MN		Waterloo, IA	
	район 283		район 378		район 452	
	McLeod	USWest	McLeod	USWest	McLeod	USWest
24	56 000				287 000	
...						
46				568 000		
52			689 000			
55				723 000		
58			795 000			
59				875 000		313 **378**
60					345 000	
62			963 000			
64		62 **378**		1 059 000		
65	69 000					

У наступних аукціонах проблеми шифрованих листів намагалися врахувати. Питання, як і в багатьох аспектах організації аукціонів, полягає в тому, яка інформація має бути доступна учасникам. Наприклад, якщо змусити вибирати ставку з фіксованої сітки, то не буде можливості надсилати такі сигнали, як у прикладі USWest - McLeod. Можна не повідомляти учасників, який саме опонент перебив їхню ставку. На жаль, зниження обсягу отриманої інформації знизить і кінцеву ефективність, оскільки після завершення аукціону фірми-переможці конкуруватимуть на ринку кінцевого продукту, їм по ходу аукціону не байдуже, хто яку ліцензію виграє. Приховування інформації ускладнює змову та одночасно знижує ефективність.

Нові формати аукціонів

Щоб вирішити проблеми, що виникли при організації одночасного англійського аукціону, група економістів під керівництвом Мілгрома розробила новий формат - комбінаторний часовий аукціон (Ausubel et al., 2006; Levin, Skrzypacz, 2016). Ми спочатку проілюструємо ідею часового аукціону на простому прикладі — модифікації англійського аукціону при одночасному продажу кількох об'єктів, а потім обговоримо їхнє практичне втілення. Приклад розкриває економічну логіку комбінаторного часового аукціону і є мікромоделлю ринкового ціноутворення в абстрактній економічній теорії.

Часовий аукціон Аузубеля

У ході часового аукціону у його найпростішому варіанті (вперше запропонований у Ausubel, 2004) учасники платять у результаті різну ціну за однакові об'єкти. Продається кілька однакових об'єктів, наприклад, ліцензій на здійснення мобільного зв'язку в різних районах. На лічильнику-табло безперервно піднімається ціна (саме тому аукціон називається «часовим»), а учасники в кожний момент часу показують скільки одиниць об'єктів їм потрібно. Можна знижувати, але не можна підвищувати попит. Аукціон закінчується в той момент, коли сукупний попит, тобто сума запитів учасників, дорівнює пропозиції, тобто кількості об'єктів, що продаються.

Ціна продажу визначається цифрами на табло, але за підсумками аукціону учасники заплатять, загалом кажучи, різну ціну за різні об'єкти! Якщо за ціною *p* якийсь учасник знижує свій попит на одиницю і виявляється, що через це хтось із учасників гарантував собі отримання одного об'єкта, то цей хтось платить за вказаний об'єкт ціну *p*.

Розглянемо приклад із виграшами (корисністю) учасників від отримання чергової ліцензії, описаними в таблиці 2. Як завжди, корисність від володіння додатковою одиницею товару зменшується: відповідно до цього, виграш кожного учасника від додаткового об'єкта менший (нестрого) виграшу від попередньої одиниці.

Табл. 2. Гранична цінність об’єктів для учасників аукціону (млн. грн.)

	Ганна	Борис	Валя	Галина	Діана	Єгор
Цінність 1-го об’єкта	125	75	150	85	40	45
Цінність 2-го об’єкта	110	20	150	65	25	10
Цінність 3-го об’єкта	100	5	45	15	20	5

Ми аналізуватимемо ситуацію, в якій кожен учасник аукціону торгуватиметься «чесно», тобто не знижуватиме попит доти, доки ціна не перевищує граничну корисність від чергової одиниці. Наприклад, Борис, дотримуючись такої стратегії, запитуватиме наступне: при $p < 5$ — 3 об'єкти, при $5 \le p < 20$ — 2 об'єкти, при $20 \le p < 75$ — 1 об'єкт, при $75 \le p$ — 0.

Що станеться, якщо всі учасники дотримуватимуться таких «чесних» стратегій? Аукціон закінчиться за ціною 85 на табло, а розподіл об'єктів буде таким: Ганна отримає 3 ліцензії та заплатить 65 млн грн. за першу виграну ліцензію, 75 млн -

за другу та 85 млн - за третю. Валентина отримає 2 ліцензії та заплатить 75 млн грн. за першу виграну ліцензію та 85 млн - за другу. Як проходить аукціон та визначається ціна за конкретний об'єкт, можна побачити у таблиці 3.

Табл. 3. Хід аукціону Аузубеля

Ціна	Попит, одиниць об'єктів						Сукупний попит	Гарантовані ліцензії
	Ганна	Борис	Валя	Галина	Діана	Єгор		
0	3	3	3	3	3	3	18	
5	3	2	3	3	3	2	16	
10	3	2	3	3	3	1	15	
15	3	2	3	2	3	1	14	
20	3	1	3	2	2	1	12	
25	3	1	3	2	1	1	11	
40	3	1	3	2	0	1	10	
45	3	1	2	2	0	0	8	
65	3	1	2	1	0	0	7	Ганна гарантує отримання 1-го об'єкта
75	3	0	2	1	0	0	6	Ганна гарантує отримання 2-го об'єкта, а Валя – 1-го
85	3	0	2	0	0	0	5	Ганна гарантує отримання 3-го об'єкта, а Валя – 2-го

В аукціоні, який проводиться за такими правилами, дотримання «чесних стратегій» буде рівновагою. Результат ефективний: усі п'ять об'єктів отримані покупцями із найвищими (граничними) цінностями. Тепер подивимося, що станеться, якщо аукціон проводиться так само, але за правилами «рівної ціни», тобто усі переможці аукціону платять за ліцензії однакову ціну. Можна показати, що дотримання «чесних стратегій» не буде рівновагою Нешу. Дійсно, припустимо, що всі учасники аукціону, крім Ганни, виставляють попит відповідно до своїх граничних корисностей (див. табл. 2). Що зробить Ганна, коли ціна сягне 75 млн? У цей момент попит становить (3,0,2,1,0,0), тобто сукупний попит дорівнює 6. Ганна має два варіанти продовження: торгуватися відповідно до своїх граничних корисностей або негайно припинити аукціон, знизивши попит на 1. Якщо продовжувати торгівлю, виграш Ганни дорівнює 125 + 110 + 100 - 3 × 85 = 80. Якщо занизити попит на 1, то її виграш складе 125 + 110 - 2 × 75 = 85. Значить, Ганні невигідно продовжувати торг: як у стандартній задачі монополіста, стратегічне заниження попиту приносить додаткову вигоду. При цьому і доходи продавця, та ефективність нижчі, ніж в аукціоні Аузубеля. Перевага аукціону Аузубеля у тому, що у ньому, як й в аукціоні Вікрі, ціна об'єкта, яку сплачує переможець, залежить від його ставки, що забезпечує йому цей об'єкт.

Комбінований часовий аукціон

Цей аукціон дозволяє учасникам робити ставки на різні комбінації об'єктів, що продаються. Він складається з двох етапів. На першому етапі визначається, скільки об'єктів виграє кожен учасник, і розраховуються «базові» ціни. Перший етап починається з «часової» стадії – аукціоніст підвищує ціну, у кожному раунді дізнаючись про попит учасників за цією ціною. Коли попит перестає перевищувати пропозицію, процес зупиняється. Після цього в учасників з'являється

можливість збільшити свою ставку на пакет (комбінацію об'єктів), протягом якого вони торгувалися, і навіть зробити ставки на нові пакети.

На другому етапі включається алгоритм, який за формулами, які

узагальнюють формули для аукціону другої ціни та комбінаторного аукціону Вікрі, вибирає такий розподіл об'єктів за учасниками, що максимізує сукупну цінність для всіх учасників. Ціни визначаються аналогічно аукціону Вікрі: кожен платить ціну, яка була б виграшем переможця, якби цього учасника не було.

Незважаючи на те, що комбінаторний часовий аукціон теоретично працює краще, ніж одночасний відкритий аукціон, у нього є структурні недоліки. Учасники, які торгуються за невеликі обсяги, отримують непропорційно маленьку маржу, отже, у них слабкі стимули брати участь в аукціоні. Незважаючи на те, що в аукціонах типу Вікрі власна ставка не впливає на ціну, яку платить учасник (саме ця властивість робить в аукціоні другої ціни оптимальним повідомлення як ставка цінності об'єкта), ставку можна використовувати, щоб завдати шкоди іншим учасникам. Як і в аукціоні Вікрі, поряд з ефективною рівновагою в комбінаторному часовому аукціоні є неефективним. Проте в 2008 р. цей формат був прийнятий як основний механізм розподілу радіочастот у Великій Британії, а потім його використовували уряди Австралії, Австрії, Данії, Ірландії, Канади, Нідерландів, Румунії, Словаччини та Швейцарії.

Двосторонні аукціони

У 2010-і роки перед командою Мілгром було поставлено нове завдання. Значна частина доступних радіочастот вже знаходилася у чиїсь власності. Відповідно необхідно було організувати аукціон, на якому спочатку частоти викуповувалися у нинішніх власників, а потім продавалися новим. Такий аукціон був проведений у 2017 р. Він став реальним втіленням візіонерської пропозиції Коуза (Coase, 1959)

Двосторонній аукціон Мілгром складається з двох частин. У 2017 р. аукціон з викупу прав на використання частот вимагав 10,1 млрд дол., після чого ці частоти були продані на аукціоні, принісши 19,8 млрд. Таким чином, американські платники податків отримали 10 млрд дол. (і ще залишився значний запас непроданого спектра). Створення конкурентного ринку справді призвело до підвищення економічної ефективності. Щоб забезпечити ефективну передачу частот по всьому ринку, не припиняючи роботи телевізійних станцій, довелося подолати серйозні економічні перешкоди. Купівля-продаж торкнулася лише 5% всіх частот, що використовувалися, але потрібно було здійснити передачу різних ділянок спектру так, щоб покупці не опинилися з «розірваними» шматками спектру в руках (Milgrom, Segal, 2017).

У науковому обґрунтуванні Нобелівської премії 2020 р., присудженої Мілгрому та Вілсону, анонімні експерти-консультанти Нобелівського комітету написали про те, що відсутність одного ідеального формату для аукціону є невипадковою. Оптимальна організація аукціону залежить від поставленого завдання, контексту та специфіки ринку. Навіть якщо організаторам вдасться уникнути технічних помилок, точно обравши мінімальну ціну, обсяг і склад пакетів, що виставляються на торги, і визначивши систему доступу до кредиту, то знайдеться маса факторів, які зроблять аукціон недосконалим. Наприклад, якщо правила аукціону оголошені задовго до проведення, потенційні учасники можуть змовитися або незалежно виробити стратегії, що знижують прибуток продавця та ефективність. У багатьох ситуаціях ключову роль грає політика: учасники ринку можуть бути не зацікавлені ні в конкурентному розподілі активів, ні в гострий конкуренції над ринком кінцевого товару. У цьому випадку вони лобіюватимуть формати аукціонів, які зручні їм, обмежують вхід тощо.

Проте, якими б важливими не були ці «позааукціонні» фактори, що знижують якість складного аукціону, розробленого фахівцями, вони відіграватимуть ще більшу роль у ситуації, коли активи перерозподілятимуться через неринкові механізми. Навіть найчесніша і компетентніша комісія не зможе правильно з'ясувати, який претендент на активи зможе використати їх із найбільшою своєю та суспільною користю. Невипадково приватні фірми, які продають активи, все частіше вдаються до аукціонів та інших конкурентних механізмів продажу.

Навчальний приклад: аукціон частот мобільного зв'язку

Найбільш наочним прикладом аукціону став продаж ліцензій на частоти мобільного зв'язку. У період з 1994-го по 2005 рік Федеральна комісія із зв'язку США зібрала таким чином 40 мільярдів доларів. В Англії аукціон частот мобільного зв'язку 3G (третього покоління) зібрав неймовірно велику суму - 22,5 мільярда фунтів стерлінгів, що зробило його найбільшим аукціоном всіх часів

На відміну від традиційних аукціонів з підвищенням ціни такі аукціони виявилися більш складними, оскільки їх учасникам надали право одночасно робити заявки на декілька різних ліцензій.

У нашому спрощеному аукціоні тільки два учасники: AT&T і MCI, а також тільки дві ліцензії: NY (Нью-Йорк) і LA (Лос-Анджелес). Обидві компанії зацікавлені в обох ліцензіях, але кожна з них може придбати тільки одну ліцензію.

Один із способів проведення аукціону зводиться до того, щоб виставляти ліцензії на продаж по черзі. Спочатку NY, потім LA. Або краще спочатку LA, а потім NY? На питання про те, яку ліцензію слід виставляти на продаж першої, очевидної відповіді немає. У будь-якому випадку виникнуть певні проблеми. Припустимо, ліцензія NY буде виставлена на продаж першою. Компанія AT&T може віддати перевагу LA пе, але буде змушена подати заявку на NY, знаючи, що перемога в боротьбі за LA - далеко не стовідсоткова. AT&T краще отримати хоча б щось, ніж взагалі залишитися з порожніми руками. Однак якщо компанія виграє в торгах за ліцензію NY, у неї може не вистачити коштів на покупку ліцензії LA.

