

Міністерство освіти і науки України
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
“КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені Ігоря Сікорського”

І.В. Лінчевський
В.В. Хіст

ФІЗИКА

Навчальний посібник

Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для здобувачів першого (бакалаврського) рівня
вищої освіти за технічними спеціальностями

Електронне мережне навчальне видання

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2023

Рецензент: *В.І.Ужва*, к.ф.-м. наук, доцент, доцент кафедри загальної фізики та моделювання фізичних процесів КПІ ім. Ігоря Сікорського

Відповідальний редактор:

С.О.Решетняк, д.ф.-м.наук, професор, зав. кафедрою загальної фізики

*Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
(протокол № 6 від 17.05.2023 р.)*

*за поданням Вченої ради фізико-математичного факультету
(протокол №8 від 02.06.2023 р.)*

«Фізика». [Електронний ресурс]: навчальний посібник для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти за технічними спеціальностями /І.В.Лінчевський, В.В.Хіст; КПІ ім. Ігоря Сікорського. – Електронні текстові дані (1 файл: 3.6 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2023. – 141с.

Навчальний посібник з дисципліни «Фізика», охоплює її розділи «Механіка» та «Електромагнетизм», як розділів курсу загальної фізики. Навчальна дисципліна належить до циклу нормативних освітніх компонент циклу загальної підготовки здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти за технічними спеціальностями.

Посібник містить теоретичні, та методичні матеріали з дисципліни «Фізика». Пропоновані приклади, задачі та контрольні запитання сприяють більш якісному засвоєнню теоретичного матеріалу.

Навчальний посібник може бути корисним також для, студентів та викладачів інших фізичних та технічних спеціальностей вищих технічних навчальних закладів і класичних та педагогічних університетів.

Реєстр. № НП 21/22-303. Обсяг 6.2 авт. арк.

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
Проспект Перемоги 37, м. Київ, 03056
<https://kpi.ua>

Свідectво про внесення до Державного реєстру видавців, виготовлювачів
і розповсюджувачів видавничої продукції ДК № 5354 від 25.05.2017 р.

© І.В. Лінчевський, В.В. Хіст;

© КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2023

ЗМІСТ

Вступ	6
Розділ 1. Механіка	7
1 Кінематика матеріальної точки	7
1.1 Переміщення, швидкість і прискорення	7
1.2 Нормальне і тангенціальне прискорення при криволінійному русі	10
Контрольні запитання і завдання	13
2. Кінематика твердого тіла	15
2.1 Ступені свободи твердого тіла	15
2.2 Обертальний рух твердого тіла	17
2.3 Зв'язок між лінійними та кутовими величинами	20
Контрольні запитання і завдання	21
3. Основні закони класичної динаміки. Неінерціальні системи відліку	22
3.1 Основне рівняння динаміки матеріальної точки	22
3.2 Закон збереження імпульсу. Третій закон Ньютона	25
3.3 Неінерціальні системи відліку (НСВ)	27
3.4 Залежність прискорення вільного падіння від географічної широти	31
Контрольні запитання і завдання	32
4. Робота сили. Енергія	33
4.1 Робота сили	33
4.2 Теорема про зміну кінетичної енергії	34
4.3 Характеристика сил в природі	35
4.4 Зв'язок між силою та потенціальною енергією	35
4.5 Закон збереження повної енергії	36
4.6 Приклади на використання законів збереження імпульсу (пружний та непружний удари)	37
Контрольні запитання і завдання	38
5. Динаміка обертального руху твердого тіла	39
5.1 Момент імпульсу, момент сили	39
5.2 Основне рівняння динаміки обертального руху твердого тіла	40
5.3 Момент інерції твердого тіла	40
5.4 Центр мас. Теорема Штейнера	43
5.4.1 Центр мас	43
5.4.2 Теорема Штейнера	44
Контрольні запитання і завдання	45
Розділ 2. Електромагнетизм	47
6. Електростатичне поле в вакуумі	47

6.1 Закон Кулона. Вектор напруженості електростатичного поля.	
Принцип суперпозиції	47
6.2. Приклади на використання принципу суперпозиції	49
Контрольні запитання і завдання	52
7. Потенціал електростатичного поля	53
7.1 Потенціал електростатичного поля. Принцип суперпозиції	53
7.2 Зв'язок між напруженістю і потенціалом електростатичного поля	55
7.3 Еквіпотенціальні поверхні	56
7.4 Поле електричного диполя	57
Контрольні запитання і завдання	59
8. Теорема Гауса для вектора E	60
8.1 Потік вектора. Теорема Гауса для вектора E	60
8.2 Приклади на використання теореми Гауса	63
Контрольні запитання і завдання	66
9. Теорема Гауса для вектора E в диференціальній формі. Електричне поле в речовині	67
9.1 Дивергенція поля. Теорема Остроградського – Гауса	67
9.2 Теорема Гауса для вектора E в диференціальній формі	68
9.3 Електричне поле в діелектриках. Поляризація діелектриків	68
9.4 Зв'язок між вектором поляризації та поляризаційними зарядами	72
9.5 Вектор електричного зміщення	74
9.6 Заломлення ліній електростатичного поля на межі двох діелектриків	75
Контрольні запитання і завдання	76
10. Провідники в електричному полі	77
10.1 Особливості електростатичного поля провідників	77
10.2 Електрична ємність. Конденсатори	80
10.3 Енергія зарядженого конденсатору.	
Енергія електростатичного поля	83
10.3.1 Енергія зарядженого конденсатора.	83
10.3.2 Енергія електричного поля	83
Контрольні запитання і завдання	84
11. Закони постійного струму	86
11.1 Струм та густина струму, лінії струму	86
11.2 Рівняння неперервності	87
11.3 Елементарна теорія електропровідності металів	89
11.3.1 Закон Ома	89
11.3.2 Закон Джоуля - Ленца	91

11.4 Правила Кірхгофа	92
Контрольні запитання і завдання	92
12. Магнітне поле струмів. Закон Ампера. Сила Лоренца	94
12.1 Закон Ампера. Закон Біо-Савара-Лапласа	94
12.2 Магнітне поле рухомого заряду	98
12.3 Сила Лоренца	98
12.3.1 Рух заряджених частинок у магнітному полі	99
12.3.2 Ефект Холла	100
Контрольні запитання і завдання	102
13. Основні рівняння магнетостатики	103
13.1 Потік вектору магнітної індукції	103
13.2 Теорема про циркуляцію вектору магнітної індукції	103
13.3 Поле ідеального соленоїда	106
13.4 Виток зі струмом у зовнішньому магнітному полі	108
Контрольні запитання і завдання	110
14. Намагнічування речовини. Класифікація магнетиків	111
14.1 Струми в магнетиках	111
14.2 Вектор намагнічування і молекулярні струми	112
14.3 Теорема про циркуляцію вектора намагніченості	113
14.4 Вектор напруженості магнітного поля	115
14.5 Заломлення ліній магнітного поля на межі розподілу двох магнетиків	116
14.6 Класифікація магнетиків	118
14.6.1 Природа діамагнетизму та парамагнетизму	119
14.6.2 Властивості феромагнетиків	121
Контрольні запитання і завдання	123
15. Електромагнітна індукція. Закон Фарадея	125
15.1 Закон електромагнітної індукції	125
15.2 Індуктивність	128
15.3 Взаємна індуктивність	129
15.4 Енергія магнітного поля	131
Контрольні запитання і завдання	134
16 Рівняння Максвелла	135
16.1 Струм зміщення	135
16.2 Система рівнянь Максвелла	136
Контрольні запитання і завдання	138
Перелік посилань	139
Список рекомендованої літератури	139
Предметний покажчик	140

ВСТУП

Навчальний посібник «Фізика» призначено для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти освітньо-професійних програми «Комп'ютерні технології в біології та медицині» спеціальності 122 «Комп'ютерні науки». Навчальна дисципліна належить до циклу нормативних освітніх компонент циклу загальної підготовки навчальних дисциплін підготовки здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти. Навчальний посібник написано на основі лекцій, які автори читали на протязі ряду років студентам факультету біомедичної інженерії КПІ ім. Ігоря Сікорського.

Пропоноване видання складається із двох розділів: Механіка та Електромагнетизм. Матеріали розділів викладені у відповідності до силабусу дисципліни «Комп'ютерні технології в біології та медицині». В кожній лекції наведені приклади розв'язання задач, а в кінці тем лекцій контрольні запитання та завдання, що сприяє максимально якісному засвоєнню лекційного матеріалу.

Курс загальної фізики разом з курсами вищої математики складає основу теоретичної підготовки майбутніх спеціалістів і є фундаментальною базою, без якої неможлива успішна інженерна діяльність. Курс фізики забезпечує майбутньому фахівцю основу його теоретичної підготовки в професійно-спрямованих галузях науки. Він формує уявлення про фізику як одну з фундаментальних природничих наук, ознайомлює з виникненням ідей, теорій, понять, розкриває можливості використання математичного апарату, математичних методів, інформаційних технологій у галузі фізичних знань.

Незважаючи на наявність інших підручників та навчальних посібників, необхідність написання такого навчального посібника обумовлена специфікою програми дисципліни «Фізика» для студентів спеціальності 122 «Комп'ютерні науки». В посібнику використані задачі з посилань [1] – [3].

РОЗДІЛ 1. МЕХАНІКА

1. Кінематика матеріальної точки

Механіка – це вчення про найпростіші форми руху матерії, які складаються з переміщення одних тіл відносно інших.

Одним з понять механіки є поняття матеріальної точки.

Матеріальна точка – тіло, розмірами якого можна знехтувати в умовах даної задачі.

Матеріальна точка це не є реальне тіло, це математична модель, яка допомагає розв'язувати задачі механіки, коли відстань до реального тіла набагато більша за розміри тіла, а маса тіла має кінцеве значення.

Для визначити положення матеріальної точки в просторі потрібно задати систему координат.

Існують різні системи координат, наприклад: полярна, циліндрична та сферична системи координат. Також, є багато криволінійних систем координат, зручних для використання при розв'язуванні тієї чи іншої математичної задачі.

При русі тіла на площині дуже часто використовують Декартову систему координат, яка в двох вимірах (2d) задається двома осями. Площину, в якій знаходяться осі, називають іноді *ху-площиною*. Де вісь Ox (вісь абсцис), Oy (вісь ординат). В тривимірному просторі (3d) до цих двох додається третя вісь Oz (аплікат). Всі точки в системі декартових координат, складають так званий *декартовий простір*.

1.1 Переміщення, швидкість і прискорення

Розглянемо рух матеріальної точки M по траєкторії в прямокутній системі координат, рис.1.1.

Положення точки M по траєкторії відносно системи відліку можна задати не тільки за допомогою трьох декартових координат, але також за

допомогою однієї векторної величини – $\vec{r}$ радіуса-вектора точки M , проведеного в цю точку з початку системи координат.

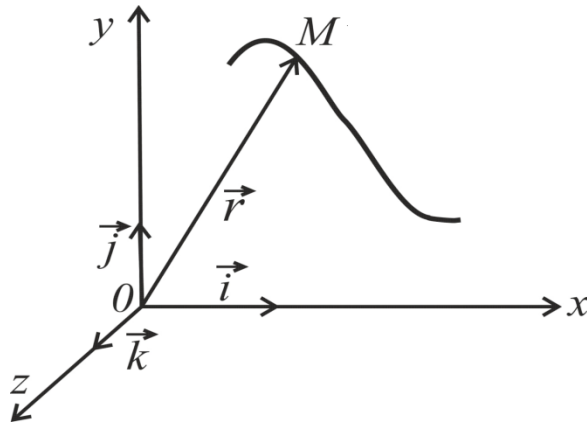


Рис.1.1

Якщо $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – одиничні вектори (орти) осей прямокутної декартової системи координат, то помножив відповідну проекцію на орт отримаємо радіус-вектор, який визначає положення матеріальної точки в просторі.

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}. \quad (1.1)$$

Уявимо, що матеріальна точка рухається по уявній кривій, яка є траєкторією руху. При русі точки M змінюються з часом як її координати, так і радіус-вектор. Тому, для того щоб задати закон руху точки необхідно вказати залежність зміни координат за часом: $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$, або залежність радіуса-вектора від часу: $\vec{r} = \vec{r}(t)$.

Вектор, поведений з початкової точки траєкторії в кінцеву, називається вектор *переміщення* $\Delta\vec{r}$, рис.1.2

$$\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t) = \Delta\vec{r} \quad (1.2)$$

Відношення переміщення до часу, за яке воно відбулося, називається вектором середньої швидкості за час Δt

$$\langle \vec{v} \rangle = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}. \quad (1.3)$$

Вектором *миттєвої швидкості*, або просто швидкістю в даний момент часу, називається межа відношення або перша похідна від радіуса-вектора за часом

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{r}'(t) = \dot{\vec{r}}. \quad (1.4)$$

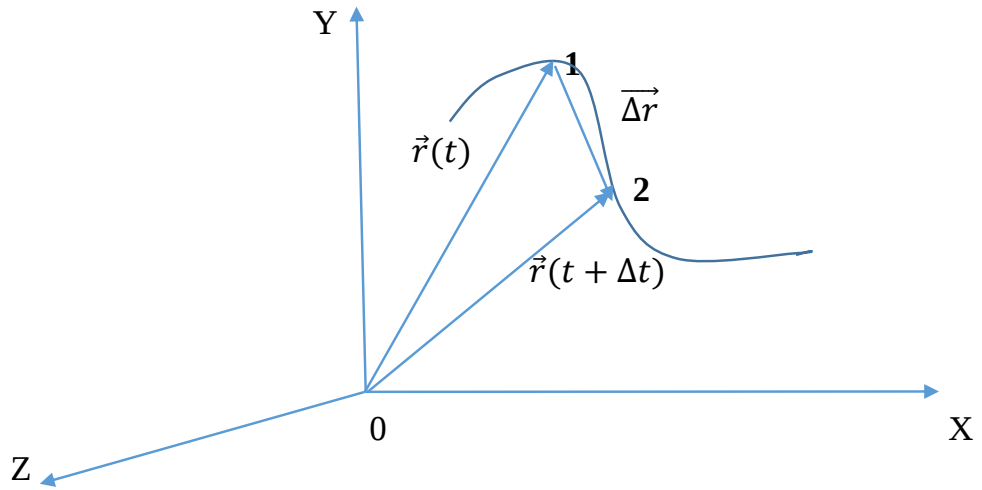


Рис.1.2.

Використаємо вираз (1.1) для пошуку похідної за часом і отримаємо вектор швидкості, який можна розкласти на три складові, вираз (1.6):

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{i} \frac{dx}{dt} + \vec{j} \frac{dy}{dt} + \vec{k} \frac{dz}{dt} = \vec{i}v_x + \vec{j}v_y + \vec{k}v_z, \quad (1.5)$$

$$v_x = \frac{dx}{dt}; v_y = \frac{dy}{dt}; v_z = \frac{dz}{dt}; \quad (1.6)$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \quad (1.7)$$

Вирази (1.6) та (1.7) визначають проекції й модуль вектора швидкості. Напрямок вектора швидкості збігається з напрямком дотичної до траєкторії руху в даній точці (впливає з фізичного змісту похідної).

Якщо швидкість із часом змінюється, то такий рух називається нерівномірним.

Вектор *прискорення* характеризує зміну швидкості у часі t

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{v}'(t) = \vec{r}''(t); \quad (1.8)$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{i} \frac{dv_x}{dt} + \vec{j} \frac{dv_y}{dt} + \vec{k} \frac{dv_z}{dt} = \vec{i}a_x + \vec{j}a_y + \vec{k}a_z; \quad (1.9)$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt}; a_y = \frac{dv_y}{dt}; a_z = \frac{dv_z}{dt}; \quad (1.10)$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \quad (1.11)$$

Вирази (1.10) та (1.11) визначають відповідно проекції й модуль вектора прискорення.

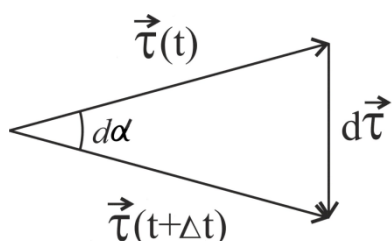
1.2 Нормальне і тангенціальне прискорення при криволінійному русі

Скористуємося тим, що вектор швидкості спрямовано по дотичній до траєкторії. Вочевидь вектор швидкості, у такому разі, можна записати як добуток його модуля на одиничний вектор $\vec{\tau}(t)$: $\vec{v}(t) = |\vec{v}(t)|\vec{\tau}(t)$, тоді прискорення

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(|\vec{v}(t)| \cdot \vec{\tau}(t))}{dt} = \frac{dv}{dt} \vec{\tau} + v \frac{d\vec{\tau}}{dt} = a_{\tau} \vec{\tau} + a_n \vec{n}; \quad (1.12)$$

де $a_{\tau} \vec{\tau} = \frac{dv}{dt} \vec{\tau}$ – тангенціальна компонента прискорення, відповідає за зміну модуля швидкості; $a_n \vec{n} = v \frac{d\vec{\tau}}{dt}$ – нормальна компонента прискорення, відповідає за зміну вектора швидкості.

Напрямок нормальної складової прискорення можна пояснити з рис.1.3. Трикутник, побудований для знаходження різниці векторів $\vec{\tau}(t + dt) - \vec{\tau}(t) = d\vec{\tau}$, є рівнобедреним зі стороною, яка чисельно дорівнює одиниці. При цьому, кут $d\alpha \rightarrow 0$ при вершині прямує до нуля. Очевидно за



цих обставин $d\vec{\tau} \perp \vec{\tau}$. Це означає, що нормальне прискорення спрямовано перпендикулярно до дотичної до траєкторії.

Рис.1.3

Знайдемо чисельне значення нормального прискорення. Припустимо матеріальна точка рухається рівномірно по криволінійній траєкторії. На малому інтервалі, фрагмент траєкторії між точками т.1 та т.2 можна апроксимувати дугою кола радіуса R , рис.1.4.

Припустимо, матеріальна точка в початковий момент знаходиться в положенні т.1, через проміжок часу Δt , точка буде знаходитися в положенні т.2, пройдений шлях буде дорівнювати довжині дуги s . Кут обертання радіус-вектора:

$$d\alpha = \frac{s}{R}; \quad (1.13)$$

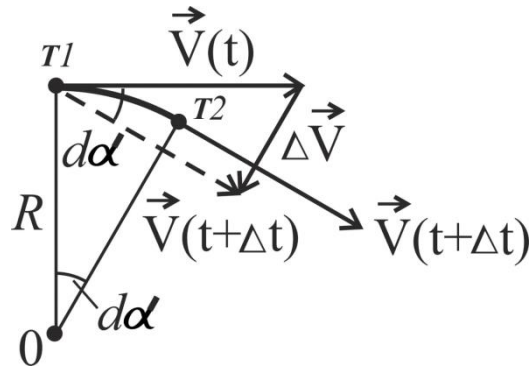


Рис.1.4

Вектор $\Delta \vec{v}$ можна представити у вигляді добутку модуля вектора на одиничний вектор нормалі, $|\vec{n}| = 1$, який має той самий напрямок що і вектор $\Delta \vec{v}$

$$\Delta \vec{v} = \Delta v \vec{n} = v \cdot d\alpha \cdot \vec{n} = v \frac{s}{R} \vec{n} \quad (1.14)$$

Розділимо $\Delta \vec{v}$ на інтервал часу Δt та зробимо граничний перехід, отримаємо нормальне прискорення:

$$\vec{a}_n = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v \cdot s}{R \cdot \Delta t} \vec{n} = \frac{v^2}{R} \vec{n} \quad (1.15)$$

Вектор повного прискорення має дві складові: $a_\tau \vec{\tau}$ і $a_n \vec{n}$, рис 1.5.

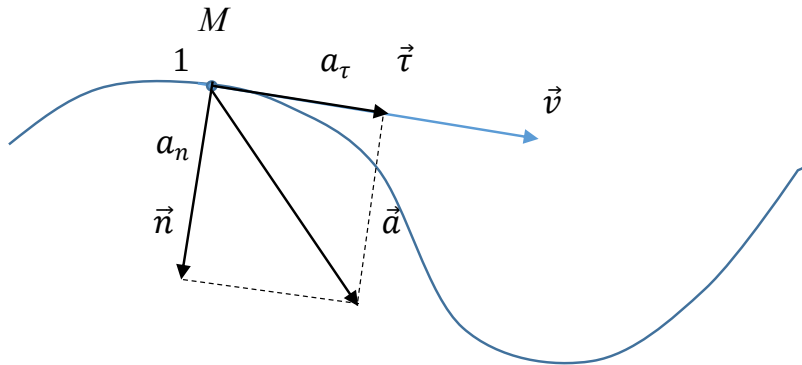


Рис.1.5.

У загальному випадку величина й напрямок вектора швидкості змінюються із часом, тоді *тангенціальне прискорення* характеризує зміну швидкості за величиною, і напрямлено у бік збільшення вектора швидкості. *Нормальне прискорення* – вектор, що характеризує зміну вектора швидкості за напрямком, перпендикулярний до дотичної до

траєкторії в даній точці, до центра уявного кола. Тобто, вектор $\vec{a}$ має дві складові $a_n = \frac{v^2}{R}$; R – радіус кривізни траєкторії, $a_\tau = \frac{dv}{dt}$.

$$\vec{a} = \vec{n}a_n + \vec{\tau}a_\tau. \quad (1.16)$$

Модуль повного прискорення: $a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}$.

Приклад 1

Матеріальна точка рухається зі сталим прискоренням $\vec{a} = \text{const}$. Початкова швидкість та початкове значення радіус-вектора при $t = 0$ відповідно $\vec{v}_0$ і $\vec{r}_0$. Знайти закони руху для швидкості $\vec{v}(t)$ та для радіус-вектора $\vec{r}(t)$.

Скористаємося виразом (1.8): $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$, звідки $\vec{a}dt = d\vec{v}$. Проінтегруємо

обидві частини рівняння $\int_0^t \vec{a}dt = \int_{\vec{v}_0}^{\vec{v}(t)} d\vec{v}$; отримаємо $\vec{a}t = \vec{v}(t) - \vec{v}_0$;

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a}t.$$

Далі шукаємо $\vec{r}(t)$ —?

Згідно визначенню (1.5) $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$; або $\vec{v}(t)dt = d\vec{r}$, інтегруємо

$\int_0^t (\vec{v}_0 + \vec{a}t) dt = \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}(t)} d\vec{r}$, звідки $\vec{v}_0t + \frac{\vec{a}t^2}{2} = \vec{r}(t) - \vec{r}_0$;

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0t + \frac{\vec{a}t^2}{2}.$$

Отримане рівняння для радіус-вектора можна переписати у вигляді трьох скалярних рівнянь в проекціях на осі координат. Наприклад, в

проекції на вісь Ox це рівняння має вигляд: $x(t) = x_0 + v_{0x}t + \frac{a_x t^2}{2}$

Аналогічно виглядають дві інші рівняння для радіус вектора в проекціях на осі Oy та Oz .

Зауважимо, що отримані в прикладі результати є дійсними при умові руху тіла зі сталим прискоренням. Отриманий результат є однією з формул кінематики, яку використовують в школі.

Приклад 2

Закони руху для точки на ободі колеса задані рівняннями $x(t)$ і $y(t)$, знайти модуль швидкості, вектор прискорення та пройдений шлях точкою на колесі за час, якій дорівнює періоду $t = T$, рис.1.6.

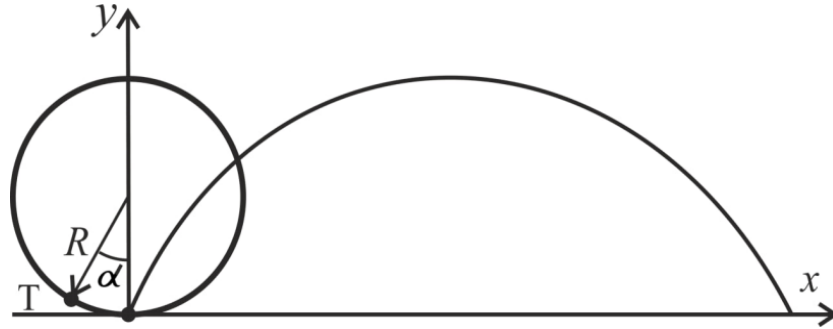


Рис.1.6

Дано: $x(t) = R(\omega t - \sin \omega t)$; $y(t) = R(1 - \cos \omega t)$

$|\vec{v}|$ —?, $\vec{a}$ —?, S —?

Скористаємося виразами (1.6) для проекцій вектора швидкості.

$$v_x = \frac{dx}{dt} = R\omega - R\omega \cos \omega t = R\omega(1 - \cos \omega t), \quad v_y = \frac{dy}{dt} = R\omega \sin \omega t$$

Тоді модуль швидкості

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = R\omega \sqrt{(1 - \cos \omega t)^2 + \sin^2 \omega t};$$

$$R\omega \sqrt{1 - 2\cos \omega t + (\cos \omega t)^2 + (\sin \omega t)^2} = R\omega \sqrt{2(1 - \cos \omega t)} = 2R\omega \sin \frac{\omega t}{2}.$$

Проекції вектора прискорення знайдемо за формулами (1.10)

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = -R\omega^2 \sin \omega t; \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = R\omega^2 \cos \omega t; \quad |\vec{a}| = R\omega^2.$$

$$\vec{a} = -\vec{i}R\omega^2 \sin \omega t + \vec{j}R\omega^2 \cos \omega t.$$

Пройдений шлях шукаємо за виразом: $S = \int_{t_1}^{t_2} |\vec{v}| dt$;

$$\begin{aligned} S &= \int_0^T |\vec{v}| dt = \int_0^T 2R\omega \sin \frac{\omega t}{2} dt = 2R\omega \left(-\cos \frac{\omega t}{2} \right) \frac{2}{\omega} \Big|_0^T \\ &= 4R \left(-\cos \frac{\omega}{2} \frac{2\pi}{\omega} + \cos 0 \right) = 8R. \end{aligned}$$

Контрольні запитання і завдання

1. Чи може змінюватися швидкість точки $\vec{v}$ при рівномірному русі?
2. Який рух здійснює тіло, якщо кут між напрямком його вектору швидкості та вектором прискорення складають кут 0^0 , π , $\pi/2$, $>\pi/2$, $<\pi/2$?
3. Радіус – вектор точки змінюється за законом $\vec{r} = \alpha t \vec{i} + \beta t^2 \vec{j}$, де α, β відомі сталі величини. Знайти рівняння траєкторії $y(x)$, та залежність від часу кута $\varphi(t)$ між векторами швидкості та прискорення.
4. Частинка починає рух уздовж осі Ox з точки $x=0$ так, що її швидкість $v = \alpha \sqrt{x}$. визначити залежність швидкості та прискорення частинки від часу.

2. Кінематика твердого тіла

2.1 Ступені свободи твердого тіла

Поняття твердого тіла в кінематиці характеризують тим, що відстань між будь якими матеріальними точками цього тіла, які не належать одній прямій не змінюються між собою в процесі розв'язку задачі.

Числом ступенів свободи твердого тіла називається число незалежних параметрів, які однозначно визначають положення тіла в просторі щодо даної системи відліку. Рух твердого тіла багато в чому залежить від числа його ступенів свободи.

Приклад. Якщо диск, не обертається, а може ковзати вздовж нерухомої в даній системі відліку осі Ox . В даній системі відліку диск, має тільки одну ступень свободи – положення диска однозначно визначається, координатою x , відлічуваної уздовж осі, рис.2.1а.

Але якщо диск, крім того, може ще і обертатися, то він набуває ще одну ступінь свободи, до координати x додається кут φ_x обертання диска навколо осі Ox , рис.2.1б. Якщо вісь з диском затиснута в рамці, яка може повертатися навколо вертикальної осі, то число ступенів свободи стає рівним трьом - до x і φ_x додається ще кут φ_y повороту рамки відносно вертикальної осі, рис.2.1в.

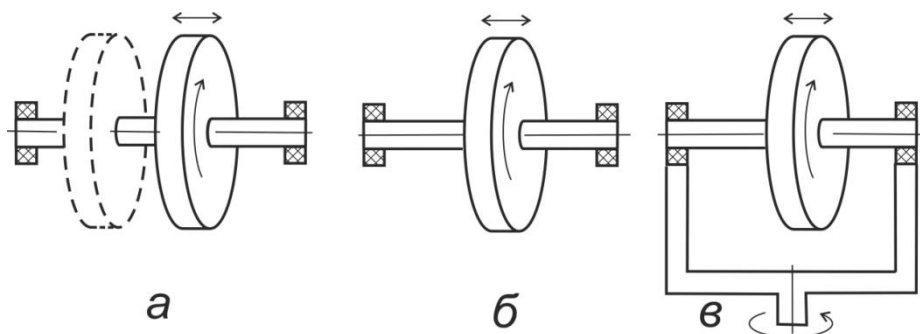


Рис.2.1

Матеріальна точка в просторі має три ступені свободи, наприклад у декартовій системі координат це рівняння, які описують рух за координатами x, y, z . Координати точки можуть визначатися також в

циліндричній (r, φ, z) та сферичній (r, φ, θ) системах відліку, але число параметрів, які однозначно визначають положення точки в просторі дорівнює трьом. Кількість незалежних рівнянь для опису руху матеріальної точки складає $i=1$, $i=2$ або $i=3$. Сам рух матеріальної точки можна характеризувати у форматах 1d, 2d або 3d, рис. 2.2.

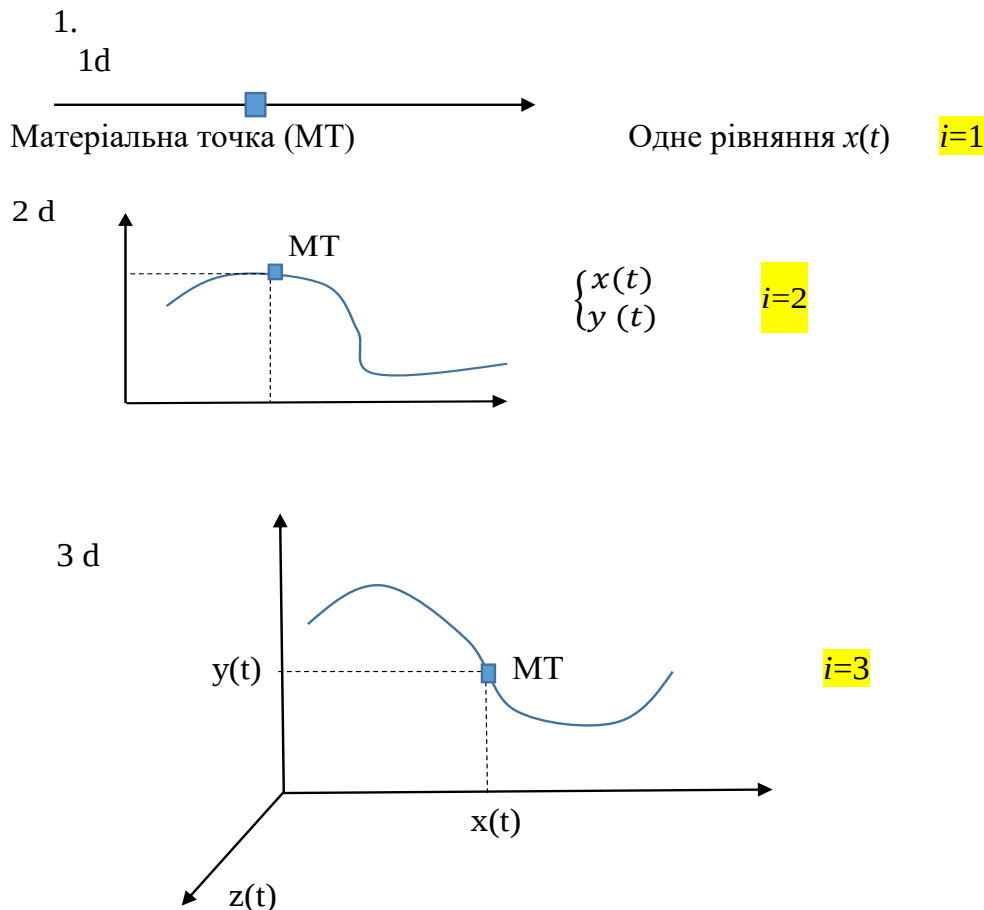


Рис. 2.2

Кількість незалежних рівнянь для опису руху матеріальної точки складає $i=1$, $i=2$ або $i=3$. Відповідно максимальна степінь свободи матеріальної точки складає $i=3$. Якщо припустити, що у нас N матеріальних точок, що рухаються незалежно одна від одної, тоді кількість степенів свободи складе $i=3N$.

Тверде тіло. У фізичній механіці тверде тіло часто розглядається як система жорстко зв'язаних частинок (матеріальних точок), кожна з яких рухається разом із центром мас тіла і в той же час обертається навколо

нього. Відповідно, в кінематиці рух описують як лінійними, так і кутовими величинами.

Розглянемо три матеріальні точки в просторі, з'єднані жорсткими стрижнями довжини $L_{ij}; i, j = 1, 2, 3$, рис.2.3. Положення кожної точки визначається трьома параметрами, але на них накладено зв'язок (2.1).

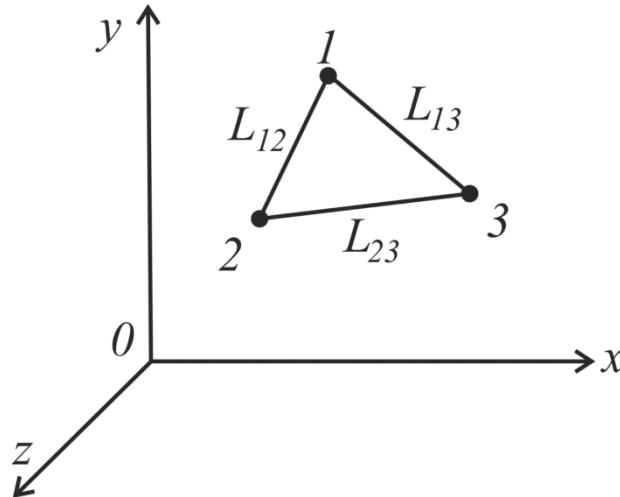


Рис.2.3

$$\begin{cases} L_{12} = \sqrt{(X_1 - X_2)^2 + (Y_1 - Y_2)^2 + (Z_1 - Z_2)^2} \\ L_{23} = \sqrt{(X_2 - X_3)^2 + (Y_2 - Y_3)^2 + (Z_2 - Z_3)^2} \\ L_{13} = \sqrt{(X_1 - X_3)^2 + (Y_1 - Y_3)^2 + (Z_1 - Z_3)^2} \end{cases} \quad (2.1)$$

Кількість степенів свободи для трьох незалежних матеріальних точок складає $i=9$, але в твердому тілі ми маємо вже три рівняння (2.1), які визначають відповідні відстані між точками. Тому кількість степенів свободи визначимо як $i=9-3=6$.

