

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ  
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ  
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

Фізико-математичний факультет

Кафедра загальної фізики та моделювання фізичних процесів

«На правах рукопису»  
УДК 534.1:534.2:538.9

«До захисту допущено»

Завідувач кафедри

\_\_\_\_\_ Дар'я Савченко  
(підпис) (ім'я, прізвище)

“ \_\_\_ ” \_\_\_\_\_ 20\_\_ р.

**Магістерська дисертація**

зі спеціальності 104 – фізика та астрономія

Освітньо – професійна програма «Комп'ютерне моделювання фізичних процесів»

на тему: «ФОРМУВАННЯ КЕРОВАНИХ ЗАБОРОНЕНИХ ЗОН В

ТРИВИМІРНИХ АКУСТИЧНИХ МЕТАМАТЕРІАЛАХ СТВОРЕНИХ ІЗ

ВИКОРИСТАННЯМ МАГНІТОРЕАКТИВНИХ ЕЛАСТОМЕРІВ.»

Виконав (-ла): студент (-ка) другого (магістерського) рівня вищої освіти, групи  
ОФ-21мп

(шифр групи)

\_\_\_\_\_ Колупаєв Владислав Олегович

(ПІБ)



(підпис)

Науковий керівник Д. ф.-м. н., проф., Горшков В'ячеслав Миколайович

(посада, науковий ступінь, вчене звання, ПІБ)



(підпис)

Консультант \_\_\_\_\_

(назва розділу)

(науковий ступінь, вчене звання, , ПІБ)

(підпис)

Рецензент Зав. каф. ЗФ, проф., д.ф.-м.н. Решетняк Сергій Олександрович

(посада, науковий ступінь, вчене звання, ПІБ)



(підпис)

Засвідчую, що у цій магістерській  
дисертації немає запозичень з праць  
інших авторів без відповідних  
посилань.

Студент \_\_\_\_\_



(підпис)

Київ – 2024 року

# АНОТАЦІЯ

## ДО МАГІСТЕРСЬКОЇ ДИСЕРТАЦІЇ

СТУДЕНТА 2-го (МАГІСТЕРСЬКОГО) РІВНЯ ВИЩОЇ ОСВІТИ ГР. ОФ-21мп

**Колупасва Владислава Олеговича**

(ПІБ)

**На тему** Формування керованих заборонених зон в тривимірних акустичних метаматеріалах створених із використанням магнітореактивних еластомерів

**Науковий керівник** Доктор фіз.-мат. наук, професор кафедри загальної фізики та моделювання фізичних процесів, В'ячеслав Горшков.

(науковий ступінь, вчене звання, посада, ПІБ)

**Актуальність** У зв'язку з широкими можливостями застосування акустичних метаматеріалів для керування акустичними хвилями, зокрема, для гасіння небажаних коливань, акустичного суперлінзування та створення хвилеводів, це дослідження механізмів формування та керування в реальному часі забороненими зонами в акустичному метаматеріалі з новою структурою на основі магнітореактивного еластомеру на сьогодні є актуальним.

**Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами кафедри** Магістерське дослідження виконано в межах тематики наукової групи ФМФ-07 «Динаміка та фізичні властивості багаточастинкових систем» кафедри загальної фізики та моделювання фізичних процесів Національного Технічного Університету України «КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО».

**Об'єкт дослідження** Параметрична пружино-масова модель тривимірного акустичного метаматеріалу з елементарними комірками-мультирезонаторами із оболонками на основі магнітореологічного еластомеру

**Предмет дослідження** Структура дисперсійних поверхонь, принципи формування контрольованих заборонених зон в параметричній пружино-масовій моделі тривимірного акустичного метаматеріалу

**Мета роботи** Виявлення закономірностей в формуванні заборонених зон і керування ними в акустичному метаматеріалі в режимі реального часу в залежності від параметрів середовища і форми елементарної комірки тривимірного акустичного метаматеріалу

**Методи дослідження** Пружино-масова модель, якісний аналіз явищ. Чисельну параметричну модель було створено на мові програмування Fortran. Візуалізацію результатів дослідження здійснено за допомогою програм OriginPro та VMD.

**Відомості про обсяг роботи, кількість ілюстрацій, таблиць, додатків і літературних найменувань за переліком використаних використаної літератури** – 52, обсяг роботи – 76 ст., кількість ілюстрацій - 15

**Мета індивідуального завдання, використані методи та отримані результати**

Розробити параметричну модель тривимірного акустичного метаматеріалу. Виявити закономірності в формуванні і зміні заборонених зон в акустичному метаматеріалі в залежності від параметрів системи. Використано чисельну параметричну пружино-масову модель написану на Отримано графіки дисперсійних поверхонь за різних параметрів дослідженої моделі, та зображення зміщень частинок елементарної комірки для обраних мод коливань.

**Висновок** Отримана для тривимірного метаматеріалу модель підтверджує теоретичні очікування, було виявлено закономірності у формуванні і зміні заборонених зон. Використання магнітореактивного еластомеру в якості середовища в яке занурені еластичні ядра дає змогу ефективно керувати відкриттям/закриттям заборонених зон в акустичному метаматеріалі і навіть повністю закривати заборонені зони що дозволяє отримати неперервний частотний спектр. Процес формування забороненої зони за поведінкою дисперсійних поверхонь можна поділити на певні стадії, а саме: динамічну, квазістатичну та надкритичну. В анізотропній формі метаматеріалу спостегається формування заборонених зон, напрямлених вздовж осі анізотропії.

**Перелік ключових слів (не більше 20)** заборонені зони, акустичні метаматеріали, , магнітореактивні еластомери, дисперсійні поверхні, активна фільтрація

Підпис керівника \_\_\_\_\_



**SUMMARY**  
**TO THE MASTER THESIS**

2<sup>nd</sup> YEAR STUDENT OF THE SECOND LEVEL OF HIGHER EDUCATION (MASTER LEVEL),  
GR. OF-21mp

**Vladyslav Olehovych Kolupaiev**

---

( FULL NAME)

**On the topic** *Formation of controlled band gaps in three-dimensional acoustic metamaterials created using magnetorheological elastomers*

---

**Scientific supervisor** *Dr. Sc. (Phys.-Math.), professor of the Department of General Physics and Modeling of Physical Processes, Vyacheslav Gorshkov.*

---

(scientific degree, academic title, position, FULL NAME)

**Actuality** *Due to the wide possibilities of acoustic metamaterial application for controlling acoustic waves, in particular, for damping unwanted vibrations, acoustic superlensing, and creating waveguides this study of the mechanisms of formation and real-time control of band gaps in an acoustic metamaterial with a novel structure based on a magneto-responsive elastomer is relevant today.*

---

**Relationship of work with scientific programs, plans, themes of the department** *The master's thesis was carried out within the theme of the scientific group FMF-07 "Dynamics and physical properties of multiparticle systems" of the Department of General Physics and Modeling of Physical Processes of the National Technical University of Ukraine "Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute".*

---

**Object of research** *Parametric spring-mass model of a three-dimensional acoustic metamaterial with elementary multiresonator cells with shells based on magnetorheological elastomer*

---

**Subject of research** *Structure of dispersion surfaces, principles of formation of controlled band gaps in a parametric spring-mass model of a three-dimensional acoustic metamaterial*

---

**Purpose of work** *To reveal regularities in the formation and real-time control of band gaps in an acoustic metamaterial, depending on the parameters of the medium and the shape of the elementary cell of a three-dimensional acoustic metamaterial*

---

**Research methods** *spring-mass model, qualitative analysis of phenomena. The numerical parametric model is written in the Fortran programming language. The research results were visualized using OriginPro and VMD software.*

---

**Information about the volume of the thesis, the number of illustrations, tables, applications and references in the list of used ones'** *references - 52, volume of the thesis - 76 pages, number of illustrations – 15*

---

**The purpose of the individual task, the methods used and the results obtained** *To develop a parametric model of a three-dimensional acoustic metamaterial. To reveal regularities in the formation and change of band gaps in the acoustic metamaterial depending on the system parameters. The numerical parametric spring-mass model written in the language of the numerical simulation is used to obtain the graphs of*

dispersion surfaces for different parameters of the investigated model and the images of displacements of the unit cell particles for the selected vibration modes.

**Conclusion** The model obtained for the three-dimensional metamaterial confirms the theoretical expectations, and regularities in the formation and change of the band gaps were revealed. The use of a magnetoreactive elastomer as a medium in which elastic cores are immersed makes it possible to effectively control the opening/closing of the band gaps in the acoustic metamaterial and even completely close the band gaps, which leads to a continuous frequency spectrum. The process of band gap formation can be divided into certain stages based on the behavior of dispersion surfaces, namely: dynamic, quasi-static, and supercritical. In the anisotropic form of the metamaterial, the formation of band gaps directed along the anisotropy axis is observed.

**Keyword list (no more than 20)** band gaps, acoustic metamaterials, magnetorheological elastomers, dispersion surfaces, active filtering

Signature of the supervisor  \_\_\_\_\_

**Національний технічний університет України  
«Київський політехнічний інститут  
імені Ігоря Сікорського»**

Інститут/факультет \_\_\_\_\_ фізико-математичний \_\_\_\_\_  
(повна назва)

Кафедра \_\_\_\_\_ загальної фізики та моделювання фізичних процесів \_\_\_\_\_  
(повна назва)

Рівень вищої освіти – другий (магістерський) за освітньо-професійною програмою «Комп'ютерне моделювання фізичних процесів»

Спеціальність \_\_\_\_\_ 104 – фізика та астрономія \_\_\_\_\_

ЗАТВЕРДЖУЮ  
Завідувач кафедри  
\_\_\_\_\_ Дар'я Савченко  
(підпис) (ім'я, прізвище)  
«\_\_» \_\_\_\_\_ 20\_\_р.

**ЗАВДАННЯ  
на магістерську дисертацію студенту**

\_\_\_\_\_ Колупаєв Владислав Олегович \_\_\_\_\_  
(прізвище, ім'я, по батькові)

1. Тема дисертації «Формування керованих заборонених зон в тривимірних акустичних метаматеріалах створених із використанням магнітореактивних еластомерів.»

Науковий керівник дисертації д. ф.-м. н., проф., В'ячеслав Горшков  
(прізвище, ім'я, по батькові, науковий ступінь, вчене звання)

затверджені наказом по університету від «13» Листопада 2023р. № 5250-с

2. Строк подання студентом дисертації 09.01.2024
3. Об'єкт дослідження параметрична модель тривимірного акустичного метаматеріалу з елементарними комітками-мультирезонаторами із оболонками на основі магнітореологічного еластомеру
4. Предмет дослідження структура дисперсійних поверхонь, принципи формування контрольованих заборонених зон в параметричній моделі тривимірного акустичного метаматеріалу

**5. Перелік завдань, які потрібно розробити (мінімум 4)**

1. Здійснити теоретичний аналіз в області створення акустичних метаматеріалів з керованими параметрами та використання магнітореологічних еластомерів.
2. Сформулювати принципи формування заборонених зон в одновимірній акустичній системі.
3. Розробити параметричну модель тривимірного акустичного метаматеріалу з елементарними комірками-мультирезонаторами із оболонками на основі магнітореологічного еластомеру.
4. Виявити закономірності формування заборонених зон в параметричній моделі акустичного метаматеріалу для різних параметрів маси частинок та жорсткості пружин, а також наявності/відсутності анізотропії елементарних комірок.
5. На підставі проведеного дослідження запропонувати загальні рекомендації для використання результатів дослідження формування заборонених зон у тривимірному магнітореологічному еластомері у науковій та практичній діяльності.

Перелік графічного (ілюстративного) матеріалу: графіки дисперсійних поверхонь, візуалізації коливальних мод

---

---

**6. Орієнтовний перелік публікацій** 1) Smart controllable wave dispersion in acoustic metamaterials using magnetorheological elastomers / V. N. Gorshkov et al. Journal of Sound and Vibration.

2) Kolupaiev V.O., Gorshkov V.N., 3d acoustic metamaterials with controllable bandgap gates based on magnetorheological elastomers //Kolupaiev V.O., Gorshkov V.N./ Сучасні проблеми експериментальної, теоретичної фізики та методики навчання фізики: матеріали ІХ Всеукраїнської науково-практичної конференції з міжнародною участю, м. Суми, 10-12 квітня 2023 року / за ред. С. О. Лебединського – Суми: ІІФ НАН України, 2023. – 91 с.

**7. Консультанти розділів дисертації\***

Розділ	Прізвище, ініціали та посада консультанта	Підпис, дата	
		завдання видав	завдання прийняв

8. Дата видачі завдання 04.09.2023

### КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН

№ з/п	Назва етапів виконання магістерської дисертації	Строк виконання етапів магістерської дисертації	Примітка
1	Проходження інструктажу з техніки безпеки та охорони праці	04.09.2023	Виконано
2	Ознайомлення з місцем роботи	04.09.2023	Виконано
3	Вивчення літературних джерел, складання огляду літератури	04.09.2023-28.09.2023	Виконано
4	Пошук і добір фактичних матеріалів, їх групування	22.09.2023-28.09.2023	Виконано
5	Наукові дослідження за темою МД	04.09.2023-26.10.2023	Виконано
6	Аналіз отриманих результатів	04.09.2023-21.11.2023	Виконано
7	Підготовка розділів МД на основі отриманих даних по темі МД	25.09.2023 – 14.12.23	Виконано
8	Підготовка звіту з МД та оформлення презентацій до захисту	14.12.2023	Виконано
9	Надання роботи на перевірку керівнику МД	15.12.2023	Виконано
10	Отримання відгуку від керівника МД	20.12.2023	Виконано
11	Перевірка МД на плагіат	19.12.2023	Виконано
12	Формування плану публікацій по темі МД або документів по впровадженню (лист з підприємства або подання проекту впровадження в «КПІ ім. Ігоря Сікорського»)	14.12.2023	Виконано
13	Подання МД на рецензію	21.12.2023	Виконано
14	Здача МД на нормоконтроль (додержання вимог ДСТУ до оформлення МД)	29.12.2023	Виконано
15	Попередній захист МД	26.12.2023	Виконано
16	Виправлення матеріалів МД згідно з зауваженнями комісії на попередньому захисті	08.01.2023	Виконано
17	Здача МД (друкований та електронний варіанти), Відгуку та Рецензії на кафедрі загальної фізики та МФП	09.01.2024	Виконано
18	Відправка анотації МД на сайт	09.01.2024	Виконано



	кафедри загальної фізики та МФП		
19	Остаточний захист МД	16.01.2024	Виконано
20	Відправка матеріалів МД у бібліотеку «КПІ ім. Ігоря Сікорського» та сайт кафедри загальної фізики та ФТТ	09.01.2024	Виконано

Студент



(підпис)

Колупаєв В.О.

(ініціали, прізвище)

Науковий керівник дисертації



(підпис)

Горшков В.М.

(ініціали, прізвище)

---

\* Консультантом не може бути зазначено наукового керівника

## РЕФЕРАТ

Актуальність теми *У зв'язку з широкими можливостями застосування акустичних метаматеріалів для керування акустичними хвилями, зокрема, для гасіння небажаних коливань, акустичного суперлінзування та створення хвилеводів, це дослідження механізмів формування та керування в реальному часі забороненими зонами в акустичному метаматеріалі з новою структурою на основі магнітореактивного еластомеру на сьогодні є актуальним.*

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами *Магістерське дослідження виконано в межах тематики наукової групи ФМФ-07 «Динаміка та фізичні властивості багаточастинкових систем» кафедри загальної фізики та моделювання фізичних процесів Національного Технічного Університету України «КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО».*

Об'єкт дослідження *Параметрична пружино-масова модель тривимірного акустичного метаматеріалу з елементарними комітками-мультирезонаторами із оболонками на основі магнітореологічного еластомеру*

Предмет дослідження *Структура дисперсійних поверхонь, принципи формування контрольованих заборонених зон в параметричній пружино-масовій моделі тривимірного акустичного метаматеріалу*

Мета роботи *Виявлення закономірностей в формуванні заборонених зон і керування ними в акустичному метаматеріалі в режимі реального часу в залежності від параметрів середовища і форми елементарної комітки тривимірного акустичного метаматеріалу*

Методи дослідження *Пружинно-масова модель, якісний аналіз явищ. Чисельну параметричну модель було написано на мові програмування Fortran. Візуалізація результатів дослідження відбувалася за допомогою програм OriginPro та VMD.*

Задачі дослідження

1. Здійснити теоретичний аналіз в області створення акустичних метаматеріалів з керованими параметрами та використання магнітореологічних еластомерів.
2. Сформулювати принципи формування заборонених зон в одновимірній акустичній системі.
3. Розробити параметричну модель тривимірного акустичного метаматеріалу з елементарними комітками-мультирезонаторами із оболонками на основі магнітореологічного еластомеру.
4. Виявити закономірності формування заборонених зон в параметричній моделі акустичного метаматеріалу для різних параметрів маси частинок та жорсткості пружин, а також наявності/відсутності анізотропії елементарних комірок.
5. На підставі проведеного дослідження запропонувати загальні рекомендації для

використання результатів дослідження формування заборонених зон у тривимірному магнітореологічному еластомері у науковій та практичній діяльності.

#### **Наукова новизна одержаних результатів**

- 1) Вперше побудовано параметричну модель тривимірного акустичного метаматеріалу.
- 2) Вперше отримано графіки дисперсійних поверхонь для такої моделі метаматеріалу
- 3) Вперше розглянуто різні конфігурації елементарних комірок даного акустичного метаматеріалу включаючи анізотропний випадок
- 4) Вперше встановлено закономірності у формуванні заборонених зон даного метаматеріалу

**Практичне значення одержаних результатів** Отримані результати є корисними для поглиблення розуміння процесів формування та керування в реальному часі шириною заборонених зон в акустичних метаматеріалах і дають змогу проектувати нові типи та форми АММ, які можуть бути використані для звукоізоляції, створення керованих частотних фільтрів, маніпулювання напрямком поширення хвиль

#### **Апробація результатів дисертації**

Smart controllable wave dispersion in acoustic metamaterials using magnetorheological elastomers / V. N. Gorshkov et al. Journal of Sound and Vibration. 2024. Vol. 572. P. 118157. URL: <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2023..>

Kolupaiev V.O., Gorshkov V.N., 3d acoustic metamaterials with controllable bandgap gates based on magnetorheological elastomers // Kolupaiev V.O., Gorshkov V.N./ Сучасні проблеми експериментальної, теоретичної фізики та методики навчання фізики: матеріали ІХ Всеукраїнської науково-практичної конференції з міжнародною участю, м. Суми, 10-12 квітня 2023 року / за ред С. О. Лебединського – Суми: ІФ НАН України, 2023. – 91 с.

**Публікації автора МД** 1) Smart controllable wave dispersion in acoustic metamaterials using magnetorheological elastomers / V. N. Gorshkov et al. Journal of Sound and Vibration. 2024. Vol. 572. P. 118157. URL:

<https://doi.org/10.1016/j.jsv.2023..>

- 2) Kolupaiev V.O., Gorshkov V.N., 3d acoustic metamaterials with controllable bandgap gates based on magnetorheological elastomers // Kolupaiev V.O., Gorshkov V.N./ Сучасні проблеми експериментальної, теоретичної фізики та методики навчання фізики: матеріали ІХ Всеукраїнської науково-практичної конференції з міжнародною участю,

м. Суми, 10-12 квітня 2023 року / за ред. С. О. Лебединського – Суми:  
ІІФ НАН України, 2023. – 91 с.