Скориставшись допомогою фахівців з теорії ігор, Федеральна комісія із зв'язку знайшла оригінальне вирішення цієї проблеми: провести паралельний аукціон. Обидві ліцензії, NY і LA, були виставлені на продаж одночасно. По суті, учасники аукціону могли озвучувати свої ціни на кожну з двох ліцензій. Якби MCI запропонувала вищу ціну на LA, AT&T могла або підняти свою ціну, або вступити в торги за NY.

Паралельний аукціон завершувався тільки тоді, коли жоден з учасників більше не підвищував ціну на предмет торгів. Насправді весь процес торгів був розділений на чотири раунди. В ході кожного раунду аукціонери могли або підвищувати ставки, або нічого не робити.

Проілюструємо, як це працює, на наступному прикладі. В кінці раунду 4 найвищу ціну на NY запропонувала компанія AT&T, а найвищу ціну на LA - компанія MCI.

	NY	LA
AT&T	6	7
MCI	5	8

В ході п'ятого раунду торгів AT&T могла б запропонувати свою ціну за LA, а MCI - за NY. Компанії AT&T немає сенсу знову пропонувати ціну за NY, оскільки її ціна за цю ліцензію вже і так є найвищою. Те ж саме стосується MCI і LA.

Уявіть собі, що заявки робить тільки AT&T. В такому випадку результат був би іншим:

	NY	LA
AT&T	6	9
MCI	5	8

Тепер, коли AT&T має найвищу ціну на обидва лоти, вона більше не може підвищувати ціну. Але аукціон ще не закрито. Торги закінчуються тільки тоді, коли протягом одного раунду жоден покупець не пропонує нової ціни. Оскільки компанія AT&T зробила ставку в попередньому раунді, повинен бути мінімум ще один раунд, а значить, MCI отримає шанс запропонувати свою ціну. Якщо MCI відмовиться від цього, аукціон буде закритий. Не забувайте: AT&T не може робити ставку. Якщо MCI все-таки запропонує свою ціну, скажімо 7 за ліцензію NY, аукціон продовжиться. У наступному раунді AT & T може запропонувати нову ціну на NY, а у MCI з'явиться ще один шанс запропонувати більш високу ціну на LA.

Цей приклад допоміг чітко роз'яснити правила проведення даного аукціону. Тепер зіграємо в цей аукціон ще раз.

Дві компанії, про які тут йдеться, витратили мільйони доларів на підготовку до аукціону. В рамках цієї підготовки вони визначили, яку цінність має кожна з цих ліцензій для них самих і для їх суперника. Ось ці оцінки:

	NY	LA
AT&T	10	9
MCI	9	8

Судячи з таблиці, обидві ліцензії становлять більшу цінність для AT&T, ніж для MCI. Крім того, оцінки відомі обом сторонам. AT&T має уявлення про цінність ліцензій не тільки для себе, але і для MCI. AT&T також знає, що MCI відомі дані AT &T і що MCI знає, що AT&T відомі дані MCI, і так далі. Всі знають все. Безумовно, це крайнє припущення, але компанії дійсно витратили величезні гроші на те, що називається конкурентною розвідкою. Отже, той факт, що компанії добре знають один одного, можна вважати дійсним.

Аналіз прикладу

AT&T вибрала 10 за NY і 9 за LA? Якщо так, вона, безумовно, виграла обидва аукціони, але не отримала жодного прибутку. Це один з найбільш тонких моментів пропозиції цін на аукціоні. Якщо ви повинні заплатити запропоновану ціну (як в даному випадку), то має сенс робити ставку, відповідну цінності цих ліцензій для вас. Уявіть собі, що ви пропонуєте десять доларів за те, щоб купити десятидоларову банкноту: скільки у вас було, стільки й залишиться.

Одна з помилок полягає в тому, що перемога в аукціоні хороша сама по собі незалежно від того, що саме ви отримуєте в результаті. Якщо ви сприймаєте дані про цінності предмета торгів як максимальні ставки, а не як вашу оцінку його реальної вартості для вас, ви теж будете раді виграти аукціон, запропонувавши за предмет торгів ціну, еквівалентну тій цінності, яку він для вас представляє.

Коли говориться, що 10 - це цінність ліцензії NY для AT&T, то мається на увазі, що вона поставиться до перемоги в аукціоні нейтрально, не скаржачись і не особливо радіючи цій перемозі. При ціни 9,99 вона віддала б перевагу перемозі, але зовсім невелику. За ціни 10,01 компанія воліла б не вигравати аукціон, хоча її збиток був би зовсім невеликим.

З огляду на все це, зрозуміло, що пропозиція ціни 10 за ліцензію NY і 9 за LA - насправді приклад слабо домінованих стратегії. Застосування цієї стратегії забезпечить AT&T нульовий результат. Це і буде виграшем незалежно від того, переможе вона в цьому аукціоні чи програє. Будь-яка стратегія, яка дасть можливість домогтися більшого, ніж нульовий результат, не втративши при цьому грошей, буде слабо домінувати над стратегією пропозиції ціни 10 і 9 на початку аукціону.

Можливо, AT&T вирішили запропонувати ціну 9 за ліцензію NY і 8 за LA. Якщо це дійсно так, вона б вчинила розумніше, ніж коли б назвала 10 і 9 відповідно. З огляду на ціну MCI, AT&T виграє обидва аукціони. (MCI не запропонує ціну, яка перевищує цінність цих ліцензій для неї.)

Який же результат отримала AT&T? Вона заробили прибуток в розмірі 1 на кожній ліцензії або 2 в цілому. Питання в тому, чи можливо домогтися більшого успіху.

Очевидно, що AT&T не отримає кращий результат, запропонувавши ціни 10 і 9. Те ж саме можна сказати про повторну пропозицію цін 9 і 8. Які ще стратегії можна розглянути? Припустимо, ціни 5 і 5. (У разі пропозиції інших цін гра буде проходити за таким же сценарієм.) Тепер прийшов час розкрити ставку MCI: почати з 0 (тобто не запропонувати ніякої ціни) за NY і 1 за LA. З огляду на те, як проходив перший раунд торгів, AT&T запропонує більш високу ціну за обидві ліцензії. Отже, вона не може робити ставку в поточному раунді (так як немає ніякого сенсу в тому, щоб пропонувати ціну, яка перевищує її ж попередню ставку). Оскільки MCI програє за обома ліцензіями, компанія буде пропонувати свою ціну знову.

MCI не може повернутися до свого CEO з порожніми руками і сказати, що вибула з аукціону при ставці 5. Вона може повернутися додому з порожніми руками тільки в тому випадку, якщо ціни підвищаться до 9 і 8, так що немає сенсу пропонувати більше. Тому MCI підвищує ціну за LA до 6. Оскільки компанія тільки що запропонувала більш високу ціну, аукціон продовжується ще на один раунд. (Нагадаємо, що аукціон триває черговий раунд кожен раз, коли хоча б один з учасників аукціону робить ставку.)

Нехай AT&T випереджає MCI в боротьбі за LA, запропонувавши ціну 7. Коли настане черга MCI робити ставку в наступному раунді, на цей раз вона запропонує ціну 6 за NY. Але краще виграти в боротьбі за NY за ціною 6, ніж за LA за ціною 8. Зрозуміло, в такому випадку AT&T знову може запропонувати більш високу ціну за NY.

Залежно від того, хто пропонує ціну і коли, AT&T виграє обидві ліцензії за ціною 9 або 10 за NY і 8 або 9 за LA. Безумовно, це нічим не краще за результат, який вона отримала б, якби спочатку запропонувала ціну 9 за NY і 8 за LA. Схоже на те, що експеримент не привів до збільшення виграшу. Таке теж можливо. Відчуваючи різні стратегії, ви не можете розраховувати, що всі вони принесуть успіх. Але можливо зробити ще що-небудь, щоб отримати прибуток більше 2?

Повернемося назад і переграємо останній раунд аукціону. Що ще можна зробити після того, як MCI запропонувала ціну 6 за LA? У той момент пропозиція AT&T за LA було вище нашої і становила 5. Насправді вона могли б нічого не робити, просто припинити робити ставки. MCI не була зацікавлена в тому, щоб пропонувати за NY ціну, що перевищує пропозицію AT&T. MCI була б рада виграти ліцензію LA за ціною 6. MCI знову зробили ставку тільки тому, що не могли повернутися додому з порожніми руками- хіба що в тому випадку, якби ціни підвищились до 9 и 8.

Якби AT&T припинила робити ставки, аукціон відразу ж завершився б. Вона виграла б тільки одну ліцензію - NY за ціною 5. Оскільки вона оцінюєте цю ліцензію в 10, цей результат дає виграш в 5 - велике досягнення в порівнянні з виграшем 2, на який можна було розраховувати, запропонувавши ціни 9 і 8.

З іншого боку, MCI знає, що не може перевершити AT&T за обома ліцензіями, оскільки вони обидві представляють для AT&T більшу цінність, ніж для першої компанії. MCI більш ніж щаслива отримати одну з ліцензій по будь-якій ціні, нижчій за 9 і 8.

AT&T запропонувала ціну 1 за NY і 0 за LA? MCI запропонувала ціну 0 за NY і 1 за LA. У цей момент кожен з них має ще одну можливість зробити ставку (оскільки в попередньому раунді ставки були зроблені, а значить, аукціон продовжується). AT&T не може пропонувати ціну за NY, оскільки її ставка вже і так вище. Як щодо LA? AT&T пропонує свою ціну? Зрозуміло, MCI сподіваємося, що ні. MCI не запропонувала свою ціну за LA в цей раз. Так що, якщо AT&T теж не стане робити ставку, аукціон завершиться. Аукціон триває тільки тоді, коли хоча б один учасник торгів пропонує свою ціну. Якщо аукціон закінчується в цей момент, AT&T отримує тільки одну ліцензію, але за вигідною ціною 1, а значить, виграш становить в результаті 9.MCI виграє другу ліцензію за ціною 1.

Перш ніж покинути аукціон, не отримавши жодної ліцензії, MCI буде підвищувати ціну аж до 9 і 8. Якщо AT&T хоче, щоб компанії-суперниці не дісталася жодна ліцензія, вона повинна бути готові до того, що їй доведеться запропонувати сукупну ціну 17. Зараз у неї вже є одна ліцензія за ціною 1. Таким чином, справжня вартість виграшу другої ліцензії - 16, що істотно перевищує ту цінність, яку вона для неї представляє.

Однак AT&T може виграти одну ліцензію за ціною 1 або дві за сукупною ціною 17. Виграти одну ліцензію - більш сприятливий варіант. Однак те, що AT&T может одержати перемогу в обох аукціонах, зовсім не означає, що вам варто це робити.

Але звідки можна знати, що MCI буде продовжувати боротися за ліцензію LA і залишить ліцензію NY? Звичайно, неможливо знати про це. MCI просто пощастило, що все склалося саме так. Але навіть якщо б обидві компанії запропонували свою ціну за NY в першому раунді, все знову швидко стало б на свої місця.

Чи немає тут змови? Строго кажучи, немає. Хоча обидві компанії дійсно одержують велику вигоду з цього аукціону (а продавець зазнає серйозних збитків), їм не потрібно укладати домовленість між собою. Кожна сторона діє виключно у власних інтересах. У MCI прекрасно розуміють, що вони не можуть виграти обидві ліцензії на цьому аукціоні. В цьому немає нічого дивного, адже кожна ліцензія являє для AT&T більшу цінність, ніж для MCI. Отже, в MCI будуть більш ніж задоволені, якщо зможуть отримати будь-яку з ліцензій. Що стосується AT&T, в цій компанії можуть взяти до уваги той факт, що справжня вартість другої ліцензії - це додаткова ціна, яку AT&T доведеться заплатити за обидві ліцензії. Запропонувавши більш високу ціну за LA, ніж компанія MCI, AT&T може підвищити ціну як LA, так і NY. Справжня вартість виграшу другої ліцензії становить 16, що істотно перевищує цінність цієї ліцензії для AT&T.

Те, що ми спостерігаємо в цій ситуації, часто називають мовчазною співпрацею. Кожен з двох учасників гри розуміє довгострокову вартість боротьби за обидві ліцензії, а отже, усвідомлює переваги отримання однієї з ліцензій за низькою ціною. Якби ви були продавцем, вам необхідно було б уникнути такого результату. Один із способів зробити це - продавати дві ліцензії по черзі. В такому випадку, якби компанія MCI дозволила AT&T отримати ліцензію NY за ціною 1, це не принесло б їй ніякої вигоди. Причина досить проста: компанія AT&T все одно була б зацікавлена в тому, щоб продовжити боротьбу за LA в наступному раунді торгів. Ключова відмінність полягає в тому, що MCI не може повернутися назад і повторно запропонувати ціну за NY, так що AT&T нічого не втратить, запропонувавши свою ціну за ліцензію LA.

