МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

ТЕОРІЯ АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ

СУЧАСНА ТЕОРІЯ КЕРУВАННЯ

ЛАБОРАТОРНИЙ ПРАКТИКУМ

*Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для студентів, які навчаються
за спеціальністю 151 «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології»,
освітньою програмою «Технічні та програмні засоби автоматизації»*

Київ

КПІ ім. Ігоря Сікорського

2022

Теорія автоматичного керування. Сучасна теорія керування: Лабораторний практикум [Електронний ресурс] : навч. посіб. для студ. спеціальності 151 «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології» / КПІ ім. Ігоря Сікорського; уклад.: А. О. Данькевич, В. С. Цапар – Електронні текстові дані (1 файл: 1,21 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2022. – 30 с.

Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського (протокол No 3 від 01.12.2022 р.) за поданням Вченої ради Інженерно-хімічного факультету (протокол No 9 від 26.09.2022 р.)

Електронне мережне навчальне видання

ТЕОРІЯ АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ
МЕТОДИ СУЧАСНОЇ ТЕОРІЇ КЕРУВАННЯ
ЛАБОРАТОРНИЙ ПРАКТИКУМ

Укладачі	*Данькевич Андрій Олександрович*, асистент *Цапар Віталій Степанович*, канд. тех. наук, доцент.
Відповідальний редактор	*Жученко Анатолій Іванович*, завідувач кафедри «Автоматизація хімічних виробництв», доктор технічних наук, професор
Рецензент	*Гулієнко Сергій Валерійович*, к.т.н., доцент кафедри «Машин та апаратів хімічних і нафтопереробних виробництв» інженерно-хімічного факультету КПІ ім. Ігоря Сікорського

Запропонований навчальний посібник містить матеріал для проведення лабораторного практикуму з теорії автоматичного керування в задачах дискретного керування технологічними об'єктами, що представлені у просторі станів. Наведено методи розрахунку параметрів об'єкту та побудови їх перехідних характеристик у просторі станів, що в подальшому використовуються для синтезу систем керування з регуляторами стану та для дослідження на якість даних систем при різних параметрах налаштування.

Призначений для студентів спеціальності «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології» усіх форм навчання.

ЗМІСТ

ВСТУП

Мета роботи – вивчення методу простору станів як одного із широко вживаних методів аналізу та синтезу автоматичних систем керування.

До переваг цього методу належать такі:

1) формулювання математичної моделі досліджуваного об’єкта у вигляді рівнянь у просторі станів є зручнішим для реалізації її на цифрових ЕОМ;

2) можливість уніфікувати зображення цифрових систем з різними типами квантування;

3) уніфікація математичного опису як одновимірних, так і багатовимірних систем керування;

4) дослідження нелінійних та нестаціонарних систем.

Виконуючи лабораторні роботи, студенти зможуть опанувати мегоди аналізу та синтезу автоматичних систем керування, математичний опис яких надано у вигляді рівнянь у просторі станів.

Предмет дослідження - одновимірний об'єкт керування (ОК), який має один вхід і один вихід. Його структурну схему показано на рис.1.

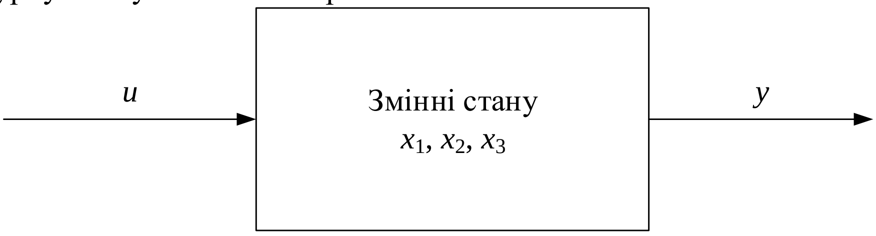

Рис.1. Структурна схема об’єкта керування

Передатна функція ОК має вигляд

$$W(s) = \frac{c}{(s+a)(s+b)(s+d)}. \qquad (1)$$

Числові значення параметрів передатної функції об'єкта студент вибирає залежно від варіанта з таблиці. Номером варіанта є номер студента у списку академічної групи.

Варіанти завдань

Номер варіанта	*a*	*b*	*d*	*c*	Номер варіанта	*a*	*b*	*d*	c
1	1,0	2,0	3,0	1,0	**16**	1,5	2,0	4,0	1,0
2	1,0	2,0	4,0	2,0	**17**	2,0	3,5	5,0	2,0
3	0,1	0,2	0,4	3,0	**18**	4,0	1,5	5,0	3,0
4	1,0	2,0	6,0	4,0	**19**	2,5	2,0	4,0	4,0
5	0,2	0,3	0,4	1,0	**20**	2,5	2,0	1,0	5,0
6	2,0	3,0	5,0	2,0	**21**	4,0	2,5	2,0	2,0
7	2,0	3,0	6,0	3,0	**22**	1,0	3,5	4,0	2,0
8	3,0	4,0	5,0	1,0	**23**	1,0	0,5	4,0	2,0
9	3,0	4,0	6,0	2,0	**24**	2,0	0,5	3,0	3,0
10	3,0	4,0	7,0	3,0	**25**	3,0	0,5	4,0	1,0
11	1,5	2,0	3,0	4,0	**26**	0,5	6,0	1,0	3,0
12	1,5	4,0	3,0	3,0	**27**	0,5	6,0	2,0	4,0
13	2,0	2,5	3,0	2,0	**28**	0,5	6,0	3,0	5,0
14	1,0	2,5	4,0	4,0	**29**	6,0	0,5	4,0	1,0
15	2,0	3,5	4,0	2,0	**30**	2,0	2,5	5,0	2,0

Модель ОК у вигляді передатної функції повинна бути представлена в просторі станів. Для цього потрібно спочатку сформувати диференціальне рівняння, яке відповідає передатній функції (1),

$$W(s)=\frac{c}{(s+a)(s+b)(s+d)}.$$

$$a_3\frac{d_3y}{dt^3}+a_2\frac{d_2y}{dt^2}+a_1\frac{dy}{dt}+a_0y=cu,$$

а потім, використовуючи позначення $x_1=y;\ x_2=\frac{dy}{dt}=\frac{dx_1}{dt};\ x_3=\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{dx_2}{dt},$

скласти систему рівнянь у формі Коші;

$$\begin{cases}\frac{dx_1}{dt}=x_2;\\ \frac{dx_2}{dt}=x_3;\\ \frac{dx_3}{dt}=-a_0x_1-a_1x_2-a_2x_3+cu,\end{cases}$$

де $x_1,\ x_2,\ x_3$ - змінні стану; $a_0=abd,\ a_1=ab+bd+ad,\ a_2=a+b+d,\ a_3=1.$

Отже , у просторі станів модель ОК має вигляд

$$\begin{cases}\frac{dx}{dt}=Ax+Bu;\\ y=cx,\end{cases}$$

де

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -a_0 & -a_1 & -a_2\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}0\\0\\c\end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

Динаміку лінійного стаціонарного ОК у просторі станів можна описати рівнянням стану $x(k+1)=Ax(k)+Bu(k),$ де x – n-вимірний вектор змінних стану; u – m-вимірний вектор керувань; A – перехідна матриця стану розміром $n\times n$; B – матриця керувань розміром $n\times m$, k – дискретний час.

Власні значення λ (характеристичні числа) квадратичної матриці *A (n* значень) визначають із характеристичного рівняння

$$det(A-\lambda I)=0, \tag{2}$$

де I – одинична матриця.