**Ключові слова** заборонені зони, акустичні метаматеріали, , магнітореактивні еластомери, дисперсійні поверхні, активна фільтрація

**В роботі наведено:** використаної літератури - 52, сторінок: - 76 , рисунків - 15

## ABSTRACT

**Actuality of theme** *Due to the wide possibilities of acoustic metamaterial application for controlling acoustic waves, in particular, for damping unwanted vibrations, acoustic superlensing, and creating waveguides this study of the mechanisms of formation and real-time control of band gaps in an acoustic metamaterial with a novel structure based on a magnetoresponse elastomer is relevant today.*

---

**Relationship of work with scientific programs, plans, themes** *The master's thesis was carried out within the theme of the scientific group FMF-07 "Dynamics and physical properties of multiparticle systems" of the Department of General Physics and Modeling of Physical Processes of the National Technical University of Ukraine "Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute".*

---

**The object of research** *Parametric spring-mass model of a three-dimensional acoustic metamaterial with elementary multiresonator cells with shells based on magnetorheological elastomer*

---

**The research subject** *Structure of dispersion surfaces, principles of formation of controlled band gaps in a parametric spring-mass model of a three-dimensional acoustic metamaterial*

---

**Purpose of work** *To reveal regularities in the formation and real-time control of band gaps in an acoustic metamaterial, depending on the parameters of the medium and the shape of the elementary cell of a three-dimensional acoustic metamaterial*

---

**Research methods** *spring-mass model, qualitative analysis of phenomena. The numerical parametric model is written in the Fortran programming language. The research results were visualized using OriginPro and VMD software..*

---

### Research tasks

1. To carry out a theoretical analysis in the field of creation of acoustic metamaterials with controllable parameters and the usage of magnetorheological elastomers.
  2. Formulate principles of formation of band gaps in an one-dimensional acoustic system.
  3. Develop a parametric model of a three-dimensional acoustic metamaterial with elementary multiresonator cells with shells based on magnetorheological elastomer.
  4. Identify the regularities of the formation of forbidden zones in a parametric model of an acoustic metamaterial for different parameters of particle mass and spring stiffness, as well as the presence/absence of anisotropy of elementary cells.
  5. On the basis of the study, propose general recommendations for the use of the results of the study of the formation of band gaps in a three-dimensional magnetorheological elastomer in scientific and practical activities.
-

### **Scientific novelty of the results**

- 1) A parametric model of a three-dimensional acoustic metamaterial is constructed for the first time.
- 2) For the first time, the graphs of dispersion surfaces for such a metamaterial model are obtained
- 3) Different configurations of elementary cells of this acoustic metamaterial including the anisotropic case are considered for the first time
- 4) The regularities in the formation of the forbidden zones of this metamaterial are established for the first time

**The practical significance of the results** the results obtained are useful to improve the understanding of the formation and real-time control of band gaps in acoustic metamaterials and make it possible to design new types and forms of AMMs that can be used for sound insulation, creation of controlled frequency filters, and manipulation of the direction of wave propagation and energy flows.

### **Approbation of the results of the thesis**

Smart controllable wave dispersion in acoustic metamaterials using magnetorheological elastomers / V. N. Gorshkov et al. Journal of Sound and Vibration. 2024. Vol. 572. P. 118157. URL:

<https://doi.org/10.1016/j.jsv.2023..>

Kolupaiev V.O., Gorshkov V.N., 3d acoustic metamaterials with controllable bandgap gates based on magnetorheological elastomers // Kolupaiev V.O., Gorshkov V.N./ Сучасні проблеми експериментальної, теоретичної фізики та методики навчання фізики: матеріали ІХ Всеукраїнської науково-практичної конференції з міжнародною участю, м. Суми, 10-12 квітня 2023 року / за ред . С. О. Лебединського – Суми: ІПФ НАН України, 2023. – 91 с.

**Publications** 1) Smart controllable wave dispersion in acoustic metamaterials using magnetorheological elastomers / V. N. Gorshkov et al. Journal of Sound and Vibration. 2024. Vol. 572. P. 118157. URL: <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2023..>

2) Kolupaiev V.O., Gorshkov V.N., 3d acoustic metamaterials with controllable bandgap gates based on magnetorheological elastomers // Kolupaiev V.O., Gorshkov V.N./ Сучасні проблеми експериментальної, теоретичної фізики та методики навчання фізики: матеріали ІХ Всеукраїнської науково-практичної конференції з міжнародною участю, м. Суми, 10-12 квітня 2023 року / за ред. С. О. Лебединського – Суми: ІПФ НАН України, 2023. – 91 с.

**Keywords** *band gaps, acoustic metamaterials, magnetorheological elastomers, dispersion surfaces, active filtering*

**The work contains:** references - 52, pages - 76, figures - 15

## ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ, СИМВОЛІВ, СКОРОЧЕНЬ І ТЕРМІНІВ

АММ	Акустичний метаматеріал
МРЕ	Магнітореологічний еластомер
$\kappa$	Жорсткість пружин всередині елементарної комірки АММ
$\mathcal{K}^*$	Ефективна ізотропна жорсткість внутрішніх пружин елементарних комірок
$\chi$	Жорсткість пружин, що з'єднують елементарні комірки АММ
$\chi^*$	Ефективна жорсткість пружин, що з'єднують елементарні комірки АММ
$\eta$	Жорсткість пружин, що з'єднують маси в оболонці елементарної комірки
$\lambda$	Довжина акустичної хвилі
$\mathbf{B}$	Вектор індукції магнітного поля
$\mathbf{k}$	Хвильовий вектор
$\hat{\mathbf{k}}$	Безрозмірний хвильовий вектор
$\mathbf{a}$	Вектор трансляції
$\mathbf{u}$	Вектор зміщення частинки
$m$	Маса ядра елементарної комірки АММ
$m_{core}$	Маса частинки ядра
$m_{shell}$	Маса частинки оболонки
$M$	Маса оболонки елементарної комірки АММ
$M^*$	Приведена маса елементарної комірки АММ
$M_{core}$	Маса багаточастинкового ядра елементарної комірки

$M_{shell}$	Маса багаточастинкової оболонки елементарної комірки
$N$	Кількість частинок в елементарній комірці
$N_{core}$	Кількість частинок ядра елементарної комірки
$N_{shell}$	Кількість частинок оболонки елементарної комірки
$\omega_0^2$	Квадрат циклічної частоти коливань елементарної комірки АММ, як резонатора з нерухомою жорсткою зовнішньою оболонкою
$\omega^2$	Квадрат циклічної частоти коливань елементарної комірки АММ
$\omega_f^2$	Квадрат циклічної частоти коливань елементарної комірки АММ, як резонатора з рухомою, “вільною” жорсткою зовнішньою оболонкою
$\omega_n^2(\hat{k})$	Частотні гілки графіку дисперсії
$\omega_{up}^2$	Верхня межа забороненої зони
$\omega_{down}^2$	Нижня межа забороненої зони
$\Delta\omega^2$	Ширина забороненої зони
$\hat{\omega}_n^2$	Власні частоти ізольованої комірки
$\Omega^2$	Характеристична частота
$\Omega_{nl}^2$	Характеристична частота пржин нелокальної взаємодії
$\bar{\omega}_{m(opt)}^2$	Проміжні оптичні частотні поверхні
$x_i$	Зміщення ядра елементарної комірки
$x_e$	Зміщення оболонки елементарної комірки
$L$	Період трансляційної симетрії
$\mathcal{L}$	Стала ґратки
$\nu$	Стала Блоха



## ЗМІСТ

ВСТУП.....	14
РОЗДІЛ 1 ТЕОРЕТИЧНИЙ АНАЛІЗ .....	17
1.1 Реалізація активного контролю властивостей АММ.....	17
Висновки до розділу 1 .....	20
РОЗДІЛ 2 ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ДОСЛІДЖЕННЯ.....	21
2.1 Фізичні принципи формування забороненої зони та ефекти нелокальних взаємодій .....	21
2.2 Чисельна модель .....	30
Висновки до розділу 2 .....	34
РОЗДІЛ 3 ВЗАЄМОДІЯ ДИСПЕРСІЙНИХ ПОВЕРХОНЬ У ДИНАМІЦІ ТРИВИМІРНОЇ ЗАБОРОНЕНОЇ ЗОНИ .....	36
3.1. Динаміка дисперсійних поверхонь в метаматеріалах з одночастинковим ядрами .....	38
3.2. Керування комплексом заборонених зон у метаматеріалах з багаточастинковими ядрами .....	44
3.3. Керована напрямлена проникність акустичних хвиль в анізотропних метаматеріалах .....	56
3.4 Загальні рекомендації для використання отриманих результатів дослідження.....	65
Висновки до розділу 3 .....	66
ВИСНОВКИ .....	68
ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ ПОСИЛАННЯ .....	70

## ВСТУП

Останніми роками багато уваги приділяється вивченню фізичних властивостей акустичних метаматеріалів (АММ). Метаматеріал - це штучно створений матеріал, як правило композит, внутрішня будова якого використовується для створення бажаних властивостей, що не притаманні його компонентам[1]. Наукові досягнення в галузі акустичних метаматеріалів значно розширили можливості керувати звуковими хвилями в процесі їхнього проходження, відбиття, заломлення, поглинання, дифракції та загасання. Аналогічно до електромагнітних метаматеріалів[2], в акустичних реалізуються такі властивості як: від'ємний показник заломлення середовища [3,4], акустичне маскування [5,1] та суперлінзування [6,7].

Важливою властивістю АММ та фононних кристалів (ФК) є їхня здатність блокувати проходження звукових хвиль певного частотного діапазону в середовищі, тобто створювати заборонені зони. У ФК смуги пропускання утворюються в результаті інтерференції хвиль після Бреґівського розсіювання падаючих акустичних хвиль [8-12]. Оскільки в цьому випадку довжини хвиль мають той самий порядок, що й просторова стала ґратки, то створювана заборонена зона відповідає відносно високим частотам. В АММ межі заборонених зон визначаються лише резонансними частотами елементарних комірок. Таким чином, відповідні довжини хвиль можуть значно перевищувати сталу ґратки, і заборонена зона формується у низькочастотному діапазоні.

Фізичний механізм утворення заборонених зон в АММ має ряд інтерпретацій з точки зору прояву від'ємної маси та від'ємної жорсткості в

елементарних комірках на відповідних частотах. У даній роботі, з метою якісного аналізу отриманих результатів, викладено альтернативну інтерпретацію цього механізму без використання екзотичних фізичних понять, таких як від'ємні маса чи модуль стиснення.

Здатність АММ до створення заборонених зони знаходить практичне застосування в багатьох галузях. Мета створення специфічних заборонених зон може бути досягнута за допомогою "пасивного" методу, який не дозволяє змінювати параметри забороненої зони в реальному часі. Хоча з такими конструкціями пов'язані корисні властивості, однак контроль спектру пропускання у реальному часі є бажаним, оскільки дає змогу для ширшого прикладного застосування АММ і компенсації дефектів при їх виготовленні.

У цій роботі розглядається можливість "активного" керування параметрами забороненої зони в реальному часі. Керуючим фактором є зовнішнє магнітне поле, яке змінює пружність елементарних комірок через магнітну індукцію  $B$ , і, відповідно, частотні характеристики АММ в цілому. Чутливі до магнітного поля елементи АММ складаються зі штучних матеріалів – магнітореактивних еластомерів (МРЕ) [13,14].

В рамках ідеалізованої дискретної пружинно-масової моделі досліджуються фізичні механізми, тобто шляхи розширення можливостей активного керування частотними параметрами тривимірного АММ(3D-АММ) на основі МРЕ. Структура метаматеріалу, яка детально описана в наступних розділах, являє собою узагальнений варіант метаматеріалу у вигляді впорядкованої решітки мультівібраторів-ядер, вкладених у комірчасте пружне середовище, далі "скелет", з МРЕ, що є чутливим до індукції магнітного поля. Фізичні механізми, відповідальні як за появу заборонених зон, так і за їхню подальшу еволюцію, детально проаналізовано якісно і

проілюстровано графічно. Основну увагу приділено пошуку закономірностей у залежності функціоналу від співвідношення параметрів ядра і скелета для керування акустичними властивостями системи від створення забороненої зони до її квазістаціонарного стану зі збільшенням величини індукції магнітного поля. Отже тема дослідження є актуальною.

## РОЗДІЛ 1 ТЕОРЕТИЧНИЙ АНАЛІЗ

### 1.1 Реалізація активного контролю властивостей АММ

Для створення АММ з контрольованими в реальному часі властивостями використовують різні підходи. Так, наприклад, автори роботи [15] використовували п'єзоелектричні пружини в одновимірній періодичній структурі для створення різних типів заборонених зон за допомогою електричних сигналів, які викликали зміну модуля пружності резонаторів та їх власних частот. Керування повною чи частковою забороненою зоною в певних напрямках при зміні морфології елементарних комірок досліджується в перфорованій фононній структурі Міура-орі [16]. На основі тривимірних надрукованих порожнистих сферичних метаматеріалів в роботі [17] реалізовано регульовані фононні заборонені зони, які можуть збільшуватись на 37,5%, контроль забороненої зони здійснюється через оборотну залежність жорсткості склоподібного полімеру від температури та неоднорідності стійкого теплового поля в структурі ґратки.

Елементи АММ, чутливі до магнітного поля можуть бути створені з магнітореологічних еластомерів [13,14].

МРЕ є результатом затвердіння немагнітного полімеру, наповненого мікророзмірними магнітними частинками та іншими добавками. Тип наповнювача [18, 19, 20, 21], розмір частинок [19] та їх розташування в матриці [20, 22] визначають рівень чутливості даного дисперсного композиту до зовнішнього магнітного поля. Зокрема, значне збільшення модулів пружності матеріалу в досить помірних магнітних полях порядку 50~600 мТл. Так, у магнітному полі з індукцією 500 мТл еластомери, що містять частинки

карбонілу заліза, продемонстрували збільшення модуля пружності в 277 разів [23, 24]. Такі зміни відбуваються швидко (в інтервалі часу до декількох мілісекунд [25]) і оборотно [26, 27]. Оскільки магнітне поле є зручним фактором контролю, використання МРЕ в технології розумних матеріалів [28, 29] є перспективним у численних інженерних застосуваннях, таких як створення приводів і датчиків [30,31,32], гасителів вібрації [33, 34], а також пристрої адаптивної жорсткості [35, 36].

Можливості керування спектром акустичних хвиль розповсюджуваних у двовимірних АММ вивчалися в роботах [37-42], в яких елементарні комірки метаматеріалу мали різну форму та формували різні структури. У [43] була досліджена метаматеріальна пластина, що містить магнітореологічні еластомери та множинні градієнтні резонатори, у яких адаптивний механізм регулювання магнітного поля працює для зміни модуля пружності МРЕ, щоб модулювати заборонену зону локального резонансу. В роботі [44] досліджували напівактивну балку-сендвіч з МРЕ-елементами. Результати показують, що ширина забороненої зони в запропонованій системі може бути збільшена шляхом варіювання жорсткості магнітореактивних елементів у порядку зростання. Зміна ширини та положення забороненої зони для поперечних хвиль у магнітно-активних ламінатах продемонстрована в [45].

Що стосується розмірності простору, то елементарні комірки в двовимірних [37, 47] і тривимірних [47] метаматеріалах мають топологічно подібну структуру. Ядра елементарних комірок (плоскі циліндри [37], куби або кулі [47]) покривали МРЕ-оболонками. Утворені елементарні комірки були впорядковані або на плоскій пластині з того самого МРЕ [37], або в епоксидній матриці [47] без прямого контакту між найближчими комірками. В обох випадках зі збільшенням індукції зовнішнього магнітного поля краї забороненої зони поступово переходять до високочастотних, і ширина

забороненої зони стає ширшою. Аналогічне перетворення забороненої зони спостерігається в роботі [46]. Слід зауважити, що в роботі [47] результати отримано методом скінченних елементів.

## Висновки до розділу 1

1. Існують різні методи керування акустичними властивостями метаматеріалів, зокрема в режимі реального часу, наприклад змінюючи форму метаматеріалу або використовуючи залежність жорсткості матеріалу від температури. Найбільш вдалим, гнучким і технічно застосовним є керування акустичними властивостями метаматеріалу використовуючи МРЕ, який змінює свою жорсткість в залежності від прикладеного магнітного поля. Тому його було обрано в якості основи для досліджуваної моделі АММ.



## РОЗДІЛ 2 ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ДОСЛІДЖЕННЯ

### 2.1 Фізичні принципи формування забороненої зони та ефекти нелокальних взаємодій

У цьому розділі проаналізовано фізичні принципи керування структурою сформованих заборонених зон зовнішнім магнітним полем на основі запропонованої пружино-масової моделі. Елементарні комірки з кубічною симетрією внутрішньої структури (один з варіантів такої комірки показано на Рисунку 1(a)) складаються з багаточастинкового ядра (червоні сфери) та багаточастинкової оболонки, що оточує ядро (сині сфери). Вони безпосередньо взаємодіють з елементарними комірками одна одної, утворюючи кубічну тривимірну решітку акустичного метаматеріалу. Один з можливих перерізів сформованого таким чином середовища показано на Рисунку 1(b). Кожна з частинок (червона/синя сфера) взаємодіє з 26 найближчими частинками через пружини, що їх з'єднують. Жорсткість пружин,  $\kappa$ , всередині комірок (позначені оливковою на Рисунку 1(b)) не залежить від індукції зовнішнього магнітного поля. Жорсткість пружин, що з'єднують комірки,  $\chi$ , і жорсткість пружин,  $\eta$ , між частинками однієї оболонки (сині тонка і товста лінії на Рисунку 1(б), відповідно) залежать від магнітного поля і в більшості випадків вважаються рівними ( $\eta = \chi$ ). Але іноді, щоб продемонструвати взаємозв'язок між різними фізичними факторами, які визначають особливості частотних характеристик акустичних хвиль, розглядаються процеси, в яких ці параметри різні, тобто  $\eta \neq \chi$ .

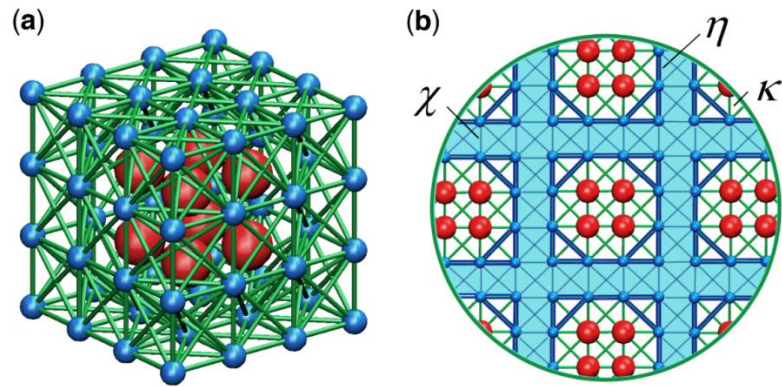


Рисунок 1 – Морфологія акустичного метаматеріалу як пружино-масової моделі. (а) – Типова структура елементарної комірки. Червоні сфери відображають ядро, сині – оболонку. (b) – відображає переріз акустичного середовища площиною, що проходить через ядро паралельно грані елементарної комірки

Основні фізичні принципи активного керування шириною забороненої зони в реальному часі можуть бути найбільш наочно продемонстровані за допомогою дискретної моделі АММ. Саме з цієї причини в нашому дослідженні було обрано структурну форму, показану на Рисунку 1, що складається з багаточастинкових ядра та оболонки.