Можна зробити більш загальний висновок: коли дві гри об'єднуються в одну, виникає можливість для використання стратегій, які можна застосувати в обох іграх. Коли компанія Fuji вийшла на американський ринок фотоплівки, у Kodak була можливість вжити заходів у відповідь або в Сполучених Штатах, або в Японії. Розв'язання цінової війни в США обійшлося б Kodak дуже дорого, але якщо б компанія зробила це в Японії, це обійшлося б дорожче для Fuji (а не для Kodak, у якій зовсім невелика частка на японському ринку). Таким чином, взаємодія між декількома іграми, які відбуваються одночасно, створює можливості для покарання і співробітництва, що було б неможливо в іншому випадку, принаймні без явного змови.

Переговори

Люди ведуть переговори протягом всього свого життя. Будучи дітьми, вони домовляються ділитися іграшками і грати в ігри з однолітками. Ставши дорослими і створивши сім'ю, домовляються про розподіл домашніх обов'язків і виховання дітей. Покупці і продавці торгуються про ціну, працівники та керівники домовляються про заробітну плату. Країни ведуть переговори про політику взаємної лібералізації торгівлі; наддержави обговорюють взаємне скорочення озброєнь. Для того, щоб отримати прийнятний результат в ході переговорів, їх учасники повинні розробити ефективні стратегії.

У всіх переговорних ситуацій є дві спільні риси. По-перше, сумарний виграш, який сторони переговорів можуть забезпечити в результаті досягнення консенсусу, повинен бути більше індивідуальних виграшів, які вони могли б отримати окремо, тобто ціле має перевищувати суму складових. При відсутності такої надмірної цінності, або «надлишку», проведення переговорів безглуздо. Але в процесі переговорів сторони повинні принаймні розраховувати на деякі вигоди, які можна отримати з досягнутою домовленістю: коли Фауст погодився продати душу дияволу, він вважав, що переваги від придбаних ним знань і влади заслуговують тієї ціни, яку йому довелося в підсумку заплатити.

Друга важлива спільна риса переговорів випливає з першої: переговори- це не гра з нульовою сумою. При наявності надлишку вони зводяться до його поділу. Кожна сторона переговорів намагається виторгувати більше для себе і залишити менше всім іншим. На перший погляд, ця ситуація може здатися грою з нульовою сумою, але тут існує небезпека того, що, якщо домовленість не буде досягнута, жодна сторона не отримає ніяких надлишків. Саме ця обопільно згубна альтернатива, а також прагнення обох сторін уникнути її створюють грунт для погроз (явних і прихованих), які і роблять переговори питанням стратегії.

Подальший розвиток теорії ігор проходив за двома різними напрямками, в кожному з яких використовувалася своя логіка теоретико-ігрових міркувань. Є відмінність між теорією кооперативних ігор, коли гравці вибирають і реалізують свої дії спільними зусиллями, і теорією некооперативної ігор, коли гравці вибирають і реалізують свої дії окремо.

Розглянемо найпростішу постановку задачі переговорів та парадокси, які з нею пов’язані.

Гра «Ультиматуми»

У грі беруть участь двоє гравців. Гравцю А видається сума грошей, частину якої він пропонує гравцеві Б. Якщо гравець Б погоджується, угода є дійсною. Якщо гравець Б відмовляється від запропонованої частини, то ніхто нічого не отримує.

Нехай m- початковий запас гравця А. $c \in [0; m]$-сума, яку гравець А пропонує гравцю Б.

$$\text{Виграш Б} = \begin{cases} \text{c, якщо пропозиція приймається} \\ \text{0, якщо пропозиція відхиляється} \end{cases}$$

$$\text{Виграш А} = \begin{cases} m - c, \text{якщо пропозиція приймається} \\ \quad 0, \text{якщо пропозиція відхиляється} \end{cases}$$

Для $\forall c > 0$ гравцю Б є вигідним прийняти пропозицію.А отже, гравець А може максимізувати свій виграш, запропонувавши Б мінімальну частину.

Зазвичай, в лабораторних умовах перший гравець пропонує другому 30-40% повної суми. При цьому пропозиції, нижчі за 20% відхиляються другим гравцем.

Гра «Диктатор»

Гра «Диктатор» є найпростішим експериментом на поділ. Є двоє гравців:диктатор та жертва.Диктаторові видається сума m, частину якої він має віддати жертві. Жертва відіграє пасивну роль, тобто ніяким чином не впливає на розподіл виграшів.

На практиці середній розмір частини, що віддається, складає 20% і може досягати 40-50%.

Модель торга Неша

Проаналізуємо підхід Неша до переговорів як до кооперативної гри. Припустимо, двоє учасники переговорів, А і Б, намагаються розділити загальну величину *v*, яку вони можуть отримати, тільки якщо домовляться про конкретний спосіб поділу. Якщо угоди не буде досягнуто, А отримає *a*, а Б отримає *b*, причому кожен буде діяти поодинці. Назвемо ці показники страхувальними виграшами, або, використовуючи термінологію Гарвардського переговорного проекту, їх кращими альтернативами обговорюваній угоді (best alternative to a negotiated agreement, BATNA). Найчастіше значення *a* і *b* дорівнюють нулю, але в більш загальному
випадку будемо виходити з того, що *a* + *b* <*v*, тобто дана угода забезпечує позитивний надлишок (*v* – *a* - *b*); в іншому випадку весь переговорний процес виявився б безглуздим, оскільки кожна сторона просто скористалася б зовнішньої можливістю і отримала б свій BATNA.

Розглянемо наступне правило: кожному гравцеві необхідно надати його BATNA і частку надлишку. Припустимо, для А частка надлишку дорівнює *h,* а для Б -k, причому *h + k = 1.* Позначивши за *x* суму, яку отримає в результаті А, а *y* - суму, яку отримає Б, маємо: $\text{x} = a + h\,(v - a\, - b) = a\,(1 - h) + h\,(v - b)$,

$x - a = h(v - a - b)$, $y = b + k(v - a - b) = b(1 - k) + k(v - a)$,

$y - b = k(v - a - b)$.

Ці вирази називаються формулами Неша. Ще один спосіб інтерпретувати їх зводиться до такого твердження: надлишок ($v - a - b$) підлягає поділу між двома учасниками переговорів в співвідношенні h до k, або $(y - b) / (x - a) = k / h$, або у вигляді рівняння $y = b + k / h\,(x - a) = (b - ak / h) + kx / h$.

Для того щоб охопити весь надлишок, x і y повинні також задовольняти рівняння $x + y = v$. Формули Неша для x і y - це і є розв'язки системи останніх двох рівнянь.

Геометричне уявлення кооперативного розв'язку Неша наведено на рис. 1. Страхувальний виграш, або BATNA, знаходиться в точці P з координатами (a, b). Всі точки (x, y), які ділять прибуток між двома гравцями в співвідношенні h до k, лежать на прямій, яка проходить через точку P і має нахил k / h; ця похила пряма є графіком функції $y = b + (k / h)(x - a)$. Всі точки (x, y), що охоплюють надлишок, лежать на прямій, що проходить через точки (v, 0) і (0, v); ця пряма відповідає другому рівнянню, $x + y = v$. Розв'язок Неша знаходиться в точці перетину цих ліній, тобто в точці Q. Координати цієї точки - виграші сторін після досягнення угоди.

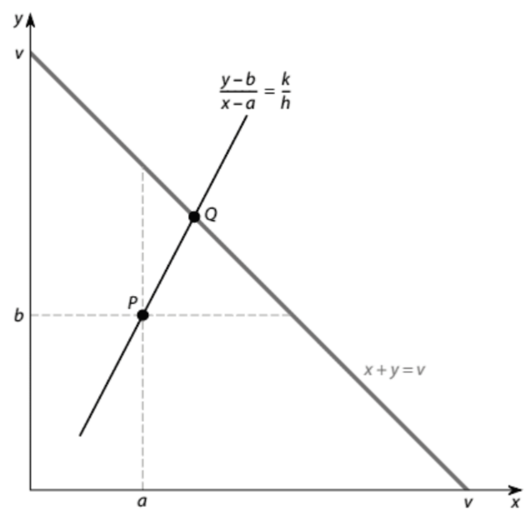


Рис.1

Формула Неша нічого не говорить про те, як може бути отримано це рішення. І така розпливчастість - її перевага, оскільки її можна використовувати для опису результатів безлічі різних теорій з урахуванням безлічі різних підходів.

На найпростішому рівні формулу Неша можна розглядати як короткий опис результату переговорного процесу. Тоді *h* і *k* можуть позначати відносну силу переговорних позицій сторін. Таке скорочений опис представляє собою компроміс; повніша теорія повинна пояснювати, звідки береться сила переговорних позицій і чому в однієї сторони вона може бути більшою, ніж в іншої.

Сам Неш притримувався іншого підходу, що відрізняється від загального підходу до теорії ігор. Тому його підхід заслуговує більш ретельного пояснення. У всіх уже іграх учасники вибирали і розігрували свої стратегії окремо один від одного. Знаходились рівноваги, в яких стратегія кожного гравця відповідала його власним інтересам з урахуванням стратегій інших гравців. Часом такі результати були вельми несприятливі для деяких, а то і всіх учасників гри, чому наочний приклад - дилема ув'язнених. Тоді у гравців була можливість зібратися разом і домовитися дотримуватись певної стратегії. Але в нашій системі у них не було ніякого способу проконтролювати виконання досягнутої угоди. Домовившись, гравці розходилися, а коли приходила їхня черга діяти, вони робили те, що максимально відповідало їхнім власним інтересам. Під впливом настільки розрізнених прагнень гравці порушували угоду про спільні дії. Щоравда, прихована загроза розриву тривалих відносин здатна підтримувати виконання домовленості, і допустима можливість комунікації за допомогою подачі сигналів. Однак значення мало саме індивідуальне дію, а будь-яка взаємна вигода досягалася тільки тоді, коли їй не загрожувало стати жертвою егоїстичності розрізнених дій окремих гравців. Такий підхід до теорії ігор відноситься до некооперативних, цей термін вказує на спосіб виконання дій, а не на те, чи стане їх результат прийнятним для всіх гравців. Знову ж таки, важливо те, що будь-яке спільне благо повинно представляти рівноважний результат розрізнених дій в подібних іграх.

Але що якщо спільні дії все ж можливі? Наприклад, учасники гри можуть зробити їх відразу ж після досягнення домовленостей, в присутності один одного. Або можуть делегувати реалізацію угоди нейтральній третій стороні або посереднику. Іншими словами, гра може бути кооперативною (знову в сенсі спільних дій). Неш моделював переговорний процес саме у вигляді кооперативної гри.

Міркування колективу, який планує реалізувати спільну угоду за допомогою спільних дій, можуть істотно відрізнятися від міркувань сукупності окремих людей, які знають, що взаємодіють стратегічно, але роблять при цьому некооперативні дії. У той час як члени другої групи будуть думати в категоріях рівноваги, а потім або радіти, або засмучуватися, в залежності від задоволеності від отриманих результатів, члени першої групи спочатку подумають про те, який результат буде прийнятним, а потім подивляться, як його досягти. Іншими словами, теорія визначає результат кооперативної гри з точки зору ряду загальних принципів або властивостей, які вважає за логічні її автор.

Неш сформулював ряд таких принципів для переговорів і довів, що вони мають на увазі єдиний результат. Ось їх приблизний опис: 1) цей результат повинен бути інваріантним, якщо шкала вимірювання виграшів змінюється лінійно; 2) він повинен бути ефективним; 3) на нього не вплине скорочення множини можливих варіантів шляхом видалення тих, які в жодному разі не будуть обрані.

Перший принцип узгоджується з теорією очікуваної корисності. Нелінійна шкала виграшів відображає зміни ставлення гравця до ризику і реальну зміну лінії поведінки: увігнута шкала передбачає неприхільність до ризику, а вигнута - схильність до ризику. Лінійна шкала, будучи проміжними варіантом, відображає нейтральність до ризику. Отже, лінійна зміна шкали виграшів не впливає на оцінку очікуваних виграшів і не позначається на отриманих результатах.

Другий принцип означає, що жодна частина наявної взаємної вигоди не повинна залишатися невикористаною. У нашому простому прикладі, де гравці А і Б ділять загальну величину *v*, це означало б, що *x* і *y* повинні давати в сумі всю наявну величину *v*, але ні в якому разі не менше *v*, тобто рішення має лежати на лінії $x + y = v$, представленої на рис. 1. У більш загальному випадку повний набір логічно можливих угод в переговорній грі, відображених у вигляді графіка на рис. 1, буде обмежений зверху і справа підмножиною угод, які не залишають невикористаною жодну частку взаємної вигоди. Це підмножина не обов'язково має розташовуватися на прямій, такій як $x + y = v$ (або $y = v - x$); воно може перебувати на будь-якої лінії в формі $y = f(x)$.

