МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

Навчальний посібник

МЕТОДИ ОПТИМІЗАЦІЇ ТА ПОШУКУ ОПТИМАЛЬНИХ РІШЕНЬ

Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавр,
за освітньою програмою «Технічні та програмні засобів автоматизації»
спеціальністю 151
«Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології»
Укладач Л.Р.Ладієва
Електронне мережне навчальне видання

Київ
КПІ ім.. Ігоря Сікорського
2023

Рецензент: Корнієнко Б.Я., д-р. техн. наук, проф., професор кафедри інформаційних систем та технологій

Відповідальний редактор Жученко А.І., д-р техн. наук, професор

Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
(протокол №2510 від 15.05.2023р.)
за поданням Вченої ради інженернохімічного факультету
(протокол №5 від 24.04. 2023р.)

У посібнику розглядаються методи і алгоритми для розв’язку задач статичної оптимізації. Приділено увагу методам дослідження функцій класичного аналізу, лінійного програмування. Розглянуті симплекс-метод, двоетапний симплекс-метод, аналіз чутливості і подвійний симплекс-метод, трансплортна задача, двоїстість у лінійному програмуванні. Також розглянуті алгоритми розв’язку задач цілочислового програмування. Наведені завдання для самостійного розв’язку.

Посібник призначений для здобувачів ступеня бакалавр за спеціальністю 151 «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології». Може бути корисний студентам інших спеціальностей, які пов’язані з розробкою систем оптимізації.

Реєстр. № НП 22/23-679. Обсяг 3 авт. арк.
Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
проспект Перемоги, 37, м. Київ, 03056 https://kpi.ua
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру видавців, виготовлювачів і розповсюджувачів видавничої продукції ДК № 5354 від 25.05.2017 р.

© Л.Р.Ладієва,2023
© КПІ ім.. Ігоря Сікорського. 2023

ВСТУП

Завдання відшукування найбільших і найменших величин часто виникають у науці, техніці та економіці. Щоб застосовувати математичні методи для їх вирішення та аналізу, необхідно вміти переходити від змістовної до математичної постановки завдання. Сучасні методи оптимізації використовуються для підвищення якості і надійності продукції, для підвищення продуктивності обладнання, для мінімізації ризиків, для підвищення ефективності технологічних процесів, як на етапі проектування так і при керуванні. Широкому впровадженню методів оптимізації та оптимального керування сприяє те, що прикладні оптимальні задачі в більшості зводяться для розв'язання типових задач оптимізації.

Посібник присвячений питанням практичного використання методів статичної оптимізації для практичних робіт. Основна увага приділяється методам і алгоритмам, що використовуються при проектуванні, керуванні і аналізі функціонування технологічних об'єктів. Розглядаються методи дослідження функцій класичного аналізу, методи лінійного програмування, як розділу дослідження операцій , які знайшли застосування при вирішенні задач, що пов'язані з ефективним використанням обмежених ресурсів.

Мета посібника допомогти студентам освоїти розділи статичної оптимізації і застосувати знання на прикладах, представлених у формалізованому вигляді.

1. МЕТОДОЛОГІЧНІ ОСНОВИ ОПТИМІЗАЦІЇ

Процес оптимізації лежить в основі усієї інженерної діяльності, оскільки класичні функції інженера полягають у тому, щоб, з одного боку, проектувати нові, більш ефективні і менше дорогі технічні системи і, з іншого боку, розробляти методи підвищення якості функціонування існуючих систем.

Ефективність оптимізаційних методів, що дозволяють здійснити вибір найкращого варіанта без безпосередньої перевірки всіх можливих варіантів, тісно пов'язана із широким використанням досягнень в галузі математики шляхом реалізації ітеративних обчислювальних схем, що спираються на суворо обґрунтовані логічні процедури й алгоритми, на базі застосування обчислювальної техніки. Тому для викладу методологічних основ оптимізації потрібно залучення найважливіших результатів теорії матриць, елементів лінійної алгебри і диференціального числення, а також положень математичного аналізу.

Оскільки розмірність інженерних задач, як правило, достатньо велика, оптимізаційні методи орієнтовані головним чином на реалізацію за допомогою ЕОМ.

Методи оптимізації ефективно застосовуються при проектуванні і керуванні технологічними процесами. При проектуванні технологічних процесів і виробництв, а також систем керування вибираються найкращий метод виробництва, схема виробництва, технологічний режим, варіант системи керування. При експлуатації технологічних процесів і виробництв бажано забезпечити найкращий технологічний режим за допомогою оптимальної системи керування. В цих випадках виникає питання: а що таке “найкращий”? Вихідною величиною при аналізі технологічних ланок з точки зору оптимального керування повинна служити техніко-економічна ефективність ведення процесу чи проектування. Рішення задач оптимізації з використанням технічних засобів, особливо ЕОМ пов’язано з коректною постановкою задачі оптимізації. Це особливо актуально в зв’язку з широким застосуванням систем автоматизації проектування (САПР) і автоматизованих систем керування технологічними процесами (АСУ ТП).

Перша і відповідальна задача розробки алгоритмів прийняття оптимальних рішень при проектуванні і керуванні технологічних процесів, постановка задачі оптимізації. Від її грамотного формулювання в значній мірі залежить алгоритмів оптимізації.

1.1 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ ОПТИМІЗАЦІЇ.

Для того, щоб використати математичні результати і чисельні методи теорії оптимізації для рішення конкретних інженерних задач, необхідно встановити межі системи, що підлягає оптимізації, визначити кількісний критерій, на основі якого можна зробити аналіз варіантів із метою виявлення оптимального, здійснити вибір змінних, що використовуються для визначення характеристик і ідентифікації варіантів, і нарешті, побудувати модель, що відображає взаємозв’язки між змінними. Ця послідовність дій складає зміст процесу постановки задачі оптимізації. Коректна постановка задачі служить ключем до успіху оптимізаційного дослідження й асоціюється в більшому ступені з мистецтвом, ніж із точною наукою.

Для правильної (коректної) постановки задачі оптимізації необхідне виконання умов:

наявність одного критерію оптимальності;

наявність у об’єкту оптимізації ступенів свободи, для об’єкту керування – керуючих впливів;

можливість кількісної оцінки оптимізуємої величини.

Постановка задачі оптимізації передбачає існування конкуруючих властивостей об’єкту. Вибір компромісного рішення і представляє у таких випадках процедуру рішення оптимальної задачі. В часткових задачах оптимізації, коли потрібно отримати екстремальні значення якого-небудь параметра оптимізації, конкуруючи властивості можна і не виявити.

Можливість існування специфічних екстремальних властивостей самого об’єкту оптимізації потрібно врахувати при розгляді конкретної оптимальної задачі.

При формулюванні задачі оптимізації можна виділити ряд послідовних етапів:

визначення меж системи;

вибір критерію оптимальності;

вибір незалежних змінних;

побудова математичної моделі системи.

1.1.1 ВИЗНАЧЕННЯ МЕЖ СИСТЕМИ

Перед тим , як приступити до оптимізаційного дослідження, важливо чітко визначити межі досліджуваної системи. Межі системи задаються границями, що відокремлюють систему від зовнішнього середовища, і служать для виділення системи з її оточення. При проведенні аналізу звичайно передбачається, що взаємозв'язки між системою і зовнішнім середовищем зафіксовані на деякому обраному рівні уявлення. Проте, оскільки такі взаємозв'язки завжди існують, визначення меж системи є першим кроком у процесі наближеного опису реальної системи.

У ряді випадків може виявитися, що початковий вибір границі є занадто жорстким.

Зрозуміло, розширення меж системи підвищує розмірність і складність багатокомпонентної системи і, отже, значною мірою ускладнює її аналіз. Очевидно, що в інженерній практиці слід, наскільки це можливо, прагнути до розбиття великих складних систем на невеличкі підсистеми, що можна вивчати окремо. Проте при цьому необхідно мати впевненість у тому, що така декомпозиція не призведе до зайвого спрощення реальної ситуації.

1.1.2 КРИТЕРІЙ ОПТИМАЛЬНОСТІ

Кількісна оцінка оптимізованої якості об'єкту називається критерієм оптимальності. У інженерних задачах звичайно вибираються критерії техніко-економічного характеру. Проте спектр можливих формулювань таких критеріїв дуже широкий; при визначенні критерію можуть використовуватися такі економічні характеристики, як валові капітальні витрати, витрати в одиницю часу, чистий прибуток в одиницю часу, прибутки від інвестицій, відношення витрат до прибутку. У інших задачах критерій може грунтуватися на деяких технологічних факторах, наприклад, коли потрібно мінімізувати тривалість процесу виробництва виробу, максимізувати темпи виробництва, мінімізувати кількість споживаної енергії, максимізувати навантаження і т.п.. Незалежно від того, який критерій вибирається при оптимізації, "найкращому" варіанту завжди відповідає *мінімальне* або *максимальне* значення характеристичного показника якості функціонування системи.

Тільки *один* критерій може використовуватися при визначенні оптимуму, тому що неможливо одержати рішення, що, наприклад, одночасно забезпечує мінімум витрат, максимум виходу продукту і мінімум споживаної енергії.

Один із шляхів урахування сукупності суперечливих цільових настанов складається в тому, що якийсь із критеріїв вибирається в якості первинного, тоді як інші критерії рахуються вторинними. У цьому випадку первинний критерій використовується при оптимізації як характеристична міра, а вторинні критерії породжують обмеження оптимізаційної задачі, що встановлюють діапазони змін відповідних показників від мінімального до максимального прийнятного значення.

Математична реалізація критерію оптимальності називається функцією мети чи цільовою функцією. Вигляд критерію оптимальності визначається конкретним змістом розв'язуваної задачі оптимізації і іноді може чинити суттєвий вплив на вибір методу рішення. На основі вибраного критерію оптимальності складається цільова функція або функція мети, яка представляє собою залежність критерію оптимальності від параметрів, що впливають на його значення.

1.1.3 НЕЗАЛЕЖНІ ЗМІННІ

На третьому головному етапі постановки задачі оптимізації здійснюється вибір незалежних змінних, що повинні адекватно описувати припустимі проекти або умови функціонування системи. У процесі вибору незалежних змінних варто взяти до уваги ряд важливих обставин, що розглядаються нижче.

По-перше, необхідно провести розділення між змінними, значення яких можуть змінюватися в достатньо широкому діапазоні, і змінними, значення яких фіксовані і визначаються зовнішніми факторами.

По-друге, при постановці задачі варто враховувати всі основні змінні, що впливають на функціонування системи або якість проекту. Незалежні змінні повинні вибиратися таким чином, щоб усі найважливіші техніко-економічні вирішення знайшли відбиток у формулюванні задачі.

Нарешті, ще одним істотним чинником, що впливає на вибір змінних, є рівень деталізації при дослідженні системи. Дуже важливо ввести в розгляд усі основні незалежні змінні, але не менше важливо не "перевантажувати" задачу великою кількістю дрібних, несуттєвих деталей. При виборі незалежних змінних доцільно керуватися правилом, відповідно до якого варто розглядати тільки ті змінні, що роблять істотний вплив на характеристичний критерій, обраний для аналізу складної системи.

1.1.4 МОДЕЛЬ СИСТЕМИ

Після того як характеристичний критерій і незалежні - змінні обрані, на такому етапі постановки задачі необхідно побудувати модель, що описує взаємозв'язок між змінними задачі і відображає вплив незалежних змінних на ступінь досягнення цілі, обумовленої характеристичним критерієм.

Проте на практиці оптимізаційні дослідження проводяться, як правило, на основі спрощеного математичного уявлення системи, тобто на математичній *моделі.* Застосування моделей обумовлене тим, що експерименти з реальними системами звичайно потребують занадто великих витрат засобів і часу, а також у ряді випадків виявляються пов'язаними з ризиком.

У самому загальному уявленні структура математичної моделі включає головні рівняння матеріальних і енергетичних балансів, співвідношення, пов'язані з проектними рішеннями, а також рівняння, що описують фізичні процеси, що протікають у системі. Ці рівняння звичайно доповнюються нерівностями, що визначають область припустимих значень незалежних змінних, дозволяють визначити вимоги, що накладаються на верхні або нижні межі зміни характеристик функціонування системи, і встановити ліміти наявних ресурсів. Таким чином, елементи моделі містять всю інформацію, що звичайно використовується при проектуванні або прогнозуванні характеристик системи.

1.2 ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДІВ ОПТИМІЗАЦІЇ У ІНЖЕНЕРНІЙ ПРАКТИЦІ

Теорія оптимізації знаходить ефективне застосування в усіх напрямках інженерної діяльності, і в першу чергу в наступних чотирьох її галузях:

1) проектування систем і їхніх складових частин;
2) планування й аналіз функціонування існуючих систем;
3) інженерний аналіз і обробка інформації;
4) керування динамічними системами.

1.3 ВИБІР КРИТЕРІЇВ ОПТИМАЛЬНОСТІ

Вибір критерію оптимальності лежить поза рамками теорії оптимальних систем і, як відзначає А. М. Летов [92], є прерогативою тієї області прикладної науки, до якої відноситься керований об'єкт. Можливі різноманітні підходи до проблеми вибору і класифікації критеріїв ефективності. Зокрема. у роботах А. А. Фельдбаума [174] пропонується підрозділяти критерії в залежності від того, дозволяють вони оптимізувати перехідні або усталені процеси в системі.

В залежності від цього задачі оптимізації підрозділяються на:

а) статичну оптимізацію,
б) динамічну оптимізацію.

В задачах динамічної оптимізації при керуванні технологічними процесами істотне значення має досягнення оптимальної динамічної точності. З цією метою може бути використаний інтегральний критерій якості перехідного процесу

$$I = \int_{t_0}^{t_f} F(x, x', t)dt \tag{1.3.1}$$

де $x(t)$ – припустима траєкторія. При значних коливаннях перехідного процесу можна проводити оптимізацію за узагальненим критерієм

$$I = G[X(t_f), t_f] + \int_{t_0}^{t_f} F[X(t), U(t), t]dt \tag{1.3.2}$$

де $G[X(t_f), t_f], F[X(t), U(t), t]$ можуть бути квадратичною формою.

$$G[X(t_f), t_f] = \frac{1}{2} X^T(t_f) S X(t_f),$$

$$F[X(t), U(t), t] = \frac{1}{2} X^T Q X + \frac{1}{2} U^T R U,$$

Q, R — матриці вагових коефіцієнтів,

$X - n -$ мірний вектор стану,

$U - m -$ мірний вектор керування.

В задачі керування кінцевим станом функція вартості може бути представлена

$$I = G[X(t_f), t_f]$$

Одним з важливих видів оптимального керування є керування, що мінімізує тривалість перехідних процесів у системі, яке називають також керуванням, оптимальним за швидкодією. Так, наприклад, при реалізації періодичних технологічних процесів у хімічній промисловості найбільший вплив на вартість кінцевого продукту у багатьох випадках здійснює трудомісткість, видатки виробництва і розміри планових інвестицій. Всі ці витрати збільшуються зі збільшенням часу, що витрачається на один цикл, тому час циклу є показником оптимального процесу

$$I = \int_{t_0}^{t_f} dt = t_f - t_0 \to \min$$

Важливими є подальші узагальнення критерію якості системи керування, що враховують її вартість і різноманітні експлуатаційні характеристики. Основні критерії оцінки систем автоматичного керування технологічними комплексами такі:

1) C - вартість розробки, виготовлення, впровадження й експлуатації системи;
2) P - продуктивність технологічного процесу або агрегату;
3) H - надійність розроблюваної системи;
4) F - якість функціонування (точність роботи системи - забезпечення заданої якості кінцевих продуктів технологічного процесу);
5) W - енергетичні показники системи;
6) J - інформаційна спроможність алгоритмів керування і контролю технологічного процесу.

Проектувальник може вирішувати, чи буде система кращою по продуктивності, вартості або іншій характеристиці. У той же час замість таких субоптимальних для системи рішень він може, з огляду на всі перераховані чинники, шукати систему, що задовольняє критерію оптимальності за сукупністю вимог.

При кількісній оцінці кожний із приведених вище критеріїв представляється вектором із визначеним числом компонент:

$$\begin{aligned} C &= \left(c_1, c_2, \ldots c_{n_1}\right); P = \left(p_1, p_2, \ldots p_{n_2}\right); \\ H &= \left(h_1, h_2, \ldots h_{n_3}\right); F = \left(\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_{n_4}\right); \\ W &= \left(w_1, w_2, \ldots w_{n_5}\right); L = \left(l_1, l_2, \ldots l_{n_6}\right); \end{aligned} \quad (1.3.3)$$

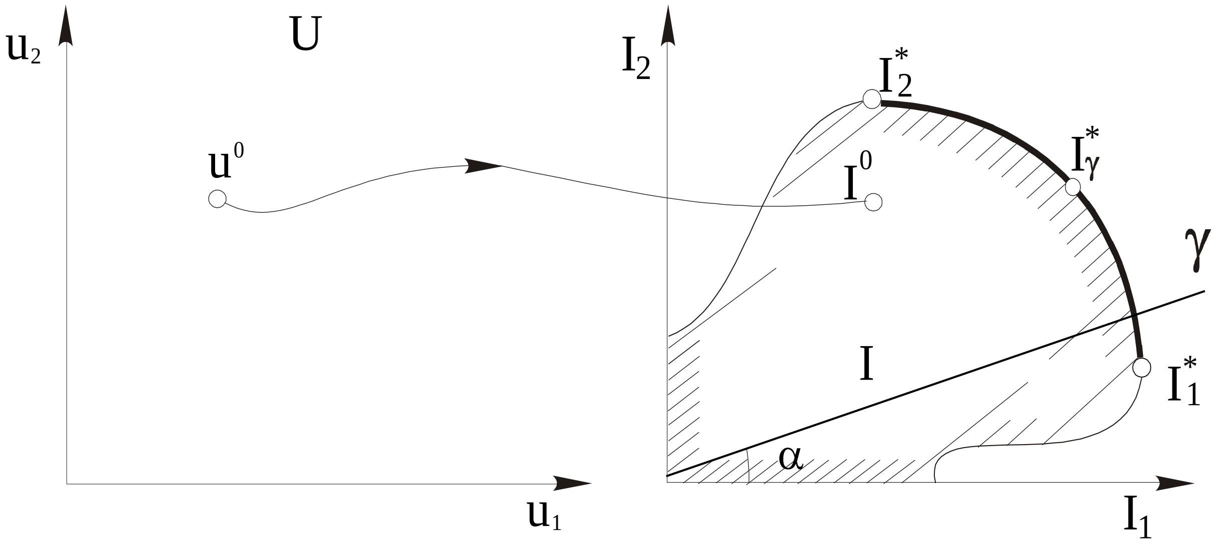
де $c_1, c_2, \ldots c_{n_1}$ - числові характеристики, що виражають вартість окремих елементів системи, вартість розробки, виготовлення, впровадження й експлуатації системи; $p_1, p_2, \cdots p_{n_2}$ - числові характеристики, що визначають вихід кінцевих продуктів і продуктивність процесів; $\varphi_1, \varphi_2, \cdots \varphi_{n_4}$ - числові характеристики, впливають на якість функціонування автоматизованої системи керування технологічним процесом: час перехідного процесу, коливальність, статична і динамічна похибки, інтегральні оцінки якості, можливість влучення в задану область фазового простору вихідних координат процесу; $h_1, h_2, \ldots h_{n_3}$ - числові характеристики, . що виражають надійність функціонування системи: можливість безвідмовної роботи для різноманітних технологічних режимів ведення процесу, середній час безвідмовної роботи, профілактичні заходи, ремонтоздатність; $w_1, w_2, \ldots w_{n_5}$ - числові характеристики, що виражають потужність енергії, споживаної окремими елементами й пристроями системи при різноманітних умовах роботи, енергетичні ресурси; $l_1, l_2, \ldots l_{n_6}$ - числові інформаційні характеристики АСУ ТП: ентропія вихідних параметрів, кількість інформації при різноманітних режимах ведення технологічних процесів і функціонування систем.

При проектуванні оптимальних систем керування конкретними технологічними процесами деякі з приведених вище критеріїв мають домінуюче значення, інші грають другорядну роль. Наприклад, задача оптимізації математично може бути сформульована в такій формі: знайти оптимальну структуру й оптимальні параметри системи керування процесом, що забезпечує максимальне значення функціонала I (критерій якості); при цьому вектор функції C (вартість), P (продуктивність), H (надійність), W (енергетичні витрати), J (інформаційні алгоритми) повинні задовольняти заданим нерівностям $C \le C_T, P \ge P_T, H \ge H_T, W \le W_T, J \le J_T$.

1.4 Способи формування зведеного критерію оптимальності.

Позначимо через I_ν ν-тий показник функціонування процесу і будемо для простоти вважати, що в результаті оптимізації бажано будь-який із m таких показників (частинні критерії) збільшити. Якщо деякі з показників, наприклад капіталовкладення M, потрібно зменшити, то відповідний їм частинний критерій

I_ν приймемо рівним – M . Через u позначимо параметри процесу і системи керування, що підлягають оптимальному вибору, і будемо спочатку вважати задачу цілком детермінованою, вважаючи, що значення кожного. з частинних критеріїв стає відомим при завданні u . Таким чином, кожній точці u° в просторі U параметрів відповідає точка I° в просторі I критеріїв (рис. 1.1). Ясно, що оптимальне рішення по одну критерію I_1 приводить у точку I_1^* (рис. 1.1, б) і не збігається з оптимальним рішенням за критерієм I_2 (точкою I_2^*). Щоб знайти оптимальне рішення u^* , можна піти шляхом формування з частинних критеріїв I_ν зведеного критерію $\bar{I}$. Приведемо декілька способів одержання $\bar{I}$.



а б

Рис. 1.1. Схема формування критерію оптимальності:
а—простір керуючих впливів; б—простір критеріїв

Згортка частинних критеріїв із ваговими коефіцієнтами. Вагові коефіцієнти γ_ν враховують відносну важливість того або іншого критерію і встановлюються шляхом експертизи

$$\hat{I} = \sum_{\nu=1}^{m} \gamma_\nu I_\nu \to \max_u \tag{1.4.1}$$

де

$$\gamma_\nu \geq 0; \quad \sum_{\nu=1}^{m} \gamma_\nu = 1 \tag{1.4.2}$$

Значення частинних критеріїв I_ν при використанні згортки (1.4.1) повинні бути або безрозмірними, або мати однакову розмірність.

Використання нормативних показників. Нехай для кожного з частинних критеріїв відомо деяке нормативне значення $I_{\nu н}$, наприклад середнє значення I_ν для діючих апаратів, аналогічних оптимізованому. Тоді відношення $i_\nu = I_\nu / I_{\nu н}$ характеризує ступінь досконалості процесу з погляду ν -го показника. Позначимо мінімальне по ν значення i_ν через $i_{*\nu}$. У цьому випадку критерієм оптимальності може бути значення $i_{*\nu}$, так що

$$i_{*\nu} = \min_{\nu}\left(I_\nu / I_{\nu n}\right) \to \max_{u} \qquad \textbf{(1.4.3)}$$

При використанні такого критерію можна бути упевненим, що ступінь досконалості по будь-якому показнику буде не нижче, чим значення $i^{\max}{}_{*\nu}$, отримане в результаті рішення задачі (1.4.3). Практично часто надається, що збільшення одного з показників i_ν призводить до зменшення іншого. У цьому випадку використання критерію (1.4.3) дає таке оптимальне рішення u^*, для котрого два або декілька значень i_ν виявляться однаковими і рівними $i^{\max}{}_{*\nu}$.

Наближення до "ідеалу". Нехай відомі рішення m задач оптимізації вигляду

$$I_\nu \to \min_u; \; \nu = \overline{1, m}. \qquad \textbf{(1.4.4)}$$

У результаті знайдені граничні значення I_ν^* кожного з частинних критеріїв оптимальності без урахування інших. У просторі критеріїв точку I^* з координатами I_ν^* називають ідеалом (рис. 1.1, б). Коли рішення $u^*{}_\nu$ задач (1.4.4) не однакові, ідеал не належить множині I досяжних значень критеріїв. Проте можна на другому етапі рішення поставити задачу визначення такого досягненого критерію $\bar{I}$ і відповідного йому припустимого рішення $\bar{u}$, для яких відстань від ідеалу була б мінімальною, наприклад:

$$\sum_{\nu=1}^{m}\left[\frac{1}{I_\nu^*}\left(I_\nu^* - \bar{I}_\nu^*(u)\right)\right]^2 \to \min_u$$

або

$$\max_{\nu}\frac{1}{I_\nu^*}\left(I_\nu^* - \bar{I}_\nu^*(u)\right) \to \min_u$$

Справедлива поступка. Вибір рішення в задачі з декількома частинними критеріями являє собою поступку, тому що збільшення одного показника призводить до зменшення іншого. При справедливій поступці приходимо до того, щоб у точці u^* сума відносних змін усіх показників дорівнює нулю. Таким чином, у точці u^* повинна бути виконана рівність

$$\sum_{\nu=1}^{m}\delta I_\nu\left(u^*\right)/I_\nu\left(u^*\right) = 0. \qquad \textbf{(1.4.5)}$$

яку можна переписати в такому вигляді:

$$\sum_{\nu=1}^{m}\delta\left[\ln I_\nu(u)\right]_{u=u^*} = \delta\sum_{\nu=1}^{m}\ln I_\nu(u) = 0. \qquad \textbf{(1.4.6)}$$

Рівність (1.4.6) є необхідною умовою максимуму добутку значень $I_\nu(u)$. Дійсно, якщо

$$\bar{I} = \prod_{\nu=1}^{\mathrm{m}} I_\nu(u) \qquad \textbf{(1.4.7)}$$

досягає максимуму, то максимальний і логарифм цього виразу

$$\ln\bar{I} = \sum_{\nu=1}^{\mathrm{m}}\ln I_\nu(u)$$

Таким чином, справедлива поступка відповідає зведеному критерію (1.4.7), рівному добутку частинних критеріїв.

Оптимальність за Парето. Вибір кожного з приведених вище способів одержання зведеного критерію суб'єктивний або оснований на деяких додаткових припущеннях. Тим часом, оптимальне рішення в задачі з декількома критеріями можна визначити інакше, ніж у задачі з одним критерієм. У цьому випадку немає необхідності у введенні зведеного критерію оптимальності $\bar{I}$. Такий підхід був запропонований у 1904 р. італійським економістом В. Парето.

Оптимальним за Парето рішенням u_{Π} є будь-яке рішення, якщо серед припустимих вирішень не знайдеться такого u° , для котрого

$$I_{\nu}\left(u^{\circ}\right) \geq I_{\nu}\left(u_{\Pi}\right); \quad \nu = \overline{1,m}, \tag{1.4.8}$$

причому хоча б для одного значення ν нерівність (1.4.8) строга. Іншими словами, u_{Π} оптимально, якщо не можна поліпшити жодного з частинних показників, не погіршуючи при цьому хоча б одного з інших.

Оптимальним за Парето рішенням відповідає на рис. 1.1,б та частина межі множини I (виділена жирною лінією), для котрої будь-який напрямок, що утворить із віссю абсцис кут, менший або рівний $\pi/2$, виводить за межі множини I .

Легко показати, що будь-який із приведених вище способів утворення зведеного критерію $\bar{I}$ призводить до одержання одного з рішень, оптимальних за Парето. У тому випадку, коли межа множини I , що відповідає оптимальним за Парето рішенням, опукла, усі ці рішення можна одержати з задачі про максимум зведеного критерію (1.4.1) при зміні вагових коефіцієнтів γ_{ν} у межах умов (1.4.2).

Урахування випадкових чинників у критеріях оптимальності.

Критерій оптимальності може бути регулярним чи статистичним.

Регулярний критерій оптимальності характеризує з технічної чи економічної сторони об’єкт оптимізації. Це може бути температура в точці, яка характеризує якість суміші пального і окислювача; склад цільового продукту в потоці, що відходять з реактора, собівартість продукції.

Статистичні критерії оптимальності застосовуються для характеристики об’єктів оптимізації коли на вході об’єкту маємо змінні, що є випадковими функціями часу, чи окремі елементи об’єкту містять джерела випадкових збурень.