Вираз (2) є алгебраїчним рівнянням *n*-го степеня відносно *λ*. Якщо розкрити визначник та згрупувати члени з однаковими степенями *λ*, ліву частину рівняння (2) можна зобразити як багаточлен, що має степінь *n* відносно *λ*:

$$det(A-\lambda I)=Q(\lambda)=q_n\lambda^n+\ldots+q_1\lambda+q_0 \tag{3}$$

Рівняння (3), наприклад для ОК третього порядку, запишемо так:

$$\begin{vmatrix}(a_{11}-\lambda) & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & (a_{22}-\lambda) & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & (a_{33}-\lambda)\end{vmatrix}=0$$

а характеристичне рівняння матиме вигляд $q_3\lambda^3+q_2\lambda^2+q_1\lambda+q=0,$

$$q_3 = 1;$$
$$q_2 = -(a_{11} + a_{22} + a_{33});$$
$$q_1 = a_{11}a_{22} + a_{22}a_{33} + a_{11}a_{33} - a_{12}a_{21} - a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}$$
$$q_0 = a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{22}a_{13}a_{31} - a_{11}a_{22}a_{23} - a_{21}a_{13}a_{32} - a_{12}a_{23}a_{31}.$$

Отже, для визначення власних значень матриці *A* потрібно розв'язати рівняння *n*-го степеня відносно λ:

$$q_n\lambda^n + q_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + q_1\lambda + q_0 = 0.$$

Рівняння (3) має *n* коренів, серед яких можуть бути однакові. У загальному випадку матриця *A* може мати дійсні та комплексні власні значення. Беручи до уваги те, що матриця А дійсна, комплексні корені рівняння (3), які є власними значеннями матриці *A*, зустрічатимуться спряженими парами.

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 1

Частина 1. Обчислення перехідної матриці стану методом безпосереднього розкладання у ряд

Мета роботи. Вивчити метод безпосереднього розкладання у ряд обчислення перехідної матриці стану та набути практичних навиків її обчислення.

Теоретичні відомості

Динаміку лінійного стаціонарного об’єкта керування у просторі станів описують диференціальним рівнянням

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t), \tag{4}$$

де $x(t)$ – n-вимірний вектор змінних стану; $u(t)$ – m-вимірний вектор керувань; A, B – матриці розміром відповідно $n \times n$ та $n \times m$.

Розв’язком рівняння (4) є рівняння стану,

$$x(t) = \Phi(t)x(0) + \Theta(t)u(t), \tag{5}$$

де $x(0)$ – початковий вектор змінних стану; $\Phi(t) = e^{At}$ – перехідна матриця стану розміру $n \times n$; $\Theta(t) = (\int_0^t \Phi(\tau)d\tau)B$ – матриця керувань розміром $n \times m$.

Для цифрової системи керування вираз (5) зображується у вигляді

$$x[(k+1)T] = \Phi(T)x(kT) + \Theta(T)u(kT),$$

де T – період квантування; $t = kT$ — час, що задається k періодами квантування; $\Phi(t)=e^{AT}$ – перехідна матриця стану цифрової системи керування; $\Theta(T) = (\int_0^T \Phi(\tau)d\tau)B$ – матриця керування.

У цій лабораторній роботі для обчислення матриці e^{AT} використовують метод безпосереднього розкладання у ряд, який ґрунтується на представленні перехідної матриці стану у вигляді нескінченного ряду:

$$\Phi(T) = e^{AT} = I + AT + \frac{A^2T^2}{2!} + \ldots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^iT^i}{i!},$$

причому $A^0 = I$.

Для наближеного значення матриці $\Phi(T)$ нескінченний ряд обмежують $(L+1)$ - м членом:

$$\Phi(T) = \sum_{i=0}^{L} \frac{A^iT^i}{i!} = M(T).$$

Помилку при обмеженні ряду визначають тими членами ряду, що відкидають:

$$Q(T) = \sum_{i=L+1}^{\infty} \frac{A^iT^i}{i!}.$$

Скінченний ряд *M(T)* можна подати у такому вигляді

$$M(T) = [1 + AT(1 + \frac{AT}{2}\{1 + \frac{AT}{3}[1 + \ldots + \frac{AT}{L-1}(1 + \frac{AT}{L})]\ldots\})]. \tag{6}$$

Використаємо *M(T)* для обчислення матриці керування:

$$\Theta(t) = (\int_0^T e^{A\tau} d\tau)B = e^{A\tau} \Big|_0^T A^{-1}B = (e^{AT} - 1)A^{-1}B =$$

$$= (1 + AT + \frac{A^2T^2}{2!} + ... - 1)A^{-1}B = (T + \frac{AT^2}{2!} + \frac{A^2T^3}{3!} + ...)B =$$

$$= T(1 + \frac{AT^2}{2!} + \frac{A^2T^3}{3!} + ...)B = T\sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^iT^i}{(i+1)!}B;$$

$$\Theta(T) = T(1 + \frac{AT}{2}\{1 + \frac{AT}{3}[1 + ... + \frac{AT}{L-1}(1 + \frac{AT}{L})]...\})B \quad (7)$$

Таким чином, для визначення матриць $\Phi(t)$ та $\Theta(t)$ потрібно користуватися формулами (6) та (7), які легко програмуються.

Послідовність виконання роботи

1. Задатися періодом квантування T=0,01 та довжиною ряду L=10, обчислити перехідну матрицю стану $\Phi(T)$.
2. Повторити розрахунки для L=20, 30, 40 і т. д. доти, доки не буде знайдено L*, для якої елементи матриці $\Phi(T)$ лишаються незмінними порівняно з $\Phi(T)$ для меншої L.
3. Для знайденої в п.2 L* обчислити матрицю $\Phi(T)$ при T=0,1; 0,5; 5.
4. Перевірити, чи достатньою є визначена кількість членів ряду і для решти періодів квантування.

Оформлення результатів роботи

1. Записати матрицю A.
2. Надати результати розрахунків за пп. 1 - 4.

Контрольні запитання

1. Що таке перехідна матриця стану?
2. У чому полягає суть методу безпосереднього розкладання у ряд?
3. Що таке матриця керування?

Частина 2. Обчислення перехідної матриці стану методом Келі-Гамільтона

Мета роботи. Вивчити метод обчислення перехідної матриці стану Келі-Гамільтона та набути практичних навиків її обчислення.

Теоретичні відомості

Метод Келі-Гамільтона для обчислення перехідної матриці стану ґрунтується на однойменній теоремі, яка стверджує, що будь-яка квадратна матриця повинна задовольняти своє характеристичне рівняння

$$f(\lambda) = 0, \quad (8)$$

тобто $f(A) = 0$, де $f(...)$ - деяка функція; λ - власне значення матриці A розміром $n \times n$.

Висновком із теореми Келі-Гамільтона є твердження, що матрицю стану $\Phi(T)$ можна подати у вигляді

$$\Phi(T) = e^{AT} = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i A^i, \quad (9)$$

де α_i - невідомі коефіцієнти.

Враховуючи (8), вираз (9) можна переписати у вигляді

$$e^{\lambda T} = e^{AT} = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i A^i = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i \lambda^i \text{.}$$

Підставляючи різні значення λ_j (j =1, 2, ..., n) отримуємо систему з n рівнянь, з якої можна знайти невідомі коефіцієнти α_i.

Розглянемо для прикладу обчислення Ф*(T)*, якщо матрицю A задано у вигляді

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Для визначення матриці $\Phi(T) = e^{AT}$ використаємо вираз (9) та запишемо *(n=2):*

$$e^{AT} = \alpha_0 I + \alpha_1 A. \tag{10}$$

Згідно з теоремою Келі–Гамільтона

$$\begin{aligned} e^{\lambda_1 T} &= \alpha_0 + \alpha_1 \lambda_1 \\ e^{\lambda_2 T} &= \alpha_0 + \alpha_1 \lambda_2 \end{aligned}; \tag{11}$$

Будемо шукати власні значення λ_1 та λ_2 матриці A, для чого складемо характеристичне рівняння

$$\det(A - \lambda I) = \begin{pmatrix} -3-\lambda & -1 \\ 2 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0 \text{,}$$

розв’язком якого є λ_1 = - 1 та λ_2 = - 2.