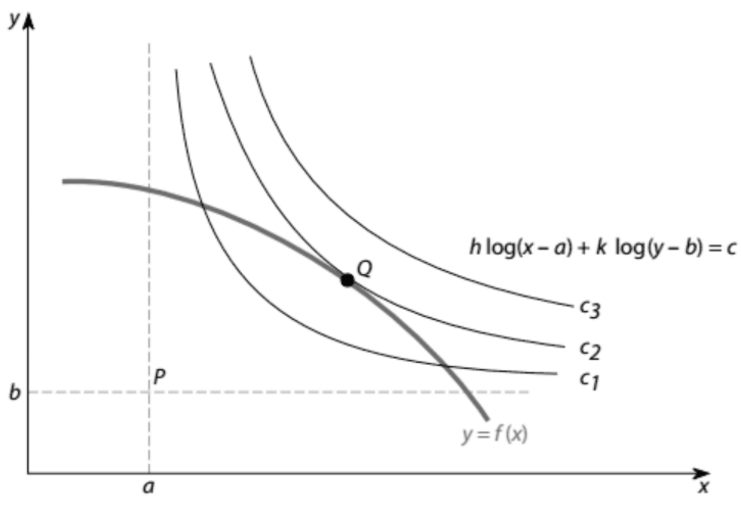


Рис. 2. Загальний вигляд розв’язку Неша для переговорної гри

На рис. 2 всі крапки над і під (тобто до «півдня» і до «заходу») кривою $y = f(x)$, представленої у вигляді жирної сірої лінії, утворюють повну множину можливих результатів. Сама крива складається з ефективних результатів: не існує можливих результатів, які включали б більше значень х і у, ніж результати на кривій *у = f (х),* а отже, невикористаної взаємної вигоди немає. У зв'язку з цим крива *у = f (х)* називається ефективною границею в переговорній задачі.

<u>Приклад.</u>

Можна проілюструвати вигнуту ефективну границю на прикладі раціонального розподілу ризику. Два фермери, функція корисності кожного з яких виражена у вигляді квадратного кореня, стикаються з ризиком того, що в рівній мірі ймовірні сприятливі або несприятливі умови забезпечать їм або 160 000, або 40 000 доларів доходу, що дасть кожному з них очікувану корисність в розмірі

$$\frac{1}{2} * \sqrt{160000} + \frac{1}{2}\sqrt{40000} = 300$$

Однак між ризиками цих двох фермерів присутній ідеальна від'ємна кореляція. У одного складаються сприятливі погодні умови, тоді як у іншого погані, а значить, їх сукупний дохід складе 200 000 доларів незалежно від того, якому фермеру пощастить з погодою. Якщо фермери домовляться, що перший з них отримає частку сукупного доходу *z*, а другий - частку доходу *(200 000 - z),* то їх значення корисності *х* і *у* відповідно складуть

$$x = \sqrt{z} \; і \; y = \sqrt{20000 - z}$$

Ми можемо описати множину можливих результатів поділу ризику за допомогою рівняння

$$x^2 + y^2 = z + (200000 - z) = 20000$$

Це рівняння описує чверть кола в першому квадранті і відображає ефективну границю переговорної задачі двох фермерів. Показник BATNA кожного фермера - це очікувана корисність 300, яку він матиме, якщо фермери не дійдуть згоди щодо поділу ризику. Підставивши дане значення в рівняння, по $300^2 + 300^2$ = 90 000 + 90 000 = 180 000 <200 000. Отже, точка, що відповідає значенню BATNA, знаходиться з внутрішньої сторони чверті кола ефективної границі.

Третій принцип також вельми цікавий. Якщо результат, який учасник переговорів в будь-якому випадку не вибрав би, виключається з розгляду, тоді яке він має значення? Це припущення тісно пов'язане з умовою незалежності від сторонніх альтернатив в теоремі про неможливість Ерроу.

Нешу вдалося довести, що кооперативний результат, що задовольняє всім трьом припущенням, можна описати у вигляді математичної задачі максимізації: виберіть такі значення x і y, які забезпечать максимум функції $(x - a)^h (y - b)^k$ за умови $y = f(x)$.

Тут *x* і *y* - результати, *a* й *b* - страхувальні виграші, а *h* і *k* - два можливих числа, що становлять у сумі 1, які аналогічні силі переговорних позицій у формулі Неша. Значення *h* і *k* не можуть бути визначені тільки за допомогою трьох вихідних припущень Неша; отже, вони залишають деяку ступінь свободи в теорії і в результатах. Насправді Неш ввів в цю задачу четверте припущення - про симетрію між двома гравцями. Воно привело до результату $h = к = 1/2$ і дозволило знайти єдине розв'язок.

На рис. 2 дано геометричне уявлення мети максимізації. Чорні лінії, позначені як c1, c2 і c3 - це ізолінії, або лінії рівня максимізованої функції; на кожній такій кривій значення $(x - a)^h (y - b)^k$ являє собою постійну величину і становить c1, c2 і c3 (де $c1 < c2 < c3$), як показано вище. Весь простір можна заповнити такими лініями, у кожної з яких своє значення константи, а у ліній, розташованих в напрямку «північного сходу», значення констант вище.

Очевидно, що найвища з можливих значення даної функції знаходиться в точці дотику *Q* лінії ефективної границі і однією з ізоліній. Місцезнаходження точки *Q* визначається тією властивістю, що лінія рівня, що проходить через *Q* дотикається до лінії ефективної кордону. Точка дотику - це загальноприйнятий спосіб представлення кооперативного рішення Неша в геометричному вигляді.

У прикладі на рис. 1 також можна вивести рішення Неша математично; для цього знадобиться диференціальне числення. Для того щоб знайти це рішення, доцільно записати $X = x - a$ й $Y = y - b$. Таким чином, X - це величина надлишку, одержуваного гравцем А, а Y - величина надлишку гравця Б. Умова ефективності результату гарантує, що $X + Y = x + y - a - b = v - a - b$, що і представляє собою загальну величину надлишку, яку ми позначимо символом S. Тоді $Y = S - X$, а також

$$(x - a)^h (y - b)^k = x^h * y^k = X^h (S-X)^k.$$

У рішенні Неша X приймає значення, що максимізує цю функцію. Елементарні обчислення говорять про те, що для визначення значення X необхідно взяти похідну цього виразу по X і прирівняти до нуля. Скориставшись правилами обчислення для пошуку похідних ступенів X і твори двох функцій X, отримаємо

$$hX^{h-1}(S-X)^k - X^h k(S-X)^{k-1} - 1 = 0$$

Виключивши спільний множник $X^{h-1}(S-X)^{k-1}$ маємо

$$H(S-X) - kX = 0$$

$hY\text{-}kX=0$

$kX = hY$

$X/k=Y/h$

І нарешті, виразивши це рівняння через вихідні змінні x і y, отримаємо $(x - a) / h = (y - b) / k$, а це і є формула Неша. Висновок: три умови Неша призводять до формули, яку ми було позначено як простий спосіб поділу надлишку в процесі переговорів.

Ці три принципи, або задані властивості, що визначають рішення Неша для кооперативних переговорів, - прості і навіть привабливі. Але при відсутності ефективного способу переконатися, що сторони переговорів почнуть дії, що передбачені в угоді, вони можуть виявитися марними. Гравець, якому вигідніше самостійно розробляти стратегію, ніж використовувати рішення Неша, може їх просто проігнорувати. Якщо третейський суддя може примусити виконати рішення, то гравець може відмовитися від його послуг. Отже, кооперативне рішення Неша буде більш переконливим при наявності альтернативної інтерпретації у вигляді рівноваги Неша в некооперативного грі з двома учасниками переговорів. Це дійсно можливо.

Переговори зі змінною загрозою

Припустимо, існує перший етап переговорної гри, на якому гравці можуть виконувати стратегічні ходи, спрямовані на маніпулювання показниками BATNA в певних межах. Після таких дій гравців на другому етапі гри з'являється кооперативний результат Неша. Гру даного типу називають переговорами зі змінною загрозою. Які маніпуляції зі значеннями BATNA відповідають інтересам її учасників?

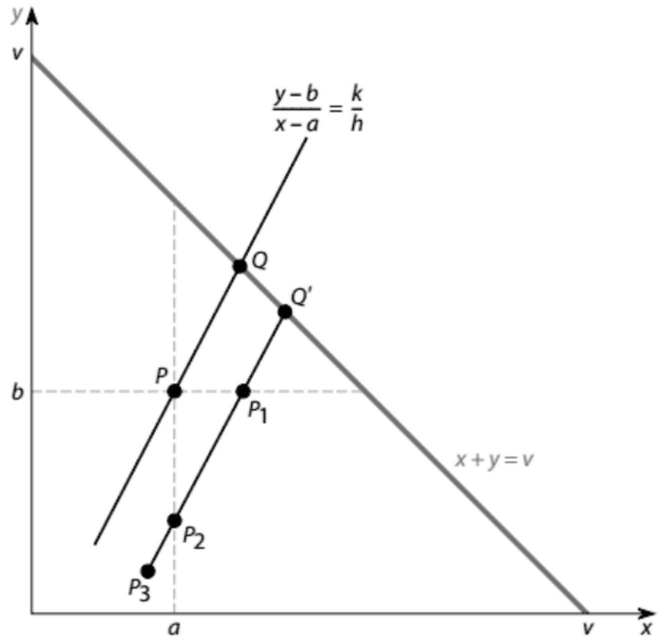


Рис.3.

На рис. 3 показані можливі результати маніпулювання BATNA. Вихідні значення страхувальних виграшів *(a і b)* - це координати страхувальної точки *P* в грі; рішення Неша в переговорній грі із такими страхувальними виграшами знаходиться в точці *Q*. Якщо гравець А зможе збільшити значення BATNA так, щоб перемістити страхувальну точку гри в позицію P_1, то рішення Неша, що починається в цій точці, призведе до результату *Q '*, що краще для гравця А (але гірше для гравця Б). Отже, стратегічний хід, який поліпшує BATNA гравця, доцільний. Наприклад, якщо, йдучи на співбесіду в іншу компанію, ви вже маєте гарну пропозицію про роботу (вищий показник BATNA), то, цілком ймовірно, отримаєте від цього роботодавця більш вигідну пропозицію, ніж при відсутності першої альтернативи.

Висновок про те, що підвищення BATNA може поліпшити кінцевий результат, цілком очевидний, але наступний етап аналізу менш зрозумілий. Виявляється,що, якщо гравець А зможе зробити стратегічний хід, який зменшить BATNA гравця Б і перемістить страхувальну точку гри в точку P_2, то рішення Неша, що починається в цій точці, призведе до того ж результату *Q '*, який був отриманий, коли гравець А збільшив свій показник BATNA настільки, що потрапив в страхувальну точку P_1. Отже, цей альтернативний тип маніпуляції також відповідає інтересам гравця А. В якості прикладу зменшення BATNA суперника уявіть ситуацію, в якій ви вже працюєте в компанії і хочете отримати підвищення. Ваші шанси зростуть, якщо ви станете незамінним для роботодавця, тобто якщо без вас у його бізнесі виникнуть проблеми. В такому випадку несприятливий результат через відсутність угоди (коли роботодавець не запропонує підвищення і ви звільнитеся з компанії) може підвищити ймовірність того, що роботодавець піде вам назустріч.

І останній, ще більш драматичний варіант розвитку подій: якщо гравець А зможе зробити стратегічний хід, що зменшує значення BATNA обох гравців настільки, що страхувальна точка гри переміститься в точку P_3, це знову ж таки призведе до того ж результату, що і внаслідок попередніх маніпуляцій. Цей хід рівносильний загрозі, яка говорить: «Це зашкодить вам більше, ніж мені».

У загальному плані для гравця А важливо перемістити BATNA в даній грі в одну з точок, що знаходяться під лінією *PQ*. Чим далі на південний схід пересунеться точка BATNA, тим краще для гравця А в якості кінцевого результату. Як завжди в разі застосування погроз, завдання постає не в отриманні низького виграшу, а в тому, щоб використовувати його ймовірність в якості важіля для досягнення більш прийнятного результату.

Можливість маніпулювати BATNA таким способом залежить від контексту. Розглянемо один наочний приклад. У 1980 році проводився страйк бейсболістів, який прийняв вельми складну форму. Гравці оголосили його під час весняних зборів, потім відновили роботу (тобто гру), коли в квітні стартував регулярний сезон, а потім знову оголосили страйк, починаючи з Дня поминання. Страйк приносить збитки обом сторонам (як роботодавцям, так і працівникам), але вони різняться. Під час весняних зборів гравці не отримують заробітну плату, а власники команд трохи заробляють за рахунок глядачів-відпускників. На початку регулярного сезону, в квітні і травні, бейсболісти отримують заробітну плату, але погода ще холодна і сезон не особливо захоплюючий, тому глядачів мало, а значить, власники команд несуть не дуже високі витрати в зв'язку зі страйком. Починаючи з Дня поминання кількість глядачів збільшується, і витрати власників команд в зв'язку зі страйком зростають, але заробітна плата, яку можуть втратити гравці, залишається незмінною. Ми бачимо, що цей двоетапний страйк досить винахідливо розроблений так, щоб максимально знизити BATNA власників команд відносно BATNA гравців.

Залишається тільки одна загадка: чому страйк взагалі було оголошено? Відповідно до теорії, всі повинні були розуміти, чим це закінчиться; якби конфлікт був врегульований на більш прийнятних для бейсболістів умовах, страйк взагалі б не знадобився. І якщо він дійсно проводиться, то це загроза, з якою щось «пішло не так». Цілком ймовірно, це можна віднести на рахунок деякої невизначеності - асиметричності інформації або балансування на грані.