З цих шістьох степенів свободи три степені свободи можна віднести для поступального руху матеріальної точки, а три залишених степені свободи характеризують обертання твердого тіла навколо трьох осей координат. Таким чином далі нам потрібно навчитися описувати обертальний рух твердого тіла.

2.2 Обертальний рух твердого тіла

Рух твердих тіл можна поділити на декілька різновидів: поступальний рух; обертання навколо нерухомої осі; вільний рух; коливальний рух і т.п.

Базовими є поступальний і обертальний рухи, інші різновиди можна розглядати як сукупність цих двох.

Поступальний рух це рух, при якому всі точки тіла або системи матеріальних точок переміщуються паралельними траєкторіями.

Внаслідок поступального руху тіла усі його точки рухаються однаково, тому для вивчення такого руху достатньо вивчити рух однієї точки, що належить цьому тілу.

Рух ізольованої матеріальної точки є поступальним за означенням.

Існують два різновиди обертального руху (ОР):

- а) ОР навколо нерухомої осі це рух, при якому всі точки тіла, рухаючись в паралельних площинах, описують кола з центрами, що лежать на одній нерухомій прямій, яка перпендикулярна до площини цих кіл і називається віссю обертання.
- б) ОР навколо нерухомої точки – рух, при якому всі точки тіла рухаються по поверхнях концентричних сфер з центрами в нерухомій точці. У кожен момент часу цей ОР можна розглядати як обертання навколо миттєвої осі, що проходить через нерухому точку.

Як описувати обертальний рух тіла, якщо різні його точки рухаються по-різному? Для цього потрібні величини, які б характеризували рух всього тіла, а не окремих його точок. Основними кінематичними характеристиками обертального руху є векторні величини: кутове переміщення, кутова швидкість і кутове прискорення.

Розглянемо будь яке тіло, яке може обертатися навколо нерухомої осі Oz , рис. 2.4.

Радіус вектор кожної точки повертається за час Δt на той самий кут $\Delta\varphi$ – кут оберту твердого тіла. Кутове переміщення – це вектор, модуль якого дорівнює куту повороту $\Delta\varphi$, а напрямок визначається правилом свердлика, тобто вектор кутового переміщення спрямований уздовж осі обертання. Вектор $\Delta\varphi$ називають «псевдовектором», тому, що він виконує свої функції

тільки при малих кутових переміщеннях, тобто, коли можна вважати $\Delta\varphi = d\varphi$.

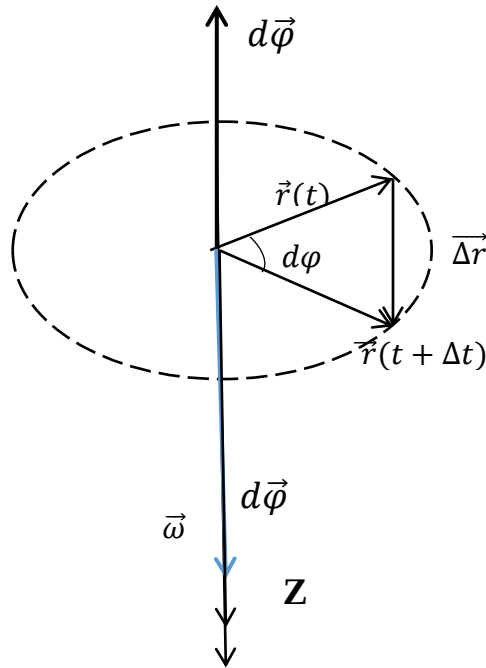


Рис.2.4

Коли проміжок часу $\Delta t \rightarrow dt$, з рис. 2.3 випливає $|\Delta\vec{r}| = |d\vec{r}| = |\vec{r}|d\varphi$, або $|d\vec{r}| = |\vec{r}|d\varphi \sin 90^\circ$.

Скористуємося властивостями векторного добутку, щоб представити вектор переміщення $d\vec{r}$ у вигляді векторного добутку

$$d\vec{r} = [d\vec{\varphi} \vec{r}] \quad (2.2)$$

Звернемо увагу, що вектор кутового переміщення $d\vec{\varphi}$ лежить на осі обертання та його напрямок визначається за правилом правого гвинта. Використання вектора кутового переміщення залишає необхідність показувати напрямок обертання тіла дугами зі стрілочками, як це зроблено на рис.2.1. Поділимо рівняння (2.2) на dt : $\frac{d\vec{r}}{dt} = \left[\frac{d\vec{\varphi}}{dt} \cdot \vec{r} \right]$, отримаємо

$$\vec{v} = [\vec{\omega} \cdot \vec{r}] \quad (2.3)$$

Вектор кутової швидкості $\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}$ чисельно рівний першій похідній від вектору кута повороту $\vec{\varphi}$ за часом, та характеризує швидкість і напрямок обертання

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt} = \omega_x \vec{i} + \omega_y \vec{j} + \omega_z \vec{k}. \quad (2.4)$$

Вектор $\vec{\omega}$ спрямований уздовж осі обертання за правилом правого гвинта, тобто так само, як і вектор кута повороту.

Якщо $\vec{\omega} = \text{const}$, то рух тіла називають рівномірним обертанням навколо нерухомої осі. В цьому випадку

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu, \quad (2.5)$$

де T – період обертання.

Візьмемо похідну у часі від лівої та правої частини рівняння (2.3), отримаємо:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \left[\frac{d\vec{\omega}}{dt} \vec{r} \right] + \left[\vec{\omega} \frac{d\vec{r}}{dt} \right], \quad (2.6)$$

Зміна вектора кутової швидкості з часом характеризується вектором *кутового прискорення* $\vec{\beta}$: $\vec{\beta} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$

Якщо кутова швидкість зростає, то вектор кутового прискорення паралельний вектору кутової швидкості. Якщо кутова швидкість убуває, то вектор кутового прискорення антипаралельний вектору кутової швидкості, рис.2.5.

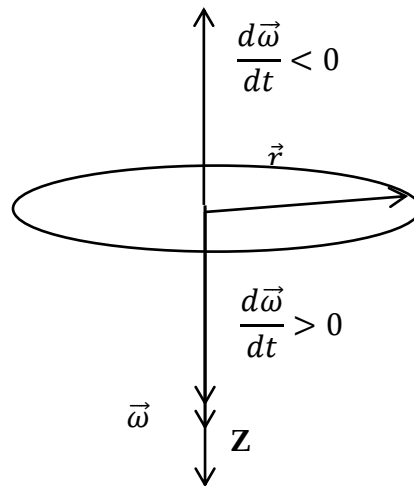


Рис.2.5

2.3 Зв'язок між лінійними та кутовими величинами

При розгляді обертального руху окремих точок твердого тіла величини $d\vec{\varphi}$ – *кутове переміщення*, $\vec{\omega}$ – *кутова швидкість*. Спираючись

на вираз (2.6) виразимо повне прискорення точки через його кутові величини:

$$\vec{a} = [\vec{\beta}\vec{r}] + [\vec{\omega}\vec{v}] \quad (2.7)$$

Перша складова виразу (2.7) має напрямок по дотичній до кола яким рухається матеріальна точка і являє собою тангенціальне прискорення

$$\vec{a}_\tau = [\vec{\beta}\vec{r}] \quad (2.8)$$

З'ясуємо, що означає друга складова виразу (2.7) $[\vec{\omega}\vec{v}] = [\vec{\omega}[\vec{\omega}\vec{r}]]$? Скористаємося правилом розкриття подвійного векторного добутку

$$[\vec{a}[\vec{b}\vec{c}]] = \vec{b}(\vec{a}\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\vec{b}).$$

Врахуємо, що кут між векторами $\vec{\omega}$ та $\vec{r}$ складає 90° , відповідно перший скалярний доданок дорівнює нулю

$$[\vec{\omega}\vec{v}] = \vec{\omega}(\vec{\omega}\vec{r}) - \vec{r}(\vec{\omega}\vec{\omega}) = -\vec{r}\omega^2,$$

Напрямок отриманої складової прискорення співпадає з напрямком нормального прискорення

$$\vec{a}_n = -\vec{r}\omega^2 \quad (2.9)$$

Контрольні запитання і завдання

1. Тверде тіло починає обертатися навколо нерухомої осі з кутовим прискоренням $\beta = \alpha t$, де $\alpha = \text{const}$. Через який час τ кут між векторами повного прискорення та швидкості довільної точки складе кут φ ?
2. Частинка обертається навколо нерухомої осі так, що кутова швидкість залежить від кута повороту за законом $\omega = \omega_0 - \alpha\varphi$, де $\alpha = \text{const}$. В початковий момент руху $\varphi(0)=0$. Визначити залежність від часу кута повороту, кутової швидкості, кутового прискорення тіла.
3. Обруч котиться по горизонтальній площині зі швидкістю v . Визначити швидкості точок, розташованих відносно точки контакту з поверхнею під кутами $\pm \frac{\pi}{2}$ по осі обертання.

3. Основні закони класичної динаміки. Неінерціальні системи відліку

3.1 Основне рівняння динаміки матеріальної точки

Динаміка – розділ механіки, в якому вивчаються причини виникнення механічного руху. Динаміка оперує такими поняттями, як маса, імпульс, сила, енергія.

Маса – фізична величина, яка вважається однією з фундаментальних характеристик матерії, що визначає її інерційні, енергетичні та гравітаційні властивості від макроскопічних об'єктів до атомів і елементарних частинок.

Будь-яке тіло «чинить опір» при спробах зміни його швидкості, через що швидкість тіла неможливо змінити миттєво, навіть на дуже малу величину. Така властивість тіл називається *інертністю*, а мірою інертності тіла є його *маса*. Чим більша інертність, тим більша маса тіла, тож під дією однакової сили швидкість тіла з більшою масою змінюється повільніше, ніж у тіла з меншою масою. Кількісне значення маси тіла встановлюється за першим законом Ньютона.

При швидкостях руху значно меншими швидкості світла, маса має дві основні властивості:

1) Маса є скалярною величиною, у межах ньютонівської механіки, *адитивною* величиною, тобто маса тіла дорівнює сумі мас його складових частин.

2) Інертність є внутрішньою властивістю тіла, тому маса тіла не залежить від його руху, отже й від системи відліку, в якій розглядається рух.

Перший закон Ньютона, визначає поняття маси, як міри інертності тіла. Згідно першого закону Ньютона *в інерціальній системі відліку тіло за*

відсутності взаємодії з іншими тілами зберігає стан спокою або рівномірного прямолінійного руху.

Таке тіло називається вільним, і його рух теж називається вільним рухом, або рухом за інерцією. Перший закон Ньютона також називають *законом інерції*.

Імпульсом, або *вектором кількості руху* в класичній механіці називається міра механічного руху тіла, що для матеріальної точки дорівнює

$$\vec{p}(t) = m\vec{v}(t) \quad (3.1)$$

Отже, вектор імпульсу, як і швидкість, є напрямлений по дотичній до траєкторії руху тіла.

Імпульс є адитивною величиною – імпульс системи дорівнює сумі імпульсів усіх тіл, які входять до її складу: $\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i = \sum_i m_i \vec{v}_i$

Зовнішніми силами механічної системи називають сили, з якими точки системи взаємодіють з тілами і точками, які не входять в дану систему.

Внутрішніми силами механічної системи називають сили взаємодії між собою точок даної системи.

Зміна імпульсу системи може відбуватись лише внаслідок зовнішнього впливу, тобто внаслідок дії зовнішніх сил. Жодними внутрішніми процесами та взаємодією внутрішніх часток не можна змінити сумарний імпульс системи. Припустимо, за проміжок часу Δt в результаті взаємодії з іншими тілами відбулася зміна імпульсу на величину $\Delta \vec{p}$. Відношення $\frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t}$ носить назву середньої сили

$$\frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} = \langle \vec{F} \rangle \quad (3.2)$$

Зробимо перехід коли $\Delta t \rightarrow 0$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}(t) \quad (3.3)$$

Тобто миттєве значення сили є похідною від імпульсу. Врахуємо, що маса тіла як і швидкість може бути залежною від часу, тоді

$$\vec{F}(t) = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m(t)\vec{V}(t))}{dt} = \frac{dm}{dt}\vec{V} + m\frac{d\vec{V}}{dt} \quad (3.4)$$

У випадку, коли маса тіла незмінна з виразу (3.4) для тіла незмінної маси отримаємо

$$\vec{F}(t) = m\frac{d\vec{V}}{dt} = m\vec{a} \quad (3.5)$$

Вирази (3.4) та (3.5) носять назву *основне рівняння динаміки матеріальної точки або другий закон Ньютона*.

Приклад:

Човен, маса якого M , штовхають, передаючи йому початкову швидкість v_0 . Вважаючи, що сила опору води при малих швидкостях змінюється за законом $\vec{F} = -k\vec{v}$, де k коефіцієнт опору води, рис.3.1. Визначити, закон зміни швидкості човна $v(t)$, та який шлях пройде човен до зупинки?

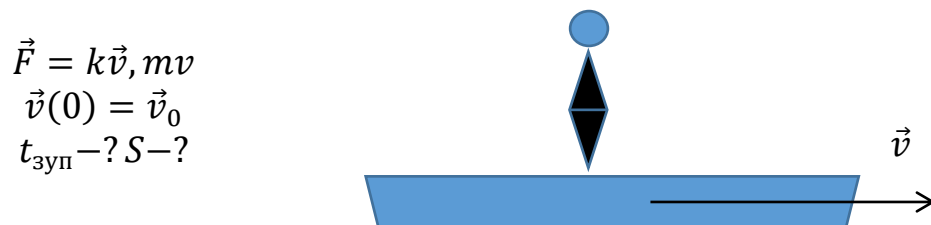


Рис.3.1

Скористаємося рівнянням (3.5) $\vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$;

В проекції на вісь $0x$ отримаємо: $-kv = m\frac{dv}{dt}$.

Розділяємо змінні та інтегруємо: $-k \int_0^t dt = m \int_{v_0}^{v(t)} \frac{dv}{v}$; $-kt = m \ln \frac{v(t)}{v_0}$.

З останнього рівняння, отримаємо

$$\frac{v(t)}{v_0} = e^{-\frac{kt}{m}}; v(t) = v_0 e^{-\frac{kt}{m}}.$$

Під час зупинки швидкість $v(t_{\text{зуп}}) = 0$, це можливо коли $t_{\text{зуп}} = \infty$.

Пройдений шлях складе:

$$S = \int_0^{t_{\text{зуп}}} |\vec{v}| dt = \int_0^{\infty} v_0 e^{-\frac{kt}{m}} dt = v_0 \left(-\frac{m}{k}\right) e^{-\frac{kt}{m}} \Big|_0^{\infty} = \frac{v_0 m}{k} (e^0 - e^{-\infty}) = \frac{v_0 m}{k}.$$

3.2 Закон збереження імпульсу. Третій закон Ньютона

Розглянемо систему, що складається з N матеріальних точок, кожна з яких має імпульс $m_i \vec{v}_i$ і на які не діють зовнішні сили, рис.3.2.

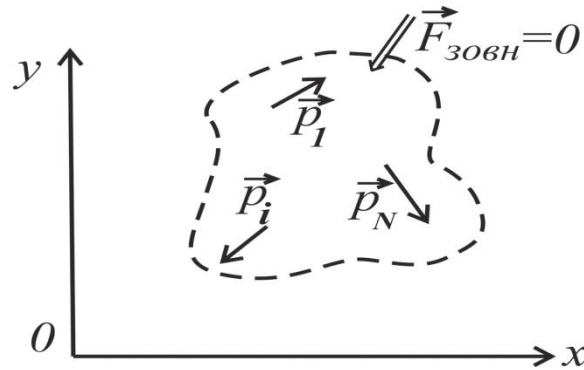


Рис.3.2

Припустимо, що в момент часу t сумарний імпульс системи складає

$\sum_{i=1}^N \vec{p}_i(t)$, а в момент часу $t+\Delta t$ він має значення $\sum_{i=1}^N \vec{p}_i(t+\Delta t)$. Тоді, зміна

імпульсу системи матеріальних точок пронормована на проміжок часу Δt

приводить нас до зовнішньої сили: $\frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} = \frac{\sum \vec{p}_i(t+\Delta t) - \sum \vec{p}_i(t)}{\Delta t} = \vec{F}_{\text{зовн}}$.

При відсутності зовнішніх сил сумарний імпульс замкнутої ізольованої системи матеріальних точок $\sum \vec{p}_i(t)$, є величина незмінна, що і є одним із фундаментальних законів фізики – *закон збереження імпульсу*.

Якщо $\sum \vec{F}_{\text{зовн}} = 0$, то для системи, з двох частинок закон збереження імпульсу приймає вигляд: $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \text{const}$. Диференціюємо останнє рівняння: $\frac{d\vec{p}_1}{dt} + \frac{d\vec{p}_2}{dt} = 0$.

Використаємо вираз (3.3) для визначення сили: $\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} = 0$, звідки отримаємо *третій закон Ньютона*: сили, з якими два тіла діють одне на одне, завжди рівні по модулю і напрямлені у протилежні боки вздовж прямої, що з'єднує тіла, $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$.

На відміну від окремих частинок, імпульс всієї системи можуть змінювати лише зовнішні сили. $\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}$, швидкість зміни імпульсу довільної системи дорівнює сумарній зовнішній силі, що діє на систему.

Приклад 1.

Людина маси m переходить в човні з корми до носа. Внаслідок руху людини човен набуває швидкість відносно берега. Вважаючи систему людина – човен замкненою, знайти відстань пройдену човном відносно берега $x_{\text{ч}}$, якщо довжина човна L а його маса M ?

Розв'язок. Позначимо швидкість людини відносно човна $V_{\text{лч}}$, а швидкість човна відносно берега $V_{\text{чб}}$. Скористаємося законом збереження імпульсу

$$\sum \vec{p}_i(t) = \text{const}.$$

Запишемо цей закон в проекції на вісь Ox . При цьому не забуваємо, що швидкість людини має бути визначена відносно берега:

$$0 + 0 = m(V_{\text{лч}} - V_{\text{чб}}) - MV_{\text{чб}}.$$

Звідки враховуючи, що час руху човна та людини співпадають, знаходимо,

$$x_{\text{ч}} = \frac{Lm}{m + M}.$$

Приклад 2

Відома маса точки m і рівняння її руху $x = f_1(t), y = f_2(t), z = f_3(t)$. Знайти модуль та напрямок рівнодіючої сил, прикладених до точки.

Це завдання вирішується наступним шляхом:

$$F_x = ma_x = mx'', F_y = ma_y = my'', F_z = ma_z = mz'',$$

$$F_{\text{рівнод}} = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2};$$

$$\cos \alpha = \frac{F_x}{F_{\text{рівнод}}}; \cos \beta = \frac{F_y}{F_{\text{рівнод}}}; \cos \gamma = \frac{F_z}{F_{\text{рівнод}}}.$$

Приклад 3.

Рівняння руху точки масою m задане координатами: $x = r \cos(kt)$; $y = r \sin(kt)$. Визначити рівнодіючу прикладених до точки сил.

Виключаючи час t із рівнянь руху, знаходимо рівняння траєкторії точки:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Траєкторія – коло радіусом r . Визначаємо проекції прискорення точки на осі координат: $a_x = x'' = -k^2 r \cos(kt)$; $a_y = y'' = -k^2 r \sin(kt)$;

Знаходимо проекції рівнодіючої сили: $F_x = ma_x = -mk^2 r \cos(kt)$,
 $F_y = ma_y = -mk^2 r \sin(kt)$.

Визначаємо модуль та напрямок рівнодіючої сили:

$$F_{\text{рівнод}} = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{(-mk^2 r \cos(kt))^2 + (-mk^2 r \sin(kt))^2} = mk^2 r$$
$$\cos \alpha = \frac{F_x}{F_{\text{рівнод}}} = \frac{-mk^2 r \cos(kt)}{mk^2 r} = -\cos(kt) ; \cos \beta = -\sin(kt).$$

3.3 Неінерціальні системи відліку

Механічні явища, які ми розглядали, відбувалися в так званих інерціальних системах відліку (ІСВ). Приклади ІСВ: геліоцентрична система відліку, пов'язана з Сонцем і нерухомими зірками. Ще один приклад ІСВ, це, так звана лабораторна система відліку, пов'язана з поверхнею Землі. Це теж ІСВ, оскільки обертання Землі і рух її по еліптичній орбіті практично не впливає на рух тіл, і у більшості випадків лабораторних експериментів систему відліку, пов'язану із Землею, можна вважати ІСВ. В таких системах тіло, звільнене від взаємодії з іншими тілами, буде рухатися прямолінійно та рівномірно за інерцією. Такий рух вкладається в рамки І закону Ньютона. Проте, вільне тіло це фізична абстракція. Навіть Земля, в силу свого добового обертання призводить до появи сил, відмінних від сил гравітації. Як приклад, існує залежність

прискорення вільного падіння тіла від географічної широти. Це пов'язано з наявністю неінерціальних систем відліку (НСВ) – систем відліку, що рухаються з прискоренням, або обертається щодо ІСВ.

З'ясуємо питання про перетворення прискорень та про справедливність законів Ньютона в неінерціальних системах відліку. Для цього розглянемо рух тіла в двох системах відліку: інерціальній K і неінерціальні K' системах відліку, рис.3.3.

Неінерціальна система відліку K' рухається відносно інерціальної системи K (може бути поступальний рух ($\vec{a} \neq 0$), та обертальний рух $\vec{\omega}, \vec{\beta} \neq 0$). Згідно з рис.3.3

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{r}_1 = \vec{r}_0(t) + |\vec{r}_1(t)|\vec{e}_{r1}(t); \quad (3.6)$$

$$\frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{d\vec{r}_0(t)}{dt} + \frac{d|\vec{r}_1(t)|}{dt}\vec{e}_{r1}(t) + |\vec{r}_1|\frac{d\vec{e}_{r1}(t)}{dt}. \quad (3.7)$$

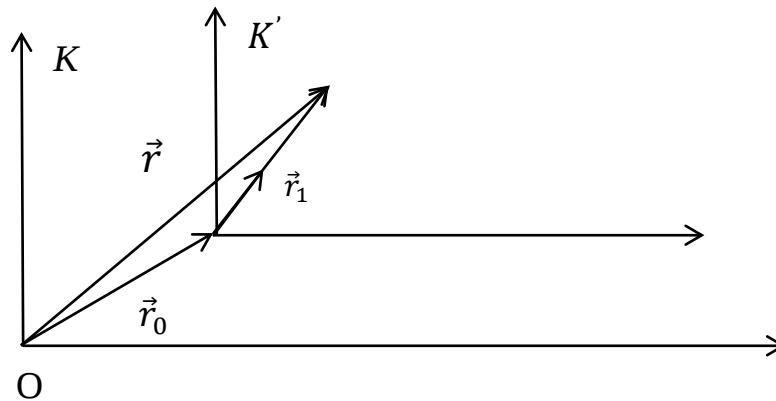


Рис.3.3

У виразі (3.7) складові мають наступні значення: $\vec{V}_{\text{абс}} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}$ – абсолютна швидкість тіла в системі відліку K , $\vec{V}_0 = \frac{d\vec{r}_0(t)}{dt}$ – швидкість поступального руху НСВ відносно інерціальної.

Відносна швидкість в НСВ:

$\vec{V}_{\text{відносна}} = \frac{d|\vec{r}_1(t)|}{dt}\vec{e}_{r1}(t) = |\vec{V}_{\text{відносна}}(t)|\vec{e}_{r1}(t)$, де $\vec{e}_{r1}(t)$ – одиничний вектор, $|\vec{e}_{r1}(t)|=1$, напрямок якого може змінюватися у часі. З'ясуємо значення доданку $|\vec{r}_1|\frac{d\vec{e}_{r1}(t)}{dt}$.

Скористаємося рис.3.4.

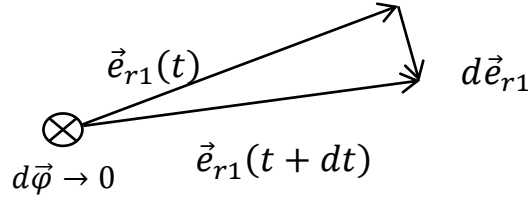


Рис. 3.4

Звідки: $\vec{e}_{r1} = \vec{e}_{r1}(t+dt) + \vec{e}_{r1}(t)$, $d\vec{e}_{r1} \perp \vec{e}_{r1}$, $|d\vec{e}_{r1}| = |\vec{e}_{r1}|d\varphi$;

поділимо рівняння на dt : $\frac{d|\vec{e}_{r1}|}{dt} = |\vec{e}_{r1}| \frac{d\varphi}{dt} = \omega$, отримаємо

$$\left| \vec{r}_1 \frac{d\vec{e}_{r1}(t)}{dt} \right| = |\vec{r}_1| \omega \sin 90^\circ.$$

Скористаємося властивостями векторного добутку,

$$|\vec{r}_1| \frac{d\vec{e}_{r1}(t)}{dt} = [\vec{\omega} \vec{r}_1] \quad (3.8)$$

В остаточному вигляді швидкість точки в системі відліку K набуде

вигляду: $\vec{V}_{абс} = \vec{V}_0 + |\vec{V}_{відносна}(t)|\vec{e}_{r1}(t) + [\vec{\omega} \cdot \vec{r}_1]$;

$$\vec{V}_{абс} = \vec{V}_0 + |\vec{V}_{відносна}(t)|\vec{e}_{r1}(t) + [\vec{\omega} \cdot |\vec{r}_1(t)|\vec{e}_{r1}(t)] \quad (3.9)$$

Для отримання прискорення проведемо диференціювання виразу (3.9).

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{V}_{абс}}{dt} &= \frac{d\vec{V}_0}{dt} + \frac{d|\vec{V}_{відн}|}{dt} \vec{e}_{r1} + |\vec{V}_{відн}| \frac{d\vec{e}_{r1}}{dt} + \left[\frac{d\vec{\omega}}{dt} \vec{r}_1 \right] \\ &+ \left[\vec{\omega} \left(\frac{d|\vec{r}_1|}{dt} \vec{e}_{r1} + \vec{r}_1 \frac{d\vec{e}_{r1}}{dt} \right) \right] \end{aligned}$$

Привласнимо назви прискоренням: $\frac{d\vec{V}_{абс}}{dt} = \vec{a}_{абс}$ – абсолютне

прискорення; $\frac{d\vec{V}_0}{dt} = \vec{a}_0$ поступальне прискорення НСВ; $\frac{d|\vec{V}_{відн}|}{dt} \vec{e}_{r1} = \vec{a}_{відн}$ – відносне прискорення.

Аналогічно з попередніми випадками, відносне прискорення можна

представити через векторний добуток: $|\vec{V}_{відн}| \frac{d\vec{e}_{r1}}{dt} = [\vec{\omega} \vec{V}_{відн}]$.

Інші складові прискорення: $\left[\frac{d\vec{\omega}}{dt} \vec{r}_1 \right] = [\vec{\beta} \vec{r}_1]$; $\left[\vec{\omega} \frac{d|\vec{r}_1|}{dt} \vec{e}_{r1} \right] = [\vec{\omega} \vec{V}_{відн}]$;

$$\left[\vec{\omega} \frac{d|\vec{r}_1|}{dt} \vec{e}_{r1} \right] = [\vec{\omega} \vec{V}_{відн}];$$

$$\left[\vec{\omega} |\vec{r}_1| \frac{d|\vec{r}_1|}{dt} \right] = [\vec{\omega} [\vec{\omega} |\vec{r}_1|]] = -\vec{r}_1 \omega^2.$$

Остаточно:

$$\vec{a}_{абс} = \vec{a}_0 + \vec{a}_{відн} + 2|\vec{\omega} \vec{V}_{відн}| + [\vec{\beta} \vec{r}_1] - \vec{r}_1 \omega^2. \quad (3.10)$$

З виразу (3.10) маємо відносне прискорення в НСВ

$$\vec{a}_{відн} = \vec{a}_{абс} - \vec{a}_0 + 2|\vec{V}_{відн} \vec{\omega}| + [\vec{r}_1 \vec{\beta}] + \vec{r}_1 \omega^2 \quad (3.11)$$

Помножив рівняння на масу m , отримаємо рівняння для відносної сили, що діє на тіло в НСВ:

$$\vec{F}_{відн} = m\vec{a}_{абс} - m\vec{a}_0 + m\vec{r}_1 \omega^2 + 2m[\vec{V}_{відн} \vec{\omega}] + m[\vec{r}_1 \vec{\beta}] \quad (3.12)$$

Серед сил інерції в НСВ виділяють силу Коріоліса

$$\vec{F}_{кор} = 2m[\vec{V}_{відн} \vec{\omega}], \quad (3.13)$$

та відцентрову силу інерції

$$\vec{F}_{відц} = m\vec{r}_1 \omega^2. \quad (3.14)$$

З'ясуємо можливість використання закони Ньютона в НСВ.

У НСВ тіло може прискоритися за рахунок зміни стану руху системи відліку. Таким чином, це прискорення не пов'язано взаємодією з іншими тілами. Тому I закон Ньютона втрачає свій сенс в НСВ.

За II законом Ньютона, рух тіл в неінерціальних системах відліку можна описувати тими ж рівняннями руху, що і в інерціальних, якщо у додаток до сил, зумовлених впливом тіл одне на одного, враховувати сили інерції. Розглянемо вираз (3.13), з точки зору відсутності будь якого руху НСВ. Вираз (3.13) в НСВ набуває вигляду $m\vec{a}_{відн} = m\vec{a}_{абс} = \vec{F}$, тобто, співпадає з основним рівнянням динаміки матеріальної точки в ІСВ.

Рух НСВ призводить до появи сил інерції, які не можна окремо одна від одної виміряти, а можна лише розрахувати. Тому, II закон Ньютона в НСВ має вигляд:

$$m\vec{a}_{відн} = \vec{F} + \vec{F}_{ін}, \quad (3.15)$$

де $\vec{F}_{in}$ – сили інерції, $\vec{F}$ – сила, яка є результатом взаємодії за II законом Ньютона

$$\vec{F}_{in} = -m\vec{a}_0 + \vec{F}_{відц} + \vec{F}_{кор} + m[\vec{r}_1\vec{\beta}] \quad (3.16)$$

Наприклад, в задачах про рух тіл на поверхні Землі користуються системами відліку пов'язаними з її поверхнею. Такі системи відліку неінерціальні, бо Земля здійснює добове обертання, тому діють Коріоліса та відцентрова сили.

3.4 Залежність прискорення вільного падіння від географічної широти

На тіло, що знаходиться на поверхні Землі діють сила гравітації та відцентрова сила інерції. За законом гравітації сила гравітації $F_{гр} = G \frac{Mm}{R^2}$, де M, R – маса та радіус Землі, m – маса тіла, G – гравітаційна стала.

Вектор $\vec{g}_{абс} = \frac{\vec{F}_{гр}}{m}$ характеризує гравітаційне поле Землі та його спрямовано до центру Землі, рис. 3.5.

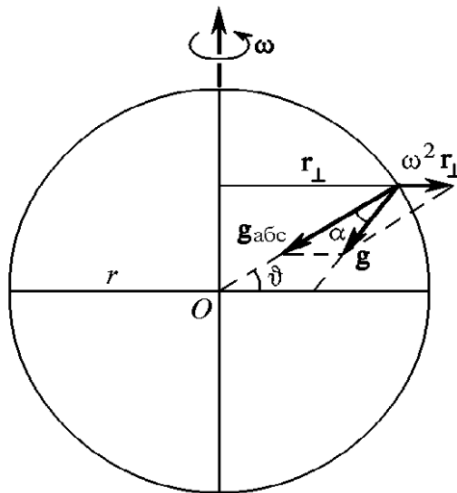


Рис. 3.5

Обертання Землі з кутовою швидкістю ω створює відцентрову силу інерції. Спираючись на вираз (3.14) її значення запишемо

$F_{\text{відц}} = mr_{\perp} \omega^2 = mR \cos(\vartheta) \omega^2$. Сума сил гравітації та відцентрової сили за II законом Ньютона в НСВ Земля утворюють результуючу силу $m\vec{a}_{\text{відн}} = m\vec{g}$.

Величина $\vec{g}$ називається вектором вільного падіння, а $m\vec{g} = \vec{P}$ називають вагою тіла. За рис. 3.5 напрямок вектору $\vec{g}$ спрямовано під кутом α від напрямку до центру Землі.

Знайдемо залежність абсолютного значення прискорення вільного падіння від географічної широти ϑ . За теоремою косинусів

$$g^2 = g_{\text{абс}}^2 + (\omega^2 R \cos \vartheta)^2 - 2g_{\text{абс}} \omega^2 R \cos \vartheta. \quad (3.17)$$

Після алгебраїчних перетворень виразу, отримаємо

$$g \approx g_{\text{абс}} - \omega^2 R \cos^2 \vartheta \quad (3.18)$$

Співвідношення (3.18) визначає залежність величини прискорення вільного падіння від широти місцевості ϑ . Найбільше значення $g_{\text{max}} = g_{\text{абс}}$ приймає g на полюсах. Найменше $g_{\text{min}} \approx g_{\text{абс}} - \omega^2 R$ – на екваторі.

Контрольні запитання і завдання

1. Брусок маси m лежить на горизонтальній поверхні з коефіцієнтом тертя k . Яку мінімальну силу треба прикласти до бруска, щоб він почав рухатись?
2. Тіло, маси m , яке лежить на горизонтальній поверхні, прикладена вертикальна сила $F=at$, де a – задана стала. Знайти рівняння руху тіла $y=y(t)$.
3. Куля пробиває дошку товщини h . Швидкість кулі перед дошкою v_1 вилітає з неї зі швидкістю v_2 . Знайти час руху кулі в дошці, вважаючи силу опору пропорційною квадратові швидкості.
4. Тіло маси m рухається вздовж меридіана зі швидкістю v . Визначити величину відцентрової та коріолісової сил інерції у випадку, коли тіло знаходиться на широті φ .

4. Робота сили. Енергія

4.1 Робота сили

З поняттям роботи сили перший раз ми стикаємося на уроках фізики в школі. Якщо тіло здійснює прямолінійне переміщення $\Delta \vec{r}$, при цьому до напрямку переміщення на тіло діє стала за напрямком та величиною сила $\vec{F}$, яка утворює певний кут α з напрямком вектора переміщення, робота становить $\Delta A = F \Delta r \cos \alpha = (\vec{F} \Delta \vec{r})$.