Підставляючи відшукані λ_1 та λ_2 у (11), запишемо систему рівнянь

$$\begin{cases} e^{-T} = \alpha_0 - \alpha_1 \\ e^{-2T} = \alpha_0 - 2\alpha_1 \end{cases}, \tag{12}$$

розв’язком якої є

$$\alpha_0 = 2e^{-T} - e^{-2T}; \ \ \alpha_1 = e^{-T} - e^{-2T}.$$

Знайдені значення коефіцієнтів підставимо у вираз (10), матимемо:

$$e^{AT} = (2e^{-T} - e^{-2T}) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + (e^{-T} - e^{-2T}) \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2e^{-T} - e^{-T} & e^{-2T} - e^{-T} \\ 2e^{-T} - e^{-2T} & 2e^{-T} - e^{-2T} \end{bmatrix}.$$

У числовому вигляді елементи матриці e^{AT} визначають тільки тоді, коли відомий період квантування.

Послідовність виконання роботи

1. Знайти власні значення матриці A.
2. Скласти систему рівнянь, аналогічну (12) для T= 0,01.
3. Обчислити перехідну матрицю стану для T=0,01; 0,1; 0,5; 5.

Оформлення результатів роботи

1. Надати результати обчислень за пп. 1-3.
2. Порівняти результати обчислень *Ф(Т)* з використанням методу безпосереднього розкладання у ряд і методу Келі - Гамільтона для однакових періодів квантування.

Контрольні запитання

1. Що таке перехідна матриця стану?
2. У чому суть методу Келі - Гамільтона?

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 2

Перехідні характеристики цифрових систем керування

Мета роботи. Порівняти перехідні характеристики аналогової та відповідної цифрової систем керування (ЦСК), проаналізувати вплив періоду квантування цифрової системи (ЦС) на перехідний процес.

Теоретичні відомості

Вихідні змінні ЦСК у загальному випадку є функціями аналогового аргументу *t*, але стають відомими вони тільки в моменти замикання квантувача. Точність дискретного подання залежить значною мірою від періоду квантування та його співвідношення зі сталими часу системи, тому між змінною $y(t)$ та її дискретним поданням $y(kT)$ можуть бути великі розбіжності, які свідчать про те, що $y(kT)$ не відображає реальну поведінку системи керування (СК).

У лабораторній роботі поведінку ЦСК у часі оцінюють за виглядом перехідної характеристики, тобто за реакцією системи на одиничний ступінчастий сигнал.

Перехідна характеристика одновимірної аналогової СК може бути результатом розв’язку диференціального рівняння

$$a_3 \frac{d^3 y(t)}{dt^3} + a_2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = cu(t) \qquad (13)$$

за нульових початкових умов.

Якщо подати аналогову СК (13) у просторі станів, матимемо матричне рівняння

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t); \qquad (14)$$

$$y = Cx(t),$$

де

$$x(t) = \begin{vmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{vmatrix},$$

A, B, C – матриці відповідно розміром $n \times n,\ n \times m,\ m \times n.$ ЦСК згідно з (14) описується рівняннями динаміки:

$$x(k+1) = \Phi x(k) + \Theta u(k);$$
$$y(k) = Cx(k), \qquad (15)$$

де

$$\Phi = e^{AT}; \quad \Theta = (\int_0^T e^{A\tau} d\tau)B, \qquad (16)$$

T – період квантування; Ф – перехідна матриця стану; Θ – матриця керування.

Аналізуючи рівняння (15) та (16), можна зробити висновок, що результати обчислень вихідної змінної у ЦС залежать від періоду квантування *T*.

Перехідну характеристику ЦСК визначають з рівняння динаміки (15) шляхом послідовного обчислення змінних стану $x(k)$ (k = 1,2,...), враховуючи $x(0)$ = 0, та подальшого обчислення $y(k)$.

Послідовність виконання роботи

1. Розрахувати перехідну характеристику аналогової СК, для чого покласти $u(t)$=1. Рекомендується обирати крок обчислень, користуючись принципом Рунге.

2. Обчислити перехідну характеристику ЦСК, для чого покласти $u(t)$ = 1. Розрахунки за п.2 провести для *T*= 0,01; 0,1; 0,5; 5.

Оформлення результатів роботи

1. У єдиних координатних осях побудувати перехідні характеристики аналогової та цифрової СК із різними періодами квантування.
2. Проаналізувати отримані результати.

Контрольні запитання

1. Що є перехідною характеристикою АС?
2. Як визначається перехідна характеристика аналогової системи?
3. Як визначається перехідна характеристика цифрової системи?
4. Що таке перехідна матриця стану?
5. Чи впливає період квантування цифрової системи на вигляд її перехідної характеристики?

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 3

Частина 1. Керованість автоматичних систем

Мета роботи. Розглянути поняття керованості автоматичних систем (АС) та набути практичні навики її обчислення. Проаналізувати вплив періоду квантування АС на її керованість.

Теоретичні відомості

Поняття керованості, вперше введене Калманом, відіграє важливу роль у сучасній теорії автоматичного керування. Керованістю системи називають таку її властивість, коли в результаті дії деякого керування $u(t)$ впродовж скінченного відрізку часу її можна перевести з будь-якого початкового стану x_0 у кінцевий x_1. У цьому випадку систему називають повністю керованою. Якщо цю властивість система має не за всіма координатами стану, то вона буде не повністю керованою. Можуть зустрічатися повністю некеровані системи.

Якщо лінійний стаціонарний об'єкт керування описується рівняннями динаміки у просторі станів у вигляді

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t);\ y(t) = Cx(t). \tag{17}$$

то для визначення керованості об'єкта потрібно скласти матрицю розміром $n \times n \cdot m$, яка матиме вигляд

$$S = [B\ AB\ A^2B\ ...\ A^{n-1}B]. \tag{18}$$

У формулах (17) та (18) матриці *A*, *B*, *C* мають відповідно розміри $n \times n$, $n \times m$, $r \times n$.

Для ЦСК, рівняння стану якої має вигляд

$$x[(k+1)T] = \Phi(T)x(kT) + \Theta(T)u(kT). \tag{19}$$

матриця S буде такою:

$$S(T) = \left[\Theta(T) \quad \Phi(T)\Theta(T) \quad \Phi(2T)\Theta(T) \quad \dots \quad \Phi[(n-1)T]\Theta(T)\right] \tag{20}$$

У виразі (19) $\Phi(T) = e^{AT}$, $\Theta(T) = (\int_0^T e^{A\tau}d\tau)B,$ де *T* – період квантування.

Далі на шляху обчислення керованості потрібно визначити ранг матриці (18), або для ЦС – (20). Для цього розглядають мінори матриці. Якщо будь-який мінор порядку *r* відрізняється від нуля, а всі мінори вищого порядку дорівнюють нулю, то число *r* буде рангом цієї матриці.

Система буде повністю керованою, якщо ранг *r* матриці *S* дорівнюватиме *n*. Якщо *r* = 0, система – повністю некерована. Якщо *r* <*n*, система – не повністю керована. Тоді можна виділити частину системи порядку *r*, яка буде керованою, решта – некерованою.

Послідовність виконання роботи

1. Визначити перехідні матриці стану $\Phi(T), \Phi(2T), ...\ \Phi[(n-1)T]$ та матрицю керувань $\Theta(T)$ для T = 0,01.
2. Знайти добуток $\Phi(T)\Theta(T)\ \Phi(2T)\Theta(T)\ ...\ \Phi[(n-1)T]\Theta(T)$
3. Сформувати матрицю S.
4. Визначити ранг матриці S.
5. Повторити розрахунки за пп. 1-4 для T= 0,1; 0,5; 5.

Оформлення результатів роботи

1. Навести результати проміжних розрахунків (перехідні матриці стану $\Phi(T), \Phi(2T)$ та інші для різних значень *T*, добутки матриць $\Phi(T)\Theta(T), \Phi(2T)\Theta(T)$.
2. Записати матриці *S*(*T*).

3. Зробити висновки про керованість АС та вплив на неї періоду квантування.

Контрольні запитання

1. Що таке керованість АС?
2. Як визначити керованість АС?
3. Як обчислити ранг матриці?
4. Чи впливає період квантування на керованість АС?