Модель торга Рубінштейна

Складається враження, що завдання про торг вирішити неможливо, якщо немає терміну закінчення гри. Оригінальний метод, який дозволяє вирішити і таку задачу, розробив Аріель Рубінштейн.

У переговорній грі Рубінштейна два учасники роблять пропозиції по черзі. Кожне являє собою варіант поділу «пирога». Припустимо, розмір пирога дорівнює 1; в такому випадку пропозиція про їх розподіл буде виглядати так: *(X, 1 - X).* Вона описує, хто що отримає: якщо *X = ¾,* один гравець отримує 3/4, а інший – 1/4. Як тільки один гравець приймає пропозицію іншого, гра вважається закінченою. Однак до цього моменту гравці роблять пропозиції по черзі. Відхилення пропозиції є недешевим для гравця, оскільки воно призводить до затримки досягнення домовленості. Будь-яка домовленість, яку сторони досягнуть завтра, буде ціннішою, якщо вони зможуть домовитися сьогодні. Обидві сторони зацікавлені в негайному укладенні угоди. Тобто один долар, отриманий раніше, коштує більше, ніж той же долар, отриманий пізніше.

Перевагу має той гравець, який робить пропозицію. Розмір цієї переваги залежить від ступеня нетерпіння гравця. Ми визначаємо ступінь нетерпіння, як різницю між укладенням угоди в наступному раунді і поточному. Розглянемо приклад, в якому пропозиція робиться кожного тижня. Якщо наступного тижня один долар коштуватиме 99 центів, то залишається на руках 99% вартості. Позначимо вартість очікування змінною δ. У даному випадку δ = 0,99. Якщо $\delta \rightarrow$ 1, скажімо, δ = 0,99, це свідчить про високий ступінь терпіння; якщо δ має невелике значення, скажімо, 1/3, то очікування коштує дорого, а учасники переговорів поводять себе нетерпляче. Насправді при δ = 1/3 сторони щотижня втрачають дві третини тієї цінності, яку могли б отримати.

Якщо ступінь нетерпіння відома, можна визначити принцип поділу «пирога» між сторонами торгу на основі даних про те, яку мінімальну частку може прийняти учасник торгу і яку максимальну частку йому можуть запропонувати. Чи можливо, що мінімальна частка, яку ви можете прийняти, дорівнює нулю? Ні. Але припустимо, що це можливо, і інша сторона пропонує вам нуль. В такому випадку ви знаєте, що якщо сьогодні ви не погодитеся на нуль, а завтра настане ваша черга робити контрпропозицію, ви можете запропонувати іншому гравцеві δ - і він погодиться. Інший учасник гри прийме вашу пропозицію, оскільки йому краще отримати δ завтра, ніж чекати ще один раунд, щоб отримати 1. (Він отримає 1 тільки в разі, якщо ситуація буде розвиватися за найкращим для нього сценарієм: ви погодитеся на 0 під час двох раундів.) Отже, якщо ви знаєте, що інший гравець обов'язково прийме пропозицію δ завтра, це означає, що ви можете розраховувати на 1 - δ завтра, а значить, сьогодні вам не варто приймати нічого менше δ (1 - δ). Таким чином, ви не повинні погоджуватися на нуль ні сьогодні, ні протягом двох майбутніх раундів.

Ці міркування не зовсім відповідали дійсному стану речей в тому сенсі, що ми знайшли мінімальну частку, яку ви приймете, за умови вашої згоди на нуль під час двох раундів. Насправді нам необхідно визначити мінімальну частку, яку б ви взяли, якби це число залишалося незмінним протягом якогось періоду. Ми шукаємо таке число, при якому всі учасники гри зрозуміють, що це мінімум, на який ви можете погодитися, а значить, опинитеся в становищі, коли вам не варто приймати нічого менше цієї пропозиції.

Припустимо, мінімальна пропозиція, яку ви можете прийняти, становить L. Для того щоб визначити, чому має дорівнювати L, уявімо, що ви відхиляєте сьогоднішню пропозицію, щоб зробити контрпропозицію. Аналізуючи можливі варіанти, ви приходите до висновку, що інший гравець навряд чи розраховує на більшу частку, ніж 1 - L, коли знову настане його черга. (Він знає, що ви не приймете нічого менше L, а значить, він не отримає більше, ніж 1 - L.) Оскільки це краще, на що він може розраховувати через два раунди, завтра йому доведеться прийняти δ(1 - L).

Таким чином, розмірковуючи над тим, чи варто вам приймати пропозицію іншого гравця, будьте впевнені в тому, що, якщо відхилите його пропозицію сьогодні і запропонуйте, в свою чергу, δ (1 - L) завтра, він погодиться. Якщо ви знаєте, що у вас є можливість змусити іншого гравця прийняти пропозицію δ (1 - L) завтра, це означає, що завтра вам напевно дістанеться частка 1 - δ (1 - L).

Отже, сьогодні ви не повинні приймати пропозицію менше, ніж δ (1 - δ (1 - L)). Це дає нам наступне мінімальне значення L: L ≥ δ (1 - δ (1 - L)) або

$$L \geq \frac{\delta(1-\delta)}{1-\delta^2} = \frac{\delta}{1+\delta}.$$

Ви не повинні приймати нічого менше δ / (1 + δ), оскільки можете отримати більше, якщо почекаєте і зробите контрпропозицію, на яке інша сторона обов'язково погодиться. За цією ж логікою інший гравець також не прийме нічого менше δ / (1 + δ). Це дозволяє визначити величину максимального пропозиції, на яке ви можете розраховувати.

Позначивши буквою *M* максимальну частку, на яку ви можете розраховувати, визначимо, при якому значенні *M* ви не станете відхиляти пропозицію. Оскільки вам відомо, що інший гравець не погодитеметься на нічого менше δ / (1 + δ) в наступному раунді, ви можете отримати максимум 1 - δ / (1 + δ) = 1 / (1 + δ) в наступному раунді. Якщо це найкраще, що ви можете зробити в наступному раунді, то сьогодні вам слід прийняти пропозицію δ (1 / (1 + δ)) = δ / (1 + δ).

Маємо:$L \geq \frac{\delta}{1+\delta}$ та $M \leq \frac{\delta}{1+\delta}$.

Це означає, що мінімальна пропозиція, яку ви можете коли-небудь прийняти, становить δ / (1 + δ) і що ви завжди повинні приймати будь-яку пропозицію, дорівнює чи перевищує δ / (1 + δ). Оскільки ці значення еквівалентні, саме це ви і отримаєте. Інший гравець не запропонує вам менше, оскільки ви відхилите таку пропозицію. Він не запропонує вам і більше, оскільки ви,напевно,приймете пропозицію δ / (1 + δ).

Такий спосіб поділу «пирога» має сенс. Можна припустити, що за скорочення проміжку часу між пропозицією і контрпропозицією учасники торгу стають більш нетерплячими, тобто значення змінної δ наближається до 1. Проаналізуємо випадок, коли δ = 1. Тоді принцип поділу буде таким:$\frac{\delta}{1+\delta} = \frac{1}{2}$. У даному випадку «пиріг» буде розділений між двома сторонами порівну. Якщо очікування своєї черги нічого не варте, тоді гравець, що робить пропозицію першим, не має ніяких переваг, тому найоптимальнішим є розділити «пиріг» за принципом 50:50.

«Пиріг» взагалі зникне, якщо пропозиція не буде прийнята. Це вже гра в ультиматум. Якщо вартість домовленості, досягнутої завтра, дорівнює нулю, тоді δ = 0, а принцип поділу (0, 1) - точно такий же, як і в ультимативній грі.

Нехай має значення і що кожен випадок зволікання призводить до втрати половини «пирога», або δ = ½. Тепер принцип поділу буде таким:$\frac{\delta}{1+\delta} = \frac{1}{3}$.

Пояснимо це таким чином. Людина, що робить вам пропозицію, претендує на весь «пиріг», якого просто не буде, якщо ви скажете «ні». Це дає йому ½ «пирога» відразу ж. З половини «пирога», що залишився, ви можете отримати половину, або ¼ цілого «пирога», і ця частка буде втрачена, якщо інший гравець не прийме вашу пропозицію. Тепер, після двох раундів гри, інший гравець отримає ½, а ви - ¼ «пирога», а це значить, що ми повернулися до того, з чого починали. Таким чином, в будь-якій парі пропозицій інший гравець може отримати в два рази більше, ніж ви, що призводить до поділу «пирога» в співвідношенні 2: 1.

У нашому варіанті вирішення задачі обидва учасники гри в рівній мірі терплячі. Цей метод можна використовувати і в тому випадку, коли у двох гравців різна вартість очікування. Логічно припустити, що більш терплячий гравець отримає більшу частку «пирога». Насправді при скороченні проміжку часу між двома пропозиціями «пиріг» ділиться в співвідношенні, що відображає вартість очікування для двох гравців. Отже, якщо один гравець в два рази більш нетерплячий в порівнянні з іншим, він отримає одну третину «пирога», або половину того, що отримає інший гравець.

Пропозиції, що чергуються. Модель : спадання загальної величини

Нехай один гравець (скажімо, А) робить пропозицію, інший гравець (наприклад, Б) або приймає його, або робить зустрічну пропозицію. У разі останнього варіанту гравець А може або прийняти цю пропозицію, або зробити свою пропозицію і т. д. Таким чином, ми маємо гру з послідовними ходами і нам необхідно знайти в ній рівновагу зворотних міркувань.

Для цього слід почати з кінця і впровести зворотний аналіз. Але де саме знаходиться кінцева точка? Чому процес взаємних пропозицій взагалі повинен закінчитися? А ось ще більш резонне питання: чому він взагалі повинен початися? Чому б двом учасникам переговорів не дотримуватися своїх вихідних позицій і не стояти на своєму? Якщо вони не зможуть домовитися, це буде становити певну загрозу для обох сторін, але переваги від досягнутої угоди, швидше за все, виявляться меншими для того, хто зробить першу або більшу поступку. Цілком ймовірно, причина капітуляції одного з учасників переговорів полягає в тому, що зайве наполегливість призведе до ще більшої втрати вигоди. Ця втрата приймає одну із загальних форм. Наявний «пиріг», або надлишок, може зменшуватися з кожною наступною пропозицією. Альтернатива полягає в тому, що час має свою ціну, а нетерпіння грає свою роль, тому цінність відкладеної угоди менше.

Розглянемо наступну історію про переговори щодо зменшення «пирога». Вболівальник приходить на матч з професійного футболу (або баскетболу) без квитка і готовий заплатити 25 доларів за перегляд кожної чверті матчу. Вболівальник знаходить спекулянта, який називає свою ціну за квиток. Якщо вболівальник не готовий її заплатити, він піде в найближчий бар і подивиться першу чверть на великому екрані там. Після закінчення чверті він вийде з бару, побачить того ж спекулянта і зробить зустрічну пропозицію про ціну квитка. Якщо спекулянт не погодиться, уболівальник повернеться в бар. Після другої чверті матчу він знову вийде з бару, і спекулянт знову зробить йому чергову пропозицію. Якщо воно бутде неприйнятним для вболівальника, він повернеться в бар, вийде звідти в кінці третьої чверті і зробить ще одну зустрічну пропозицію. Вартість перегляду решти матчу знижується в міру закінчення чергової четверті.

Аналіз методом зворотних міркувань дозволяє передбачити результат цього переговорного процесу з пропозиціями, що чергуються. В кінці третьої чверті вболівальник знає, що, якщо він не купить квиток, спекулянт залишиться з маленьким аркушем паперу, що вже не представляє ніякої цінності. Отже, уболівальник може запропонувати за квиток дуже маленьку ціну, і для спекулянта це буде краще, ніж нічого. Таким чином, в разі останньої пропозиції уболівальник отримає квиток практично безкоштовно.Якщо поглянути на один період назад, ми бачимо, що в кінці другої чверті ініціатива робити пропозицію переходить до спекулянта. Але він повинен зазирнути вперед і зрозуміти, що не може розраховувати на отримання всієї вартості квитка за ті дві чверті матчу,що залишилися. Якщо спекулянт назве ціну більше 25 доларів (така вартість третьої чверті для вболівальника), уболівальник не погодиться, оскільки знає, що трохи пізніше зможе отримати квиток на четверту чверть майже безкоштовно. Стало бути, спекулянт повинен встановити ціну не вище 25 доларів. Тепер проаналізуємо ситуацію в кінці першої чверті. Вболівальник знає, що, якщо не купить квиток зараз, згодом спекулянт може розраховувати максимум на 25 доларів, а значить, 25 доларів і є ціна, яку вболівальнику слід запропонувати зараз, щоб гарантовано отримати квиток. І нарешті, ще перед матчем спекулянт може проаналізувати ситуацію і попросити за квиток 50 доларів; ця ціна включає вартість першої чверті матчу, складову 25 доларів, і вартість решти трьох чвертей, також дорівнює 25 доларам. Таким чином, уболівальник і спекулянт відразу ж вдарять по руках, і квиток дістанеться вболівальнику за 50 доларів, але щоб визначити цю ціну, знадобиться пройти весь процес аналізу методом зворотних міркувань.