Прикладами статистичних критеріїв оптимальності можуть бути: мінімум середньоквадратичної оцінки або дисперсії, максимум правдоподібності, мінімаксний критерій, тобто мінімізація максимально можливого значення умовного ризику.

У ряді задач на результати оптимального рішення впливають випадкові чинники. Наприклад, в умови задачі може входити навантаження апарата, прогнозоване на планований період. При цьому прогноз носить статистичний характер. Позначимо через ξ випадковий чинник, для якого відомий або діапазон його можливих значень V_{ξ} або щільність розподілу ρ_{ξ} . У якості критерію оптимальності в першому випадку природно прийняти вираз $I\left(u,\xi_0\right)$, у котрому ξ_0 -таке значення $\xi \in U$, для якого функціонал $I\left(u^*,\xi_0\right)$ мінімальний. Вибір рішення з умови

$$\breve{I} = \min_{\zeta} I\left(u,\xi\right) \to \max_{u} \tag{1.4.8}$$

гарантує, що при іншому значенні ξ значення I^* буде не нижче, ніж $\breve{I}$. Якщо ж відома щільність розподілу випадкового чинника, то в якості критерію оптимальності може бути використане середнє по ξ значення функціонала I , тобто

$$\bar{I} = \int_{V_{\xi}} \rho\left(\xi\right) I\left(u,\xi\right) d\xi \to \max_{u} \tag{1.4.9}$$

Існує клас задач, у яких зв'язок між керуючими впливами і змінними стану процесу, що залежать від них , носить статистичний характер.

1.5 ТИПОВІ ПОСТАНОВКИ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ ТЕХНОЛОГІЧНИМИ ПРОЦЕСАМИ

Оптимізація статичного режиму.

Велику частину часу апарати працюють у сталому режимі. Цей режим може бути статичним (коли всі змінні, що характеризують його, незмінні в часі) або циклічним (коли всі змінними або частина з них періодично змінюються).

У статичному режимі при кожному значенні вектора зовнішніх впливів (склад сировини, параметри навколишнього середовища і т.п.) потрібно знайти такі керування, щоб показник ефективності роботи апарата був максимальний. Отримаємо

$$I \to \max \qquad \textbf{(1.5.1)}$$

при обмеженнях $Xv_{\min} \le Xv \le Xv_{\max}, Uv_{\min} \le Uv \le Uv_{\max}$ і зв'язках між X и U, обумовлених характеристиками апарату

$$f_v\left(X,U\right) = 0,\ v = \overline{1,m} \qquad \textbf{(1.5.2)}$$

У цій задачі X та U вже не вектори-функції, як у динамічної оптимізації, а вектори. Якщо функції, що визначають задачу, неперервні по сукупності змінних, то задача оптимізації статичного режиму являє собою задачу математичного програмування.

Оптимальний режим роботи паралельних агрегатів; розподіл навантажень.

Задача формулюється в такий спосіб: потрібно вибрати навантаження кожного з агрегатів і склад працюючих агрегатів, включених паралельно (рис. 1.2, а), якщо загальне навантаження (сумарні витрати сировини) задане, а загальна продуктивність повинна бути максимальною.

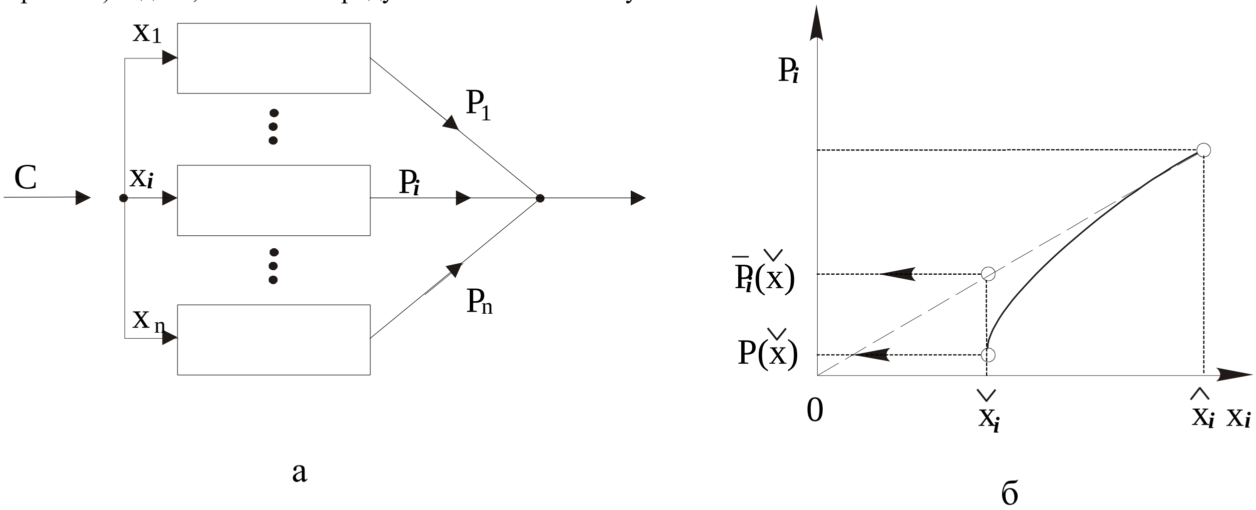


Рис. 1.2. Система паралельних агрегатів:
а - структура; б - . залежність навантаження агрегату від витрати сировини

Для кожного з агрегатів відома навантажувальна характеристика - залежність продуктивності P_i від витрати сировини x_i, (рис 1.2.б). Загальне число агрегатів позначимо n, а сумарна продуктивність - P. Тоді критерій оптимальності – максимальна сумарна продуктивність запишеться у вигляді

$$I = \sum_{i=1}^{n} P_i\left(x_i\right) \to \max . \qquad \textbf{(1.5.3)}$$

Запишемо обмеження на множину припустимих рішень:

$$x_i \text{ або } \check{x}_i \le x_i \le \hat{x}_i \qquad \textbf{(1.5.4)}$$

Перше з цих умов ставиться до випадку, коли агрегат виключений, друге — до випадку, коли він працює. Умови (1.5.4) зручно переписати, виключивши слово “або”, але ввівши додаткову цілочисельну

змінну y_i, рівну 1, коли i - тий агрегат включений, і дорівнює нулю, коли він виключений. Перепишемо x_i; у виді $x_i = v_i \tilde{x}_i$. Тоді умови (1.5.4) відповідають обмеженням на множині значень змінних x і v:
$\breve{x}_i \le x_i \le \hat{x}_i; \quad v_i = \{0,1\}; \quad i = \overline{1,n}$

Завданню сумарного навантаження по сировині відповідає вимога

$$\sum_{i=1}^{n} v_i \tilde{x}_i = C \qquad \textbf{(1.5.5)}$$

З урахуванням цих цілочисельних змінних критерій оптимальності запишеться у вигляді

$$I = \sum_{i=1}^{n} v_i P_i\left(\tilde{x}_i\right) \to \max \qquad \textbf{(1.5.6)}$$

Його потрібно максимізувати при умовах (1.5.5). Наявність цілочислених змінних значно ускладнює рішення цієї задачі.

Оптимальний режим роботи послідовних агрегатів (багатостадійні процеси).

Можлива постановка задачі послідовних агрегатів така: потрібно вибрати режим послідовно сполучених агрегатів так, щоб при заданій загальній продуктивності і заданих характеристиках кінцевого продукту витрати на його одержання були мінімальні.

Введемо позначення: x_{i+1} - вектор, що характеризує стан продукту на виході i -го апарата; u_i - керуючі впливи *i*-го апарата. Кожний з агрегатів (стадій процесу) характеризується витратами, що залежать від типу агрегату, від векторів u_i і x_i (параметри потоку на вході в i -той апарат). Позначимо ці витрати $f_0\left(x_i, u_i\right)$.

Мінімуму сумарних витрат відповідає критерій виду

$$I = \sum_{i=1}^{n} f_0\left(x_i, u_i, i\right) \to \min \qquad \textbf{(1.5.7)}$$

На змінні x_i, u_i накладені умови двох типів: автономні обмеження

$$x_i \in V_i; \quad u_i \in U_i; \quad i = \overline{1,n}$$

і обмеження, що зв'язують склад продукту на виході кожного агрегату (кожної стадії) із складом на вході і режимними змінними:

$$x_{(i+|1)v} = f_v\left(x_1, u_i, i\right); \quad i = \overline{1,n} \quad v = \overline{1,m} \qquad \textbf{(1.5.8)}$$

Підкреслимо, що в лівій частині цих рівностей фігурує v -та складового вектори x_{i+1}, а у функцію f_v входять у загальному випадку всі складові вектори x_i.

Для багатьох задач оптимізації послідовно включених агрегатів у хімічній технології початковий стан x_1 не можна вважати фіксованим. Склад сировини може змінюватися в деяких межах, причому ці зміни не завжди можна контролювати. У такому випадку керуючі впливи u_i можна вибирати або оптимально в середньому на всій множині зміни вектора x_i, або вони повинні бути оптимальні для самого несприятливого складу сировини.

Пуск і зупинка одиничного агрегату.

З ростом продуктивності агрегатів задача оптимального автоматизованого керування процесами пуску й зупинки одержує усе більше значення як у відношенні втрат продукту, що залежать від тривалості цих процесів, так і у відношенні безаварійності їхнього проведення. Ця задача часто полягає в введенні об'єкта з фіксованого початкового стана у фіксоване кінцеве за мінімальний час при виконанні обмежень, що гарантують безпеку пуску й зупинки.

Наприклад, при пуску барабанного котлоагрегату швидкість зміни температури металу труб пароперегрівача в місцях встановлення цих труб у барабан котла повинна бути обмежена через виникаючих тут термічні напруги.

Формалізуємо задачу пуску апарату, позначивши X – вектор стану, U – вектор керуючих впливів.

Критерієм оптимальності служить тривалість пуску:

$$I = t_f = \int_0^{t_f} dt \to \min \qquad \textbf{(1.5.9)}$$

Умови, що визначають множину припустимих рішень, являють собою таку сукупність:
обмежень, накладених на кожну зі складового вектора X і U

$$\breve{x}_\nu \le x_\nu \le \hat{x}_\nu, \quad \nu = \overline{1, m} \qquad \textbf{(1.5.10а)}$$

$$\breve{u}_j \le u_j \le u_j^{\max}, \quad j = \overline{1, n}\,; \qquad \textbf{(1.5.10б)}$$

умові, що визначають стан процесу наприкінці і на початку пуску

$$X(0) = x_0,\ X(t_f) = x_{t_f}\,; \qquad \textbf{(1.5.11)}$$

зв'язків між змінними стана і керуючих впливів, що у більшості випадків мають форму звичайних диференціальних рівнянь

$$x'_\nu = f_\nu(X, U), \nu = \overline{1, m}\,; \qquad \textbf{(1.5.12)}$$

Обмеження на кожну з змінних стана можуть залежати від інших змінних. Такі обмеження можна призвести до вигляду

$$F_k(x(t)) \ge 0,\ \forall t \in [0, t_f],\ k = 1, 2, \ldots; \qquad \textbf{(1.5.13)}$$

Часто існують обмеження на загальний ресурс керуючих впливів за весь інтервал пуску:

$$\int_0^{t_f} \varphi_\mu(U(t))dt - b_\mu = 0,\ \mu = 1, 2, \ldots; \qquad \textbf{(1.5.14)}$$

Таким чином, задача пуску апарата, зупинки і переводу з одного режиму на інший (1.5.9)-(1.5.13) являє собою варіаційну задачу оптимального керування, ускладнену обмеженнями (1.5.13) на змінні стана й умовами (1.5.14) на керуючі впливи.

У тому випадку, коли розглядати задачу пуску не одиничного апарату, а системи взаємозв'язаних апаратів, різко росте розмірність векторів стану і керування і додаються логічні умови зв'язку пуску якогось апарату з змінними стану зв'язаних з ним апаратів.

Оптимізація режиму в апараті періодичної дії.

У апаратах періодичної дії сировину періодично завантажують в апарат, а готовий продукт періодично вивантажують із нього. Тривалість циклу, а також закон зміни керуючих впливів за час циклу підлягають оптимальному виборові.

Нехай функція $f_0(X, U)$ визначає, як і вище, миттєву продуктивність процесу, з огляду на швидкість утворення корисного продукту, витрати на керування і т.п. Позначимо Θ тривалість завантаження і розвантаження, а t_f - тривалість роботи апарата в кожному циклі. Врахуємо також, що завантаження і розвантаження пов'язані не тільки з витратами часу, але і з витратами трудових і матеріальних ресурсів на сировину, регенерацію каталізатора, фільтра і т.п. Розмір цих витрат, що звичайно не залежать від тривалості циклу, позначимо A. Тоді критерій оптимальності задачі запишеться у вигляді

$$I = \frac{1}{t_f + \Theta}\left(\int_0^{t_f} f_0(X, U)dt - \mathrm{A}\right) \to \max \qquad \textbf{(1.5.15)}$$

Максимум цього виразу потрібно знайти при умовах (1.5.12), записаних у формі диференціальних рівнянь, і при фіксованих значеннях змінних стана

$$x_\nu(0) = x_{\nu 0}; \quad \nu = \overline{1, m}\,. \qquad \textbf{(1.5.16)}$$

Що стосується кінцевих значень цих змінних $x_\nu(t_f)$, то, як правило, деякі з них фіксовані, а інші вільні:

$$x_\nu(t_f) = x_{\nu t_f}; \nu = \overline{1, k}; k < m$$

Умови типу (1.5.10) і (1.5.13) також можуть мати місце. Виборові підлягають керуючі впливи $U_0(t)$ і робочий час циклу t_f .

1.6 ЗАДАЧІ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ І МЕТОДИ ЇХ РІШЕННЯ

Метою оптимізації є пошук найкращого або "оптимального" рішення. Хоча звичайно випадає задовольнятися поліпшенням відомих вирішень, а не доведенням їх до досконалості. Тому під оптимізацією розуміють скоріше прагнення до досконалості, що, можливо, і не буде досягнуто.

За характером шуканого рішення оптимізаційної задачі поділяють на задачі пошуку **безумовного** або **умовного** екстремуму цільової функції. Рішенням задачі про безумовний екстремум функції однієї або декількох змінних є деякий вектор, на складові якого не накладено ніяких обмежень. Рішенням задачі пошуку умовного екстремуму (максимуму або мінімуму) функції буде вектор, складові якого пов'язані один з одним функціональними умовами у формі рівностей або нерівностей.

Обмеження, накладені на змінні в задачах оптимізації, визначають множину припустимих рішень D.

$$h_j(X) = 0 \quad j = 1,\dots,m$$

$$g_j(X) \ge 0 \quad j = m+1,\dots,p$$

Якщо деякі зі співвідношень типу рівностей можна розв'язати щодо одного з проектних або технологічних параметрів, то це дозволяє виключити даний параметр із процесу оптимізації.

Крім зв'язків і обмежень на рішення можуть бути накладені додаткові умови. Так, іноді потрібно, щоб ті або інші функціональні складові рішення були неперервними функціями або функціями, що неперервно диференціюються. У ряді випадків обмеження такого типу пов'язані з фізичним змістом постановки, але частіше з використовуваним підходом до рішення задачі.

Оптимальним рішенням називають такий елемент **Xопт** множини припустимих рішень D, для якого критерій оптимальності приймає екстремальне значення. Слід зазначити, що дуже часто в зв'язку з обмеженнями оптимальне значення цільової функції досягається не там, де її поверхня має нульовий градієнт. Нерідко краще значення відповідає одній з меж множини D.

Верхньою гранню функції F на множині D називається мінімальне число F *, для якого виконується нерівність

$$F^* \ge F; \quad X \in D.$$

Для верхньої грані використовують позначення $F^* = \sup F$.

Для нижньої грані використовують позначення $F^* = \inf F$.

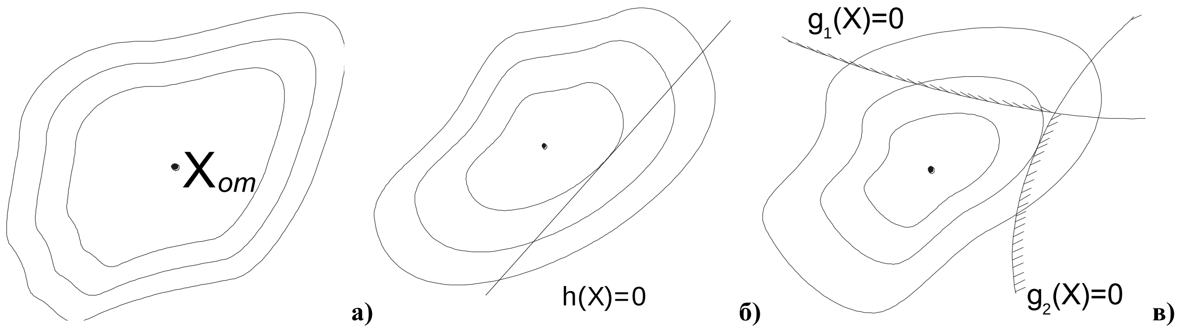
1.6.1. ГЕОМЕТРИЧНА ІНТЕРПРЕТАЦІЯ ЦІЛЬОВОЇ ФУНКЦІЇ І ОБМЕЖЕНЬ

Значення функції цілі F може розглядатися як функція, визначена в ***n***- мірному просторі змінних $X_v(j=1,...,n)$.

Оскільки наочне графічне зображення ***n***- мірного простору відсутнє, далі використовується такий прийом представлення $F(X)$ на плоскому кресленні.

Припустимо, що через точку $X_{опт}$ в ***n***- мірному просторі, що відповідає оптимальному вирішенню задачі, наприклад мінімуму цільової функції, проведена двомірна площина **P.** Тоді при віддаленій від точки $X_{опт}$ по цій площині в будь-якому напрямку значення $F(X)$ збільшується. Якщо $F(X)$ є неперервною функцією в області $X_{опт}$, те навколо точки $X_{опт}$ завжди можна провести в даній площині замкнену лінію, уздовж якої значення $F(X)$ постійно.

Таких замкнених ліній, названих лініями рівня функції $F(X)$ й відповідних різноманітних значень $F(X) = f_K$, можна провести в площині P навколо точки $X_{опт}$ скільки завгодно. Причому кожна з цих ліній для точки мінімуму буде цілком охоплювати будь-яку лінію, для якої значення $F(X)$ менше. Форма ліній постійного рівня, відповідає різноманітним значенням f_K, при цьому може бути істотно різноманітною.



а) **б)** **в)**

Рис.1.3. Лінії рівня функції F(x).

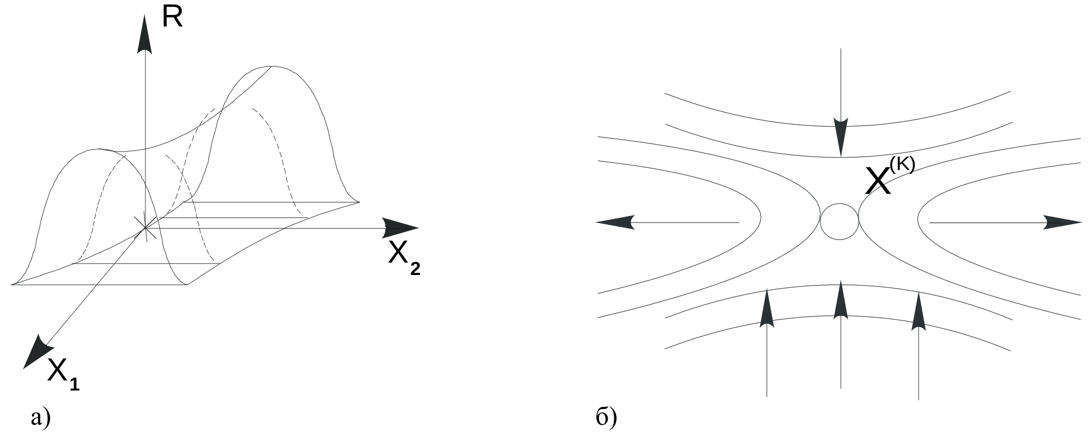
При наявності обмежень типу рівності $\left(h_j(X)=0, j=1,\ldots,m\right)$ розглянутий прийом зображення цільової функції можна використовувати, якщо взяти до уваги, що кожне з рівнянь $h_j(X)=0$ визначає в ***n-*** мірному просторі ***n-1-*** мірну поверхню, перетинання якої з двомірною площиною P має вид деякої лінії l (рис. 1.3,б), уздовж якої шукається оптимальне рішення. Правда, випадок, коли число обмежень рівностей більше 1, не піддається зображенню на плоскому кресленні, тому що лінія перетинання поверхні, визначеної двома обмеженнями може мати з площиною тільки деякі загальні точки. Обмеження типу нерівностей незалежно від їхнього числа наочно представляються описаним способом (рис. 1.3, в)

1.6.2. ОСОБЛИВІ ТОЧКИ І ЛІНІЇ ЦІЛЬОВОЇ ФУНКЦІЇ

Як відомо необхідною умовою екстремуму функції багатьох змінних є виконання системи рівностей:

$$\frac{\partial F}{\partial x_j}=0 \qquad j=1,\ldots,m$$

Оскільки ця умова - лише необхідна, але ще не достатня, можуть представитися випадки, коли при її виконанні в деякій точці $X^{(K)}$ екстремуму функції $F(X)$ в ній не буде. Прикладами подібних точок цільової функції служать точка, у яких функція $F(X)$ по один або декількох напрямкам має мінімум, у той час як по іншим - максимум. Такі точки називаються "сідловими" точками функції $F(X)$.



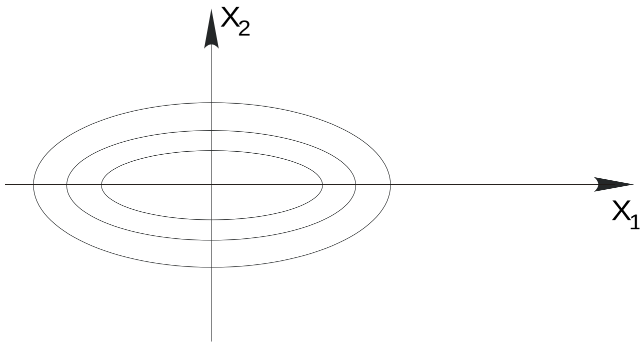
а) б)

Рис.1.4. "Сідлова" точка і лінії постійного рівня в околі "сідлової" точки

Іншим типом особливостей цільової функції є так називані "байраки", при наявності котрих уздовж визначених напрямків значення даної функції змінюється дуже слабко. Розглянемо, наприклад, функцію

$$F=\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{x_2^2}{b^2}+c^2,$$

у якій при виконанні умови $a >> b$ є "байрак", причому його "дно" розташовано уздовж осі x_1 (рис. 1.5).



У загальному випадку лінія “дна” байраку може не збігатися по напрямку з осями координат і, крім того, істотно відрізнятися від прямої, тобто можливі криволінійні байраки.

Рис.1.5. Лінії постійного рівня еліпса.

1.6.3. ГЛОБАЛЬНИЙ І ЛОКАЛЬНИЙ ОПТИМУМИ

Як показано на прикладі мультимодальной функції можуть існувати різноманітні типи оптимальних рішень, якщо цільова функція не є унімодальною (тобто тією, що має один екстремум). Глобальне оптимальне рішення представляє найменше значення $F(X)$, тоді як локальне оптимальне рішення являє собою найменше значення $F(X)$ в окрузі деякого вектора X.

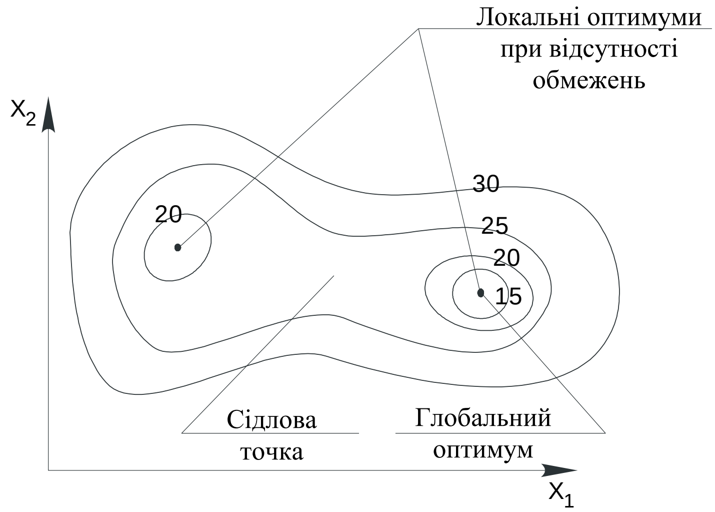


Рис.1.6. Класифікація оптимальних рішень

Як для глобального, так і для локального мінімуму

$$F(X^*) \le F(X)$$

те для глобального оптимального рішення це співвідношення виконується для всіх $X \in R^n$ ***n*** - мірний евклідовий простір, тоді як для локального оптимального рішення це має місце тільки для малої області ε, де $\left| x - x^* \right| < \varepsilon$.

При вирішенні конкретної задачі оптимізації насамперед треба вибрати математичний метод, що призводив до кінцевих результатів із найменшими витратами на обчислення або ж давав можливість одержати найбільший обсяг інформації про шукане рішення. Вибір того або іншого методу в значній мірі визначається постановкою оптимальної задачі, а також використовуваною математичною моделлю об'єкта оптимізації.

В даний час для рішення оптимальних задач застосовують у головному такі методи:

1. Методи дослідження функцій класичного аналізу
2. Методи основані на використанні невизначених множників Лагранжу
3. Лінійне програмування
4. Нелінійне програмування
5. Цілочисельне програмування.
6. Варіаційне числення

7. Принцип максимуму
8. Динамічне програмування

Як правило, не можна рекомендувати якийсь один метод, що можна використовувати для рішення усіх без винятку задач, що виникають на практиці.

Вибір метода рішення задач оптимізації залежить від вигляду цільової функції, обмежень, від мети розв’язку задачі, від використання технічних засобів вирішення оптимальних задач й ряду інших факторів. Одну і ту ж саму задачу оптимізації можна розв’язувати декількома методами, але для кожної конкретної ситуації існує найбільш ефективний метод.

2. МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІЙ КЛАСИЧНОГО АНАЛІЗУ

Методи дослідження функцій класичного аналізу являють собою найбільше відомі методи рішення відносно нескладних оптимальних задач. До них відносяться:

1. Метод пошуку безумовних екстремумів;
2. Метод невизначених множників Лагранжа;

Методи дослідження функцій класичного аналізу в основному застосовують у тих випадках, коли відомий аналітичний вигляд залежності функції, що оптимізується f від незалежних змінних x_i. Це дозволяє знайти також в аналітичному вигляді похідні оптимізованої функції, використовуючи котрі і формулюють необхідні і достатні умови існування екстремуму.

2.1. МЕТОД ПОШУКУ БЕЗУМОВНИХ ЕКСТРЕМУМОВ

Може застосовуватися для рішення задачі оптимізації при відсутності обмежень.

Цей метод заснований на знаходженні першої похідної цільової функції і прирівнюванні її до нуля. При цьому може вирішуватися багатопараметрична задача, тобто задача з кількома параметрами, що варіюються. Для рішення такої задачі необхідно знайти перші похідні по кожному з параметрів, що варіюються і всі ці похідні прирівняти нулю. При цьому необхідно вирішити систему кінцевих рівнянь, найчастіше нелінійних.

Додаткові ускладнення виникають унаслідок того, що рішення задачі пошуку оптимуму дає в цьому випадку лише необхідні, але не достатні умови. Тому усі рішення даної системи необхідно перевірити на достовірність. Крім того, методи дослідження функцій класичного аналізу не дозволяють відразу виділити глобальний екстремум. Тому після перевірки рішення оптимальної задачі на достовірність, провадитися пошук серед вирішень глобального екстремуму.

2.2. ЕКСТРЕМУМИ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

Необхідні умови існування екстремуму в неперервної функції $R(x)$ при відсутності обмежень на діапазон зміни змінної x можуть бути отримані з аналізу першою похідною dR/dx. При цьому функція $R(x)$ може мати екстремальне значення при таких значеннях незалежної змінної x, де похідна dR/dx дорівнює нулю або взагалі не існує. Графічно рівність нулю похідної означає, що дотична до кривої $R(x)$ в цій точці паралельна вісі абсцис (рис.2.1, а). На рис.2.1, б). і в). показано випадки, коли похідні в точках екстремуму функції $R(x)$ не існують.