Частина 2. Спостережуваність автоматичних систем

Мета роботи. Розглянути поняття спостережуваності АС та набути практичні навики її обчислення. Проаналізувати вплив періоду квантування АС на її спостережуваність.

Теоретичні відомості

Поняття спостережуваності, як і керованості, вперше започатковано Калманом і є дуальним відносно керованості.

Для керування об’єктами необхідно мати інформацію про координати стану. Цю інформацію можна одержати в результаті вимірювання координат виходу та керувань і проведення відповідних розрахунків. Кількість вимірюваних координат об'єкта $y_j \ / \ j = 1, 2, ..., r /$, як правило, менша від кількості координат стану $x_i \ / \ i = 1, 2, ..., n \ /$. У цьому випадку визначення вектора стану на базі виміряних координат виходу та керувань неможливе без додаткової інформації або розрахунків. Можливість визначення координат стану за даними вимірювань характеризує властивість спостережуваності об'єкта, коли шляхом спостереження (вимірювання) його вихідних величин $y_j(t)$ на обмеженому інтервалі часу можна визначити всі координати стану об’єкта. У цьому разі об’єкт буде повністю спостережуваний. Він буде не повністю спостережуваним, якщо через виміряні вихідні величини визначаються не всі координати стану.

Якщо рівняння динаміки об'єкта керування задано у вигляді (17), потрібно скласти матрицю H розміром $n \times n \cdot r$:

$$H = [C^T \ \ A^T C^T \ \ (A^T)^2 C^T \ \ ... \ (A^T)^{n-1} C^T],$$

де A^T та C^T — транспоновані матриці.

Для ЦС (19) матриця H матиме вигляд:

$$H(T) = [C^T \ \ \Phi^T(T) C^T \ \ \Phi^T(2T) C^T \ \ ... \ \Phi^T[(n-1)T] C^T].$$

Об’єкт буде повністю спостережуваний, якщо ранг матриці H дорівнює n. Якщо її ранг менший за n, система – не повністю спостережувана. Спостережувана частина об'єкта матиме порядок, що дорівнює рангу матриці H.

Послідовність виконання роботи

1. Транспонувати матрицю С.
2. Знайти матриці $\Phi^T(T)$, $\Phi^T(2T)$, ..., $\Phi^T[(n-1)T]$ для T =0,01.
3. Знайти добуток матриць $\Phi^T(T)C^T$, $\Phi^T(2T)C^T$, ..., $\Phi^T[(n-1)T]C^T$.
4. Сформувати матрицю H(T).
5. Визначити ранг матриці H(T).
6. Повторити розрахунки за пп. 1-5 для T = 0,1; 0,5; 5.

Оформлення результатів роботи

1. Надати результати проміжних розрахунків $\Phi^T(T)C^T$, $\Phi^T(2T)C^T$, ..., $\Phi^T[(n-1)T]C^T$. для різних періодів квантування.
2. Записати матрицю H(T).
3. Зробити висновок про спостережуваність АС та вплив на неї періоду квантування.

Контрольні запитання

1. Що таке спостережуваність АС?
2. Як визначити спостережуваність АС?
3. Чи впливає період квантування на спостережуваність АС?

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 4

Чутливість автоматичних систем

Мета роботи. Розглянути поняття функції та рівняння чутливості, набути практичних навиків їх обчислення.

Теоретичні відомості

Параметри СК, тобто коефіцієнти підсилення, сталі часу, залежать від фізичних параметрів елементів, з яких складається система. Значення фізичних параметрів можуть, мати технологічний розкид і змінюватись залежно від умов експлуатації у процесі роботи системи (експлуатаційні зміни).

Ступінь впливу розкиду та зміни параметрів системи на її статичні властивості називають чутливістю системи.

Нехай система описується у просторі станів рівнянням

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t)$$

або

$$\frac{dx_i}{dt} = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n + b_i u_i, \; i = 1, 2, ..., n, \tag{21}$$

де x_i – змінні стану системи.

Параметри системи, що змінюються з часом у процесі її експлуатації та від технологічного розкиду, позначимо як $\alpha_j \, (j = 1, 2, ..., q).$ Вони є коефіцієнтами рівняння (21), тому це рівняння можна записати в такому вигляді:

$$\frac{dx_i}{dt} = \Psi_i (x_1, x_2, ..., x_n; \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_q), \tag{22}$$

$$i = 1, 2, ..., n.$$

Розглядаючи малі зміни параметрів, одержуємо нові рівняння:

$$\frac{d\,x_i}{dt} = \Psi_i (x_1, ..., x_n; \alpha_1 + \Delta\alpha_1, ..., \alpha_q + \Delta\alpha_q). \tag{23}$$

Процес у системі (22) при незмінних параметрах, який визначається її розв’язком $x_1(t), \; x_2(t), \; \ldots, \; x_n(t),$ називається вихідним рухом. Процес у тій самій системі, але із зміненими параметрами, який визначається розв’язком системи рівнянь (23), тобто $x_1(t), \; x_2(t), \; \ldots, \; x_n(t),$ називається варійованим рухом. Виникає відмінність між перебігами цих процесів внаслідок зміни параметрів системи

$$\Delta x_i(t) = x_i(t) - x_i(t), \; i = 1, 2, ..., n,$$

яка називається додатковим рухом системи.

Для малих змін параметрів α_j можна записати:

$$\Delta x_i(t) = \frac{\partial x_i}{\partial \alpha_1}\Delta\alpha_1 + \frac{\partial x_i}{\partial \alpha_2}\Delta\alpha_2 + ... + \frac{\partial x_i}{\partial \alpha_q}\Delta\alpha_q, \; i = 1, 2, ..., n.$$

Позначимо:

$$\vartheta_{ij}(t) = \frac{\partial x_i}{\partial \alpha_j}, \; j = 1, 2, ..., q. \tag{24}$$

Тоді додатковий рух буде:

$$\Delta x_i(t) = \vartheta_{i1}(t)\Delta\alpha_1 + \vartheta_{i2}(t)\Delta\alpha_2 + ... + \vartheta_{iq}(t)\Delta\alpha_q, \; i = 1, 2, ..., n.$$

Величини $\vartheta_{ij}(t)$, визначені за (24), називають функціями чутливості. Розглянемо, в який спосіб вони обчислюються.

Продиференціюємо вихідне рівняння (22) за параметром α_j :

$$\frac{\partial}{\partial\alpha_j}\left(\frac{dx_i}{dt}\right)=\frac{\partial\Psi_i}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial\alpha_j}+\frac{\partial\Psi_i}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial\alpha_j}+\ldots+\frac{\partial\Psi_i}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial\alpha_j}+\frac{\partial\Psi_i}{\partial\alpha_j}.$$

Змінюючи в лівій частині порядок диференціювання та беручи до уваги вираз (24), матимемо:

$$\frac{\partial\vartheta_{ij}}{dt}=\frac{\partial\Psi_i}{\partial x_1}\partial\vartheta_{1j}+\frac{\partial\Psi_i}{\partial x_1}\partial\vartheta_{2j}+\ldots+\frac{\partial\Psi_i}{\partial x_n}\partial\vartheta_{nj}+\frac{\partial\Psi_i}{\partial\alpha_j}, \qquad (25)$$

$$i=1,2,\ldots,n.$$

Такі рівняння називають рівняннями чутливості.

Приклад. Одновимірну систему керування описують системою диференціальних рівнянь [2]:

$$\begin{cases}\dfrac{dx_1}{dt}=x_2\\ \dfrac{dx_2}{dt}=x_3\\ \dfrac{dx_3}{dt}=-a_0x_1-a_1x_2-a_2x_3+cu,\end{cases} \qquad (26)$$

де $a_0=abd,\ a_1=ab+bd+ad,\ a_2=a+b+d.$

Припустимо, що в процесі експлуатації системи змінюються її параметр *a*. Решта параметрів *b, c, d* лишаються незмінними.