Цю історію можна без зусиль уявити у вигляді більш загальних міркувань щодо переговорів між двома учасниками угоди, А і Б. Припустимо, гравець А робить першу пропозицію про поділ спільного надлишку, який ми позначимо символом v (в будь-якій валюті, наприклад у доларах). Якщо гравець Б відмовляється його прийняти, загальна наявна сума зменшується на x_1, до $(v – x_1)$, після чого гравець Б пропонує її розділити. Якщо гравець А знову відмовляється, загальна сума зменшується вже на x_2, до $(v – x_1 - x_2)$, після чого гравець А пропонує її розділити. Такий процес взаємних пропозицій триває до тих пір, поки, скажімо, після 10 раундів $v - x_1 - x_2 - ... - x_{10} = 0$, після чого гра закінчується. Як завжди в іграх з послідовними ходами, почнемо наш аналіз з кінця.

Якщо гра дійшла до того моменту, коли залишається тільки x_{10}, гравець Б може зробити останню пропозицію, згідно з якою він отримує «майже весь» надлишок, залишивши гравцеві А жалюгідний цент або щось близько того. Оскільки у гравця А вибір тільки один - або отримати цю суму, або зовсім нічого, йому слід прийняти пропозицію. Щоб уникнути складнощів з кропітким відстеженням мізерних сум, давайте позначимо цей результат так: «x_{10} гравцеві Б, 0 гравцеві А». Те ж саме зробимо і в інших (більш ранніх) раундах.

Знаючи про те, що станеться в раунді 10, переходимо до раунду 9. Тут гравець А повинен зробити пропозицію, після чого залишається $(x_9 + x_{10})$. Гравець А знає, що повинен запропонувати гравцеві Б мінімум x_{10}, інакше той відхилить пропозицію і переведе гру в раунд 10, де він зможе отримати таку велику суму. Гравець А не хоче пропонувати гравцеві Б більше. Таким чином, в раунді 9 гравець А запропонує розділити суму так, щоб йому дісталася сума x_9, а гравцеві Б - x_{10}.

Ще одним раундом раніше, коли залишається $x_8 + x_9 + x_{10}$, гравець Б запропонує такий поділ, при якому він віддасть гравцеві А x_9 і залишить собі $(x_8 + x_{10})$. Аналіз методом зворотних міркувань дозволяє зробити висновок, що в першому раунді гравець А запропонує розділити суму так, щоб залишити собі $(x_1 + x_3 + x_5 + x_7 + x_9)$ і віддати $(x_2 + x_4 + x_6 + x_8 + x_{10})$ гравцеві Б. Ця пропозиція буде прийнята.

Ці формули можна запам'ятати за допомогою простого прийому. Збудуйте гіпотетичну послідовність, в якій відхиляються всі пропозиції. (Насправді така послідовність не відповідає дійсності.) Потім складіть всі суми, які були б втрачені через відмови одного гравця. Це і є те, що отримує інший гравець в разі фактичної рівноваги. Наприклад, коли гравець Б відмовився прийняти першу пропозицію гравця А, загальний наявний надлишок зменшився на x_1 та сума x_1 стала частиною того, що отримав гравець А в рівновазі цієї гри.

Якщо у кожного гравця позитивне значення BATNA, даний аналіз необхідно дещо модифікувати з урахуванням цих значень. В останньому раунді гравець Б повинен запропонувати гравцеві А суму BATNA, рівну а. Якщо x_{10} більше а, гравцеві Б дістанеться (x_{10} - а), якщо немає, гра повинна завершитися до настання цього раунду. Тепер в раунді 9 гравець А повинен запропонувати гравцеві Б більшу з двох сум - суму (x_{10} - а), яку гравець Б може отримати в раунді 10, або суму BATNA, рівну b, яку гравець Б може отримати за межами даної угоди. Цей аналіз можна продовжити до раунду 1.

Отже, ми знайшли рівновагу зворотних міркувань в переговорній грі з пропозиціями,що чередуються, і в процесі його пошуку описали повні стратегії (вичерпні умовні плани дій), що входять до складу даного рівноваги, а саме дії кожного гравця в разі, якби гра перейшла на більш пізній етап . Насправді угоду досягається відразу ж після внесення першого речення. Пізніші етапи гри так і не наступають: вони являють собою вузли і шляхи, що знаходяться за межами рівноваги. Але, як і завжди при використанні методу зворотних міркувань, в основі вихідного дії лежить припущення про те, що гравці зробили б в цих вузлах, якби дійшли до них.

Слід зазначити ще один важливий момент: поступове спадання (кілька раундів пропозицій) забезпечує більш рівну або справедливе поділ загального виграшу, ніж різке спадання (коли допускається тільки один раунд переговорів). У другому випадку угода не буде досягнуто, якщо гравець Б відхилить перше речення гравця А; тоді відповідно до рівноваги зворотних міркувань гравець А спробує залишити собі (майже) весь надлишок, в ультимативній формі запропонувавши гравцеві Б погодитися на мізерну суму, інакше той взагалі нічого не отримає. Наступні раунди надають гравцеві Б достовірну можливість відмовитися від вельми несправедливої першої пропозиції.

Переговори з багатьох питань

Переговори про ціну між продавцем і покупцем завжди включають в себе два пункти: 1) об'єкт, який пропонується на продаж або розглядається на предмет покупки; 2) гроші. Можливість отримання взаємної вигоди з'являється в тому разі, коли цінність такого об'єкта для покупця вище, ніж для продавця, тобто коли покупець готовий віддати за даний об'єкт більше грошей, ніж продавець готовий прийняти. У такому випадку угода, досягнута в ході переговорів, вигідна обом сторонам.

Цей принцип можна застосувати і в більш загальному випадку. Міжнародна торгівля- класичний приклад. Розглянемо дві гіпотетичні країни, Фрідонію та Ілірію. Якщо Фрідонія може виробляти замість 1 паляниці 2 пляшки вина (використовуючи менше ресурсів, таких як праця і земля, в процесі випікання хліба і направивши їх на виробництво більшої кількості вина), а Ілірія може випускати замість 1 пляшки вина 1 паляницю (перерозподіляючи ресурси в зворотному напрямку), то разом вони можуть зробити більше продукції «з нічого». Припустимо, Фрідонія може випустити на 200 пляшок вина більше, якщо випікатиме на 100 паляниць менше, а Ілірія може випікати на 150 паляниць більше, якщо випустить на 150 пляшок вина менше. Такий перерозподіл ресурсів дозволить цим країнам виробляти на 50 паляниць і 50 пляшок вина більше, ніж вони могли виробляти спочатку. Ці хліб і вино і є той «надлишок», який обидві країни можуть створити, якщо домовляться про те, як його розподілити між собою. Припустимо, Фрідонія віддасть Ілірії 175 пляшок вина і отримає натомість 125 паляниць. Тоді у кожної країни буде на 25 паляниць і 25 пляшок вина більше, ніж раніше. Але існує цілий спектр варіантів обміну, що відповідають різним способам розподілу вигоди. Один крайній варіант полягає в тому, що Фрідонія може віддати всі 200 додаткових пляшок вина в обмін на 101 паляницю від Ілірії; в результаті майже вся вигода від угоди дістанеться Ілірії. З іншого боку, Фрідонія може віддати тільки 151 пляшку вина в обмін на 150 паляниць Ілірії, і тоді Фрідонія отримає майже всю вигоду від угоди. Між цими двома крайніми варіантами знаходиться область, в рамках якої обидві країни можуть вести переговори про поділ вигоди від обміну продукцією.

Загальний принцип зрозумілий. Коли під час переговорів одночасно обговорюються два або більше питання і дві сторони готові обміняти більшу кількість чогось одного на меншу кількість іншого в різних пропорціях, то вони можуть укласти взаємовигідну угоду. Взаємна вигода може бути забезпечена за допомогою обміну в співвідношенні, що знаходиться приблизно посередині між різними рівнями готовності двох сторін до обміну. Поділ вигоди залежить від вибору співвідношення, в якому буде здійснюватися обмін. Чим воно ближче до рівня готовності одного боку до обміну, тим меншу вигоду вона отримає від даної угоди.

Тепер можна побачити, як розширюються можливості для укладення взаємовигідної угоди шляхом одночасного розгляду більшої кількості питань. При цьому підвищується ймовірність виявити розбіжності між співвідношеннями оцінок двох сторін, а значить, з'являється більше перспектив для взаємної вигоди. Наприклад, якщо розглянути ситуацію продажу будинку, багато приладів і предметів меблів можуть не знадобитися продавцю в новому будинку, але зате можуть влаштовувати покупця і відповідати його смаку, а значить, представляти для нього цінність. У такому випадку, якщо не вдасться умовити продавця знизити ціну, він може хоча б погодитися включити ці предмети в вихідну ціну заради укладення угоди.

Проте збільшення кількості обговорюваних питань має свої мінуси. Якщо для вас щось є великою цінністю, ви можете побоятися виносити це питання за стіл переговорів. Вас може турбувати, що інша сторона дзможе добитися від вас значних поступок, знаючи про ваше бажання захистити такий цінний для вас предмет переговорів. У гіршому випадку нова тема обговорення в ході переговорів може забезпечити одній стороні можливість застосувати загрозу, яка знизить BATNA іншого боку. Наприклад, країна, яка веде дипломатичні переговори, може виявитися в уразливому становищі в результаті введення економічного ембарго, тому вона вважала за краще б розглядати політичні та економічні питання окремо.

Переговори за участю багатьох сторін

Переговори з одночасною участю декількох сторін також можуть сприяти досягненню угоди, оскільки замість укладення двосторонніх угод переговорники можуть знайти коло взаємних поступок. У цій ситуації міжнародна торгівля - найбільш показовий приклад. Припустимо, Сполучені Штати ефективно вирощують пшеницю, але менш продуктивні у виробництві автомобілів; у Японії є високоякісні автомобілі, але немає нафти, а у Саудівській Аравії багато нафти, але немає можливості вирощувати пшеницю. Ведучи переговори попарно, ці країни досягли б набагато меншого, а разом можуть укласти взаємовигідну угоду.

Як і переговори з багатьох питань, переговори за участю декількох сторін несуть певні ризики. Скажімо, в нашому прикладі угода зводилася б до наступного: США відправляють обумовлену кількість пшениці в Саудівську Аравію, та надає обумовлений обсяг нафти Японії, та, в свою чергу, відправляє відповідну кількість автомобілів Сполученим Штатам. Але уявімо, що Японія не виконає свою частину договору. Саудівська Аравія не може прийняти заходів проти

Сполучених Штатів, оскільки вона не пропонує їм нічого, що могла б не надавати. Єдине, що може зробити Саудівська Аравія, - це порушити умови угоди і не відправляти нафту в Японію. Отже, гарантувати виконання багатосторонньої угоди вельми проблематично. Генеральна угода з тарифів і торгівлі в період з 1946 по 1994 рік, а в подальшому Світова організація торгівлі дійсно зіткнулися з великими труднощами щодо виконання угод та накладення стягнень на країни, що порушують встановлені правила.

Глава 6. Системи голосування

Теорія ігор і системи голосування

Коли ми говоримо про теорію ігор у застосуванні до голосування, природно виникає питання: А в чому ж тут гра? Відповісти на це питання важливо для подальшої побудови моделі, яка (звичайно) буде спрощенням реального життя, і висновків, які можна зробити на її основі.
Для визначення гри необхідно задати три речі: гравців, їх стратегії і їх виграші. На роль гравців виникає дві можливості: кандидати та виборці. Ідеальною була б модель, де були б і ті і інші, але розв'язати таку модель буде вже неможливо. Модель з кандидатами-гравцями пов'язана з теоремою про медіанного виборця (там виборці вважаються розподіленими вздовж певної осі, наприклад, праві - ліві). Інший підхід полягає у розгляді системи з точки зору виборців. Кандидати тут вважаються фіксованими альтернативами, які вибирають гравці. Їх вплив - це їх голос, поданий за певного кандидата (або ранжування всіх кандидатів). Результат буде залежати від обраної системи голосування, а виграш гравця - це перемога кандидата, який йому більше подобається.

Приклад. Шестеро виборців (їм відповідають стовпці) мають наступні уподобання щодо напоїв:

	виборці					
	1	2	3	4	5	6

1	чай	кава	чай	кава	сік	сік
2	кава	чай	сік	сік	кава	чай
3	сік	сік	кава	чай	чай	кава

Тут число - порядковий номер виборця. В усіх інших прикладах - кількість виборців.