Для початкового якісного аналізу розглянемо формування забороненої зони в одновимірному ланцюжку простих (одиначних) вібраторів (Рисунок 2А(а)). Очевидно, що за відсутності зовнішнього пружного середовища (зовнішніх пружин жорсткості  $\chi$ ) вільний вібратор коливається з частотою  $\omega_f^2 = 2\kappa/M^*$ , де  $M^*$  - приведена маса (з задачі двох тіл), яка визначається як  $M^* = Mt/(M + t)$ , де  $M$  і  $t$  - маси оболонки і ядра відповідно. В акустичному ланцюжку (Рисунок 2А(а)) кожен вібратор зазнає зовнішніх збурень з боку навколишнього пружного середовища. При поширенні акустичної хвилі з довжиною хвилі  $\lambda$  в ланцюжку на оболонку вібратора діють

пружини з ефективною жорсткістю  $\chi^*(\lambda) \neq \chi$ , оскільки ця ефективна жорсткість залежить від відносних переміщень сусідніх оболонок, тобто від довжини хвилі  $\lambda$ . Необхідність утворення забороненої зони в ланцюжку, що розглядається, легко впливає з рівнянь руху для ядра і оболонки:

$$M\ddot{x}_e = \kappa\delta x_i - \chi^*x_e \text{ та } m\ddot{x}_i = -\kappa\delta x_i \quad (2.1)$$

де  $x_i$  і  $x_e$  - переміщення ядра і оболонки відповідно, а  $\delta x_i = x_i - x_e$  - зміщення ядра відносно оболонки. Для гармонічних синфазних розв'язків  $x_e = x_{e0}e^{i\omega t}$ ,  $x_i = x_{i0}e^{i\omega t}$ , отримуємо два вирази для  $\delta x_{i0}$ :

$$\delta x_{i0} = \frac{\omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2} x_{e0} \text{ та } \delta x_{i0} = \frac{\chi^*(\lambda)}{M} \frac{1}{\omega_f^2 - \omega^2} x_{e0}, \quad (2.2)$$

де  $\omega_0^2 = 2\kappa/m$  ( $\omega_0^2 < \omega_f^2$ ).

Вимога однакового знаку для коефіцієнтів  $x_{e0}$  у правій частині рівнянь (2.2) не дозволяє поширюватися хвилям з частотами в інтервалі, вираженому нерівністю співвідношення (2.3).

$$\omega_0^2 < \omega^2 < \omega_f^2. \quad (2.3)$$

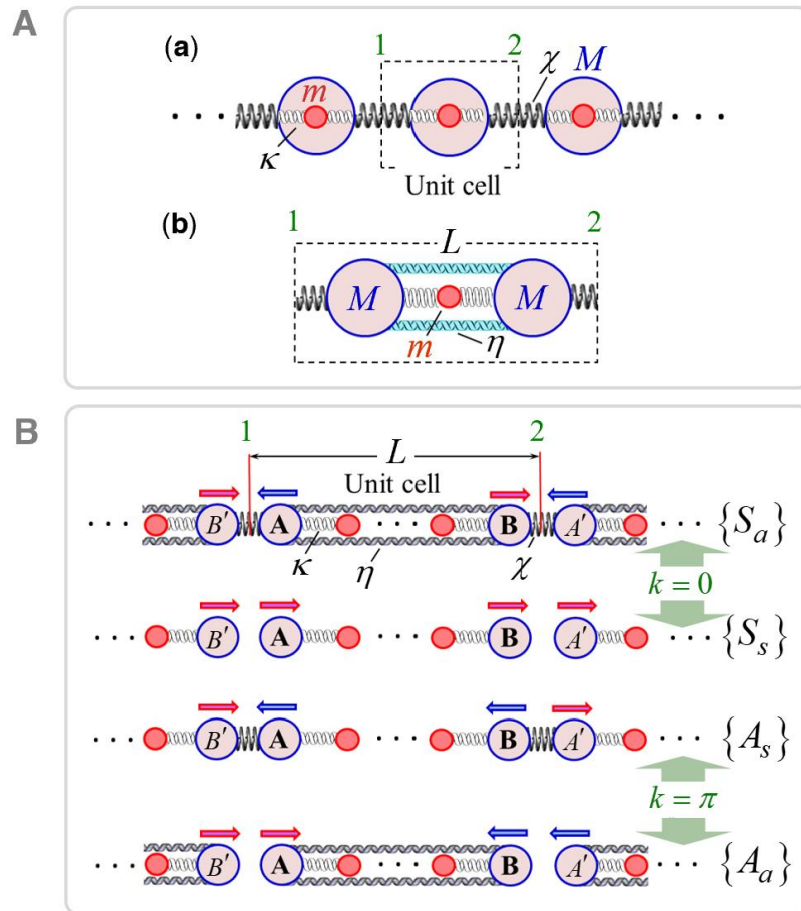


Рисунок 2, аркуш 1 – Акустичні хвилі в одновимірних пружних ланцюжках. (А) – Частиною (а) показано структуру ланцюжка з простими резонаторами типу "маса в масі" у його вузлах, а частиною (б) - елементарну комірку ланцюжка у випадку, коли елементи складеної оболонки резонатора з'єднані нелокальною взаємодією. (В) – Класифікація режимів коливань елементарних комірок в центрі зони Бріллюена та на її межі відповідно до різних типів симетрії. Пружини, які не деформуються при збудженні певного типу коливань, не показані на відповідному графічному зображенні картини коливань цього типу

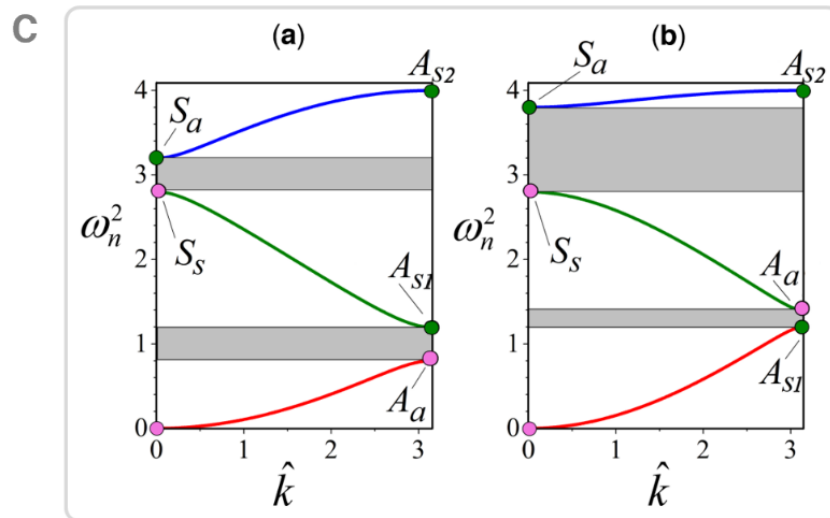


Рисунок 2, аркуш 2 – (С) – Частотні гілки коливань,  $\{\omega_n^2(\hat{k})\}$ , в одновимірному ланцюжку з елементарними комірками, структура якого показана на Рисунку 2А(б);  $m = 1$ ,  $M = 1.25$ ,  $\chi = 1.5$  ( $\Omega^2 = \frac{\chi}{M} = 1.2$ ).

(а)  $\eta = 0$ , та (б)  $\eta = 0.15$  ( $\Omega_{nl}^2 = \frac{\eta}{M} = 0.12$ )

Нижня і верхня гілки дозволених частот,  $\omega_{1,2}^2 = \omega_{1,2}^2(\lambda)$ , визначаються дисперсійним рівнянням:

$$\frac{(\omega_f^2 - \omega^2)\omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2} = \frac{\chi^*(\lambda)}{M}. \quad (2.4)$$

Отриманий результат показує, що, змінюючи жорсткість зовнішніх пружин у будь-який спосіб (у тому числі за допомогою індукції магнітного поля), неможливо змінити характеристики сформованої забороненої зони. В той же час, технічно складно впливати магнітним полем на пружні характеристики к внутрішньої структури вібраторів, хоча така можливість, на наш погляд, була реалізована в роботі [43]. У цій роботі конструкція елементарних комірок імітує конструкцію резонатора типу "маса в масі", для

якого верхня межа забороненої зони  $\omega_f^2 = 2\kappa(B)/M^*$  зростає швидше, ніж її нижня межа  $\omega_0^2 = 2\kappa(B)/m$ , причому обидві змінюються лінійно зі збільшенням жорсткості  $\kappa(B)$ . Більш реалістичним варіантом формування налаштованих заборонених зон є зміна пружних властивостей оболонок, які не є жорсткими і самі є багаточастинковими вібраторами.

У найпростішому випадку таку оболонку можна ідеалізувати як таку, що складається з двох частин із залученням нелокальної взаємодії між ними вздовж цілісного ланцюжка, як показано на Рисунках 2А(б) і 2А(б) (оболонка з двох частин А і В оточує багаточастинкове ядро в довільному випадку). Надалі ми обговоримо ті властивості таких одновимірних ланцюжків, які є важливими для аналізу подібних, але складніших систем.

Множина частотних гілок  $\omega_n^2 = \omega_n^2(\hat{k})$  ( $\hat{k}$  - безрозмірний хвильовий вектор  $\hat{k} = 2\pi L/\lambda$ , де  $L$  - довжина елементарної комірки) починається у множині точок  $\{\omega_n^2(\hat{k} = 0)\}$  на осі частот при  $\hat{k} = 0$  і закінчується у відповідних точках множини  $\{\omega_n^2(\hat{k} = \pi)\}$  (на границі зони Бріллюена), як показано на Рисунок 2(С) та Рисунок 3. Ці точки по-різному реагують на зміну жорсткості зовнішніх пружин  $\chi$  і нелокальних зв'язків  $\eta$ , індукованих магнітним полем. У цьому легко переконатися, проаналізувавши морфологію різних типів можливих режимів коливань у центрі зони Бріллюена та на її межі (див. Рисунок 2(Б)). Видно, що набір симетричних відносно центру комірки мод  $\{S_s\}$ , взагалі не реагує на зміну значень  $\chi$  і  $\eta$ , оскільки ці пружини не деформуються на збуджуючих хвилях певного типу. Такі режими є в певному сенсі "замороженими", тоді як "рухома" множина  $\{S_a\}$ , навпаки, реагує на зміну кожної з жорсткостей  $\chi$  і  $\eta$ . На межі зони Бріллюена множини  $\{A_s\}$  і  $\{A_a\}$  реагують лише на зміну жорсткості  $\chi$  у першому випадку і жорсткості  $\eta$  у другому. Зауважимо, що множини частот  $\{S_s\}$  і  $\{A_a\}$  являють собою власні

частоти ізольованої елементарної комірки, тобто без урахування впливу на неї зовнішніх пружин. З іншого боку, множини частот  $\{S_a\}$  і  $\{A_s\}$  відповідають власним частотам "відкритої" примітивної комірки з фіксованими межами (див. точки 1 і 2 на Рисунку 2(B)). На оболонку такої комірки зліва і справа діють зовнішні пружини з ефективною жорсткістю  $2\chi$ .

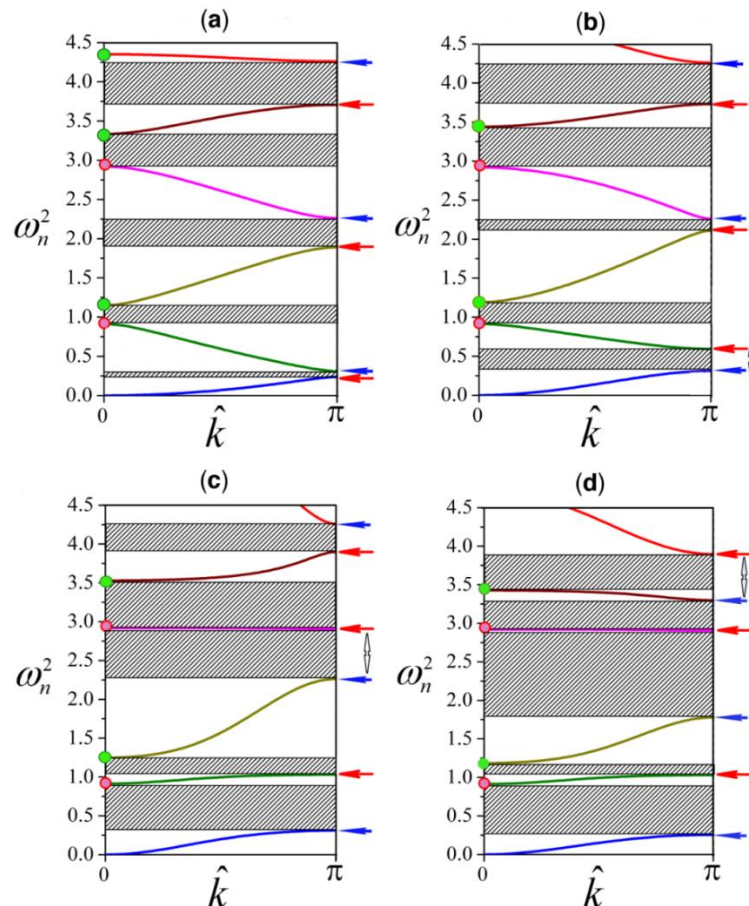


Рисунок 3 – Динаміка наборів характерних точок і заборонених зон при зміні жорсткості середовища,  $\chi$ , і нелокальної взаємодії,  $\eta$ , у ланцюжку, представленому на Рисунку 2В. Кількість червоних частинок в ядрі дорівнює 4, а маса кожної з них  $m = 1$ . Маса кожної з частинок оболонки становить  $M = 1.2$ , а жорсткість внутрішніх пружин -  $\kappa = 1$ . Червоними кругами позначено заморожені частоти з набору мод  $\{S_s\}$ , зеленими кругами - рухливі

моди з набору  $\{S_a\}$ , горизонтальними червоними стрілками - чутливі до зміни  $\eta$  моди з набору  $\{A_a\}$ , синіми стрілками - чутливі до зміни  $\chi$  моди з набору  $\{A_s\}$ . Вертикальними стрілками позначено перемикання між модами різних наборів. (a) - частотні гілки  $\omega_n^2(\hat{k})$  при  $\chi = 1.8$  ( $\Omega^2 = \frac{\chi}{M} = 1.5$ ),  $\Omega_{nl}^2 = \frac{\eta}{M} = 0$ ; (b) –  $\Omega^2 = 1.5$ ,  $\Omega_{nl}^2 = 0.15$ ; (c) –  $\Omega^2 = 1.5$ ,  $\Omega_{nl}^2 = 0.5$ ; (d) - параметр  $\Omega_{nl}^2$  залишився таким самим, як і для (c),  $\Omega_{nl}^2 = 0.5$ , але значення  $\Omega^2$  було зменшено:  $\Omega^2 = 0.75$

Прояв у межах множин  $\{\omega_n^2(\hat{k} = 0)\}$  і  $\{\omega_n^2(\hat{k} = \pi)\}$  різної рухливості характеристичних частот при зміні параметрів пружності зовнішнього середовища і оболонок видно з даних, наведених на Рисунку 2(В) і Рисунку 3.

Слід зазначити, що при  $M \neq m$ , заборонена зона може утворюватися і за відсутності нелокальної взаємодії (Рисунок 2(С)-(а)), тоді як з урахуванням нелокальної взаємодії вона утворюється навіть за умови рівності мас, тобто при  $M = m$ . Однак у загальному випадку результатом врахування нелокальних взаємодій може бути зменшення кількості заборонених зон. Наприклад, якщо для даних, представлених на Рисунок 2(С)-(а), збільшити  $\eta$  до значення  $\eta = 0.095$ , то відгукнуться/зростуть тільки частоти з множин  $A_a$  і  $S_a$ , причому частота  $A_a$  співпаде з частотою  $A_{s1}$  і нижня заборонена зона зникне (перетвориться на смугу пропускання). При подальшому збільшенні параметра  $\eta$  відбувається перемикання між двома низькочастотними гілками на межі зони Бріллюена (Рисунок 2(с)-(b)) з утворенням нової забороненої зони над модою  $A_{s1}$ , яка в цьому випадку є стаціонарною. Збільшення кількості частинок в ядрах збільшує кількість частотних гілок  $\omega_n^2(\hat{k})$ , кількість характерних точок і, відповідно, кількість заборонених зон (див. Рисунок 3). Переміщення характерних точок вздовж числової осі при зміні пружності



оболонок елементарних комірок та їх оточення супроводжується кількома зсувами між частотними поверхнями як на межі зони Бріллюена (див. Рисунок 3), так і в її центрі.

Для розглянутих нижче 3D метаматеріалів, загальна структура яких показана на Рисунок 1, набір мод коливань при  $\hat{\mathbf{k}} = \mathbf{0}$  і особливих точок на межі зони Бріллюена (див. Рисунок 4) також мають різну рухливість при зміні параметрів жорсткості  $\chi(B)$  і  $\eta(B)$  ( $B$  - норма індукції зовнішнього магнітного поля), що спричиняє неоднорідний рух хвильових поверхонь у 4D-просторі  $\omega^2 = \omega_n^2(\hat{\mathbf{k}})$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots, 3N$ , де  $N$  - кількість частинок маси (матеріальних точок) в елементарній комірці. Таким чином, саме ця неоднорідність у рухливості хвильових поверхонь є основним чинником керованого ефективного перемішування/перемикання цих поверхонь і відповідної зміни положень і ширини заборонених зон аж до їх повного зникнення. Причому в анізотропних структурах зникнення заборонених зон для хвиль поперек осі анізотропії може супроводжуватися їх утворенням для хвиль, що поширюються вздовж цієї осі.

## 2.2 Числова модель

У загальному випадку ядро елементарної комірки (див. Рисунок 1) містить  $N_{core}$  частинок:  $N_{core} = n^3$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Ядро оточене оболонкою, яка складається з  $N_{shell} = (n + 2)^3 - n^3$  частинок. Найкоротшу відстань між сусідніми частинками нормалізовано до 1. Жорсткість горизонтальних/вертикальних (тобто найкоротших) пружин, що з'єднують частинки ядра та оболонки, дорівнює  $\kappa$ . Жорсткість горизонтальних/вертикальних пружин, що діють між частинками оболонки всередині комірки, дорівнює  $\eta$ . Аналогічне значення  $\chi$  для пружин, що з'єднують сусідні комірки. Припускається, що лінійна пружина досить точно вловлює ефекти взаємодії і її потенціал має логарифмічну залежність від початкової довжини. Таким чином, чисельна модель враховує обернено пропорційну залежність жорсткості пружин від їхньої довжини. Наприклад, на частинку ядра діють 6 пружин з жорсткістю  $\kappa$ , 12 пружин з жорсткістю  $\kappa/\sqrt{2}$ , і 8 пружин з жорсткістю  $\kappa/\sqrt{3}$ . Отже, загальний вигляд дисперсійного рівняння має вигляд:

$$A\mathbf{u} = \omega^2\mathbf{u}, \quad (2.5)$$

де  $\mathbf{u}$  позначає вектор зміщення, тобто транспонований вектор-стовпець  $\mathbf{u}^T = (\mathbf{x}^T, \mathbf{y}^T, \mathbf{z}^T)$ , де,  $\mathbf{x}^T = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_N)$ ,  $\mathbf{y}^T = (y_1, y_2, y_3, \dots, y_N)$  і  $\mathbf{z}^T = (z_1, z_2, z_3, \dots, z_N)$ , де  $N$  - загальна кількість частинок в комірці як:

$$N = (N_{core} + N_{shell}). \quad (2.6)$$

Множини  $\{x_i\}, \{y_i\}, \{z_i\}$  представляють собою переміщення основних частинок (частинок, що лежать всередині однієї елементарної комірки). Матриця  $A$  є квадратною матрицею розмірності  $3N$  і складається з коефіцієнтів рівнянь руху цих частинок. При побудові цих рівнянь для частинок оболонки необхідно враховувати переміщення частинок за межами основної комірки. Ці переміщення не є незалежними, але пов'язані лінійною залежністю з переміщеннями частинок в основній комірці. Кожна з "зовнішніх"/еквівалентних частинок має первинну частинку всередині оболонки основної комірки. Вектор, що з'єднує первинну частинку з еквівалентною, повинен дорівнювати одному з векторів трансляції решітки форми:

$$\mathbf{a} = l_x \cdot \mathbf{a}_x + l_y \cdot \mathbf{a}_y + l_z \cdot \mathbf{a}_z, \quad (2.7)$$

де  $|\mathbf{a}_x| = |\mathbf{a}_y| = |\mathbf{a}_z| = \mathcal{L} = (n + 2)$ ,  $l_x, l_y, l_z$  - цілі числа, які можуть набувати значень  $-1, 0, +1$ , а  $\mathcal{L}$  - стала ґратки побудованої кубічної структури. Кількість еквівалентних частинок,  $(n + 4)^3 - (n + 2)^3$ , більша за кількість частинок в оболонці,  $N_{shell}$ . В результаті одній первинній частинці можуть відповідати одна, три і навіть сім еквівалентних частинок.