Позначимо функцію чутливості:

$$\frac{\partial x_i}{\partial a}=\vartheta_{i1},\ i=1,2,3.$$

Далі, користуючись виразом (25), запишемо рівняння чутливості для системи (26):

$$\begin{cases}\dfrac{d\vartheta_{11}}{dt}=\vartheta_{21}\\ \dfrac{d\vartheta_{21}}{dt}=\vartheta_{31}\\ \dfrac{d\vartheta_{31}}{dt}=-abd\vartheta_{11}-(ab+bd+ad)\vartheta_{21}\\ \qquad -(a+b+d)\vartheta_{31}-bdx_1-bx_2-dx_2-x_3.\end{cases} \qquad (27)$$

Шукані функції чутливості $\vartheta_{ij}\,(i=1,2,3;\ j=1)$ є розв'язком системи диференціальних рівнянь (27).

Обчисливши ϑ_{ij}, можна відшукати додатковий рух системи $\Delta x_i\,(i=1,2,3)$:

$$\Delta x_i(t)=\vartheta_{ij}\Delta a.$$

Послідовність виконання роботи

1. Одержати рівняння чутливості системи (25) за умови, що параметри b та c змінюються з часом, aid - незмінні.
2. Знайти розв'язок системи диференціальних рівнянь, поклавши $x_1=x_2=x_3=0,\ u=1.$
3. Визначити додатковий рух АС зі зміною параметрів b та c на 10%.

Оформлення результатів роботи

1. Записати отримане рівняння чутливості в загальному та числовому вигляді.

2. Навести результати розв’язання системи рівнянь.
3. Побудувати графіки зміни змінних стану при додатковому русі системи.

Контрольні запитання

1. Що називається чутливістю АС?
2. Які фізичні процеси в АС викликають необхідність дослідження її чутливості?
3. Що таке вихідний, варійований та додатковий рухи АС?
4. Як визначити функцію чутливості?
5. Як одержати рівняння чутливості?
6. Як визначити додатковий рух системи за допомогою функцій чутливості?

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 5

Синтез асимптотичного спостерігача повного порядку

Мета роботи. Вивчити структуру асимптотичного спостерігача повного порядку; набути практичних навиків із синтезу спостерігача даного типу.

Теоретичні відомості

Керування об'єктами, математична модель яких представлена в просторі станів, ґрунтується на використанні зворотного зв'язку (ЗЗ) за змінними стану. На практиці не всі змінні стану доступні для вимірювання. Як правило, вимірюють тільки вихідні змінні об'єкта, тому, якщо потрібен ЗЗ за всіма змінними стану, але не всі вони доступні для вимірювання, необхідно "відновити" ці стани за інформацією, яка міститься у вхідних та вихідних змінних. Підсистема, що відновлює змінні стану, який ґрунтується на вимірюванні вхідних та вихідних змінних, називається спостерігачем стану або просто спостерігачем. Якщо за вхідними змінними визначаються всі змінні стану, такий спостерігач називають спостерігачем повного порядку, бо порядок рівнянь, які описують динаміку спостерігача, дорівнює порядку вихідних рівнянь динаміки об'єкта.

Розглянемо спосіб побудови асимптотичного спостерігача повного порядку для стаціонарного лінійного об'єкта, заданого рівняннями динаміки у вигляді:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k), \tag{28}$$

$$y(k) = Cx(k), \tag{29}$$

де $x(k)$ – n-вимірний вектор стану в k-й момент часу; $u(k)$ – m-вимірний вектор входів (керувань); $y(k)$ – r-вимірний вектор вихідних змінних; A, B, C – відомі матриці розміру відповідно $n \times n$, $n \times m$, $r \times n$.

Структурну схему асимптотичного спостерігача повного порядку зображено на рис. 5.1.

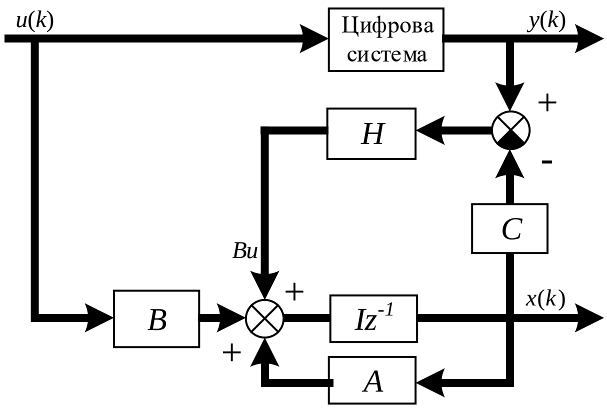

Рис. 5.1

Як видно з рис. 5.1., для побудови таких спостерігачів використовують ЗЗ за виходом об'єкта. Цей спостерігач можна описати виразом

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) + H[y(k) - Cx(k)], \tag{30}$$

де $x(k)$ – спостережуваний вектор змінних стану; H – матриця розміром $n \times r$, елементи якої обираються так, щоб забезпечити бажаний процес оцінювання вектора стану та одержати

$$\lim_{k\to\infty}[x(k) - x(k)] = 0. \tag{31}$$

Для фіксованого k вираз (31) має вигляд

$$x(k) - x(k) \le E(k), \tag{32}$$

де $E(k)$ – вектор помилок оцінювання.

Оскільки $y(k)$ та $x(k)$ зв'язані співвідношенням (29), рівняння (30) перепишемо:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) + HC[x(k) - x(k)]. \tag{33}$$

Побудовані згідно з рівняннями (29) та (30) спостерігачі мають асимптотичні властивості і ту саму розмірність, що й об'єкт керування.

У цій лабораторній роботі моделювання здійснюється за рівнянням (33). Якість оцінки вектора стану здійснюють згідно з виразом (33). До початку моделювання мають бути задані $x(0)$ та $x(0)$. Потрібно мати на увазі, що задавати $x(0) = x(0)$ не доцільно.

Синтез спостерігача полягає у знаходженні елементів матриці H таких, що забезпечують виконання умови (32). У цій лабораторній роботі для пошуку елементів матриці H пропонується використати метод покоординатного спуску. Він здійснює цілеспрямовану зміну одного $n \times r$ елементів матриці H так, щоб $\Delta x = x(k) - x(k)$ набуло б мінімального значення. Водночас решта $n \times r - 1$ елементів матриці H лишаються незмінними.

Після знаходження мінімуму в результаті зміни першого елемента матриці H його фіксують і розпочинають змінювати другий елемент, лишаючи решту незмінними. Так послідовно перебирають усі елементи. Після одержання мінімуму за останнім елементом крок пошуку зменшують (наприклад, вдвічі) та знову розпочинають змінювати перший елемент, доки умова (32) не стане справедливою.

Послідовність виконання роботи

1. Задати вектор помилок оцінювання $E(k) = \left[10^{-4} \quad 10^{-4} \quad 10^{-4}\right]^T$.
2. Задати початковий вектор $x(0) = [0 \quad 0 \quad 0]^T$.
3. Задати початковий вектор $x(0) = [1 \quad 1 \quad 1]^T$
4. Задати кількість кроків оцінювання k=10.
5. Задати початковий вектор $H = I$.
6. Обчислити $x(0)$ та $x(0)$, послідовно використовуючи рівняння стану (28) та рівняння (33) відповідно.
7. Перевірити справедливість умови (32); якщо умова не виконується, використовувати метод покоординатного спуску доти, доки умова (32) не стане справедливою.
8. Задати k=5 і перейти до п. 5.
9. Задати $x(0) = [10 \quad 10 \quad 10]^T$ і перейти до п.4.

Оформлення результатів роботи

1. Надати обчислені матриці *H,* які задовольняють умову (32) та відповідають чотирьом різним початковим умовам:

а) $x(0) = [1 \quad 1 \quad 1]^T$ та k=10;

б) $x(0) = [1 \quad 1 \quad 1]^T$ та $k = 5$;

в) $x(0) = [10 \quad 10 \quad 10]^T$ та k= 10;

г) $x(0) = [10 \quad 10 \quad 10]^T$ та $k = 5$.