При розгляді руху тіла по складній траєкторії, вектор сили змінюється. Тоді можна розбити траєкторію на маленькі відрізки, кожен з яких характеризуватиме вектор $d\vec{r}$, а елементарна робота буде складати $dA = |\vec{F}| |d\vec{r}| \cos \alpha = (\vec{F} d\vec{r})$.

Роботу на проміжку від точки 1 до точки 2, можна представити у вигляді суми (в подальшому інтегралу) елементарних робіт. Використаємо представлення скалярного добутку в декартовій системі координат, отримаємо вираз для роботи при довільній формі траєкторії руху тіла від t_1 до t_2

$$\begin{aligned} A_{12} = \sum dA &= \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} d\vec{r} = \int_{t_1}^{t_2} |\vec{F}| |d\vec{r}| \cos \alpha = \int_{t_1}^{t_2} (F_x dx + F_y dy + \\ &+ F_z dz) = \int_{t_1}^{t_2} F_x dx + \int_{t_1}^{t_2} F_y dy + \int_{t_1}^{t_2} F_z dz. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Приклад

Визначити роботу A_{12} по переміщенню матеріальної точки з положення t_1 в положення t_2 під дією сили $|\vec{F}| = \text{const}$. Траєкторія має форму кола з радіусом R .

Згідно з рис. 4.1 модуль вектора переміщення можна виразити через елементарний кут $d\alpha$, тобто $dr = R d\alpha$. Тоді робота

$$A_{12} = \int_{t_1}^{t_2} |\vec{F}| |d\vec{r}| \cos \alpha = \int_{\alpha=0}^{\alpha=90^\circ} FR \cos \alpha d\alpha = FR \sin \alpha \Big|_0^{90^\circ} = FR.$$

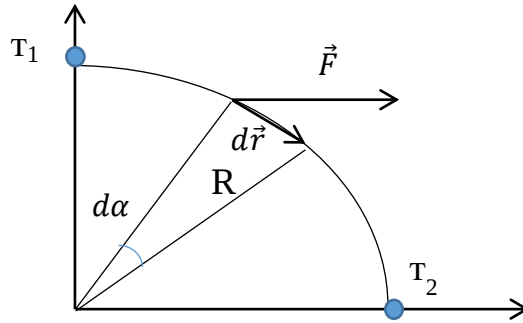


Рис.4.1

Можна, також, скористатися записом роботи в декартовій системі координат, тоді

$$A_{12} = \int_{T_1}^{T_2} (F_x dx + F_y dy + F_z dz) = \int_{T_1}^{T_2} F_x dx = F \int_{x=0}^{x=R} dx = FR.$$

4.2 Теорема про зміну кінетичної енергії

Скористаємося основним рівнянням динаміки матеріальної точки

$\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$. Запишемо це рівняння в проекціях на осі координат, потім домножимо ліву та праву частини кожного рівняння відповідно на dx , dy та dz .

$$\begin{cases} F_x = m \frac{dv_x}{dt} & \cdot dx \\ F_y = m \frac{dv_y}{dt} & \cdot dy \\ F_z = m \frac{dv_z}{dt} & \cdot dz \end{cases} \quad (4.2)$$

Перше з системи рівняння можна перетворити до вигляду: $F_x dx = m \frac{dv_x}{dt} dx = mv_x \frac{dx}{dt} = md \left(\frac{v_x^2}{2} \right) = d \left(\frac{mv_x^2}{2} \right)$; Після аналогічної математичної дії з двома останніми рівняннями системи отримаємо:

$$\begin{cases} F_x dx = d \left(\frac{mv_x^2}{2} \right) \\ F_y dy = d \left(\frac{mv_y^2}{2} \right) \\ F_z dz = d \left(\frac{mv_z^2}{2} \right) \end{cases} \quad (4.3)$$

Додаючи ліві та праві частини системи рівнянь (4.3) отримаємо

$$F_x dx + F_y dy + F_z \cdot dz = d \left(\frac{mv_x^2}{2} + \frac{mv_y^2}{2} + \frac{mv_z^2}{2} \right) = d \left(\frac{mv^2}{2} \right). \quad (4.4)$$

Вираз $\frac{mv^2}{2}$ носить назву «кінетична енергія». Ліва сторона виразу (4.4)

є елементарною роботою, тому

$$dA = d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = dE_K \quad (4.5)$$

Отриманий вираз носить назву теореми про зміну кінетичної енергії в диференціальній формі. Інтегруємо вираз (4.5), отримаємо вираз для теореми в інтегральній формі

$$A_{12} = \int dA = \int_{T_1}^{T_2} dE_K = \int_{E_{K1}}^{E_{K2}} dE_K = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}.$$

4.3 Характеристика сил в природі

Якщо задана функція сили $F=F(x,y,z,t)$, це означає, що задано силове поле. В ситуації, коли силове поле не залежить від часу, то таке поле є стаціонарним: $F=F(x,y,z)$, але $F(t)=\text{const}$ – стаціонарне силове поле. У випадку, коли робота сили не залежить від шляху переміщення тіла, а визначається лише початковим та кінцевим положенням тіла, то таке поле називається потенціальним. Наприклад сила гравітації, кулонівська сила.

Математично критерій потенціальності можна записати у вигляді:

$$\oint (\vec{F} d\vec{r}) = 0 \quad (4.6)$$

Вираз (4.6) означає, що робота по переміщенню тіла в потенціальному силовому полі дорівнює нулю. При переміщенні тіла з однієї точки поля в іншу виконується робота, яка дорівнює зміні потенціальної енергії з оберненим знаком:

$$A_{12} = U_1 - U_2 = -(U_2 - U_1) = -\Delta U \quad (4.7)$$

4.4 Зв'язок між силою та потенціальною енергією

Розглянемо перехід тіла з положення т.А в т.В. Ці дві точки розташовані настільки близько, що можна вважати цей рух по прямій. Користуючись графічною інтерпретацією похідної можна виразити роботу та відповідну зміну потенціальної енергії через часткову похідну

наступним чином: $dA = -\frac{\partial U}{\partial r} dr = (\vec{F} d\vec{r})$. З цього виразу сила визначається через часткову похідну

$$\vec{F} = -\frac{\partial U}{\partial r} \vec{e}_r, \quad (4.8)$$

де $\vec{e}_r$ – одиничний вектор, $|\vec{e}_r| = 1$.

В декартовій системі координат перехід AB замінюють на рух трьома кроками, кожен раз паралельно одній з осей. Сумарна робота при такому русі складе $dA = -\left(\frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz\right)$. Робота при цьому може бути представлена, як $dA = (\vec{F} d\vec{r}) = (F_x dx + F_y dy + F_z dz)$. Прирівняв лівими сторонами останні два рівняння, отримаємо:

$$\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k} = -\left(\frac{\partial U}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{k}\right), \quad (4.9)$$

$$\text{звідки} \begin{cases} F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} \\ F_y = -\frac{\partial U}{\partial y} \\ F_z = -\frac{\partial U}{\partial z} \end{cases}$$

Знак «-» означає, що сила спрямована в бік зменшення потенціальної енергії і є тим більшою, чим швидше зменшується потенціальна енергія в цьому напрямі. Вираз (4.8) можна подати у вигляді

$$\vec{F} = -\left(\frac{\partial U}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{k}\right) = -\vec{\nabla}(U), \text{ де } \nabla - \text{оператор «набла»}$$

$$\vec{\nabla}U = \left(\frac{\partial U}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{k}\right) \quad)$$

$$\vec{F} = -\text{grad}U \quad (4.11)$$

Сила, що діє на частинку, дорівнює градієнту від потенціальної енергії цієї частинки, взятому з протилежним знаком.

4.5 Закон збереження повної енергії

Скористаємося теоремою про зміну кінетичної енергії та виразом для елементарної роботи сили в потенціальному полі,

$$\begin{cases} dA = d\left(\frac{mv^2}{2}\right) \text{ отримаємо } \left(\frac{mv^2}{2}\right) = -dU, \\ dA = -dU \end{cases}$$

$$\text{звідки } \frac{mv^2}{2} + U = \text{const}$$

$$E_k + U = E_{\text{повн}}, E_{\text{повн}} = \text{const}. \quad (4.12)$$

Тобто, повна енергія, як сума кінетичної та потенціальної енергії, незмінна, що і є сутністю *закону збереження енергії*.

При використанні закону збереження енергії не забуваємо, що повинні бути відсутні джерела незворотних втрат енергії. Наприклад, сили тертя.

4.6 Приклади на використання законів збереження імпульсу (пружний та непружний удари)

Універсальність закону збереження імпульсу робить його дуже важливим як для теорії, так і для практики. В багатьох випадках він дозволяє визначити кінцевий стан системи, не досліджуючи її еволюції в часі, наприклад при аналізі маловивчених систем, як от у фізиці елементарних частинок. Зіткнення молекул, атомів і елементарних частинок в ряді випадків добре підкоряються законам протікання пружного удару, хоча вони і взаємодіють лише за допомогою полів, в першу чергу, електромагнітних.

Загалом при ударі двох тіл, вони можуть обертатися і розлітатися в різні боки. Такий удар складний для розгляду. Найпростіше розглянути центральний або лобовий удар, при якому відносний рух тіл відбувається вздовж однієї прямої.

При непружному ударі частина енергії перетворюється в тепло і механічна система втрачає енергію.

Абсолютно непружним ударом називають такий удар, при якому вся енергія відносного руху тіл переходить у тепло і тіла продовжують рух, як одне ціле.

За законом збереження імпульсу:

$$m_1 \vec{v}_{01} + m_2 \vec{v}_{02} = (m_1 + m_2) \vec{v}, \quad (4.13)$$

де $\vec{v}$ – швидкість новоствореного тіла, як сукупність тіл. Як наслідок

$$\vec{v} = \frac{m_1 \vec{v}_{01} + m_2 \vec{v}_{02}}{m_1 + m_2}. \quad (4.14)$$

Загальна кінетична енергія зменшується, оскільки частина її переходить зазвичай у теплову.

Пружний удар описують законами збереження імпульсу та механічної енергії

$$\begin{cases} m_1 \vec{v}_{01} + m_2 \vec{v}_{02} = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2, \\ \frac{m_1 v_{01}^2}{2} + \frac{m_2 v_{02}^2}{2} = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}, \end{cases} \quad (4.15)$$

За результатами розв'язок цієї системи рівнянь визначають швидкості тіл після удару.

$$\vec{v}_1 = \frac{2m_2 \vec{v}_{02} + (m_2 - m_1) \vec{v}_{01}}{m_1 + m_2}, \quad \vec{v}_2 = \frac{2m_1 \vec{v}_{01} + (m_1 - m_2) \vec{v}_{02}}{m_1 + m_2}. \quad (4.16)$$

Контрольні запитання і завдання

1. Частинка рухається по колу радіуса R так, що її кінетична енергія залежить від пройденого шляху за законом $K = \alpha S^2$, де α – задана стала. Визначити залежність від шляху сили, що діє на частинку $F(S)$.
2. Канат довжини l і маси m лежить на підлозі. Яку мінімальну роботу треба виконати, аби перевести канат у вертикальне положення, підіймаючи його за кінець.
3. Дві частинки з однаковими масами пружно стикаються. Модулі швидкостей частинок до удару v_1 та v_2 , кут між їх напрямками α . Після удару модулі швидкостей u_1 та u_2 . Знайти кут β , під яким розлетяться частинки після удару.

5. Динаміка обертального руху твердого тіла

5.1 Момент імпульсу, момент сили. Основне рівняння динаміки обертального руху твердого тіла

При обертанні тверде тіло розглядається як система жорстко зв'язаних частинок (матеріальних точок), кожна з яких обертається навколо осі. Відповідно, у кінематиці рух описують як лінійними, так і кутовими величинами. В динаміці твердого тіла теж, окрім «звичайних» характеристик (сила, маса, імпульс), стан обертального руху характеризують *моментом імпульсу*, силову дію – *моментом сили*, а інертність – *моментом інерції*.

$\vec{L}_i$ – момент імпульсу i -ої матеріальної точки m_i відносно даної точки O називається векторний добуток векторів $\vec{r}_i$ та $\vec{p}_i$.

$$\vec{L}_i = [\vec{r}_i \vec{p}_i], \quad (5.1)$$

Відповідно, його модуль $|\vec{L}| = |\vec{r}_i| |\vec{p}_i| \sin(\vec{r}_i, \vec{p}_i)$.

Напрямок вектору $\vec{L}$ визначається за правилом правого гвинта, а початок вектор прийнято розміщувати на осі обертання, рис.5.1.

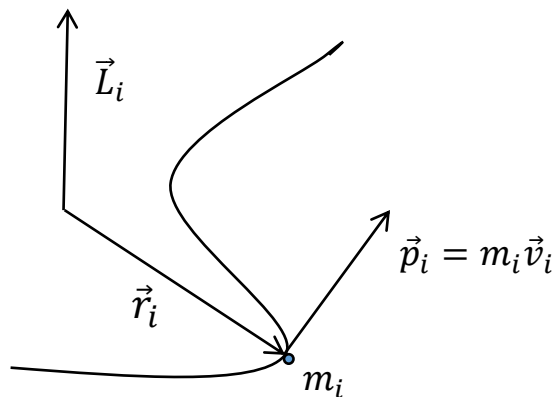


Рис.5.1

$\vec{M}_i$ – Момент сили $\vec{F}_i$ відносно даної точки прийнято визначати через векторний добуток:

$$\vec{M}_i = [\vec{r}_i \vec{F}_i] \quad (5.2)$$

5.2 Основне рівняння динаміки обертального руху твердого тіла.

Момент інерції твердого тіла.

Скористаємося рівнянням (5.1), та візьмемо похідну від лівої та правої його частин:

$$\frac{d\vec{L}_i}{dt} = \left[\frac{d\vec{r}_i}{dt} \times \vec{p}_i \right] + \left[\vec{r}_i \times \frac{d\vec{p}_i}{dt} \right] = 0 + [\vec{r}_i \times \vec{F}_i] = \vec{M}_i \quad (5.2)$$

Отриманий результат носить назву *основне рівняння динаміки обертального руху*:

$$\frac{d\vec{L}_i}{dt} = \vec{M}_i \quad (5.3)$$

5.3 Момент інерції твердого тіла.

Розглянемо тверде тіло, що обертається з кутовою швидкістю, рис.

5.2.

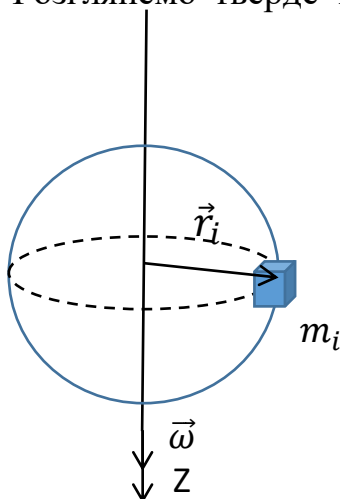


Рис.5.2

Розіб'ємо тіло на сукупність N матеріальних точок, кожна з яких характеризується моментом імпульсу $\vec{L}_i$. Сумарний момент імпульсу системи матеріальних точок: $\vec{L} = \sum_{i=1}^N \vec{L}_i$. Оскільки момент імпульсу матеріальної точки можна представити як $\vec{L}_i = m_i \vec{\omega} r_i^2$, відповідно момент імпульсу твердого тіла складе:

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^N m_i \vec{\omega} r_i^2 = \vec{\omega} \sum_{i=1}^N m_i r_i^2 = \vec{\omega} I, \quad (5.4)$$

де величина I носить назву момент інерції твердого тіла.

Моментом інерції тіла I щодо даної осі називається фізична величина, яка дорівнює сумі добутків елементарних мас m_i матеріальних точок системи на квадрат їх відстані до даної осі r_i^2

$$I = \sum m_i r_i^2 \quad (5.5)$$

Момент інерції залежить від розподілу маси відносно осі обертання.

У разі безперервного розподілу мас ця сума зводиться до інтегралу:

$$I = \int r^2 dm = \int \rho r^2 dV,$$

де ρ є густиною матеріалу тіла, а інтегрування проводиться по всьому об'єму тіла.

Момент інерції твердого тіла являє собою міру інертності твердих тіл при обертальному русі. Момент інерції – величина адитивна: момент інерції тіла відносно деякої осі дорівнює сумі моментів інерції частин тіла відносно тієї ж осі.

Використаємо рівняння (5.3) та отримаємо різновиди запису основного рівняння динаміки обертального руху твердого тіла:

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} = I \frac{d\vec{\omega}}{dt} = I \vec{\beta} = I \frac{d^2\vec{\phi}}{dt^2} \quad (5.6)$$

При обертальному русі визначальним стає не маса тіла, а її розподіл відносно осі обертання, що і визначається через момент інерції твердого тіла відносно осі обертання. Далі познайомимося з методикою розрахунків моментів інерції простих тіл відносно осі обертання Oz .

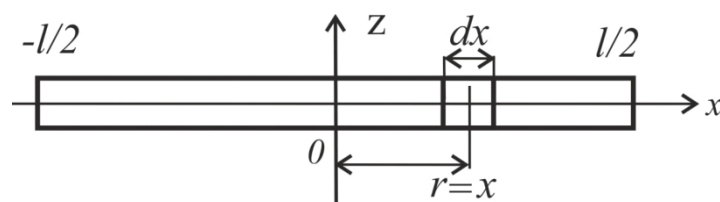
Приклад 1. Знайти момент інерції однорідного стрижня (формат 1d)

l, m , вісь OZ

$I - ?$

Скористаємося визначенням моменту інерції

$$I = \sum m_i r_i^2 = \int x^2 dm$$



Елементарну масу знайдемо з пропорції $dm = \frac{mdx}{l}$

$$I = \int \frac{mdx}{l} x^2 = \frac{m}{l} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} x^2 dx = \frac{m}{l} 2 \int_0^{\frac{l}{2}} x^2 dx = \frac{2m}{l} \frac{x^3}{3} \Big|_0^{\frac{l}{2}} = \frac{2ml^3}{l \cdot 3 \cdot 8} = \frac{ml^2}{12}.$$

Приклад 2.

Знайти момент інерції диска масою m радіусом R (формат 2d)

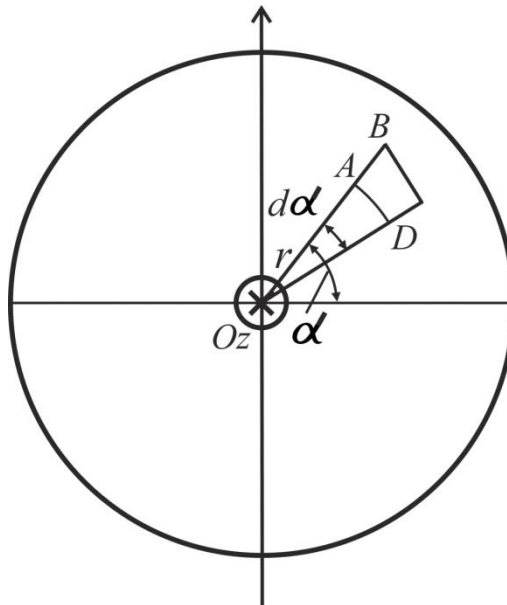


Рис.5.3

Елементарна маса dm займає площадку у вигляді прямокутника зі сторонами AD і AB . З рисунку 5.3 випливає, що $AB=dr$, $AD=r d\alpha$. Площадка, яка має елементарну площу $dS=AB \cdot AD= r dr d\alpha$.

$$\text{Маса } dm = \frac{mdS}{\pi R^2} = \frac{m r dr d\alpha}{\pi R^2}.$$

Відповідно, після інтегрування отримаємо відповідь для моменту інерції диска:

$$I = \int r^2 dm = \iint_{r=0}^R \int_{\alpha=0}^{2\pi} \frac{mr^3 dr d\alpha}{\pi R^2} = \frac{m}{\pi R^2} \int_0^R r^3 dr \int_0^{2\pi} d\alpha = \frac{m}{\pi R^2} \frac{R^4}{4} 2\pi = \frac{mR^2}{2}.$$

Приклад 3. Знайти момент інерції кулі (формат 3d)

$\frac{m, R, OZ}{I=?}$

В кулі маса розподілена по об'єму. Будемо рахувати що елементарна маса займає об'єм dV . Визначимо об'єм dV у вигляді

прямокутного паралелепіпеду з взаємно перпендикулярними сторонами, рис.5.4. $AB=r d\alpha$; $BC=dr$; $AD=r \cos \alpha d\beta$. Відповідно елементарний об'єм: $dV=AC \cdot AD \cdot AE=r^2 dr \cos \alpha d\alpha d\beta$.

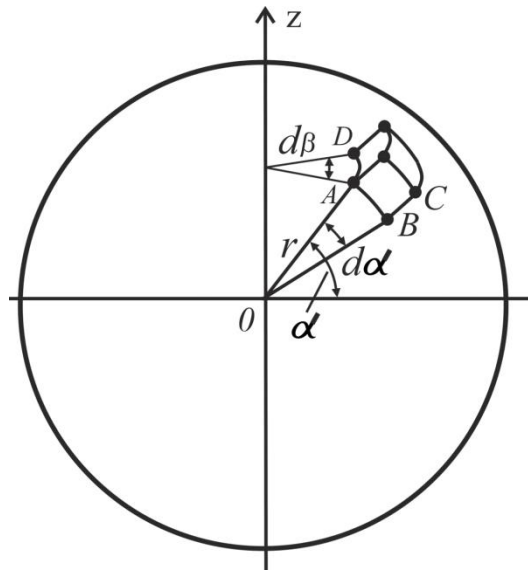


Рис.5.4

Елементарна маса $dm = \frac{3mr^2 dr \cos \alpha d\alpha d\beta}{4\pi R^3} = \frac{m r dr d\alpha}{\pi R^2}$.

Момент інерції кулі $I = \sum m_i r_i^2 = \int (r \cos \alpha)^2 dm$. Після інтегрування отримаємо:

$$\begin{aligned}
 I &= \iiint \frac{m r dr d\alpha}{\pi R^2} (r \cos \alpha)^2 = \\
 &= \frac{3m}{4\pi R^3} \int_0^R r^4 dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \alpha d\alpha \int_0^{2\pi} d\beta = \frac{3m}{4\pi R^3} \frac{R^5}{5} 2 \frac{2}{3} 2\pi = \frac{2mR^2}{5}.
 \end{aligned}
 \tag{5.6}$$

5.4 Центр мас. Теорема Штейнера

5.4.1 Центр мас

Швидкості та імпульси окремих тіл системи можуть суттєво відрізнитись як за модулем, так і за напрямом. Тому вираз імпульсу системи не дає наочного уявлення про її рух як цілого. Проте таке уявлення дає рух деякої точки, що називається *центром мас* (або *центром*

інерції) системи. Його положення визначається *радіусом–вектором* центру мас:

Розглянемо систему матеріальних точок (необов'язково це тверде тіло), рис.5.5.

Запишемо вираз для сумарного імпульсу цієї системи і представимо її у вигляді:

$$\vec{P} = \sum \vec{p}_i = \sum m_i \vec{v}_i = \sum m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{d}{dt} \sum m_i \vec{r}_i = \frac{d}{dt} \sum m_i \vec{r}_i \frac{m}{m} = m \frac{d}{dt} \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i} \quad (5.7)$$

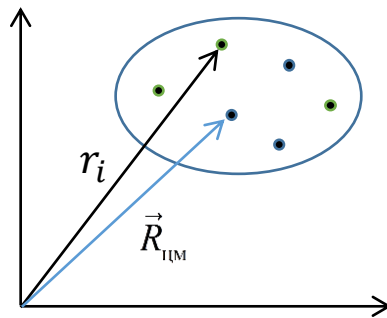


Рис.5.5

Вираз $\vec{R}_{\text{цм}} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i}$ носить назву *радіус – вектор центру мас*.

5.4.2 Теорема Штейнера

У випадку, коли вісь обертання не співпадає з віссю симетрії, знаходити момент інерції можна за допомогою теореми Штейнера.

Припустимо, потрібно знайти момент інерції тіла відносно довільної осі OZ. При цьому, ми знаємо відповідь який момент інерції тіла відносно осі O'Z', яка паралельна даній осі та проходить крізь його центр мас. Відстань між осями позначимо a , рис.5.6.

З рисунку маємо $\vec{r}_i = \vec{a} + \vec{r}'_i$. Тоді, користуючись визначенням для моменту інерції твердого тіла і радіусу – вектора центру мас, отримаємо:

$$\begin{aligned} I_{OZ} &= \sum m_i r_i^2 = \sum m_i (\vec{a} + \vec{r}'_i)^2 = \sum m_i (a^2 + 2(\vec{a}\vec{r}'_i) + (r'_i)^2) \\ &= ma^2 + I_{O'Z'} \\ I_{OZ} &= ma^2 + I_{O'Z'} \end{aligned} \quad (5.8)$$

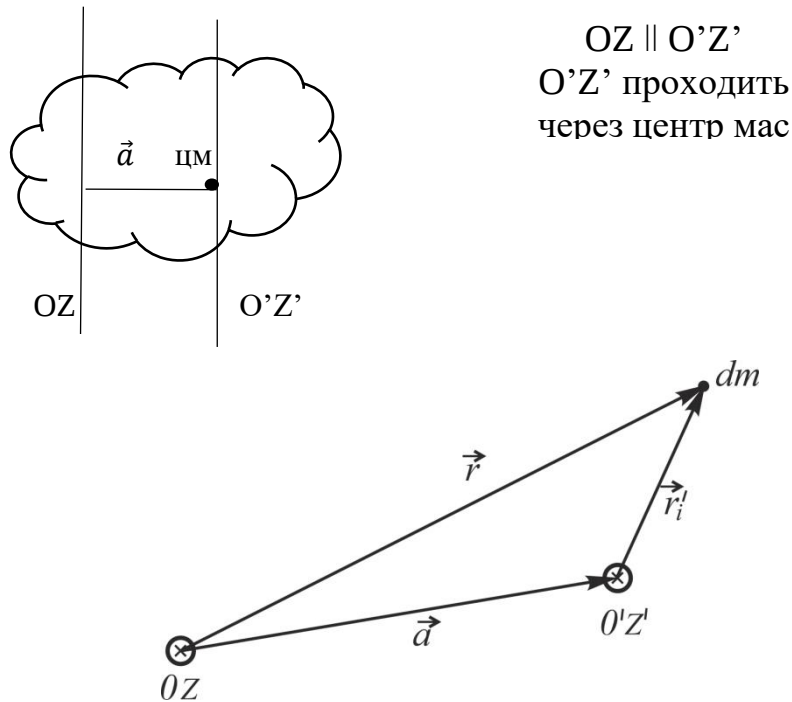


Рис.5.6

Отриманий результат носить назву *теорема Штейнера*: Момент інерції I_{OZ} відносно довільної осі дорівнює доданку моменту інерції $I_{O'Z'}$ відносно осі, що проходить через центр мас тіл, паралельно даній осі, та добутку маси тіла на квадрат відстані a між осями.

Контрольні запитання і завдання

1. Квадратна рамка з тонкого дроту має масу m і сторону a . Визначити момент інерції рамки відносно осі, що проходить:
 - а) через її центр перпендикулярно до її площини;
 - б) через суміжні вершини.
2. Циліндр маси m_1 може обертатися без тертя навколо нерухомої горизонтальної осі. На циліндр намотано тонкий шнур із підвішеною до нього гирею маси m_2 . З яким прискоренням a буде опускатися гиря, якщо її відпустити?
3. Однорідний диск маси m і радіуса R розкрутили до кутової швидкості ω і обережно поклали на шорстку горизонтальну поверхню.

Визначити момент тертя M , що діють на диск, та час руху диска до зупинки τ . Коефіцієнт тертя між диском та поверхнею дорівнює k .

Таблиця 1. Порівняння фізичних величин і законів, що описують поступальний та обертальний рух

Поступальний рух	Обертальний рух
Вектор переміщення $d\vec{r}$	Вектор кутового переміщення $d\vec{\varphi}$
Лінійна швидкість $\vec{v}$	Кутова швидкість $\vec{\omega}$
Прискорення $\vec{a}$	Кутове прискорення $\vec{\beta}$
Сила $\vec{F}$	Момент сили $\vec{M}$
Маса m	Момент інерції I
Імпульс $\vec{p}$	Момент імпульсу $\vec{L}$
Основне рівняння динаміки	
$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$	$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$
$\vec{F} = m\vec{a}$	$\vec{M} = I\vec{\beta}$
Елементарна робота	
$dA = (\vec{F}d\vec{r})$	$dA = (\vec{M}d\vec{\varphi})$
Кінетична енергія	
$E_k = \frac{mv^2}{2}$	$E_k = \frac{I\omega^2}{2}$

РОЗДІЛ 2. ЕЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ

6. Електростатичне поле в вакуумі

6.1 Закон Кулона. Вектор напруженості електростатичного поля.

Принцип суперпозиції

Електричний заряд – фізична величина, що характеризує здатність тіл створювати електромагнітні поля та брати участь в електромагнітній взаємодії. Взаємодію електричних зарядів без врахування їх руху, вивчає електростатика, а зарядів, що рухаються – електродинаміка. Рух електричних зарядів називається електричним струмом.

За сучасними уявленнями електричний заряд є властивістю частинок, з яких складаються атоми й молекули. Ядра атомів містять протони, що мають позитивний заряд, а електрони, що обертаються навколо них – негативний. Заряди протона і електрона рівні за абсолютним значенням, тому, коли їх кількість в атомі є однаковою, то сумарний заряд атома є нульовим. Більшість оточуючих нас атомів є нейтральними.

Іноді нейтральний атом може втратити електрон, або навпаки, захопити додатковий. Такий заряджений атом називається йоном. Співвідношення позитивних і негативних іонів, а також вільних електронів у речовині створює заряд на макроскопічному рівні.

Електричний заряд елементарних частинок: лише дві стабільні частинки, електрон і протон, мають заряд, проте багато з нестабільних частинок також є зарядженими. Заряд всіх частинок (крім кварків) пропорційний заряду електрона, тому його заряд називають одиничним або елементарним $e = -1,602\,176\,487(40) \cdot 10^{-19}$ Кл.

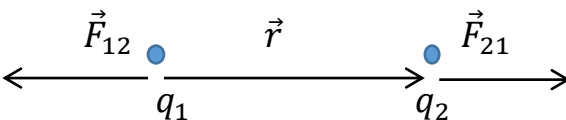
Фарадей експериментально встановив закон збереження зарядів – один із фундаментальних законів фізики. Він полягає в тому, що повний

заряд (алгебраїчна сума зарядів) ізольованої замкнутої системи тіл залишається незмінним при будь-яких процесах, які відбуваються всередині цієї системи.

$$\sum_{i=1}^N q_i = \text{const} \quad (6.1)$$

Заряди взаємодіють між собою за законом Кулона:

Електростатична сила взаємодії F_{12} двох точкових нерухомих зарядів q_1 та q_2 у вакуумі прямо пропорційна добутку абсолютних значень зарядів і обернено пропорційна квадрату відстані r між ними.



$$\vec{F}_{21} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{r}, \quad (6.2)$$

$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ ф/м}$ – електрична стала.

Напруженість електростатичного поля – силова характеристика поля, яка визначається відношенням сили $\vec{F}$, що діє на додатній точковий заряд q (пробний заряд), вміщений в дану точку поля, до величини цього заряду:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_{\text{пр}}}, \quad (6.3)$$

де $q_{\text{пр}}$ – пробний точковий заряд.

Вектор напруженості електростатичного поля точкового заряду складає:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_{\text{пр}}}{r^2 q_{\text{пр}}} \frac{\vec{r}}{r} = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{r} \quad (6.4)$$

Припустимо, що маємо систему точкових зарядів. Тоді сила, що буде діяти на пробний заряд дорівнює добутку векторів всіх сил Кулона від кожного заряду. Нескладно це записати у вигляді рівняння (6.5), а потім поділити його на величину пробного заряду:

$$\frac{\vec{F}}{q_{\text{пр}}} = \frac{\vec{F}_1}{q_{\text{пр}}} + \frac{\vec{F}_2}{q_{\text{пр}}} + \dots + \frac{\vec{F}_N}{q_{\text{пр}}} = \sum_{i=1}^N \frac{\vec{F}_i}{q_{\text{пр}}}; \quad (6.5)$$

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots + \vec{E}_N = \sum_{i=1}^N \vec{E}_i \quad (6.6)$$

Вираз (6.6) представляє форму запису принципу суперпозиції для вектора напруженості електростатичного поля напруженості поля.

Вектор напруженості електричного поля, створеного системою зарядів, в будь-якій точці дорівнює сумі векторів напруженості полів, які створюються в цій точці кожним із зарядів системи окремо.