Коли хвиля поширюється в метаматеріалі, зміщення,  $\mathbf{u}_j$ , еквівалентної частинки з індексом  $j$  та зміщення  $\mathbf{u}_i$  основних частинок з індексом  $i$  пов'язані між собою теоремою Блоха (також відомою як принцип Флоке-Блоха) як:

$$\mathbf{u}_j = \mathbf{u}_i \cdot \exp(i\mathbf{k}\mathbf{a}_{ij}), \quad (2.8)$$

де  $\mathbf{k}$  ( $k = 2\pi/\lambda$ ) - хвильовий вектор акустичної хвилі з довжиною хвилі  $\lambda$ ,  $\mathbf{a}_{ij}$  - вектор, який з'єднує ці частинки (див. рівняння (2.7)). Надалі оперуватимемо безрозмірним хвильовим вектором  $\hat{k} = 2\pi\mathcal{L}/\lambda$ .

Для малоамплітудних гармонічних коливань частинки  $i$ , тобто її малих коливань навколо положення рівноваги,  $\mathbf{u}_i = \mathbf{u}_{i0}\exp(i\omega t)$ , рівняння руху,  $m_i\ddot{\mathbf{u}}_i = \mathbf{f}_i$  ( $i = 1, 2, 3, \dots, N$ ) мають такий вигляд:

$$-\mathbf{u}_{i0}\omega^2 = \sum_{j=1}^{26} \mathbf{e}_j \left( \frac{\kappa_{ij}}{m_i} \right) (\mathbf{e}_j \cdot (\mathbf{u}_{j0} - \mathbf{u}_{i0})). \quad (2.9)$$

Додавання в рівнянні (3.5) здійснюється у 26 напрямках від центральної,  $i$ -ї, частинки до частинок ґратки, що її оточують, а вектори  $\{\mathbf{e}_j\}$  є одиничними векторами, що визначаються як  $\mathbf{e}_j = \mathbf{a}_{ij}/a_{ij}$ , орієнтованими вздовж цих напрямків,  $\kappa_{ij}$  - коефіцієнти жорсткості відповідних пружин,  $\mathbf{u}_{i0,j0}$  - амплітуди коливань частинок, які в загальному випадку є комплексними,  $m_i$  - маса центральної частинки. Залежність матриці  $\mathbf{A}$ , тобто її елементів (утворених з коефіцієнтів  $N$  рівнянь виду (2.9)) від безрозмірного хвильового вектора  $\hat{k} = 2\pi\mathcal{L}/\lambda$  в (2.8), є наслідком застосування теореми Блоха до відхилень у допоміжних вузлах ґратки.

Оскільки розмір матриці  $\mathbf{A}$  дорівнює  $3N \times 3N$ , то розв'язок рівняння (2.5) тягне за собою набір дисперсійних поверхонь  $\omega^2 = \omega_m^2(\hat{\mathbf{k}})$ ,  $m = 1, 2, 3, \dots, 3N$  у 4-вимірному просторі. За допомогою графічного представлення та фізичного аналізу цієї множини розраховано перерізи цих поверхонь вздовж траєкторії в першій зоні Бріллюена (див. Рисунок 4), враховуючи кубічну симетрію системи, що розглядається.

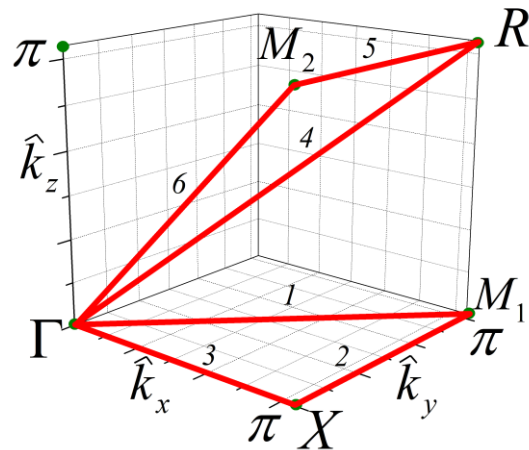


Рисунок 4 – Траєкторія в  $\hat{\mathbf{k}}$  –просторі для обчислень частотних гілок  $\omega^2 = \omega_m^2(\hat{\mathbf{k}})$ , для вивчення їх морфології всередині незвідної зони Брілюєна, тобто в області  $0 \leq \hat{k}_{x,y,z} \leq \pi$

Інтелектуальна обчислювальна процедура, яка формує елементи матриці  $\mathbf{A}$  на основі рівнянь (3.5), вбудована в оптимізований комп'ютерний код, який швидко обчислює власні частоти матриці  $\mathbf{A}$  в 1200 точках, рівномірно розташованих на  $\hat{\mathbf{k}}$ -траєкторії, показаній на Рисунку 4.

Щодо параметрів системи, яка розглядається, то за одиницю мас візьмемо масу червоної частинки ядра  $m$ , а за одиницю жорсткостей - жорсткість  $\kappa$  (див. Рисунок 1). Таким чином, незалежними параметрами є маса синіх частинок-оболонки  $m_{shell}$ , жорсткість  $\eta$  і жорсткість  $\chi$  (див. опис Рисунок 1 вище). Рівняння (2.5) ділиться на величину  $\kappa/m$ , що зводить його до безрозмірного вигляду.

## Висновки до розділу 2

1. Було описано морфологію нескінченного тривимірного метаматеріалу що розглядається в даному дослідженні, як мас-пружинна модель, яка складається з елементарних комірок з різним числом мас-частинок у ядрі та оболонці. Таку, дискретну, модель обрано внаслідок того, що незважаючи на її простоту, вона дає необхідне уявлення про розповсюдження коливань в такому метаматеріалі.

Проаналізувавши рівняння коливань нескінченного одновимірного ланцюга мультівібраторів з гнучкою оболонкою було визначено, що, в силу виразів (2.2) для зміщень мас ланцюжка, коливання не можуть відбуватися в діапазоні  $\omega_0^2 < \omega^2 < \omega_f^2$ , де  $\omega_0^2$  – частота елементарної комірки з нерухомою оболонкою, а  $\omega_f^2$  – частота вільної, не зв'язаної зовнішніми пружинами, комірки. Інакше кажучи, там формуються заборонені зони. Проведено моделювання поширення коливань в одновимірному ланцюгу мультівібраторів, одержано графіки дисперсійних поверхонь для одновимірного випадку, з яких можна бачити, що межами заборонених зон є особливі точки зони Бріллюена при  $\hat{k} = 0$  та  $\hat{k} = \pi$ . Множини мод коливань в цих точках  $\{A_a\}, \{A_s\}, \{S_a\}, \{S_s\}$  по різному реагують на зміну параметрів жорсткості  $\chi$  і  $\eta$ , що і спричинює формування заборонених зон.

2. Модель, яка використовується для обчислення дисперсійних поверхонь і векторів зміщень частинок елементарної комірки метаматеріалу, являє собою матрицю  $3N \times 3N$  з коефіцієнтів рівнянь руху (2.9) частинок елементарної комірки та її сусідів.. В моделі використано безрозмірний хвильовий вектор  $\hat{k} = 2\pi\mathcal{L}/\lambda$ , який змінюється вздовж траєкторії, показаній на Рисунку 4, параметри системи задаються як відношення параметрів частинок

оболонки до частинок ядер. Тобто, параметри системи, умовно кажучи, також не мають розмірності.

### РОЗДІЛ 3 ВЗАЄМОДІЯ ДИСПЕРСІЙНИХ ПОВЕРХОНЬ У ДИНАМІЦІ ТРИВИМІРНОЇ ЗАБОРОНЕНОЇ ЗОНИ

У цьому розділі ми розглянемо формування та динаміку забороненої зони в системах з різною кількістю частинок в ядрах, включаючи випадки, коли ядра є анізотропними (витягнутими вздовж однієї з головних осей). При виборі параметрів оболонок і середовища слід враховувати такі фізичні чинники. Перший з них пов'язаний з тим, що формування забороненої зони в діапазоні акустичних коливань має багато спільного з розщепленням енергетичних рівнів простого вібратора "маса в масі", хоча в розглянутих випадках оболонки є гнучкими. На низьких частотах, так чи інакше, коливання багаточастинкового ядра можна з досить добрим наближенням розглядати як рух єдиного цілого для оцінки параметрів забороненої зони, що утворюється. Згідно з рівнянням (2.3), ширина забороненої зони,  $\Delta\omega^2 = \omega_{up}^2 - \omega_{down}^2$  (де  $\omega_{up}^2$  і  $\omega_{down}^2$  - верхній і нижній краї забороненої зони відповідно) має порядок різниці між частотами ізольованого вібратора,  $\omega_{up}^2 \approx \omega_f^2$ , і частотою вібратора з нерухомою оболонкою,  $\omega_{down}^2 \approx \omega_0^2$ . Таким чином, до певної міри,

$$\Delta\omega^2 \approx \omega_f^2 - \omega_0^2. \quad (3.1)$$

Отже, практичний висновок полягає в тому, що різниця в масах оболонки,  $M_{shell}$ , і ядра,  $M_{core}$ , не повинна бути значною для створення помітної забороненої зони:



$$\Delta\omega^2/\omega_f^2 = (1 + M_{shell}/M_{core})^{-1}. \quad (3.2)$$

Другим з необхідних фізичних факторів у нашій моделі (Рисунок 1) є достатньо сильний зв'язок між коливальними модами елементарної комірки і коливальними модами "скелета" акустичної системи (нагадаємо, що так званий "скелет" - це залишкова порожнисте середовище, що утворилося після витягання ядер). Цей зв'язок повинен забезпечити появу розриву в початково неперервному спектрі всієї системи при збільшенні величини індукції магнітного поля, щоб забезпечити достатньо сильне розщеплення хвильових поверхонь скелета,  $\omega_m^2(\hat{\mathbf{k}})$ , в точках його перетину з лінійчастим спектром елементарної комірки. Ці умови виконуються в розглянутих нижче системах. Зокрема, свобода у виборі значень пружних параметрів  $\chi$  і  $\eta$  забезпечує ширший частотний діапазон для скелета, ніж для мод ізольованої комірки (див., наприклад, Рисунок 5(a)).

### 3.1. Динаміка дисперсійних поверхонь в однорезонаторних метаматеріалах

Очевидно, що у випадку багаточастинкових оболонок елементарних комірок оцінка ширини забороненої зони з співвідношення (3.1) буде найточнішою при великих значеннях жорсткостей  $\eta$  і  $\chi$ . Залежність верхньої і нижньої меж забороненої зони від величини індукції магнітного поля,  $\omega_{up}^2(B)$  і  $\omega_{down}^2(B)$  насичується, і вони прямують до своїх граничних значень, оскільки скелетна система все більше проявляє себе як єдине ціле. Припускається, що саме цей режим насичення відповідає експериментам, проведеним дослідниками [37] (масивні мідні диски, оточені магнітоеластомерними оболонками). У цих експериментах заборонена зона, яка вже існує при  $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ , лише трохи зміщується і розширюється зі збільшенням напруженості зовнішнього магнітного поля. Це означає, що в початковому стані жорсткість скелета була достатньо високою для формування забороненої зони вищезгаданим "класичним" способом.

У наступній частині ми покажемо, як за рахунок зменшення початкової жорсткості оболонок можна досягти більш помітних варіацій параметрів забороненої зони (ширини і положення в частотному спектрі), і якісно проаналізуємо динаміку ширини забороненої зони на різних етапах її еволюції.

Дані на Рисунку 5 дають уявлення про процеси, які оборотно відбуваються в акустичній системі, як від початкового формування забороненої зони до її найбільш розвиненої фази/ширини при збільшенні жорсткості однорідного середовища, що оточує осередки ( $\eta = \chi$ ), так і в зворотній послідовності.

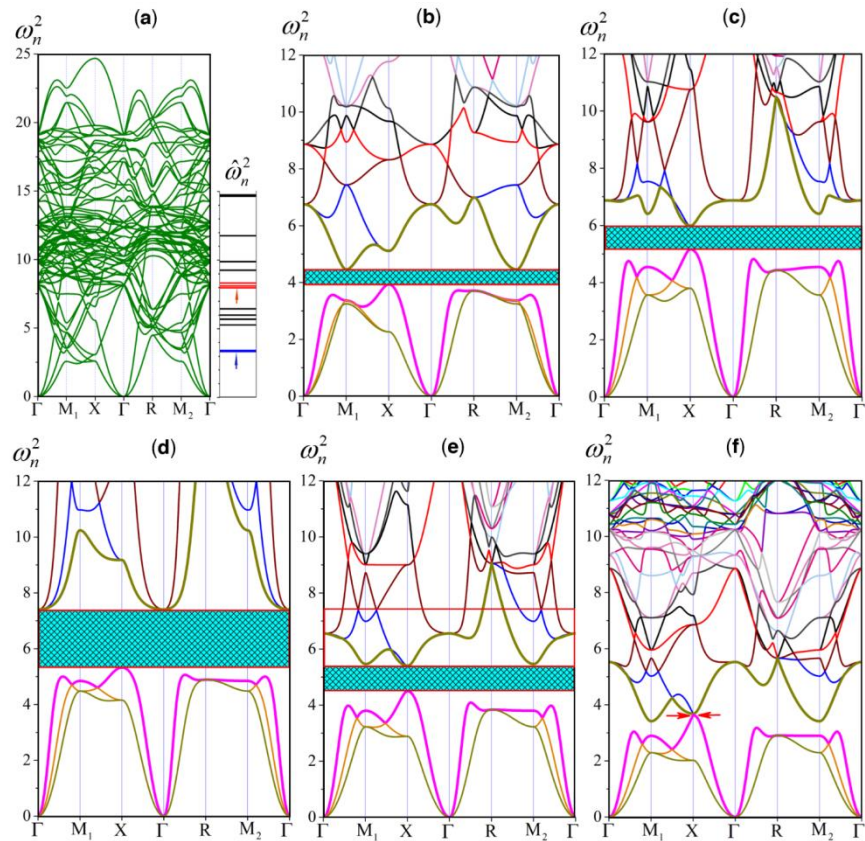


Рисунок 5 – Частотні характеристики 3D метаматеріалу з одночастинковим ядром в елементарній комірці. (а) - Залежності  $\omega_n^2(\mathbf{k})$  для скелета метаматеріалу вздовж траєкторії, показаної на Рисунку 4(а),  $\eta = \chi = 0.25$ ,  $m_{shell} = 0.125$ . Праворуч - спектр власних частот,  $\hat{\omega}_n^2$ , ізольованої комірки ( $\eta = 0.75$ ). (b) – залежності  $\omega_n^2(\mathbf{k})$  при  $\chi = 0.25$ ,  $\eta = 0.75$  для всього метаматеріалу; (c) -  $\chi=0.75$ ,  $\eta=0.25$ . (d), (e) та (f) демонструють динаміку ширини забороненої зони з поступовим зменшенням жорсткостей:  $\eta= \chi=0.75$ , 0.40 та 0.25 відповідно

Нижче зазначимо, що результат конфігурації на Рисунку 5(d) добре узгоджується з якісною оцінкою, наведеною вище. При нерухомій оболонці одночастинкове ядро ( $M_{core} = m = 1$ ) перебуває під дією 26 пружин з ефективною ізотропною жорсткістю  $\mathcal{K}^*$ . Згідно з рівнянням (2.9):

$$\mathcal{K}^* = 2 + 8/(2\sqrt{2}) + 8/(3\sqrt{3}) \approx 6.37, \quad \omega_0^2 = \frac{\mathcal{K}^*}{M_{core}} \approx 6.37. \quad (3.3)$$

Таким чином, для заданих мас ядра,  $M_{core} = 1$ , і оболонки,  $M_{shell} = 3.25$  (відповідна приведена маса  $M^* \approx 0.765$ ), верхній край забороненої зони,  $\omega_{up}^2$ , має бути порядку

$$\omega_f^2 = \mathcal{K}^*/M^* \approx 8.3. \quad (3.4)$$

і його ширина  $\Delta\omega^2 \approx 2$  (див. рівняння (3.1)), що добре узгоджується з даними, наведеними на Рисунок 5(d). Однак краї забороненої зони,  $\omega_{down}^2$  і  $\omega_{up}^2$ , які видно на Рисунок 5(d), помітно зсунуті вниз приблизно на половину ширини,  $\Delta\omega^2$  ( $\Delta\omega^2/2 \approx 1$ ) відносно частот  $\omega_0^2$  і  $\omega_f^2$ , відповідно. Зі збільшенням параметрів пружності,  $\eta$  і  $\chi$ , ширина забороненої зони зміщується вгору без помітної зміни її ширини, а частоти  $\omega_{down}^2$  і  $\omega_{up}^2$  наближаються до своїх граничних значень  $\omega_0^2$  і  $\omega_f^2$  ( $\omega_{down}^2 \approx 5.97$  та  $\omega_{up}^2 \approx 8.01$  при  $\eta = \chi = 2$ ).

Щоб встановити фізичні чинники такої динаміки, проаналізуємо типи мод, які відповідають за подальшу динаміку ширини забороненої зони (Рисунок 5(e) і (f)). Природно, що просторова структура мод 3D-коливань, які збуджуються в АММ, дуже різноманітна. Але в особливих точках (див. Рисунок 4) зони Бріллюена, подібно до розглянутого вище одновимірного випадку, всі коливальні моди можна розділити на дві групи - симетричні (в еквівалентних точках ґратки метаматеріалу зміщення рівні і синфазні) і антисиметричні (в еквівалентних точках ґратки метаматеріалу зміщення протифазні). Тип симетрії визначається координатами  $\hat{k}_x, \hat{k}_y, \hat{k}_z$  ( $\hat{k}_{x,y,z} = 0$ ,

$\pm\pi$ ) особливої точки і відповідним знаком коефіцієнта Блоха  $\nu = \exp[i(\hat{k}_x + \hat{k}_y + \hat{k}_z)] = \pm 1$ . Ступінь чутливості таких мод до зміни пружності середовища і оболонки досить добре відповідає результатам розглянутого вище одновимірного випадку (Рисунок 2Б), що легко побачити з даних, наведених на Рисунок 5.