2. Для кожної з одержаних матриць H побудувати графіки змін векторів $x(k)$ та $x(k)$ за часом.

Контрольні запитання

1. Для чого необхідно відновлювати значення змінних стану ОК?
2. Що називають спостерігачем стану та спостерігачем повного порядку?
3. Які переваги має асимптотичний спостерігач порівняно з простішим спостерігачем повного порядку?
4. Як описати асимптотичний спостерігач повного порядку?

5. Поясніть структурну схему спостерігача.
6. Чому не варто задавати $x(0) = x(0)$?
7. Як оцінити якість спостерігача?
8. У чому полягає синтез асимптотичного спостерігача повного порядку?
9. Як здійснюється пошук елементів матриці *H?*

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 6

Синтез регулятора стану за заданим розташуванням полюсів системи

Мета роботи. Оволодіти теоретичними знаннями та набути практичні навики з синтезу регуляторів стану за заданим розташуванням полюсів АС.

Теоретичні відомості

Об’єктом дослідження є замкнена система, структурну схему якої зображено на рис.6.1.

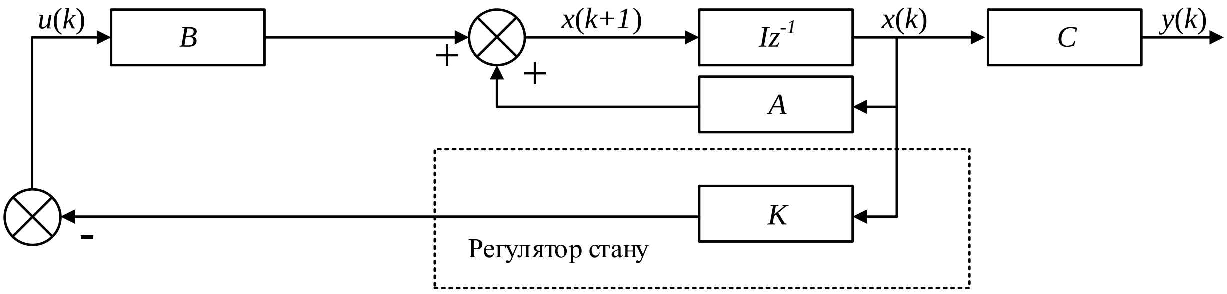

Рис. 6.1

Тут $x(t)$, $y(t)$ та $u(t)$ – відповідно вектори змінних стану розміром $n\times 1$, виходів ($r\times 1$) та керувань ($m\times 1$); A, B та C – матриці розміром відповідно $n\times n$, $n\times m$ та $r\times n$.

Регулятор стану має матрицю коефіцієнтів $K=\begin{bmatrix} k_0 & k_1 & k_2 \end{bmatrix}$. Об’єкт керування описують рівнянням стану

$$x(k+1)=Ax(k)+Bu(k). \tag{34}$$

Це рівняння за допомогою перетворення $v(k)=Px(k)$ може бути представлене в канонічній формі:

$$v(k+1)=A_1v(k)+B_1u(k), \tag{35}$$

де

$$A_1=PAP^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{pmatrix}, \tag{36}$$

$$B_1=PB=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{37}$$

а матриця перетворення: $P=\begin{pmatrix} S \\ SA \\ SA^2 \end{pmatrix}$,

де $$S=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix}^{-1},$$

Рівняння зворотного зв’язку за станом (див. рис.6.1) має вигляд

$$u(k)=-Kx(k)=-\begin{bmatrix} k_0 & k_1 & k_2 \end{bmatrix}x(k)=-\begin{bmatrix} k_0 & k_1 & k_2 \end{bmatrix}P^{-1}v(k)=-Gv(k), \tag{38}$$

де $$G=KP^{-1}=\begin{bmatrix} g_0 & g_1 & g_2 \end{bmatrix}. \tag{39}$$

Підставляючи вираз (38) у рівняння стану (35), маємо:

$$\nu(k+1)=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -a_0 & -a_1 & -a_2\end{bmatrix}\nu(k)-\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}g_0 & g_1 & g_2\end{bmatrix}\nu(k)=$$

$$=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -(a_0+g_0) & -(a_1+g_1) & -(a_2+g_2)\end{bmatrix}\nu(k).$$

Отже, відповідне характеристичне рівняння замкненої системи таке:

$$\begin{aligned}\det(\lambda I-A_1+B_1G)&=\lambda^2+(a_2+g_2)\lambda^2+(a_1+g_1)\lambda+(a_0+g_0)=\\&=\lambda^3+\alpha_2\lambda^2+\alpha_1\lambda+\alpha_0=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)(\lambda-\lambda_3),\end{aligned}\tag{40}$$

де $\alpha_i=a_i+g_i$, $i=0,1,2.$

Тепер, якщо розташувати будь-яким чином полюси замкненої системи, тобто корені $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ характеристичного рівняння (40), можна обчислити шукані значення коефіцієнтів $g_i\,(i=0,1,2)$ зворотного зв'язку за станом:

$$g_i=-a_i+\alpha_i.$$

Знайшовши g_i легко обчислити реальні коефіцієнти $k_i=(0,1,2)$ зворотного зв'язку:

$$K=GP.$$

Вище розглянуто розташування полюсів замкненої системи з технологічним об'єктом керування (ТОК), рівняння стану якого мас вигляд (35) тоді, як реальною є система з математичним описом ТОК (34). Покажемо, що полюси цих двох систем збігаються. Розглянемо характеристичне рівняння замкненої системи (див. рис.6.1):

$$\det(\lambda I-A_1+BK)=0\tag{41}$$

Якщо модель ТОК представити в канонічній формі (35), то характеристичне рівняння замкненої системи матиме вигляд:

$$F(\lambda)=\det(\lambda I-A_1+B_1G)=0.\tag{42}$$

У рівняння підставимо вирази (36), (37), та (39):

$$\begin{aligned}F(\lambda)&=\det(\lambda I-PAP^{-1}+PBKP^{-1})=\\&=\det(\lambda PP-PAP^{-1}+PBKP^{-1})=\\&=\det[P(\lambda I-A+BK]P^{-1})=\\&=\det(P)\det(\lambda I-A+BK)\det(P^{-1})=\\&=\det(\lambda I-A+BK).\end{aligned}$$

Тобто вирази (41) та (42) збігаються, що і треба було довести.

У цій лабораторній роботі розташування полюсів замкненої системи здійснюється, виходячи із заданих запасу стійкості, ступеня коливності, а також згідно з потрібним характером перехідних процесів. Поняття запасу стійкості $\varphi=-\eta$ та ступеня коливності $\gamma=\beta/\varphi$ системи зрозуміле з рис.6.2, де "*" позначені полюси системи.

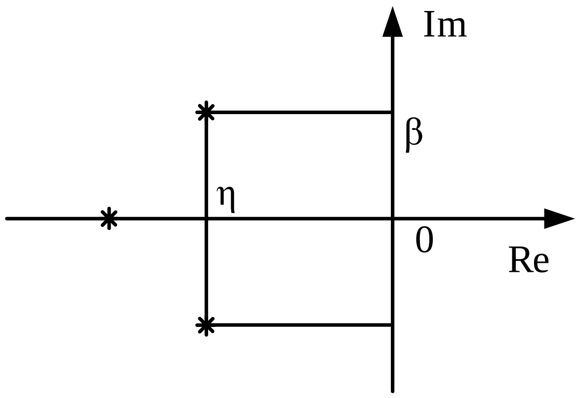

Рис. 6.2

Часто при синтезі АС потрібно забезпечити аперіодичний або коливний характер перехідних процесів. Це залежить від розташування полюсів системи. Якщо система має комплексно спряжені полюси, то перехідний процес в АС – коливний. Якщо всі полюси – дійсні числа, то перехідний процес буде аперіодичним.