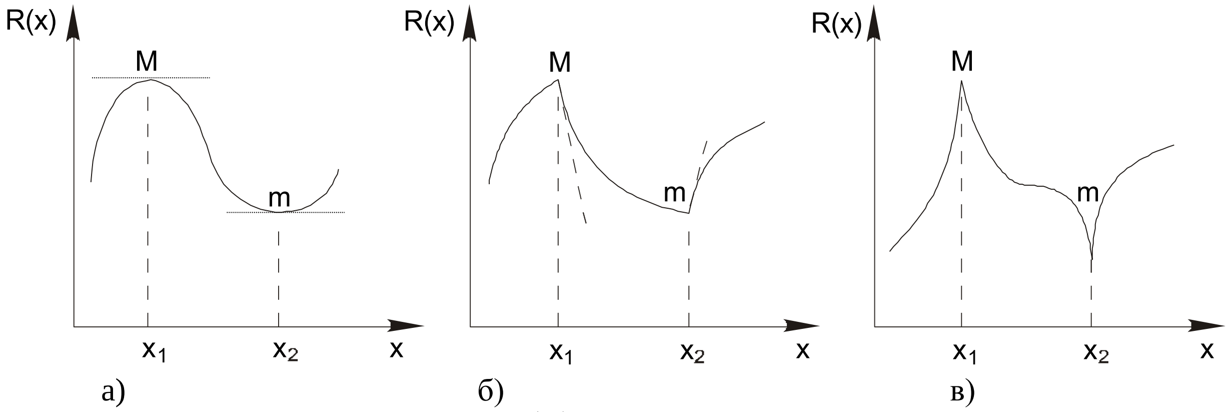


Рис.2.1. Різні типи екстремумів функції $R(x)$.

На рис.2.1, б неперервна функція $R(x)$ в точках x_1 і x_2 має злами, що відповідає наявності кінцевого розриву в похідній dR/dx в цих точках. У таких випадках прийнято говорити про існування різних значень похідної зліва і справа від точки екстремуму.

На рис.2.1, в показаний варіант, коли значення похідної в точках екстремуму перетворюється в нескінченність. Тут відбувається нескінченний розрив похідної, при котрому її значення змінюється від $+\infty$ до $-\infty$ у точці x_1 і від $-\infty$ до $+\infty$ у точці x_2.

Перераховані умови, тобто рівність нулю або відсутність похідною - тільки необхідні умови екстремуму.

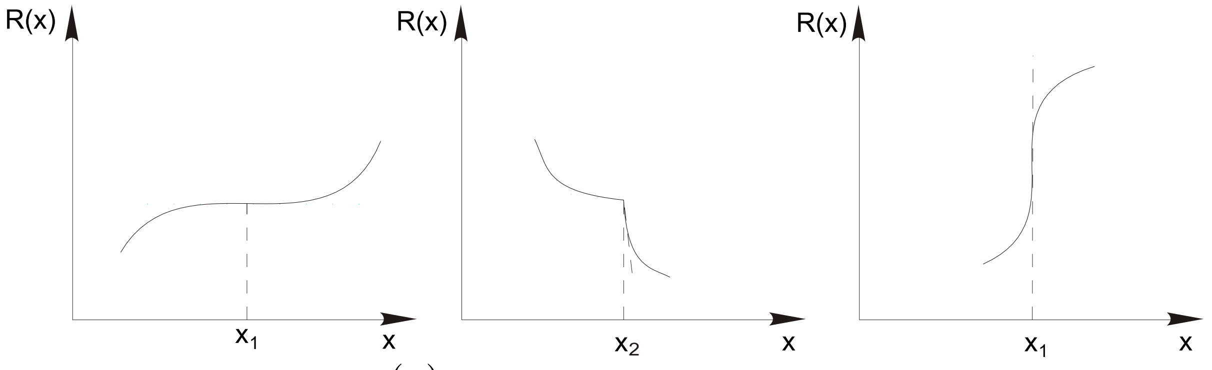


Рис.2.2. Особливості функції $R(x)$, що задовольняють необхідним умовам екстремуму.

Необхідно провести дослідження точок “підозрюваних” на екстремум.

Порівняння значень функції. Зі значенням функції в точці x_k, “підозрюваній” на екстремум, порівнюють два її значення, розраховані в точках, достатньо близьких до досліджуваної і розташованих зліва і справа від її, тобто при значеннях змінної $x_k - \varepsilon$ і $x_k + \varepsilon$, де ε - мала додатня величина. Якщо при цьому виявиться, що обидва розрахованих значення $R(x_k - \varepsilon)$ і $R(x_k + \varepsilon)$ менше або більше $R(x_k)$, то в точці x_k існує максимум або мінімум. Якщо ж $R(x_k)$ має проміжне значення між $R(x_k - \varepsilon)$ і $R(x_k + \varepsilon)$, то в точці x_k функція $R(x)$ не володіє ні максимумом, ні мінімумом.

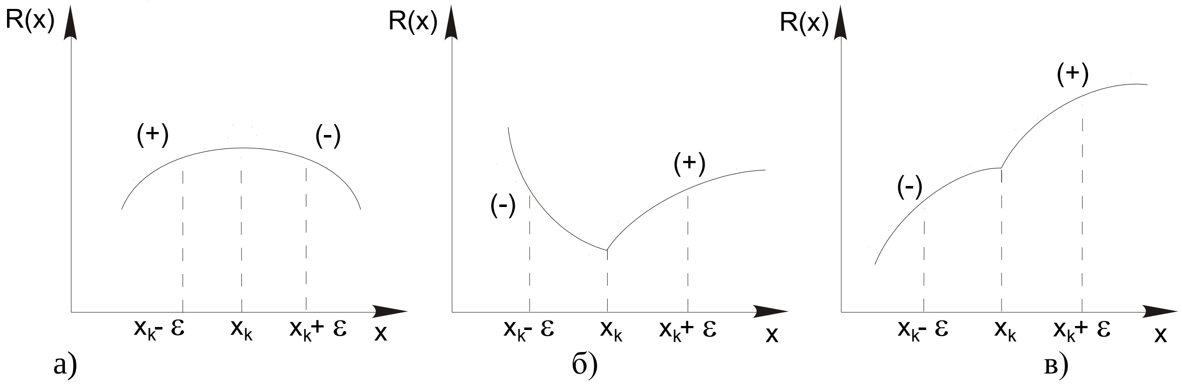


Рис.2.3. Перевірка точок на наявність екстремуму.

Порівняння знаків похідних. При цьому способі дослідження точки x_k, “підозрюваної” на екстремум, у точках $x_k - \varepsilon$ і $x_k + \varepsilon$ визначається знак похідною dR/dx. Якщо знаки похідною в цих точках різні, то в точці x_k є екстремум функції $R(x)$. Якщо знак похідною dR/dx при такому переході змінюється з (+) на (-), то в точці x_k - максимум (рис.2.3, а), якщо навпаки - із (-) на (+), те мінімум (рис.2.3, б). Якщо ж знаки похідною в точках $x_k - \varepsilon$ і $x_k + \varepsilon$ збігаються, те в точці x_k немає екстремуму (рис.2.3, в).

Дослідження знаків вищий похідних. Цей спосіб можна застосувати в тих випадках, коли в точці, “підозрюваній” на екстремум, існують похідні вищих порядків, тобто функція $R(x)$ не тільки сама неперервна, але і має також неперервні похідні dR/dx і d^2R/dx^2, а в деяких випадках і більш високого порядку.

Коли порядок першої, що не обертається в нуль похідної в точці x_k, для якої $dR/dx\big|_{x=x_k} = 0$, непарний, то в цій точці функція $R(x)$ не має ні максимуму, ні мінімуму, тобто точка x_k не є точкою екстремуму функції $R(x)$. Якщо ж порядок першої, що не повертається в нуль похідної в точці x_k парний, то в даній точці є екстремум функції $R(x)$, що буде максимумом або мінімумом у залежності від того, від'ємна або додатня ця похідна.

Може знадобитися виконання досить громіздких обчислень для визначення в аналітичному виді похідних вищих порядків. Тому іноді простіше скористатися одним із наведених вище перших двох способів.

Приклад 2.1. Знайти максимум і мінімум функції $y = 3x^3 - x$.

Необхідна умова

$$\frac{dy}{dx} = 9x^2 - 1 = 0$$

задовольняється при $x_1 = 1/3,\ x_2 = -1/3.$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 18x$$

при $x_1 = 1/3, \quad 18 \times 1/3 = 6$ мінімум

$x_1 = -1/3, \quad 18 \times (-1/3) = -6$ максимум

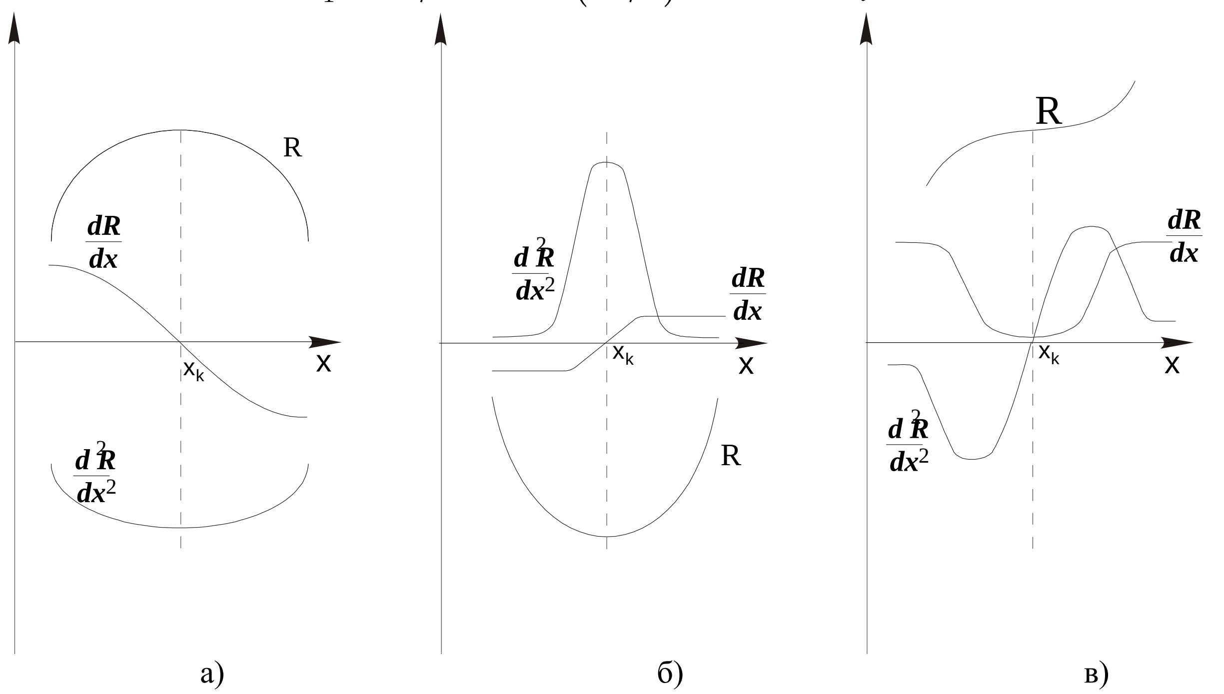


Рис.2.4. Перевірка точки на екстремум з використанням вищих похідних.

Для неперервних функцій однієї змінної максимуми і мінімуми чергуються між собою; між двома сусідніми максимумами розташований один мінімум, а між двома сусідніми мінімумами один максимум.

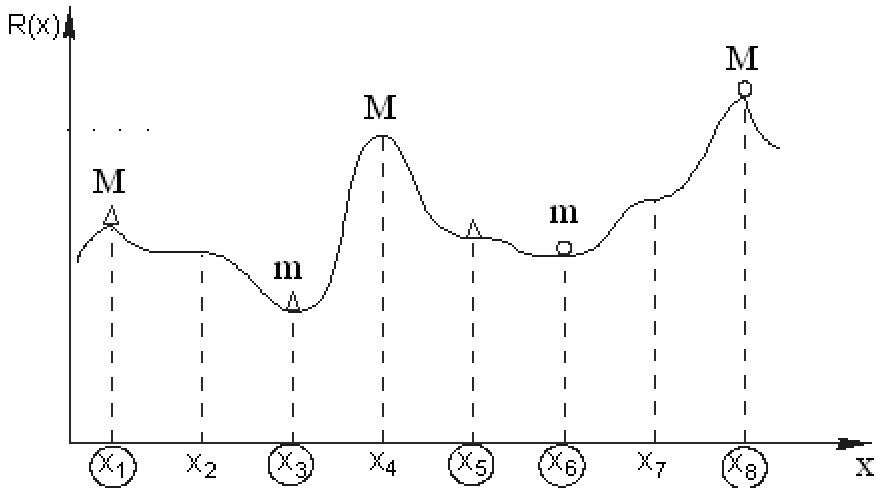


Рис.2.5. Глобальний і локальні екстремуми

Оскільки у точці x_1 - максимум, а в точці x_3 - мінімум, то в точці x_2 екстремуму немає. У точці x_5 немає ні максимуму, ні мінімуму, тому подальшу перевірку починаємо з точки x_6, у якій є мінімум. Отже в пропущеній точці x_4 може бути тільки максимум, оскільки два мінімуми не можуть слідувати підряд. У точці x_8 знову надається максимум, і виходить, у т. x_7 немає ні максимуму, ні мінімуму.

2.3. ЕКСТРЕМУМИ ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

Рішення задачі оптимізації істотно ускладнюється, коли критерій оптимальності є функцією декількох незалежних змінних навіть при відомому аналітичному виразі цієї функції. Найбільші труднощі виникають при відсутності неперервності у всіх або деяких похідних функції, що оптимізується. У останньому випадку для рішення оптимальної задачі доцільно використовувати методи нелінійного програмування.

Необхідні і достатні умови для неперервних функцій, що мають до того ж неперервні похідні першого і другого порядків.

Для неперервної функції багатьох змінних

$$f(X) = f(x_1, x_1, \dots, x_n)$$

що має неперервні похідні першого і другого порядки по всім змінним $x_i (i = 1, \dots, n)$, необхідною умовою екстремуму в точці $x_i^k (i = 1, \dots, n)$ служить рівність нулю в точці градієнту функції

$$\nabla f\left(X^{(k)}\right) = \begin{bmatrix} \dfrac{df}{dx_1^{(k)}} \\ \dfrac{df}{dx_2^{(k)}} \\ \cdot \\ \cdot \\ \dfrac{df}{dx_n^{(k)}} \end{bmatrix} = 0 \quad .$$

Тобто точка X^k, повинна задовольняти умові стаціонарності.

Слід пам'ятати, що функція f може мати оптимум у точці $\overline{X}$, в якій f чи ∇f мають розриви.

Виведемо достатні умови наявності екстремуму функції багатьох змінних.

Розкладемо функцію $f(X)=f(x_1,x_2,...,x_n)$ в околі точки $\mathrm{X}^{(k)}=\left(x_1^{(k)},x_2^{(k)},...,x_n^{(k)}\right)$ в ряд Тейлора обмежившись квадратичною апроксимацією $f(\mathrm{X})$, відкидаючи члени третього і більш високого порядків:

$$f(\mathrm{X})\approx f\left(\mathrm{X}^{(k)}\right)+\nabla f\left(X^{(k)}\right)\Delta X+\frac{1}{2}\Delta X^T\nabla^2 f\left(X^{-(k)}\right)\Delta X$$

Якщо точка $\mathrm{X}^{(k)}$ є точкою мінімуму функції $f(\mathrm{X})$, то кожна перша частинна похідна $\frac{\partial f}{\partial x_i}(i=1,\dots,n)$ повинна перетворюватися в нуль у точці $\mathrm{X}^{(k)}$.

Тоді знак збільшення $f(\mathrm{X})-f\left(\mathrm{X}^{(k)}\right)$ визначається похідними другого порядку від $f(\mathrm{X})$ за всіма змінним, включаючи і змішані похідні.

У матричній формі можна записати матрицю Гессе – квадратну матрицю других частинних похідних $f(\mathrm{X})$ узятих у точці $\mathrm{X}^{(k)}$

$$\nabla^2 f\left(\mathrm{X}^{(k)}\right)=H\left(\mathrm{X}^{(k)}\right)=\begin{vmatrix}\frac{\partial^2 f\left(\mathrm{X}^{(k)}\right)}{\partial x_1^2} & \dots\dots\dots & \frac{\partial^2 f\left(\mathrm{X}^{(k)}\right)}{\partial x_1\partial x_n}\\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots\\ \frac{\partial^2 f\left(\mathrm{X}^{(k)}\right)}{\partial x_n\partial x_1} & \dots\dots\dots & \frac{\partial^2 f\left(\mathrm{X}^{(k)}\right)}{\partial x_n^2}\end{vmatrix}$$

Для випадку двох змінних

$$H\left(\mathrm{X}^{(k)}\right)=\begin{vmatrix}\frac{\partial^2 f\left(\mathrm{X}^{(k)}\right)}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f\left(\mathrm{X}^{(k)}\right)}{\partial x_1\partial x_2}\\ \frac{\partial^2 f\left(\mathrm{X}^{(k)}\right)}{\partial x_2\partial x_1} & \frac{\partial^2 f\left(\mathrm{X}^{(k)}\right)}{\partial x_2^2}\end{vmatrix}$$

Необхідними умовами наявності в точці X^* локального мінімуму є виконання рівності

$$\nabla f\left(X^*\right)=0$$

і матриця $\nabla^2 f\left(X^*\right)$ – додатньо напіввизначена.

Достатніми умовами того, що X^* – точка ізольованого (строгого) локального мінімуму є

$$\nabla f\left(X^*\right)=0$$

і матриця $\nabla^2 f\left(X^*\right)$ додатньо визначена.

Звичайно приходиться обмежуватись знаходженням локального мінімума. Але якщо можна показати, що $\Delta X^T\nabla^2 f\left(X^{-(k)}\right)\Delta X\geq 0$ для всіх X, то $f(X)$ називається опуклою функцією, а локальний мінімум виявляється глобальним.

Якщо в стаціонарній точці $\overline{X}$ матриця Гессе $\nabla^2 f\left(\overline{X}\right)$ – від'ємно визначена, то це точка максимуму, якщо $\nabla^2 f\left(\overline{X}\right)$ – невизначена, то це сідлова точка.

Приклад 2.2.
Розглянемо функцію

$$f(x) = 2x_1^2 + 4x_1x_2^3 - 10x_1x_2 + x_2^2,$$

лінії рівня якої зображені на рис.2.6. Необхідно класифікувати точку $\bar{x} = [0{,}0]^T$.

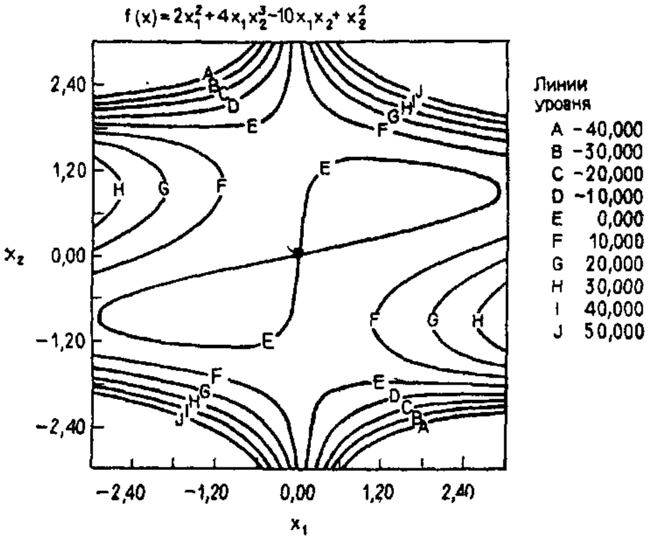


Рис.2.6. Лінії рівня нелінійної функції двох змінних з приклада 2.2.

Розв’язок

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 4x_1 + 4x_2^3 - 10x_2,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = 12x_1x_2^2 - 10x_1 + 2x_2,$$

$$\nabla f(\bar{x}) = [0{,}0]^T.$$

Тоді, точка $\bar{x}$ - стаціонарна.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = 4,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = 24x_1x_2 + 2 = +2,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 x_2} = 12x_2^2 - 10 = -10.$$

Тоді,

$$\nabla^2 f(\bar{x}) = H_f(\bar{x}) = \begin{bmatrix} +4 & -10 \\ -10 & +2 \end{bmatrix}.$$

Матриця $\nabla^2 f(\bar{x})$ являється невизначеною. Тому $\bar{x}$ представляє собою **сідлову точку**, що і відображено на рис.2.6.

Завдання 1. Визначте і класифікуйте стаціонарні точки функції.

а) $f(X) = x_1^{\ 2} - x_1x_2 + x_2^{\ 2} - 2x_1 + 3x_2 - 4,$

б) $f(X) = 2x_1^{\ 3} + 4x_1x_2^{\ 2} - 10x_1x_2 + x_2^{\ 2},$

в) $f(X) = x_1^{\ 2} + 2x_2^{\ 2} - 3x_3^{\ 2} - 6x_1x_2 + 8x_1x_3 - 4x_2x_3,$

г) $f(X) = x_1^{\ 2} + 5x_2^{\ 2} + 3x_3^{\ 2} + 4x_1x_2 - 2x_2x_3 - 2x_1x_3.$

Завдання 2. В результаті пошуку мінімуму функції

$$f(X)=\left[x_1^{\ 2}+(x_2+1)^2\right]\left[x_1^{\ 2}+(x_2-1)^2\right]$$

знайдені наступні точки:

а) $X^{(1)}=[0\ \ 0]^T$

б) $X^{(2)}=[0\ \ 1]^T$

в) $X^{(3)}=[0\ \ \text{-}1]^T$

г) $X^{(4)}=[1\ \ 1]^T$

Класифікуйте отримані точки.

Контрольні запитання.

Нехай у точці $X=\overline{X}$ градієнт $\nabla f\left(\overline{X}\right)=0.$

Що можна сказати про точку $\overline{X}$, якщо

а) $f(X)$ – опукла функція?

б) $f(X)$ – вгнута функція?

в) $\nabla^2 f(X)$ – невизначена матриця?

г) матриця $\nabla^2 f(X)$ додатньо визначена?

д) $\nabla^2 f(X)$ від'ємно визначена?

2.4. МІНІМІЗАЦІЯ ФУНКЦІЇ З ОБМЕЖЕННЯМИ ТИПУ РІВНОСТІ

Розглянемо екстремум функції $F:R^n\to R$, на котру накладено обмеження у вигляді рівності $f(X)=0$, де $f:R^n\to R^m$. Для рішення цієї задачі можливо використовувати декілька методів, два з котрих – **метод прямої підстановки** та **метод множників Лагранжа**.

2.4.1. МЕТОД ПРЯМОЇ ПІДСТАНОВКИ

Пряма підстановка – це найбільш зрозуміла процедура, однак часто вона виявляється більш громіздкою, ніж метод множників Лагранжа. Для простоти прикладу нехай *n*=2 та *m*=1.

Метод прямої підстановки може бути описаний наступним чином. Припустимо, що *f* така функція, що задовольняє рівності $h(x_2)=x_1$. Далі, $F(x_1,x_2)=F[h(x_2),x_2]$ є функцією тільки x_2, і можна використовувати методи, що використовуються в задачах без обмежень.

<u>Приклад 2.3.</u>

Знайти сторони прямокутного трикутника заданої гіпотенузи l, щоб площа була максимальною. Площа трикутника $f(x_1,x_2)=1/2x_1x_2$

Обмеження $f(x_1,x_2)=x_1^2+x_2^2=l^2$.

Обмеження типу рівності розв'язується аналітично відносно x_1:

$$x_1=\sqrt{l^2-x_2^2}=\overline{C}(x_2), \tag{2.4.1}$$

де від'ємний розв'язок опускається. Для застосування методу підстановки підставимо у функцію якості:

$$f(x_1,x_2)=-\frac{1}{2}x_1x_2=-\frac{1}{2}x_2\sqrt{l^2-x_2^2}=\overline{f}(x_2), \tag{2.4.2}$$

завдяки чому, обмежена функція якості $\overline{f}(x_2)$ може бути тепер мінімізована без урахування обмежень типу рівності . Із необхідної умови першого порядку одержуємо результат $x_2^*=l/\sqrt{2}$, який також задовольняє достатній умові для локального мінімуму функції $\overline{f}(x_2)$.

Відповідне значення другого катета $x_1^* = l/\sqrt{2}$. Таким чином, можемо сказати, що прямокутному трикутнику із заданою гіпотенузою *l* відповідає рівнобедрений трикутник з максимальною площею.

Приклад 2.4.

Виробник бляшаних консервних банок бажає максимізувати об'єм деякої партії банок при заданій площі жесті, що використовується.

$$\text{Об'єм } V(r,l) = \pi\, r^2 l \tag{2.4.3}$$

$$\text{Площа } A(r,l) = 2\pi\, \mathrm{r}^2 + 2\pi rl = A_0 \tag{2.4.4}$$

Задача складається із максимізації $V(r,l)$ при умові $A(r,l) = A_0$, де A_0 - задана величина. Тут може бути використан той же метод, що і у прикладі 2.3. Виражається величина *l* через *r* (чи, якщо це зручніше, величина *r* через *l*), та далі об'єм записується у вигляді функції тільки *r*. Відмітимо, що тепер обмеження на площу входить у вираз для об'єму. Далі проводиться дослідження першої та другої похідних для визначення характеру та положення екстремуму.
З рівняння (2.4.3) маємо

$$l = (A_0 - 2\pi r^2)/2\pi r \tag{2.4.5}$$

Отримаємо

$$V(r) = \frac{r}{2}(A_0 - 2\pi r^2) \tag{2.4.6}$$

Продиференціюємо *V* по *r* і результат прирівняємо нулю. Тоді

$$\frac{dV(r)}{dr} = \frac{A_0}{2} - 3\pi r^2 = 0,$$

$$r = \sqrt{A_0 / 6\pi} \tag{2.4.7}$$

Отримаємо

$$l = \sqrt{\frac{2A_0}{3\pi}} \tag{2.4.8}$$

Цікаво отримати оптимальне відношення довжини до радіуса. Видно, що для отримання максимального об'єму довжину консервної банки слід зробити рівною діаметру (при умові, що площа жесті задана).

Для виводу умов оптимальності розкладемо в ряд Тейлора функцію *f(**x**)*, що мінімізується, біля припустимої точки $\bar{x} \in X$:

$$f\left(\bar{x} + \delta x\right) = f\left(\bar{x}\right) + f_x\left(\bar{x}\right)^T \delta x + R\left(\delta x^2\right). \tag{2.4.9}$$

Тепер будемо враховувати тільки припустимі варіації δx, тобто такі, які задовольняють $C\left(\bar{x} + \delta x\right) = 0$ в першому наближенні. Розкладаючи обмеження типу рівності у ряд Тейлора, отримаємо:

$$C\left(\bar{x} + \delta x\right) = C\left(\bar{x}\right) + C_x\left(\bar{x}\right)\delta x + R\left(\delta x^2\right). \tag{2.4.10}$$

Тут $\bar{x}$ припустима, виконується $C\left(\bar{x}\right) = 0$, так що отримується наступна умова для припустимих варіацій:

$$C_x\left(\bar{x}\right)\delta x = 0. \tag{2.4.11}$$

Рівняння (2.4.11) означає, що припустимий вектор варіації δx повинен бути ортогональним до кожного вектора рядка матриці Якобі C_x. Вектори рядка $C_{ix}^T,\ i = 1,\dots,m$ на нормальних точках незалежні, вони розтягують векторний простір ψ до розмірів *m*, а δx також ортогональний до ψ. Останнє рівнозначне тому, що вектор δx знаходиться в (*n*-*m*)- мірному додатковому векторному просторі Ф.

Геометричне пояснення описаному положенню речей можливо зробити за допомогою рис.2.7 для випадку *n=2, m=1.* Матриця $\boldsymbol{C_x}$ в цьому випадку буде вектором, який стоїть замість $\bar{x}$ перпендикулярно до кривої $c(x)=0$. Припустима варіація δx очевидно повинна проходити по дотичній до кривої обмежень типу рівності, а також бути ортогональною до C_x.