Нижній край забороненої зони,  $\omega_{down}^2$ , у всіх конфігураціях, показаних на Рисунок 5, визначається несиметричною ( $\nu = -1$ ) модою коливань у точці X зони Бріллюена,  $\omega_{(X)down}^2$ , яка відноситься до однієї з множин мод  $\{A_s\}$  або  $\{A_a\}$ . Нагадаємо, що моди множин  $\{A_s\}$  або  $\{A_a\}$  реагують лише на зміну або жорсткості зовнішнього середовища, або на зміну жорсткості оболонки (див. Рисунок 2В) відповідно. Незавжди встановити, що досліджувана мода належить до множини  $\{A_s\}$ . Дійсно, частота  $\omega_{(X)down}^2$  не реагує на зміну жорсткості  $\eta$  внутрішніх пружин оболонки - значення цієї частоти на Рисунок 5(г) і 5(в) практично не змінюються, хоча значення  $\eta$  в останньому випадку втричі менше. Крім того, значення  $\omega_{(X)down}^2$  на Рисунок 5(е) і 5(б), де значення жорсткості  $\eta$  також відрізняються втричі для фіксованих значень  $\chi$ , візуально однакові. В той же час частота  $\omega_{(X)down}^2$  і, як наслідок, пов'язана з нею мода, чутливі до зміни пружності середовища  $\chi$ . У цьому легко переконатися, порівнявши значення  $\omega_{(X)down}^2$  в парі даних на Рисунок 5(б) і 5(д) та парі даних на Рисунок 5(с) і 5(е) при постійних значеннях  $\eta$  в кожному з варіантів. Цей факт можна легко пояснити якісно. У точці X ( $\hat{k}_x = \pi$  і  $\hat{k}_y = \hat{k}_z = 0$ ), ядра сусідніх комірок коливаються в протифазі ( $\nu = -1$ ) одне відносно одного вздовж осі  $x$ , стискаючи/розтягуючи простір між відповідними деформуєчими оболонками. Зростання жорсткості цього простору,  $\chi$ , робить стінки оболонок нерухомими, і  $\omega_{(X)down}^2$  наближається до  $\omega_0^2$ .

Частоти  $\omega_{(M_{1,2})acoust}^2$  в точках  $M_1$  і  $M_2$  ( $\nu = 1$ ) на акустичних гілках коливань зростають зі збільшенням жорсткості  $\chi$  аналогічно до  $\omega_{(X)down}^2$ . Однак у цих точках зміщення частинок є поперечними до напрямку поширення хвиль (ортогональна поляризація або поперечні хвилі). Оболонки елементарних комірок також стають нерухомими при великих значеннях жорсткості  $\chi$ , але ефект "заморожування" їхньої рухливості при зсувних деформаціях середовища між сусідніми комірками слабший, і  $\omega_{(M_{1,2})acoust}^2 < \omega_{(X)down}^2$ .

До утворення забороненої зони верхня акустична гілка коливань і нижня оптична гілка утворюють конічний перетин двох енергетичних поверхонь [49] в околі особливих точок зони Бріллюена (один з таких перетинів позначений на Рисунок 5(f) стрілками), який розщеплюється на два стани зі збільшенням жорсткості скелета акустичної системи. Після цього розщеплення верхні частоти типу  $\hat{\omega}_{(X)}^2$  і  $\hat{\omega}_{(M)}^2$  не обмежуються умовою синфазного зсуву ядра і оболонки. Частоти  $\hat{\omega}_{(X)}^2(\eta, \chi)$  і  $\hat{\omega}_{(M)}^2(\eta, \chi)$  по-різному реагують на зміну значень параметрів жорсткості  $\eta$  і  $\chi$ , але подібні в тому, що вони необмежено зростають зі збільшенням  $\eta$  і  $\chi$ , і кожна з них може визначати верхню межу сформованої забороненої зони,  $\omega_{up}^2$  (див. Рисунок 5(b) -  $\omega_{up}^2 = \hat{\omega}_{(M_1)}^2(\eta, \chi)$ ; 5(c) -  $\omega_{up}^2 = \hat{\omega}_{(X)}^2(\eta, \chi)$ ; 5(e) -  $\omega_{up}^2 \approx \hat{\omega}_{(X)}^2(\eta, \chi) \approx \hat{\omega}_{(M_1)}^2(\eta, \chi)$ ). Супутнє розширення забороненої зони відбувається досить стрибкоподібно, поки  $\omega_{up}^2$  не зрівняється з найнижчою частотою оптичних коливань,  $\omega_{(\Gamma)}^2$ . Якщо простежити розвиток забороненої зони від конфігурації, показаної на Рисунок 5(f), до конфігурації на Рисунок 5(d), то частота  $\omega_{(\Gamma)}^2(\chi, \eta)$  стає верхнім краєм забороненої зони при  $\chi = \eta = 0.55$  ( $\omega_{(\Gamma),up}^2(\chi, \eta) = 7.05$ ,  $\Delta\omega^2 = 2.08$ ).

Частоті коливань  $\omega_{(\Gamma)}^2$  відповідає режим  $S_s$ -типу, в якому коливання ядра і оболонки протифазні в кожній комірці, але ці коливання синфазні в сусідніх комірках. В одновимірному акустичному ланцюжку ця мода коливань нечутлива до змін  $\chi$  і  $\eta$ , оскільки в цьому випадку оболонка (частинки А і В на Рисунку 2В) рухається як єдине ціле. У 3D метаматеріалі з гнучкою оболонкою частота  $\omega_{(\Gamma)}^2$  все ж таки реагує на зміну жорсткості як оболонки, так і середовища, і майже однаково на неї впливає, що можна побачити, порівнюючи дані, представлені на Рисунку 5(d), з даними на Рисунку 5(b),(c). Однак, як тільки частота  $\omega_{(\Gamma)}^2$  стає верхньою межею забороненої зони,  $\omega_{(\Gamma)up}^2$  при достатньо високому значенні  $\chi$ , подальше зростання  $\omega_{(\Gamma)up}^2$  (і ширини забороненої зони,  $\Delta\omega^2$ , відповідно) стає значно менш чутливим до зміни жорсткості середовища/скелета, оскільки оболонки елементарних комірок поступово "заморожуються".

Лише при великих значеннях  $\eta$  і  $\chi$  форма оболонки стає "замороженою" (коли переміщення частинок оболонки майже однакові) і частота  $\omega_{(\Gamma)up}^2$  зростає до межі, визначеної рівнянням (3.4), тоді як частота  $\omega_{(M)}^2(\chi, \eta)$  зростає нескінченно. Якщо початкові параметри жорсткості середовища та оболонок набувають достатньо високих значень, то така повільна перехідна еволюція до стаціонарного стану можлива, як це спостерігалось в ряді досліджень [37, 47].

### 3.2. Керування комплексом заборонених зон у метаматеріалах з багаточастинковими ядрами

У розглянутих нижче випадках АММ ядро саме по собі має багато коливальних мод навіть за наявності нерухомої оболонки. Якщо оболонка пружна, то вона певною мірою імітує нелокальну взаємодію між частинками ядра, спричиняючи взаємодію між коливаннями окремих його частин. Ця взаємодія залежить від жорсткості оболонки, яка визначає довжину хвиль, що збуджуються на її поверхні, та їхню частоту. При великих значеннях  $\eta$  метаматеріал має фіксований набір заборонених зон, що не залежить від жорсткості  $\chi$  [48], оскільки елементарні комірки перетворюються на прості мультирезонатори типу "маса в масі". Помірні значення  $\eta$  забезпечують зв'язок між поверхневими хвилями сусідніх оболонок і, відповідно, вплив зовнішнього середовища на коливання осередків. Саме за таких умов можна ефективно керувати набором заборонених зон, що утворюються за рахунок зміни жорсткості зовнішнього середовища.

Дані, представлені на Рисунку 6, підтверджують наведений вище якісний аналіз загальних акустичних властивостей розглянутих метаматеріалів. При відносно низькій жорсткості зовнішніх пружин,  $\chi$ , лінійчастий частотний спектр ізольованих елементарних комірок розпадається на багато смуг пропускання, розділених забороненими зонами (Рисунок 6А). Збільшення жорсткості середовища  $\chi$  збільшує зв'язок між поверхневими модами сусідніх оболонок і коливальними модами сусідніх осередків. Відповідне розщеплення енергетичних рівнів призводить до перекриття сусідніх заборонених зон і зникнення одиночних заборонених зон (Рисунок 6В). Зауважимо, що формування країв найстабільніших нижньої і верхньої



заборонених зон цілком відповідає класичним фізичним механізмам - синфазним коливанням ядра і оболонки на нижньому краю забороненої зони та їхнім протифазним коливанням на верхньому краю забороненої зони.

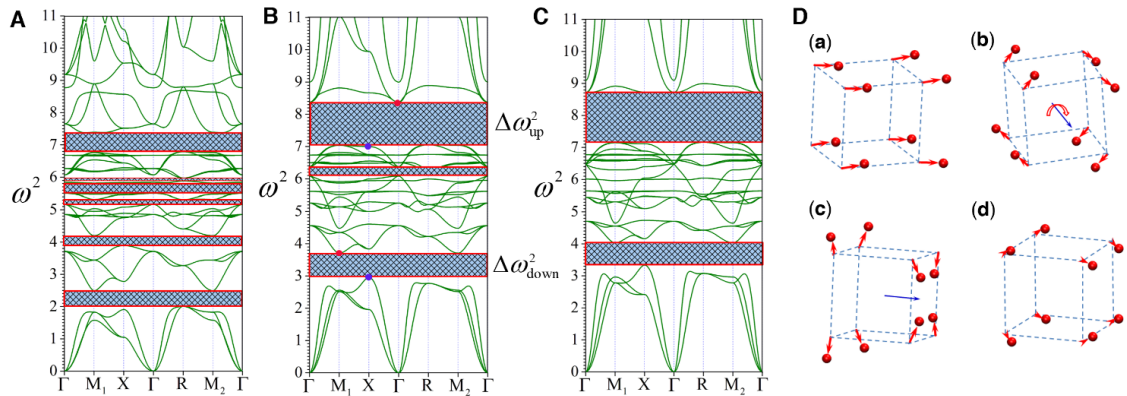


Рисунок 6 – Динаміка ширини забороненої зони при фіксованій жорсткості оболонки  $\eta = 1.5$ ,  $N_{core} = 2^3$ ,  $N_{shell} = 56$  і  $m_{shell} = 0.125$  (маса серцевини  $M_{core} = 8$  і маса оболонки  $M_{shell} = 7$ ). (A), (B) і (C) – жорсткість зовнішніх пружин  $\chi$  дорівнює 0,25, 0,75 і 1,25 відповідно. (D) Переміщення частинок ядра в різних коливальних модах в особливих точках зони Бріллюена, позначених у підрозділі B синьою та червоною крапками. Конфігурації (a) і (b) відповідають нижнім краям нижньої і верхньої заборонених зон відповідно. В обох випадках амплітуда поздовжніх зміщень частинок ядра (у конфігурації (c) вздовж синьої осі) строго однакова. Конфігурація (b) представляє обертальні коливання ядра в точці  $M_1$  - верхній край нижньої забороненої зони. Зміщення частинок ядра вздовж осі обертання дорівнюють нулю. (d) представляє зміщення частинок ядра у верхньому краю забороненої зони (точка  $\Gamma$ )

Виходячи з наведених вище уявлень, характеристичну частоту нижньої забороненої зони шириною  $\Delta\omega_{down}^2$  (див. Рисунок. 6B) можна оцінити як

частоту коливань ядра відносно нерухомої оболонки. Якщо врахувати всі зовнішні зв'язки частинок активної зони згідно з рівнянням (2.9), набори яких є еквівалентними для кожної з  $N_{core}$  ядра у випадку, що розглядається, то розрахунок сили  $F_{core}$ , що діє на мале зміщення ядра як цілого,  $\Delta_{core}$ , приводить до співвідношення:

$$F_{core} \approx -N_{core} \cdot 4.47 \cdot \Delta_{core}. \quad (3.5)$$

Таким чином, частотний діапазон нижньої забороненої зони повинен бути близьким до оцінки  $\Omega_{low}^2 = F_{core}/M_{core} \approx 4.47$  ( $M_{core} = N_{core} \cdot m = N_{core}$ ), що досить добре відповідає даним, представленим на Рисунку 6В і С. Крім того, на краях нижньої забороненої зони,  $\Delta\omega_{down}^2$ , дійсно реалізується рух сердечників як окремих об'єктів - див. Рисунок 6 D, конфігурації (a) і (b). Однак на його верхньому краю замість протифазних коливальних коливань ядра і оболонок збуджуються обертальні коливання. Особлива точка М зони Бріллюена відповідає симетричним режимам коливань,  $\nu = \exp[i(\hat{k}_x + \hat{k}_y + \hat{k}_z)] = 1$ , тобто всі ядра обертаються синфазно відносно одне одного, але в протифазі відносно обертання оточуючих їх оболонок.

Оцінку характеристичної частоти,  $\Omega_{upper}^2$ , верхньої забороненої зони шириною  $\Delta\omega_{up}^2$  дають частоти коливань однієї частинки в ядрі. Якщо сусідні частинки нерухомі, то така частота, згідно з виразом (2.3), становить приблизно 6.4. Враховуючи протифазне зміщення частинок в ядрах (див. Рисунок 6D, конфігурація (c)), можна було передбачити результати, що спостерігаються на Рисунку 6В і С - характерні частоти верхньої забороненої зони,  $\Omega_{upper}^2$ , лежать вище 6.4. На нижньому краю верхньої забороненої зони,  $\Delta\omega_{up}^2$ , також до певної міри реалізуються зміщення ядер в цілому (див.

Рисунок 6D(c)), однак амплітуда коливань частинок ядер вздовж синьої осі значно менша, ніж амплітуда їхніх коливань у поперечному напрямку. Саме поперечні протифазні коливання визначають частоту на нижньому краю забороненої зони. Вища частота на її верхньому краю ( $\hat{k} = 0$ ) при відносно невеликих зміщеннях частинок ядра (див. Рисунок 6D(d)) зумовлена більш значними протифазними зміщеннями оболонок відносно ядра.

Видно, що стан акустичної системи, показаний на Рисунку 6Б, близький до стаціонарного. Збільшення жорсткості середовища  $\chi$  в  $\sim 1.7$  рази (див. Рисунок 6В і 6С) дещо змінює положення і ширину основних заборонених зон  $\Delta\omega_{down}^2(\eta, \chi)$  і  $\Delta\omega_{up}^2(\eta, \chi)$ .

Результати на Рисунку 6 отримано при досить високому значенні фіксованої жорсткості оболонки  $\eta$ . Режими керування шириною забороненої зони зі змінною жорсткістю однорідного середовища, що оточує ядро,  $\eta = \chi$ , є кращими, про що свідчать результати, наведені на Рисунку 7. У режимі квазінасичення параметри сформованих заборонених зон (див. Рисунок 7(в) і 7(г)) практично не відрізняються від попередніх (див. Рисунок 6С), але при зменшенні жорсткості середовища через зміну індукції магнітного поля можлива трансформація заборонених зон у смуги пропускання (див. Рисунок 7(а)), оскільки в низькочастотному діапазоні зростає густина станів скелету.

Результати, представлені на Рисунку 7(б), можна пояснити на основі різних якісних моделей. Тут, однак, основна увага приділяється моделі формування забороненої зони, яка обговорювалася вище. На верхньому краю сформованої забороненої зони завжди з'являється режим протифазних коливань ядра і оболонки. Для відносно гнучкої оболонки, тобто якщо жорсткість оболонки недостатня, то збудження такої моди утруднене, особливо на низьких частотах і, відповідно, довгохвильових режимах поверхневих коливань оболонки. На високих частотах (короткохвильові

поверхневі моди) локальна кривизна поверхні оболонки збільшується, і відповідний "поверхневий тиск" зростає, що може забезпечити протифазні коливання з короткомасштабними коливаннями ядер. Саме з цим ефектом пов'язане більш раннє формування верхньої забороненої зони,  $\Delta\omega_{up}^2$ , що спостерігається на Рисунку 7(b).

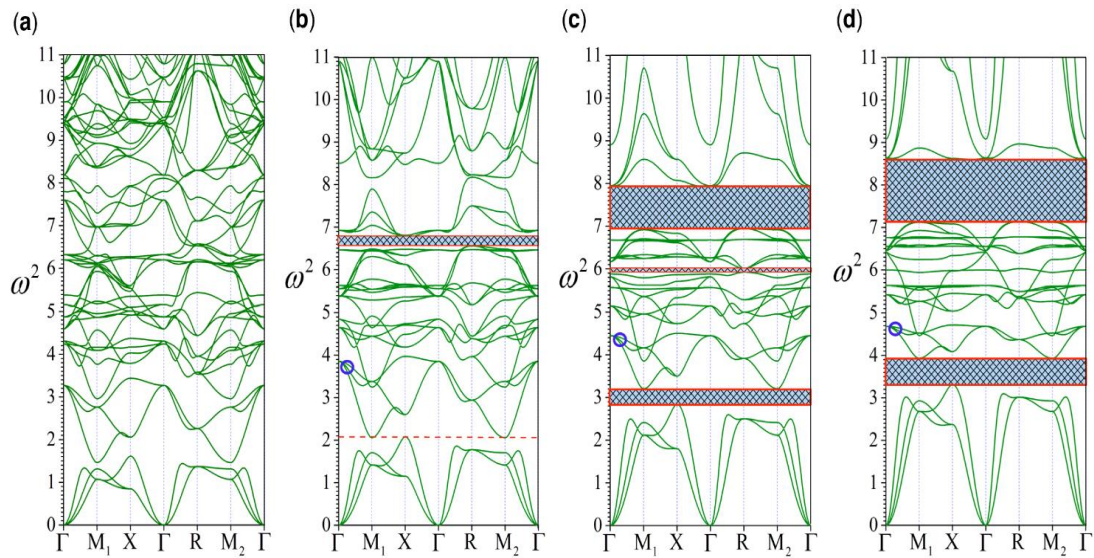


Рисунок 7 – Динаміка ширини забороненої зони при зміні жорсткості однорідного середовища, що оточує ядра елементарних комірок метаматеріалу,  $N_{core} = 2^3$ ,  $N_{shell} = 56$ ,  $\eta = \chi$ ;  $m_{shell} = 0.125$ ,  $M_{core} = 8$  і  $M_{shell} = 7$ . (a) - (d) жорсткість зовнішньої та оболонкової пружин становить 0,25, 0,38, 0,75 та 1,25 відповідно

Як зазначалося вище, зі збільшенням жорсткості зовнішнього середовища динаміка комплексу заборонених зон наближається до квазістаціонарного режиму (див. Рисунок 6В, С і 7(с),(d)). Важливо зазначити, що поява квазістаціонарного режиму сама по собі є досить своєрідною в метаматеріалах з багаточастинковими ядрами (див. Рисунок 6В, С і 7(с), (d)). Видно, що нижня межа  $\omega_{down(min)}^2(\chi, \eta)$ , найнижчої забороненої зони дуже

близька до частоти коливань  $\omega_0^2$ , ( $\omega_0^2 = 4.47$  згідно з рівнянням (12)), а верхній край,  $\omega_{up(max)}^2(\chi, \eta)$ , верхньої забороненої зони обмежений зверху частотою  $\omega_f^2$ , яка також легко обчислюється з рівняння (3.4) як:

$$\omega_f^2 = N_{core} \cdot 4.47 / M^* \approx 9.6, \quad (3.6)$$

Де приведена маса  $M^* = M_{core}M_{shell} / (M_{core} + M_{shell}) \approx 3.73$  ( $M_{core} = 8$ ,  $M_{shell} = 7$ ).