Послідовність виконання роботи

1. Обчислити матриці A та B у виразі (34), задавшись періодом квантування Т= 1.
2. Розрахувати матриці A_1 та B_1 виразу (35).
3. Задати полюси замкненої системи так, щоб її запас стійкості $\varphi \geq 0.8$, а перехідний процес був:
   а) аперіодичним;
   б) коливним зі ступенем коливності $\gamma \geq 1$.
4. Визначити матрицю K зворотного зв'язку для обох випадків за п.3.
5. Розрахувати змінні стану $x(k)$ для k = 1,2,...10, якщо $x(0) = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 5 \end{bmatrix}^T$ для обох випадків за п.3
6. Повторити обчислення за пп. 1-5, якщо T= 0,5; T= 2.

Оформлення результатів роботи

1. Записати у числовому вигляді матриці A і B з виразу (34) та матриці A_1 і B_1 з виразу (35) для всіх значень періодів квантування T, які використані в лабораторній роботі.
2. Побудувати графіки зміни змінних стану для кожного з визначених режимів роботи системи та записати відповідні значення полюсів, матриці зворотного зв'язку K та періоду квантування.

Контрольні запитання

1. Що таке регулятор стану?
2. Що називається полюсом системи?
3. Як математично представляється технологічний об'єкт керування у просторі станів для безперервної та дискретної системи керування?
4. У чому полягає синтез регулятора стану?
5. Що таке канонічна форма математичної моделі ТОК у просторі станів?
6. Як перетворити модель ТОК у просторі станів на канонічну форму?
7. Що таке характеристичне рівняння матриці?
8. Чому для синтезу регулятора стану стосовно розташування полюсів замкненої системи потрібно перетворювати рівняння стану ТОК на рівняння канонічної форми?
9. Доведіть, що полюси замкненої системи з моделями ТОК у рівняннях (34) та (35) збігаються.

10. Що таке ступінь стійкості та коливності АС?

11. Чи впливає період квантування дискретної системи на її ступінь стійкості та коливності? Доведіть.

12. Як впливає розташування полюсів системи на характер динамічних процесів у ній (аперіодичний, коливний)?

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 7

Синтез аперіодичного регулятора стану

Мета роботи. Вивчити за теоретичними відомостями та набути практичних навиків із синтезу аперіодичного регулятора стану.

Теоретичні відомості

Розглянемо одновимірний ТОК порядку *n*:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k).$$

Цей об'єкт може бути переведений з довільного початкового стану $x(0)$ в нульовий кінцевий стан $x(N)=0$ за $N=n$ кроків. Регулятор стану, який реалізує такий перехід, називається аперіодичним. Необхідну для цього послідовність керувань можна сформувати через зворотний зв'язок за станом: $u(k)=-Kx(k)$, де $K=\begin{bmatrix}k_0 & k_1 & \dots & k_n\end{bmatrix}$ – матриця зворотного зв'язку. В результаті отримуємо $x(k+1)=(A-BK)x(k)=Fx(k)$, де $F=A-BK$. Тоді $x(1)=Fx(0);\ x(2)=F^2x(0);\dots$ та $x(N)=F^N x(0).$

З умови $x(N)=0$ виходить, що

$$F^N = 0. \tag{43}$$

Запишемо характеристичне рівняння замкненої системи:

$$\det(\lambda I - F) = \lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + \alpha_1\lambda + \alpha_0. \tag{44}$$

Коефіцієнти α_i, цього рівняння розраховуються за формулою

$$\alpha_i = a_i + k_i,\ \ i = 0,1,\dots,n-1, \tag{45}$$

якщо модель ТОК подано в канонічній формі, тобто матриці *A* і *B* мають вигляд:

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{46}$$

Якщо матриці *A* і *B* мають інший вигляд, модель ТОК можна перетворити на канонічну форму

$$v(k+1) = A_1 v(k) + B_1 u(k) \tag{47}$$

за допомогою перетворення $v(k) = Px(k)$, де матриця

$$P=\begin{bmatrix} S \\ SA \\ SA^{n-1} \end{bmatrix}; \tag{48}$$

У цьому випадку $K = GP$, де $G=[g_1 \quad g_2 \quad g_3]$ – матриця зворотного зв'язку системи, яку подано в канонічній формі. У виразі (47) матриці A_1 та B_1 мають такий же вигляд, як і матриці *A* та *B* у формулі (46).

Подання моделі ТОК у канонічній формі дає змогу отримати перехідну матрицю стану замкненої системи F у вигляді

$$F=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 \\ -a_0-g_0 & -a_1-g_1 & -a_2-g_2 & ... & -a_{n-1}-g_{n-1} \end{bmatrix}, \qquad (49)$$

що і зумовлює розрахунок коефіцієнтів α_i рівняння (44) за формулою (45).

Згідно з теоремою Келі-Гамільтона рівняння (44) набуває вигляду:

$$F^n+\alpha_{n-1}F^{n-1}+...+\alpha_1 F+\alpha_0 I=0 .$$

Увівши заміну $n=N$, дістанемо

$$F^N+\alpha_{N-1}F^{N-1}+...+\alpha_1 F+\alpha_0 I=0 . \qquad (50)$$

Враховуючи (43), а також те, що $F^{N-1}\neq 0$ ($i=1,2,...,N$), з рівняння (50) отримуємо

$$\alpha_0=\alpha_1=...=\alpha_{n-1}=0 . \qquad (51)$$

Тоді, враховуючи (45), отримуємо $g_i=-a_i\,(i=1,2,...,n-1)$, а величини керувань розраховуються за формулою $u(k)=-GPx(k)$.

Зважаючи на (51), характеристичне рівняння (44) набирає вигляду:

$$\lambda^n=0 .$$

Наявність кратного полюса порядку n у точці $\lambda=0$ є ознакою системи керування з аперіодичним характером перехідних процесів.

Динамічні характеристики замкненої системи необхідно розраховувати так, як і в лабораторній роботі 6.

Послідовність виконання роботи

1. Розрахувати коефіцієнти $a_i\,(i=0,\ 1,\ ...,\ n-1)$ характеристичного рівняння матриці A (46) з періодом квантування $T=1$.
2. Обчислити матрицю P за формулою (48).
3. Задати $g_i=-a_i\,(i=0,\ 1,\ ...,\ n-1)$ та розрахувати матрицю F за формулою (49).
4. Обчислити змінні стану $x(k)$ замкненої системи з аперіодичним регулятором стану при $k=1,2,...,10$, якщо $x(0)=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}^T$.
5. Повторити розрахунок за пп. 1-4 при а) $T=0,2$; б) $T=2$.

Оформлення результатів роботи

Побудувати графіки зміни змінних стану замкненої системи з аперіодичним регулятором стану для різних періодів квантування *T*.

Контрольні запитання

1. Який регулятор називається аперіодичним регулятором стану?
2. Що таке канонічна форма моделі ТОК?
3. Як перетворити модель ТОК на канонічну форму?
4. Навіщо при синтезі аперіодичного регулятора стану перетворювати модель ТОК на канонічну форму?
5. Як визначити матрицю зворотного зв’язку для аперіодичного регулятора стану?
6. За якою формулою обчислюється керування в системі з аперіодичним регулятором стану?
7. Що можна сказати про власні значення замкненої системи з аперіодичним регулятором стану?
8. Як розраховують характеристики стану замкненої системи з аперіодичним регулятором стану?

9. Порівняйте результати цієї лабораторної роботи з результатами лабораторної роботи 6 у тій її частині, де йдеться про аперіодичні перехідні процеси в системі.

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 8

Синтез модального регулятора стану

Мета роботи. Оволодіти теоретичними аспектами та набути практичних навиків із синтезу модальних регуляторів стану.

Теоретичні відомості

Розглянемо лінійний стаціонарний об'єкт із трьома входами $u = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{bmatrix}^T$:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k). \tag{52}$$

Якщо всі власні значення матриці A різні, перетворимо рівняння (52):

$$v(k+1) = \Lambda v(k) + \Gamma u(k), \tag{53}$$

де

$$v(k) = P^{-1}x(k),$$

$$\Lambda = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{bmatrix},$$

$$\Gamma = P^{-1}B, \tag{54}$$

$$P = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \end{bmatrix}.$$

Тут p_i, λ_i – власні вектори та власні значення матриці A.