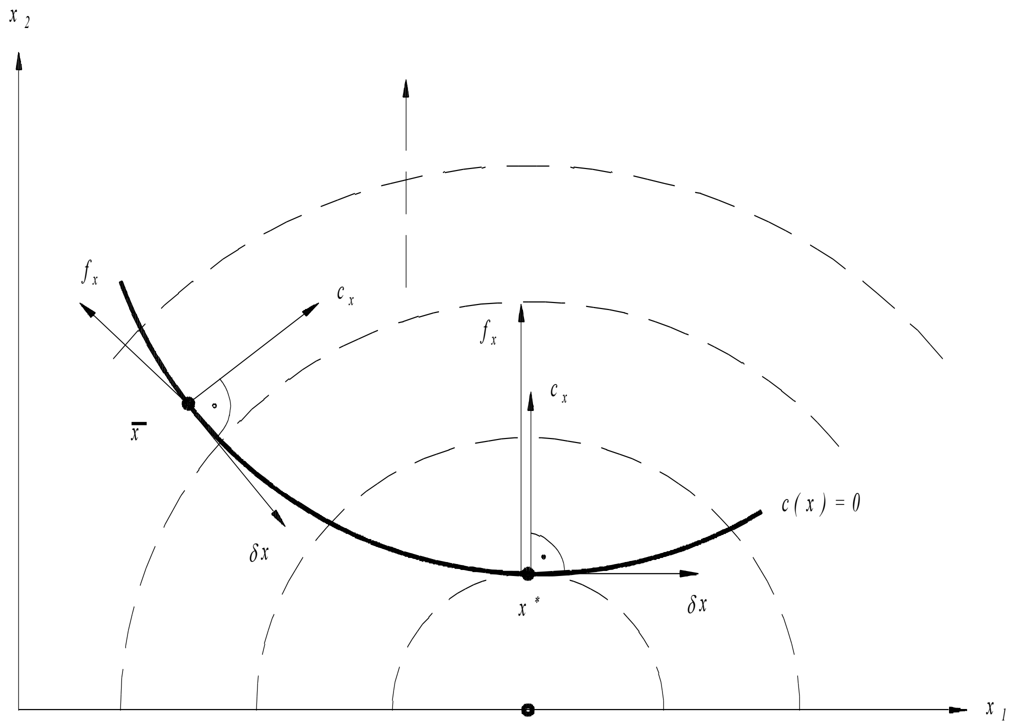


Рис.2.7. Геометричне пояснення (*n=2, m=1*)

2.4.2. МЕТОД МНОЖНИКІВ ЛАГРАНЖА.

Тепер знову звернемося до рівняння (2.4.11), побачимо, що біля локального мінімуму для всіх припустимих δx перша варіація $f_x\left(x^*\right)^T \delta x$ зникає. Це означає, що градієнт $f_x\left(x^*\right)$ ортогональний до δx, і так як $\delta x \in \Phi$, повинно виконуватись $f_x\left(x^*\right) \in \psi$. Однак ψ розтягується рядовими (рядковими) векторами $C_{ix}(x^*)^T$, тому $f_x(x^*)$ може бути виражено як лінійну комбінацію цих векторів, тобто

$$f_x\left(x^*\right) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* C_{ix}\left(x^*\right) = 0. \qquad (2.4.11)$$

У випадку на рис.2.7 градієнт f_x в локальному мінімумі колінеарний до вектора C_x. Насправді, після короткого розгляду рис.2.7, можна переконатися у тому, що в усіх точках, де f_x і C_x не колінеарні, можлива припустима поправка функції якості, тому не може бути мови про локальні мінімуми.

Локальний мінімум повинен задовольняти обмеженням типу рівності:

$$C\left(x^*\right) = 0. \qquad (2.4.12)$$

Ці рівняння є необхідними умовами оптимальності першого порядку для постановки задачі.

Для формулювання умов оптимальності спочатку вводять функцію Лагранжа:

$$L\left(x,\lambda\right) = f\left(x\right) + \lambda^T C\left(x\right), \qquad (2.4.13)$$

де $\lambda \in R^m$ являє собою вектор множників Лагранжа. Необхідні умови першого порядку для нормального локального мінімуму функції з обмеженнями типу рівності визначаються наступним чином:

існує $\lambda^* \in R^m$, тоді

$$L_x\left(x^*,\lambda^*\right) = f_x\left(x^*\right) + C_x\left(x^*\right)^T \lambda = 0, \qquad (2.4.14)$$

$$L_{\lambda}\left(x^{*},\lambda^{*}\right)=C\left(x^{*}\right)=0. \qquad (2.4.15)$$

Рівняння (2.4.14) має *n*, а рівняння (2.4.15) – *m* скалярних рівнянь. Таким чином, необхідні умови першого порядку формують систему рівнянь *(n+m)*-ного порядку для обчислення *n+m* невідомих. Рівняння (2.4.14), (2.4.15) можна сприймати у якості альтернативної інтерпретації, як необхідні умови для стаціонарної точки функції Лагранжа. В постановці питання немає обмеження типу рівності.

Приклад 2.5.

Тепер розглянемо постановку задачі із приклада 2.3 с використанням нових знань. Функція Лагранжа має вигляд:

$$L\left(x,\lambda\right)=-\frac{1}{2}x_1x_2+\lambda\left(x_1^2+x_2^2-l^2\right). \qquad (2.4.16)$$

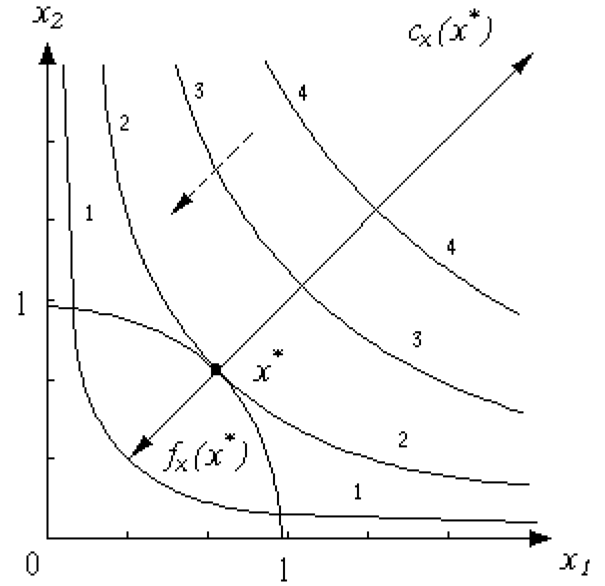
Отримуємо наступні три рівняння:

$$L_{x_1}=-\frac{1}{2}x_2^*+2\lambda^*x_1^*=0, \qquad (2.4.17)$$

$$L_{x_2}=-\frac{1}{2}x_1^*+2\lambda^*x_2^*=0, \qquad (2.4.18)$$

$$L_{\lambda}=x_1^{*^2}+x_2^{*^2}-l^2=0. \qquad (2.4.19)$$

Отримуємо $x_1^*=x_2^*$ і, підставляючи у рівняння, а також використовуючи метод підстановки (приклад 2.3), знаходимо розв'язок $x_1^*=x_2^*=l/\sqrt{2}$. Значення множника Лагранжа становить $\lambda^*=0{,}25$. Геометричне тлумачення наведеної ситуації показано на рис.2.8.



$x_1^2+x_2^2=l^2$

Рис.2.8. Геометричне пояснення прикладу 2.5

Очевидна якість функції Лагранжа, яка пізніше буде часто використовуватись, має вигляд:

$$L\left(\overline{x},\lambda\right)=f\left(\overline{x}\right)\quad \forall\overline{x}\in X. \qquad (2.4.20)$$

Наочна інтерпретація множників Лагранжа, які здаються спочатку абстрактними, може бути отримана наступним чином. Уявімо собі, що обмеження типу рівності будуть модифіковані. Тепер повинно виконуватись:

$$C(x)=\varepsilon\,, \qquad (2.4.21)$$

де компонент ε_i вектора ε має малу величину. Тоді функція Лагранжа модифікованої постановки задачі має вигляд:

$$L\left(x,\lambda,\varepsilon\right)=f\left(x\right)+\lambda^{T}\left[C\left(x\right)-\varepsilon\right]. \qquad (2.4.22)$$

Відповідний розв'язок може бути виражений як функція від ε : $x^*(\varepsilon),\ \lambda^*(\varepsilon)$. Значення функції якості буде $f^*(\varepsilon) = f\left[x^*(\varepsilon)\right]$, а функції Лагранжа - $L^*(\varepsilon) = L\left[x^*(\varepsilon), \lambda^*(\varepsilon), \varepsilon\right]$.

Тепер $f^*(\varepsilon) = L^*(\varepsilon)$ і звідти ж $f_\varepsilon^*(\varepsilon) = L_\varepsilon^*(\varepsilon)$. Отримаємо:

$$\frac{df^*}{d\varepsilon_i} = \frac{dL^*}{d\varepsilon_i} = \left(\frac{dx^*}{d\varepsilon_i}\right)^T L_x\left(x^*, \lambda^*\right) + \left(\frac{d\lambda^*}{d\varepsilon_i}\right)^T L_\lambda\left(x^*, \lambda^*\right) + \frac{\partial L^*}{\partial \varepsilon_i}. \qquad (2.4.23)$$

Тут $L_x\left(x^*, \lambda^*\right) = L_\lambda\left(x^*, \lambda^*\right) = 0$ (умови оптимальності) і отримаємо:

$$\frac{df^*}{d\varepsilon_i} = -\lambda_i^*. \qquad (2.4.24)$$

Рівняння (2.4.25) показує, що множник Лагранжа λ_i^* представляє собою безпосередню межу зміни (чутливості) мінімального значення функції якості при зміні відповідного обмеження типу рівність.

Розглянемо задачу, сформульовану у прикладі 2.4., використовуючи множник Лагранжа. Спочатку сформуємо функцію

$$V' = (r,l) = V(r,l) + \lambda[A(r,l) - A_0],$$

де λ - множник Лагранжа. Це вираження можна записати через параметри консервної банки наступним чином:

$$V'(r,l) = \pi r^2 l + \lambda[2\pi r^2 + 2\pi r l - A_0]$$

Візьмемо першу частинну похідну по кожній змінній і прирівняємо кожний результат до нуля. Таким чином, отримаємо

$$\frac{\partial V'(r,l)}{\partial l} = \pi r^2 + \lambda 2\pi r = 0, \quad \mathrm{r} = \text{-}2\lambda,$$

$$\frac{\partial \mathrm{V}'(\mathrm{r},\mathrm{l})}{\partial \mathrm{r}} = 2\pi r l + \lambda[4\pi r + 2\pi l] = 0,\ \mathrm{l} = 2\mathrm{r}.$$

Підрахуємо тепер λ з врахуванням заданого обмеження $A(r,l) = A_0$ чи $A_0 = 2\pi r^2 + 2\pi r l.$ Отримаємо

$$A_0 = 2\pi(4\lambda^2) + 2\pi(2\lambda)(-4\lambda),$$

тоді

$$\lambda = \pm\sqrt{A_0 / 24\pi}.$$

Таким чином, маємо

$$r = 2\sqrt{A_0 / 24\pi}, \qquad \mathrm{l} = 4\sqrt{\mathrm{A}_0 / 24\pi}.$$

Відмітимо, що для λ вибираються тільки від'ємні значення квадратного корня, оскільки в цьому випадку *r* та *l* приймають фізично реальні значення. Відношення довжини до радіуса буде таким же, як і отримане при прямому методі рішення (як це і повинно бути).

Розглянемо задачу з приклада 2.3 та її розв'язок з приклада 2.5. Тепер поставимо наступне питання: у скільки разів збільшується максимальна площа трикутника при першому наближенні, якщо довжина гіпотенузи дорівнює $l+\Delta l$? Обмеження типу рівності, які лежать в основі постановки задачі, будуть мати вигляд:

$$x_1^2 + x_2^2 = \left(l + \Delta l\right)^2 = l^2 + 2\Delta l \cdot l + \Delta l^2,$$

так що $\Delta\varepsilon$ в першому наближенні буде становить $\Delta\varepsilon=2\Delta l\cdot l$. Знаючи $\lambda^*=0,25$ (приклад 2.3), відповідь на поставлене питання:

$$\Delta f^* = -\lambda^* \cdot \Delta\varepsilon = -0{,}5\Delta l \cdot l.$$

Для виведення необхідних умов оптимальності другого порядку, повинні тепер розкласти функцію Лагранжа у ряд Тейлора в припустимій точці $\overline{x} \in X$:

$$L\left(\bar{x}+\delta x,\lambda\right)=L\left(\bar{x},\lambda\right)+L_x\left(\bar{x},\lambda\right)^T\delta x+\frac{1}{2}\delta x^T L_{xx}\left(\bar{x},\lambda\right)\delta x+R\left(\delta x^3\right). \qquad (2.4.25)$$

δx - припустима варіація, таким чином, використовуючи (2.) повинно виконуватись $L\left(\bar{x},\lambda\right)=f\left(\bar{x}\right)$ та $L\left(\bar{x}+\delta x,\lambda\right)=f\left(\bar{x}+\delta x\right)$. В подальшому у стаціонарній точці функції Лагранжа виконується $L_x\left(x^*,\lambda^*\right)=0$, так що з (2.4.25) виходить наступне співвідношення:

$$f\left(x^*+\delta x\right)=f\left(x^*\right)+\frac{1}{2}\delta x^T L_{xx}\left(x^*,\lambda^*\right)\delta x+R\left(\delta x^3\right). \qquad (2.4.26)$$

Подібна аргументація з допустимою варіацією δx, приводить нас до вказаних умов оптимальності другого порядку.

Необхідні умови другого порядку для локального мінімуму складаються з необхідних умов першого порядку:

$$L_{xx}\left(x^*,\lambda^*\right)\geq 0, \qquad (2.4.27)$$

з обмеженням (припустима варіація):

$$\mathrm{Y}=\left\{\delta x \middle| C_x\left(x^*\right)\delta x=0\right\}. \qquad (2.4.28)$$

Зручний критерій для перевірки визначення матриці з обмеженням призводить до перевірки коренів наступного полінома *(n - m)*-го ступеня

$$\mathrm{P}\left(\Lambda\right)=\begin{vmatrix}\Lambda\mathrm{I}-L_{xx}\left(x^*,\lambda^*\right) & C_x\left(x^*\right)^T \\ C_x\left(x^*\right) & 0\end{vmatrix}=0. \qquad (2.4.29)$$

Достатні умови для строгого локального мінімуму складаються з припустимих умов першого порядку:

$$L_{xx}\left(x^*,\lambda^*\right)>0 \qquad (2.4.30)$$

з обмеженням Y .

<u>Приклад 2.6.</u>

Перевірити, чи задовольняє умовам оптимальності другого порядку розв’язок задачі, отриманий в прикладі 2.5. Для цього перевіряємо на додатнє значення матрицю

$$L_{xx}\left(x^*,\lambda^*\right)=\begin{bmatrix}0{,}5 & -0{,}5\\ -0{,}5 & 0{,}5\end{bmatrix}.$$

За критерієм Сільвестра маємо $D_1=0,5$, $D_2=0$. Таким чином, $L_{xx}(x^*,\lambda^*)$ без обмеження задовольняє необхідним умовам другого порядку. Однак, достатня умова без обмеження не виконується, і бажаємо визначити, чи виконується вона з, для цього складаємо поліном

$$\mathrm{P}\left(\Lambda\right)=\begin{bmatrix}\Lambda-0{,}5 & 0{,}5 & l\sqrt{2}\\ 0{,}5 & \Lambda-0{,}5 & l\sqrt{2}\\ l\sqrt{2} & l\sqrt{2} & 0\end{bmatrix}=-4\Lambda+4=0.$$

Корінь цього полінома ступеню $n-m=1$ має вигляд $\Lambda=1>0$. Отже, $L_{xx}(x^*,\lambda^*)$ додатньо визначена для припустимої варіації δx, і достатня умова також виконується.

Для більшості системних задач необхідно розрізняти вектор управління і вектор стану. Найбільш проста одноетапна процедура прийняття рішення з обмеженнями у формі рівностей повинна мінімізувати чи максимізувати скалярний показник характеристики

$$J=F[X,U] \qquad (2.4.31)$$

при обмеженні

$$f(X,U)=0 \tag{2.4.32}$$

де X – n-мірний вектор

$$X^T=[x_1,x_2,...,x_n],$$

U – m-мірний вектор

$$U^T=[u_1,u_2,...,u_m],$$

f – n-мірна векторна функція

$$f^T(X,U)=[f_1(X,U),\ f_2(X,U),...,\ f_n(X,U)].$$

Рішення знаходиться наступним чином. Об’єднуємо (2.4.31) і (2.4.32) множником Лагранжа, в результаті чого отримуємо скалярну величину

$$L(X,U,\Lambda)=F(X,U)+\Lambda^T f(X,U),$$

$$\Lambda^T=[\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n].$$

Тепер знайдемо **x** та **u**, для котрих L приймає максимальне чи мінімальне значення. Для цього

$$\frac{\partial L}{\partial X}=\frac{\partial F}{\partial X}+\frac{\partial}{\partial X}f^T(X,U)\Lambda=0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial U}=\frac{\partial F}{\partial U}+\frac{\partial}{\partial U}f^T(X,U)\Lambda=0$$

де

$$\left[\frac{\partial L}{\partial U}\right]^T=\left[\frac{\partial L}{\partial u_1},\frac{\partial L}{\partial u_2},...,\frac{\partial L}{\partial u_m}\right].$$

Таким чином, $\frac{\partial L}{\partial U}$ можна інтерпретувати як градієнт L по u, що зазвичай позначається $\nabla_u L$. Також

$$\frac{\partial}{\partial X}f^T(X,U)=\begin{bmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\cdots\frac{\partial f_n}{\partial x_1}\\ \vdots \qquad\qquad \vdots\\ \frac{\partial f_1}{\partial x_n}\ \cdots\ \frac{\partial f_n}{\partial x_n}\end{bmatrix} \tag{2.4.33}$$

Для того щоб величина J досягла екстремуму, необхідно, щоб не тільки

$$\frac{\partial L}{\partial X}=0,\ \frac{\partial L}{\partial U}=0,$$

але також, щоб друга варіація L була більш нуля у випадку мінімуму чи менш нуля у випадку максимуму. Для того щоб показати, що означає це обмеження (використовуючи необхідні умови, котрі необхідно виконати для того, щоб J(x,u) мала екстремум), знайдемо другу варіацію $L(x,u,\lambda)$. Перша варіація $L(x,u,\lambda)$ дорівнює

$$\delta L=\left(\frac{\partial L}{\partial x}\right)^T\delta X+\left(\frac{\partial L}{\partial u}\right)^T\delta U,$$

що представляє собою лінійну частину приросту

$$\Delta L=L[X+\delta X,\mathrm{U}+\delta U]-L[X,U]. \tag{2.4.34}$$

Друга варіація L дорівнює

$$\delta^2 L = \frac{1}{2}\delta X^T \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial X}\frac{\partial L}{\partial X} \right]\delta X + \left[\frac{\partial}{\partial U}\frac{\partial L}{\partial X} \right]\delta U \right\} + \frac{1}{2}\delta U^T \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial U}\frac{\partial L}{\partial X} \right]^T \delta X + \left[\frac{\partial}{\partial U}\frac{\partial L}{\partial U} \right]\delta U \right\}. \quad (2.4.35)$$

У компактній формі отримаємо

$$\delta^2 L = \frac{1}{2}\left[\delta X^T \delta U^T\right] \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial X}\frac{\partial L}{\partial X} & \frac{\partial}{\partial U}\frac{\partial L}{\partial X} \\ \left[\frac{\partial}{\partial U}\frac{\partial L}{\partial X}\right]^{\mathrm{T}} & \frac{\partial}{\partial U}\frac{\partial L}{\partial U} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial X \\ \partial U \end{bmatrix}. \quad (2.4.36)$$

2.4.3. ОПТИМАЛЬНИЙ СТАТИЧНИЙ ПРОЦЕС КЕРУВАННЯ

Застосуємо представлену в цьому розділі методологію для проблеми оптимального статичного процесу керування. Статична модель процесу має вигляд :

$$g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\boldsymbol{z})=0. \quad (2.2.1)$$

Задача ТАК полягає в тому, щоб для відповідних збурюючих впливів *z* визначити також параметри керування ***u*** і стану ***x***, щоб функція якості $f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})$ з урахуванням (2.2.1) могла бути мінімізована. Це є постановкою задачі, яка точно відповідає "розміру" загальної постановки питання цього розділу.

Особливий важливий випадок оптимального статичного процесу керування виникає при розгляді лінійної моделі системи і квадратичної функції якості, тобто

$$\tilde{A}X + \tilde{B}U + \tilde{Z} = 0, \quad (2.2.2)$$

$$f(X,U) = \frac{1}{2}\|X\|^2 Q + \frac{1}{2}\|U\|^2 R, \quad (2.2.3)$$

де матриця $\tilde{A}$ припускається регулярною для того, щоб забезпечити однозначне обчислення параметрів стану; вагові матриці *Q* ,*R* припускаються додатньо визначеними. З урахуванням $B = \tilde{A}^{-1}\tilde{B}$ і $z = \tilde{A}^{-1}\tilde{Z}$, (2.2.2) описується наступним чином:

$$X+BU+z=0. \quad (2.2.4)$$

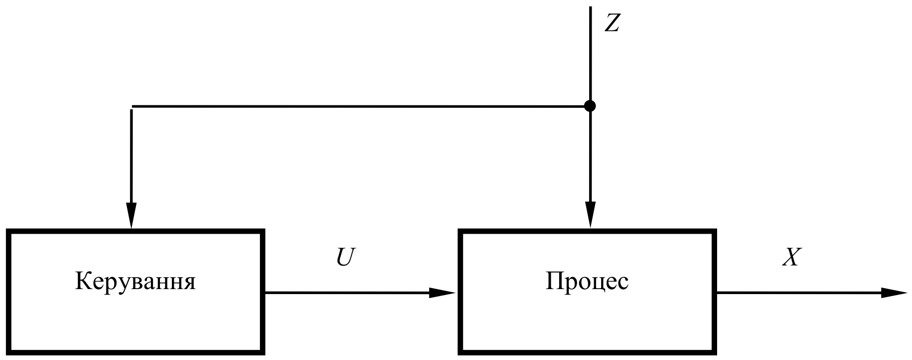


Рис.2.9. Статичний оптимальний процес керування

Для розв'язку цієї лінійно-квадратичної задачі можна скористатися методами цього розділу. Функція Лагранжа має вигляд:

$$L(X,U,\Lambda) = \frac{1}{2}\left(\|X\|^2 Q + \|U\|^2 R\right) + \lambda^T (X + BU + z). \quad (2.2.5)$$

У підсумку отримуємо необхідні умови першого порядку:

$$L_x\left(X^*,U^*,\Lambda^*\right) = QX^* + \Lambda^* = 0, \quad (2.2.6)$$

$$L_u\left(X^*,U^*,\Lambda^*\right) = RU^* + B^T\Lambda^* = 0, \quad (2.2.7)$$

$$L_\lambda\left(X^*,U^*,\Lambda^*\right) = X^* + BU^* + z = 0. \quad (2.2.8)$$

При розв'язку цієї лінійної системи рівнянь обчислюється оптимальний вектор керування:

$$U^* = -\left(R + B^T Q B\right)^{-1} B^T Q z, \tag{2.2.9}$$

як функція, що залежить від вектора збурення *z*. При використанні достатніх умов можна упевнитись в тому, що при u^* мова йде про мінімум. Гранична ситуація $R \to 0$ (великі витрати на керування не враховуються) цікавим чином призводить до результату, оскільки матриця $B^T Q B$ інвертована. З іншого боку, гранична ситуація $Q \to 0$ призводить, як і треба було чекати, до безглуздого (з технічної точки зору) нульового керування $u^* = 0$.

Завдання 1. За допомогою метода множників Лагранжа розв'язати наступну задачу:

мінімізувати $z = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$

при обмеженнях

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7$$

$$2x_1 + 2x_2 + x_3 = \frac{9}{2}.$$

Пояснити, чому указаний метод забезпечує отримання оптимального рішення.

Завдання 2. Застосувати метод множників Лагранжа для знаходження глобального мінімуму і глобального максимуму функції:

$$f(X) = x_2 - x_1^2$$

при обмеженнях $x_1^2 + x_2^2 = 1$

На знаки x_1 і x_2 обмеження не накладено.

Контрольні запитання:

1. Поясніть труднощі, що виникають при використанні метода прямої підстановки.
2. Яка може бути економічна інтерпретація множників Лагранжа?
3. Яка роль оптимальних множників Лагранжа в аналізі чутливості рішень?
4. Як перевірити стаціонарну точку функції Лагранжа?

3. ЛІНІЙНЕ ПРОГРАМУВАННЯ.

3.1 ФОРМУЛЮВАННЯ ЗАДАЧ ТА ЇХ ГРАФІЧНЕ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ.

Лінійне програмування /ЛП/ являє собою теоретичний апарат модельного дослідження, спрямованого на відшукання найкращого способу розподілу обмежених ресурсів за кількома взаємопов'язаними за метою і використанням ресурсів видами виробничої діяльності. ЛП широко застосовується при розв'язуванні багатьох практичних задач організаційно-економічного управління.
Загальна задача ЛП полягає в максимізації /чи мінімізації/ лінійної функції

$$z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n \qquad (3.1.1)$$

від n дійсних змінних $x_1,\ x_2,\ \ldots\ ,\ x_n$, що задовольняють умови невід'ємності

$$x_1 \ge 0,\quad x_2 \ge 0,\ \ \ldots\ \ ,\ x_n \ge 0 \qquad (3.1.2)$$

і m лінійні обмеження:

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le (=,\ge) b_1;\\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le (=,\ge) b_2;\\ &.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\\ &a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le (=,\ge) b_m. \end{aligned} \qquad (3.1.3)$$

У матричних позначеннях задачу можна подати таким чином:
максимізувати (мінімізувати) функцію

$$z = \mathbf{c}^T \mathbf{x}_0, \qquad (3.1.4)$$

де

$$X_0 \ge 0, \quad A_0 \mathbf{x}_0 \le (=,\ge)\, \mathbf{b}; \qquad (3.1.5)$$

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ x_n \end{bmatrix}$$ - вектор-стовпчик $n \times 1$;

$\mathbf{c}^T = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \ldots & c_n \end{bmatrix}$ - вектор-рядок $1 \times n$;

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ b_m \end{bmatrix}$$ - вектор-стовпчик $m \times 1$;

$A_0 = \left(a_{ij}\right)$ - матриця $m \times n$.

Індекс 0 у векторі $\mathbf{x}_0$ і в матриці A_0 вказує на те, що це початкові значення.

Лінійність передбачає наявність двох властивостей: пропорційності і адитивності.

1. Пропорційність означає, що внесок кожної змінної ($x_1,\ x_2,\ \ldots\ ,\ x_n$) у цільову функцію і загальній обсяг споживання відповідних ресурсів прямо пропорційний рівню (величині) цієї змінної.
2. Адитивність полягає в тому, що цільова функція є сумою внесків від різних змінних. Аналогічно ліва частина кожного обмеження повинна являти собою суму витрат, кожний додаток якого пропорційний за значенням відповідній змінній.

Задачу ЛП, що містить тільки дві змінні, можна розв'язати графічно.

Перший крок при використанні графічного методу полягає в геометричному зображенні припустимих розв'язків, тобто в побудові області (припустимих) розв'язків, у якій одночасно задовольняються всі обмеження моделі. Умови невід'ємності змінних обмежують область їх припустимих значень першим квадрантом.

Приклад 3.1.1

Максимізувати вираз при обмеженнях

$$\left.\begin{array}{ll} x_1 + 2x_2 \le 6, & 2x_1 + x_2 \le 8, \\ -x_1 + x_2 \le 1, & x_2 \le 2,\ x_1 \ge 0,\ \ x_2 \ge 0. \end{array}\right\}$$

На рис.3.1.1 показано простір розв'язків - багатокутник. Області, в яких виконуються відповідні обмеження у вигляді нерівностей, вказуються стрілками, напрямленими в бік припустимих значень змінних.