Як їм вибрати один напій? Або, більш загально, як агрегувати уподобання групи людей? В ідеалі ми шукаємо функцію, яка відображає всі уподобання в один вектор-результат, наприклад:

сік
чай
кава

Якщо ми говоримо про вибори, то в даному конкретному прикладі перемагає один варіант, який стоїть на першому місці - тобто сік. Якщо ж нас цікавить весь вектор, то в загальному формулюванні така функція називається функцією соціального вибору.
У цьому випадку виборці 5 і 6 найбільш задоволені - виграла альтернатива, яка є їх першим вибором. Виборці 3 і 4 помірно задоволені - виграв їх другий вибір. Виборці 1 і 2 зовсім незадоволені. Будемо вимірювати задоволеність-незадоволеність цілими числами, наприклад виграші в даній ситуації будуть такі:

1 і 2 - 0 балів
4 і 3 - 1 бал
6 і 5 - 2 бали

Отже, виникає природна постановка гри. Гравці - виборці, дії - вибір кандидата у бюлетені, виграш - місце переможця в особистих уподобаннях. Чим вище, тим краще. І тут виникає дві проблеми:
Зрозуміло, що результат буде залежати від системи голосування, тобто механізму агрегації. Очевидно, що деякі системи кращі за інших, яка з них найкраща для конкретного випадку або взагалі? І які властивості має хороша система?
Найпростішою стратегією виборців є "щире голосування", тобто голосування за найвищу можливу альтернативу зі своїх уподобань. Однак не все так просто, іноді гравці можуть забезпечувати собі кращий кінцевий результат проголосувавши за іншу альтернативу. Це вимагає точного знання уподобань інших та системи голосування і називається "стратегічним голосуванням".
NB Далі ми розглянемо "ідеальний світ", де виборці голосують щиро, тобто вибирають свій перший можливий варіант. Це зроблено з метою продемонструвати принципові можливості систем голосування і поведінки виборців.

Дві альтернативи

Випадок двох можливих альтернатив найпростіший.
Нагадаємо, що Абсолютна більшість - це правило, за яким перемагає той, хто набрав більше половини перших місць у уподобаннях виборців.
І результат, який був отриманий в 1952 році Кеннетом Меєм звучить так (у спрощеній формі):
Для ситуації двох альтернатив абсолютна більшість є єдиною системою, яка забезпечує наступні властивості:

- вона відноситься до всіх виборців однаково;
- вона відноситься до альтернатив однаково;
- вона монотонна: якщо один з виборців забере свій голос у програвшого кандидата і передасть його переможцю, то результат буде той самий.

Якщо кількість виборців непарна, то вона завжди забезпечує переможця. З практичної точки зору для великої кількості виборців вона забезпечує переможця і для парної кількості, оскільки точна рівність голосів має ймовірність дуже близьку до 0. В принципі правило абсолютної більшості використовували дуже давно, грецька демократія загалом була побудована на цьому правилі (з певними обмеженнями).

Три і більше альтернативи

Теорема дала надію що такий самий трюк можна провернути і для більшої кількості альтернатив (тобто сформулювати систему властивостей і виділити

виборчі процедури, які їм задовольняють). Але виявилось, що для трьох і більше альтернатив метод абсолютної більшості просто далеко не завжди визначає переможця. Це явно не те, що б ми хотіли від виборчої системи. Отже, властивість 1: **Виборча система має завжди визначати переможця**. Найближча до абсолютної більшості (для 3 і більше альтернатив) є відносна більшість.
Відносна більшість це правило, за яким перемагає той, хто набрав більшість перших місць у уподобаннях виборців. Відносна більшість теж практично завжди визначає переможця. Чому ж не використовувати її?

Розглянемо новорічний приклад:

	виборці (кількість)		
	2	**2**	**3**
1	олів'є	шуба	холодець
2	шуба	олів'є	шуба
3	холодець	холодець	олів'є

Переможця за абсолютною більшістю не існує. За системою відносної більшості перемагає холодець.
Але виявляється, що ця система вразлива до численних парадоксів:
Парадокс абсолютного лузера. Абсолютна більшість (4 з 7) вважають холодець найгіршим вибором!
Залежність від нерелевантних альтернатив. Якщо виявиться, що оселедця немає і шубу приготувати неможливо, то переможе олів'є.
Парадокс переможця за Кондорсе (про цю систему буде в наступній частині). Якщо ми спробуємо проголосувати пари альтернатив, то отримаємо наступний результат: холодець - шуба (3 виборців вважають, що холодець краще (третій стовпчик таблиці), виборці з першого і другого стовпчика вважають, що шуба краще - в сумі це 4 голоси. Отже 3 проти 4, перемагає шуба), шуба - олів'є (5 vs 2), холодець - олів'є (3 vs 4). Тобто шуба попарно перемагає будь-яку іншу альтернативу (є переможцем за Кондорсе), але програє в результаті.
Також ця система вразлива до **стратегічного голосування**. Якщо двоє перших виборців вирішать: Та ну його те олів'є, ми будемо голосувати за шубу, щоб тільки не холодець. Тобто відхилення від щирого голосування (за перший вибір)

дає їм більший виграш.
Ну і звичайно можлива ситуація, коли невелика група вибирає переможця, оскільки інші поділені між конкуруючими кандидатами.
Відносна більшість з двома турами
Логічно запитати, а давайте якось "підкрутимо" цю відносну більшість щоб було краще. Наприклад, візьмемо відносну більшість з другим туром - дуже знайома нам система. Але вона теж вразлива до великої кількості парадоксів і маніпуляцій (тут опишемо лише декілька).

Приклад. Вибори на острові Скарбів.

	3	2	4	2	4	2
1	Доктор Лівсі	Доктор Лівсі	Капітан Смолет	Капітан Смолет	Джим	Джим
2	Капітан Смолет	Капітан Смолет	Доктор Лівсі	Джим	Доктор Лівсі	Капітан Смолет
3	Джим	Джим	Джим	Доктор Лівсі	Капітан Смолет	Доктор Лівсі

Доктор Лівсі є переможцем Кондорсе. Дійсно:
Доктор Лівсі - Джим (9 : 8)
Доктор Лівс - Капітан Смолет (9 : 8)
Але в другий тур проходять (рахуємо перші місця) Джим і Капітан Смолет.
В другому турі розгромно перемагає Капітан (11 : 6) (**Парадокс переможця за Кондорсе**)
А от якщо Джим зніме кандидатуру, то все вирішиться в першому турі.
Доктор Лівсі - Капітан Смолет (9 : 8). (**Залежність від нерелевантних альтернатив**)
Найбільш вражає те, що ця система не є **монотонною**. Припустимо, що двоє останніх виборців вирішують збільшити свою підтримку Капітану і ставлять його на перше місце. Як зміниться результат?

	виборці (кількість)					

	3	2	4	2	4	2
1	Доктор Лівсі	Доктор Лівсі	Капітан Смолет	Капітан Смолет	Джим	Капітан Смолет
2	Капітан Смолет	Капітан Смолет	Доктор Лівсі	Джим	Доктор Лівсі	Джим
3	Джим	Джим	Джим	Доктор Лівсі	Капітан Смолет	Доктор Лівсі

Ну тепер в другий тур проходять вже Доктор Лівсі і Капітан Смолет, тому Доктор Лівсі стає переможцем. Ще раз: ми додали голосів переможцю, а він в результаті програв!
Отже, додамо у перелік бажаних властивостей
властивість 2. Монотонність (М).
властивість 3. Переможець за Кондорсе (ПК). Якщо є єдиний переможець попарних голосувань, то він має бути переможцем.
властивість 4. Незалежність від нерелевантних альтернатив (ННА)

Парування з вибуванням

Парування з вибуванням застосовується, наприклад, в американському конгресі при розгляді законопроектів. Існує чіткий порядок, який визначає як проходить законопроект. Для такої системи можливий парадокс другорядного переможця - це ситуація, коли результатом голосування є альтернатива, яку всі вважають гіршою за іншу. Звучить дивно?
Припустимо, що троє учасників зібрались випити і вибирають між чотирма варіантами. Їх відношення до них задається так:
Перший: горілка < пиво < коньяк < вино
(тобто вино на першому місці, коньяк на другому і т.д.)
Другий: пиво < коньяк < вино < горілка
Третій: коньяк < вино < горілка < пиво
І треба швидко знайти прийнятний для всіх варіант. Вони вирішують голосувати альтернативи попарно, відкидаючи ті, які набрали меншість голосів. Кожен голосує щиро, у відповідності до свого відношення.

Спочатку вони голосують вино чи горілка. Двоє вважають, що горілка краще за вино, тому вино відпадає.
Далі горілку голосують проти пива. Двоє вважають, що пиво краще за горілку, тому залишається пиво.
Нарешті пиво проти коньяку. Двоє вважають, що коньяк краще, отже всі йдуть пити коньяк.
Але чекайте, ВСІ троє насправді думають, що вино краще за коньяк! Виходить, що запропонована система голосування не змогла вибрати альтернативу, яку всі б хотіли більше ніж отриманий результат.
Властивість яка порушується тут називається **Парето оптимальність**. Це п’ята властивість яку б ми хотіли бачити в ідеальній системі голосування.

Історичний відступ. Цікаво, що хоча абсолютна більшість є для нас очевидним вибором, до греків зазвичай застосовувалось одностайне схвалення. Ну дійсно, адже якщо за вождя або царя проголосував 51 відсоток, це ж значить, що 49 відсотків - проти? І що з ними робити тоді? Тому при оголошенні нового лідера схвалення відбувалось бряцанням мечей по щитам, або схвальними вигуками, щоб зробити атмосферу повної підтримки. Якщо ж якась група осіб виступала проти, то після коротких передвиборчих процедур, переможці викреслювали невдах зі списків виборців, змивали кров і проводили переголосування.
Слід зазначити, що це досить звична річ для математики, коли при узагальненні на більшу розмірність частина властивостей втрачається. У цьому разі перед дослідником виникає декілька можливих варіантів, кожен з яких зберігає щось важливе з попереднього методу. Проблема в тому, які ж властивості зберегти? Яка властивість найважливіша для нас?

Система Кондорсе

Після Греції і Риму наступний бурхливий розвиток систем голосування стався у передреволюційній Франції. Саме тоді Марі Жан Антуан Ніколя де Каріта, маркіз де Кондорсе (або просто Ніколя Кондорсе) опублікував в 1784 році есе про теорію виборів. Кондорсе був визнаним математиком, членом французької академії наук (і інших), автором трактатів з інтегрування. Кондорсе також дуже переймався питаннями справедливості і моралі, писав памфлети і публіцистичні статті. Вважається, що він був першим, хто почав застосовувати математику для аналізу суспільних процесів. Його робота була відповіддю на ідею виборчої системи Борда (про нього далі), яка була опублікована трохи раніше.

Марі Жан Антуан Ніколя де Каріта, маркіз де Кондорсе

Пропозиція Кондорсе полягала у використанні переваг абсолютної більшості: потрібно просто запропонувати до голосування всі можливі пари альтернатив і спитати виборців про їх відношення до кожної. Альтернатива, яка переможе в усіх парах, стає очевидним переможцем.
Розглянемо приклад про напої без останнього виборця.

	виборці				
1	чай	кава	чай	кава	сік
2	кава	чай	сік	сік	чай
3	сік	сік	кава	чай	кава

Кожен стовпець відповідає одному виборцю.
Для обчислення створимо всі можливі пари:
чай - кава;
чай - сік;

сік - кава.
Тепер кожну пару потрібно проголосувати.
Чай вище за каву у 2 виборців і нижче у 3, тобто рахунок у парі чай - кава 3:2.
Чай вище за сік у 3 виборців і нижче у 2, тобто рахунок у парі чай - сік 3:2.
Сік вище за каву у 2 виборців і нижче у 3, тобто рахунок у парі сік - кава 2:3.
В результаті чай перемагає в усіх парах, тому він має бути оголошеним переможцем. Це суть ідеї Кондорсе. Цей метод, як це часто буває, не був придуманий Кондорсе, він описаний ще в трудах Миколи Кузанського (1401 - 1464) в контексті виборів германських монархів. Заслуга Кондорсе в іншому: він сформулював проблему, яка отримала назву парадокс Кондорсе.
Розглянемо приклад.
Нехай є рада (міста, села, області), яка ухвалює рішення щодо розподілу коштів. І склад ради такий: Ліва партія 3 місця, Центристи 4 місця, Права партія 5 місць. Є три можливих напрямки фінансування: здоров'я, безпека та освіта. У кожної партії є своє бачення важливості цих напрямків:

пріоритет	ліві (3 голоси)	центр (4 голоси)	праві (5 голосів)
1	освіта	здоров'я	безпека
2	здоров'я	безпека	освіта
3	безпека	освіта	здоров'я

Тобто праві вважають, що найперше потрібно фінансувати безпеку, потім освіту і здоров'я в останню чергу.
Очевидно, якщо поставити всі альтернативи на одне голосування (відносна більшість), то переможе безпека (5 голосів), в той же час 7 депутатів (більше половини) вважають, що здоров'я важливіше за безпеку, просто вони не можуть дійти згоди, фінансувати освіту чи здоров'я.
Застосуємо ідею Кондорсе, для цього утворимо пари.
Безпека перемагає освіту (9 : 3), і потім програє здоров'ю (7 : 5).
Освіта перемагає здоров'я (8 : 4).

Тобто переможця за Кондорсе не існує, але це півбіди.