Одним із способів візуалізації поля є лінії напруженості вектора $\vec{E}$, тобто лінії, в кожній точці яких дотична збігається з вектором напруженості в цій точці. Прикладом більш складного розподілу є безперервний розподіл заряду вздовж кривої лінії, по поверхні, або в об'ємі рис.6.1. У такому випадку тіло розбивають умовно на точкові заряди. Замість суми, в цьому випадку, користуються інтегралом.

$$\vec{E} = \sum \vec{E}_i = \int d\vec{E}. \quad (6.7)$$

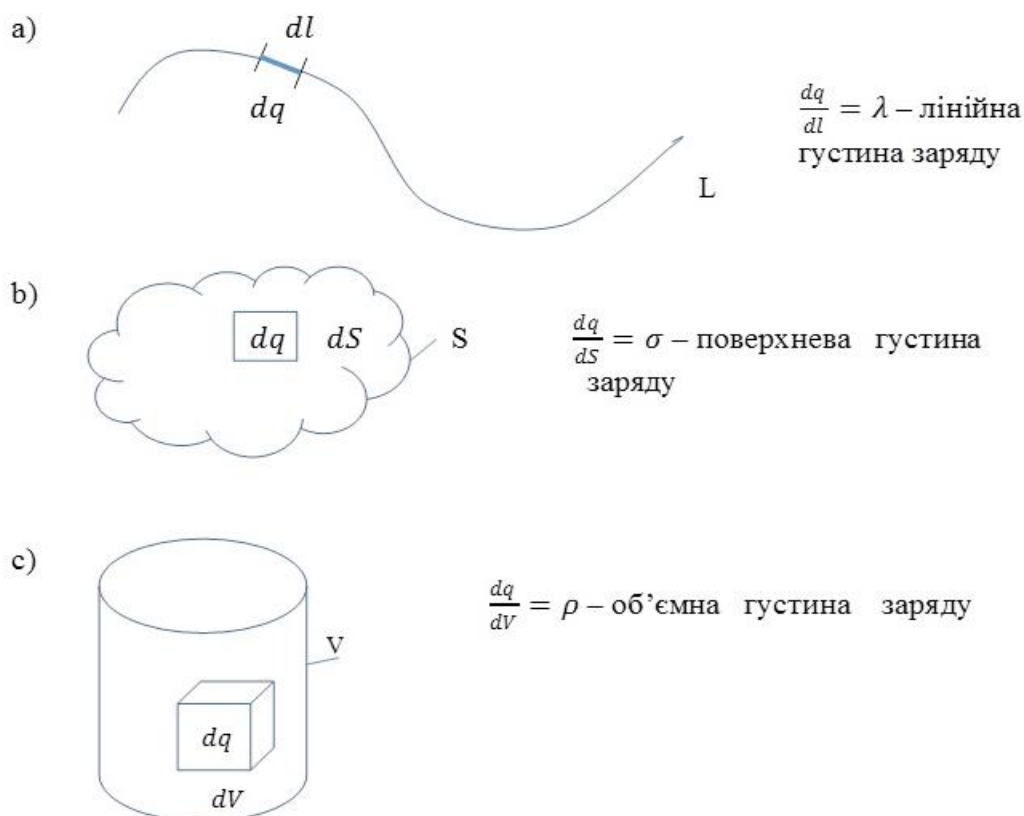


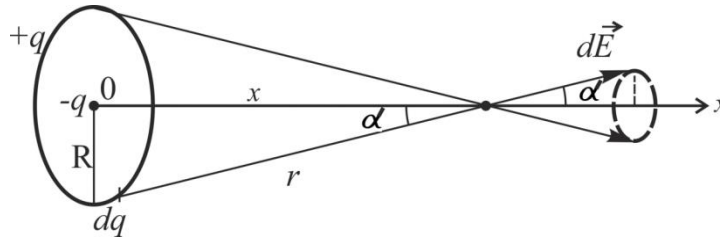
Рис.6.1

6.2. Приклади на використання принципу суперпозиції

Приклад 1. Точковий заряд $-q$ знаходиться у центрі тонкого кільця радіусом R , по якому рівномірно розподілений заряд $+q$. Знайти модуль вектора напруженості електричного поля на осі кільця в точці P , що знаходиться на відстані x від центра кільця, якщо $x \gg R$.

Розв'язання

Спочатку знайдемо вектор E , в точці P від кільця. Для того щоб



використати принцип суперпозиції для вектора E , розіб'ємо кільце на точкові заряди dq . Ці заряди створюють в т. P елементарні вектори $d\vec{E}$. Виходячи з симетрії розташування векторів навколо осі Ox , нескладно довести, що вектор електростатичного поля E_+ спрямовано вздовж осі Ox від кільця. За принципом суперпозиції (6.7) маємо:

$$E_+ = E_x = \int |dE_+| \cos \alpha = \int \frac{dq}{4\pi\epsilon_0(R^2 + x^2)} \cos \alpha ;$$

$$\vec{E}_+ = \frac{qx\vec{i}}{4\pi\epsilon_0(R^2 + x^2)^{3/2}} , \quad (6.8)$$

де $\vec{i}$ – орт вздовж осі Ox

Поле від'ємного точкового заряду $-q$: $\vec{E}_- = \frac{-q\vec{i}}{4\pi\epsilon_0 x^2}$.

За принципом суперпозиції поле обох зарядів складає $\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_-$

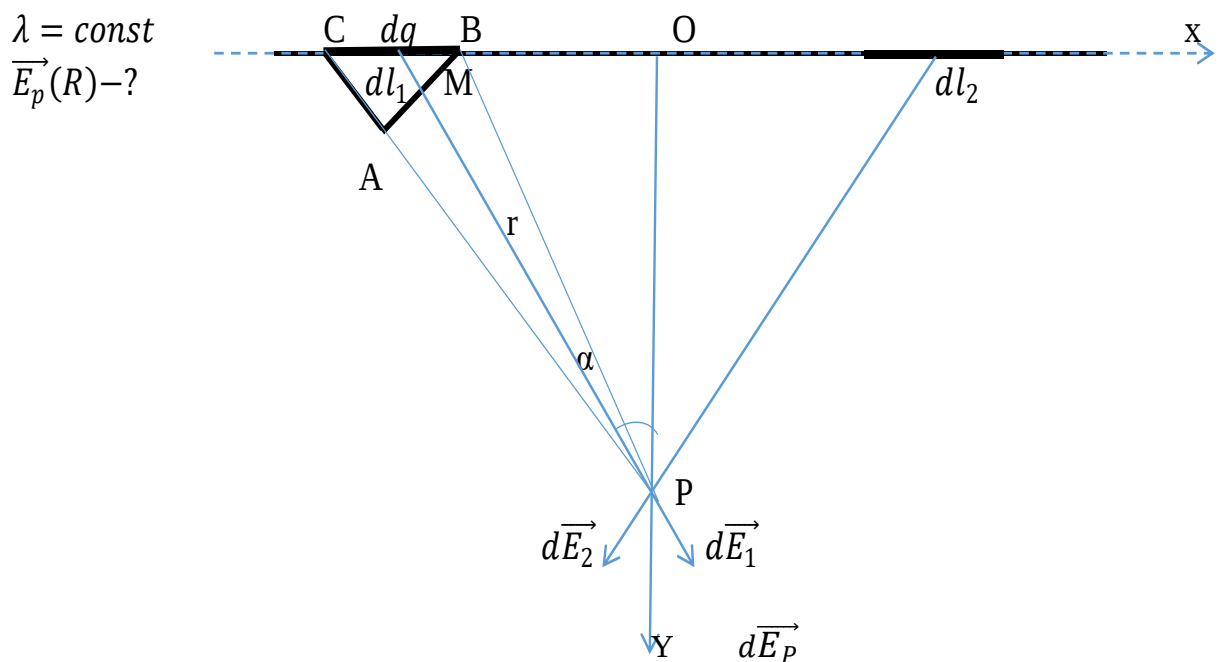
$$\vec{E} = \frac{q\vec{i}}{4\pi\epsilon_0 x^2} \left(\frac{1}{\left(1 + \left(\frac{R}{x}\right)^2\right)^{3/2}} - 1 \right) \approx \frac{-3qR^2\vec{i}}{8\pi\epsilon_0 x^4}.$$

Приклад 2. Тонкий нескінченно довгий стрижень заряджений з лінійною густиною λ . Знайти напруженість $\vec{E}$ електричного поля в точці, що знаходиться на відстані R від стрижня.

За принципом суперпозиції (6.7), цей вираз можна представити у вигляді трьох скалярних рівнянь у відповідних проекціях на осі

$$\begin{cases} E_x = \int dE_x = 0 \\ E_y = \int dE_y \neq 0, \text{ з симетрії задачі тільки одна сумарна проекція} \\ E_z = \int dE_z = 0 \end{cases}$$

вектора $\vec{E}_y$ має не нульовий результат.



$$E_p = E_y = \int dE_y = \int |dE_1| \cos \alpha = \int \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos \alpha.$$

З трикутника $\triangle MOP$ відстань $r = \frac{R}{\cos \alpha}$, дуга $AB = r d\alpha$, далі з трикутника $\triangle ABC$, який є прямокутним, а кут $\angle CBA = \alpha$, знаходимо відрізок $dl = CB = \frac{AB}{\cos \alpha} = \frac{r d\alpha}{\cos \alpha}$, заряд $dq = \lambda dl$, Підставив отримані результати у вираз (6.7), отримаємо

$$E_p = \int \frac{\lambda \frac{r d\alpha}{\cos \alpha} \cos \alpha}{4\pi\epsilon_0 \left(\frac{R}{\cos \alpha}\right)^2} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{R d\alpha \cos \alpha}{\cos^2 \alpha \left(\frac{R}{\cos \alpha}\right)^2} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \alpha d\alpha = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R}. \quad (6.8)$$

Контрольні запитання і завдання

1. Порошина масою $m=10^{-9}\text{г}$ утримується у рівновазі між двома горизонтальними паралельними пластинами, зарядженими до різниці потенціалів $\Delta\varphi=120\text{ В}$. Відстань між пластинами $d=8\text{мм}$. З яким прискоренням буде рухатися порошина, якщо вона втратить $N=10$ електронів?
2. Тонке півкільце радіусом $R = 20\text{ см}$ заряджене рівномірно зарядом $q = 0,70\text{ нКл}$. Знайти модуль напруженості електричного поля в центрі кривизни цього півкільця.
3. Тонке непровідне кільце радіусом R заряджене з лінійною густиною $\lambda = \lambda_0 \cos\varphi$, де λ_0 – постійна; φ – азимутальний кут. Знайти модуль напруженості електричного поля: а) у центрі кільця; б) на осі кільця залежно від відстані x до його центра. Одержаний вираз дослідити, якщо $x \gg R$.
4. Тонкий прямий стрижень довжиною $2a$, що знаходиться у вакуумі, заряджений рівномірно зарядом q . Знайти модуль напруженості електричного поля як функцію відстані r від центра стрижня до точки прямої,
 - а) що перпендикулярна до стрижня і проходить через його центр; б) що збігається з віссю стрижня, якщо $r > a$. Дослідити одержані вирази, якщо $r \gg a$.

7. Потенціал електростатичного поля

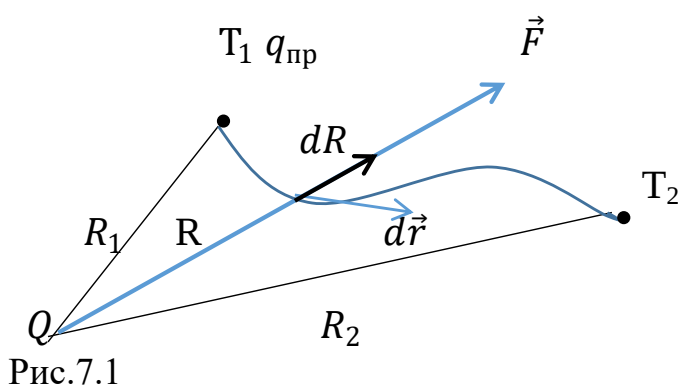
7.1 Потенціал електростатичного поля. Принцип суперпозиції для потенціалу

Силове поле Кулону, яке створюється статичними зарядами, є потенціальним, тобто його робота не залежить від траєкторії руху зарядженої частинки та пройденого нею шляху. Для доведення цього твердження розглянемо рух пробного заряду в полі нерухомого заряду Q . На рис. 7.1 розглянемо переміщення $d\vec{r}$. Проекція вектора $d\vec{r}$ на напрямок вектора сили Кулона складає $dR = dr \cos(\vec{F}d\vec{r})$. Робота сили Кулона при переміщенні заряду q_{np} між точками т.1 та т.2 складе

$$A_{12} = \int_{m1}^{m2} \vec{F}d\vec{r} = \int_{m1}^{m2} Fdr \cos(\vec{F}d\vec{r}) = \int_{R_1}^{R_2} \frac{Qq_{np}}{4\pi\epsilon_0 R^2} dR = \frac{Qq_{np}}{4\pi\epsilon_0 R_1} - \frac{Qq_{np}}{4\pi\epsilon_0 R_2} \quad (7.1)$$

Згідно виразу(7.1) робота не залежить від форми траєкторії, тобто сила кулона є потенціальною. У зв'язку з цією обставиною, роботу можна виразити через зміну потенціальної енергії, яку має заряд у першій та другій точках

$$A_{12} = U(x_1, y_1, z_1) - U(x_2, y_2, z_2) = -(U_2 - U_1) = -\Delta U \quad (7.2)$$



Порівняємо між собою вирази (7.1) та (7.2), отримаємо, що потенціальна енергія заряду q_{np} в полі заряду Q складає

$$U = \frac{Qq_{np}}{4\pi\epsilon_0 R} + const \quad (7.3)$$

Аналіз виразу (7.3) показує, що потенціальна енергія заряду q_{np} в полі заряду Q залежить від величини пробного заряду, і тому, потенціальна енергія не може характеризувати поле, яке створює заряд Q . Для того, щоб мати характеристику поля заряду Q поділимо вираз (7.4) на величину q_{np} . Ліва частина рівності (7.3) називається потенціалом електростатичного поля, яке створює заряд Q на відстані R

$$\varphi = \frac{U}{q_{np}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} + const \quad (7.4)$$

Вираз (7.4) показує, що потенціал визначається з точністю до константи, тому, коли говорять про потенціал електростатичного поля, зазвичай мають на увазі різницю потенціалів $\Delta\varphi$ між даною точкою та точкою відносно якої він вимірюється. В електротехніці різницю потенціалів називають напругою.

Для усамітненого зарядженого тіла таку точку, де відомий потенціал, вибирають зазвичай на нескінченності, там потенціал дорівнює нулю. З цього прикладу можна отримати фізичний зміст потенціалу, як відношення роботи, яку потрібно здійснити для переносу пробного заряду з нескінченності в дану точку поля заряду Q , до величини q_{np} .

Розглянемо який потенціал створює в даній точці простору система з N точкових зарядів, рис.7.2. Визначимо роботу по переміщенню пробного заряду з T_1 в T_2 .

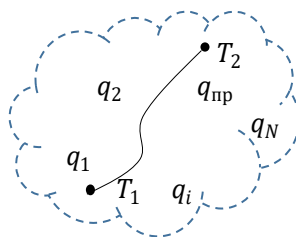


Рис.7.2

Робота по переміщенню заряду q_{np} з точки один в точку два в полі заряду q_i складає

$$A_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i q_{np}}{r_{i1}} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i q_{np}}{r_{i2}} \quad (7.5)$$

Де r_{i1} та r_{i2} є відстані між q_i та відповідними точками.

Робота по переміщенню заряду q_{np} в полі системи зарядів буде дорівнювати добутку робіт в полі від кожного q_i , тобто $A_{12} = \sum_{i=1}^N A_i$.

Скористаємось виразом (7.5)

$$A_{12} = \sum_{i=1}^N \frac{q_i q_{np}}{4\pi\epsilon_0 r_{i1}} - \sum_{i=1}^N \frac{q_i q_{np}}{4\pi\epsilon_0 r_{i2}} = U_1 - U_2 \quad (7.6)$$

Скористаємось визначенням (7.4) для потенціалу, знайдемо

$$\varphi_1 = \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_{i1}} = \sum_{i=1}^n \varphi_{i1}; \quad \varphi_{i2} = \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_{i2}} = \sum_{i=1}^n \varphi_{i2} \quad (7.7)$$

Вирази (7.6) приводять нас до висновку, що

$$\varphi = \sum_{i=1}^N \varphi_i \quad (7.8)$$

Отриманий результат (7.8) є виразом для *принципу суперпозиції* для *потенціалу*, який утворює система точкових зарядів. У випадку безперервного розподілу зарядів необхідно представити у вигляді системи точкових зарядів dq . В цьому випадку знак суми замінюють на інтеграл

$$\varphi = \int d\varphi \quad (7.9)$$

7.2 Зв'язок між напруженістю і потенціалом електростатичного поля

З механіки відомо про зв'язок між силою та потенціальною енергією, вираз (4.9)

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}U = -gradU = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}\right) \quad (7.10)$$

Поділимо рівняння на $q_{\text{пр}}$, та скористаємося визначенням вектора напруженості електростатичного поля

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_{\text{пр}}} = - \left(\frac{\partial \left(\frac{U}{q_{\text{пр}}} \right)}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \left(\frac{U}{q_{\text{пр}}} \right)}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \left(\frac{U}{q_{\text{пр}}} \right)}{\partial z} \vec{k} \right) = - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{k} \right);$$

$$\mathbf{E} = -\vec{\nabla} \varphi = -\text{grad} \varphi. \quad (7.11)$$

Вираз (7.11) дозволяє за відомим розподілом потенціалу знайти вектор напруженості електростатичного поля в даній точці. Для розв'язку зворотного завдання, знаходження потенціалу через відому функцію для вектора напруженості поля, використаємо вираз для роботи при переміщенні заряду $A_{12} = \int_{T_1}^{T_2} \vec{F} d\vec{r} = \int_{T_1}^{T_2} \vec{F} q_{\text{пр}} = U_1 - U_2 = q_{\text{пр}} \varphi_1 - q_{\text{пр}} \varphi_2$. Поділивши відповідні частини рівняння на величину пробного заряду, отримаємо

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{T_1}^{T_2} (\vec{E} d\vec{r}) \quad (7.12)$$

7.3 Еквіпотенціальні поверхні

Наочне уявлення про розподіл потенціалу поля в просторі можна скласти за допомогою векторів напруженості та еквіпотенціальних поверхонь. Для еквіпотенціальної поверхні потенціал поля в усіх точках однаковий:

$$\varphi(x, y, z) = \text{const}. \quad (7.13)$$

Форма еквіпотенціальних поверхонь визначається видом залежності потенціалу від координат $\varphi(\vec{r}) = \varphi_0$. Зокрема, для поля точкового заряду, виходить:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}, \text{ відповідно } r = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \varphi_0} = \text{const}.$$

Отже, еквіпотенціальними поверхнями такого поля є концентричні сфери з центром в місці знаходження точкового заряду.

Встановимо зв'язок між екіпотенціальною поверхнею та лініями вектору напруженості електростатичного поля. Для цього скористаємося зв'язком між напруженістю поля та потенціалом цього поля $\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{T_1}^{T_2} \vec{E} d\vec{r}$. Якщо покласти, що точки T_1 та T_2 належать екіпотенціальній поверхні, де $\varphi_1 = \varphi_2 = \text{const}$; тоді $\int_{T_1}^{T_2} \vec{E} d\vec{r} = 0$, або

$$\int_{T_1}^{T_2} |\vec{E}| |d\vec{r}| \cos(\vec{E}, d\vec{r}) = 0.$$

Оскільки точки не співпадають ($T_1 \neq T_2$), та можуть бути вибрані на поверхні випадковим способом, то рівність інтегралу нулю може бути виконана за умови $\cos(\vec{E}, d\vec{r}) = 0$. Це в свою чергу означає, що в точці перетину екіпотенціальної поверхні вектор напруженості електростатичного поля спрямовано перпендикулярно до цієї поверхні $\vec{E} \perp d\vec{r}$, рис 7.3:

Висновок: *екіпотенціальні поверхні перпендикулярні до вектора $\vec{E}$ в кожній точці.*

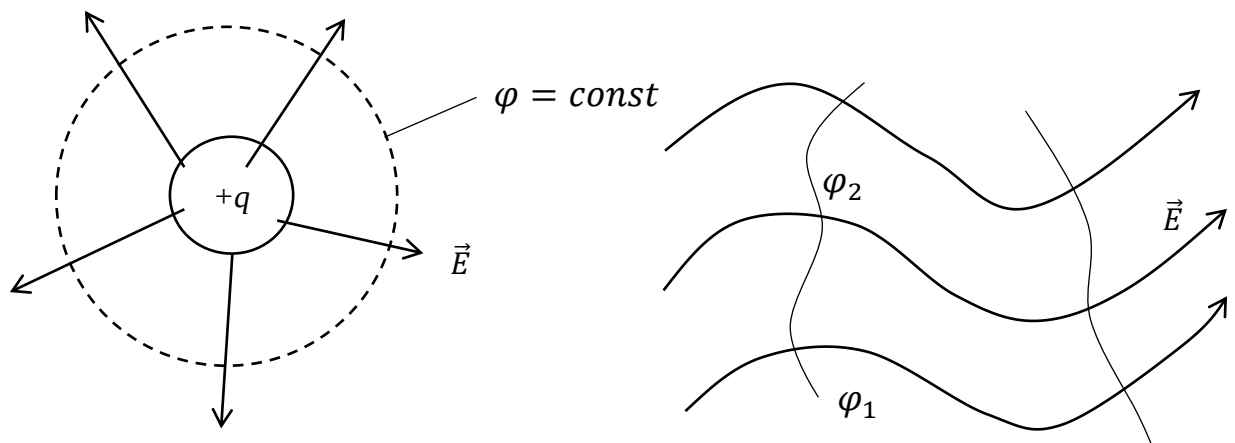
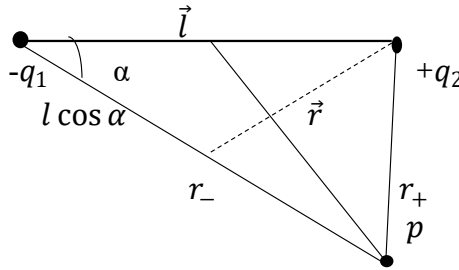


Рис.7.3

7.4 Поле електричного диполя

Електричним диполем називають два різноіменні точкові заряди $+q$ та $-q$ однакової величини, що розміщені на малій відстані l один від одного, рис.7.4. При цьому необхідно щоб була виконана умова $r \gg l$. В

протилежному випадку це будуть просто два заряди і подальші розрахунки для поля втратять свій зміст. Плече диполя l роблять векторною величиною спрямованою від $-q$ до $+q$. Добуток плеча диполя на заряд є електричним моментом диполя: $\vec{p} = q\vec{l}$, який теж є векторною величиною.



$l \ll r$
 $\vec{l}$ – плече диполя
 $q\vec{l} = \vec{p}$ – електричний
 дипольний момент
 $|q_+| = |q_-| = q$
 $\varphi_p - ?, \vec{E}_p - ?$

Рис.7.4

Розрахунок поля диполя почнемо з потенціалу, який за принципом суперпозиції дорівнює:

$$\varphi_p = \varphi_+ + \varphi_- = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_+}{r_+} - \frac{q_-}{4\pi\epsilon_0 r_-} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{r_- - r_+}{r_+ r_-} \right)$$

Виходячи з рис.7.4, різницю у відстанях до зарядів можна представити як $r_- - r_+ = l \cos \alpha$. Тоді вираз для потенціалу диполя в точці P складе

$$\varphi_p = \frac{ql \cos(\vec{p}, \vec{r})}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{(\vec{p}\vec{r})}{4\pi\epsilon_0 r^3} \quad (7.13)$$

Напруженість поля диполя знайдемо через його потенціал. Для цього скористаємося формулою (7.11)

$$\vec{E}_p = -\vec{\nabla} \varphi_p = -\vec{\nabla} \frac{(\vec{p}\vec{r})}{4\pi\epsilon_0 r^3} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{\nabla}(\vec{p}\vec{r})r^3 - \vec{r}^3(\vec{p}\vec{r})}{r^6}. \quad (7.14)$$

Складові виразу (7.14) знайдемо окремо

$$\vec{\nabla}(\vec{p}\vec{r}) = \vec{\nabla}(p_x x + p_y y + p_z z) = \frac{\partial(p_x x + p_y y + p_z z)}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial(p_x x + p_y y + p_z z)}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial(p_x x + p_y y + p_z z)}{\partial z} \vec{k} = p_x \vec{i} + p_y \vec{j} + p_z \vec{k} = \vec{p},$$

$$\begin{aligned}
\vec{V}(r^3) &= \vec{V}(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^3 = \vec{V}(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}} \\
&= \frac{\partial(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}{\partial z} \vec{k} \\
&= \frac{3}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} \cdot 2x\vec{i} + \frac{3}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} \cdot 2y\vec{j} + \frac{3}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} \cdot 2z\vec{k} \\
&= \frac{3r(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})}{r} = 3r\vec{r}.
\end{aligned}$$

Отримані результати після підстановки в формулу (7.14) призводять нас до виразу для вектора електростатичного поля диполя

$$\vec{E} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p}r^3 - (\vec{p}\vec{r})3r\vec{r}}{r^6} = -\frac{\vec{p}}{4\pi\epsilon_0 r^3} + \frac{3p\vec{r} \cos \alpha}{4\pi\epsilon_0 r^4} = \vec{E}_p + \vec{E}_r. \quad (7.15)$$

Вираз (7.15) містить складові поля $\vec{E}_p$ та $\vec{E}_r$, паралельні векторам $\vec{p}$ та $\vec{r}$ відповідно. Модуль вектора напруженості поля диполя складе:

$$|\vec{E}| = \sqrt{E_p^2 + E_r^2 + 2E_p E_r \cos \alpha} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} \sqrt{1 + 3 \cos^2 \alpha} \quad (7.16)$$

Зазначимо, що в цілому нейтральна система зарядів, якою є диполь, навіть на великих порівняно з її розмірами відстанях створює електричне поле. Але його потенціал і напруженість змінюються з відстанню швидше, ніж у випадку поля точкового заряду. Це є характерним і для полів (мультиполів) – нейтральних систем зарядів складнішої конфігурації. Причому, чим складніша конфігурація, тим сильніша залежність поля від відстані. Тому, електричні поля таких систем, як атоми та молекули, існують практично тільки на відстанях спів вимірних з розмірами цих частинок.

Контрольні запитання і завдання

1. Знайти потенціал і напруженість електричного поля в центрі рівномірно зарядженої півсфери радіусом R із поверхневою густиною σ .
2. Заряд q розподілено рівномірно в об'ємі кулі радіусом R . Виходячи з того, що діелектрична проникність усюди дорівнює одиниці, знайти потенціал: а) усередині кулі як функцію відстані r від його центра; б) у

центрі кулі.

3. Знайти напруженість електричного поля, потенціал якого має вигляд $\varphi = \vec{a}\vec{r}$, де $\vec{a}$ – постійний вектор, $\vec{r}$ – радіус–вектор точки поля.

4. Визначити потенціал $\varphi(x, y, z)$ електростатичного поля

$\vec{E} = ay\vec{i} + (ax + bz)\vec{j} + by\vec{k}$, де a та b – сталі; $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – орти осей X, Y, Z .

8. Теорема Гауса для вектора $\mathbf{E}$

8.1 Потік вектора. Теорема Гауса для вектора $\mathbf{E}$

Поняття та означення потоку вектору походить із механіки суцільних середовищ.

Спочатку розглянемо однорідне поле математичного вектору $\mathbf{A}$, $\mathbf{A}(x, y, z) = \text{const}$. Таке поле зручно зобразити у вигляді паралельних, розташованих на однаковій відстані ліній, рис.8.1.

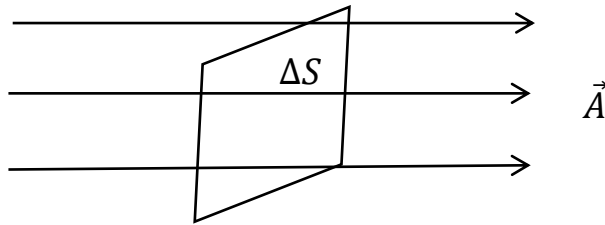


Рис.8.1

Потік вектора Φ_A це кількість ліній вектору $\vec{A}$, що проходить крізь площадку ΔS . Якщо площадка $\Delta S_{\perp}$ перпендикулярна до $\vec{A}$, то потік складе $\Phi_A = |\vec{A}| \Delta S_{\perp}$. Для площадки, у якої нормаль складає кут α з вектором $\vec{A}$, рис.8.2, значення потоку складе величину $\Phi_A = |\vec{A}| \Delta S \cos(\vec{A}, \vec{n})$. Виходячи з отриманого виразу, зручно зробити площадку векторною величиною $\vec{\Delta S} = \Delta S \vec{n}$, тоді потік можна записати у вигляді скалярного добутку

$$\Phi_A = |\vec{A}| |\vec{\Delta S}| \cos \alpha = |\vec{A}| |\vec{\Delta S}| \cos(\vec{A}, \vec{\Delta S}) = (\vec{A} \vec{\Delta S}) \quad (8.1)$$

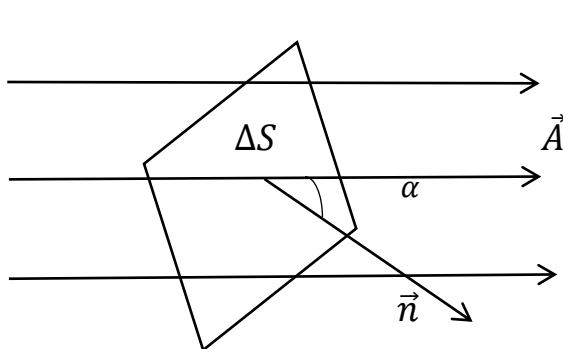


Рис.8.2



У випадку неоднорідного поля поверхню розбивають на елементарні площадки $d\vec{S}$, в межах кожної з них поле вважають однорідним, а елементарний потік становить $d\Phi = (\vec{A} d\vec{S})$. Відповідно потік крізь поверхню S буде виглядати як добуток елементарних потоків, тобто $\Phi = \int d\Phi = \iint (\vec{A} d\vec{S})$

Теорема Гауса визначає потік вектору електричного поля крізь замкнену поверхню.

Спочатку визначимо потік вектору поля $\vec{E}$ точкового заряду крізь концентричну з зарядом q сферичну поверхню S , рис.8.3.

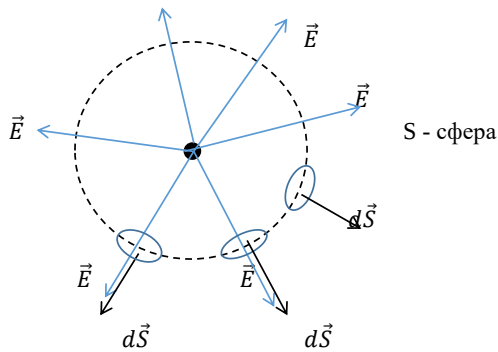


Рис.8.3

$d\vec{S}$ – вектор площі елементарної ділянки замкненої поверхні S . Вектор напруженості поля проходить крізь кожну елементарну площадку таким чином, що кут між вектором $\vec{E}$ та $d\vec{S}$ дорівнює нулю.

За цих обставин потік Φ_E вектору напруженості електричного поля у вакуумі крізь замкнену поверхню сфери складе

$$\Phi_E = \oint_{S_{\text{сфера}}} |\vec{E}| |d\vec{S}| \cos \alpha = \oint_S \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dS = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \oint_{S_{\text{сфера}}} dS \quad (8.2)$$

Врахуємо, що інтеграл від $|d\vec{S}|$ по поверхні сфери є не що інше, як площа поверхні сфери, тобто $\int_{S_{\text{сфера}}} dS = 4\pi r^2$. Повернувшись до виразу (8.2)

отримаємо $\Phi_E = \frac{q}{\epsilon_0}$.

Ускладнимо завдання, виберемо замкнену поверхню довільної форми. Для визначення потоку Φ_E вектору напруженості електричного поля крізь

довільну замкнену поверхню S для поля точкового заряду q у вакуумі скористаємося визначенням тілесного або просторового кута $d\Omega$.

Мірою кута $d\Omega$ є площа сегмента, що окреслюється поверхнею на сфері заданого радіусу r із центром у вершині кута, для якого $d\Omega = \frac{S_{\perp}}{r^2}$. Одиницею тілесного кута є стерadian (1 ср). Відповідно, всьому тривимірному простору відповідає тілесний кут $\Omega = \frac{4\pi r^2}{r^2} = 4\pi$ [срад].

Запишемо потік Φ_E з використанням тілесного кута. Площадку представимо як $dS_{\perp} = r^2 d\Omega$, рис.8.4.

$$\Phi_E = \oint_S d\Phi_E = \int_{\Omega} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} r^2 d\Omega = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{4\pi} d\Omega = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (8.3)$$

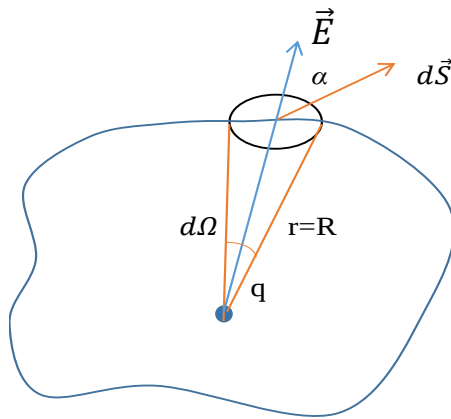


Рис.8.4

Далі розглянемо поле, створене довільною системою зарядів. Використаємо принцип суперпозиції для вектора напруженості $\vec{E} = \sum \vec{E}_i$, де під $\vec{E}_i$ будемо розуміти поле від заряду q_i в області площадки $d\vec{S}$. Тоді потік крізь замкнену поверхню S навколо системи зарядів q_i складає

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} d\vec{S} = \oint_S \sum \vec{E}_i d\vec{S} = \sum_{i=1}^N \oint_S \vec{E}_i d\vec{S} = \frac{\sum q_i}{\epsilon_0}. \quad (8.4)$$

Можна показати, що заряди, які знаходяться за межами замкненої поверхні, то потік вектора $\mathbf{E}$ від них крізь замкнену поверхню буде дорівнювати нулю. Це легко пояснити, згадав, що потік вектора, це кількість ліній вектору, що проходять крізь поверхню. В останньому випадку розміщення зарядів, кількість ліній, що входять у поверхню

(від'ємний потік) і виходить (додатний потік) рівні, а сумарний потік відсутній.

Тому, остаточний результат

$$\Phi_E = \oiint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{\sum q_i}{\epsilon_0} \quad (8.5)$$

є теоремою Гауса для вектору $\vec{E}$ в інтегральній формі: *потік вектору напруженості електричного поля у вакуумі крізь довільну замкнену поверхню дорівнює сумарному зарядові, що знаходиться всередині цієї поверхні, діленому на ϵ_0 .*

8.2 Приклади на використання теореми Гауса

Приклад.1

Визначити напруженість електричного поля на відстані R від тонкої довгої рівномірно зарядженої, із лінійною густиною зарядів λ нитки.

Скористаємося формулою (8.5). Спочатку виберемо поверхню у вигляді циліндра радіусом R та довжиною L .

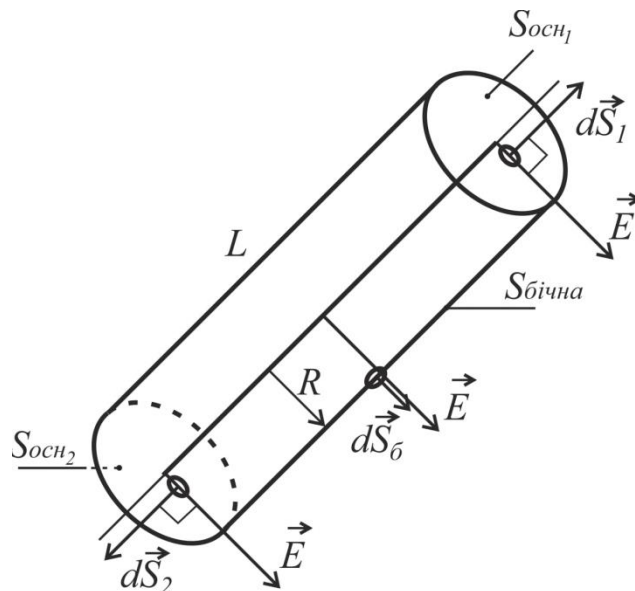


Рис. 8.5.