Для знаходження оптимального розв'язку слід перемістити пряму, яка характеризує рівень цільової функції, у напрямі її зростання. Оптимальному розв'язку відповідає точка

$$x_1 = 3\frac{1}{3}; \qquad x_2 = 1\frac{1}{3};$$

$$z = 3*3\frac{1}{3} + 2*1\frac{1}{3} = 12\frac{2}{3}.$$

Можливість зручного і наочного графічного методу розв'язування задач ЛП обмежені випадком двох змінних. При геометричній інтерполяції прикладу 3.1.1 виявляються характерні риси задач ЛП:

1) припустима область завжди являє собою опуклий багатокутник, навіть коли вона не обмежена;

2) оптимальний розв'язок завжди досягається у вершинах припустимої області.

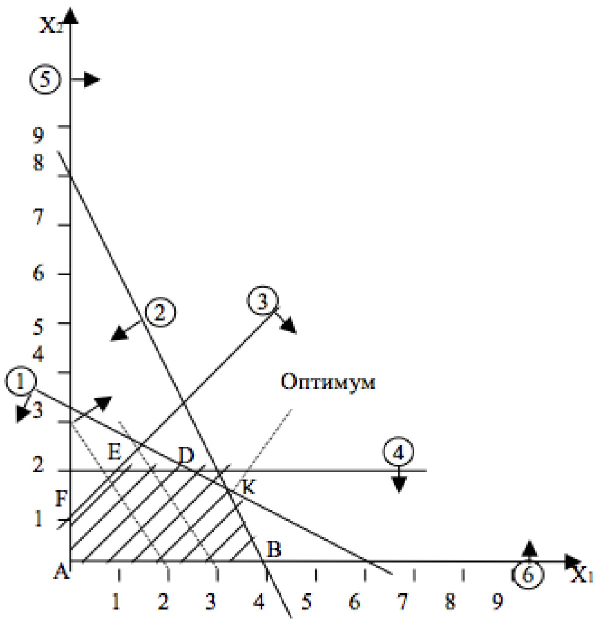


Рис. 3.1.1. Геометрична інтерпретація прикладу 3.1.1

Процес, який реалізується після того, як оптимальний розв'язок задачі отримано, називається аналізом моделей ЛП на чутливість.

Характерні задачі аналізу на чутливість.
1. На скільки можна збільшити (зменшити) запас деякого ресурсу для покращення (збереження) отриманого оптимального значення цільової функції?
2. Збільшення об'єму якого з ресурсів найбільш вигідно?
3. У яких межах припустима зміна коефіцієнтів цільової функції?

3.1.1 СТАНДАРТНА ФОРМА ЛІНІЙНИХ ОПТИМІЗАЦІЙНИХ МОДЕЛЕЙ.

Для побудови загального методу розв'язування задач ЛП відповідні моделі мають бути подані у стандартній формі лінійних оптимізаційних моделей, за яких:
1) усі обмеження записуються у вигляді рівностей з невід'ємною правою частиною;
2) значення всіх змінних моделі невід'ємні;
3) цільова функція підлягає мінімізації.

Обмеження.
1. Вихідне обмеження, записане у вигляді нерівності типу $\le (\ge)$, можна подати у вигляді рівності, додавши додаткову змінну до лівої частини обмеження (віднявши додаткову змінну від лівої частини).
2. Праву частину рівності завжди можна зробити невід'ємною, помноживши обидві частини на -1.

Змінні.
Кожна змінна y_i, яка не має обмеження за знаком, може бути подана як різниця двох невід'ємних змінних: $y_i = y_i' - y_i''$, де $y_i', y_i'' \ge 0.$

Цільова функція.
Максимізація деякої функції еквівалентна мінімізації тієї самої функції, взятої з протилежним знаком, і навпаки. Еквівалентність означає, що при одній і тій самій сукупності обмежень оптимальні значення змінних в обох випадках будуть однаковими. Відмінність полягає тільки в тому, що при однакових числових значеннях цільових функцій їх знаки будуть протилежними.
Завдання.
Розв'язати графічним способом такі задачі ЛП:
а) максимізувати $z = 6x_1 - 2x_2$ при обмеженнях

$$x_1 - 2x_2 \le 1,$$
$$3x_1 - x_2 \le 6, \qquad x_1,\ x_2 \ge 0;$$

б) максимізувати $z = 4x_1 + 4x_2$ при обмеженнях

$$2x_1 + 7x_2 \le 21,$$
$$7x_1 + 2x_2 \le 49, \qquad x_1,\ x_2 \ge 0;$$

в) максимізувати $z = 5x_1 + 6x_2$ при обмеженнях

$$x_1 - 2x_2 \ge 2,$$
$$-2x_1 + 3x_2 \ge 2;$$

$x_1,\ x_2$ не обмежені за знаком;
г) максимізувати $z = 3x_1 + 2x_2$ при обмеженнях

$$2x_1 + x_2 \le 2,$$
$$3x_1 + 4x_2 \ge 12, \qquad x_1,\ x_2 \ge 0;$$

д) максимізувати $z = 5x_1 + 2x_2$ при обмеженнях

$$x_1 + x_2 \le 10,$$
$$x_1 = 5, \quad x_1,\ x_2 \ge 0.$$

Завдання для самостійної роботи.

Заводу потрібне вугілля із вмістом фосфору 0,03% і зольних домішок не більше ніж 3,25%. Він може придбати три сорти вугілля A, B, C за такими цінами:

Сорт вугілля	Вміст домішку, %		Ціна за 1 т, грн.
	фосфору	золи	
A	0,06	2,0	30
B	0,04	4,0	30
C	0,02	3,0	45

Як змішати ці сорти вугілля, щоб отримати мінімальну ціну і задовольнити обмеження на вміст домішок? Показати, що задачу можна подати графічно у двовимірному просторі і, таким чином, отримати розв'язок.

Контрольні запитання.

1. Чи може в задачах ЛП з двома змінними цільова функція набувати одного й того самого значення у двох різних екстремальних точках?
2. Чи можуть змінні лінійних оптимізаційних моделей не мати обмежень за знаком?

3.2 СИМПЛЕКС-МЕТОД - АЛГЕБРАЇЧНИЙ МЕТОД РОЗВ′ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ЛП.

Лінійна модель стандартної форми складається з m рівнянь і $n(m \le n)$ невідомих. Усі припустимі експериментальні точки визначаються як усі однозначні невід′ємні розв'язки системи m рівнянь, в яких $(n-m)$ змінних дорівнюють нулю. Однозначні розв'язки такої системи рівнянь, отримані шляхом прирівнювання до нуля $(n-m)$ змінних, називаються базисними. Якщо базисний розв'язок задовольняє вимогу невід′ємності правих частин, він називається припустимим. Змінні, які мають нульове значення, називаються небазисними.

При реалізації симплекс-методу алгебраїчне визначення базисних розв'язків відповідає ідентифікації екстремальних точок при геометричному зображенні простору розв'язків.

Рівняння (3.1) і (3.3) можуть бути зведені до вигляду

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + a'_{1m+1}x_{m+1} + a'_{1m+2}x_{m+2} + \ldots + a'_{1n}x_n = b'_1; \\ x_2 + a'_{2m+1}x_{m+1} + \ldots + a'_{2n}x_n = b'_2; \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ x_m + a'_{mm+1}x_{m+1} + \ldots + a'_{mn}x_n = b'_m; \end{array}\right\} \qquad (3.2.1)$$

$$c'_{m+1}x_{m+1} + c_{m+2}x_{m+2} + \ldots + c_n x_n = z - z_0, \qquad (3.2.2)$$

де $z_0 = \sum_{i=1}^{m} c_i b_i$.

Рівняння (3.1.3) і (3.2.1) відображають однакові обмеження, а рівняння (3.1.1) і (3.2.2) подають одну й ту саму цільову функцію в різних алгебраїчних формах.

Рівняння (3.2.1) і (3.2.2) є канонічною формою для базису $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_m$. Якщо покласти небазисні змінні $x_{m+1},\ x_{m+2},\ \ldots,\ x_n$ такими, що дорівнюють нулю, то співвідношення $x_1 = b'_1,\ x_2 = b'_2,\ \ldots,\ x_m = b'_m,\ x_{m+1} = 0, \ldots,\ x_n = 0$ задають базисний розв'язок.

Якщо всі $b_i \ge 0$, цей розв'язок припустимий.

3.2.1 ОБЧИСЛЮВАЛЬНІ ПРОЦЕДУРИ СИМПЛЕКС-МЕТОДУ.

Симплекс-метод складається з таких кроків.

Крок 0. З використанням лінійної моделі стандартної форми визначається початковий припустимий базисний розв'язок шляхом прирівнювання до нуля $(n-m)$ небазисних змінних.

Крок 1. З числа поточних небазисних змінних вибирається змінна, що включається в новий базис, збільшення якої забезпечує покращення значення цільової функції. Якщо такої змінної немає, розрахунки припиняють, тому що поточний базисний розв'язок оптимальний. У противному разі переходять до кроку 2.

Крок 2. З числа змінних поточного базису вибирається змінна, що виключається і повинна набувати нульового значення при введенні до складу базисних нової змінної.

Крок 3. Знаходиться новий базисний розв'язок. Здійснюється перехід до кроку 1.

Для вибору змінної, що включається в базис, використовується умова оптимальності.

Умова оптимальності. В задачі мінімізації введеною є небазисна змінна, що має в z - рівнянні найбільший від'ємний коефіцієнт. Якщо такі коефіцієнти дорівнюють один одному, для кількох небазисних змінних вибір довільний. Якщо всі коефіцієнти при небазисних змінних у z - рівнянні додатні, отриманий розв'язок оптимальний.

Пояснимо процедуру симплекс-методу на прикладі.

Приклад 3.2.1.

Максимізувати при обмеженнях:

$$x_1 + 2x_2 \le 6;$$
$$2x_1 + x_2 \le 8;$$
$$-x_1 + x_2 \le 1;$$
$$x_1 \le 2; \quad x_1, x_2 \ge 0;$$

Подати цільову функцію і обмеження моделі у стандартній формі: мінімізувати

$$z = -3x_1 - 2x_2, \quad \left(-z - 3x_1 - 2x_2 = 0\right)$$
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 \quad\quad\quad &= 6; \\ 2x_1 + x_2 \quad + x_4 \quad\quad &= 8; \\ -x_1 + x_2 \quad\quad + x_5 \quad &= 1; \\ x_2 \quad\quad\quad + x_6 &= 2. \end{aligned}$$

Базисна змінна			Ведучий стовпчик X1	X2	X3	X4	X5	X6	Розв'язок
Z			-3	-2	0	0	0	0	0
	X3	0	1	2	1	0	0	0	Відношення 6 6/1=6
Ведучий рядок	X4	0	2	1	0	1	0	0	8 8/2=4
	X5	0	1	1	0	0	1	0	1
	X6	0	1	1	0	0	0	1	2

Стовпчик симплекс-таблиці, асоційований зі змінною, що включається, називається ведучим. Рядок, який відповідає змінній, що виключається, називають ведучим, а елемент таблиці, який розміщується на перетині ведучого стовпчика і ведучого рядка, - ведучим.

Змінна, що виключається з базису, визначається з використанням умови припустимості.

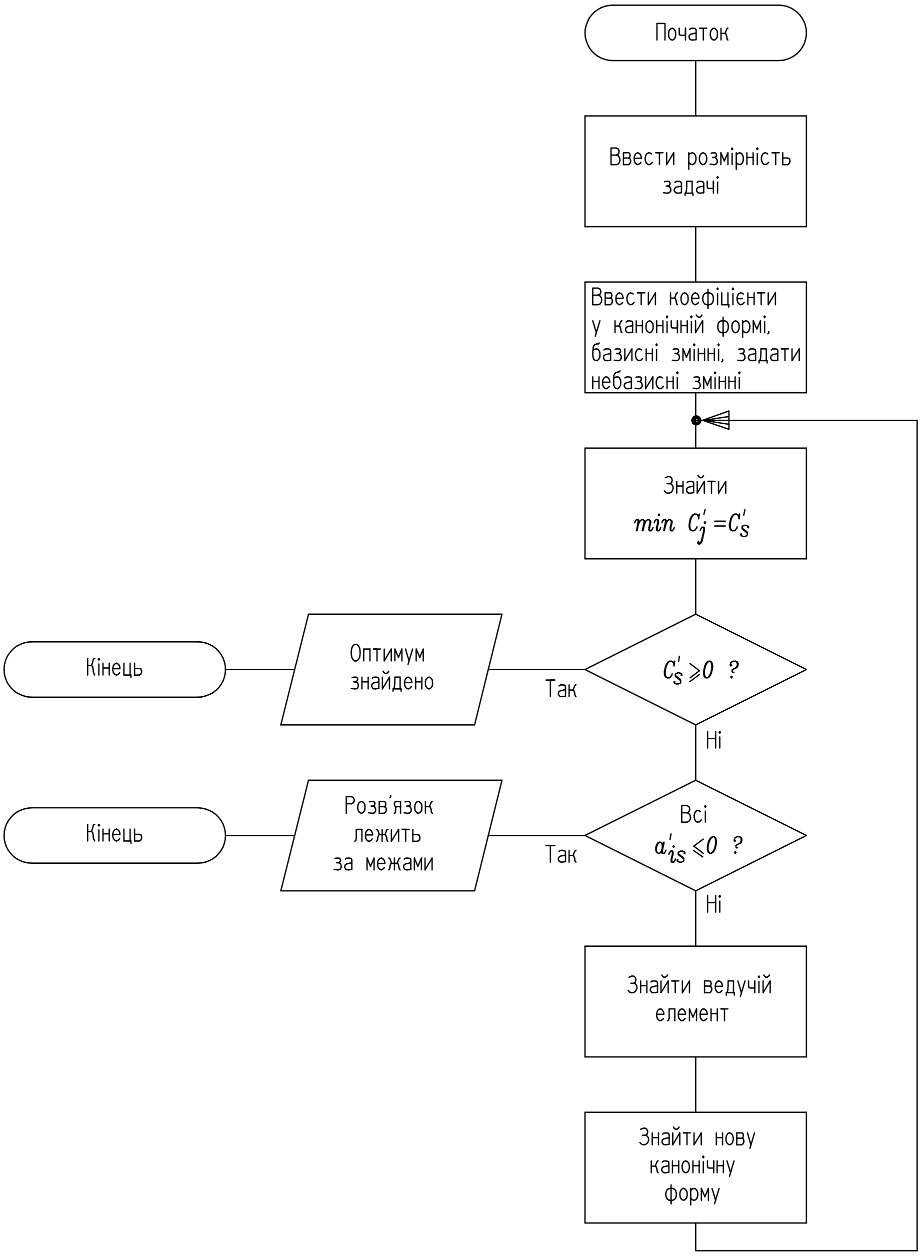


Рис. 3.2.1. Схема симплекс-методу

Умова припустимості. У задачах максимізації і мінімізації за змінну, що виключається, вибирають ту базисну змінну, для якої відношення сталої у правій частині відповідного обмеження до (додатного) коефіцієнта ведучого стовпчика мінімальне. У випадку рівності цього відношення для кількох базисних змінних вибір довільний.

Новий базисний розв'язок відшукується методом виключення змінних чи методом Гаусса-Жордана і містить обчислювальні процедури двох типів.

Тип 1. (формування ведучого рівняння):

Новий ведучий рядок = попередній ведучий рядок / ведучий елемент.

Тип 2. (формування всіх інших рівнянь, включаючи z - рівняння):

Нове рівняння = попереднє рівняння - (коефіцієнт ведучого стовпчика попереднього рівняння х новий ведучий рядок).

Використання процедури типу 1 призводить до того, що в новому ведучому рівнянні ведучий елемент стає таким, що дорівнює одиниці. У результаті процедури типу 2 всі інші коефіцієнти у ведучому стовпчику стають такими, що дорівнюють нулю, тобто приходимо до нової канонічної форми.
Ітераційний характер симплекс-методу ЛП може реалізуватися на ЕОМ. Схема симплекс-методу для випадку мінімізації цільової функції показана на рис.3.2.1.

Завдання 1.

Дано сукупність обмежень

$$x_1 + 7x_2 + 3x_3 + 7x_4 \le 46;$$
$$3x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 \le 8;$$
$$2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 \le 10.$$

Розв'язати задачу ЛП симплекс-методом при таких цільових функціях:
максимізувати

а) $z = 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 5x_4;$

б) $z = -2x_1 + 6x_2 + 3x_3 - 2x_4;$

в) $z = 3x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4;$

мінімізувати

г) $z = 5x_1 - 4x_2 + 6x_3 + 8x_4;$

д) $z = 3x_1 - 6x_2 - 2x_3 + 4x_4.$

Завдання 2.

Мінімізувати функцію $z = -4x_1 - 5x_2 - 9x_3 - 11x_4$ при обмеженнях $x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0$:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \le 15;$$
$$7x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 \le 120;$$
$$3x_1 + 5x_2 + 10x_3 + 15x_4 \le 100.$$

Завдання 3.

Використати симплекс-метод для максимізації функції $z = 3x_1 + 6x_2 + 2x_3$ при обмеженнях $x_1, x_2, x_3 \ge 0$:

$$3x_1 + 4x_2 + x_3 \le 2;$$
$$x_1 + 3x_2 + 2x_3 \le 1.$$

Завдання для самостійної роботи.

Підприємство виготовляє два продукти A і B, ринок збуту яких необмежений. Кожний продукт повинен бути оброблений кожною з машин 1, 2 і 3. Час обробки (у годинах) для кожного з виробів A і B наведений у таблиці:

Продукт	Машина		
	1	2	3
A	0,5	0,4	0,2
B	0,25	0,3	0,4

Машини 1, 2, 3 працюють відповідно 40, 36, 36 годин на тиждень. Прибуток від реалізації виробів A і B дорівнює відповідно 5 і 3 грн.

Визначити тижневі норми випуску виробів A і B, які максимізують прибуток. Сформулювати цю задачу як задачу ЛП і розв'язати її.

Контрольні запитання.

1. Чи правильні твердження, що максимізація деякої функції f за заданою сукупністю обмежень еквівалентна мінімізації функції $g = -f$ за тою самою системою обмежень, за винятком того, що $\min g = -\max f$?
2. Чи може кількість додатних базисних змінних на ітерації симплекс-методу перевищувати m при розв'язуванні задач ЛП з m обмеженнями?
3. Чи обов'язково відповідає ітерації симплекс-методу (базисному розв'язку) припустима екстремальна точка простору розв'язку?
4. Чи залежить у першу чергу обсяг обчислень при реалізації симплекс-методу від кількості обмежень?
5. Чи різні умови припустимості для випадків максимізації та мінімізації цільової функції?

3.3 ДВОЕТАПНИЙ СИМПЛЕКС-МЕТОД.

В обчислювальній схемі симплекс-методу для отримання початкового базисного розв'язку використовувались залишкові змінні. Проте, коли вихідне обмеження записано у вигляді рівностей чи має знак ≥, не можна відразу отримати припустимий початковий базисний розв'язок.

Раціональний спосіб його знаходження полягає у використанні штучних змінних. Він передбачає включення невід'ємних змінних у ліву частину кожного з рівнянь, які не містять очевидних початкових базисних розв'язків.

Проілюструємо це твердження на такому прикладі.

Приклад 3.3.1

Мінімізувати $z = 4x_1 + x_2$ при обмеженнях

$$3x_1 + x_2 = 3;$$

$$4x_1 + 3x_2 \geq 6;$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 6;$$

$$x_1, x_2 \geq 0;$$

У стандартній формі з невід'ємними додатковими змінними обмеження набирають вигляду

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 \qquad\qquad &= 3; \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 \qquad &= 6; \\ x_1 + 2\,x_2 \qquad + x_4 &= 4. \end{aligned}$$

Очевидно, припустимого базисного розв'язку немає. Є три рівняння, які містять чотири невідомих.

Етапи методу отримання стартової точки.

Етап 1. Вводяться штучні змінні, необхідні для отримання стартової точки. Записується нова цільова функція, що передбачає мінімізацію суми штучних змінних при вихідних обмеженнях. Якщо мінімальне значення цільової функції дорівнює нулю (тобто всі штучні змінні мають в оптимумі нульові значення), вихідна задача має припустимий розв'язок. Переходять до етапу 2.

У противному разі, тобто коли мінімум нової цільової функції виявляється більшим від нуля, вихідна задача не має припустимих розв'язків.

Етап 2. Оптимальний базисний розв'язок, отриманий на етапі 1, використовується як початковий розв'язок вихідної задачі.

Реалізацію двоетапного методу проілюструємо на прикладі 3.3.1.

Етап 1. Необхідно ввести штучні змінні R1 і R2 відповідно у перше і друге рівняння, тобто етап 1 зводиться до мінімізації W=R1+R2 при обмеженнях

$$3x_1 + x_2 \qquad + R_1 \qquad = 3;$$
$$4x_1 + 3x_2 - x_3 \quad + R_2 \quad = 6;$$
$$x_1 + 2\,x_2 \qquad\qquad + x_4 \ = 4;$$
$$x_1, x_2, x_3, R_1,\ R_2,\ x_4 \ge 0.$$

Для мінімізації штучної цільової функції її треба виразити через небазисні змінні (R1 і R2 - базисні змінні на першому етапі розв’язання)

$$W = R_1 + R_2 = \left(3 - 3x_1 - x_2\right) + \left(6 - 4x_1 - 3x_2 + x_3\right) = -7x_1 - 4x_2 + x_3 + 9$$

За допомогою цього співвідношення отримаємо початкову симплекс-таблицю.

Базисна змінна	X1	X2	X3	R1	R2	X4	Розв’язок
W	7	4	-1	0	0	0	9
R1	3	1	0	1	0	0	3
R2	4	3	-1	0	1	0	6
X4	1	2	0	0	0	1	4

Оптимальна таблиця, що отримана за дві ітерації, має такий вигляд.

Базисна змінна	X1	X2	X3	R1	R2	X4	Розв’язок
W	0	0	0	-1	-1	0	0
X1	1	0	1/5	3/5	-1/5	0	3/5
X2	0	1	-3/5	-4/5	3/5	0	6/5
X4	0	0	1	1	-1	1	1

Оскільки minW=0, задача має припустимий розв’язок і можна перейти до етапу 2.

Етап 2. Штучні змінні виконали свою функцію, так що у всіх наступних розрахунках вони фігурувати не повинні. Рівняння з оптимальної симплекс-таблиці етапу 1 запишемо у такому вигляді: мінімізувати $z = 4x_1 + x_2$ при обмеженнях

$$x_1 + \tfrac{1}{5}x_3 = \tfrac{3}{5};$$
$$x_2 - \tfrac{3}{5}x_3 = \tfrac{6}{5};$$
$$x_3 + x_4 = 1;$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0.$$

Головна мета етапу 1 полягає в отриманні початкового розв’язку вихідної задачі. Оскільки є три рівняння і чотири змінні, то, дописуючи одній із змінних (а саме X3) нульове значення, можна отримати припустимий базисний розв’язок: $x_1 = \tfrac{3}{5}, x_2 = \tfrac{6}{5}, x_4 = 1.$

Розроблений також метод отримання стартової точки, в якому використовується “штрафування” штучних змінних.

М-метод (метод великих штрафів)

Розглянемо лінійну модель, що приведена раніше з введеними штучними змінними R_1 і R_2.

За використання цих змінних у складі цільової функції можна ввести штраф, приписуючи йому достатньо великий додатній коефіцієнт М. Такий спосіб введення штучних змінних R1 і R_2 приведе до наступної лінійної моделі:

мінімізувати $z = 4x_1 + x_2 + MR_1 + MR_2$

при обмеженнях

$$3x_1 + x_2 + R_1 = 3,$$
$$4x_1 + 3x_2 - x_3 + R_2 = 6,$$
$$x_1 + 2x_2 + x_4 = 4,$$
$$x_1, x_2, x_3, R_1, R_2, x_4 \geq 0.$$

Для отримання цільової функції у канонічній формі виразимо штучні змінні R_1 і R_2 через небазисні, в результаті маємо наступний вираз для *z*:

$$z = 4x_1 + x_2 + M(3 - 3x_1 - x_2) + M(6 - 4x_1 - 3x_2 + x_3) =$$
$$= (4 - 7M)x_1 + (1 - 4M)x_2 + Mx_3 + 9M$$

Таким чином, стартовій точці, в якій $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ відповідає значенням $z=9M$ при $R_1=3$ і $R_2=6$.

Недолік М-метода пов'язаний з можливістю похибок в обчисленнях, обумовлених дуже великою величиною коефіцієнта М.

Внаслідок помилок округлення властивих цифрових ЕОМ, процес обчислень може стати нечутливим до значень вихідних коефіцієнтів при змінних. При цьому виникає небезпека того, що ці змінні будуть інтерпретовані як змінні, що фігурують у цільовій функції з нульовими коефіцієнтами.

Особливі випадки застосування симплекс-методу:

1) виродженість;
2) альтернативні оптимальні рішення;
3) необмежені рішення;
4) відсутність припустимих рішень.

Виродженість - у тих випадках, коли перевірка припустимості не приводить до однозначної ідентифікації змінної, підлягаючої виключенню базису, вибір можна здійснити довільно. Однак на наступній ітерації принаймні одна з базисних змінних повинна дорівнювати нулю.

Наявність виродженості рішення не свідчить про яку-небудь небезпеку, викликає лише деякі незручності. З практичної точки зору специфіка ситуації має на увазі наявність в моделі принаймні одного надлишкового обмеження.

Приклад 3.3.2

$$z = 3x_1 + 9x_2 \to \max,$$
$$x_1 + 4x_2 \leq 8,$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 4,$$
$$x_1, x_2 \geq 0.$$

Ітерація	Базисні змінні	x_1	x_2	x_3	x_4	Рішення
0	z	-3	-9	0	0	0
$x_2 \to$введ	X_3	1	4	1	0	8
$x_3 \to$викл	X_4	1	2	0	1	4
1	z	-3/4	0	9/4	0	18
$x_1 \to$введ	X_2	1/4	1	1/4	0	2
x4$\to$викл	X_4	1/2	0	-1/2	1	0
2	z	0	0	3/2	3/2	18
оптимум	X_2	0	1	1/2	-1/2	2
	X_1	1	0	-1	2	0

Завдання 1.

Розглянути систему обмежень:

$$-24x_1 + 3x_2 = 3; \quad (1)$$

$$4x_1 + 5x_2 \geq 10; \quad (2)$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 5; \quad (3)$$

$$6x_1 + 7x_2 \leq 3; \quad (4)$$

$$4x_1 + 8x_2 \geq 5; \quad (5)$$

$$x_1, x_2 \geq 0. \quad (6)$$

Підставити штучні змінні та скласти штучну цільову функцію для кожного з таких випадків:
максимізувати

а) $z = 5x_1 + 6x_2$ при обмеженнях (1), (3) і (4);

б) $z = 2x_1 - 7x_2$ при обмеженнях (1), (2),(4) і (5);

мінімізувати

в) $z = 3x_1 + 6x_2$ при обмеженнях (3), (4) і (5);

г) $z = 4x_1 + 6x_2$ при обмеженнях (1), (2) і (5);

д) $z = 3x_1 + 2x_2$ при обмеженнях (1) і (5).

Розв'язати їх і результати порівняти з графічним розв'язком задачі.

2. За допомогою двоетапного методу розв'язати задачу ЛП, що має систему обмежень

$$x_1 + x_2 + x_3 = 7;$$

$$2x_1 - 5x_2 + x_3 \geq 10;$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

і таку цільову функцію:

а) максимізувати $z = 2x_1 + 3x_2 - 5x_3$;

б) мінімізувати $z = 2x_1 + 3x_2 - 5x_3$;

в) максимізувати $z = x_1 + 2x_2 + x_3$;

г) мінімізувати $z = 4x_1 - 8x_2 + 3x_3$.

3.4 АНАЛІЗ МОДЕЛЕЙ НА ЧУТЛИВІСТЬ.

3.4.1 СИМПЛЕКС-МНОЖНИКИ.