Таким чином, якби елементарні комірки були простими вібраторами "маса в масі", то сформована ширина забороненої зони відповідала б діапазону частот  $\omega_0^2 \leq \omega^2 \leq \omega_f^2$ . Однак у розглянутому випадку цей діапазон є досить широким і включає ряд проміжних частотних гілок (див. Рисунок 6С і 7(d)), які утворюються внаслідок зв'язку між власними коливаннями ядра і оболонки. Зі збільшенням жорсткості скелета ( $\eta = \chi$ ) характерні частоти коливань оболонки зростають, а їхній зв'язок з більш низькочастотними коливаннями ядра послаблюється. Цей ефект помітний на Рисунок 7(б), (в) і (г), де група частотних гілок, позначених синім кільцем, наприклад, поступово звужується зі збільшенням жорсткостей  $\eta$  і  $\chi$ . Наочний наслідок збільшення цих параметрів показано на Рисунок 8А, де звуження проміжних частотних гілок призвело до появи низки нових заборонених зон.

Таким чином, у випадку багаточастинкових ядер інтервал частот

$$\omega_0^2 \leq \omega^2 \leq \omega_f^2, \quad (3.7)$$

дає обґрунтовану оцінку меж так званої "області створення заборонених зон", в межах якої можливе як формування щільного набору заборонених зон

при великій жорсткості каркаса (див. Рисунок 8А), так і повне відкриття цього діапазону для акустичних хвиль при меншій жорсткості скелета (див. Рисунок 7(a)).

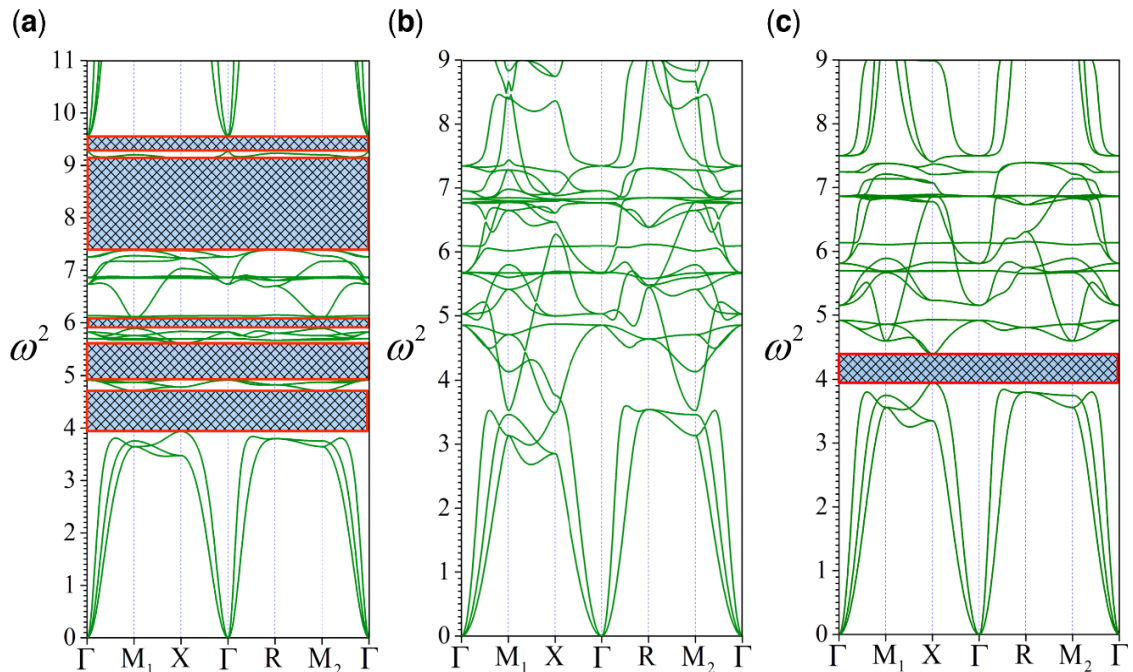


Рисунок 8 – Приклади різного ступеня заповнення ділянки створення забороненої зони. (a)  $\eta = \chi = 4$ , решта параметрів такі самі, як на Рисунку 7. (b) та (c)  $N_{core} = 2^3$ ,  $N_{shell} = 56$ ,  $m_{shell} = 0.5$ ,  $M_{core} = 8$  та  $M_{shell} = 28$ . Жорсткості  $\eta = \chi = 3$  та  $4.6$  відповідно

Зауважимо, що частота,  $\omega_f^2$ , залежить від приведеної маси елементарної комірки. При фіксованій масі ядра приведена маса зростає зі збільшенням маси оболонки. Ця залежність дозволяє зменшити верхню межу верхньої забороненої зони при збільшенні маси оболонки і досягти формування лише контрольованої низькочастотної забороненої зони над акустичними гілками графіка дисперсії (див. Рисунок 8В і С).

Прикметним є той факт, що зміна маси оболонки не змінює значення  $\omega_{down(min)}^2(\chi, \eta)$  (див. Рисунок 8А і В), що ще раз підтверджує цю фундаментальну характеристику області утворення забороненої зони. Правильність наведеного вище якісного аналізу підтверджується також даними, представленими на Рисунку 9 з більшим числом мас у ядрі багаточастинкової елементарної комірки ( $N_{core} = 3^3$ ). Збільшення жорсткості середовища посилює зв'язок між короткохвильовими/високочастотними модами оболонок і ядра. Утворені в результаті цього заборонена зона поступово зміщується у високочастотну область спектра (див. Рисунок 9(b),(c),(d)). Оцінка частоти коливань ядра,  $\omega_0^2$ , при нерухомій оболонці дає значення  $\omega_0^2 \sim 3.32$ . Верхня межа області утворення заборонених зон,  $\omega_f^2$ , при заданих масах ядра і оболонки  $M_{core} = 27$  і  $M_{shell} = 12.25$  дорівнює 10.63. Таким чином, формування забороненої зони очікується в діапазоні частот  $3.32 \leq \omega^2 \leq 10.63$ , що добре узгоджується з даними, наведеними на Рисунку 9. Саме в околі частоти  $\omega_0^2$  мала б формуватися низькочастотна заборонена зона, однак при багаточастинковому важкому ядрі, зануреному в м'яку оболонку, зв'язок між їхніми низькочастотними модами є слабким. Як наслідок, навіть при високій жорсткості середовища, коли верхня заборонена зона щойно сформувалася, низькочастотна перебуває в "зародковому стані" (Рисунок 9(d)) і з'являється лише при  $\eta = \chi \gtrsim 1.5$ .

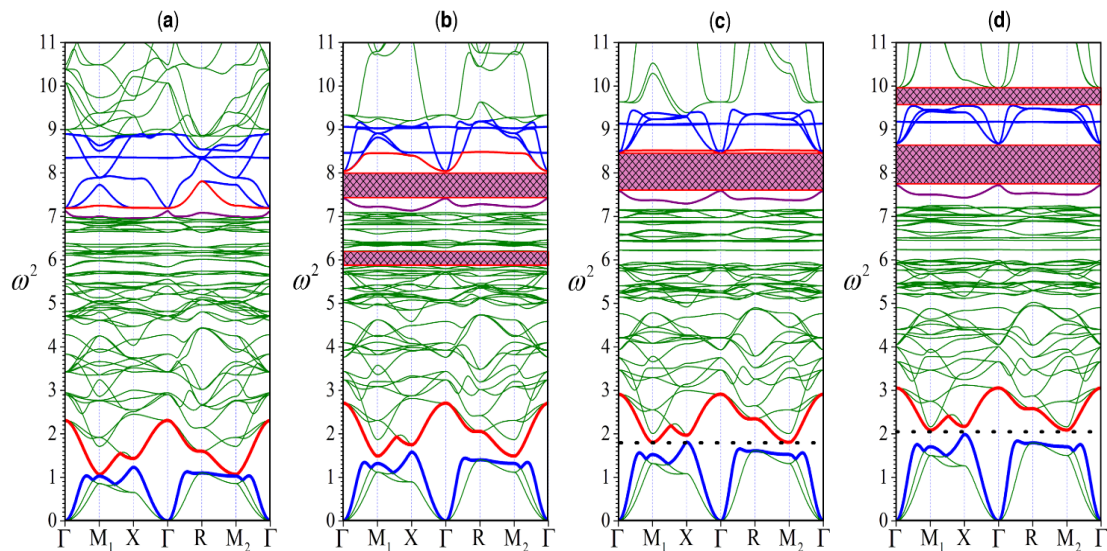


Рисунок 9 – Динаміка ширини забороненої зони метаматеріалу з кількістю частинок в ядрі  $N_{core} = 3^3$ ,  $N_{shell} = 98$  Жорсткість середовища, що оточує ядра елементарних комірок, однорідна:  $\eta = \chi$  і  $m_{shell} = 0.125$  ( $M_{core} = 27$  and  $M_{shell} = 12.25$ ). (a)-(d) зовнішня жорсткість і жорсткість оболонки становлять 0.40, 0.65, 0.90 і 1.20 відповідно. Зазори в діапазоні  $\omega^2 > 3$  з шириною  $\Delta\omega^2$ , меншою за 0.3, не виділено

Замість того, щоб збільшувати жорсткість навколишнього середовища для формування низькочастотної забороненої зони, існує простіший спосіб досягти цієї мети. Достатньо, наприклад, замінити центральну частинку ядра на частинку більшої маси. Тоді, з одного боку, при тій же кількості власних мод ядра низькочастотна область спектра буде заповнена більш щільно, що забезпечить ефективний зв'язок коливальних мод ядра і оболонки, а з іншого боку, високочастотні коливання ядра будуть в основному обумовлені поверхневим рухом частинок по його гранях і краях. За цих обставин утворення низькочастотної забороненої зони не буде суттєво впливати на динаміку високочастотних заборонених зон, оскільки ці два механізми



відповідають різним позиційним розподілам коливальних мод у просторі. Цей якісний аналіз наслідків запропонованої модифікації структури ядра узгоджується з даними, представленими на Рисунку 10.

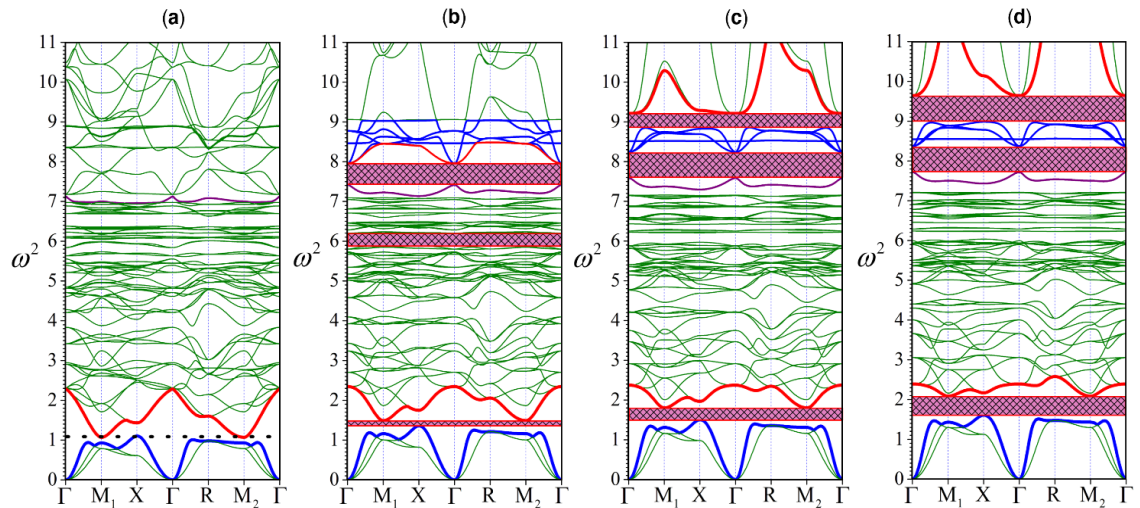


Рисунок 10 – Динаміка ширини забороненої зони метаматеріалу з кількістю частинок в ядрі  $N_{core} = 3^3$ . Жорсткість середовища, що оточує ядра елементарних комірок, однорідна:  $\eta = \chi$  і  $m_{shell} = 0.125$ . Маса центральної частинки  $m_c$  в ядрі збільшено до 2.4. (a)-(d) зовнішня та оболонкова жорсткості становлять 0.40, 0.65, 0.90 та 1.20, відповідно.

Зазори в діапазоні  $\omega^2 > 3$  з шириною  $\Delta\omega^2$ , меншою за 0.3, не виділяються

Результати, показані на Рисунку 9 і Рисунку 10, свідчать на користь використання багат шарових ядер замість простого збільшення в ньому кількості частинок однорідної маси. Багат шарове ядро з неоднорідним розподілом мас частинок являє собою мультівібратор відкритого типу з гнучкою оболонкою. Приклад елементарної комірки з таким багат шаровим ядром показано на Рисунку 11(a). Динаміка ширини забороненої зони

відповідного 3D-метаматеріалу при зміні пружності зовнішнього середовища ( $\eta = \chi$ ) показана на Рисунку 11(б), (в) і (г).

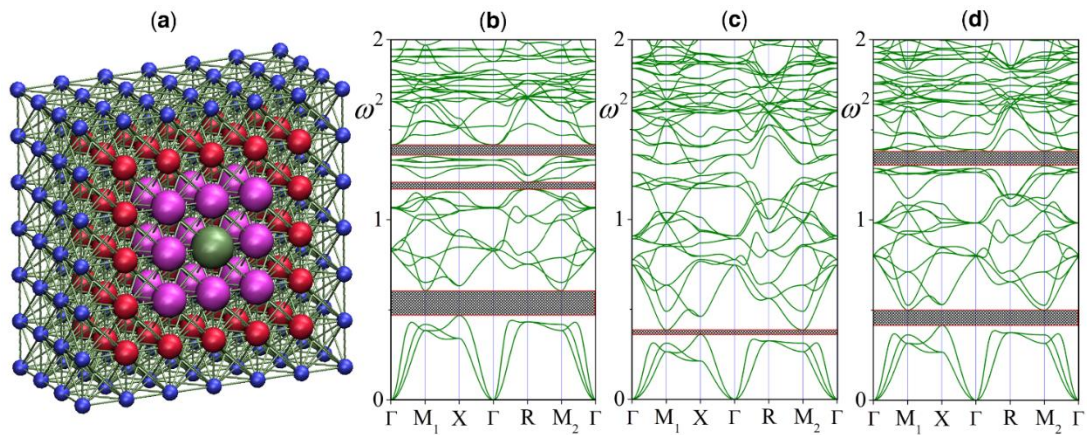


Рисунок 11 – Динаміка ширини забороненої зони в метаматеріалі з неоднорідними суперядрами в елементарних комірках. Конфігурація (а) - центральний переріз багатошарової комірки. Маса центральної оливкової частинки  $m_c = 5$ , маса пурпурних частинок, що її оточують,  $m_{mag} = 3$ , маса червоних частинок  $m = 1$ , маса синіх частинок  $m_{shell} = 0.25$ . Жорсткість  $\kappa$  пружин, що з'єднують частинки суперядра між собою і з зовнішньою синьою оболонкою, дорівнює одиниці,  $\kappa = 1$ . (b), (c) і (d) представляють частотні гілки,  $\omega^2 = \omega_n^2(\hat{\mathbf{k}})$ , метаматеріалу для різних значень жорсткості середовища, що оточує ядро:  $\eta = \chi = 0.6, 1.0$  і  $2.0$ , відповідно

Елементарна комірка, представлена на Рисунок 11(а), є аналогом мультівібратора типу "маса в масі", що складається з чотирьох вкладених елементів: центральної важкої частинки з масою  $m_c = 5$ , оболонки з 26 пурпурних частинок, що оточують її, з масою  $m_{mag} = 3$  кожна, і наступного шару, що є оболонкою з 98 червоних частинок з масою  $m = 1$  кожна. Суперядро оточене зовнішньою оболонкою (позначеною синім кольором), яка

одночасно представляє зовнішнє середовище. Жорсткість пружин  $k$ , що з'єднують одночасно елементи суперядра між собою і зовнішньою оболонкою, приймається рівною, як і раніше, одиниці,  $k = 1$ .

Класичний мультівібратор з чотирма вкладеними масами має три ненульові власні частоти. Відповідно, у зовнішньому полі акустичне середовище, побудоване з цих мультівібраторів, утворюватиме три заборонені зони [48] з краями, що не залежать від жорсткості зовнішнього середовища. Таким чином, у метаматеріалі з надвеликими елементарними комірками, зображеними на Рисунку 11(а), справді можливе утворення трьох заборонених зон, як показано на Рисунку 11(б-г), але як кількість утворених зон, так і їхні верхні/нижні краї є функціями жорсткостей  $\chi$  і  $\eta$  (див. Рисунок 11(б),(в) і (г)).

### **3.3. Керована напрямлена проникність акустичних хвиль в анізотропних метаматеріалах**

У двовимірних структурах формування напрямлених заборонених зон (що забороняють поширення акустичних хвиль у заданих частотних діапазонах і вздовж заданих напрямків) розглядалося в ряді попередніх робіт [50-52]. Для досягнення напрямлених заборонених зон для згинальних хвиль на середніх і низьких частотах дослідники [50] запропонували своєрідну періодичну пластину, всередині якої вирізані тунельні акустичні чорні діри, що генерують заборонені зони за рахунок ефекту локального резонансу створених комірок. Інша запропонована 2D модель фононного кристала [52], являє собою періодичну структуру з прямокутних елементарних суперкомірок, які складаються з 25 звичайних прямокутних елементарних комірок. Нижче ми покажемо можливість створення 3D-метаматеріалу на основі примітивних комірок з відносно простою топологією і морфологією (див. Рисунок 12), який реалізує керовану динаміку як повної, так і напрямленої забороненої зони.

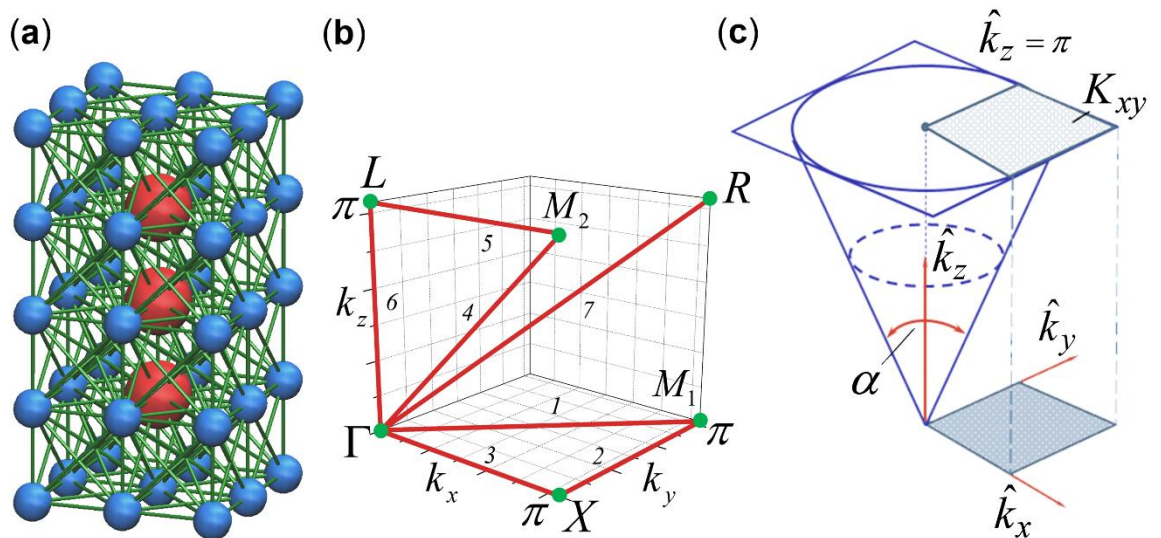


Рисунок 12 – Мас-пружинна модель анізотропного акустичного метаматеріалу. (a) – Елементарна комірка метаматеріалу. (b) – Траєкторія в першій зоні Бріллюена, вздовж якої розраховано частотні гілки,  $\omega^2 = \omega_n^2(\hat{\mathbf{k}})$ . (c) – Конічна область в  $\hat{\mathbf{k}}$ -просторі, в якій досліджено проходження акустичних хвиль і побудовано відповідну спектральну діаграму

Методика побудови дисперсійних співвідношень (рівнянь руху частинок елементарної комірки) така сама, як і в попередньому розділі (див. розділ 3). Єдиною особливістю, яку слід враховувати, є анізотропія, тобто те, що сформована інтегральна акустична структура має різний період трансляційної симетрії  $L$  вздовж різних координатних осей:  $\mathcal{L}_x = \mathcal{L}_y = 3$  і  $\mathcal{L}_z = 5$ . Відповідно, компоненти безрозмірного хвильового вектора дорівнюють  $\hat{k}_x = 2\pi\mathcal{L}_x/\lambda$ ,  $\hat{k}_y = 2\pi\mathcal{L}_y/\lambda$  і  $\hat{k}_z = 2\pi\mathcal{L}_z/\lambda$ . Враховуючи особливий тип анізотропії в акустичних властивостях метаматеріалу, розрахунок частотних гілок,  $\omega^2 = \omega_n^2(\mathbf{k})$ , представлених на Рисунок 13, проведено вздовж траєкторії в першій зоні Бріллюена, показаній на Рисунок 12(b). Припускалося, що визначальні співвідношення, пов'язані з пружним

середовищем, яке оточує ядра елементарних комірок, відповідають однорідним матеріалам ( $\eta = \chi$ ).