Далі обчислимо потік векторного поля через поверхню циліндра, яка складається з бічної $S_{бічна}$ та двох основ $S_{осн1}$ та $S_{осн2}$, рис.8.5.

Врахуємо, що кут між вектором $\vec{E}$ та площадкою $d\vec{S}$ на бічній поверхні складає 0^0 , а на поверхнях основ 90^0 .

$$\Phi_E = \iint_{S_{\text{циліндр}}} \vec{E} d\vec{S} = \iint_{S_1} E dS_1 \cos 90^0 + \iint_{S_2} E dS_2 \cos 90^0 + \iint_{S_{\text{бічна}}} |\vec{E}| |d\vec{S}| \cos 0^0 = E \int_{S_{\text{бічна}}} dS = E 2\pi R L \quad (8.6)$$

Сумарний заряд під поверхнею циліндру $\sum q_i = \lambda L$.

За теоремою Гауса отримаємо рівняння: $E 2\pi R L = \frac{\lambda L}{\epsilon_0}$, з якого випливає, $E(R) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R}$.

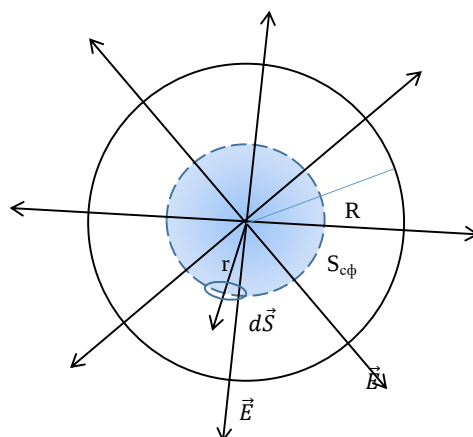
Отриманий результат співпадає з виразом (6.8), отриманим за принципом суперпозиції для вектору $\vec{E}$.

Приклад. 2

Визначити напруженість електричного поля кулі радіуса R рівномірно зарядженої, із об'ємною густиною зарядів ρ .

Розглянемо випадок $r \leq R$, тобто всередині кулі. Форму гаусової поверхні $S_{\text{сфер}}$ вибираємо у вигляді сфери радіусу r , рис.8.6. За формулою (8.5) знаходимо потік скрізь обрану поверхню сфери, він складає

$$\Phi = \oint_{S_{\text{сфер}}} |\vec{E}| |d\vec{S}| \cos 0^0 = E \oint_{S_{\text{сфер}}} dS = E 4\pi r^2 \quad (8.7)$$



$E(r) - ?$

Рис.8.6

Сумарний заряд під гаусовою поверхнею: $\sum q_i = \rho \frac{4}{3} \pi r^3$. Отриманий результат, разом з потоком, визначеним за виразом (8.7), на основі виразу

(8.5) приводять до рівняння $E4\pi r^2 = \frac{\rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3}{\varepsilon_0}$. З останнього $E = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}$

Приклад. 3 Визначити напруженість електричного поля кулі радіуса R зарядженої, із об'ємною густиною зарядів $\rho = \frac{\alpha}{r}, \alpha = const$.

В порівнянні з прикладом 2, у нас густина заряду стала залежною від координати. Тому, в першій частині розв'язку, стосовно потоку результат залишається незмінним і складає $\Phi = E4\pi r^2$.

Зміни стосуються сумарного заряду під гаусовою поверхнею. Для знаходження заряду необхідно розбити простір в межах сфери на елементарні об'єми dV , в яких міститься заряд $dq = \rho dV$. Загальний заряд під поверхнею сфери знаходимо інтегруванням $\int dq = \int \rho dV = \int \frac{\alpha}{r} dV$.

В межах dV підінтегральна функція має бути незмінною. Тому, об'єм dV , рис.8.7, має форму тонкого сферичного шару радіусу r_1 та товщиною dr_1 , $r_1(0, r)$. Його значення складає $dV = \frac{4}{3}\pi(r_1 + dr_1)^3 - \frac{4}{3}\pi r_1^3 = \frac{4}{3}\pi[r_1^3 + 3r_1^2 dr_1 + 3r_1(dr_1)^2 + (dr_1)^3 - r_1^3] = 4\pi r_1^2 dr_1$.

Після інтегрування $\sum q_i = \int_0^r \frac{\alpha}{r_1} 4\pi r_1^2 dr_1 = 2\pi\alpha r^2$.

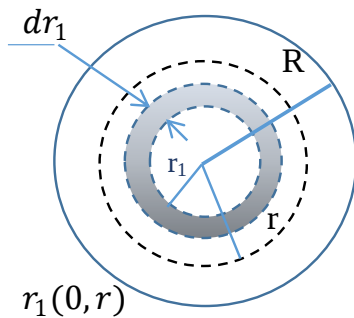


Рис.8.7

За теоремою Гауса отримаємо рівняння $E4\pi r^2 = \frac{2\pi\alpha r^2}{\varepsilon_0}$. Напруженість поля всередині сфери складає $E = \frac{\alpha}{2\varepsilon_0}$.

Напруженість поля зовні сфери пропонується читачеві визначити самостійно.

Контрольні запитання і завдання

1. Знайти потік вектора напруженості електричного поля Φ_E через бічну поверхневого колового циліндра висотою $h = 20$ см, що має радіус основи $r = 10$ см. Точковий заряд $q = 0,3$ мкКл розміщено: а) на осі циліндра на середині висоти; б) у центрі основи.
2. Нескінченна площина несе рівномірно розподілений заряд, поверхнева густина якого $\sigma = 1$ мкКл/м². На деякій відстані від площини паралельно їй розміщене коло радіусом $r = 10$ см. Обчислити потік Φ_E вектора напруженості через це коло.
3. Простір між двома концентричними сферами радіусами R_1 і R_2 заряджений з об'ємною густиною заряду $\rho = \frac{a}{r^2}$, де a – стала величина. Знайти повний заряд q , а також напруженість E і потенціал ϕ електричного поля як функції відстані від центра.
4. Усередині кулі, зарядженої рівномірно з об'ємною густиною ρ , є сферична порожнина. Центр порожнини зміщений відносно центра кулі на відстань, що характеризується вектором $\vec{a}$. Знайти напруженість поля всередині порожнини.

9. Теорема Гауса для вектора $\vec{E}$ в диференціальній формі.

Електричне поле в речовині

9.1 Дивергенція поля. Теорема Остроградського – Гауса

Важливою характеристикою векторного поля є дивергенція. Дивергенція вектору $\vec{A}$ є відношення потоку $\Delta\Phi$ крізь замкнену поверхню до об'єму ΔV під цією поверхнею, коли об'єм прямує до нуля. Математично визначення дивергенції виглядає наступним чином

$$\operatorname{div}\vec{A} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta\Phi}{\Delta V} \quad (9.1)$$

Дивергенція характеризує потужність (інтенсивність, щільність) джерела поля $\vec{A}$.

У якості прикладу розглянемо, як виглядає запис дивергенції в декартовій системі координат. Для цього виділимо об'єм у вигляді прямокутного паралелепіпеду, грані котрого паралельні осям x, y, z , рис.9.1.

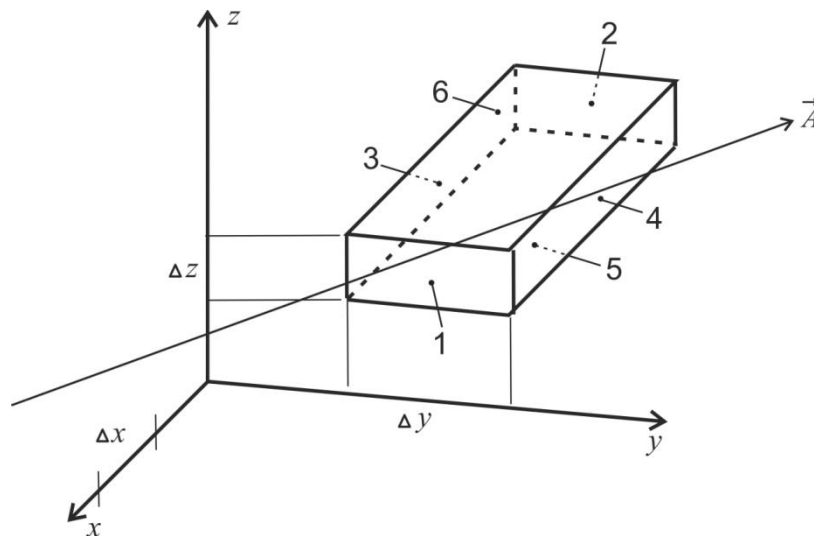


Рис.9.1

Елементарний об'єм

$$\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z. \quad (9.2)$$

Потік складається з шістьох потоків крізь грані

$$\Delta\Phi = \sum_{i=1}^6 \Delta\Phi_i = \Delta y \Delta z (A_{2x} - A_{1x}) + \Delta x \Delta z (A_{4y} - A_{3y}) + \Delta x \Delta y (A_{6z} - A_{5z}) = \Delta y \Delta z \Delta A_x + \Delta x \Delta z \Delta A_y + \Delta x \Delta y \Delta A_z \quad (9.3)$$

Використаємо часткові похідні та отримаємо $\Delta A_x = \frac{\partial A_x}{\partial x} \Delta x$, $\Delta A_y = \frac{\partial A_y}{\partial y} \Delta y$, $\Delta A_z = \frac{\partial A_z}{\partial z} \Delta z$, остаточно потік може бути записано

$$\Delta\Phi = \Delta x \Delta y \Delta z \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right). \quad (9.4)$$

Формули (9.2) та (9.4) підставляємо в визначення (9.1), отримаємо вираз для дивергенції в декартовій системі координат

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{dA_x}{dx} + \frac{dA_y}{dy} + \frac{dA_z}{dz} = (\vec{\nabla} \vec{A}) \quad (9.5)$$

Вираз (9.1) представимо у вигляді $d\Phi = \operatorname{div} \vec{A} dV$

Після інтегрування рівняння маємо

$$\int_S (\vec{A} d\vec{S}) = \int_V \operatorname{div} \vec{A} dV \quad (9.6)$$

Рівняння (9.6) носить назву теорема *Остроградського – Гауса* (математична теорема).

9.2 Теорема Гауса для вектора E в диференціальній формі

Розглянемо можливість запису теореми Гауса для вектора E в диференціальній формі. Припустимо, що заряди розподілені в об'ємі V з об'ємною густиною заряду $\rho = \frac{dq}{dV}$. Сумарний заряд в об'ємі можна записати $\sum q_i = \int_V \rho dV$. Запишемо теорему Гауса для вектора E , вираз (8.5) та теорему Остроградського–Гауса у вигляді системи рівнянь

$$\begin{cases} \oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho dV \\ \oint_S \vec{E} d\vec{S} = \int_V \operatorname{div} \vec{E} dV \end{cases},$$

$$\text{звідки } \int_V \operatorname{div} \vec{E} dV = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho dV.$$

Оскільки в останньому рівнянні інтегрування відбувається по одному й тому ж об'єму, об'єднаємо інтеграли $\int_V (\operatorname{div} \vec{E} - \frac{\rho}{\varepsilon_0}) dV = 0$, розв'язком

рівняння є вираз

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (9.10)$$

Отриманий результат носить назву *теорема Гауса для вектора $\vec{E}$ в диференціальній формі*.

9.3 Електричне поле в діелектриках. Поляризація діелектриків

Діелектриками називаються речовини, в молекулах яких усі електрони сильно зв'язані з ядрами так, що навіть у сильних електричних полях вони ледь зміщуються відносно ядер. Через це в діелектрику є неможливим електричний струм, тобто переміщення зарядів по всьому об'єму.

Зовнішнє електричне поле діє не на молекулу як ціле, а на електрони і на ядра окремо. Через це відбувається деформація електронних оболонок – електрони зміщуються відносно ядер і в кожній молекулі з'являється *індукований* (або *наведений*) електричний момент $\vec{p}$, орієнтований у напрямку електричного поля, рис.9.2.

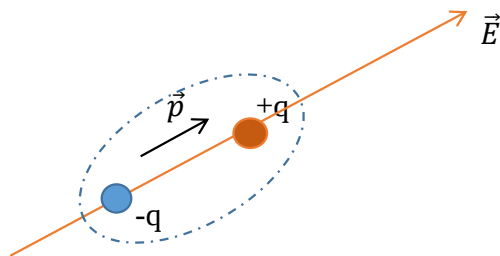


Рис.9.2

Розглянемо поведінку диполя у зовнішньому електричному полі. На заряди диполя діє сила Кулона, $\vec{F} = q\vec{E}$, рис.9.3. Припустимо, що електростатичне поле однорідне $\vec{E}(x, y, z) = \text{const}$.

Параметрами диполя $\vec{p} = q\vec{l}$ – дипольний електричний момент, $\vec{l}$ – плече диполя.

Одночасна дія двох сил на додатній та від'ємний заряди створює два моменти сили

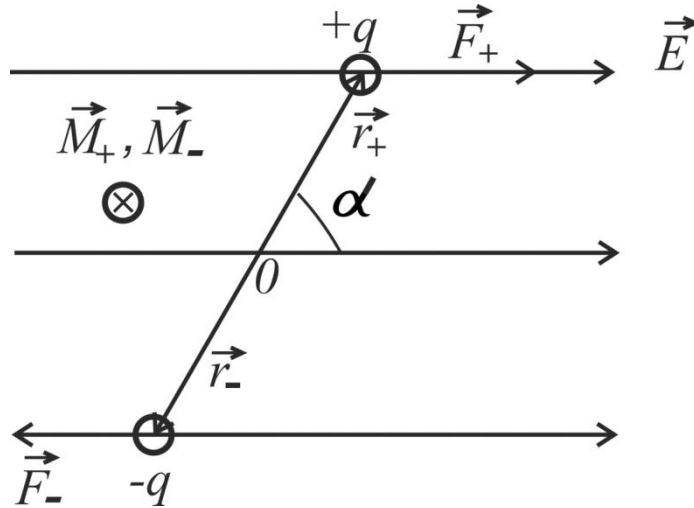


Рис.9.3

$$M_+ = \frac{l}{2} F_+ \sin \alpha = \frac{l}{2} E q \sin \alpha = \frac{pE \sin \alpha}{2}, \quad (9.11)$$

$$M_- = \frac{l}{2} F_- \sin \alpha = \frac{l}{2} E q \sin \alpha = \frac{pE \sin \alpha}{2}, \quad (9.12)$$

де $\vec{p} = q\vec{l}$ – дипольний електричний момент. З урахуванням виразів (9.11) та (9.12) момент сил $|\vec{M}| = M_+ + M_- = pE \sin \alpha$.

Враховуючи напрямок моменту сили запишемо відповідь у векторній формі

$$\vec{M} = [\vec{p}\vec{E}] \quad (9.13)$$

З виразу (9.13) випливає, що в зовнішньому полі диполь за рахунок моменту сили буде повертатися своїм дипольним моментом у напрямку вектора $\vec{E}$. Далі з'ясуємо яку енергію має диполь у зовнішньому полі вектора $\vec{E}$?

Для цього дослідження скористаємося визначенням потенціалу, $\varphi = \frac{U}{q}$. Потенціальна енергія диполя складається з добутку енергій його двох зарядів, тобто $U = U_+ + U_- = q\varphi_2 - q\varphi_1 = q(\varphi_2 - \varphi_1) = q\Delta\varphi$, де φ_1 та φ_2 – потенціали в точках знаходження зарядів, рис.9.4. Використаємо зв'язок між різницею потенціалів та вектором напруженості поля $\vec{E}$.

$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{T_1}^{T_2} \vec{E} d\vec{r} = E\Delta r$, де $\Delta r = l \cos \alpha$, отримаємо енергію диполя в електростатичному полі

$$U = -qEl \cos \alpha = -pE \cos \alpha = -(\vec{p}\vec{E}) \quad (9.14)$$

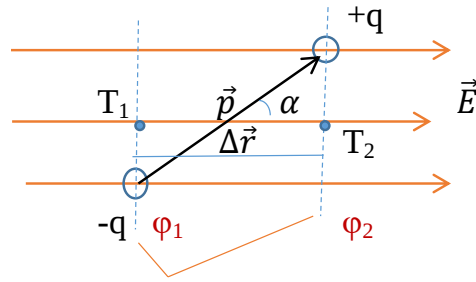


Рис.9.4

З виразу (9.14) випливає, мінімум енергії диполя відповідає ситуації, коли вектор поляризації та вектор $\vec{E}$ паралельні, тобто кут між цими векторами дорівнює 0^0 , навпаки максимум енергії буде спостерігатися при куті 180^0 (нестійка рівновага).

Для характеристики розподілу диполів в діелектрику виділімо елементарний об'єм ΔV . В межах ΔV поле $\vec{E}$ має бути однорідним. Діелектрик, як сукупність диполів, з дипольними моментами $\vec{p}_i$ в межах об'єму ΔV утворюють векторний добуток $\sum \vec{p}_i$. Векторний добуток $\sum \vec{p}_i$ залежить від розміру об'єму ΔV . Щоб цього не відбувалося користуються співвідношенням сумарного дипольного моменту елементу об'єму до величини цього об'єму

$$\vec{P} = \frac{\sum \vec{p}_i}{\Delta V} \quad (9.15)$$

Величина $\vec{P}$ отримала назву *вектор поляризації*, який є кількісною характеристикою ступеня поляризації діелектрика в кожній точці. За рахунок електростатичного поля диполі під дією моменту сили повертаються у напрямку поля $\vec{E}$, величина $\sum \vec{p}_i$ зростає, але одночасно, тепловий рух атомів та молекул змінює їх напрямок випадковим чином. Тому, можна казати про пропорційність між вектором поляризації та полем $\vec{E}$.

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E} \quad (9.16)$$

Коефіцієнт пропорційності у виразі (9.16) записано через добуток $\epsilon_0 \chi$, де χ – діелектрична сприйнятливість речовини. Параметр χ зазвичай не

вказують в довідниках, тому що використовують іншу величину $\varepsilon = \chi + 1$ ε носить назву *відносна діелектрична проникність*.

9.4 Зв'язок між вектором поляризації та поляризаційними зарядами

При поляризації електрони в молекулах діелектрика зміщуються тільки на дуже малу відстань, лишаючись зв'язаними із своїми ядрами. Тому поляризаційні заряди не можна відокремити один від одного і перемістити в інше місце. Тому поляризаційні заряди інакше називають *зв'язаними* зарядами.

Виділимо всередині діелектрику умовну площадку dS та визначимо який зв'язаний заряд $dq_{зв}$ пройде крізь площадку при ввімкненні електричного поля E . Мова може йти про диполі, які розташовані в об'ємі побудованому на основі dS , тобто знаходяться в об'ємі косої циліндру з об'ємом $\Delta V = l dS \cos \alpha$, l – плече диполя, рис.9.5.

Заряди від диполів, що пройдуть площадку $dq_{зв} = q_i n \Delta V$, n – концентрація диполів.

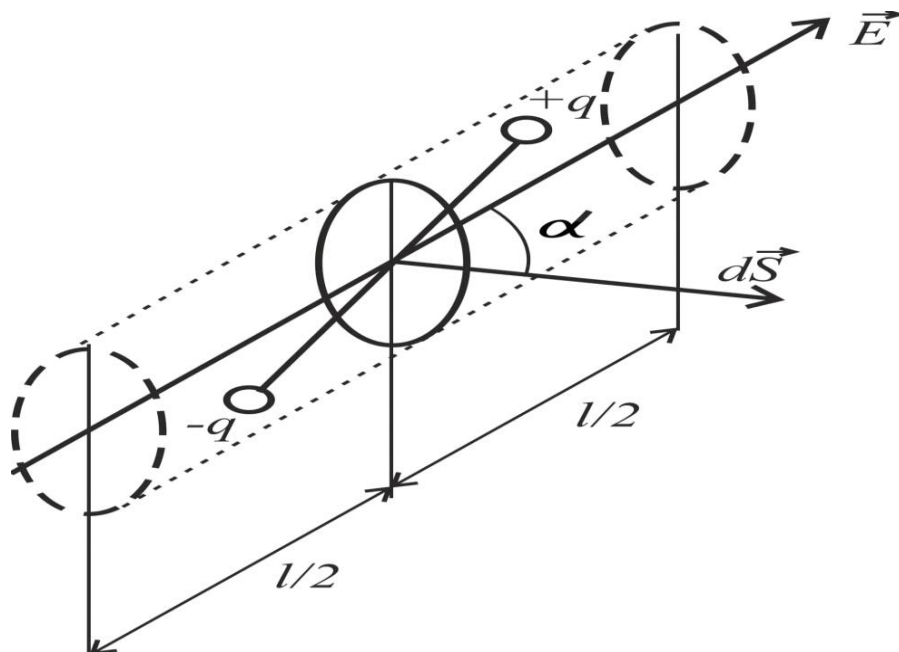


Рис.9.5

$$dq_{зв} = q_i n l dS \cos \alpha = p_i n dS \cos \alpha = P dS \cos \alpha = (\vec{P} d\vec{S}) \quad (9.17)$$

Далі розглянемо замкнену поверхню площею S , рис.9.6. Визначимо, який зв'язаний заряд утворюється в об'ємі під поверхнею? Для цього розглянемо елемент поверхні $d\vec{S}$, в межах якого поле однорідне. Заряд, який вийде через елемент $d\vec{S}$ визначається виразом (9.17). Заряд, який вийде крізь замкнену поверхню S

$$q_{зв} = \int dq_{зв} = \oint_S \vec{P} d\vec{S} \quad (9.18)$$

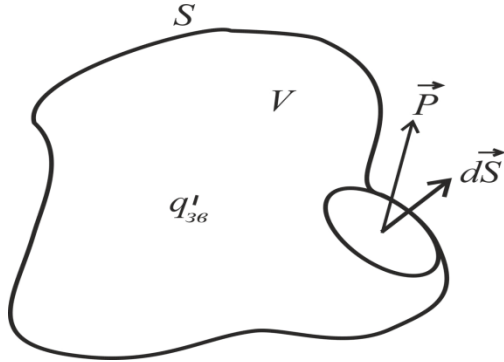


Рис.9.6

Заряд, що утвориться під поверхнею $q'_{зв}$, у відповідності до закону збереження заряду, буде мати протилежний знак до того заряду, що вийшов крізь поверхню $q'_{зв} = -q_{зв}$

$$q'_{зв} = - \oint_S \vec{P} d\vec{S} \quad (9.19)$$

Результат (9.19) є теоремою Гауса для вектора поляризації в інтегральній формі. Для отримання відповідної теореми в диференціальній формі скористуємося теоремою Остроградського–Гауса.

$$\oint_S \vec{P} d\vec{S} = \int_V \text{div} \vec{P} dV.$$

Врахуємо, що зв'язані заряди в об'ємі можуть утворювати розподіл з об'ємною густиною зарядів $\rho_{зв}$. Загальний зв'язаний заряд під поверхнею $q'_{зв} = \int \rho_{зв} dV$. Використаємо вираз (9.19), знаходимо

$$\int_V \text{div} \vec{P} dV = - \int_V \rho_{зв} dV,$$

$$\int_V (\text{div} \vec{P} + \rho_{зв}) dV = 0, \text{ остаточно}$$

$$\text{div} \vec{P} = -\rho_{зв} \quad (9.20)$$

Результат (9.20) носить назву *теорема Гауса* для вектора поляризації $\vec{P}$ в диференціальній формі.

9.5 Вектор електричного зміщення

Поле в діелектрику складається з поля сторонніх зарядів $\vec{E}_{\text{ст}}$, та внутрішнього мікроскопічного поля зв'язаних зарядів $\vec{E}_{\text{зв}}$, які за принципом суперпозиції визначають поле в діелектрику

$$\vec{E}_{\text{д}} = \vec{E}_{\text{ст}} + \vec{E}_{\text{зв}}$$

Заряди всередині діелектрику можуть утворювати об'ємну густину сторонніх $\rho_{\text{ст}}$ та зв'язаних $\rho_{\text{зв}}$ зарядів. Під визначення $\rho_{\text{ст}}$ підпадають заряди, які не належать диполям. Виходячи з теорем Гауса для вектора $\vec{E}$ та вектора поляризації $\vec{P}$ запишемо систему рівнянь

$$\begin{cases} \text{div} \vec{E} = \frac{\rho_{\text{ст}} + \rho_{\text{зв}}}{\epsilon_0} \\ \text{div} \vec{P} = -\rho_{\text{зв}} \end{cases}.$$

Після перетворень отримаємо

$$\text{div} (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \rho_{\text{ст}} \quad (9.21)$$

Векторна величина, яка знаходиться під знаком дивергенції визначається сторонніми зарядами. Назва величини $\vec{D}$ – вектор електричного зміщення

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad (9.22)$$

$$\text{div} \vec{D} = \rho_{\text{ст}} \quad (9.23)$$

Вираз (9.23) носить назву *теорема Гауса для вектора електричного зміщення в диференціальній формі*

Згідно теореми Остроградського – Гауса: $\oint_S \vec{D} d\vec{S} = \int_V \text{div} \vec{D} dV$

Беручи до уваги вираз (9.23) отримаємо

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = \int_V \rho_{\text{ст}} dV = \sum q_{\text{ст}} \quad (9.24)$$

$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = \sum q_{\text{ст}}$ – теорема Гауса для вектора $\vec{D}$ в інтегральній формі

Вектори $\mathbf{D}, \mathbf{P}$ визначаються формулами $\begin{cases} \vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \\ \vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E} \end{cases}$, тому отримаємо

зручні при розрахунках формули

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \varepsilon_0 \chi \vec{E} = \varepsilon_0 (1 + \chi) \vec{E} \quad (9.25)$$

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E} \quad (9.26)$$

де $\varepsilon = 1 + \chi$ – відносна діелектрична проникність.

9.6 Заломлення ліній електростатичного поля межі двох діелектриків

Визначимо співвідношення для напрямків векторів поля $\vec{E}$ та $\vec{D}$ на межі двох ізотропних діелектриків з відносними проникностями ε_1 та ε_2 . Питання розглянемо для випадку, коли на межі поділу діелектриків немає сторонніх зарядів. Для цього спочатку визначимо граничні умови для векторів $\mathbf{D}$ та $\mathbf{E}$. Розглянемо потік вектора $\vec{D}$ крізь поверхню невеликого замкненого циліндра з паралельними до межі поділу основами S_1 та S_2 і висотою h , рис. 9.10.

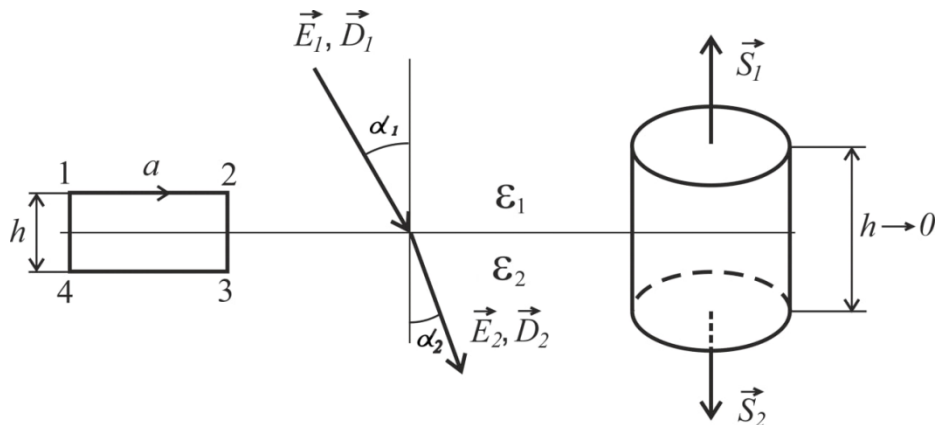


Рис.9.10

Скористаємося теоремою Гауса для вектора $\vec{D}$: $\oint_S \vec{D} d\vec{S} = \sum q_{\text{ст}} = 0$, права сторона дорівнює нулю за відсутності сторонніх зарядів на межі поділу. Врахуємо, що поверхня циліндра може бути представлена як сума бокової поверхні та двох основ. Висоту циліндричної поверхні спрямуємо

до нуля, $\oint_S \vec{D} d\vec{S} = \int_{S_1} D_1 dS_1 \cos \alpha_1 + \int_{S_2} D_2 dS_2 \cos \alpha_2 + \dots + \int_{S_{\text{бічна} \rightarrow 0}} \vec{D} d\vec{S} = D_{1n} S_1 - D_{2n} S_2 = 0;$

$$D_{1n} = D_{2n} \quad (9.27)$$

За теоремою про циркуляцію вектора $\vec{E}$: $\oint_l \vec{E} d\vec{l} = 0$. Виберемо контур l у вигляді прямокутника, рис.9.10. Контур розіб'ємо на чотири відрізки у відповідності до сторін прямокутника. Висоту прямокутника спрямуємо до нуля.

$$\begin{aligned} \oint_l \vec{E} d\vec{l} &= \int_{\tau_1}^{\tau_2} E_1 dl_1 \cos \alpha_1 + \int_{\tau_2}^{\tau_3} \vec{E} d\vec{l} + \int_{\tau_3}^{\tau_4} E_2 dl_2 \cos \alpha_2 + \int_{\tau_4}^{\tau_1} \vec{E} d\vec{l} = \\ &= E_{1\tau} a - E_{2\tau} a = 0 \end{aligned}$$

$$E_{1\tau} = E_{2\tau} \quad (9.28)$$

З рис.9.10 та співвідношень (9.27) та (9.28) поля впливає «закон заломлення» для векторів напруженості та електричного зміщення електростатичного поля:

$$\frac{\tan \alpha_1}{\tan \alpha_2} = \frac{\frac{E_{1\tau}}{E_{1n}}}{\frac{E_{2\tau}}{E_{2n}}} = \frac{E_{2n}}{E_{1n}} = \frac{D_{2n} \varepsilon_1 \varepsilon_0}{D_{1n} \varepsilon_2 \varepsilon_0} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \quad (9.29)$$

Контрольні запитання і завдання

1. Показати, що на межі однорідного діелектрика з провідником поверхнева густина зв'язаних зарядів дорівнює $\sigma' = -\sigma(\varepsilon - 1)/\varepsilon$, де ε – діелектрична проникність; σ – поверхнева густина зарядів на провіднику.
2. Довгий парафіновий циліндр радіусом $R = 2$ см має рівномірно розподілений заряд, об'ємна густина якого $\rho = 10 \text{ нКл/м}^3$. Визначити напруженість $\vec{E}$ й електричне зміщення $\vec{D}$ електричного поля в точках, що знаходяться від осі циліндра на відстані: 1) $r_1 = 1$ см; 2) $r_2 = 3$ см. Обидві точки знаходяться на однакових відстанях від кінців циліндра. Побудувати графіки залежностей $E(r)$ й $D(r)$. Діелектрична провідність парафіну $\varepsilon = 2,0$.

3. За деяких умов вектор поляризації нескінченної незарядженої пластини з діелектрика має вигляд $\vec{P} = \vec{P}_0 \left(1 - \frac{x^2}{d^2}\right)$, де $\vec{P}_0$ – вектор, перпендикулярний до пластини; x – відстань від середини пластини; d – її половина товщини. Знайти напруженість $\vec{E}$ електричного поля всередині пластини й різницю потенціалів між її поверхнями.

10. Провідники в електричному полі

10.1 Особливості електростатичного поля провідників

Провідниками називаються речовини, що мають у своєму складі вільні заряджені частинки, які здатні рухатися по всьому об'єму зразка. Через це вони, за впливом з боку електричного поля, відрізняються від діелектриків.

Якщо провідник внести в електричне поле, вільні електрони в провіднику під дією сил цього поля будуть зміщуватись в напрямі, протилежному вектору напруженості поля. Внаслідок цього зміщення на одній частині провідника виникає надлишок негативного заряду, на іншій частині – надлишок позитивного заряду. В цьому полягає явище електростатичної індукції (або електризації через вплив). Упорядковане переміщення електронів повністю припиняється, коли напруженості зовнішнього та індукованого полів разом дорівнюють нулю.

Виникнення макроскопічних зарядів на поверхні незарядженого провідника під дією електричного поля називається електростатичною індукцією, а самі заряди – індукованими зарядами.

Припустимо ми зарядили металеве тіло шляхом передачі йому сторонніх зарядів від іншого зарядженого тіла. В точці де відбулася така передача заряду утворився їх надлишок. За рахунок сил Кулона ці заряди розподілилися по поверхні провідника. Поверхня зарядилася з поверхневою густиною зарядів σ . З'ясуємо особливості електростатичного поля зовні та всередині провідника.

Припустимо зовні провідника поле $\vec{E}_{\text{зовн}}$ спрямовано під певним кутом до нормалі $\vec{n}$ в даній точці поверхні, рис.10.1

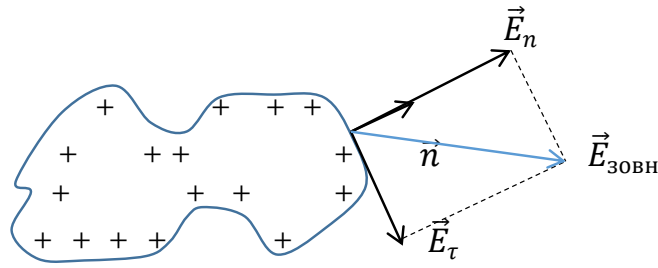


Рис.10.1

Якщо припустити існування тангенціальної компоненти поля Кулона $\vec{F}_\tau = q\vec{E}_\tau$, відбувається рух зарядів (протікає струм), але такого не повинне бути, так як відсутні зовнішні джерела струму. Це означає, що компонента сили $\vec{F}_\tau = 0$. Далі, нескладно дійти до висновку $\vec{E}_\tau = 0$, відповідно $\vec{E}_{\text{зовн}} = \vec{E}_\tau + \vec{E}_n = \vec{E}_n$. Це в свою чергу означає, що вектор $\vec{E}_{\text{зовн}}$ спрямовано перпендикулярно до поверхні в кожній його точці. $\vec{E}_\tau = 0$.

Знайдемо поле всередині провідника $\vec{E}_{\text{вн}}$. Виходячи з рис.10.2 розглянемо поле з використанням теореми про циркуляцію вектора $\vec{E}$.