Аналіз моделей на чутливість – це процес, що реалізується після того, як оптимальне рішення задачі отримане. В рамках такого аналізу виявляється чутливість оптимального рішення до певних змін вихідної моделі.

Матриця обмежень A загальної задачі ЛП може бути розбита наступним чином:

$$A = [BR]$$

де B – матриця базисних змінних m*m;

R – матриця небазисних змінних m*(n-m).

Канонічна форма для базису отримується множенням рівняння

$$[BR]X = b$$

на обернену матрицю B^{-1}.

Так як $B^{-1}[BI] = [IB^{-1}]$

отримаємо співвідношення

$$\left[I \middle| B^{-1}R\right]X = B^{-1}b = b'.$$

Таким чином коефіцієнти при базисних змінних визначаються одиничною матрицею I, коефіцієнти при небазисних змінних

$$a'_j = B^{-1}a_j,$$

$$x_i = b'_i, i = 1,..., m,$$

$$z = \sum_{i=1}^{m} c_i b'_i$$

де a_j – коефіцієнти небазисних змінних у стандартній формі.

Симплекс метод не складається у безпосередньому обчисленні оберненої матриці. Цей метод ітеративен по суті, він перетворює базис і це перетворення може бути знайдено з таблиць обчислень симплекс методом.

В якості ілюстрації візьмемо приклад, що представлено у таблиці

Ітерація	Базис	Значення	x_1	x_2	x_3	x_4
0	$-x_3$	1700	3	4	1	0
	x_4	1600	2	5	0	1
	z	0	-2	-4	0	0

Обернена матриця B^{-1}

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 5/7 & -4/7 \\ -2/7 & 3/7 \end{bmatrix}$$

Кінцева оптимальна таблиця

Ітерація	Базис	Значення	x_1	x_2	x_3	x_4
2	x_1	300	1	0	5/7	-4/7
	x_2	200	0	1	-2/7	3/7
	z	1400	0	0	2/7	4/7

В кінцевій таблиці значення базисних змінних знаходяться

$$b' = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 5/7 & -4/7 \\ -2/7 & 3/7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1700 \\ 1600 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 300 \\ 200 \end{bmatrix}$$

У кожній канонічній формі стосовні базисні змінні були виключені з цільової функції z. У симплексі-методі це робиться ітеративно, наприклад, на кожній стадії з використанням вихідного вигляду обмежень. Задача загального вигляду формулюється в такий спосіб:

мінімізувати функцію $c_1 x_1 + c_2 x_2 + ... + c_n x_n = z$

при обмеженнях

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right\}$$

Можна помножити обмеження на $\pi_1, \pi_2, ..., \pi_m$, додати до виразу для функції z і одержати співвідношення

$$x_1\left(c_1 + \sum_{i=1}^{m} a_{i1}\pi_i\right) + x_2\left(c_2 + \sum_{i=1}^{m} a_{i2}\pi_i\right) + ... + x_n\left(c_n + \sum_{i=1}^{m} a_{in}\pi_i\right) = \\ = z + \sum b_i \pi_i \qquad (3.4.1)$$

Значення π_i можна вибрати так, що коефіцієнти при базисних змінних у рівняннях (3.4.1) стануть нульовими. Значення π_i називаються <u>симплекс-множниками.</u> Якщо $x_1, x_2, \ldots, x_m$ – базисні змінні (при цьому не відбувається втрати спільності), тоді π_i визначаються із системи рівнянь

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}\pi_1 + a_{21}\pi_2 + \ldots + a_{m1}\pi_m = -c_1, \\ a_{12}\pi_1 + a_{22}\pi_2 + \ldots + a_{m2}\pi_m = -c_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1m}\pi_1 + a_{2m}\pi_2 + \ldots + a_{mm}\pi_m = -c_m \end{array}\right\}$$

Для прикладу, що розглядався вище, коефіцієнти x_3 і x_4 в оптимальному вигляді для функції z рівні відповідно 2/7 і 4/7, це і є <u>симплекс-множники</u> для оптимального базису.

Обмеження і цільова функція мають наступний вихідний вигляд:

$$\begin{pmatrix} 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 1700 \\ \\ 2x_1 + 5x_2 + x_4 = 1600 \end{pmatrix} \begin{matrix} \times\left(\dfrac{2}{7}\right), \\ \times\left(\dfrac{4}{7}\right), \end{matrix}$$

$$-2x_1 - 4x_2 = z.$$

Помноживши обмеження (як показано вище) на π_1 й π_2 і додавши їх до функції z одержимо

$$x_1\left(-2 + 3\times\frac{2}{7} + 2\times\frac{4}{7}\right) + x_2\left(-4 + 4\times\frac{2}{7} + 5\times\frac{4}{7}\right) + \frac{2}{7}x_3 + \frac{4}{7}x_4 =$$

$$= z + 1700\times\frac{2}{7} + 1600\times\frac{4}{7}$$

тобто

$$\frac{2}{7}x_3 + \frac{4}{7}x_4 = z + 1400 \qquad (3.4.2)$$

що і є остаточним виглядом для функції z.

Далі з рівняння (3.4.2) для функції z в остаточному вигляді ясно, що коефіцієнти при базисних змінних будуть нульовими завдяки вибору π_i, а коефіцієнти при небазисних змінних будуть додатніми. При цьому (тому що небазисні елементи дорівнюють нулю) кожен доданок у лівій частині рівняння (3.4.1) дорівнює нулю; або коефіцієнти при них дорівнюють нулю. Отже, оптимальне значення для функції z визначається формулою

$$z^{opt} + \sum b_i\pi_i = 0$$

тобто

$$z^{opt} = -\sum b_i\pi_i \qquad (3.4.3)$$

Для тільки що розглянутого приклада це очевидно

$$z^{opt} = -\begin{bmatrix} 1700 \\ 1600 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2/7 \\ 4/7 \end{bmatrix} = -1400$$

Коефіцієнти, що входять у математичне формулювання задачі, часто мають фізичний сенс у практичних задачах. Коефіцієнти цільової функції можуть виражати прибуток при комерційних операціях. Значення, що входять в праві частини обмежень, можуть виражати обмеженість доступних ресурсів. Очікується, що в подібних випадках ці значення будуть мінятися, що, у свою чергу, приведе до зміни формулювань математичних задач. Наприклад, завдяки підвищенню продуктивності праці може збільшитися доступний продуктивний час верстатів, пожежа на складі може знизити постачання сировини і т.д. Як діяти в подібних ситуаціях?

Один із самих примітивних способів полягає в тому, щоб врахувати виникаючі фізичні зміни, поставити нову задачу і вирішити її спочатку. Однак цей спосіб може бути дуже неефективний; він не враховує корисну роботу проведену при вирішенні задачі до змін.

Давайте послідовно розглянемо:
1) зміни в b_i (значення правих частин);
2) зміни в c_j (коефіцієнти цільової функції);
3) включення додаткових змінних;
4) включення додаткових обмежень.
1) Зміни в b_i
Нехай вихідні обмеження задачі у виді $AX=b$ і функція $z=c^TX$ повинна бути мінімізована.
Припустимо, що вихідна задача вирішена. З рівняння (3.4.1) значення цільової функції виражається в такий спосіб:

$$z^{opt} = -\sum b_i \pi_i$$

причому всі коефіцієнти при небазисних змінних

$$c_j + \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\pi_i \geq 0. \qquad (3.4.4)$$

(коефіцієнти при базисних змінних дорівнюють нулю, при небазисних змінних ≥ 0).

Нехай нова задача сформулюється так:

$$AX = b + \Delta b,$$

$$\Delta b = \begin{bmatrix} \Delta b_1 \\ \Delta b_2 \\ \ldots\ldots. \\ \Delta b_m \end{bmatrix}$$

з тією же цільовою функцією $z=c^TX$.
Тепер при зміні тільки коефіцієнтів b_i рівняння (3.4.4) для нової задачі залишається незмінним. Тому якщо базисне рішення залишається припустимим і для нового формулювання задачі, то воно буде й оптимальним базисним припустимим рішенням для цієї задачі. Новим значенням функції z буде

$$z^* = -\sum_{i=1}^{m} (b_i + \Delta b_i)\pi_i$$

У такий спосіб з рівняння (2.5) можна одержати

$$\frac{\partial z^{opt}}{\partial b_i} = -\pi_i \ , \qquad (3.4.5)$$

де z^{opt} розглядається як функція від $b_1, b_2, \ldots, b_m$. Розуміється якщо сильно змінити b_i, те точка x_b^* (нові значення базисних змінних) буде неоптимальна і задачу прийдеться вирішувати спочатку.

Приклад 3.4.1. Задача ЛП полягає в тому, щоб знайти такі $x_1, x_2 > 0$, що

$$3x_1 + 4x_2 \leq 1700$$
$$2x_1 + 5x_2 \leq 1600$$

при яких мінімізується функція $-2x_1 - 4x_2 = z$ (прибуток, узятий зі зворотним знаком).
Перша й остання (оптимальна) мають відповідний вигляд (таблиці стор.18). Обернений базис має вигляд

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{5}{7} & -\frac{4}{7} \\ -\frac{2}{7} & \frac{3}{7} \end{bmatrix};$$

симплекс-множники

$$\pi = \begin{bmatrix} \frac{2}{7} \\ \frac{4}{7} \end{bmatrix}$$

1. Припустимо, що з'явилася можливість придбати додаткову сировину в другого постачальника. Скільки йому можна заплатити за 1м^2?
Допустимо, що в першому обмеженні 1700 було замінено на 1701.

Вектор b заміняється на новий вектор $\begin{bmatrix} 1701 \\ 1600 \end{bmatrix}$.

Новими значеннями базисних змінних будуть

$$\begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/7 & -4/7 \\ -2/7 & 3/7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1701 \\ 1600 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 300 \\ 200 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5/7 & -4/7 \\ -2/7 & 3/7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 300+5/7 \\ 200-2/7 \end{bmatrix}$$

що припустимо.

Оптимальне значення для функції z змінюється на $\left(-\sum b_i \pi_i\right)$, у даному випадку $-\left(2/7 \times 1701 + 4/7 \times 1600\right) = -1400 - 2/7.$

У такий спосіб прибуток зростає на 2/7 грн. і це – максимальна ціна, яку варто заплатити за 1м^2 листової сталі. Нема рації купувати додаткову сировину.

Максимальна ціна дорівнює π_1.

2. Припустимо, що мається можливість одержання додаткового машинного часу. Чи буде вигідно це якщо 1 година машинного часу коштує 7грн.?

У цьому випадку в математичній задачі вектор b заміняється на вектор $\begin{bmatrix} 1700 \\ 1610 \end{bmatrix}$. Новими значеннями базисних змінних будуть

$$\begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/7 & -4/7 \\ -2/7 & 3/7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1700 \\ 1610 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 300-40/7 \\ 200+30/7 \end{bmatrix}$$

що припустимо.

Оптимальне значення для функції z заміняється на значення

$-\left(2/7 \times 1700 + 4/7 \times 1610\right) = -1400 - 40/7.$

Прибуток збільшується на 40/7грн. Оскільки додаткова 1 година машинного часу коштує 7грн., це невигідно. Легко бачити, що рішення цієї задачі спочатку приведе до тих же результатам. Але немає ніякої необхідності починати спочатку. У великих за обсягом задачах це неефективно.

Приклад 3.3.2

Нехай у прикладі 2.4 прибуток від однієї моделі А відповідає P_1 грн., а від однієї моделі В – P_2 грн. Для яких значень P_1 і P_2 отримане рішення є оптимальним?

Цільова функція в першій таблиці задається формулою $-P_1x_1 - P_2x_2 = z + 0.$ Оскільки в таблиці змінюється тільки останній рядок, канонічна форма обмежень у тім же базисі залишиться колишньою, тобто

$$x_1 + \frac{5}{7}x_3 - \frac{4}{7}x_4 = 300$$

$$x_2 - \frac{2}{7}x_3 + \frac{3}{7}x_4 = 200.$$

Щоб записати функцію z у канонічній формі варто виключити x_1 і x_2 з виразу для функції z. Це можна зробити, помноживши перше обмеження (у кінцевій таблиці) на P_1, друге – на P_2 і додавши їх до вираження для функції z; у результаті одержимо $\left(\frac{5}{7}P_1 - \frac{2}{7}P_2\right)x_3 + \left(-\frac{4}{7}P_1 + \frac{3}{7}P_2\right)x_4 = z + 300P_1 + 200P_2$.

Це видно з рис. 3.1.1, де точка B – оптимальна якщо припустити, що лінія рівня функції z, що проходить через крапку B, лежить між двома лініями обмежень пересічними в точці B.

3) включення додаткових змінних.

Приклад 3.4.3

Нехай виявилося можливим виготовити деталі типу C і нехай для виготовлення однієї деталі цього типу необхідно 4м^2 матеріалу і потрібно 20 хвилин машинного часу. Якщо прибуток одного виробу складає P грн. чи варто братися за його виготовлення?

Якщо виготовити x_5 одиниць типу C, то задача в стандартній формі перетворюється в наступну: знайти такі x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, що

$$3x_1 + 4x_2 + x_3 + 4x_5 = 1700,$$
$$\frac{1}{5}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + x_4 + \frac{1}{3}x_5 = 1600,$$
$$-2x_1 - 4x_2 - Px_5 = z$$

і мінімізувати функцію

тобто

$$3x_1 + 4x_2 + x_3 + 4x_5 = 1700,$$
$$2x_1 + 5x_2 + x_4 + \frac{10}{3}x_5 = 1600,$$
$$-2x_1 - 4x_2 - Px_5 = z$$

У кінцевій таблиці перші два елементи стовпця, що відповідає x_5, будуть відповідно до рівняння $a'_j = B^{-1}a_j$ мати наступний вид:

$$B^{-1}\begin{bmatrix}4\\10/3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5/7 & -4/7\\-2/7 & 3/7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\-10/3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}20/21\\6/21\end{bmatrix}$$

Оскільки симплекс-множники $\begin{bmatrix}\pi_1\\\pi_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2/7\\4/7\end{bmatrix}$, з рівняння

$$x_1\left(c_1 + \sum_{i=1}^{m} a_{i1}\pi_i\right) + x_2\left(c_2 + \sum_{i=1}^{m} a_{i2}\pi_i\right) + ... + x_n\left(c_n + \sum_{i=1}^{m} a_{in}\pi_i\right) = z + \sum b_i\pi_i.$$

випливає, що коефіцієнт при x_5 у канонічній формі для функції z

$$-P + \frac{2}{7}\times 4 + \frac{4}{7}\times\frac{10}{3} = -P + \frac{64}{21}$$

Кінцева таблиця прийме наступний вид (зміни відбувалися тільки в x_5):

Ітерація	Базис	Значення	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
	x_1	300	1	.	5/7	-4/7	20/21
	x_2	200	.	1	-2/7	-2/7	6/21
	-z	1400	.	.	2/7	4/7	-P+64/21

Якщо $-P + \frac{64}{21} \geq 0$, то рішення, приведене в таблиці оптимальне, x_5 залишається небазисною змінною, і не треба складати нову модель.

Якщо $-P + \frac{64}{21} < 0$, тобто $P > \frac{64}{21}$, то необхідно включити x_5 у базис. З цього моменту можна продовжити обчислення симплекс-методом.

4) Включення додаткових обмежень.

Приклад 3.4.4

Припустимо в період економічної кризи повідомлять, що ринок приймає 550 деталей у тиждень. Як це відіб'ється на виробництві? Зазначене обмеження на обсяг продажу рівносильне обмеженню $x_1 + x_2 \leq 550$.

Це додаткове обмеження повинне бути включене в математичну постановку задачі. Однак у даному випадку воно ніяк не впливає на оптимальне рішення. У цьому рішенні x_1=300 і x_2=200, так що x_1+x_2=500 задовольняє додатковому обмеженню.

Якби криза була серйознішою, з обмеженням ринку до 450 деталей у тиждень, ситуація була б іншою.

Застосування подвійного симплекса-методу особливо ефективне при аналізі моделей на чутливість, зокрема в тих випадках, коли після одержання оптимального рішення в умови задачі вводиться нове обмеження.

Наприклад, для економічних задач може становити інтерес питання про те, як вплине на оптимальне рішення збільшення і зменшення попиту і (чи) зміна запасів вихідних продуктів. Можливо також визначити впливу зміни ринкових цін на оптимальне рішення.

Якщо для попереднього оптимального рішення нове обмеження не виконується, то отримане рішення оптимальне, але не припустиме. У цьому випадку подвійний симплекс-метод використовується для перебування нового оптимального рішення шляхом послідовного зменшення ступеня неприпустимості рішень, одержуваних у процесі симплексів-ітерацій.

Запитання для самостійної роботи

Підприємство закупає необроблену нафту з кількох джерел *W*, *X*, *Y* та *Z* і очищає її, виробляючи різні види (*A*, *B* і *C*) мастил, готових до продажу. Існують також обмеження щодо кількості продажу кожного виду мастил.

Мастило	Вміст, %	Можливий об'єм мастила для продажу, л
A	Не менше ніж 10(W) Не більш ніж 25(Z)	90000
B	Не менше ніж 15(W)	100000
C	Не менше ніж 20(X) Не більше ніж 50(Y)	120000

Ціни (в умовних одиницях) 1 л сировини і мастил наведені в таблиці.

Сировина				Мастило		
X	*Y*	*Z*	*W*	*A*	*B*	*C*
72	60	67	75	90	87	84

Припустивши, що необроблена нафта доступна в необмеженій кількості, сформулювати задачу максимізації прибутку як задачу ЛП і знайти оптимальний розв'язок.

Контрольні запитання

1. Чому необхідно мінімізувати суму штучних змінних?
2. Чи потрібно максимізувати суму штучних змінних, якщо цільова функція вихідної задачі ЛП підлягає максимізації?
3. Особливі випадки використання симплекс-методу.

3.4.2 ПОДВІЙНИЙ СИМПЛЕКС-МЕТОД

У звичайному симплекс-методі спочатку знаходять припустимий, але неоптимальний розв'язок. Метод, що отримав назву подвійного симплекс-методу, забезпечує виконання умов оптимальності розв'язку і систематичне наближення його до області припустимих розв'язків. При його використанні не вимагається, щоб усі базисні змінні були додатними із самого початку, але для задачі мінімізації необхідно, щоб усі коефіцієнти цільової функції були невід'ємними. Коли отриманий розв'язок виявляється припустимим, ітераційний процес обчислень закінчується, оскільки цей розв'язок є і оптимальним.

Приклад 3.4.5.

Мінімізувати $Z = 2x_1 + x_2$ при обмеженнях

$$3x_1 + x_2 \geq 3;$$
$$4x_1 + 3x_2 \geq 6;$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 3;$$
$$x_1,\ x_2 \geq 0.$$

У стандартній формі задача формулюється так: знайти такі $x_i \geq 0$, що

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 - x_3 &= 3; \\ 4x_1 + 3x_2 - x_4 &= 6; \\ x_1 + 2x_2 + x_5 &= 3, \end{aligned}$$

і мінімізувати $Z = 2x_1 + x_2$.

Якщо помножити ці обмеження на -1 (для отримання конкретного вигляду базису), матимемо:

$$\begin{aligned} -3x_1 - x_2 + x_3 &= -3; \\ -4x_1 - 3x_2 + x_4 &= -6; \\ x_1 + 2x_2 + x_5 &= 3; \\ 2x_1 + x_2 &= Z; \end{aligned}$$
$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5 \geq 0.$$

Спроба скласти для цієї задачі початкову симплекс-таблицю призводить до висновку, що значення залишкових змінних (x_3, x_4, x_5) не забезпечують отримання припустимої стартової точки. Початковий базисний розв'язок (x_3=-3, x_4=-6, x_5=3) оптимальний, але недопустимий. Така ситуація типова для задач ЛП деякого типу, які розв'язують за допомогою подвійного симплекс-методу.

Початкова симплекс-таблиця, що відповідає оптимальному, але неприпустимому розв'язку, має такий вигляд:

Базисна змінна	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Розв'язок
-Z	2	1	0	0	0	0
x_3	-3	-1	1	0	0	-3
x_4	-4	-3	0	1	0	-6
x_5	1	2	0	0	1	3

<u>Умова припустимості.</u> За змінну, що виключається, вибирається найбільша за абсолютною величиною від'ємна базисна змінна (при наявності альтернатив вибір довільний). Якщо всі базисні змінні невід'ємні, обчислення закінчується, оскільки отриманий розв'язок припустимий і оптимальний.

<u>Умова оптимальності.</u> Змінна, що включається в базис, вибирається з числа небазисних змінних таким чином. Обчислюється відношення коефіцієнтів лівої частини Z-рівняння до відповідних коефіцієнтів рівняння, асоційованого зі змінною, що виключається. Відношення з додатним чи нульовим значенням знаменника не враховується. Введеній змінній повинно відповідати відношень, найменше за абсолютною величиною. Якщо знаменники всіх відношень дорівнюють нулю чи додатні, задача не має припустимих розв'язків.

Після вибору змінних, що включаються в базис і виключаються з нього, для отримання наступного розв'язку здійснюється звичайна операція перетворення рядків симплекс-таблиці.

У таблиці змінною, що виключається, є x_4=-6, оскільки вона має найбільше за абсолютною величиною від'ємне значення. Відношення, що обчислюються для визначення нової базисної змінної, наведені в таблиці.

Змінна	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
Z-рівняння x_4-рівняння	2 -4	1 -3	0 0	0 1	0 0
Відношення	1/2	1/3	-	-	-

За змінну, що включається, вибирається x_2, оскільки цій змінній відповідає найменше за модулем відношення, яке дорівнює 1/3.

Наступні перетворення рядків приводять до нової симплекс-таблиці.

Базисна Змінна	x_1	X_2	x_3	x_4	x_5	Розв'язок
-Z	2/3	0	0	1/3	0	-2
x_3	-5/3	0	1	-1/3	0	-1
x_2	4/3	1	0	-1/3	0	2
x_5	-5/3	0	0	2/3	1	-1

Новий розв'язок також оптимальний, але все ще неприпустимий ($x_3=-1;\ x_5=-1$). Потрібно продовжити перетворення симплекс-таблиці до отримання оптимального і припустимого розв'язку.

Застосування подвійного симплекс-методу особливо ефективне при аналізі моделей на чутливість, зокрема, тоді, коли після отримання оптимального розв'язку в умову задачі вводять нове обмеження. Наприклад, для економічних задач може бути цікавим те, як впливає на оптимальний розв'язок збільшення чи зменшення попиту і (або) зміна запасів вхідних продуктів. Можливо також визначити вплив зміни ринкових цін на оптимальний розв'язок.

Якщо для попереднього оптимального розв'язку нове обмеження не виконується, то отриманий розв'язок оптимальний, але не припустимий. У цьому випадку подвійний симплекс-метод використовується для знаходження нового оптимального розв'язку шляхом послідовного зменшення ступеня неприпустимості розв'язків, отриманих у процесі симплекс-ітерації.

Завдання. Розв'язати задачі за допомогою подвійного симплекс-методу:

а) мінімізувати $Z = 2x_1 + 3x_2$ при обмеженнях:

$$\begin{aligned} 2x_1 \quad &+ 3x_2 \quad \le 30; \\ x_1 \quad &+ 2x_2 \quad \ge 10; \\ x_1,\ x_2 &\ge 0; \end{aligned}$$

б) мінімізувати $Z = 5x_1 + 6x_2$ при обмеженнях:

$$\begin{aligned} x_1 \quad &+ x_2 \quad \ge 2; \\ 4x_1 \quad &+ x_2 \quad \ge 4; \\ x_1,\ x_2 &\ge 0; \end{aligned}$$

в) мінімізувати $Z = 2x_1 + x_2$ при обмеженнях:

$$\begin{aligned} 3x_1 \quad &+ x_2 \quad \ge 3; \\ 4x_1 \quad &+ 3x_2 \quad \ge 6; \\ x_1 \quad &\ \ 2x_2 \quad \le 3, \\ x_1,\ x_2 &\ge 0; \end{aligned}$$

г) мінімізувати $Z = 3x_1 + x_2 + 2x_3$ при обмеженнях:

$$\begin{aligned} 3x_1 \quad &+ 2x_2 \quad + 4x_3 \quad \ge 8; \\ x_1 \quad &\ \ 2x_2 \quad + x_3 \quad \le 9; \\ 2x_1 \quad &+ x_2 \quad \quad \quad \le 6; \\ x_1,\ x_2,\ x_3 &\ge 0. \end{aligned}$$

Завдання для самостійної роботи

У пошуках оптимального технологічного процесу припускалось, що температура x_1 і швидкість подачі матеріалу x_2 - параметри, які визначають ведення процесу. Після узгодження з технологом сформульовано таку задачу ЛП: знайти невід'ємні x_1, x_2 і такі, що $x_1 + x_2 \le 6;\ 4x_1 + 11x_2 \le 44;$ мінімізувати функцію $Z = -2x_1 - 5x_2$.

Знайти розв'язок за допомогою симплекс-методу. У процесі обговорення з технологом вирішено, що потрібно ввести додаткове обмеження $x_1 + 2x_2 \le 8$.

Виконати необхідні розрахунки і показати, який подвійний симплекс-метод дозволяє використовувати останню таблицю розрахунку для отримання нової задачі.

Контрольні запитання

1. Чи правильне твердження, що якщо стандартна пряма задача ЛП - задача мінімізації, подвійна до неї задача - задача максимізації з обмеженням типу $\le$ і змінними, які не мають обмежень за знаком?
2. Чи повинен бути оптимальним неприпустимий початковий розв’язок задачі ЛП при використанні подвійного симплекс-методу?
3. Чим відрізняється подвійний симплекс-метод від звичайного?

3.5 ТРАНСПОРТНА ЗАДАЧА

Транспортна модель використовується для складання найбільш економічного плану перевезень одного виду продукції з кількох пунктів (наприклад, заводів) у пункти доставки (наприклад, склади). Її можна застосувати у задачах, які пов’язані з керуванням запасами, складанням змінних графіків, призначенням службовців на робочі місця, регулюванням витрат води у водосховищах тощо.

Транспортна задача - задача ЛП. Її специфічна структура дає змогу так модифікувати симплекс-метод, що обчислювальні процедури стають більш ефективними.

Задача ЛП транспортного типу у загальному вигляді формулюється так:
мінімізувати

$$Z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} C_{ij}x_{ij} \tag{3.5.1}$$

при обмеженнях

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_i,\ i = 1,\ 2,\dots,\ m; \tag{3.5.2}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \ge b_j,\ j = 1,\ 2,\dots,\ n; \tag{3.5.3}$$

$$x_{ij} \ge 0, \tag{3.5.4}$$

де x_{ij} - кількість продукції, що перевозиться з вихідного пункту i в пункт призначення j ; C_{ij} - вартість перевезення одиниці продукції з пункту i в пункт j ; a_i, b_j - кількість продукції, відповідно вироблюваної у пункті i і споживаної у пункті j.
Транспортна задача є задачею ЛП, але специфічного вигляду. Зокрема коефіцієнти в обмеженнях приймають значення 0 чи 1, а кожна змінна входить тільки у два обмеження.

Якщо сумарний обсяг виробництва дорівнює сумарному попиту $\left(\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j\right)$, то модель називається збалансованою транспортною. Від наведеної моделі вона відрізняється тільки тим, що всі обмеження перетворюються на рівності.
Компактний спосіб подання транспортної моделі пов’язаний з використанням транспортної таблиці, що має вигляд матриці, у якій рядки відповідають вихідним пунктам, а стовпчики - пунктам призначення. Коефіцієнти вартості C_{ij} розміщені у правому нижньому куті кожної комірки *(i, j)*.

C_{11}	C_{12}		C_{1n}	a_1
C_{21}	C_{22}		C_{2n}	a_2
$\vdots$				$\vdots$
C_{m1}	C_{m2}		C_{mn}	a_m
b_1	b_2		b_n	

Метод розв’язування транспортної задачі складається з таких кроків:

Крок 1. Знайти початковий припустимий розв’язок.

Крок 2. Виділити з числа небазисних змінних введену в базис. Якщо всі небазисні змінні задовольняють умову оптимальності (симплекс-методу), закінчити розрахунки, у противному разі перейти до кроку 3.