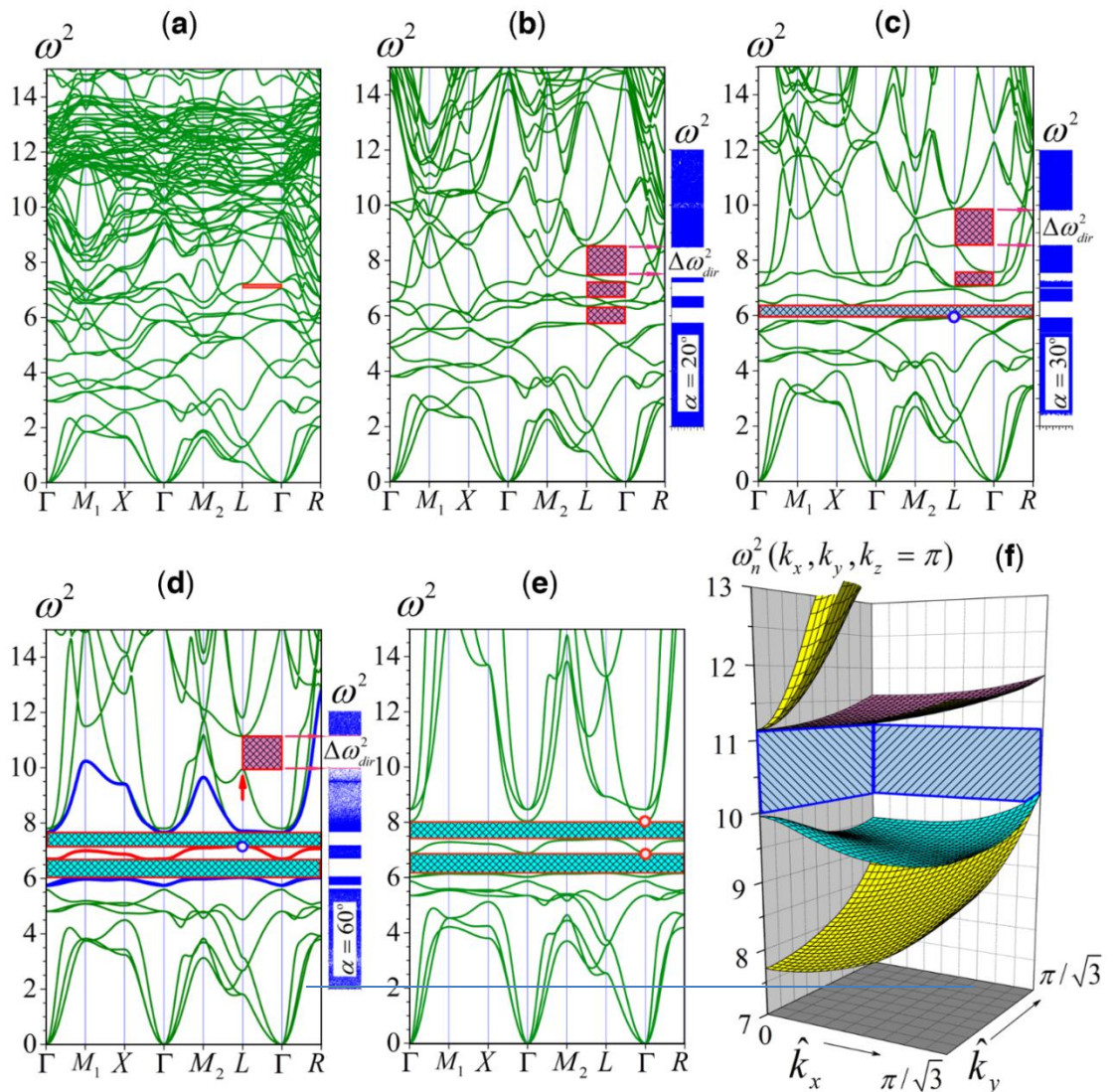


Рисунок 13 – Динаміка комплексу заборонених зон у досліджуваному анізотропному метаматеріалі - див. Рисунок 12. Жорсткість середовища, що оточує ядра елементарних комірок  $k$ , однорідна:  $\eta = \chi$ ; маса частинок-оболонки  $m_{shell} = 0.125$ . (a)-(e) зовнішня жорсткість та жорсткість оболонки становлять 0.25, 0.40, 0.55, 0.75 та 1.2 відповідно. Власні вектори для верхнього і нижнього країв забороненої зони (позначені відповідно синім і червоним кільцями в (c)),

(d) і (e)) показано на рисунку 14. (f) представляє частотні поверхні,  $\omega^2 = \omega_n^2(\mathbf{k})$ , прилеглі до напрямленої забороненої зони,  $\Delta\omega_{dir}^2$ , що спостерігається в (d) - прямокутник пурпурного кольору

Послідовність станів акустичного метаматеріалу, показана на Рисунку 13, може бути легко інтерпретована якісно. Тричастинкове ядро елементарної комірки, показане на Рисунок 12(a), є мультівібратором відкритого типу, оскільки кожна з частинок ядра взаємодіє з навколишнім середовищем. Проте формування двох повних заборонених зон узгоджується з фізичними уявленнями, розробленими для метаматеріалів, в яких ядро елементарної комірки є мультівібратором зі структурою "маса в масі" [48], а власні частоти мультівібратора з фіксованою зовнішньою оболонкою позначають нижні краї сформованих заборонених зон. У даному випадку, набір цих власних частот,  $\{\Omega_0^2\}$ , включає лише три значення, які ми покажемо нижче.

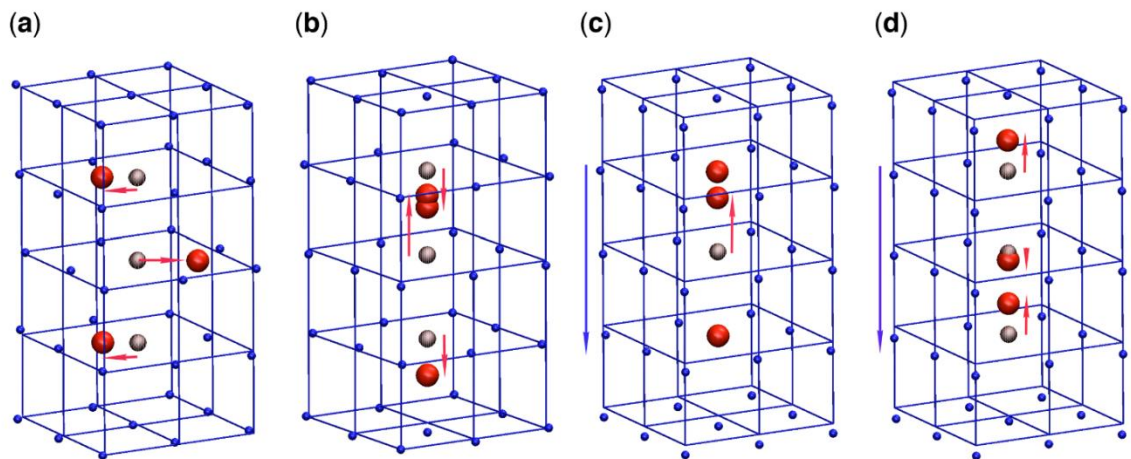


Рисунок 14 - Власні вектори переміщень частинок елементарної комірки для мод коливань, які відповідають нижньому та верхньому краям забороненої зони в конфігураціях Рисунок 13(c), (d) та (e), де вони позначені синім та червоним кільцями відповідно. Початкові положення частинок

оболонки збігаються з вузлами кубічної ґратки (сині лінії). Сині точки показують локалізацію зміщених частинок оболонки. Початкове і кінцеве положення частинок ядра показано сірими і червоними сферами відповідно. Конфігурації (a) і (b) відповідають нижнім краям заборонених зон (див. Рисунок 13(c) і (d)). Морфології цих мод зображують коливання типу  $A_s$  (див. Рисунок 2B). Конфігурації (c) і (d) відповідають верхнім краям заборонених зон (див. Рисунок 13(e)). Ці моди коливань належать до типу  $S_s$  (див. Рисунок 2B)

Всі вироджені моди горизонтальних коливань частинок ядра мають однакову частоту,  $\omega_{0,hor}^2$ , яка дорівнює частоті коливань одночастинкового ядра  $\omega_0^2$ , під дією 26 пружин (див. рівняння (3.3)), оскільки при їх малих горизонтальних зміщеннях (як показано на Рисунок 14(a)) локальна взаємодія сусідніх частинок (між собою) не виникає:

$$\omega_{0,hor}^2 = \omega_0^2 = \frac{\mathcal{K}^*}{m_{core}}; \omega_{0,hor}^2 \approx 6.37 \quad (3.8)$$

Серед трьох можливих вертикальних коливань ядра одна з мод, коли центральна частинка ядра стоїть нерухомо, а протилежні кінці коливаються в протифазі одна відносно одної, також має частоту  $\omega_0^2$ . Частоти двох інших мод можна легко обчислити на основі рівнянь руху (2.9) для трьох частинок ядра. Таким чином, повний набір власних частот  $\{\Omega_0^2\}$  має вигляд:

$$\{\Omega_0^2\} = \begin{cases} \omega_{0,ver2}^2 \approx \omega_0^2 + \sqrt{2}; \omega_{0,ver2}^2 \approx 7.78 \\ \omega_0^2 \approx 6.37 \text{ (вироджений енергетичний рівень)} \\ \omega_{0,ver1}^2 \approx \omega_0^2 - \sqrt{2}; \omega_{0,ver1}^2 \approx 4.96 \end{cases} \quad (3.9)$$



Тому зрозуміло, що зв'язок між модами коливань ядер і оболонки, який зростає зі збільшенням жорсткості середовища, призводить до утворення трьох спрямованих заборонених зон (Рисунок 13(б)) в околі частот  $\{\Omega_0^2\}$  (для хвиль, що поширюються вздовж осі осердя - ділянка шляху  $\Gamma - L$  на Рисунку 12(б)). При подальшому збільшенні значення параметра пружності  $\chi$  дві нижні напрямлені заборонені зони послідовно перетворюються на дві повні заборонені зони (див. Рисунок 13(с) і (д)). Зауважимо, що, незважаючи на велику кількість частинок в оболонках елементарних комірок, вони дійсно практично нерухомі на нижніх краях заборонених зон,  $\omega_{down,1}^2$ ,  $\omega_{down,2}^2$ , (див. Рисунок 14(а),(б)), і зміщуються як єдине ціле на їхніх верхніх краях,  $\omega_{up,1}^2$ ,  $\omega_{up,2}^2$  (див. Рисунок 14(с),(д)) при великих значеннях жорсткості середовища. Відповідно, частоти  $\omega_{up,1}^2$ ,  $\omega_{up,2}^2$  можна досить точно оцінити при обчисленні власних частот узагальненої системи з чотирьох взаємодіючих частинок, що рухаються вздовж осі комірки (вісь  $Z$  на Рисунку 12). Кількість відмінних від 0 власних частот у такій задачі, як і в задачі зі стаціонарною оболонкою (див. рівняння (3.9)), дорівнює 3, але в обох випадках лише моди, в яких центральна частинка ядра рухається в протифазі відносно двох інших (див. Рисунок 14), визначають краї сформованих заборонених зон у квазістаціонарному режимі.

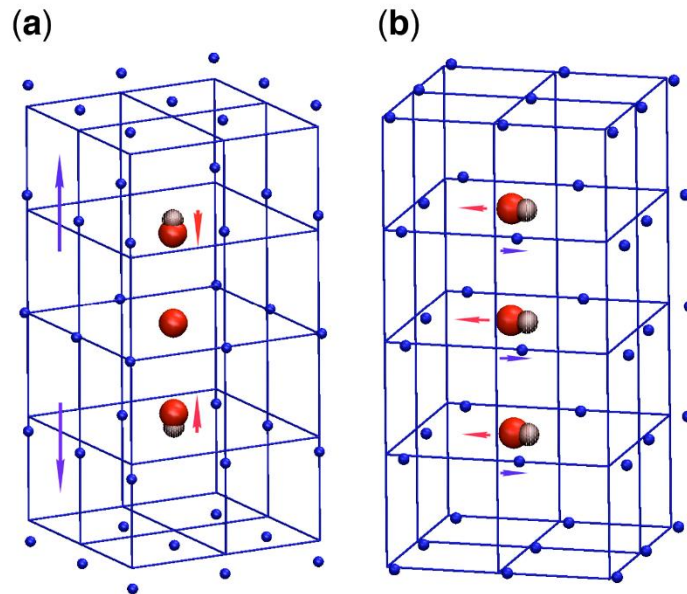


Рисунок 15 – Власні вектори переміщень частинок елементарної комірки для режимів коливань, що визначають (а) нижню і (б) верхню границю спрямованої забороненої зони (див. червону стрілку на Рисунку 13(d))

На відміну від повних заборонених зон, параметри яких мало змінюються при зміні жорсткості середовища/оболонки, краї напрямленої забороненої зони,  $\omega_{dir,down}^2$  і  $\omega_{dir,up}^2$ , значно зміщуються при різній рухливості, що призводить до помітних змін ширини цієї зони,  $\Delta\omega_{dir}^2$ . Видно, що значення  $\Delta\omega_{dir}^2$  спочатку зростає (див. Рисунок 13(b) і (c)), а потім зменшується до нуля - див. Рисунок 13(c), (d) і (e). Різна динаміка країв спрямованої забороненої зони зумовлена відмінностями в морфології коливальних мод (див. Рисунок 15), що визначають її нижній і верхній краї. Саме специфіка деформацій оболонки елементарної комірки та оточення визначає різний ступінь реакції величин  $\omega_{dir,down}^2(\eta, \chi)$ , і  $\omega_{dir,up}^2(\eta, \chi)$  на зміну жорсткостей  $\eta$  і  $\chi$ . Наприклад, жорсткість оболонки  $\eta$  є більш суттєвим фактором у поздовжніх коливаннях елементарної комірки (див. Рисунок

15(a)), ніж у її поперечних/згинальних коливаннях на верхньому краю забороненої зони - див. Рисунок 15(б), що відображено в результатах Рисунок 13(d) і (e). При одночасному збільшенні параметрів жорсткості  $\eta$  і  $\chi$  ( $\eta = \chi > 0.75$ ), мобільність частоти  $\omega_{dir,down}^2(\eta, \chi)$  є більш вираженою, ніж мобільність частоти  $\omega_{dir,up}^2(\eta, \chi)$ , що призводить до звуження ширини спрямованої смуги пропускання,  $\Delta\omega_{dir}^2$ , до нуля, фактично закриваючи її. Якщо дані на Рисунок 13(d) прийняти за деякий початковий стан і при фіксованому значенні  $\eta = 0.75$  збільшити лише параметр жорсткості  $\chi$  до 1.2, то зростання частоти  $\omega_{dir,down}^2(\eta, \chi)$  відстає від зростання значення  $\omega_{dir,up}^2(\eta, \chi)$ , і спрямована смуга пропускання не зникає, як це відбулося на Рисунок 13(e) ( $\eta = \chi = 1.2$ ). Більше того, її ширина,  $\Delta\omega_{dir}^2$ , стає на 0.26 більшою порівняно з даними на Рисунок 13(d) навіть при зсуві нижнього краю,  $\omega_{dir,down}^2$ , на одиницю вгору.

Зауважимо, що окрім ширини спрямованої забороненої зони,  $\Delta\omega_{dir}^2$ , заборонена зона має ще одну важливу фізичну характеристику, про яку варто згадати, а саме кут нахилу конуса забороненої зони,  $\alpha$  (див. Рисунок 12(c)). Смуга частот  $\Delta\omega_{dir}^2$  гарантовано заборонена для хвиль, що поширюються строго вздовж осі  $Z$  ( $\hat{k}_x = \hat{k}_y = 0$  і  $0 \leq \hat{k}_z \leq \pi$ ). Однак, така ж ширина забороненої зони утворюється і для певного набору хвиль (набору хвильових векторів  $\{\hat{\mathbf{k}}\}$ ), що поширюються під деякими кутами  $\beta$  відносно цієї осі,  $\beta \leq \alpha/2$ . Множина  $\{\hat{\mathbf{k}}\}$  заповнює деякий конус з кутом при вершині  $\alpha$  у першій зоні Бріллюена. Для визначення значення цього кута можна виконати наступну процедуру. У довільному конусі в  $\hat{\mathbf{k}}$ -просторі (див. Рисунок 12(c)) випадковим чином вибирається велика кількість (у даному випадку 10 000) точок, для яких обчислюються всі власні частоти системи. Сукупність усіх цих частот утворює спектральну діаграму (див. вертикальні сині смуги на Рисунок 13), яка відображає всі ширини заборонених зон для обраного набору

хвильових векторів. Кут при вершині конуса,  $\alpha$ , підбирали таким чином, щоб найбільша частотна щільність на спектральній діаграмі дорівнювала  $\Delta\omega_{dir}^2$ .

З порівняння даних, представлених на Рисунок 13(б), (в) і (г), можна зробити висновок, що динаміка ширини забороненої зони,  $\Delta\omega_{dir}^2$ , при зміні параметрів жорсткості  $\eta$  і  $\chi$  відрізняється від динаміки "кутової ширини",  $\alpha$ , і звуження забороненої зони на частотній осі може супроводжуватися розширенням конуса забороненої зони в  $\hat{\mathbf{k}}$ - просторі.

Таким чином, при проектуванні метаматеріалів з різним рівнем чутливості відгуку параметрів пружності  $\eta(B)$  і  $\chi(B)$ , на зміну норми індукції зовнішнього магнітного поля,  $\mathbf{B}$ , можна реалізувати різні сценарії керування характеристиками спрямованої забороненої зони практично в реальному часі. У цій роботі було обговорено деталі та кількісно оцінено багато аспектів інтелектуальної керованої поведінки.

### 3.4 Загальні рекомендації для використання отриманих результатів дослідження

Результати цього дослідження, загалом кажучи, несуть теоретичний характер і пояснюють механізми формування та еволюції заборонених зон в узагальненій моделі нескінченного середовища АММ з елементарними комірками – мультирезонаторами з еластичною оболонкою, можливості створення акустичної анізотропії в даній системі та залежність акустичних властивостей від кількості вкладених одна в одну еластичних оболонок (кількості частинок ядра) та параметрів пружного середовища.