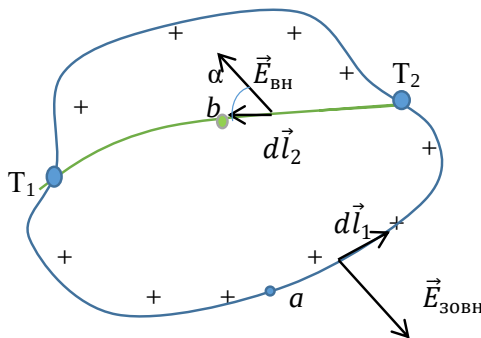


Рис.10.2

Вибір замкнутого контуру зробимо наступним чином. Частина контуру проходить по поверхні провідника (траєкторія між точками T_1 та T_2 з проміжною точкою a). Друга частина контуру від T_2 через проміжну точку b в T_1 . Циркуляція по замкнутому контуру вектору $\vec{E}$: $\oint \vec{E} d\vec{l} = 0$, тому

$$\int_{T_1 a}^{T_2} E_{\text{зовн}} dl_1 \cos 90^\circ + \int_{T_2 b}^{T_1} E_{\text{вн}} dl_2 \cos \alpha = 0$$

Перший інтеграл дорівнює нулю в силу того, що поле $E_{\text{зовн}}$ спрямовано нормально до поверхні ($\cos 90^\circ = 0$). Тоді, з рівності нулю

другого інтегралу дістаємо висновок, що поле всередині провідника відсутнє

$$\vec{E}_{\text{вн}} = 0 \quad (10.1)$$

Оскільки джерелом вектора електричного зміщення $\vec{D}$ є сторонні заряди, знайдемо зв'язок між зарядами розподіленими по поверхні провідника та вектором $\vec{D}$. Побудуємо за допомогою площадки S_3 , яка знаходиться на поверхні провідника, поверхню у вигляді циліндру, рис.10.3

$\vec{D} - ?$

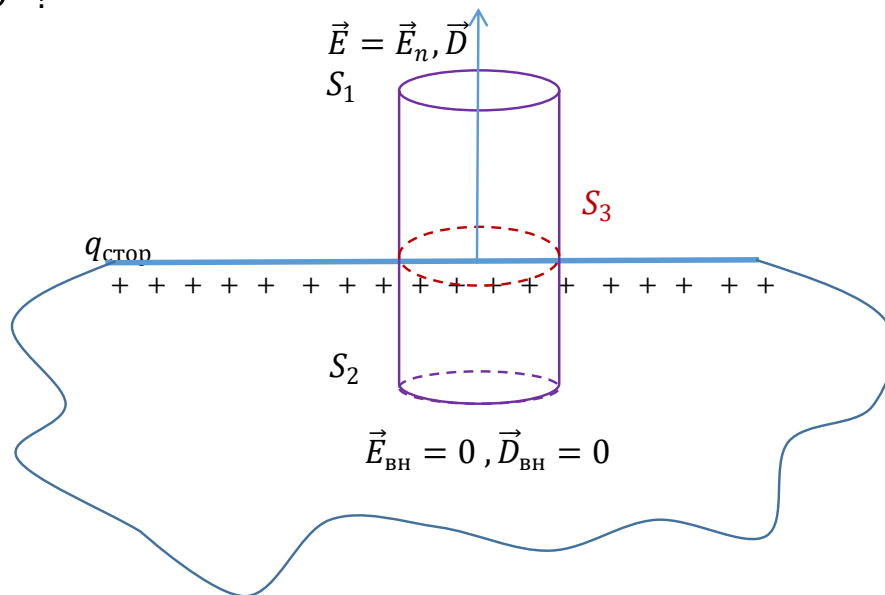


Рис.10.3

Скористаємося теоремою Гауса для вектора $\vec{D}$: $\oint_S \vec{D} d\vec{S} = \sum q_{\text{стор}}$. Врахуємо взаємозв'язок між векторами $\vec{D} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E}$, вочевидь $\vec{D} \uparrow \vec{E}$. Поділимо поверхню циліндру на три частини запишемо потік вектора крізь поверхню циліндру

$$\Phi = \oint_{S_{\text{циліндр}}} \vec{D} d\vec{S} = \int_{S_1} D dS \cos 0^\circ + \int_{S_2} D_{\text{вн}} dS \cos 0^\circ + \int_{S_{\text{бічна}}} D dS \cos \alpha.$$

Спрямуємо висоту циліндру до нуля, тоді вкладом третього інтегралу можна знехтувати. Пам'ятаємо, поле всередині провідника відсутнє $D_{\text{вн}} = 0$ Сторонній заряд під поверхнею циліндру розміщується на

поперечному перерізі S_3 і складає $\sum q_i = \sigma S_3$, де σ – поверхнева густина заряду.

Остаточно отримаємо

$$D_{\text{зовн}} = D_n = \sigma \quad (10.2)$$

10.2 Електрична ємність. Конденсатори

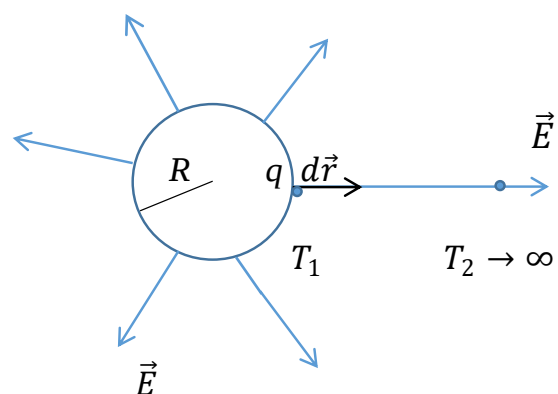
Напруженість електричного поля на поверхні зарядженого провідника в кожній його точці визначається густиною заряду σ та має різну величину та напрям. Потенціал провідника є скрізь однаковий, і у кожній точці визначається не густиною заряду в цій точці, а зарядом усього провідника. При цьому дослід свідчить, що потенціал провідника є прямо пропорційним до його заряду $q \sim \varphi$. Використовуючи коефіцієнт пропорційності C рівняння записують наступним чином

$$q = C\varphi \quad (10.3)$$

де C – електрична ємність провідника, електроємність, або просто ємність.

Приклад 1. Визначити ємність кулі розміром із Землю

$R = 6400$ км
 $C = ?$



Для визначення ємності за формулою (10.3) тіло потрібно спочатку зарядити. Заряди створюють електростатичне поле. Потім, використовуючи зв'язок між полем та потенціалом визначають різницю потенціалів.

Вочевидь поле кулі $E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$. Різницю потенціалів у випадку усамітненого тіла визначають між точкою на поверхні тіла та точкою на нескінченності, де як відомо потенціал дорівнює нулю для всіх тіл.

$$\Delta\varphi = \int_{T_1}^{T_2} \vec{E} d\vec{l} = \varphi_1 - \varphi_2 = \varphi(R) - \varphi(\infty),$$

$$\varphi(R) - 0 = \int_R^\infty E dr \cos 0^\circ = \int_R^\infty \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}.$$

Далі з формули (10.3) отримаємо $C = 4\pi\epsilon_0 R = 4\pi \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 6400 \cdot 10^3 \approx 700$ мкФ

Приклад 2

Електричне поле створене двома паралельними пластинами відстань між пластинами d , площа пластин. Діелектрик між пластинами має відносну діелектричну проникність ϵ . Визначити ємність конденсатора,

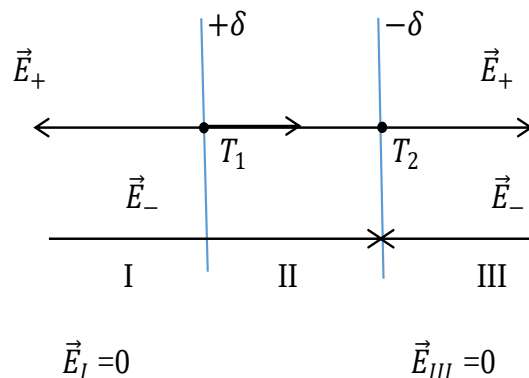


рис 10.4.

Рис.10.4

Припустимо заряди на обкладинках конденсатора мають значення $+q$ та $-q$. Поле від однієї пластини нескладно знайти за теоремою Гауса для вектору $\mathbf{D}$, $D_i = \frac{\sigma}{2}$. За принципом суперпозиції електростатичне поле буде відмінне від нуля тільки в області між обкладинками та складає

$$E_{II} = 2E_{\text{пласт}} = 2 \frac{\delta}{2\epsilon_0} = \frac{\delta}{\epsilon_0} = \frac{q}{S\epsilon_0\epsilon},$$

Різниця потенціалів між обкладинками становить

$$\Delta\varphi = \int_{T_1}^{T_2} \vec{E} d\vec{l} = \int_{T_1}^{T_2} \frac{q}{S\varepsilon_0\varepsilon} dl = \frac{q}{S\varepsilon_0\varepsilon} \int_0^d dl = \frac{qd}{S\varepsilon_0\varepsilon}.$$

Порівняв, отриманий результат з формулою (10.3) визначаємо

$$C = \frac{S\varepsilon_0\varepsilon}{d} - \text{ємність плоского конденсатора.}$$

В теорії розглядають ще два типи конденсаторів – сферичний та циліндричний. Обкладинками сферичного конденсатора є дві концентричні металеві оболонки з радіусами R_1 і R_2 , а циліндричного – коаксіальні циліндри з радіусами a і b та довжиною l .

Приклад 3. Знайти ємність циліндричного конденсатору з параметрами зображеними на рис.10.5. Обкладинками циліндричного конденсатора є два коаксіальні циліндри. Їх радіуси a і b та довжиною l .

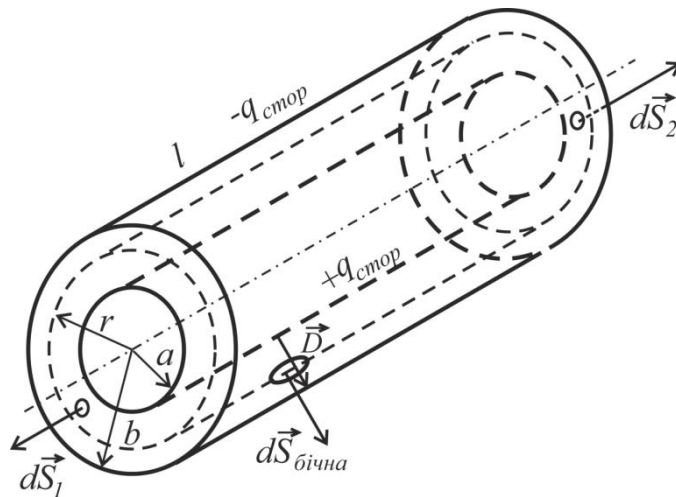


Рис.10.5

Зарядимо, наприклад, внутрішній та зовнішній циліндри $+q$ та $-q$. За теоремою Гауса для вектора D знайдемо поле між обкладинками.

Замкнену поверхню виберемо у вигляді циліндру радіуса r , потік вектора D відповідно складає

$$\Phi = \oint_{S_{\text{циліндра}}} \vec{D} d\vec{S} = \int_{S_1} D dS \cos 90^\circ + \int_{S_2} D dS \cos 90^\circ + \int_{S_{\text{бічна}}} D dS \cos 0^\circ.$$

Після спрощення $\oint_{S_{\text{циліндра}}} \vec{D} d\vec{S} = D S_{\text{бічна}} = D 2\pi r l$. Сумарний сторонній

заряд під поверхнею циліндра належить внутрішній додатне заряджений обкладинці, тому $\sum q_{\text{стор}} = +q$. Вектор зміщення $D = \frac{q}{2\pi r l}$.

Після знаходження поля D , перейдемо до напруженості поля, $\vec{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E}$, отримаємо $E = \frac{q}{2\pi r l \varepsilon_0 \varepsilon}$.

Різниця потенціалів між обкладинками $\Delta\varphi = \int_a^b \frac{q}{2\pi r l \varepsilon_0 \varepsilon} dr = \frac{q}{2\pi l \varepsilon_0 \varepsilon} \int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{q \ln b/a}{2\pi l \varepsilon_0 \varepsilon}$.

Відповідно ємність $C = \frac{\ln b/a}{2\pi l \varepsilon_0 \varepsilon}$.

За межами конденсатору поле відсутнє. Читачу пропонується довести цю обставину самостійно.

10.3 Енергія зарядженого конденсатора. Енергія електростатичного поля

10.3.1 Енергія зарядженого конденсатора.

Енергія конденсатору дорівнює роботі по заряджанню конденсатора. Для її підрахунку будемо вважати, що конденсатор заряджається шляхом перенесення малих порцій заряду dq з нескінченності на обкладинки. Користуючись теоремою про зміну потенціальної енергії W та визначенням потенціалу, запишемо $dA = -dW = \varphi dq$. Також врахуємо зв'язок між зміною заряду та зміною потенціалу $dq = C d\varphi$. Загальна робота по заряджанню конденсатору до потенціалу φ складе

$$A = \int dA = \int_{\varphi=0}^{\varphi} C \varphi d\varphi = \frac{C \varphi^2}{2} = \frac{C (\Delta\varphi)^2}{2} = \frac{CU^2}{2} = \frac{q^2}{2C} = \frac{qU}{2} = W.$$

Випишемо остаточні формули для енергії

зарядженого конденсатору

$$W = \frac{CU^2}{2} = \frac{q^2}{2C} = \frac{qU}{2}. \quad (10.4)$$

10.3.2 Енергія електричного поля

Так як в просторі між пластинами зосереджене все поле конденсатора, тому визначимо енергію конденсатора не через характеристики заряджених пластин, а через характеристики електричного поля між ними.

Скористуємося виразом (10.4): $W_{\text{конд}} = \frac{q^2}{2C}$ та виразом для ємності плоского конденсатору $C = \frac{S\epsilon_0\epsilon}{d}$

Різниця потенціалів між обкладинками $\Delta\phi = Ed$. Поверхнева густина заряду $\sigma = \frac{q}{S}$ визначає вектор електричного зміщення $D_i = \frac{\sigma}{2}$; $D_{\text{конд}} = 2D_i$, тоді $E = 2E_i = \frac{\sigma}{\epsilon\epsilon_0}$. Далі нескладно отримати вираз для енергії зарядженого плоского конденсатору через параметри поля всередині.

$W = \frac{1}{2}DSEd = \frac{1}{2}DEV$, де враховано, що $V = Sd$ є об'єм конденсатору. Врахуємо, що вектори поля паралельні ($|\vec{E} \uparrow \vec{D}|$). Енергія може бути записана з використанням скалярного добутку $W = \frac{1}{2}(\vec{E}\vec{D})V$. Електричне поле в плоскому конденсаторі однорідне, тому поділив енергію поля на об'єм конденсатору ми отримаємо функцію об'ємної густини енергії електричного поля

$$\omega_E = \frac{dW}{dV} = \frac{1}{2}(\vec{E}\vec{D}). \quad (10.5)$$

Цей вираз можна записати через інші параметри поля у вигляді

$$\omega_E = \frac{1}{2}(\vec{E}\vec{D}) = \frac{\epsilon\epsilon_0 E^2}{2} = \frac{D^2}{2\epsilon\epsilon_0}. \quad (10.11)$$

Розмірність ω_E складає $\left[\frac{\text{Дж}}{\text{м}^3}\right]$.

У випадку, коли електричне поле неоднорідне необхідно спочатку розбити об'єм на елементарні об'єми dV , в межах яких поле можна вважати однорідним. За виразом (10.5) енергія електростатичного поля в межах елементарного об'єму складає $dW = \omega_E dV$. Значення загальної енергії в об'ємі V можна знайти шляхом інтегрування

$$W = \int \omega_E dV = \int \frac{(\vec{E}\vec{D})}{2} dV = \int \frac{\epsilon\epsilon_0 E^2}{2} dV = \int \frac{D^2}{2\epsilon\epsilon_0} dV \quad (10.12)$$

Контрольні запитання і завдання

1. Знайти ємність сферичного конденсатора, радіуси обкладинок якого дорівнюють R_1 і R_2 , причому $R_1 > R_2$, якщо простір між обкладинками заповнено: а) однорідним діелектриком із проникністю ϵ ; б) діелектриком, проникність якого залежить від відстані до центра конденсатора як $\epsilon = \alpha r$, α – стала.
2. Простір між обкладинками плоского конденсатора заповнено послідовно двома діелектричними шарами 1 та 2 з товщиною d_1 та d_2 і проникністю відповідно ϵ_1 й ϵ_2 . Площа кожної обкладки дорівнює S . Знайти: а) ємність конденсатора; б) густину зв'язаних зарядів на межі поділу діелектричних шарів, якщо напруга на конденсаторі дорівнює U й електричне поле спрямоване від шару 1 до шару 2.
3. Знайти енергію електричного поля провідної кулі радіусом R , заряд якої q , та вона оточена діелектриком з діелектричною проникністю ϵ .

11. Закони постійного струму

11.1 Струм та густина струму, лінії струму

Електричним струмом називається напрямлений рух заряджених частинок – *носіїв струму*. В металах і сплавах носіями струму є електрони провідності – валентні електрони, які можуть переміщуватися по всьому об'єму зразка. У рідких провідниках (електролітах) носіями струму є іони, а в газах – те й інше. Потoki заряджених частинок у вакуумі теж створюють електричний струм.

Сила струму, визначається кількістю заряду, що переноситься через задану поверхню за одиницю часу.

$$I = \frac{dq}{dt} \quad (11.1)$$

Коли відбувається рух зарядів одного знаку струм $I = \frac{dq_+}{dt} + \frac{dq_-}{dt}$.

Розглянемо площадку $dS_{\perp}$, яка розташована перпендикулярно до напрямку руху носіїв зарядів через неї та утворюють силу струму dI . Поділимо силу струму dI на величину площі $dS_{\perp}$ отримаємо густину струму, тобто кількість заряду, що проходить крізь елементарну площадку в одиницю часу $j = \frac{dI}{dS_{\perp}}$. Якщо нормаль до площадки утворює з напрямком руху зарядів кут α , то густина струму

$$j = \frac{dI}{dS \cos \alpha} \quad (11.2)$$

З виразу (11.2) випливає, що $dI = (\vec{j} d\vec{S})$ та загальна сила струму крізь поверхню S складає $I = \int_S (\vec{j} d\vec{S})$.

Силу струму можна трактувати як потік вектора густини струму через задану поверхню і при необхідності зображувати розподіл струму у просторі лініями вектора $\vec{j}$ (лініями струму).

Визначимо, як пов'язана густина струму з рухом зарядів у провіднику.

Механізм електричного струму в металевому провіднику можна розглядати на основі уявлень класичної фізики, за якими електрони провідності в металі утворюють «електронний газ» і здійснюють інтенсивний тепловий рух. Усереднену швидкість теплового руху $\langle V_T \rangle$ можна приблизно оцінити з відомих формул молекулярної фізики. Середня кінетична енергія поступального руху визначається температурою, тобто

$\langle \frac{mV^2}{2} \rangle = \frac{3kT}{2}$, звідки $\langle V_T \rangle = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$, що при кімнатних температурах складає приблизно $10^5 \frac{\text{м}}{\text{с}}$.

При створенні в провіднику електричного поля, наприклад при прикладанні певної різниці потенціалів на його краях, додається ще дрейфовий рух електронів з дрейфовою швидкістю $\vec{v}$.

Середнє значення добутку векторів швидкостей теплового та дрейфового руху $\langle \vec{v} + \vec{V}_T \rangle = \langle \vec{v} \rangle = \vec{v}$. При цьому, ми врахували, що середнє значення вектору швидкості теплового руху дорівнює нулю в силу додавання хаотично напрямлених у часі векторів.

Розглянемо в середовищі (провіднику) елементарну площадку $dS_{\perp}$, крізь яку проходять заряди q_i зі швидкістю $\vec{v}$. Вочевидь значення заряду dq , що пройде крізь площадку складає $dq = q_i n dV$, де dV – об'єм у вигляді циліндру, побудований з основою $dS_{\perp}$. Довжина циліндру відповідеє шляху, який пройде заряд за час dt при швидкості руху $\vec{v}$.

Заряд $dq = q_i n dS_{\perp} v dt$, де n – концентрація носіїв заряду в провіднику. Густина струму $|\vec{j}| = \frac{dq}{dt \cdot dS_{\perp}} = q_i n v$. Далі врахуємо, що напрямок руху зарядів співпадає з напрямком вектору $\vec{v}$, тому у векторній формі отримаємо

$$\vec{j} = q_i n \vec{v} \quad (11.3)$$

11.2 Рівняння неперервності

Розглянуті характеристики густини струму дозволяють подати в загальній математичній формі один із фундаментальних фізичних законів – закон збереження електричного заряду.

Якщо виділити в просторі довільну замкнену поверхню, рис.11.1, то струм, який вийде крізь елементарну площадку $d\vec{S}$ при густині струму $\vec{j}$ в межах площадки становить $dI = (\vec{j}d\vec{S})$. Загальний струм, який вийде крізь замкнену поверхню S складе $I = \oint_S (\vec{j}d\vec{S})$. З іншого боку, струм крізь поверхню призводить до зменшення заряду Q на величину $-dQ$ під поверхнею всередині об'єму, який обмежений замкненою поверхнею S . Знак мінус при dQ визначається законом збереження заряду.

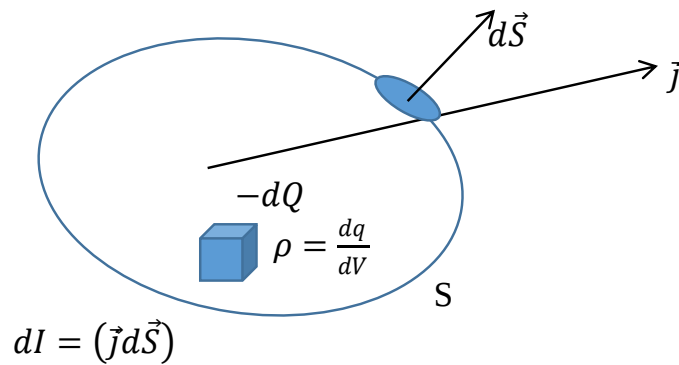


Рис.11.1

Таким чином струм, який виходить з об'єму, визначається швидкістю зміни у часі заряду Q під поверхнею S

$$I = \oint_S (\vec{j}d\vec{S}) = -\frac{dQ}{dt} \quad (11.4)$$

Вираз (11.4) зветься *рівнянням неперервності* в інтегральній формі.

Утворення заряду в об'ємі під поверхнею утворює його розподіл з об'ємною густиною ρ , тоді $Q = \int \rho dV$. Після підстановки заряду в формулу (11.4) отримаємо

$$\oint_S (\vec{j}d\vec{S}) = -\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV = -\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV \quad (11.5)$$

У відповідності до теореми Остроградського–Гауса

$$\int_V \text{div} \vec{j} dV = \oint_S (\vec{j}d\vec{S}) \quad (11.6)$$

З рівнянь (11.5) та (11.6) отримаємо

$$\int_V \operatorname{div} \vec{j} dV = \oint_S (\vec{j} d\vec{S}); \quad (11.7)$$

$$\operatorname{div} \vec{j} = - \frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (11.8)$$

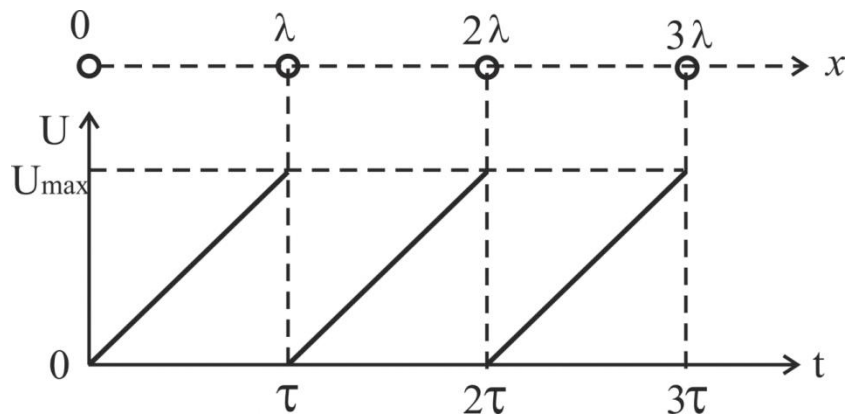
Вираз (11.8) носить назву теорема Гауса, або *рівняння неперервності* в диференціальній формі.

11.3 Елементарна теорія електропровідності металів

11.3.1 Закон Ома

Електрони при кімнатних температурах здійснюють інтенсивний тепловий рух. Але він є хаотичним і не спричиняє перенесення заряду, тобто електричного струму. Струм створюється впорядкованим рухом носіїв, і саме його дрейфова швидкість $\vec{v}$, яка визначає густину струму.

Розглянемо рух електрону між вузлами кристалічної ґратки, рис.11.2. В елементарній теорії електропровідності вважається, що електрон за рахунок сили Кулона $\vec{F} = q\vec{E}$ рухається між вузлами кристалічної ґратки рівноприскорено, $\vec{a} = \frac{e\vec{E}}{m}$. При стиканні з атомом електрон зупиняється,



далі рух періодично повторюється.

Рис. 11.2

Середній час пробігу між вузлами кристалічної ґратки $\tau = \frac{\lambda}{|\vec{v}_T + \vec{v}|}$,

де λ – період кристалічної ґратки. Окрім інтенсивного теплового руху, електрони здійснюють впорядкований рух, і саме його швидкість $\vec{v}$,

визначає густину струму. За час між двома послідовними зіткненнями з атомами, кожен електрон під дією поля збільшує швидкість руху уздовж провідника від нуля до певної максимальної величини v_{max} . Задля кількісного уявлення про швидкість впорядкованого руху, оцінимо величину дрейфової швидкості $\vec{v}$ в мідному провіднику при густині струму $j = 10^7$ А/мм, прийнявши концентрацію носіїв зарядів рівною $n \approx 10^{29} \frac{1}{\text{м}^3}$. Отримаємо $|\vec{v}| = \frac{j}{qn} \approx 10^{-3} \frac{\text{м}}{\text{с}}$.

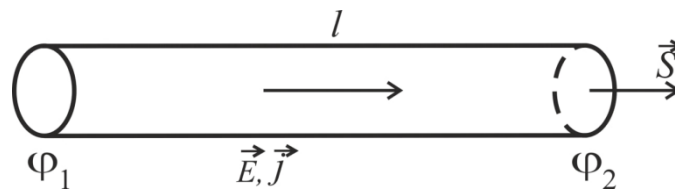
В порівнянні з тепловою швидкістю $\langle V_T \rangle \approx 10^5 \frac{\text{м}}{\text{с}}$ – швидкість дрейфового руху значно поступається, тобто $\langle V_T \rangle \gg |\vec{v}|$. Це означає, що час вільного пробігу заряду визначається саме швидкістю теплового руху й складає $\tau = \frac{\lambda}{\langle V_T \rangle}$. Запишемо середнє значення дрейфової швидкості $\langle |\vec{v}| \rangle = \frac{1}{2} U_{max} = \frac{eE}{2m} \cdot \frac{\lambda}{V_T}$ – дрейфова швидкість носіїв. Вектор густини струму

$\vec{j} = ne\langle |\vec{v}| \rangle = \frac{1}{2} \frac{ne^2\lambda}{m\langle V_T \rangle} \vec{E} = \sigma \vec{E}$, де $\sigma = \frac{1}{2} \frac{ne^2\lambda}{m\langle V_T \rangle}$ – питома провідність металу.

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} \quad (11.9)$$

Вираз (11.9) є закон Ома в диференціальній формі.

Розглянемо відрізок провідника довжиною l та поперечним перерізом



S, рис. 11.3.

Рис. 11.3

Прикладемо до кінців провідника різницю потенціалів $\Delta\phi$.

Напруженість електричного поля всередині складе $E = \frac{\Delta\phi}{l} = \frac{u}{l}$. Густина

струму згідно виразу (11.9) $\vec{j} = \sigma \vec{E}$. Отримаємо рівняння $\frac{I}{S} = \sigma \frac{u}{l}$. Або

$I = \frac{\sigma S}{l} u$. Останнє рівняння перепишемо у вигляді

$$I = \frac{1}{R} u \quad (11.10)$$

де $R = \frac{l}{\sigma S} = \frac{\rho l}{S}$, ρ – питомий опір, а обернена величина $\frac{1}{\rho} = \sigma$ носить назву

питома провідність.

Вираз (11.10) знайомий зі школи носить назву закон Ома (в інтегральній формі).

11.3.2 Закон Джоуля – Ленца

Стикаючись із іонами металу, електрони провідності передають їм енергію $E_K = \frac{mv_{max}^2}{2}$, набуту в дрейфовому русі. Ця енергія називається енергією струму, далі перетворюється на теплову енергію провідників. Це призводить до виділення теплоти dQ за проміжок часу $dt = \tau = \frac{\lambda}{V_T}$ в елементарному об'ємі dV . Питома потужність яка утворюється при цьому складає $P_{\text{пит.потужність}} = \frac{dQ}{dt \cdot dV}$.

Запишемо кінетичну енергію набуту одним зарядом $E_K = \frac{mU_{max}^2}{2} = \frac{me^2 E^2 \lambda^2}{2m^2 V_T^2} = \frac{e^2 E^2 \lambda^2}{2m V_T^2}$. Врахуємо, що заряди характеризуються певною концентрацією $n = \frac{dN}{dV}$. Це призводить до виразу для питомої потужності $P_{\text{пит.потужність}} = \frac{E_K n}{\tau}$. Після підстановки отримаємо

$$P_{\text{пит.потужність}} = \frac{e^2 E^2 \lambda^2 n V_T}{2m V_T^2 \lambda} = \frac{e^2 \lambda n}{2m V_T} E^2 = \sigma E^2.$$

$$P_{\text{пит.потужність}} = \sigma E^2 = (\mathbf{jE}) = \frac{j^2}{\sigma} \quad (11.11)$$

Вираз (11.11) носить назву закон Джоуля–Ленца (в диференціальній формі). *Кількість теплоти, що виділяється за одиницю часу (теплова потужність) в одиниці об'єму однорідного провідника із струмом, в кожній точці є прямо пропорційною квадратові густини струму або квадратові напруженості електричного поля в цій точці.*

Розглянемо відрізок провідника довжиною l та поперечним перерізом S . Потужність струму P , яка утворюється в об'ємі V провідника

$$P = P_{\text{пит.потужність}} V.$$

Використав формулу (11.11) нескладно отримати потужність струму на даній ділянці кола

$$P = \sigma E^2 V = \sigma E^2 l S = \sigma \left(\frac{u}{l}\right)^2 l S = \frac{u^2}{R} = I^2 R = uI \quad (11.12)$$

Вираз (11.12) є не що інше як закон Джоуля–Ленца (в інтегральній формі).

11.4 Правила Кірхгофа

Для розрахунку електричного кола при його різних конфігураціях використовуються два правила Кірхгофа. Розрахувати електричне коло це означає знайти струм та напругу на кожному елементі кола.

Перше правило Кірхгофа. Для кожної точки розділення провідників алгебраїчна сума струмів, що стікається в узлі дорівнює нулю.

$$\sum_{i=1}^N I_i = 0 \quad (11.13)$$

Перше правило Кірхгофа є наслідком закону збереження заряду.

Друге правило Кірхгофа. Нехай через опір R_i тече струм I_i , тоді добуток $R_i I_i$ називається падінням напруги на цьому опорі. Для кожного замкненого контуру електричного кола сума падінь напруги на n елементах контуру дорівнює сумі електрорушійних сил ε_j (ЕРС), які містяться в цьому контурі

$$\sum_{i=1}^n R_i I_i = \sum_{j=1}^k \varepsilon_j \quad (11.14)$$

Друге правило Кірхгофа є наслідком закону Ома для замкненого кола.

Контрольні запитання і завдання

1. Навіть при дуже великих силах струму швидкість впорядкованого руху електронів складає всього декілька міліметрів на секунду. Як тоді пояснити факт майже миттєвого встановлення струму після включення електричного кола?

2. У коло паралельно увімкнені мідний та сталевий дроти однакової довжини й діаметра. Знайдіть відношення кількості теплоти, що виділяються, в цих провідниках. Питомий опір міді $\rho = 17 \text{ нОм} \cdot \text{м}$, сталі – $\rho = 98 \text{ нОм} \cdot \text{м}$.
3. За час, що дорівнює 8 с, за умови рівномірно зростаючої сили струму від нуля до деякого максимуму в провіднику опором 8 Ом виділилася кількість теплоти 500 кДж. Визначте заряд, що проходить у провіднику, якщо сила струму в початковий момент часу дорівнює нулю.
4. Конденсатор ємністю $C = 400 \text{ пФ}$ приєднали через опір $R = 650 \text{ Ом}$ до джерела постійної напруги. Через скільки часу напруга на конденсаторі стане $U = 0,95U_0$?

12. Магнітне поле струмів. Закон Ампера. Сила Лоренца

12.1 Закон Ампера. Закон Біо–Савара–Лапласа

Дослід показує, що електричні струми взаємодіють між собою. Згідно закону Ампера, на між струмами I_1 та I_2 , які течуть по двох паралельних провідниках довжиною l , розташованих на відстані a один від одного діє сила, яка за законом Ампера змушує провідники притягуватися один до одного (якщо струми течуть в один бік), або відштовхуватися (струми напрямлені в протилежні сторони), рис.12.1 з силою $|d\vec{F}| = |\vec{F}_{12}| = |\vec{F}_{21}|$. За законом Амперу сила взаємодії на одиницю довжини dl провідника

$$|d\vec{F}| = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a} dl \quad (12.1)$$

У виразі (12.1) множник $\frac{\mu_0 I_1}{2\pi a}$ розглядають як індукцію магнітного поля B_1 , яку утворює перший струм в області другого провідника $B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi a}$, a – відстань між паралельними провідниками, де $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м}$ носить назву магнітної сталої.