Крок 3. Вибрати змінну, що виводимо з базису (використовуючи умову припустимості) з числа змінних поточного базису; потім знайти новий базисний розв’язок. Повернутись до кроку 2. В алгоритмі методу повторюються етапи реалізації симплекс-методу, проте спосіб перевірки умов оптимальності та припустимості змінився.

Розглянемо приклад, представлений у таблиці

Таблиця 3.5.1.

		Пункти призначення				Об'єм виробництва
		1	2	3	4	
Вихідні пункти	1	X_{11} 10	X_{12} 0	X_{13} 20	X_{14} 11	15
	2	X_{21} 12	X_{22} 7	X_{23} 9	X_{24} 20	25
	3	X_{31} 0	X_{32} 14	X_{33} 16	X_{34} 18	5
Попит		5	15	15	10	

3.5.1 ВИЗНАЧЕННЯ ПОЧАТКОВОГО РІШЕННЯ

Згідно загальному визначенню транспортної моделі, потрібно щоб $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$. З цього витікає, що одне рівняння виявляється залежним, тобто транспортна модель містить тільки $m+n-1$ незалежних рівнянь. Таким чином, як і в симплекс-методі, початкове базисне припустиме рішення повинно мати $m+n-1$ базисну змінну.

Звичайно, якщо транспортна модель представлена у вигляді симплекс-таблиці, для отримання початкового базисного рішення потрібно використовувати штучні змінні. Проте, якщо побудувати транспортну таблицю, початкове базисне припустиме рішення легко отримати безпосередньо з неї. Для цього опишемо процедуру, засновану на так званому правилі **північно-західного кута**. Дві інші процедури, названі методом **мінімальної вартості** і **приблизним алгоритмом Фотеля** відповідно. Ці розрахункові процедури звичайно дають краще початкове рішення, яке забезпечує менше значення цільової функції.

Згідно правилу *північно-західного кута*, починають з того, що приписують змінній X_{11} (розташованій у північно-західному куті таблиці) максимальне значення, припустиме обмеженням на попит і об'єм виробництва. Після цього викреслюють відповідний стовпчик (чи рядок), фіксуючи цим, що інші змінні викресленого стовпчика (рядка) вважаються рівними нулю. Якщо обмеження, представлені стовпчиком та рядком, виконуються одночасно, то можна викреслити або стовпчик, або рядок (ця умова автоматично гарантує знаходження нульових базисних змінних, якщо такі зустрічаються). Після того як попит і об'єм виробництва у всіх невикреслених рядках та стовпчиках зведені згідно з поставленим значенням змінної, максимально припустиме значення приписується першому невикресленому елементу нового стовпчика (рядка). Процес закінчується, коли залишається не викресленою *в точності* один рядок (чи один стовпчик).

Застосуємо описану процедуру до прикладу в табл. 3.5.1

1. X_{11}=5, стовпець 1 викреслюється. Тобто у першому стовпці неможливо більше проводити ніякі операції. На рядок 1 тепер приходиться 10 одиниць.
2. X_{12}=10, рядок 1 викреслюється, а на стовпець 2 зостається 5 одиниць.
3. X_{22}=5, стовпець 2 викреслюється, а в рядку 2 зостається 20 одиниць.
4. X_{23}=15, стовпець 3 викреслюється, а в рядку 2 зостається 5 одиниць.
5. X_{24}=5, рядок 2 викреслюється, в стовпці 4 зостається 5 одиниць.
6. X_{34}=5, викреслюється рядок 3 або стовпець 4. Оскільки зостається тільки один стовпець чи тільки один рядок, процес закінчується.

Таблиця 3.5.2.

	1	2	3	4	
1	5 / 10	10 / 0	20	11	15
2	12	5 / 7	15 / 9	5 / 20	25
3	0	14	16	5 / 18	5
	5	15	15	10	

Отримане базисне рішення подане в таблиці 3.5.2. Базисні змінні отримують значення: X_{11}=5, X_{12}=10, X_{22}=5, X_{23}=15, X_{24}=5, X_{34}=5. Інші змінні – небазисні зі значеннями, які дорівнюють нулю. Відповідні транспортні витрати дорівнюють $5\times 10+10\times 0+5\times 7+15\times 9+5\times 20+5\times 18=410$ у.о.

Якщо одночасно і стовпець, і рядок задовольняє обмеження, чергова змінна, яка входить в базисне рішення, обов'язково має нульове значення.

Таблиця 3.5.3 показує цю ситуацію. Стовпець 2 та рядок 2 одночасно призводять до виконання відповідних обмежень. Якщо викреслюється стовпець 2, то на наступному кроці змінна X_{23} стає базисною з нульовим значенням, оскільки величина речення в рядку 2 дорівнює нулю (табл. 3). Якщо ж викреслюється рядок 2, то X_{32} нульовою базисною змінною.

Таблиця 3.5.3.

	1	2	3	4		
1	$\boxed{5}$ 10	$\boxed{5}$ 0	20	11	~~10~~	~~5~~
2	12	$\boxed{5}$ 7	$\boxed{0}$ 9	20	~~5~~	0
3	0	14	$\boxed{8}$ 16	$\boxed{7}$ 18	15	
	~~5~~	~~10~~ 5	8	7		

Початкові рішення в табл. 2 та 3 містять необхідну кількість базисних змінних, яке дорівнює $m+n-1=6$. Використання правила північно-західного кута завжди приводить до потрібного числа базисних змінних.

Серед методів визначення початкового розв'язку метод **найменшої вартості** дає добрий початковий розв'язок.

Суть методу найменшої вартості полягає в наступному: вибирається змінна, якій відповідає найменша вартість у всій таблиці, їй надається якнайбільше значення. (Якщо таких змінних кілька, то береться будь-яка з них.) Викреслюється відповідний стовпчик чи рядок. Після розрахунку нових значень попиту і обсягу виробництва для всіх невикреслених рядків та стовпчиків процес повторюється при можливо більшому значенні тієї змінної, якій відповідає мінімальна вартість серед невикреслених. Процедура завершується, коли залишається один рядок чи один стовпчик.

Для розглянутого приклада метод найменшої вартості дає таке початкове рішення

5 10	5 0	20	11	~~15~~	10
12	5 7	15 9	5 20	~~25~~	5
0	14	16	5 18	5	
5	15	15	10		

3.5.2 ЗНАХОДЖЕННЯ ЗМІННОЇ ДЛЯ ВКЛЮЧЕННЯ У БАЗИС.

Метод потенціалів.

Цей метод розроблений Ф.Л. Хітчкоком, який використав симплекс-множники.

Припустимо, що для розглянутої задачі вже побудовано припустиме базисне рішення, в якому деякі змінні X_{ij} відмінні від нуля, а інші змінні – небазисні, дорівнюють нулю.

Нехай $-U_i$ і $-V_j$ – симплекс-множники для обмежень, що відповідають i-й строці і j-му стовпцю у цьому базисі, то після множення i-ої строки на $-U_i$, j-го стовпця на $-V_j$ і додавання вартості С отримаємо

$$x_{11} + x_{12} + \ldots + x_{1n} \qquad\qquad\qquad\qquad = a_1(-U_1)$$

$$x_{21} + x_{22} + \ldots + x_{2n} \qquad\qquad = a_2(-U_2)$$

$$\bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet$$

$$x_{m1} + \ldots + x_{mn} = a_m(-U_m)$$

$$x_{11} + x_{21} + \ldots + x_{m1} \qquad\qquad\qquad\qquad = b_1(-V_1)$$

$$x_{12} + x_{22} + \ldots + x_{m2} \qquad\qquad = b_2(-V_2)$$

$$\bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet$$

$$x_{1n} + x_{2n} + \ldots + x_{mn} = b_n(-V_n)$$

$$C_{11}x_{11} + C_{12}x_{12} + \ldots + C_{mn}x_{mn} = C$$

Відповідно

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left(C_{ij} - U_i - V_j\right)x_{ij} = C - \sum_{i=1}^{m} U_i a_i - \sum_{j=1}^{n} V_j b_j \tag{3.5.1}$$

Рівняння (3.5.1) – спеціальний вид рівняння () для транспортної задачі. Якщо рівняння () є канонічною формою цільової функції, що відповідає базису, то коефіцієнти при базисних змінних дорівнюють нулю. Таким чином для зайнятих клітинок масиву справедливе співвідношення

$$C_{ij} - U_i - V_j = 0 \tag{3.5.2}$$

Відповідно можна визначити U_i і V_j. Маємо m невідомих U_i і n невідомих V_j, оскільки базисними змінними зайнято $m+n-1$ клітинок, з рівняння (3.5.2) отримаємо $m+n-1$ рівнянь $m+n$ невідомих. Ці рівняння можна розв'язати, прирівнявши одне з невідомих до нуля і розв'язати систему відносно інших невідомих.

У розглянутому прикладі на першому кроці маємо наступне базисне припустиме рішення

5-W 10	10+W 0	 20	 11	15	(-7)
 12	5-W 7	15 9	5+W 20	25	(0)
W -15 0	 14	 16	5-W 18	5	(-2)
5 (17)	15 (7)	15 (9)	10 (20)		

Маємо 7 невідомих U_1, U_2, U_3 і V_1, V_2, V_3, V_4 і 6 зайнятих клітинок. Якщо нехай U_2=0, то в трьох зайнятих клітинках строки отримаємо V_2=7, V_3=9, V_4=20. Оскільки V_2=7, то U_1= -7, а V_4=20, то U_3= -2, а V_1=17.

Перевіримо, чи оптимальне це рішення?

Якщо C'_{ij} – коефіцієнт при x_{ij} в канонічній формі для цільової функції, то

$$C'_{ij} = C_{ij} - U_i - V_j$$

Для базисних змінних $C'_{ij} = 0$. Для небазисних змінних від'ємне значення C'_{ij} указує на те, що змінна x_{ij} повинна бути включеною у базисні змінні, що приведе до зменшення цільової функції. В клітинках, в яких значення C'_{ij} від'ємне указується у лівих нижніх кутах масиву.

Ясно, що збільшення x_{31} приведе до зменшення цільової функції. При збільшенні значення x_{31} на число W, необхідно зменшити x_{11} на число W, щоб зберегти суму у стовпчику (1). Для того, щоб зберегти суму у рядку (1) необхідно збільшити x_{12} на W і т.д. Програма повинна уникати розв'язків "глухого кута".

Оскільки $x_{11} = 5 - W \geq 0$, то максимальне значення W дорівнює 5. У цьому випадку змінна x_{11} стає не базисною. Щоб кількість базисних змінних дорівнювала 6, змінні x_{22} і x_{34}, які стали нульовими, враховуються як базисні.

 10	15-W 0	 20	W -2 11	15	(-7)
 12	0+W 7	15 9	10-W 20	25	(0)
5 0	 14	 16	0 18	5	(-2)
5 (2)	15 (7)	15 (9)	10 (20)		

Для цього масиву

$$C = 15\times 0 + 0\times 7 + 15\times 9 + 10\times 20 + 5\times 0 + 0\times 18 = 335 = 410 + C'_{31}W = 410 - 15\times 5$$

Визначимо U_i і V_j для цього рішення. Від'ємні значення для небазисних змінних указані у лівих нижніх кутах клітинок масиву. Очевидно, що у базис слід включити змінну x_{14}. В результаті найбільше можливе значення для W дорівнює 10 і у наступному масиві змінна x_{24} стане небазисною.

10	5 / 0	20	10 / 11	(-7)
12	10 / 7	15 / 9	20	(0)
5 / 0	14	16	0 / 18	(1)
(-1)	(7)	(9)	(17)	

Значення вартості C зменшується.

$$C = 5\times 0 + 10\times 11 + 10\times 7\times 15\times 9 + 5\times 0 + 0\times 18 = 315 = 335 - 2\times 10 = 335 + C'_{14}W$$

Для цього масиву обчислюється U_i і V_j. Для незайнятих клітинок всі C_{ij} додатні. Таким чином отримане оптимальне рішення, в якому

x_{12}=5; x_{14}=10; x_{22}=10; x_{23}=15; x_{31}=5; x_{34}=0; C_{min}=315 грн.

Схема алгоритму розв'язання транспортної задачі показана на рис.3.5.1.

Окремим випадком транспортної задачі є задача про призначення (наприклад, розподілити m робіт чи виконавців за n обладнанням), яка формулюється так:

мінімізувати

$$Z = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} C_{ij}x_{ij}\,, \tag{3.5.3}$$

при обмеженнях

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1,\ i = 1,\ 2,\dots,\ n; \tag{3.5.4}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1,\ j = 1,\ 2,\dots,\ n; \tag{3.5.5}$$

x_{ij}=0 або x_{ij}=1.

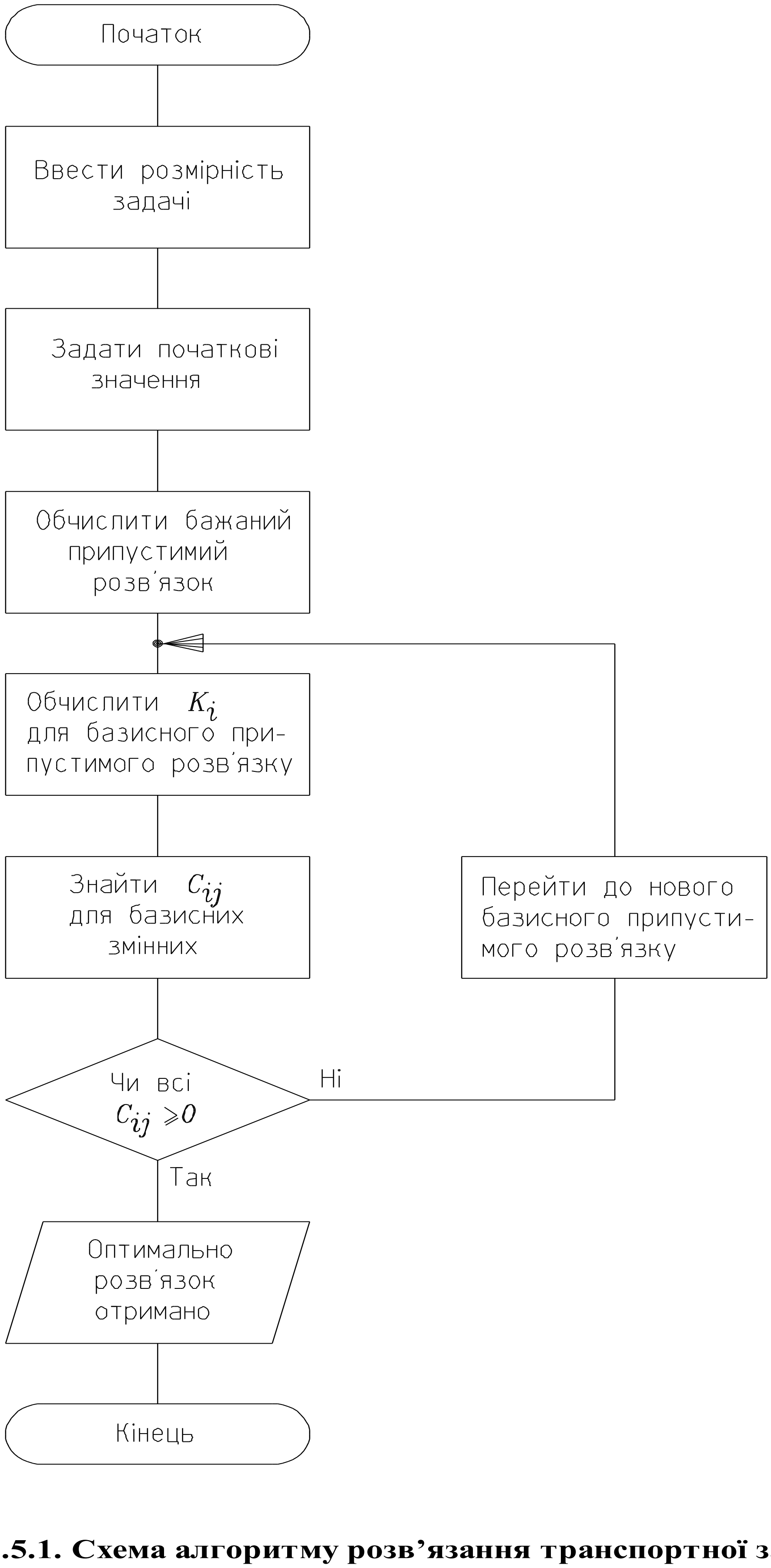


Рис.3.5.1. Схема алгоритму розв'язання транспортної задачі

3.5.3 ДИСБАЛАНС І ВИРОДЖЕНІСТЬ У ТРАНСПОРТНІЙ ЗАДАЧІ.

Виконання умови $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$ важливе в транспортній задачі. Для масиву розмірністю $m \times n$ означає, що в базисне припустиме рішення входить $m \times n - 1$ базисна змінна. Припустимо, що баланс між попитом та пропозицією порушений.

Приклад 3.5.1.

Нехай 15, 25, 20 деталей виробляються на заводах W_1, W_2, W_3, повинні бути передані споживачам S_1, S_2, S_3, S_4, щотижневі запити яких складають 20, 12, 5 і 9 виробів. Вартість транспортування одного виробу від заводів до споживачів приведені в таблиці.

Завод	**Споживач**			
	S_1	S_2	S_3	S_4
W_1	2	2	2	4
W_2	3	1	1	3
W_3	3	6	3	4

Як варто організувати перевезення для мінімізації вартості?

Заводи роблять 60 деталей. Споживачам потрібно лише 46 деталей. Для того, щоб перейти до транспортної задачі введемо фіктивного споживача, якому потрібно 14 деталей. Вартість перевезень із заводу до цього споживача приймаємо рівну 0. Якщо в остаточному рішенні буде отримано, що деякі деталі треба відправити цьому споживачу, то це буде зігноровано. Деталі залишаться на заводах.

У таблиці приводиться перше базисне рішення для цього масиву.

15 2	2	2	4	0	15 (-1)
5-W x_{21} 3	12 1	5 1	3+W 3	0	25 (0)
W x_{31} -1 3	6	3	6-W 4	14 0	20 (1)
20 (3)	12 (1)	5 (1)	9 (3)	14 (-1)	C=95

Змінна x_{31} входить у базис; максимальне значення W дорівнює 5. Змінна x_{21} виключається з базису:

15 2	2	2	4	0	15 (0)
3	12 1	5 1	8 3	0	25 (0)
5 3	6	3	1 4	14 0	20 (1)
20 (2)	12 (1)	5 (1)	9 (3)	14 (-1)	C=90

14 деталей із клітинки (3.5) залишаються на заводі 3. Потреби споживачів цілком виконані. Одержали оптимальне рішення:

x_{11}=15; x_{22}=12; x_{23}=5; x_{24}=8; x_{31}=5; x_{34}=1; C=90.

Ясно, як справитися з дисбалансом, якщо попит перевищує пропозицію: треба увести фіктивного виробника з нульовою вартістю перевезень. Продукція цього виробника насправді поставлятися не буде. Попит на неї не буде вдоволений.

Виродженість у транспортній задачі виникає, якщо одна чи більш базисних змінних обертаються в нуль. На кожнім кроці варто розрізняти базисні змінні, котрі дорівнюють нулю і знаходяться у відповідних клітинках і небазисні змінні.

При побудові першого базисного припустимого рішення можуть виникнути труднощі, якщо суми і по рядках і по стовпцях рівні між собою і обернулися в нуль. У цьому випадку з подальших розглядів варто виключити тільки одну з них. Інша сума буде ліквідована при присвоюванні базисній змінній значення 0. Оскільки на кожнім кроці, крім останнього, видаляється тільки один рядок чи тільки один стовпець, то в результаті виходить *m+n-1* базисних змінних і стільки заповнених клітинок, скільки потрібно (навіть якщо деякі базисні змінні обернулися в нуль).

Труднощі можуть виникнути і при поліпшенні базисного припустимого рішення. Застосування правил може перетворити в нуль більш однієї базисної змінної. У цьому випадку важливо пам'ятати, що тільки одна з них повинна стати небазисною; інші варто зберігати базисними, але з нульовими значеннями. Їх складають клітинки з метою визначення U_i і V_j.

3.6 ДВОЇСТІСТЬ У ЛІНІЙНОМУ ПРОГРАМУВАННІ

3.6.1 ПРЯМА І ДВОЇСТА ЗАДАЧА

Багато з отриманих результатів легше пояснити, ввівши поняття двоїстості. Ми побачимо, що кожній задачі лінійного програмування відповідає інша (двоїста) задача. Якщо зрозуміти взаємозв'язок між цими задачами, то можна одержати вирішення обох, коли відомо вирішення будь-якої їх них. Введемо нові поняття.

Пряма задача:

знайти такі $x_j \geq 0 \left(j = 1,2,..., n \right)$, що

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i \left(i = 1,2,..., m \right) \qquad (3.6.1)$$

і функція $\sum_{i=1}^{n} c_j x_j = z$ має мінімальне значення.

Їй відповідає двоїста задача:

знайти такі $y_j \geq 0 \left(j = 1,2,..., m \right)$, що

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_j \leq c_j \left(i = 1,2,..., n \right) \qquad (3.6.2)$$

і функція $\sum_{i=1}^{m} b_i y_i = w$ має максимальне значення.

Вихідна задача:

знайти такі $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$, що

$$x_1 + 3x_2 \geq 8$$
$$3x_1 + 4x_2 \geq 19$$
$$3x_1 + x_2 \geq 7$$

і функція $50x_1 + 25x_2 = z$ має мінімальне значення.

Відповідна двоїста задача:

знайти такі $y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0$, що

$$y_1 + 3y_2 + 3y_3 \leq 50$$
$$3y_1 + 4y_2 + y_3 \leq 25$$

і функція $8y_1 + 19y_2 + 7y_3 = w$ має максимальне значення.

Пряма задача має обмеження у вигляді нерівності зі знаком ≥, а двоїста – із знаком ≤. Кількість змінних у прямої задачі збігається з кількістю обмежень у двоїстій задачі. Матриця коефіцієнтів обмежень двоїстої задачі є транспонованою матрицею коефіцієнтів прямої задачі. Коефіцієнти цільової функції двоїстої задачі є значеннями правих частин обмежень прямої задачі, і навпаки. У матричному записі пряма задача має такий вид:

знайти такий $X \geq 0$, що

$AX \geq b$

і функція $$c^T X = z \qquad (3.6.3)$$

має мінімальне значення.

Двоїста задача в матричному виді записується в такий спосіб:

знайти такий $Y \geq 0$, що

$$A^T Y \leq c \qquad (3.6.4)$$

і функція $b^T Y = w$
має максимальне значення.
Хоча пряма задача була поставлена при невід'ємних змінних для мінімізації цільової функції, що задовольняють обмеженням із знаком ≥ (а не в стандартній формі задач лінійного програмування), втрати спільності при цьому не відбувається. Будь-яку задачу лінійного програмування можна призвести до такого вигляду.

Приклад 3.6.1

Привести до необхідної форми пряму задачу
знайти такі $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$, що

$$3x_1 + 4x_2 + x_3 \geq 7$$
$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 6$$
$$x_3 \leq 4$$

і функція $x_1 - 4x_2 - 3x_3 = z'$ має максимальне значення.
Сформулювати двоїсту задачу.
Максимізація функції z' рівносильна мінімізації, наприклад, функції -z' = z
Обмеження $x_3 \leq 4$ множенням на -1 перетвориться в обмеження $-x_3 \geq -4$.
Обмеження

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 6$$

рівноцінно двом обмеженням

$$x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 6$$
$$x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 6$$

тобто

$$x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 6$$
$$-x_1 - 2x_2 - x_3 \geq -6$$

У такий спосіб задача може бути переписана таким чином:
знайти такі $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$, що

$$3x_1 + 4x_2 + x_3 \geq 7$$
$$x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 6$$
$$-x_1 - 2x_2 - x_3 \geq -6$$
$$-x_3 \geq -4$$

і ця функція $-x_1 + 4x_2 + 3x_3 = z$ має мінімальне значення. Це необхідна форма прямої задачі.
Двоїста задача має такий вид:
знайти такі $y_1 \geq 0, y_2' \geq 0, y_2'' \geq 0, y_3 \geq 0$
(зміст цих позначень незабаром стане ясний), що

$$3y_1 + y_2' - y_2'' + 0y_3 \leq -1$$
$$4y_1 + 2y_2' - 2y_2'' + 0y_3 \leq 4$$
$$y_1 + y_2' - y_2'' - y_3 \leq 3$$

і функція $7y_1 + 6y_2' - 6y_2'' - 4y_3 = w$ має максимальне значення.

Це стандартна двоїста задача. Очевидно, що $y_2 = y_2' - y_2''$ може рахуватися єдиною змінною через вигляд коефіцієнтів, і задача може бути переписана так:
знайти такі $y_1 \geq 0, y_2$ (знак невизначений), $y_3 \geq 0$, що

$$3y_1 + y_2 \leq -1$$
$$4y_1 + 2y_2 \leq 4$$
$$y_1 + y_2 - y_3 \leq 3$$

і функція $7y_1 + 6y_2 - 4y_3 = w$ має максимальне значення.

Приклад 3.6.2

Знайти двоїсту задачу для задачі

знайти такі $x_1 \geq 0$ і x_2 невизначений знак, що

$$5x_1 + 3x_2 \geq 10$$
$$x_1 - x_2 \leq 4$$

і функція $6x_1 + 10x_2 = z$ має мінімальне значення.

Якщо виразити x_2 через $x_2' - x_2''$, де x_2' і $x_2'' \geq 0$ задача прийме необхідну форму для прямої задачі:

знайти такі $x_1 \geq 0, x_2' \geq 0, x_2'' \geq 0$, що

$$5x_1 + 3x_2' - 3x_2'' \geq 10$$
$$-x_1 + x_2' - x_2'' \geq -4$$

і функція $6x_1 + 10x_2' - 10x_2'' = z$ має мінімальне значення.

Відповідна двоїста задача має вид:

знайти такі $y_1 \geq 0, y_2 \geq 0$, що

$$5y_1 - y_2 \leq 6$$
$$3y_1 + y_2 \geq 10$$
$$-3y_1 - y_2 \leq -10$$

і функція $10y_1 - 4y_2$ має максимальне значення.

Двоїста задача приведена в стандартній формі. Проте два останніх обмеження

$$3y_1 + y_2 \leq 6$$
$$3y_1 + y_2 \geq 10$$

рівносильні, так що двоїста задача може бути подана в такому виді:

знайти такі $y_1 \geq 0, y_2 \geq 0$, що

$$5y_1 - y_2 \leq 6$$
$$3y_1 + y_2 = 10$$

і функція $10y_1 - 4y_2 = w$ має максимальне значення.

Таким чином, із прикладів даного розділу очевидно, що кожному обмеженню прямої задачі відповідає змінна двоїста задача, а кожної змінної прямої задачі відповідає обмеження двоїстої задачі. Якщо обмеження в прямої задачі задано у вигляді рівності, то відповідна змінна двоїстої задачі не обмежена знаком (приклад 3.6.1); Якщо змінна прямої задачі не обмежена знаком, що відповідне двоїсте обмеження є рівністю (приклад 3.6.2). У розглянутому підході всі обмеження представляються у вигляді нерівностей, але можливий і інший варіант представлення.

Інформація з цих питань стосовно до задачі в стандартній формі представлені в таблиці 3.6.1.

Таблиця 3.6.1.

Пряма задача в стандартній формі*. Цільова функція.	Двоїста задача		
	Цільова функція	Обмеження	Змінні
Максимізація	Мінімізація	$\geq$	Не обмежені в знаку
Мінімізація	Максимізація	$\leq$	Не обмежені в знаку

*) Всі обмеження прямої задачі – рівності з невід'ємними правими частинами, а всі змінні невід'ємні.

Приклад 3.6.3.

Пряма задача:

Максимізувати $z = 5x_1 + 12x_2 + 4x_3$ при обмеженнях

$$x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 10,$$
$$2x_1 - x_2 + 3x_3 = 8,$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Пряма задача в стандартній формі:

Максимізувати $z = 5x_1 + 12x_2 + 4x_3 + 0x_4$ при обмеженнях

$$x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 10,$$
$$2x_1 - x_2 + 3x_3 + 0x_4 = 8,$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0$$

Двоїста задача:

Мінімізувати $w = 10y_1 + 8y_2$ при обмеженнях

$$x_1 : y_1 + 2y_2 \ge 5$$
$$x_2 : 2y_1 - y_2 \ge 12$$
$$x_3 : y_1 + 3y_2 \ge 4$$
$$x_4 : y_1 + 0y_2 \ge 0,$$

(означає, что $y_1 \ge 0$), y_2 не обмежений у знаку.