Оскільки в цьому випадку коефіцієнти k_i (i=1, 2, 3) діагональної матриці зворотного зв'язку K замкненої системи (рис. 6.1) безпосередньо впливають на власні значення (моди) λ_i (i=1, 2, 3), таке керування АС називають модальним, а регулятор, що синтезується, – модальним регулятором стану.

Позначимо $u_v(k)$=$\Gamma u(k)$, тоді рівняння (53) можна переписати так:

$$v(k+1) = \Lambda v(k) + u_v(k).$$

Тепер сформулюємо керування у вигляді зворотного зв'язку за вектором стану: $u_v(k) = -K_v v(k)$, де матриця зворотного зв'язку $K_v = diag\begin{bmatrix} k_{11} & k_{22} & k_{33} \end{bmatrix}$ також діагональна. Після підстановки маємо:

$$v(k+1) = (\Lambda + K_v)v(k).$$

Тоді з урахуванням діагонального вигляду матриці K_v характеристичне рівняння замкненої системи набере вигляду:

$$det\left[\lambda I - (\Lambda - K_v)\right] = \left[\lambda - (\lambda_1 - k_{11})\right]\left[\lambda - (\lambda_2 - k_{22})\right]\left[\lambda - (\lambda_3 - k_{33})\right] = 0$$

Отже, власні значення λ_i (i=1, 2, 3) об'єкта керування можуть бути змінені незалежно один від одного завдяки відповідними вибору значень k_{ii} (i = 1, 2, 3) матриці зворотного зв'язку K_v.

Таким чином, синтез регулятора стану цьому випадку полягає в задані полюсів λ_{oi} (i = 1, 2, 3) замкненої системи. Після цього за формулою $k_{ii} = \lambda_i - \lambda_{oi}$ (i = 1, 2, 3) визначають коефіцієнти матриці зворотного зв'язку K_v. Тепер із рівнянь (55) та (54) може бути обчислений реальний вектор керувань:

$$u(k) = \Gamma^{-1}u_v(k) = B^{-1}Pu_v(k).$$

Структурну схему АС з модальним регулятором стану зображено на рис. 9.1, де 1 – модальний синтезатор, 2 – модальний регулятор, 3 – модальний аналізатор. Змінні стану "розв'язані" завдяки перетворенню $v(k) = P^{-1}x(k)$ в блоці, який називають модальним аналізатором. Формування перетвореного вектора $u_v(k)$ здійснюється в модальному регуляторі K_v. Реальний вектор $u(k)$ відновлюється шляхом зворотного перетворення в модальному синтезаторі.

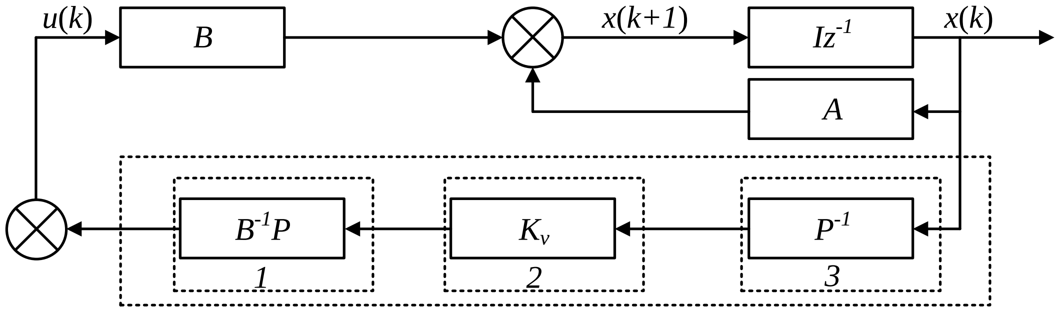

Рис. 8.1.

Враховуючи те, що регулярні матриці керування B (тобто квадратні матриці з ненульовим визначником) зустрічаються досить рідко, метод модального керування не знаходить широкого застосування.

Як зазначалось вище, для синтезу модального регулятора треба вибрати значення λ_{oi} полюсів замкненої системи. Цей вибір потрібен для досягнення системою потрібних показників якості. У цій лабораторній роботі таким показником є швидкодія t_k системи, яка визначається як час, після якого змінні стану замкненої системи будуть меншими $\Theta = \begin{bmatrix} \Theta_1 & \Theta_2 & \dots & \Theta_n \end{bmatrix}^T$, де $\Theta_i = \pm 0,01$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Розрахунок динамічної замкненої системи керування, тобто обчислення змінних стану $x(k)$ при $k = 1, 2, \dots$, виконують за формулою (52), якщо замість $u(k)$ записати $u(k) = -Kx(k)$, де $K = P^{-1}K_v B^{-1}P$ – матриця зворотного зв'язку системи. Тоді вираз (52) можна переписати так:

$$x(k+1) = (A - PK_v P^{-1})x(k).$$

Для початку розрахунків треба задати $x(0)$.

Послідовність виконання роботи

1. Обчислити власні значення та власні вектори матриці A.
2. Задати початковий вектор $x(0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$ та матрицю $B = diag\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.
3. Задати значення полюсів λ_{oi} $(i = 1,\ 2,\ 3)$ та розрахувати змінні стану замкненої системи для k=1, 2, …, 10.
4. Змінюючи значення полюсів, знайти такі їх значення, за яких швидкодія системи керування буде 5 с, 10 с, 20 с (період квантування T=1 с). Записати відповідні значення K_v та розрахунки характеристики стану системи.
5. Задати період квантування в системі T=0.2 с та повторити розрахунки за пп. 1 – 4.

Оформлення результатів роботи

Побудувати графіки зміни змінних стану замкненої системи для всіх варіантів розрахунків, вказавши відповідні числові значення показника якості, полюсів системи, матриці K_v зворотного зв'язку та періоду квантування.

Контрольні запитання

1. Який регулятор називається модальним регулятором стану?
2. Як перетворити перехідну матрицю стану до діагонального вигляду? Навіщо це робити?
3. Які обмеження існують для застосування модальних регуляторів стану?
4. Доведіть, що при синтезі модального регулятора стану полюси замкненої системи можуть бути задані незалежно один від одного.
5. Що таке модальний аналізатор, модальний регулятор та модальний синтезатор?
6. Яка матриця називається регулярною?
7. Який показник якості автоматичної системи використовується для синтезу модального регулятора в цій лабораторній роботі? Як він називається?

8. Як пов'язане розташування полюсів АС з такими її властивостями, як періодичність чи коливність?

9. Чи однаково всі полюси АС впливають на її швидкодію?

10. Чи впливає період квантування дискретних систем на синтез модального регулятора? Доведіть.

11. Як виконують розрахунок змінних стану замкненої системи?

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Жученко А.І. Математичні моделі цифрових систем керування.- К.: ІЗМН, 1997. – 240 с.

2. Сучасна теорія управління. Частина 2. Прикладні аспекти сучасної теорії управління [Електронний ресурс]: підручник для студ. спеціальності 151 «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології / Ю.М. Ковриго, О.В. Степанець, Т.Г. Баган, О.С. Бунке; КПІ ім. Ігоря Сікорського. – Електронні текстові дані (1 файл: 3,98 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2017. – 155 с.

3. Методи сучасної теорії управління: підручник / А.П. Ладанюк, Н.М. Луцька, В.Д. Кишенько, Л.О. Власенко, В.В. Іващук – Київ : Видавництво Ліра-К, 2018. – 368 с

4. Методичні вказівки до виконання лабораторних робіт з курсу "Теорія автоматичного керування" / А. І. Жученко, Т. В. Аверіна, М. В. Коржик. – К.: ІВЦ "Видавництво «Політехніка»", 2002. – 36 с