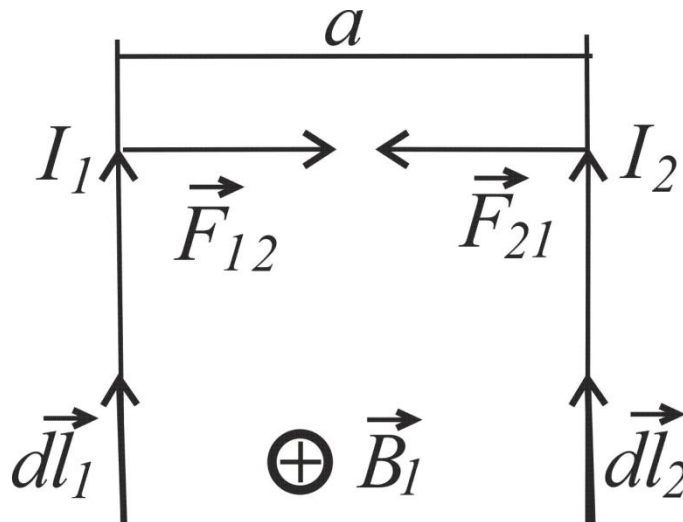


Рис.12.1

Сила Ампера, яка діє на елемент струму dl_2 із боку струму I_1 через поле $\vec{B}_1$ може бути записана через векторний добуток

$$\vec{F}_{21} = I_2 [\vec{B}_1 d\vec{l}_2] \quad (12.2)$$

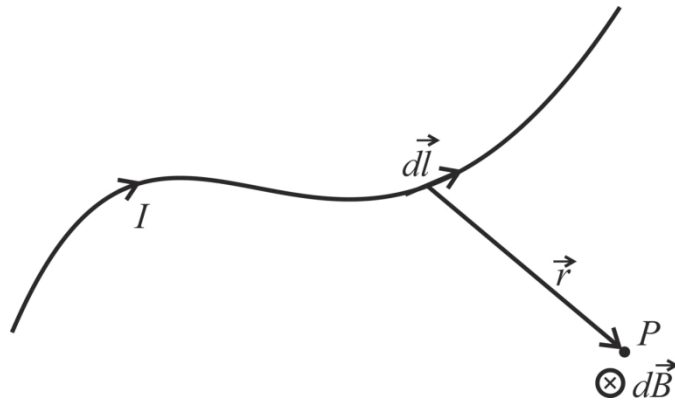
Для вектору індукції магнітного поля виконується принцип суперпозиції

$$\vec{B} = \int d\vec{B} \quad (12.3)$$

Якщо вираз (12.2) записати як силу поділену на одиницю довжини провідника, то можна встановити одиницю виміру сили струму в 1 А.

$$\frac{dF}{dl} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м} \cdot 1\text{А} \cdot 1\text{А}}{2\pi \cdot 1\text{м}} = 2 \cdot 10^{-7} \text{ Н/м}$$

Закон Біо–Савара–Лапласа



Індукцію магнітного поля провідника зі струмом можна розрахувати на основі обрахунків для поля точкового заряду та принципу суперпозиції, тобто кожен елементарну ділянку $d\vec{l}$ провідника із струмом можна розглядати як певну кількість рухомих точкових зарядів.

Рис.12.2

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I[d\vec{l}\vec{r}]}{r^3} \quad (12.3)$$

Закон Біо–Савара–Лапласа, вираз (12.3), визначає магнітну індукцію яку створює елемент струму $d\vec{l}$ у напрямку, що визначене радіус–вектором $\vec{r}$

Приклад 1.

Визначити індукцію магнітного поля нескінченного прямолінійного струму.

Визначимо індукцію магнітного поля, яка створюється нескінченним прямолінійним провідником із струмом I у довільній точці простору у довільній точці простору (т.Р), яка знаходиться на відстані b від провідника, рис.12.3.

Розіб'ємо провідник на елементарні ділянки $d\vec{l}$. Кожна така ділянка провідника зі струмом створює в т.Р елементарну індукцію магнітного поля $d\vec{B}$.

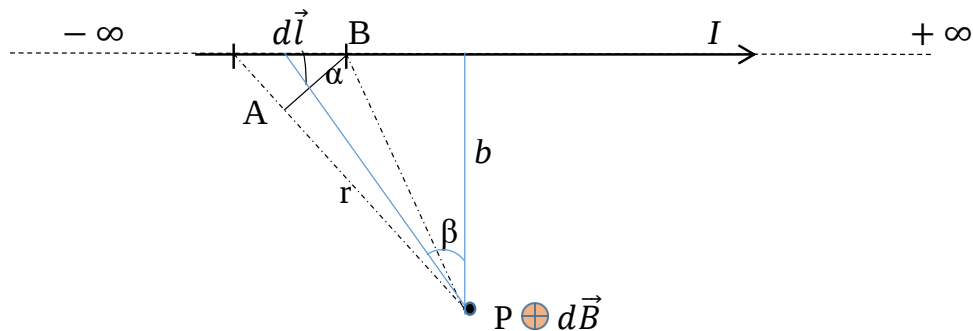


Рис.12.3

За законом Біо–Савара–Лапласа $d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I[d\vec{l}\vec{r}]}{r^3}$. Модуль магнітного поля $|d\vec{B}| = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl r \sin \alpha}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl \sin \alpha}{r^2}$. Напрямок вектора $d\vec{B}$ зображено на рис.12.3. Далі скористаємося принципом суперпозиції $\vec{B} = \int d\vec{B}$. Попередньо виконаємо елементарні розрахунки на основі рисунку:

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}; \quad d\alpha + d\beta = 0; \quad d\alpha = -d\beta; \quad |d\alpha| = |d\beta|$$

$$dl = \frac{AB}{\sin \alpha}; \quad AB = r d\beta = r d\alpha; \quad r = \frac{b}{\sin \alpha}$$

З урахуванням принципу суперпозиції отримаємо вираз для індукції магнітного поля в т.Р.

$$|\vec{B}| = \int |d\vec{B}| = \int \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{Idl \sin \alpha}{r^2} = \int \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I b d\alpha \sin^3 \alpha}{\sin^2 \alpha b^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi b} 2 \int_0^{\pi/2} \sin \alpha d\alpha$$

$$|\vec{B}| = \frac{\mu_0 I}{2\pi b} \quad (12.4)$$

Приклад 2.

Визначити індукцію магнітного поля на осі колового струму.

По колу радіуса R тече струм силою I . Визначити індукцію магнітного поля $\vec{B}$ у довільній точці спостереження (т.Р), яка знаходиться на осі цього струму на відстані b від його центру.

Розіб'ємо провідник на елементарні ділянки $d\vec{l}$. Кожна така ділянка провідника із струмом створює в т. Р елементарну індукцію магнітного поля $d\vec{B}$, модуль якої визначається формулою закону Біо – Савара – Лапласа, формула (12.4).

Вектор $d\vec{B}$ перпендикулярний до обох векторів $d\vec{l}$ та $\vec{r}$, тобто перпендикулярний до площини, в якій лежать обидва ці вектори.

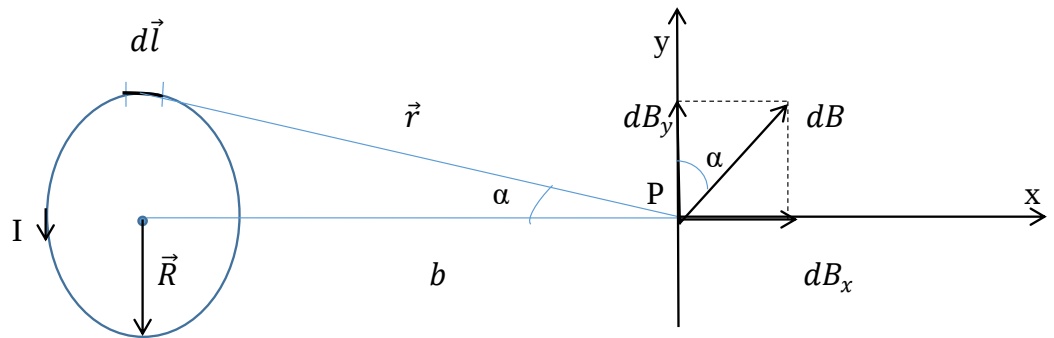


Рис.12.4

Розкладемо вектор $d\vec{B}$ на дві компоненти по осях Ox та Oy , рис.12.3. З геометрії задачі зрозуміло, що компоненти поля dB_y в силу симетрії розташування компенсують одна одну, а компоненти поля dB_x навпаки додаються одна до одної, так що вектор сумарної індукції у т.Р, напрямлений уздовж осі Ox $B = B_x = \int dB_x = \int dB \sin \alpha$.

Врахуємо, що кут між векторами $\vec{r}$ та $d\vec{l}$ складає 90° , запишемо $|d\vec{B}| = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{Idl \sin 90^\circ}{r^2}$.

З рис.12.4 $\sin \alpha = \frac{R}{r}$; $r = \sqrt{R^2 + b^2}$.

За принципом суперпозиції остаточний результат отримає значення

$$|\vec{B}| = \int \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{IRdl}{r^3} = \frac{\mu_0 IR}{4\pi \sqrt{(R^2 + b^2)^3}} \int_0^{2\pi R} dl = \frac{\mu_0 IR^2}{2\sqrt{(R^2 + b^2)^3}} \quad (12.5)$$

Із формули (12.5) видно, що свого максимального значення індукція магнітного поля B сягає при умові: $b \rightarrow 0$, тобто в центрі витка: $B_0 = \frac{\mu_0 I}{2R}$.

12.2 Магнітне поле рухомого заряду

Покажемо, що будь-яка заряджена частинка в процесі руху утворює у навколишньому просторі магнітне поле. Розглянемо елемент струму $d\vec{l}$.

Скористаємося законом Біо–Савара–Лапласа для елемента струму:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I[d\vec{l} \cdot \vec{r}]}{r^3}$$

Виразимо струм через густину струму $I = jS$, де j – густина струму, $\vec{j} = ne\langle\vec{V}\rangle$, $\langle\vec{V}\rangle$ – вектор середньої швидкості напрямленого руху носіїв струму. Індукцію поля від елемента струму запишемо у вигляді $d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{nqS\langle\vec{V}\rangle[d\vec{l} \cdot \vec{r}]}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{nqSdl[\langle\vec{V}\rangle \cdot \vec{r}]}{r^3}$, де ми врахували, що напрям вектора $\langle\vec{V}\rangle$ збігається з напрямком елемента струму $d\vec{l}$. Добуток $nSdl = dN$ визначає кількість зарядів в елементі струму dl .

Вираз для індукції магнітного поля, яка створюється dN зарядами на відстані r від елемента струму, в якому рухаються ці заряди приймає вигляд $d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{qdN[\langle\vec{v}\rangle \cdot \vec{r}]}{r^3}$. Поділимо результат на кількість зарядів dN , та отримаємо вираз для індукції поля, яку утворює окремий рухомий заряд q

$$\vec{B}_i = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{q[\langle\vec{v}\rangle \cdot \vec{r}]}{r^3} \quad (12.6)$$

12.3 Сила Лоренца

Дослід показує, що на заряд, який рухається у магнітному полі діє сила, яку можна записати у вигляді векторного добутку:

$$\vec{F} = q[\vec{v}\vec{B}], \quad (12.7)$$

де q – електричний заряд; $\vec{v}$ – швидкість руху заряду; $\vec{B}$ – індукція магнітного поля.

Модуль цієї сили $|\vec{F}| = qvB \sin \alpha$, α – кут між векторами $\vec{v}$ та $\vec{B}$.

Напрямок вектору $\vec{F}$ визначається за правилом векторного добутку (в шкільних підручниках за правилом лівої руки).

Оскільки магнітну силу завжди спрямовано перпендикулярно до вектору швидкості руху зарядженої частинки, то роботи сила Лоренцу над частинкою вона не здійснює. Це означає, що стале магнітне поле не може змінити енергії частинки.

Якщо у просторі водночас існують електричне поле $\vec{E}$ та магнітне поле з індукцією $\vec{B}$, то загальна сила, що діятиме на частинку, що рухається може бути представлена у вигляді добутку

$$\vec{F} = q\vec{E} + q[\vec{v}\vec{B}] \quad (12.8)$$

Якщо провідник, по якому тече струм, вмістити у магнітне поле, то на кожен із носіїв заряду, які рухаються у провіднику діятиме магнітна сила:

Від кожного із носіїв заряду дія цієї сили передається провіднику в цілому. В результаті на провідник із струмом при його вміщенні в магнітне поле діє сила Ампера.

12.3.1 Рух заряджених частинок у магнітному полі

В однорідному магнітному полі можливі два види руху заряджених частинок під дією магнітної сили: рух по колу та рух по гвинтовій лінії

Рух по колу спостерігається у випадку, коли швидкість зарядженої частинки $\vec{v} \perp \vec{B}$. Виходячи з визначення сили Лоренца $\vec{F}_L = q[\vec{v}\vec{B}]$, бачимо, що сила Лоренца перпендикулярно до вектору швидкості. Це призводить до руху заряду по колу радіуса R . Тоді на частинку масою m діє відцентрова сила, яка компенсує силу Лоренца: $|\vec{F}_L| = |\vec{F}_{\text{відцентрова}}|$, або

$$qvB \sin 90^\circ = \frac{mv^2}{R} = m\omega^2 R \quad (12.9)$$

З виразу (12.9) отримаємо радіус кола $R = \frac{mv}{qB}$, та кутову швидкість

$\omega = \frac{qB}{m}$, де відношення $\frac{q}{m}$ отримало назву питомий заряд.

У векторній формі останнє рівняння набуває вигляду

$$\vec{\omega} = -\frac{q\vec{B}}{m}. \quad (12.10)$$

Відповідно період обертання частинки $T = \frac{2\pi m}{qB}$. Звернемо увагу, що кутова швидкість та період не залежать від швидкості заряду.

Рух зарядженої частинки *по гвинтовій лінії* має місце у випадку, коли її швидкість $\vec{v}$ напрямлена під деяким кутом α до вектору $\vec{B}$. У такому випадку швидкість можна розкласти на дві складові, рис 12.5: $\vec{v} = \vec{v}_\perp + \vec{v}_\parallel$.

Сила Лоренца складе $\vec{F}_L = q[\vec{v}\vec{B}] = q[\vec{v}_\perp\vec{B}] + q[\vec{v}_\parallel\vec{B}] = q[\vec{v}_\perp\vec{B}]$;

Знайдемо параметри гвинтової лінії – радіус R та крок h .

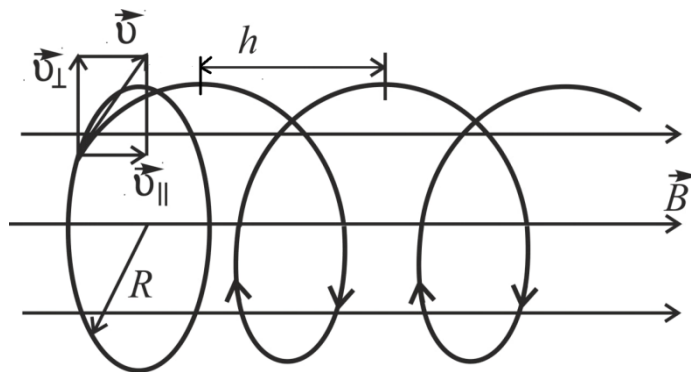


Рис.12.5

Радіус визначається за виразом $R = \frac{m|\vec{v}_\perp|}{qB} = \frac{m v \sin \alpha}{qB}$.

Крок спіралі $h = v_\parallel T = v \cos \alpha \frac{2\pi m}{qB}$.

Напрямок закручення спіралі залежить від знаку заряду частинки та визначається за виразом (12.10).

12.4 Ефект Холла

Ефект Холла – явище, при якому виникає поперечна різниця потенціалів у пластині з металу або напівпровідника з постійним струмом

під час розміщення останнього у магнітному полі. Ефект був відкритий у 1879 році в тонких пластинах золота.

У найпростішому розгляді ефект Холла має наступне пояснення. Нехай через провідний брусок вміщений у магнітне поле $\vec{B}$ протікає електричний струм. Під дією сили Лоренцу $\vec{F}_L = q[\vec{v}\vec{B}]$ з боку магнітного поля, носії заряду (для визначеності будемо вважати, що носіями заряду є дірки в напівпровіднику) будуть відхилятися перпендикулярно до напрямку руху. Це призводить до накопичення додатних зарядів біля верхньої грані пластини, та появи на нижній грані від'ємного заряду, рис.12.6. Таким чином, сила Лоренца призведе до накопичення негативного заряду біля однієї грані бруса та позитивного – біля протилежної грані. Накопичення заряду продовжуватиметься доти, поки електричне поле зарядів, яке виникло під дією магнітного поля, не врівноважить магнітну складову сили Лоренца: $qE = qvB \sin 90^\circ$. Вочевидь напруженість електричного поля складе величину $E = vB$.

Це призводить до появи різниці потенціалів між верхньою та нижньою гранями пластини $u_x = \Delta\varphi = \varphi_+ - \varphi_-$. Використаємо зв'язок між різницею потенціалів та вектором напруженості електростатичного поля $\Delta\varphi = \int_{T_1}^{T_2} \vec{E} d\vec{r}$. Це нас приводить до результату $\Delta\varphi = Ed = vBd$. Використаємо зв'язок між густиною струму та вектором дрейфової швидкості носіїв заряду $\vec{j} = qn\vec{v}$, де n – концентрація носіїв заряду. Різниця потенціалів $\Delta\varphi = \frac{j}{qn} \cdot Bd$, або

$$\Delta\varphi = RjBd, \quad (12.11)$$

Константа R у виразі (12.11) носить назву сталої Холла, $R = \frac{1}{qn}$

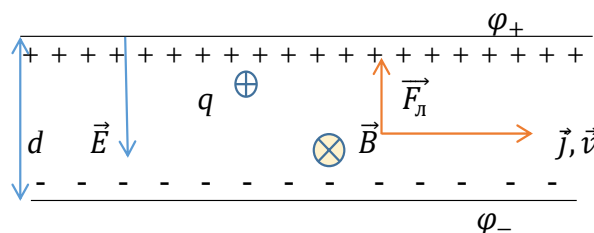


Рис.12.6

Зауважимо, що полярність напруги на гранях пластини, залежить від знаку носіїв заряду, що дозволяє визначати тип носіїв заряду (електронний або дірковий тип провідності). Також з використанням формули (12.11) можна знайти концентрацію носіїв заряду. Це робить ефект Холла придатним для дослідження властивостей напівпровідників. На основі ефекту Холла функціонують сенсори Холла, прилади, що вимірюють напруженість магнітного поля.

Контрольні запитання і завдання

1. Нескінченно довгий прямий провідник зігнутий під прямим кутом. По провіднику проходить струм $I=100\text{А}$. Знайти магнітну індукцію у точках, що лежать на бісектрисі кута й віддалені від вершини кута на $a=10\text{ см}$.
2. Тонкий диск радіусом R , який не проводить електричного струму і рівномірно заряджений з одного боку електричним зарядом із поверхневою густиною σ , обертається навколо своєї осі з кутовою швидкістю ω . Знайти індукцію магнітного поля в центрі диска.
3. Два паралельних довгих провідники зі струмом $I=6,0\text{ А}$ в кожному (струми спрямовані в один бік) віддалили один від одного так, що відстань між ними стала в $\eta=2,0$ разів більша від початкової. Яку роботу на одиницю довжини проводів виконали сили Ампера?
4. Протон пройшов деяку прискорювальну різницю потенціалів і влетів у схрещені під прямим кутом магнітне ($B=5\text{ мТл}$) та електричне ($E=20\text{ кВ/м}$) поля. Визначити різницю потенціалів U , якщо протон у схрещених полях рухається прямолінійно.

13 Основні рівняння магнетостатики

13.1 Потік вектору магнітної індукції

Визначимо потік Φ вектору індукції магнітного поля $\vec{B}$ крізь довільну замкнену поверхню S .

Для вирішення цього питання згадаємо, що лінії магнітного поля є завжди замкненими, тож кожна лінія, що входить всередину будь якої замкненої поверхні, обов'язково виходить назовні. Згідно з геометричною інтерпретацією потоку, це означає, що потоки на вході та на виході замкненої поверхні завжди мають однакову величину і протилежний знак. Тому, потік вектора індукції магнітного поля крізь довільну замкнену поверхню дорівнює нулю.

$$\Phi = \oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0 \quad (13.1)$$

Вираз (13.1) носить назву теореми Гауса для вектору індукції магнітного поля в інтегральній формі.

Для подальшого переходу до диференціальної форми теореми Гауса, використаємо теорему Остроградського–Гауса: $\oint_S \vec{B} d\vec{S} = \int_V \operatorname{div} \vec{B} dV \equiv 0$, звідки

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad (13.2)$$

Вираз (13.2) описує теорему Гауса для вектора індукції магнітного поля та відображає відсутність у природі "магнітних зарядів", тобто частинок, які б мали здатність створювати магнітне поле, подібну до здатності електричних частинок створювати електричне поле. Тому рівняння теореми Гауса є одним з основних рівнянь класичної електромагнітної теорії.

13.2 Теорема про циркуляцію вектору магнітної індукції

Розглянемо замкнений контур L . Струм I тече перпендикулярно до

площини контуру всередині контуру, рис. 13.1. Скористуємося виразом для індукції магнітного поля створюваного нескінченим прямолінійним провідником зі струмом $B_\infty = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$. Лінії вектору $\vec{B}$ утворюють концентричні кола (пунктирна лінія на рис.13.1). Розіб'ємо замкнений контур на елементи $d\vec{l}$. Спроектуємо елемент $d\vec{l}$ на напрямок дотичної до кола та на напрямок, співпадаючий з нормаллю. Тобто, представимо $d\vec{l}$ у вигляді $d\vec{l} = d\vec{l}_\tau + d\vec{l}_n$.

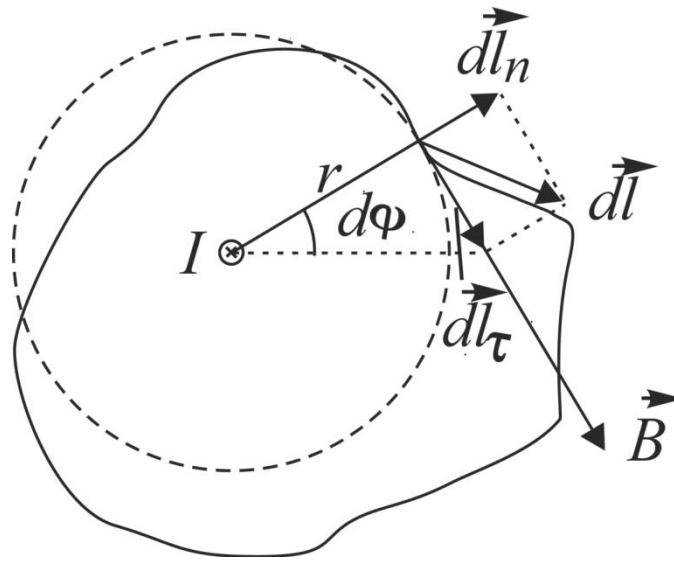


Рис.13.1

Для кола зображеного на рис.13.1 знайдемо скалярний добуток

$$\begin{aligned} (\vec{B} d\vec{l}) &= |\vec{B}| |d\vec{l}| \cos(\vec{B}, d\vec{l}) = \frac{\mu_0 I}{2\pi b} dl_\tau \cos 0^\circ + \frac{\mu_0 I}{2\pi b} dl_n \cos 90^\circ = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} dl_\tau = \\ &= \frac{\mu_0 I r d\phi}{2\pi r} = \frac{\mu_0 I d\phi}{2\pi}. \end{aligned}$$

Після інтегрування отриманого результату по всьому колу отримаємо циркуляцію для вектора індукції

$$C_B = \oint_l (\vec{B} d\vec{l}) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi = \mu_0 I. \quad (13.3)$$

У випадку, коли контур охоплює N провідників зі струмами I_i , згідно принципу суперпозиції, сумарне поле цих провідників в області елемента контуру $d\vec{l}$ буде знайдене за принципом суперпозиції $\vec{B} = \sum_{i=1}^N \vec{B}_i$.

Відповідно вираз (13.3)

$$C_B = \oint_l (\vec{B} d\vec{l}) = \sum_{i=1}^N \int_l \vec{B}_i d\vec{l} = \mu_0 \sum_{i=1}^N I_i$$

$$C_B = \oint_l (\vec{B} d\vec{l}) = \mu_0 \sum_{i=1}^N I_i \quad (13.4)$$

Результат за виразом (13.4) носить назву теореми про циркуляцію вектору $\vec{B}$ в інтегральній формі.

Для отримання відповідної теореми в інтегральній формі нам потрібно згадати визначення в математиці функції ротора та формулювання теореми Стокса.

Математичне визначення $\text{rot} \vec{A}$, $\vec{A}$ – векторне поле.

$$\text{rot} \vec{A} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{C_A}{\Delta S_n} = [\vec{\nabla} \times \vec{A}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

Згідно теореми Стокса: $\iint_S \text{rot} \vec{A} d\vec{S} = \oint_l \vec{A} d\vec{l}$.

Скористуємося виразом (13.4) та запишемо теорему Стокса для вектору $\vec{B}$.

$$\text{Відповідно} \begin{cases} \oint_l \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \sum_{i=1}^N I_i \\ \oint_l \vec{B} d\vec{l} = \iint_S \text{rot} \vec{B} d\vec{S} \end{cases} \text{ З системи рівнянь отримаємо}$$

$$\iint_S \text{rot} \vec{B} d\vec{S} = \mu_0 \sum_{i=1}^N I_i \quad (13.5)$$

Сумарний струм, який ми записали в рівнянні (13.5) у випадку протікання в середовищі з утворенням функції вектору густини струму $\vec{j}$, може бути записаний замість $\sum_{i=1}^N I_i$ у вигляді $\iint_S \vec{j} d\vec{S}$, тоді вираз (13.5) послідовно перетворюється

$$\iint_S \text{rot} \vec{B} d\vec{S} = \mu_0 \iint_S \vec{j} d\vec{S}; \iint_S (\text{rot} \vec{B} - \mu_0 \vec{j}) d\vec{S} = 0;$$

$$\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \quad (13.6)$$

Останній результат, за формулою (13.6) носить назву теореми про циркуляцію вектора індукції магнітного поля в диференціальній формі.

Основні рівняння	
Електростатики	Магнетостатики
$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{\sum q_i}{\varepsilon_0} ;$	$\oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0 ;$
$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} ;$	$\operatorname{div} \vec{B} = 0 ;$
$\oint \vec{E} d\vec{l} = 0 ;$	$\oint_l \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \sum_{i=1}^N I_i ;$
$\operatorname{rot} \vec{E} = 0 .$	$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{J} .$

13.3 Поле ідеального соленоїда

Ідеальним соленоїдом називається нескінченна циліндрична котушка, щільно намотана гранично тонким дротом в один шар.

Щодо створюваного поля, соленоїд еквівалентний системі однакових колових струмів із загальною прямою віссю. Нескінченно довгий соленоїд є симетричним відносно будь-якої перпендикулярної до його осі площини. Взяті попарно симетричні відносно такої площини витки створюють поле, магнітна індукція якого перпендикулярна до площини. Отже, в будь-якій точці всередині соленоїда вектор $\vec{B}$ спрямований вдовж його осі, рис.13.2.

Розглянемо спочатку контур №1. Цей контур має вигляд прямокутника. Скористаємося теоремою про циркуляцію вектора $\vec{B}$: $\oint_l \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \sum_{i=1}^N I_i$. При розрахунку циркуляції вектору $\vec{B}$ по першому контуру, обхід по контуру здійснюємо за годинниковою стрілкою по шляху між кутовими точками 1–2–3–4–1.

Оскільки перший контур не охоплює струмів, то права сторона рівняння дорівнює нулю

$$\oint_l \vec{B} d\vec{l} = \int_1^2 B_1 dl \cos 0^\circ + \int_2^3 B_2 dl \cos 90^\circ + \int_3^4 B_3 dl \cos 180^\circ + \int_4^1 B_4 dl \cos 90^\circ = \mu_0 \sum_{i=1}^N I_i = 0.$$

Відповідно $B_1 dl - B_3 dl = 0$.

Остання рівність свідчить, що $B_1 = B_3$, тобто поле зовні соленоїду однорідне $B_1 = B_3 = \text{const}$. Але, ця умова може виконуватися тільки при $B_{\text{зовн}} = 0$, бо ця величина не може бути сталою, вона має зменшуватися при віддаленні від соленоїда.

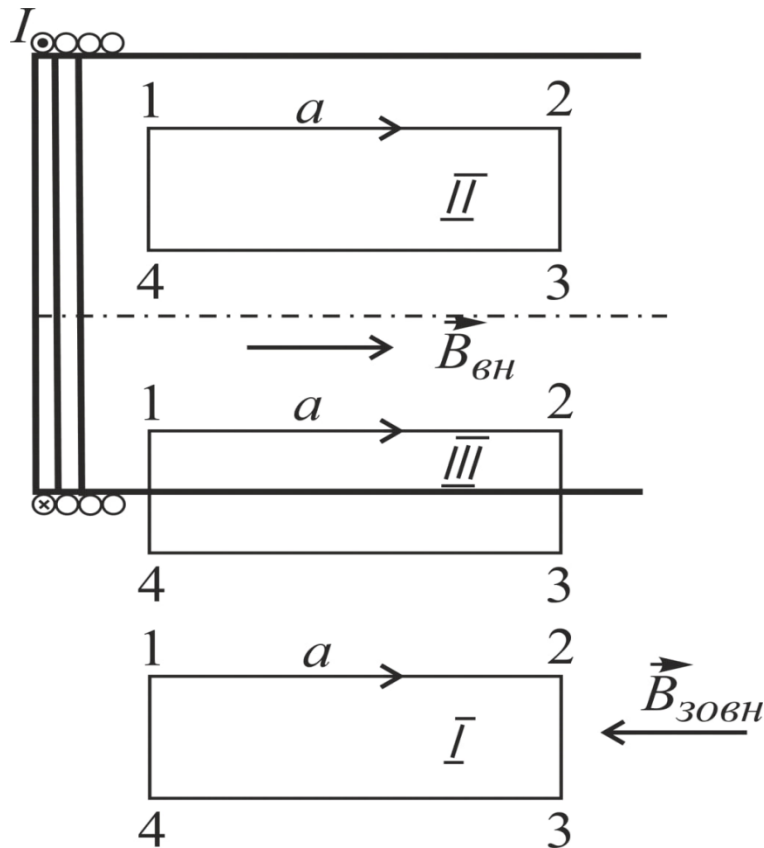


Рис.13.2

Таким чином, магнітне поле ідеального соленоїда існує всередині. Аналогічно використовуємо теорему про циркуляцію вектора $\mathbf{B}$ стосовно контуру №2 дістаємося висновку, що *всередині соленоїду поле однорідне*. Для знаходження модуля внутрішнього поля соленоїда запишемо теорему про циркуляцію вектора $\mathbf{B}$ стосовно контуру №3. Після інтегрування по контуру отримаємо рівняння $B_{\text{внутр}}a = \mu_0 NI$, де N це кількість витків на довжині намотки, яка дорівнює довжині прямокутника a .

Індукція магнітного поля всередині соленоїду складає

$$B_{\text{внутр}} = \mu_0 \frac{N}{l} I = \mu_0 n I, \quad (13.7)$$

де n – число витків на одиницю довжини соленоїда.

13.4 Виток зі струмом в зовнішньому магнітному полі

Припустимо виток зі струмом вміщено в однорідне магнітне поле з індукцією $\vec{B}$, рис.13.3.

Розглянемо одразу два елементи струму, що належать контуру: $d\vec{l}_1$ та $d\vec{l}_2$. На елементи струму діють сили Ампера $d\vec{F}_{\text{ампера}} = I[d\vec{l} \cdot \vec{B}]$, що утворюють моменти сил за правилом $d\vec{M} = [\vec{r}d\vec{F}]$, які спрямовані по осі Oz .

В проекції на вісь Oz момент сили від пари елементів струму складає $dM_z = r_1 Idl_1 B \sin(dl_1 B) + r_2 Idl_2 B \sin(dl_2 B)$.

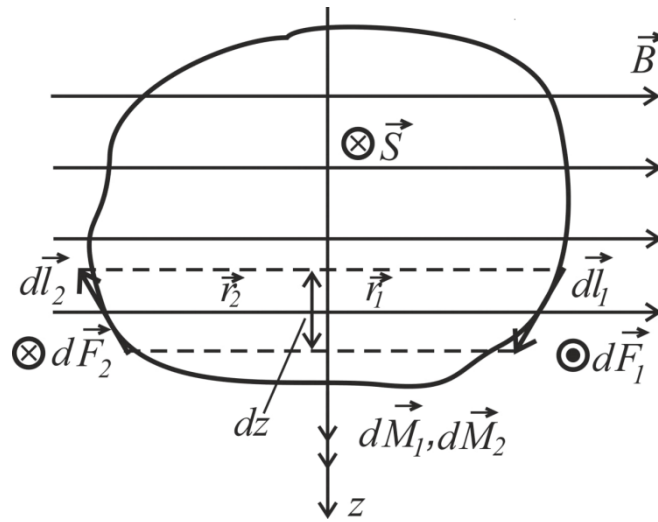


Рис.13.3

Врахуємо, що за рис.13.3 $dl_1 \sin(dl_1, \vec{B}) = dz$ та $dl_2 \sin(dl_2, \vec{B}) = dz$, тоді $dM_z = IB(r_1 dz + r_2 dz) = IBdS$, де dS є площею прямокутника, побудованого на двох елементах струму. Виконавши відповідне інтегрування по площі витку отримаємо

$$M_z = \int dM_z = \int IBdS = IB S.$$

Нескладно представити площу витку векторною величиною $\vec{S} = S\vec{n}$, де $\vec{n}$ – вектор нормалі до площини витку, спрямований за правилом правого гвинта. Тоді вектор моменту сили, що діє на виток зі струмом

$$\vec{M} = I[\vec{S}\vec{B}] = [I\vec{S}\vec{B}] = [\vec{p}_m \vec{B}] \quad (13.8)$$

де $\vec{p}_m = I\vec{S}$ називають магнітним моментом. Якщо розміри витку малі, так, що в межах витка магнітне поле можна вважати однорідним, то такий виток зі струмом називають *магнітним диполем*, рис.13.4.

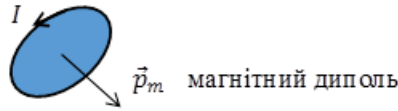


Рис.13.4

Знайдемо енергію диполя в зовнішньому магнітному полі. За теоремою про зміну кінетичної енергії: $dA = dE_k$. З врахуванням виразу для кінетичної енергії при обертальному русі $dA = d\left(\frac{J\omega^2}{2}\right) = J\omega d\omega = I \frac{d\varphi}{dt} d\omega = Id\vec{\varphi}\vec{\omega} = \vec{M}d\vec{\varphi}$, де I – момент інерції.