Виникає циклічна структура як у грі камінь-ножиці-папір. Взагалі виходить, що порушується транзитивність “сили” альтернатив:
здоров’я перемагає безпеку
безпека перемагає освіту
освіта перемагає здоров’я
При цьому всі уподобання окремих виборців є транзитивними! Тобто кожен з них окремо може визначити, що найкраще, а група (з таким правилом вибору) - вже ні.
Нагадую, що транзитивність - це властивість відношення (або системи уподобань), така, що якщо А краще за Б, а Б краще за В, то А краще за В.
Наприклад, відношення “більше” для дійсних чисел транзитивне. А відношення підлеглості у феодалізмі не завжди (оце саме “васал мого васала - не мій васал”).
Це мабуть найбільш важлива ідея, сформульована Кондорсе: при застосуванні правила абсолютної більшості для визначення переможця у попарних “змаганнях” для більш як двох альтернатив уподобання групи втрачають транзитивність і виникає парадокс Кондорсе (навіть у дуже простих ситуаціях для трьох альтернатив).

Реальні випадки парадоксу Кондорсе

Чи зустрічається парадокс Кондорсе у сучасному житті? (Спойлер: теоретично так, але практично досить рідко). Випадки появи цього парадоксу в американському політичному процесі є джерелом публікацій і суперечок. Розглянемо один з них.
Процедура ухвалення нового закону в американському Конгресі складна і формалізована. Один або декілька законів об’єднуються в білль, який передається на розгляд відповідному комітету. Далі депутати можуть подавати поправки до білля, поправки до існуючих поправок, альтернативний білль і поправки до альтернативного білля. Таким чином, протягом процедури розгляду в залі можливо ШІСТЬ різних потенційних законів: статус кво (те що зараз), рекомендований комітетом білль, білль з поправкою, білль з поправленою поправкою, альтернативний білль, альтернативний білль з поправкою.
Процедура вимагає голосувати їх у певній послідовності: третій варіант проти четвертого, потім п’ятий проти шостого. Потім переможці паруються, і білль, що отримав підтримку, голосується проти статус кво, переможець стає новим статусом кво.
Така система дає можливість спробувати впливати на процес ухвалення за допомогою “вбивчої поправки”, тобто поправки, яка створює парадокс

Кондорсе. Для цього потрібно виконання трьох умов:
Білль, що пропонується, перемагає статус кво
Поправка перемагає оригінальний білль
Поправка програє статусу кво
Досить рідкісне поєднання факторів, але вважається, що “вбивчі поправки” існують, наприклад, в історії американського Конгресу їх нараховують до десяти (цілі публікації присвячені пошуку таких ситуацій).
Одна з найбільш яскравих це Поправка Пауела (1956 рік). Президент Ейзенхауер зібрав 1.5 мільйона доларів (на той час значні кошти) на підтримку місцевих шкіл по усій країні. Вважалося, що білль має пройти, як ніж крізь масло: хто буде голосувати проти допомоги школам? Але Пауелл запропонував поправку, яка відсікала школи з сегрегацією від допомоги. Мотивація була наступна: південні штати не хочуть припиняти свою практику, отже федеральні кошти не повинні це підтримувати. Пауелл сам був афро-американцем і демократом. Він очолював комітет з освіти і висував цю поправку до всіх законів, що стосувались коштів федерального бюджету.

Адам Клейтон Пауелл молодший

Його поправка розколола конгрес. Частина республіканців і північних демократів голосували за неї (і цього вистачило для того, щоб вона вибила оригінальний білль), всі південні демократи були проти. Але потім білль з поправкою не отримав підтримки проти статус кво і загинув.

Система Борда

Найпринциповіший науковий суперник Кондорсе, Жан-Шарль шевальє де Борда був класичним вченим того часу: інженер, фізик, математик, геодезист і морський офіцер. Можливо, вершиною його діяльності було головування в комісії, де зібрались такі знаменитості: Лавуазьє, Кондорсе, Лаплас, Монж, Кулон та Лагранж. Мета комісії була стандартизувати систему вимірів. І саме Борда запропонував схему виміру і назву “метр”. Взагалі Борда був більш інженерно-орієнтованим, тому він хотів привнести у вибори точність чисельних методів.

Жан-Шарль шевальє де Борда

Проблема, яку хотів розв’язати Борда, називається розщеплення голосів, тобто ситуація з прикладу:

		виборці (кількість)		
		2	2	3
n - 1	1	олів’є	шуба	холодець
n - 2	2	шуба	олів’є	шуба
n -3	3	холодець	холодець	олів’є

Ми вже знаємо, що переможець за системою відносної більшості - холодець (3 голоси). Це сталось тому, що більша група виборців (4 голоса) поділена (розщеплена) між іншими альтернативами порівну.
У 1770 році Борда винайшов систему голосування, відому як правило Борда, і ця система до теперішнього часу залишається однією з самих популярних серед систем виборів у всьому світі. Згідно з цим методом результати голосування виражаються у вигляді числа балів, які набрано кожним з кандидатів.
Кожен виборець створює перелік: яка альтернатива на першому місці, яка на

другому і т.д. Якщо у нас є *n* альтернатив, то за кожне перше місце альтернатива отримує *n* - 1 балів. За кожне друге *n* - 2 бал і т.д. За кожне останнє - 0 балів.
За системою Борда:
олів’є отримує 2 перших місця, 2 других місця і 3 третіх місця, тобто 2*2 + 2 = 6 балів.
шуба отримує 2 перших місця, 5 других місць, тобто 2*2 + 5 = 9 балів.
холодець отримує 3 перших місця, 5 останніх місць, тобто 3*2 = 6 балів.
Перемагає шуба (і вона є також переможцем за Кондорсе для цього прикладу).
Якщо у нас є дві альтернативи, то система Борда - це те саме, що і абсолютна більшість. Для більшої кількості альтернатив вона дозволяє повніше відобразити відношення до всіх кандидатів, а не тільки до першого місця. Це страхує від появи кандидата, який не подобається багатьом, але має підтримку достатньої групи для перемоги відносною більшістю за умов розщеплення голосів між іншими. Також вона проста в обчисленні, набагато швидша за голосування всіх пар (уявіть, якщо альтернатив більше 10). В 1784 році ця система була затверджена для виборів нових членів Академії Наук.

Як і система Кондорсе, система Борда була придумана до нього. Є відомості, що вона застосовувалась в римському Сенаті в 2 ст. н.е. Пізніше ця система і система Кондорсе обговорювались в трактаті каталонського вченого Рамона Лулського “Мистецтво виборів” (1299).

Однак у цієї системи був суттєвий недолік, який Борда не помітив. У 1785 році маркіз де Кондорсе відмітив, що правила Борда допускає маніпуляцію. Давайте розглянемо конкретний приклад. Припустимо, вибирається галузь для позачергового додаткового фінансування і депутати формують список пріоритетів.

	кожен стовпець - один депутат						
3	армія	медицина	культура	армія	медицина	культура	армія
2	наука	армія	медицина	наука	армія	медицина	наука
1	культура	наука	армія	культура	наука	армія	культура
0	медицина	культура	наука	медицина	культура	наука	медицина

За системою Борда результат наступний:
Армія 3*3 + 2*2 + 2 = 15 балів (3 перших місця, 2 других місця, 2 третіх місця)
Медицина 2*3 + 2*2 = 10 балів (2 перших місця, 2 других місця)
Культура 2*3 + 3 = 9 балів (2 перших місця, 3 третіх місця)
Наука 3*2 + 2 = 8 балів (3 других місця, 2 третіх місця)
Також можна зазначити, що армія - переможець за відносною більшістю.
Переможця за Кондорсе немає.
Але тепер припустимо, що внаслідок якихось подій потреба в додатковому фінансуванні армії пропадає і вона зникає з цього переліку. Логічно припустити, що перше місце перейде до медицини?
Проаналізуємо.

	кожен стовпець - один депутат						
2	наука	медицина	культура	наука	медицина	культура	наука
1	культура	наука	медицина	культура	наука	медицина	культура
0	медицина	культура	наука	медицина	культура	наука	медицина

Медицина: два перших місця + два других місця + три третіх місця = 6 балів (для трьох альтернатив перше місце дає 2 бали)
Культура: два перших місця + три других місця + два третіх місця = 7 балів
Наука: три перших місця + два других місця + два третіх місця = 8 балів
І наука перемагає, хоча вона і була остання в попередньому раунді! (це мрії звичайно).
Цей парадокс має назву парадокс неявки. Система Борда також вразлива до деяких інших парадоксів, але є і інша причина, яка зруйнувала використання цієї системи. Цією системою дуже просто маніпулювати: потрібно просто розташовувати свої уподобання не щиро, а “топити” найбільшого конкурента на найнижчу позицію.
Розглянемо модифікований приклад:

	виборці (кількість)	
	4	3
n - 1	олів'є	шуба
n - 2	шуба	олів'є
n - 3	холодець	холодець

Тут всі не люблять холодець, у нього 0 балів. За системою Борда:
олів'є отримує 4*2 + 3 = 11.
шуба отримує 3*2 + 4 = 10.
Тобто олів'є перемагає, якщо все чесно.
Але припустимо, що 3 останніх виборці, знаючи уподобання інших, поставили олів'є на останнє місце. В цьому разі:
олів'є отримує 4*2 = 8.
шуба отримує 3*2 + 4 = 10.
холодець отримує 3.
Перемагає шуба, і це настільки просто, що де б не застосовували цю систему, люди починали поводити себе цілком однотипно - топити найбільших конкурентів. Це сталося і на виборах нових академіків у Франції. Коли Борда повідомили про цю особливість, він вигукнув свою знамениту фразу: "Моя система призначена лише для чесних!". У 1800 році в Академію Наук завітав перший консул Наполеон Бонапарт. Йому вистачило 5 хвилин на ознайомлення і перше ж його рішення заміняло систему Борда на абсолютну більшість (якщо У 1950-х економіст Кеннет Ерроу зібрався вибрати один, найкращий метод голосування, одні вибори, щоб управляти всіма. В результаті він довів, що ідеального методу не існує. Парадокс Ерроу, за який він отримав Нобелівську премію в 1971, говорить, що за межами вибору більшістю голосів з двох кандидатів, не існує методу для точного визначення вибору більшості.

У 1950-х економіст Кеннет Ерроу зібрався вибрати один, найкращий метод голосування, одні вибори, щоб управляти всіма. В результаті він довів, що

ідеального методу не існує. Парадокс Ерроу, за який він отримав Нобелівську премію в 1971, говорить, що за межами вибору більшістю голосів з двох кандидатів, не існує методу для точного визначення вибору більшості.

Кеннет Эрроу

Нехай є $N \geq 2$ виборців, які голосують за $n \geq 3$ кандидатів. У кожного виборця є упорядкований список альтернатив. Система виборів – функція, яка перетворює набір з N таких списків (профіль голосування) у загальний упорядкований список.

Система виборів може мати такі властивості:

універсальність (для довільного профілю голосування існує результат – упорядкований список з n альтернатив;

повнота (система голосування може давати в якості результата всі n! перестановок альтернатив);

монотонність (якщо у всіх N списках деяка альтернатива x залишається на місці або піднімається вище, а порядок інших не зміниться, то в загальному списку x повинен або залишиться на місці, або піднятися);

відсутність диктатора (нема виборця, уподобання якого визаначало б результат виборів незалежно від уподобань інших виборців);

незалежність від сторонніх альтернатив (якщо профіль колосування зміниться так, що альтернативи x та y в усіх N списках залишаться у тому ж порядку, то не зміниться їх порядок і в остаточному результаті.

Теорема (1951 р.) *Для $N \geq 2$ та $n \geq 3$ не існує системи голосування, яка б відповідала б усім 5 умовам.*

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. J.C.C. McKinsey. To the theory of games. – The RAND Corporation, NY, 1952.

2. J. Osborne, A. Rubinstein. A Course in Game Theory. – The MIT Press, Cambridge, Massachusetts; London, England, 1994.

3. V. Mazalov. Mathematical Game Theory and Applications. – John Wiley & Sons Ltd, UK, 2014.

4. R. Isaacs. Differential Games. – Dover Publications, NY, 1999.

5. Chikrii A.A. Conflict-Controlled Processes. – Springer Science & Business Media, 2013.

6. R. Gibbons. Game theory for applied economists. – Princeton Univ. Press, 1992.

7. H. Moulen. Game Theory for the Social Sciences, NYU Press, 1986.

8. Барановська Л.В., Медведєв М.Г. Ігрові методи моделювання економічних систем. Навч.посібник. – К.: Вид-во Європ.ун-ту, 2002. – 116 с.

9. Дж. Мак-Кинси. Введение в теорию игр. – М.: Гос. Изд-во физико-математической литературы, 1960. – 422 с.

10. Захаров А.В. Теория игр в общественных науках. - М.: НИУ-ВШЭ, 2013. – 198 с.

11. Данилов В.И. Лекции по теории игр. – М.: Российская экономическая школа, 2002. – 140 с.

12. Дж. Фон Нейман, О. Моргенштерн. Теория игр и экономическое поведение. – М.: Наука, 1970. – 709 с.

13. Авинаш Диксит, Барри Нейлбафф. Теория игр. Искусство стратегического мышления в бизнесе и жизни. – М.: Манн, Иванов и Фербер, 2015. – 464 с.

14. Айзекс Р. Дифференциальные игры. – М.: Мир, 1968. – 480 с.

15. Akerlof, George A. "The market for “lemons”: Quality uncertainty and the market mechanism." Uncertainty in Economics. 1978. 235-251.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ:

https://bit.ly/3NMqO35

ЗМІСТ