Одержані результати можуть бути використані при створенні нових метаматеріалів з кращими корисними властивостями за рахунок інтеграції активних елементів які мають структуру мультирезонаторів типу “маса в масі” з еластичною оболонкою.

Необхідно провести подальші дослідження поведінки скінченної акустичної системи ідентичної будови. Моделювання фізичного процесу гасіння вібрацій всередині заборонених зон і подальша інтерпретація його результатів у такій системі становить науковий інтерес, оскільки її скінченність робить таку систему наближеною до реальної, що дасть можливість зрозуміти головні механізми, що призводять до блокування проходження хвиль певної частоти. Результати вищеприписаного дослідження зроблять можливим більш раціональний підхід до вибору форми та параметрів акустичних метаматеріалів.

### Висновки до розділу 3

1. Для утворення помітних заборонених зон у частотному спектрі має виконуватись дві умови: перша - сумарна маса оболонки і ядра мають бути співрозмірними, інакше кажучи, маса однієї частинки оболонки має бути меншою за масу однієї частинки ядра, друга умова - взаємодія між коливальними модами ядра і коливальними модами оболонок (останні утворюють так-званий «скелет» метаматеріалу), має бути достатньо сильним

2. Еволюція ширини забороненої зони, утвореної збільшенням жорсткостей  $\eta$  і  $\chi$ , відбувається в три етапи: динамічний, квазістаціонарний і надкритичний. Особливості кожної стадії полягають у наступному:

а) В одновимірному метаматеріалі з нелокальними взаємодіями існують чотири типи мод коливань, які по-різному реагують на зміну значень  $\eta(B)$  і  $\chi(B)$  в особливих точках зони Бріллюена. У тривимірному метаматеріалі з пружними оболонками елементарних комірок подібні особливості проявляються при достатньо високій жорсткості скелета, коли відповідні довжини хвиль для низькочастотних поверхневих мод поступово зростають і переміщення частинок оболонки стають значною мірою однорідними. На цій стадії, тобто на "динамічній" стадії, виникають заборонені зони, зумовлені значною неоднорідністю їх рухливостей. Зі збільшенням напруженості магнітного поля (жорсткості скелета) ширина забороненої зони досить різко розширюється за рахунок виходу більш рухливих частотних поверхонь з так званої "області створення забороненої зони". На цій стадії кількість заборонених зон також може суттєво змінюватися.

б) На квазістаціонарній стадії краї заборонених зон представлені лише повільними частотними поверхнями оскільки найшвидші моди покинули "область створення заборонених зон". У модах коливань, які заповнюють область створення забороненої зони, переміщення частинок оболонки стають дедалі одноріднішими. Відповідно, краї сформованих заборонених зон повільно наближаються до своїх меж, оскільки зміщення оболонок одна відносно одної "заморожуються" зі збільшенням жорсткості скелета. Діапазони пропускання між забороненими зонами заповнюються проміжними оптичними частотними поверхнями  $\bar{\omega}_{m(opt)}^2(\hat{\mathbf{k}}, \eta, \chi)$ , які також практично не зміщуються вздовж осі частот.

в) При дуже великих значеннях жорсткості скелета деякі з проміжних частотних поверхонь,  $\bar{\omega}_{m(opt)}^2(\hat{\mathbf{k}}, \eta, \chi)$ , вироджуються в площини з частотами власних коливань багаточастинкових ядер, укладених у стаціонарні оболонки. На цій надкритичній стадії кількість заборонених зон в "області утворення заборонених зон" може знову почати зростати, як видно з Рисунку 8А.

3. В анізотропних структурах з широким спектром невироджених частотно-енергетичних поверхонь можлива одночасна генерація як повних, так і спрямованих заборонених зон. Контрольованими параметрами таких зон є їхня частота і кутова ширина. Таким чином, можна досягти повного контролю шляхом зміни параметрів системи, що впливають на кутову ширину і частотні діапазони заборонених зон.

4. Одержані результати можуть бути використані для побудови принципово нових акустичних метаматеріалів, а також в подальших дослідженнях, які стосуються природи формування заборонених зон в метаматеріалах.

## ВИСНОВКИ

В ході роботи вдалося встановити закономірності в формуванні заборонених зон, а також показати, що використання АММ з комірками-мультирезонаторами зі структурою типу “маса в масі” і еластичними оболонками, які змінюють свою жорсткість дозволяє одержати як неперервний частотний спектр, так і заборонені зони, які можуть бути як повними, так і частковими, напрямленими.

1. На основі пошуку та аналізу літератури було зроблено висновок, що дана тема індивідуального завдання є актуальною, раніше ніхто не розглядав АММ у якому керовані заборонені зони за відсутності магнітного поля відсутні, але з'являються по мірі його прикладання. Найефективнішим методом створення АММ з контрольованими в реальному часі властивостями є використання МРЕ при його конструюванні.

2. Сформульовано принципи формування заборонених зон в одновимірній акустичній системі.

3. Використовуючи метод мас-пружинної моделі, розроблено параметричну модель тривимірного акустичного метаматеріалу з елементарними комірками-мультирезонаторами із оболонками на основі магнітореологічного еластомеру.

4. Одержано і проведено аналіз графіків дисперсійних поверхонь і власних векторів зміщень для ізотропного та анізотропного тривимірного метаматеріалу. На основі аналізу мод коливань і графіків дисперсійних поверхонь зроблено висновки стосовно формування керованих заборонених зон в акустичному метаматеріалі. Зокрема, еволюцію заборонених зон в АММ можна поділити на три стадії: динамічна, квазістатична і надкритична,



найбільш цікавою з яких є квазістатична, яка характеризується тим, що кількість заборонених зон залишається незмінною, а їх положення зміщується. В анізотропному метаматеріалі всередині конуса напрямленого вздовж осі анізотропії можуть утворюватись заборонені зони.

5. Запропоновано загальні рекомендації для використання результатів дослідження формування заборонених зон у тривимірному магнітореологічному еластомері у науковій та практичній діяльності, визначено напрямки подальших досліджень.

## ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ ПОСИЛАННЯ

1. Cummer S. A., Christensen J., Alù A. Controlling sound with acoustic metamaterials. *Nature Reviews Materials*. 2016. Vol. 1, no. 3. URL: <https://doi.org/10.1038/natrevmats.2016.1>
2. W. Cai, V. Shalaev, Optical metamaterials fundamentals and applications, Springer New York, New York, NY, 2010.
3. Fleury R., Alù A. Extraordinary Sound Transmission through Density-Near-Zero Ultranarrow Channels. *Physical Review Letters*. 2013. Vol. 111, no. 5. URL: <https://doi.org/10.1103/physrevlett.111.055501>
4. Smith D. R. Metamaterials and Negative Refractive Index. *Science*. 2004. Vol. 305, no. 5685. P. 788–792. URL: <https://doi.org/10.1126/science.1096796>.
5. Zhang S., Xia C., Fang N. Broadband Acoustic Cloak for Ultrasound Waves. *Physical Review Letters*. 2011. Vol. 106, no. 2. URL: <https://doi.org/10.1103/physrevlett.106.024301>.
6. JExperimental demonstration of an acoustic magnifying hyperlens / J. Li et al. *Nature Materials*. 2009. Vol. 8, no. 12. P. 931–934. URL: <https://doi.org/10.1038/nmat2561>.
7. Zigoneanu L., Popa B.-I., Cummer S. A. Design and measurements of a broadband two-dimensional acoustic lens. *Physical Review B*. 2011. Vol. 84, no. 2. URL: <https://doi.org/10.1103/physrevb.84.024305>.
8. The phononic band gaps of Bragg scattering and locally resonant pentamode metamaterials / C. Cai et al. *Journal of Physics D: Applied Physics*. 2017. Vol. 50, no. 41. P. 415105. URL: <https://doi.org/10.1088/1361-6463/aa83ec>.

9. Lee T., Iizuka H. Bragg scattering based acoustic topological transition controlled by local resonance. *Physical Review B*. 2019. Vol. 99, no. 6. URL: <https://doi.org/10.1103/physrevb.99.064305>.

10. Theoretical and Experimental Study of Locally Resonant and Bragg Band Gaps in Flexural Beams Carrying Periodic Arrays of Beam-Like Resonators / Y. Xiao et al. *Journal of Vibration and Acoustics*. 2013. Vol. 135, no. 4. URL: <https://doi.org/10.1115/1.4024214>.

11. Coupling local resonance with Bragg band gaps in single-phase mechanical metamaterials / A. O. Krushynska et al. *Extreme Mechanics Letters*. 2017. Vol. 12. P. 30–36. URL: <https://doi.org/10.1016/j.eml.2016.10.004>

12. Cenedese M., Belloni E., Braghin F. Interaction of Bragg scattering bandgaps and local resonators in mono-coupled periodic structures. *Journal of Applied Physics*. 2021. Vol. 129, no. 12. P. 124501. URL: <https://doi.org/10.1063/5.0038438>

13. Li W. H., Zhang X. Z., Du H. Magnetorheological Elastomers and Their Applications. *Advanced Structured Materials*. Berlin, Heidelberg, 2013. P. 357–374. URL: [https://doi.org/10.1007/978-3-642-20925-3\\_12](https://doi.org/10.1007/978-3-642-20925-3_12).

14. Wang W., Guo Y. Q., Chen W. Q. Effect of negative permeability on elastic wave propagation in magnetoelastic multilayered composites. *Theoretical and Applied Mechanics Letters*. 2017. Vol. 7, no. 3. P. 126–133. URL: <https://doi.org/10.1016/j.taml.2017.01.006>.

15. Sepehri S., Mashhadi M. M., Seyyed Fakhrabadi M. M. Active/passive tuning of wave propagation in phononic microbeams via piezoelectric patches. *Mechanics of Materials*. 2022. Vol. 167. P. 104249. URL: <https://doi.org/10.1016/j.mechmat.2022.104249>.

16. Zhang X., Huang X., Lu G. Tunable bandgaps and acoustic characteristics of perforated Miura-ori phononic structures. *International Journal*

*of Mechanical Sciences*. 2023. P. 108389. URL:

<https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2023.108389>.

17. Triple tunability of phononic bandgaps for three-dimensional printed hollow sphere lattice metamaterials / X. Lu et al. *International Journal of Mechanical Sciences*. 2022. Vol. 221. P. 107166. URL:

<https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2022.107166>.

18. Dargahi A., Sedaghati R., Rakheja S. On the properties of magnetorheological elastomers in shear mode: Design, fabrication and characterization. *Composites Part B: Engineering*. 2019. Vol. 159. P. 269–283. URL:

<https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2018.09.080>.

19. Nagashima K., Mitsumata T. Magnetorheological Effect for Bimodal Magnetic Elastomers. *International Polymer Science and Technology*. 2017. Vol. 44, no. 6. P. 45–50. URL: <https://doi.org/10.1177/0307174x1704400607>.

20. Magnetorheological Effect of Magnetoactive Elastomer with a Permalloy Filler / D. Borin et al. *Polymers*. 2020. Vol. 12, no. 10. P. 2371. URL: <https://doi.org/10.3390/polym12102371>.

21. Linke J. M., Borin D. Y., Odenbach S. First-order reversal curve analysis of magnetoactive elastomers. *RSC Advances*. 2016. Vol. 6, no. 102. P. 100407–100416. URL: <https://doi.org/10.1039/c6ra23435f>.

22. Böse H., Röder R. Magnetorheological elastomers with high variability of their mechanical properties. *Journal of Physics: Conference Series*. 2009. Vol. 149. P. 012090. URL: <https://doi.org/10.1088/1742-6596/149/1/012090>.

23. Mitsumata T., Ohori S. Magnetic polyurethane elastomers with wide range modulation of elasticity. *Polymer Chemistry*. 2011. Vol. 2, no. 5. P. 1063. URL: <https://doi.org/10.1039/c1py00033k>.

24. Magnetism and viscoelasticity of magnetic elastomers with wide range modulation of dynamic modulus / T. Mitsumata et al. *Soft Matter*. 2013. Vol. 9, no. 3. P. 904–912. URL: <https://doi.org/10.1039/c2sm26717a>.

25. Magnetorheological Elastomer Stress Relaxation Behaviour during Compression: Experiment and Modelling / M. Kukla et al. *Materials*. 2020. Vol. 13, no. 21. P. 4795. URL: <https://doi.org/10.3390/ma13214795>.

26. Magneto-Rheological Elastomer Composites. A Review / S. Samal et al. *Applied Sciences*. 2020. Vol. 10, no. 14. P. 4899. URL: <https://doi.org/10.3390/app10144899>.

27. Investigate the Effect of the Magnetic Field on the Mechanical Properties of Silicone Rubber-Based Anisotropic Magnetorheological Elastomer during Curing Process / T. Li et al. *Journal of Renewable Materials*. 2020. Vol. 8, no. 11. P. 1411–1427. URL: <https://doi.org/10.32604/jrm.2020.012939>.

28. Kashima S., Miyasaka F., Hirata K. Novel Soft Actuator Using Magnetorheological Elastomer. *IEEE Transactions on Magnetics*. 2012. Vol. 48, no. 4. P. 1649–1652. URL: <https://doi.org/10.1109/tmag.2011.2173669>.

29. Du H., Li W., Zhang N. Semi-active variable stiffness vibration control of vehicle seat suspension using an MR elastomer isolator. *Smart Materials and Structures*. 2011. Vol. 20, no. 10. P. 105003. URL: <https://doi.org/10.1088/0964-1726/20/10/105003>.

30. Magnetorheological elastomers enabled high-sensitive self-powered tribo-sensor for magnetic field detection / S. Qi et al. *Nanoscale*. 2018. Vol. 10, no. 10. P. 4745–4752. URL: <https://doi.org/10.1039/c7nr09129j>.

31. Stretchable and magneto-sensitive strain sensor based on silver nanowire-polyurethane sponge enhanced magnetorheological elastomer / T. Hu et al. *Materials & Design*. 2018. Vol. 156. P. 528–537. URL: <https://doi.org/10.1016/j.matdes.2018.07.024>.

32. Böse H., Rabindranath R., Ehrlich J. Soft magnetorheological elastomers as new actuators for valves. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*. 2012. Vol. 23, no. 9. P. 989–994. URL: <https://doi.org/10.1177/1045389x11433498>.

33. Deng H.-x., Gong X.-l. Application of magnetorheological elastomer to vibration absorber. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. 2008. Vol. 13, no. 9. P. 1938–1947. URL: <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2007.03.024>.

34. Kim H. K., Kim H. S., Kim Y.-K. Stiffness control of magnetorheological gels for adaptive tunable vibration absorber. *Smart Materials and Structures*. 2016. Vol. 26, no. 1. P. 015016. URL: <https://doi.org/10.1088/1361-665x/26/1/015016>.

35. Li W. H., Zhang X. Z., Du H. Magnetorheological Elastomers and Their Applications. *Advanced Structured Materials*. Berlin, Heidelberg, 2013. P. 357–374. URL: [https://doi.org/10.1007/978-3-642-20925-3\\_12](https://doi.org/10.1007/978-3-642-20925-3_12).

36. A highly adjustable magnetorheological elastomer base isolator for applications of real-time adaptive control / Y. Li et al. *Smart Materials and Structures*. 2013. Vol. 22, no. 9. P. 095020. URL: <https://doi.org/10.1088/0964-1726/22/9/095020>.

37. Yan W., Zhang G., Gao Y. Investigation on the tunability of the band structure of two-dimensional magnetorheological elastomers phononic crystals plate. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*. 2022. Vol. 544. P. 168704. URL: <https://doi.org/10.1016/j.jmmm.2021.168704>.

38. Study on bandgap vibration isolation of super-cell phononic crystals based on magnetorheological elastomers / G.-J. Yu et al. *AIP Advances*. 2021. Vol. 11, no. 12. P. 125113. URL: <https://doi.org/10.1063/5.0065140>.

39. Sharkskin-Inspired Magnetoactive Reconfigurable Acoustic Metamaterials / K. H. Lee et al. *Research*. 2020. Vol. 2020. P. 1–13. URL: <https://doi.org/10.34133/2020/4825185>.

40. Adaptive elastic metastructures from magneto-active elastomers / C. D. Pierce et al. *Smart Materials and Structures*. 2020. Vol. 29, no. 6. P. 065004. URL: <https://doi.org/10.1088/1361-665x/ab80e4>.

41. Zhang G., Gao Y. Tunability of Band Gaps in Two-Dimensional Phononic Crystals with Magnetorheological and Electrorheological Composites. *Acta Mechanica Solida Sinica*. 2020. URL: <https://doi.org/10.1007/s10338-020-00189-6>.

42. Li B., Yan W., Gao Y. Tunability of Band Gaps of Programmable Hard-Magnetic Soft Material Phononic Crystals. *Acta Mechanica Solida Sinica*. 2022. URL: <https://doi.org/10.1007/s10338-022-00336-1>.

43. Wang L., Chen Z., Cheng L. A metamaterial plate with magnetorheological elastomers and gradient resonators for tuneable, low-frequency and broadband flexural wave manipulation. *Thin-Walled Structures*. 2023. Vol. 184. P. 110521. URL: <https://doi.org/10.1016/j.tws.2022.110521>.

44. Investigation of a magnetorheological elastomer metamaterial sandwich beam with tunable graded stiffness for broadband vibration attenuation / y. wang et al. *Smart Materials and Structures*. 2023. URL: <https://doi.org/10.1088/1361-665x/acd289>.

45. Soft Magnetoactive Laminates: Large Deformations, Transverse Elastic Waves and Band Gaps Tunability by a Magnetic Field / N. Karami Mohammadi et al. *Journal of Applied Mechanics*. 2019. Vol. 86, no. 11. URL: <https://doi.org/10.1115/1.4044497>.

46. Jafari H., Sedaghati R. Analysis of an Adaptive Periodic Low-Frequency Wave Filter Featuring Magnetorheological Elastomers. *Polymers*. 2023. Vol. 15, no. 3. P. 735. URL: <https://doi.org/10.3390/polym15030735>
47. Xu Z., Tong J., Wu F. Magnetorheological elastomer vibration isolation of tunable three-dimensional locally resonant acoustic metamaterial. *Solid State Communications*. 2018. Vol. 271. P. 51–55. URL: <https://doi.org/10.1016/j.ssc.2017.12.024>.
48. Multi-resonator metamaterials as multi-band metastructures / V. Gorshkov et al. *Materials & Design*. 2021. Vol. 202. P. 109522. URL: <https://doi.org/10.1016/j.matdes.2021.109522>.
49. Yarkony D. R. Diabolical conical intersections. *Reviews of Modern Physics*. 1996. Vol. 68, no. 4. P. 985–1013. URL: <https://doi.org/10.1103/revmodphys.68.985>.
50. Li J., Li S., Miao Z. Investigations on the Complex Band Diagram of Flexural Wave through the Fluid-Loaded Phononic Plate. *Applied Sciences*. 2022. Vol. 12, no. 23. P. 12386. URL: <https://doi.org/10.3390/app122312386>
51. Tang L., Cheng L. Periodic plates with tunneled Acoustic-Black-Holes for directional band gap generation. *Mechanical Systems and Signal Processing*. 2019. Vol. 133. P. 106257. URL: <https://doi.org/10.1016/j.ymsp.2019.106257>.
52. Singh A., Gupta A. Directional Bandgap Analysis in Phononic Crystal with Rectangular Super Cell Structure. *International Journal of Mathematical, Engineering and Management Sciences*. 2022. Vol. 7, no. 3. P. 341–349. URL: <https://doi.org/10.33889/ijmems.2022.7.3.023>.