Приклад 4.4. Пряма задача:

Мінімізувати $z = 5x_1 - 2x_2$ при обмеженнях

$$-x_1 + x_2 \ge -3$$
$$2x_1 + 3x_2 \le 5,$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

Пряма задача в стандартній формі:

Мінімізувати $z = 5x_1 - 2x_2$ при обмеженнях

$$x_1 - x_2 + x_3 = 3$$
$$2x_1 + 3x_2 + x_4 = 5$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0$$

Двоїста задача:

Максимізувати $w = 3y_1 + 5y_2$ при обмеженнях

$$y_1 + 2y_2 \le 5$$
$$-y_1 + 3y_2 \le -2$$
$$y_1 \le 0, y_2 \le 0.$$

y_1, y_2 не обмежені в знаку.

Приклад 4.5. Пряма задача:

Максимізувати $z = 5x_1 + 6x_2$ при обмеженнях

$$x_1 + 2x_2 = 5$$
$$-x_1 + 5x_2 \ge 3$$
$$4x_1 + 7x_2 \le 8$$

x_1 не обмежений у знаку, $x_2 \ge 0$.

Пряма задача в стандартній формі.

Нехай $x_1 = x_1' - x_1''$, де $x_1', x_1'' \ge 0$. Стандартне формулювання прямої задачі при використанні такої підстановки має вид:

Максимізувати $z = 5x_1' - 5x_1'' + 6x_2$ при обмеженнях

$$x_1' - x_1'' + 2x_2 = 5$$
$$-x_1' + x_1'' + 5x_2 - x_3 = 3$$
$$4x_1' - 4x_1'' + 7x_2 + x_4 = 8$$
$$x_1', x_1'', x_2, x_3, x_4 \ge 0.$$

Двоїста задача:

Мінімізувати $w = 5y_1 + 3y_2 + 8y_3$ при обмеженнях

$$y_1 - y_2 + 4y_3 \ge 5$$
$$-y_1 + y_2 - 4y_3 \ge -5$$
$$2y_1 + 5y_2 + 7y_3 \ge 6$$
$$-y_2 \ge 0$$
$$y_2 \ge 0$$

y_1, y_2, y_3 не обмежені в знаку.

3.6.2 ТЕОРЕМИ ДВОЇСТОСТІ

Теорема 1.
Двоїста задача до двоїстої є пряма задача.
За допомогою рівнянь (3.6.4) двоїста задача може бути записана (виходячи з прямої в стандартній формі) у такий спосіб:
знайти такий $y \ge 0$, що

$$-A^T y \ge -c$$

і функція $-b^T y \ge w'$ має мінімальне значення. Її двоїста задача має вигляд:
знайти такий $x \ge 0$, що

$$-Ax \le -b$$

і функція $-c^T x = z'$ має максимальне значення.
Але вона рівносильна задачі
знайти такий $x \ge 0$, що

$$Ax \ge b$$

і функція $c^T x = z$ має мінімальне значення, а це і є пряма задача.
Теорема 2.
Значення функції z що відповідає будь-якому припустимому розв'язанню прямої задачі, не менше значення функції w, що відповідає припустимому розв'язанню двоїстої задачі.
Нехай X і Y – припустимі розв'язки власне прямого і двоїстого обмеження. Нехай відповідні значення цільової функції

$$Z = c^T X \text{ і } W = b^T Y$$

З рівняння (3.6.3) $AX \ge b$.
Оскільки $Y \ge 0$, то

$$Y^T AX \ge Y^T b = b^T Y = W$$

Далі з рівняння (4.4) $A^T Y \le c$, оскільки $X \ge 0$, то

$$X^T A^T Y \le X^T c = c^T X = Z.$$

Проте $X^T A^T Y$ – скалярна величина, тому дорівнює своїй транспозиції $Y^T AX$, отже,

$$Z = c^T X \ge Y^T AX \ge b^T Y = W$$

тобто

$$Z \ge W \tag{3.6.5}$$

З цього результату випливає, що якщо є припустиме значення функції z, рівне припустимому значенню функції w, то це повинне бути мінімальне значення функції z і максимальне значення функції w. Нізвідки не випливає, що такі значення існують.
Теорема 3.
Якщо пряма задача має кінцеве вирішення $z = z_{\min}$, то двоїста задача має кінцеве вирішення $w = w_{\max} = z_{\min}$. При цьому симплекс-множники оптимального розв’язку прямої задачі є значеннями змінних в оптимальному розв’язку двоїстої задачі, узятими з протилежним знаком.
Якщо в обмеження прямої задачі вводяться нові змінні, пряма задача приймає вигляд:
знайти такі $x_j \ge 0, \left(j = 1,2,..., n, n+1,..., n+m\right)$, що

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n - x_{n+1} = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n - x_{n+2} = b_2$$
$$.........\ ....\ ....\ ....\ ....\ ....$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n - x_{n+m} = b_m$$

і функція $c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n = z$ має мінімальне значення.

Якщо $\pi_1, \pi_2, ..., \pi_m$ – симплекс-множники оптимального розв'язку, то після множення обмежень на $\pi_1, \pi_2, ..., \pi_m$ і додавання до виразу для функції z отримаємо рівняння

$$x_1\left(c_1 + \sum_{i=1}^{m} a_{i1}\pi_i\right) + x_2\left(c_2 + \sum_{i=1}^{m} a_{i2}\pi_i\right) + ... + x_n\left(cn + \sum_{i=1}^{m} a_{in}\pi_i\right) - \\ - x_{n+1}\pi_1 - x_{n+2}\pi_2 - ... - x_{n+m}\pi_m = z + \sum_{i=1}^{m} \pi_i b_i \tag{3.6.6}$$

Далі якщо рівняння (3.6.6) – оптимальна канонічна форма для функції z, те всі коефіцієнти лівої частини невід'ємні. Отже,

$$-\pi_i \geq 0 \ \ (i = 1,2,..., m),$$
$$c_j + \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\pi_i \geq 0 \ \ (j = 1,2,..., n),$$

Ці обмеження рівносильні обмеженням

$$-\pi_i \geq 0 \ \ (i = 1,2,..., m),$$
$$\sum a_{ij}(-\pi_i) \leq 0 \ \ (j = 1,2,..., n),$$

так що значення – $-\pi$, – задовольняють властивим обмеженням.

Зрозуміло, у рівнянні (4.6) коефіцієнти при базисних змінних обернуться в 0; самі базисні змінні також рівні 0, так що ліва частина дорівнює 0 і

$$z_{\min} = -\sum_{i=1}^{m} b_i\pi_i = \sum_{i=1}^{m} b_i(-\pi_i)$$

Таким чином, $z_{\min} = \sum_{i=1}^{m} b_i(-\pi_i)$. Але це – значення функції w, що відповідає припустимому вирішенню обмежень двоїстої задачі, що задається рівностями $y_i - \pi_i$.

Таким чином, у силу зауважень після рівняння (3.6.5) ця .величина є максимальним значенням функції w. Отже

$$w_{\max} = z_{\min}$$

Теорема 4.

Якщо двоїста задача має кінцеве рішення $w = w_{\max}$, то пряма задача має кінцеве рішення $z_{\min} = w_{\max}$. Значення симплекс-множників оптимального рішення двоїстої задачі є значеннями змінних в оптимальному рішенні прямої задачі.

Це може бути виведене з теорем 1 і 2; але корисно також одержати прямий доказ у матричних позначеннях, аналогічне доказу теореми 3.

Двоїста задача з обмеженнями у вигляді рівності може бути записана як

максимізувати функцію $b^T y = w$

при обмеженнях $A^T y + y_S = c$,

де

$$y_s = \begin{pmatrix} y_{m+1} \\ y_{m+n} \end{pmatrix} \geq 0$$

– вектор нових змінних.

Якщо $\rho^T = (\rho_1, \rho_2, ..., \rho_n)$ – симплекс-множники оптимального рішення двоїстої задачі, то

$$\text{отже,} \begin{array}{l} \rho^T A^T y + \rho^T y_s = \rho^T c = c^T \rho \\ (b^T + \rho^T A^T)y + \rho^T y_s = w + c^T \rho \end{array}$$

Далі, оскільки функція w максимізується (а не мінімізується, як звичайно), коефіцієнти при y і y_s, у лівій частині рівняння не повинні бути додатними, отже,

$$\left.\begin{aligned} \rho^T &\le (0,0,\ldots,0), \\ b^T + \rho^T A^T &\le (0,0,\ldots,0), \end{aligned}\right\}$$

тобто

$$-\rho \ge 0,$$
$$b + A\rho \le 0,$$

що можна записати у вигляді

$$-\rho \ge 0,$$
$$A(-\rho) \ge b,$$

Так що значення $-\rho$ задовольняють обмеженням прямої задачі. Те ж міркування показує, що

$$w_{\max} = c^T(-\rho) = z_{\min}$$

Наслідком теорем 3 і 4 є те, що при зустрічі з задачею лінійного програмування ми вільні вибирати, чи вирішувати задачу в тому виді, як вона поставлена, або вирішувати двоїсту задачу Якщо застосовується модифікований симплекс-метод (що настійно рекомендується), то будуть отримані і значення змінних, і симплекс-множники. Це дозволить визначити також симплекс-множники і значення змінних іншої задачі. У такий спосіб можна сильно заощадити час обчислень. Обсяг обчислень у задачі лінійного програмування пов'язаний скоріше з кількістю обмежень, чим із кількістю змінних.

Виходить, якщо в пряму задачу входять 7 обмежень на 3 змінні, перетворення будуть провадитися в матриці розмірністю 9×8 на етапі 1 і в матриці розмірністю 8×8 на етапі II. У двоїсту задачу входять 3 обмеження на 7 змінних, і вона незалежна від етапу 1; перетворення будуть провадитися в матриці розмірністю 4×4. Таким чином, із кожної ітерації обсяг обчислень скорочується щонайменше в чотири рази.

У якості ілюстрацій до теорем 3 і 4 розглянемо задачу

знайти такі $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$, що

$$2x_1 + 3x_2 \ge 10$$
$$3x_1 + 4x_2 \ge 19$$
$$x_1 + 2x_2 \ge 9$$

і функція $7x_1 + 10x_2 = z$ має мінімальне значення.

Її двоїста задача має вигляд

знайти такі $y_1 \ge 0, y_2 \ge 0, y_3 \ge 0$, що

$$2y_1 + 3y_2 + y_3 \le 7$$
$$3y_1 + 4y_2 + 2y_3 \le 10$$

і функція $10y_1 + 19y_2 + 9y_3 = w$ має максимальне значення.

Рішення першої задачі на ЕОМ показує, що в оптимальному рішенні $x_1 = 1, x_2 = 4, \pi_1 = 0, \pi_2 = -2, \pi_3 = -1$ та $z_{\min} = 47$. Таким чином, для іншої задачі рішенням є $y_1 = 0, y_2 = 2, y_3 = 1$, де $\rho_1 = -1, \rho_2 = -4$ та $w_{\max} = 47$. Це підтверджується розв'язком двоїстої задачі на ЕОМ. Тут потрібно деяка увага. При вирішенні на ЕОМ, використовуючи лінійне програмування, ми мінімізували функцію

$$w' = -10y_1 - 19y_2 - 9y_3$$

(знаки цільової функції і симплекс-множників тут звернені).

3.6.3 АНАЛІЗ ОТРИМАНИХ РЕЗУЛЬТАТІВ З ПОГЛЯДУ ПОДВІЙНОСТІ

Поняття двоїстості допомагає краще усвідомити деякі отримані вище результати лінійного програмування.

Алгоритм подвійного симплекса-методу був виведений без звертання до двоїстості. Однак подвійність дозволяє глянути на процедуру по-іншому.

Розглянемо задачу

знайти такі $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0$, що

$$x_1 + 3x_3 \ge 3,$$
$$x_2 + 2x_3 \ge 5$$

і функція $4x_1 + 6x_2 + 18x_3 = z$ має мінімальне значення.

Оскільки коефіцієнти у виразі для функції z додатні, можна уникнути введення штучних змінних і вирішити задачу з використанням подвійного симплекса-методу. Приведемо таблицю послідовних обчислень:

Ітерація	Базис	Значення	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_4	-3	-1	0	-3	1	0
	x_5	-5	0	-1*	-2	0	1
	-z	0	4	6	18	0	0
1	x_4	-3	-1	0	-3*	1	0
	x_2	5	0	1	2	0	-1
	-z	-30	4	0	6	0	6
2	x_3	1	1/3	0	1	-1/3	0
	x_2	3	-2/3	1	0	2/3	-1
	-z	-36	2	0	0	2	6

Таким чином, в оптимальному рішенні $x_1 = 0, x_2 = 3, x_3 = 1$ і $z_{\min} = 36$.

Симплекс-множники (коефіцієнти при нових перемінних x_4 і x_5 в остаточному виді для функції z) дорівнюють π_1=2 і π_2=6.

Розглянемо двоїсту задачу

знайти такі $y_1 \ge 0, y_2 \ge 0$, що

$$y_1 \le 4,$$
$$y_2 \le 6,$$
$$3y_1 + 2y_2 \le 18$$

і функція $3y_1 + 5y_2 = w$ має максимальне значення.

При звичайному підході до задачі ми мінімізуємо функцію

$$w' = -3y_1 - 5y_2 \ .$$

Приведемо таблицю послідовних обчислень:

Ітерація	Базис	Значення	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
0	y_3	4	1	0	1	0	0
	y_4	6	0	1*	0	1	0
	y_5	18	3	2	0	0	1
	-w’	0	-3	-5	0	0	0
1	y_3	4	1	0	1	0	0
	y_2	6	0	1	0	1	0
	y_5	6	3*	0	0	-2	1
	-w’	30	-3	0	0	5	0
2	y_3	2	0	0	1	2/3	-1/3
	y_2	6	0	1	0	1	0
	y_1	2	1	0	0	-2/3	1/3
	-w’	36	0	0	0	3	1

Симплекс-множники (для цільової функції w’) суть $\rho_1 = 0, \rho_2 = 3, \rho_3 = 1$ (коефіцієнти при нових змінних y_3, y_4 і y_5). Вони дають значення змінних прямої задачі. Двоїсті змінні y_1=2 і y_2=6 є симплекс-множниками прямої задачі. У проведених обчисленнях подвійний симплекс-метод для рішення прямої задачі і симплекс-метод для рішення зворотної задачі, власне кажучи, ідентичні.

4. Цілочислове програмування
4.1. Методи цілочислового програмування

Цілочислове програмування є розділом лінійного програмування, що вивчає задачі, в яких на значення всіх або частини змінних величин накладено вимогу цілочисловості. До нього можна віднести такі відомі задачі як: задачі розподілу ресурсів; задачі сіткового планування й керування; задачі календарного планування та ін.
За структурою математичної моделі задачі дискретного програмування розділяють на наступні класи: задачі з неподільностями (невідомі приймають тільки цілі значення); екстремальні комбінаторні задачі (цільова функція задана на кінцевій множині, елементами якого служать перестановки з n об'єктів); задачі на незв'язаних і неопуклих областях; задачі з розривними цільовими функціями. Методи рішення задачцілочислового програмування за принципом підходу до проблеми розділяють на наступні класи: методи відтинання, метод гілок і границь; методи динамічного програмування й послідовної оптимізації.
Зазвичай алгоритми цілочислового програмування містять три кроки.
Крок 1. „Послаблення” простору допустимих розв’язків задачі цілочис-лового лінійного програмування шляхом заміни будь-якої бінарної змінної неперервним обмеженням і відкиданням вимоги цілочислових значень для всіх інших змінних. Внаслідок отримується звичайна задача лінійного програмування.
Крок 2. Розв’язування задачі лінійного програмування і знаходження її оптимального розв’язку.
Крок 3. Маючи неперервний оптимальний розв’язок, додають спеціальні обмеження, які ітераційним шляхом змінюють простір допустимих розв’язків задачі лінійного програмування таким чином, щоб нарешті отримати оптимальний розв’язок, який задовольняє вимогам цілочислових значень.
Методи відтинання, основним з яких є метод Гоморі, реалізуються шляхом побудови на певних етапах алгоритму додаткових лінійних обмежень-нерівностей, які і визначають відтинаючі гіперплощини. Додаткові обмеження повинні задовольняти двом необхідним умовам.
Умова правильності полягає в тому, що додатковому обмеженню повинні задовольняти всі плани цілочислової задачі, тобто всі цілочислові плани відповідної нецілочислової задачі.
Умова відтинання полягає в тому, що цьому обмеженню не повинен задовольняти план відповідної нецілочислової задачі.
Різні алгоритми методів відтинання відрізняються саме способами побудови додаткових обмежень. Вони застосовуються лише до лінійних цілочислових (чи дискретних) задач та мають ряд недоліків, серед яких відзначимо повільну збіжність. Однак для розв’язування певних типів задач вони можуть успішно застосовуватись.
Комбінаторні методи цілочислової оптимізації базуються на повному переборі всіх допустимих цілочислових розв’язків. Тобто вони реалізують процедуру цілеспрямованого пошуку оптимуму на дискретній множині планів задачі, на кожному кроці якого виключається з розгляду значна кількість неоптимальних планів.
Найпоширенішим у цій групі методів є метод гілок і границь. Суть методу полягає в тому, що множину планів задачі розбивають на ряд підмножин. Для кожної з цих множин знаходять оцінку цільової функції по оптимуму, що являє собою самостійну, але, як правило, більш просту, ніж основна, задачу. Підмножини, які дають явно погані оцінки, не розглядаються. Далі процедуру повторюють доти, поки не знаходять підмножину, яка складається з одного оптимального плану.
Способи розбиття сукупностей планів на підмножини та методи одержання оцінок цільової функції можуть бути дуже різноманітними і їх вибір залежатиме від конкретних умов дослідження. Серед комбінаторних методів можна відмітити метод послідовного аналізу варіантів, метод вектора спаду і метод Беллмана, який застосовується в динамічному програмуванні.
Комбінаторні методи використовуються і для розв’язування дис-кретних нелінійних задач. Певним їх недоліком є те, що кожен метод виявляється найкращим для досить вузького класу.
Для розв’язування задач із булевими змінними застосовують ком-біновані методи, причому оскільки змінні є булевими, то методи пошуку оптимуму значно спрощуються.
Методи відтинання. Спочатку умова цілочисловості тимчасово відкидається, і задача вирішується традиційним методом. Якщо отримане рішення не задовольняє умові цілочисловості, то вводять правильне відтинання (додаткове обмеження, якому свідомо задовольняє будь-який цілочисловий план і не задовольняє знайдений оптимальний не цілочисловий план) і вирішують нову задачу.
Процедура повторюється доти, поки не буде знайдені цілочислове рішення або не буде встановлена неспільність обмежень задачі. Найвідоміший метод відтинань - метод Гоморі.
Метод галузей і границь (спрямоване перебирання). Спочатку умова цілочисловості відкидається, і задача вирішується традиційними методами оптимізації. У результаті одержують нижню оцінку цільової функції. Потім вихідна множина планів ділять на кінцеве число підмножин. Для кожного з яких визначається оцінка. План, для якого оцінка виявиться найближчої до вихідної задачі, вважається оптимальним.

Приклад.

Знайти розв'язок задачі

$$Z = x_1 + 4x_2 \quad (\min),$$
$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 2,$$
$$3x_1 + 2x_2 + x_4 = 6,$$
$$x_i > 0, \quad j = 1.4$$
$$x_j - цілі$$

Задача розв'язується методом відтинаючих площин (метод Гоморі). На першому етапі розв'язання відкидаємо умову цілочисловості і розв'язуємо задачу звичайним симплекс-методом (табл. 4.1.)

Таблиця 4.1.

Базис	$C_{баз}$	A	1	4	0	0	
			x_1	x_2	x_3	x_4	
x_3	0	2	-1	2	1	0	1
x_4	0	6	3	2	0	1	3
Z_i-C_i		0	-1	-4	0	0	
x_2	4	1	-1/2	1	1/2	0	-
x_4	0	4	4	0	-1	1	1
Z_j-C_j		4	-3	0	2	0	
x_2	4	3/2	0	1	3/8	1/8	
x_1	1	1	1	0	-1/4	1/4	
Z_j-C_j		7	0	0	5/4	3/4	

Здобутий план x=(1,3/2,0,0) - умовно оптимальний відносно даної початкової задачі, оскільки всі (Z_i-C_i≥0 для всіх A_J), але не виконується умова цілочисловості змінних. На другому етапі розв'язку переходимо до розв'язання задачі з цією умовою. Запишемо перший переріз Гоморі:

$$\left(\left\{\frac{3}{8}\right\}x_3 + \left\{\frac{1}{8}\right\}x_4\right) \geq \left\{\frac{3}{2}\right\}$$

або

$$\left(\left\{\frac{3}{8}\right\}x_3 + \left\{\frac{1}{8}\right\}x_4\right) \geq \left\{\frac{1}{2}\right\}$$
$$\frac{3}{8}x_3 + \frac{1}{8}x_4 - x_5 = \frac{1}{2};$$
$$\frac{3}{8}x_3 + \frac{1}{8}x_4 - x_5 + W = \frac{1}{2}.$$

Додамо здобуте рівняння до двох рівнянь останньої симплексної таблиці (табл. 4.1.) дістанемо нову задачу (табл. 4.2.). Знайдемо її розв'язок .

Таблиця4.2.

Базис	$C_{баз}$	A	1	4	0	0	0	-M	Q_i
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	W_1	
x_1	4	3/2	0	1	3/8	1/8	0	0	4
x_2	1	1	1	0	-1/4	1/4	0	0	—
W_2	-M	1/2	0	0	3/8	1/8	-1	1	4/3
Z_j-C_j		7	0	0	5/4	3/4	0	0	
		1/2	0	0	-3/8	-3/8		0	
x_1	4	1	0	1	0	0	1		
x_2	1	4/3	1	0	0	1/3	-2/3		
x_3	0	4/3	0	0	1	1/3	-8/3		
Z_j-C_j		16/3	0	0	0	1/3	10/3		

Знов дійстанемо умовно оптимальний план. Виходячи з цього перейдемо до побудови нової задачі (табл.4.3.).

Другий переріз Гоморі має вигляд

$$\left(\left\{\frac{1}{3}\right\}x_4 + \left\{-\frac{2}{3}\right\}x_5\right) \geq \left\{\frac{4}{3}\right\}$$

або після закінчення перетворювань

$$\frac{1}{3}x_4 + \frac{1}{3}x_5 - x_6 + W_2 = \frac{1}{3}.$$

Таблиця4.3.

Базис	$C_{баз}$	A	1	4	0	0	0	0	-M	Qi
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	W_2	
x_2	4	1	0	1	0	0	1	0	0	
x_1	1	4/3	1	0	0	1/3	-2/3	0	0	4
x_3	0	4/3	0	0	1	1/3	-8/3	0	0	4
W_2	-M	1/3	0	0	0	1/3	1/3	-1	1	1
Z_j-C_j		16/3	0	0	0	1/3	10/3	0	0	
		1/3	0	0	0	-1/3	-1/3	M	0	
x_2	4	1	0	1	0	0	1	0		
x_1	1	1	1	0	0	0	-3	0		
x_3	0	1	0	0	1	0	-3	1		
x_4	0	1	0	0	0	1	1	-3		
Z_j-C_j		5	0	0	0	0	3	1		

Здобутий план буде оптимальним і одночасно відповідатиме умові цілочисловості:

$$\overline{x_{опт}} = (1,1,1,1), Z_{\max} = 5$$

Завдання для самостійної роботи

На основі умовно-оптимального плану цілочислових задач побудувати додаткові обмеження і приєднавши їх до плану, знайти цілочисловий розв'язок.

1.

C	Базис	План	-3	-4	0	0	0
			x_1	x_3	x_4	x_5	x_6
0 0 0	x_4 x_5 x_6	7/11 10/11 3/11	5/11 2/11 16/11	5/11 2/11 16/11	0 1 0	0 0 1	1 0 0
Z_j-C_j		0	3	4	0	0	0

2.

C	Базис	План	5	10	2	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
2 5 10	x_3 x_1 x_2	1/6 1/2 5/6	0 1 0	0 0 1	1 0 0	-7/3 -1/6 2/3	5/6 -2/3 1/3
Z_j-C_j		67/6	0	0	0	7/6	5/3

3.

C	Базис	План	0	-2	1	-3	4
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
-3 0	x_4 x_1	13/7 4/7	0 1	-2/7 8/7	-1 2	1 0	6/7 -3/7
Z_j-C_j		-39/7	0	20/7	3	0	10/7

2.4.

C	Базис	План	1	-2	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
-2 0 0	x_2 x_3 x_4	1/5 7/5 3/5	6/5 8/5 3/5	1 0 0	0 1 0	0 0 1	1/5 -13/5 2/5
Z_j-C_j		-2/6	-17/5	0	0	0	-2/5

5.

C	Базис	План	-4	1	2	0	-3
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
2 1 0	x_3 x_2 x_1	2 14/9 41/9	-1 -2/9 15/9	0 1 0	1 0 0	0 0 1	4 16/9 -7/9
Z_j-C_j		50/9	16/9	0	0	0	115/9

6.

C	Базис	План	3	6	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
6 0 3	x_2 x_4 x_1	1/7 15/7 2/7	0 0 1	1 0 0	5/7 13/7 -9/7	0 1 0	1/7 -20/7 4/7
Z_j-C_j		12/7	0	0	3/7	0	18/7

7.

C	Базис	План	2	3	4	0	1
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
2 0 0	x_1 x_4 x_5	1/3 5/6 2/3	1 0 0	4/3 -7/6 -1/3	-17/3 1/6 8/3	0 1 0	0 0 1
Z_j-C_j		2/3	0	-1/3	-46/3	0	0

8.

C	Базис	План	1	-4	1	0	2
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
2 1 -4	x_5 x_1 x_2	1/2 2/3 1/6	0 1 0	0 0 1	5/2 2 17/6	7/3 -20/3 -1/3	1 0 0
Z_j-C_j		1	0	0	-13/3	-2/3	0

9.

C	Базис	План	-1	2	0	3	4
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
-1 -5	x_1 x_5	7/4 3/2	1 0	1/4 1/2	-3/4 5/2	7/2 -1/2	0 1
Z_j-C_j		-37/4	0	-19/4	-47/4	-9/4	0

Контрольні запитання

1. Які задачі лінійного програмування називаються цілочисловими? Навести приклади.

2. Методи розв’язування задач цілочислового програмування. Які основні кроки їх алгоритмів?

3. Алгоритм методу Гоморі.

4. Основні засади методу гілок і границь.

Список використаної і рекомендованої літератури

1. Жалдак М.І., Триус Ю.В. Основи теорії і методів оптимізації: Навчальний посібник. - Черкаси: Брама-Україна, 2005. - 608 с.
2. Глушик М.М., Копич І.М., Сороковський В.М. Математичне програмування: підручник. ISBN 978-966-418-103-4 - Львів: Новий Світ, 2014. – 280 с.
3. Зайченко Ю.П. Дослідження операцій. Підручник.-К.: Видавничий дім «Слово», 2006.- -816с.
4. Ладієва Л.Р. Оптимальне керування системами.: Електронне мережне навчальне видання. Навчальний посібник. - 2019- 162 с.
5. Ладієва Л.Р. Оптимізація систем керування. : Електронне мережне навчальне видання. Навчальний посібник. – 2020. – 192 с.
6. Ладієва Л.Р. Оптимізація технологічних процесів: Навчальний посібник. – К: ІВЦ «видавництво «Політехніка»», 2004. – 192с.
7. . Sage EP, White C.S. Optimal systems control. 2d View all formats and editions – Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J, 2006. - 392p. . Tenth Edition –Pearson Education Limited publishers London, 2017.-843 P.
8. Ravindran A. Engineering Optimization Methods and Application. /A. Ravindran A., Ragsdell K.M., Reklaitis G.V. / - Publication John Willy and sons, Inc, NJ, 2006, 2nd ed.- 688p.