$dA = Md\varphi = -dU$ – робота іде на зміну потенціальної енергії. Після інтегрування $U = \int dU = -p_m B \cos \varphi = -(\vec{p}_m \vec{B})$, отримаємо вираз для потенціальної енергії витка зі струмом (магнітного диполя) в магнітному полі $\vec{B}$.

$$U = -(\vec{p}_m \vec{B}) \quad (13.9)$$

Через потенціальну енергію магнітного диполю знайдемо силу, яка може призвести до його поступального руху, та діє на диполь в неоднорідному магнітному полі. Для вирішення цього питання використаємо зв'язок між силою та потенціальною енергією

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}U = \vec{\nabla}(\vec{p}_m \vec{B}). \quad (13.10)$$

Розкрив скалярний добуток $(\vec{p}_m \vec{B}) = p_{mx}B_x + p_{my}B_y + p_{mz}B_z$, вираз (13.10) можна переписати, у вигляді

$$\vec{F} = p_{mx} \frac{dB_x}{dx} \vec{i} + p_{my} \frac{dB_y}{dy} \vec{j} + p_{mz} \frac{dB_z}{dz} \vec{k} \quad (13.11)$$

Аналіз виразу (13.11) показує, що в однорідному магнітному полі сила, що може призвести до поступального руху відсутня. Під дією моменту сили (13.8) з боку однорідного магнітного поля диполь може

тільки розвертатися. При цьому, диполь буде намагатися зайняти положення стійкої рівноваги, при якому досягається мінімум потенціальної енергії. За виразом (13.9) цей мінімум буде спостерігатися за умови паралельності магнітного моменту з напрямком вектору індукції зовнішнього поля $\mathbf{B}$. Тому, скажімо, рамка зі струмом «прагне» розташуватися в площині, ортогональній $\mathbf{B}$ так, щоб виконувалася умова $\vec{p}_m \uparrow \uparrow \vec{B}$. Для появи сили $\mathbf{F}$ необхідно вміщувати магнітний диполь в неоднорідне поле $\mathbf{B}$. Напрямок руху диполя буде відбуватися у напрямку максимальної швидкості зміни магнітного поля у просторі.

Контрольні запитання і завдання

1. Магнітне поле створюється струмом I , який протікає по ідеальному тороїду із середнім радіусом R_0 і щільністю намотки n . Визначити індукцію поля $B(r)$ у залежності від відстані r до осі тороїда.
2. Магнітне поле створюється однорідним струмом густини j , що тече вздовж нескінченного суцільного циліндра радіуса R . Визначити вектор індукції поля $\vec{B}(\vec{r})$ всередині та зовні циліндра як функцію радіуса-вектора $\mathbf{r}$ точки відносно осі циліндра.
3. Рамка гальванометра довжиною $a=4\text{см}$ і шириною $b=1,5\text{ см}$, що має $N=200$ витків тонкого проводу, знаходиться в магнітному полі з індукцією $B=0,1\text{Тл}$. Площина рамки паралельна лініям індукції. Знайти: а) механічний момент, що діє на рамку, якщо по витку проходить струм $I=1\text{мА}$; б) магнітний момент p_m рамки для цього струму.
4. Магнітний момент тонкого провідного кільця $p_m=5\text{А}\cdot\text{м}^2$. Визначити магнітну індукцію $\mathbf{B}$ у точці A , яка знаходиться на осі кільця на відстані $r=20\text{ см}$ від точок кільця.

14 Намагнічування речовини. Класифікація магнетиків

14.1 Струми в магнетиках

З теорії діелектриків ми знаємо, що речовина, внесена в електричне поле, поляризується. На її поверхні та в об'ємі виникають поляризаційні заряди, поле яких складається з зовнішнім електричним полем. В результаті змінюється електричне поле як всередині, так і зовні речовини.

Аналогічно, якщо помістити речовину в магнітне поле, то речовина намагнічується. По її поверхні і в об'ємі починають циркулювати додаткові так звані молекулярні струми. Магнітне поле молекулярних струмів, додається до зовнішнього магнітного поля, та змінює магнітну індукцію. Речовини, які після внесення в магнітне поле самі стають джерелами додаткового поля, називаються *магнетиками*.

У зв'язку з розглядом магнітного поля в речовині розрізняють два типи струмів, мікроструми та макроструми:

- а) $i_{\text{мікро}}$ – мікрострумами (молекулярні струми) називають струми викликані рухами електронів в атомах, молекулах, іонах;
- б) $i_{\text{макро}}$ – макрострумами називають струми провідності. Для цих струмів виконується закон Ома: $\vec{j}_{\text{пр}} = \sigma \vec{E}$, $I = \frac{U}{R}$.

Після відкриття Ерстедом магнітного поля постійного струму, Ампер висловив гіпотезу про те, що причиною магнетизму є так звані молекулярні замкнуті струми, які існують в атомах і молекулах.

Ця гіпотеза Ампера була підтверджена майже через сто років, коли Резерфорд і Бор запропонували свою планетарну модель атому. В найпростішій моделі атому, за теорією Бора, електрон рухається по замкнутій орбіті навколо ядра (в подальшому для спрощення будемо вважати, що орбіта є коловою). Такий рух приводить до появи так званого орбітального магнітного моменту:

$$\vec{p}_m = I\vec{S},$$

де $S = \pi R^2$ – площа колової орбіти електрону з радіусом R ; I – сила струму, пов'язана з рухом електрону, причому $i = \frac{e}{T} = \frac{e\omega}{2\pi}$, де e – заряд електрону, T – період обертання електрону, ω – кутова частота.

Напрямок магнітного моменту визначаємо за правилом правого гвинта, рис.13.4, а його модуль складає $\vec{p}_m = -\frac{er^2}{2}\vec{\omega}$. Одночасно електрон має імпульс та створює механічний момент імпульсу $\vec{L} = m\vec{r}^2\vec{\omega}$, який спрямовано в протилежному напрямку від магнітного моменту, рис.14.1. Відношення модуля магнітного до орбітального механічного моменту носить назву гіромагнітного співвідношення: $\frac{p_m}{L} = \frac{e}{2m} = \mu_B$, де μ_B – орбітальне гіромагнітне співвідношення. З урахуванням протилежних напрямків векторів

$$\vec{p}_m = -\mu_B \vec{L} \quad (14.1)$$

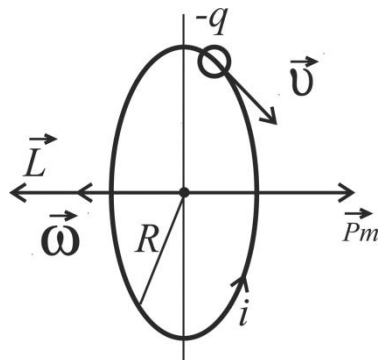


Рис.14.1

14.2 Вектор намагнічування і молекулярні струми

Тепер перейдемо до кількісної характеристики намагнічування магнетика. Кожний атом чи молекула має власний магнітний момент $\vec{p}_m$. Подібно до того, як для діелектриків вводиться вектор поляризації $\vec{P}$ – сумарний дипольний момент одиниці об'єму, для магнетиків вводиться вектор намагнічування $\vec{J}$. Вектор намагнічування $\vec{J}$ – це сумарний магнітний момент всіх атомів або молекул магнетика в його одиниці об'єму

$$\vec{J} = \frac{\sum_i \vec{p}_{mi}}{\Delta V}, \quad (14.2)$$

Оскільки вектор намагнічування $\vec{J}$ може змінюватись від точки до точки, виділимо всередині магнетика малий об'єм dV , у межах котрого вектор намагнічування залишається сталим, складемо магнітні моменти атомів або молекул всередині цього об'єму і одержимо магнітний момент

$$d\vec{p}_m = \vec{J}dV, \text{ тоді } \vec{J} = \frac{d\vec{p}_m}{dV}.$$

Таким чином, вектор намагнічування $\vec{J}$ є об'ємною густиною магнітного моменту магнетика.

14.3 Теорема про циркуляцію вектора намагніченості

Виділимо умовно всередині магнетика елемент контуру $d\vec{l}$, і визначимо, який сумарний мікрострум від магнітних диполів атомів нанизаний на цей елемент. Для цього звернемося до рис. 14.2.

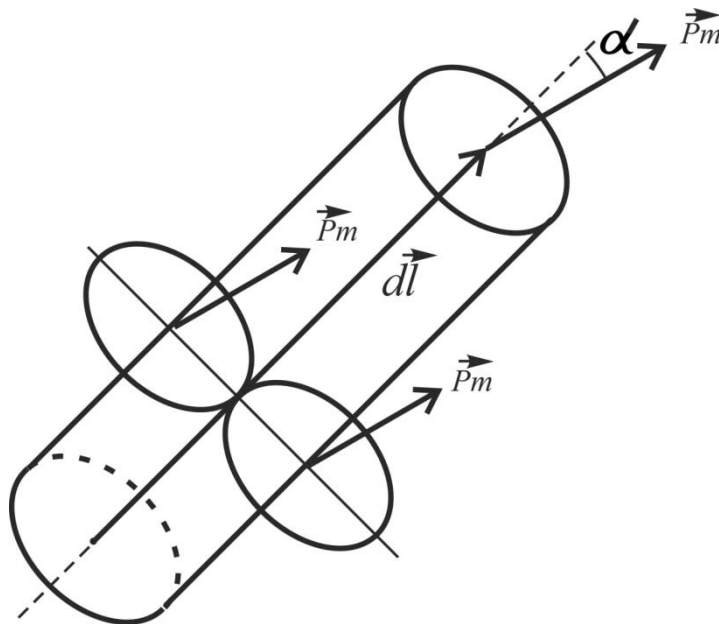


Рис.14.2

На рисунку представлені два крайніх положення струмів, що можуть підпадати під нашу умову. Мова йде про диполі в об'ємі косоного циліндру, довжина якого дорівнює $d\vec{l}$, а основою є орбіта електрону, нормаль до котрої утворює кут α з елементом контуру. Об'єм косокутного циліндру

$dV = Sdl \cos \alpha$. Кількість диполів, розміщених в такому об'ємі становить $dN = ndV$, де n – концентрація диполів. Тоді, сумарний мікрострум, нанизаний на елемент контуру складе

$$di_{\text{мікро}} = i_{\text{мікро}} dN = i_{\text{мікро}} n S dl \cos \alpha = p_m n dl \cos \alpha = n(\vec{p}_m d\vec{l}) = (\vec{j} d\vec{l});$$

$$di_{\text{мікро}} = (\vec{j} d\vec{l}) \quad (14.3)$$

Для визначення зв'язку між вектором намагнічування $\vec{j}$ та силою мікроструму $\vec{i}_{\text{мікро}}$ візьмемо всередині неоднорідно намагніченого магнетика замкнутий контур L . Розглянемо мікрострум магнітних диполів, які знаходяться всередині площі S , на відстані, яка перевищує радіус орбіти. Ці мікрострум компенсують один одного, тобто їх внесок в загальний струм, який нанизаний на контур дорівнює нулю, рис.14.3.

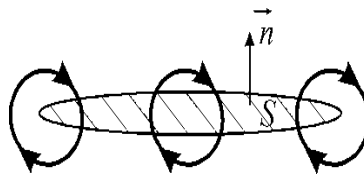


Рис.14.3

Тому, при розгляді сумарного мікроструму нанизаного на контур можна записати загальний струм, що пронизує площу S : $\sum i_{\text{мікро}}$. Згідно з виразом (14.2) отримаємо

$$\oint_L (\vec{j} d\vec{l}) = \sum di_{\text{мікро}} = \sum i_{\text{мікро}} \quad (14.4)$$

Вираз (14.4) є теоремою про циркуляцію вектора намагніченості в інтегральній формі.

Якщо молекулярні струми утворюють розподіл в межах площі S , яка охоплена замкненим контуром L , то вочевидь сумарний мікрострум може бути виражений через вектор густини мікрострумів $\vec{j}_{\text{мікро}}$. У виразі (14.3) замінимо сумарний струм, що проходить крізь площу S на інтеграл по цій поверхні: $\sum i_{\text{мікро}} = \iint_S (\vec{j}_{\text{мікро}} d\vec{S})$. Далі застосуємо формулу Стокса до лівої частини виразу (14.3) отримаємо:

$$\iint_S \text{rot} \vec{j} d\vec{S} = \iint_S (\vec{j}_{\text{мікро}} d\vec{S}) \quad (14.5)$$

З виразу (14.5) випливає, що

$$\text{rot} \vec{J} = \vec{J}_{\text{мікро}} \quad (14.6)$$

Вираз за формулою (14.6) носить назву теорема про циркуляцію вектора намагніченості $\vec{J}$ в диференціальній формі.

14.4 Вектор напруженості магнітного поля

Якщо розмістити магнетик в магнітному полі мікрострумів $\vec{B}_{\text{макро}}$, в результаті повороту магнітних диполів додатково виникає магнітне поле мікрострумів з індукцією $\vec{B}_{\text{мікро}}$. За принципом суперпозиції ці поля складають загальне поле всередині магнетика $\vec{B}_{\text{магнетик}} = \vec{B}_{\text{макро}} + \vec{B}_{\text{мікро}}$. В подальшому загальне поле $\vec{B}_{\text{магнетик}}$ продовжує діяти на диполі, які в свою чергу продовжують впливати на загальне поле в магнетику. Тобто, використання вектору магнітної індукції не створює однозначності при визначенні поля в магнетику. Вихід існує, якщо ввести поняття вектору напруженості магнітного поля $\vec{H}$. Ідея полягає в тому, щоб вектор $\vec{H}$ залежав виключно від макрострумів.

Для цього використаємо теорему про циркуляцію вектору $\vec{B}$. В правій частині формули (13.6) врахуємо два типи струмів $\vec{J}_{\text{провід}} + \vec{J}_{\text{мікро}}$. Теорема про циркуляцію вектора індукції магнітного поля набуде вигляду

$$\text{rot} \vec{B} = \mu_0 (\vec{J}_{\text{макро}} + \vec{J}_{\text{мікро}}) \quad (14.7)$$

Вирази за формулами (14.4) та (14.5) після нескладних перетворень приводять нас до результату

$$\text{rot} \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J} \right) = \vec{J}_{\text{макро}} \quad (14.8)$$

Векторна величина під знаком ротора у виразі (14.7) позначена

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J} \quad (14.9)$$

отримала назву вектору напруженості магнітного поля $\mathbf{H}$. Вектор намагніченості $\mathbf{J}$ пов'язують не з вектором індукції, а з вектором напруженості магнітного поля $\mathbf{H}$.

$$\vec{J} = \chi \vec{H} \quad (14.10)$$

Коефіцієнт пропорційності χ отримав назву *магнітна сприйнятливості речовини*. З виразів (14.8) та (14.9) отримаємо $\vec{B} = (1 + \chi)\mu_0\vec{H}$. Вираз $1 + \chi = \mu$ називають *відносною магнітною проникністю речовини*. Тоді магнітна індукція має вигляд:

$$\vec{B} = \mu\mu_0\vec{H} \quad (14.11)$$

Зауважимо, що для вакууму $\sum_i \vec{p}_{mi} = 0 \rightarrow J = 0 \rightarrow \chi = 0$. Тому, у вакуумі $\mu_{\text{вакуум}} = 1$. В речовині відносна магнітна проникність показує в скільки разів магнітне поле в речовині $B_{\text{речовина}}$ більше по відношенню до поля у вакуумі $B_{\text{вакуум}}$: $\mu = \frac{B_{\text{речовина}}}{B_{\text{вакуум}}}$.

Формулу (14.8) перепишемо у вигляді

$$\text{rot}\vec{H} = \vec{J}_{\text{макро}} \quad (14.12)$$

Вираз (14.12) носить назву *теорема про циркуляцію вектора $\vec{H}$ в диференціальній формі*. Інтегруємо обидві сторони рівняння (14.12) по площі, яка охоплюється замкненим контуром L :

$$\iint_S \text{rot}\vec{H} d\vec{S} = \iint_S (\vec{J}_{\text{макро}} d\vec{S}) \quad (14.13)$$

До лівої частини рівняння (14.13) застосуємо теорему Стокса, права частина є сумою мікрострумів, що охоплюється замкненим контуром L :

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \sum I_{\text{макро}} \quad (14.14)$$

Вираз (14.14) носить назву *теорема про циркуляцію вектора $\vec{H}$ в інтегральній формі*.

14.5 Заломлення ліній магнітного поля на межі розподілу двох магнетиків

Розглянемо пласку межу поділу двох магнетиків з відносними магнітними проникностями μ_1 і μ_2 . Нехай зовнішнє магнітне поле направлене під кутом до нормалі, проведеної до межі розділу, рис.14.4.

Розкладемо вектори $\vec{B}_1$ та $\vec{B}_2$ на нормальні B_{n1} і B_{n2} та тангенціальні $B_{\tau1}$ і $B_{\tau2}$ складові. Те ж саме зробимо з векторами $\vec{H}_1$ і $\vec{H}_2$. Знайдемо зв'язок кутами падіння та заломлення векторів $\vec{B}$ і $\vec{H}$ на межі розподілу двох магнетиків.

Спочатку з'ясуємо граничні умови для магнітного поля. Для цього на межі поділу побудуємо прямий циліндр, висота якого $h \rightarrow 0$, а площини основ S_1, S_2 паралельні до межі поділу. За теоремою Гауса для вектора магнітної індукції (13.1) $\Phi = \oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0$. Попередньо визначимо потік вектора магнітної індукції крізь замкнену поверхню циліндру:

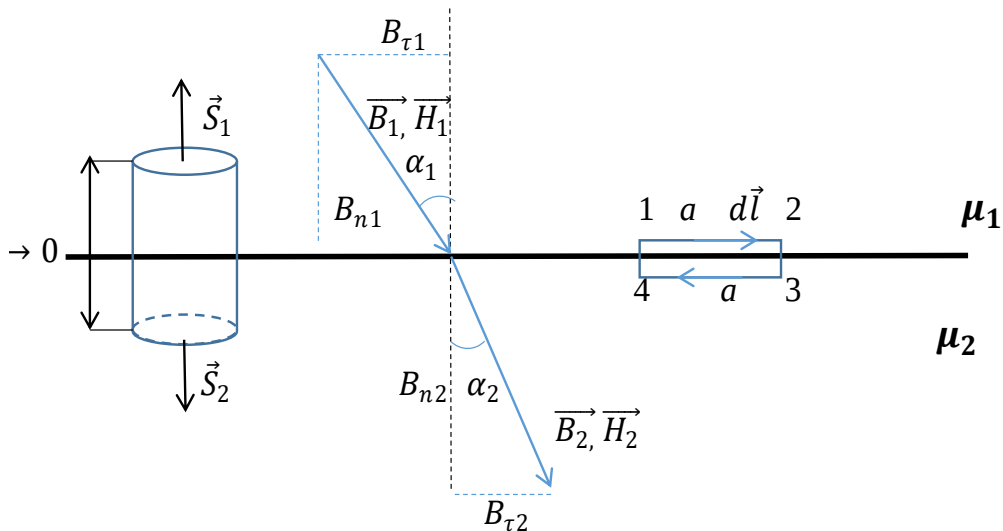


Рис.14.4

Циліндр представимо у вигляді трьох площ, тоді потік буде складатися із суми трьох потоків:

$$\Phi = \int_{S_1} \vec{B}_1 d\vec{S} + \int_{S_2} \vec{B}_2 d\vec{S} + \int_{S_{\text{бічн}}} \vec{B} d\vec{S} = 0. \text{ Після перетворень}$$

$$\int_{S_1} (\vec{B}_{1n} + \vec{B}_{1\tau}) d\vec{S} + \int_{S_2} (\vec{B}_{2n} + \vec{B}_{2\tau}) d\vec{S} = -B_{n1}S_1 + B_{n2}S_2 = 0.$$

Остаточно отримаємо:

$$B_{n1} = B_{n2}. \quad (14.15)$$

Вираз (14.15) означає, що нормальна компонента вектору індукції магнітного поля незмінна (безперервна) на границі розподілу двох діелектриків.

Далі використаємо теорему про циркуляцію вектору $\mathbf{H}$. Щоб скористатися виразом (14.14) виберемо замкнений контур у вигляді прямокутника, рис.14.4. Сторони 2–3 та 4–1 прямокутника спрямуємо до нуля. Будемо вважати, що струми провідності не протікають по границі магнетиків. Тобто $\sum I_{\text{макро}} = 0$. Вираз (14.14) набуде значень

$$\begin{aligned} \int_1^2 \vec{H}_1 d\vec{l} + \int_2^3 \vec{H}_2 d\vec{l} + \int_3^4 \vec{H}_3 d\vec{l} + \int_4^1 \vec{H}_4 d\vec{l} &= 0; \\ \int_1^2 (\vec{H}_{1n} + \vec{H}_{1\tau}) d\vec{l} + \int_3^4 (\vec{H}_{2n} + \vec{H}_{2\tau}) d\vec{l} &= H_{\tau 1} a - H_{\tau 2} a = 0; \\ H_{\tau 1} &= H_{\tau 2} \end{aligned} \quad (14.16)$$

За виразом (14.16) тангенціальна компонента вектору $\mathbf{H}$ незмінна (безперервна) на границі двох магнетиків.

Далі знайдемо співвідношення для кутів падіння та заломлення векторів магнітного поля.

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{\frac{B_{\tau 1}}{B_{n 1}}}{\frac{B_{\tau 2}}{B_{n 2}}} = \frac{B_{\tau 1}}{B_{\tau 2}} = \frac{\mu_1 \mu_0 H_{\tau 1}}{\mu_2 \mu_0 H_{\tau 2}} = \frac{\mu_1}{\mu_2}. \quad (14.17)$$

Приклад. При куті падіння ліній вектору магнітного поля $\alpha_1 = 45^\circ$ з повітря на залізо з $\mu_2 = 10^3$ за формулою (14.16) отримаємо $\operatorname{arctg} \alpha_2 = 10^3$, або $\alpha_2 \rightarrow \frac{\pi}{2}$.

14.6 Класифікація магнетиків

Існують три класи магнетиків, які розрізняються величинами і знаками магнітної сприйнятливості χ та величиною магнітної проникності μ . Розрізняють:

- 1) Діамагнетики. Для них $\chi < 0$, $\mu = 1 + \chi \leq 1$.
- 2) Парамагнетики, $\chi > 0$, $|\chi| \ll 1$, $\mu \geq 1$.

3) Феромагнетики, $\chi \gg 0, \mu \gg 1$. Обидві величини залежать від напруженості магнітного поля $\chi = \chi(H), \mu = \mu(H)$.

14.6.1 Природа діамagnetизму та парамагнетизму

Діамагнетиками називають речовини, в котрих магнітні моменти атомів дорівнюють нулю, при відсутності зовнішнього магнітного поля. В таких речовинах магнітні моменти електронів в атомі взаємно компенсовані. В *парамагнетиках* атоми (молекули) за відсутністю зовнішнього магнітного поля мають відмінний від нуля магнітний момент $\vec{p}_m$. Розглянемо електрон, який рухається в атомі навколо ядра і за відсутності магнітного поля створює магнітний орбітальний момент

$$\vec{p}_m = -\frac{er^2}{2} \vec{\omega} \text{ та орбітальний момент імпульсу } \vec{L} = mr^2 \vec{\omega}, \text{ рис 14.5}$$

При ввімкненні зовнішнього магнітного поля $\vec{B}$, внаслідок сили Лоренца виникає момент сил $\vec{M} = [\vec{p}_m \vec{B}]$, який намагається орієнтувати вектор $\vec{p}_m$ паралельно вектору $\vec{B}$. Оскільки електрон на орбіті, має також механічний момент, імпульсу, тому, під дією магнітного поля починається *прецесія* векторів орбітального магнітного моменту $\vec{p}_m$ і орбітального моменту імпульсу $\vec{L}$ навколо вектору магнітної індукції $\vec{B}$ з кутовою частотою Ω , яку називають частотою прецесії орбіти електрону.

Для знаходження кутової частоти Ω , скористаємося основним рівнянням динаміки обертального руху $\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$.

Зміна моменту імпульсу складає $d\vec{L} = \vec{M} dt$, $d\vec{L} \uparrow \vec{M}$,

$$|d\vec{L}| = |\vec{M}| dt = p_m B \sin \theta dt \quad (14.18)$$

За рис.14.5 $\vec{L}(t + dt) = \vec{L}(t) + d\vec{L}$, $|d\vec{L}| = L \sin \theta d\beta$ з врахуванням виразу (14.18) отримаємо рівняння $p_m B \sin \theta dt = L \sin \theta d\alpha$, звідки

$$\Omega = \frac{d\alpha}{dt} = \frac{p_m}{L} B = \frac{e}{2m} B, \quad \vec{\Omega} = \mu_B \vec{B} \quad (14.19)$$

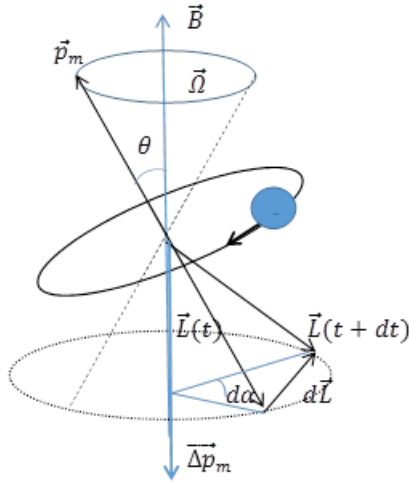


Рис.14.5

Висновок. За наявності зовнішнього сталого магнітного поля атом у цілому отримує прецесію навколо напрямку магнітного поля з кутовою частотою $\vec{\Omega}$.

Вектор $\vec{\Omega}$ паралельний до вектору $\vec{B}$, спрямований у той же бік. Таким чином, електрон приймає участь у двох рухах:

1. Обертається навколо ядра по орбіті з частотою $\vec{\omega}$, що дає магнітний орбітальний момент $\vec{p}_m$;

2. Разом із орбітою обертається (прецесує) навколо вектору магнітної індукції $\vec{B}$ з кутовою частотою Лармора $\vec{\Omega}$. Це обертання негативно зарядженого електрона дає додатковий магнітний момент $\vec{\Delta p}_m$, напрямлений проти вектора магнітної індукції $\vec{B}$.

$$\vec{\Delta p}_m = -\sum_i \frac{e\vec{\Omega}r_i^2}{2\pi} = -\sum_i \frac{e^2r_i^2}{4\pi m} \vec{B} = -\frac{e^2}{4\pi m} \sum_i r_i^2 \vec{B}.$$

Вектор намагніченості $\vec{J} = \frac{\sum \Delta \vec{p}_m}{\Delta V} = n \vec{\Delta p}_m = -\frac{e^2 n}{4\pi m} \sum_i r_i^2 \vec{B}$, де n – концентрація магнітних диполів.

Так як, вектор намагніченості $\vec{J} = \chi \vec{H} = \chi \frac{\vec{B}}{\mu_0}$, відповідно $\chi = -\frac{e^2 n}{4\pi m} \sum_i r_i^2 \mu_0$. Від'ємний знак для магнітної сприйнятливості призводить до того, що $\mu = 1 + \chi < 1$, тобто додаткове обертання веде до появи

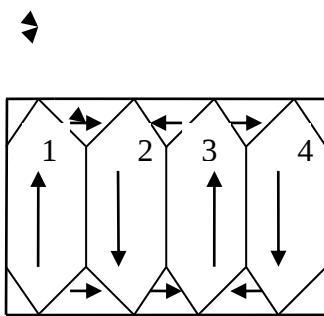
діамагнітного ефекту. Діамагнітна речовина намагнічується проти зовнішнього поля.

При внесенні парамагнітної речовини в магнітне поле, магнітні моменти атомів здійснюють прецесію навколо напрямку магнітної індукції **B**. Тепловий рух атомів (молекул) парамагнетику порушує орієнтацію магнітних диполів. Загальне значення проекції векторів магнітних моментів на напрямок вектору **B** перевершує додатковий магнітний момент $\overrightarrow{\Delta p_m}$. Як результат, магнітна сприйнятливість $\chi > 0$, та

$$\mu = 1 + \chi > 1$$

14.6.2 Властивості феромагнетиків

Пояснимо процес намагнічування феромагнетиків з точки зору їх доменної структури. При певних умовах внаслідок існування обмінних сил в окремих областях кристалу магнітні моменти електронів можуть бути орієнтовані паралельно один одному. При цьому створюються домени – області спонтанного намагнічування. В розмагніченому феромагнетику внаслідок хаотичної орієнтації магнітних моментів доменів сумарна намагніченість дорівнює нулю. (рис.14.6) (такий стан відповідає мінімуму енергії).



H=0

Рис.14.6

Характерною властивістю феромагнетиків є складна залежність намагніченості $\vec{J}$ від напруженості зовнішнього магнітного поля **H** (рис.14.7).

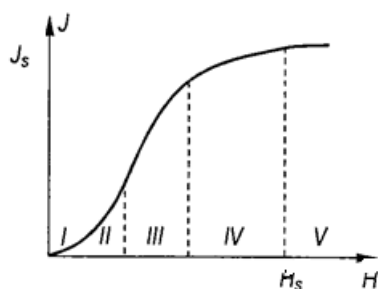


Рис.14.7.

При внесенні ненамагніченого феромагнетику в зовнішнє магнітне поле $\vec{H}$ модуль намагніченості змінюється нелінійно. Залежність $J(H)$ називається кривою першого намагнічування, на ній можна виділити п'ять ділянок. На ділянці 1 намагніченість зростає за законом $J = \chi H$, це область оборотного намагнічування, зумовленого пружним зміщенням меж доменів. На ділянці 2 намагніченість зростає за квадратичним законом. Цій ділянці відповідає оборотне і необоротне зміщення меж доменів. На ділянці 3 відбувається необоротне зміщення меж доменів, намагніченість швидко зростає, на цій ділянці магнітна проникність феромагнетику найбільша. На ділянці 4 відбувається перехід магнітних моментів доменів. На ділянці 5 (область парамагнітного процесу) спостерігається слабе зростання намагніченості.

Намагніченість феромагнетику має межу, яка називається намагніченістю насичення J_s . Нелінійна залежність вектора намагніченості $\vec{J}$ від напруженості магнітного поля $\vec{H}$ призводить к нелінійній залежності вектора магнітної індукції $\vec{B}$ від $\vec{H}$. Оскільки мають місце залежності $\vec{J} = \chi \vec{H}$, $\vec{B} = \mu \vec{H}$, це означає, що магнітна сприйнятливість χ і магнітна проникність μ не є константами, а залежать від напруженості магнітного поля $\chi = \chi(H)$, $\mu = \mu(H)$. На рис.14.8 представлена залежність магнітної проникності μ від напруженості зовнішнього магнітного поля. У феромагнетиках $\mu \gg 1$, реально знаходиться в діапазоні $(10 - 10^5)$.

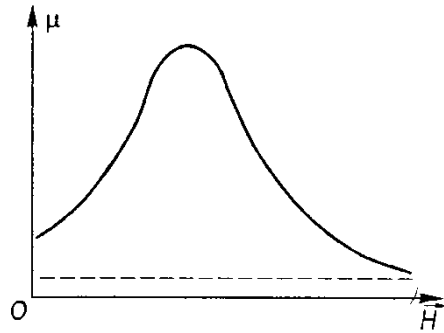


Рис.14.8

Магнітний гістерезис. У феромагнетиків спостерігається явище феромагнітного гістерезису. Замкнена крива, зображена на рис.14.9 називається *петлею гістерезису*. Вигляд цієї петлі для різних феромагнетиків розрізняється. Ділянка ОА отримала назву основної кривої намагнічування. Точки перетину петлі гістерезису з координатними осями i є основними магнітними характеристиками феромагнітних матеріалів, B_0 – залишкова індукція, H_C – коерцитивна сила.

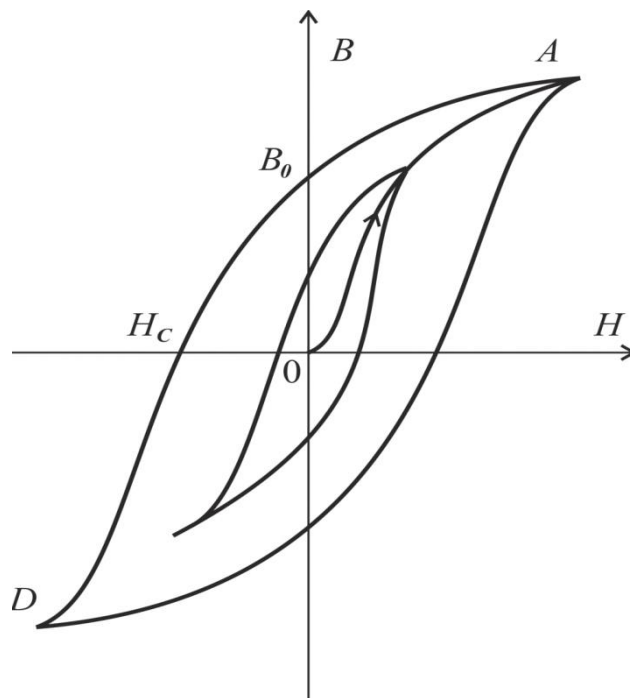
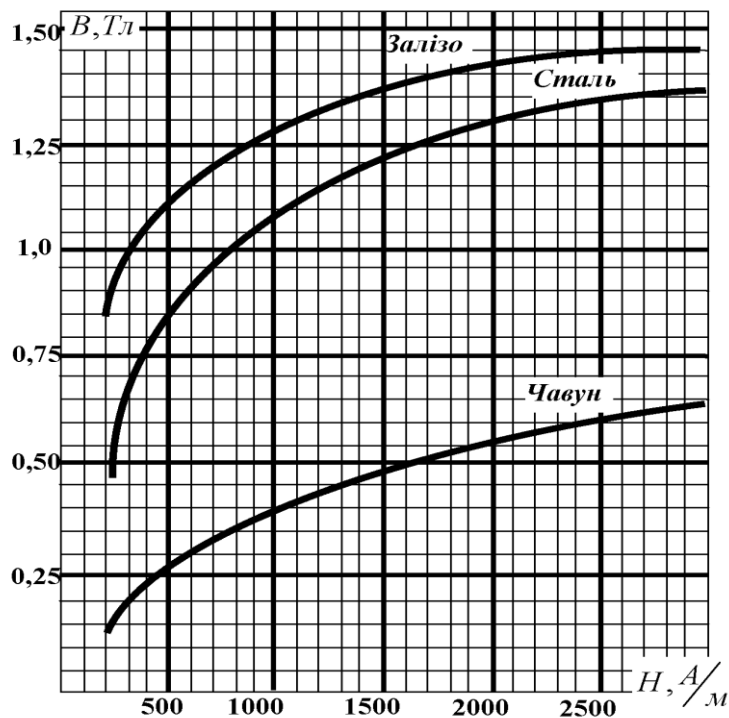


Рис.14.9

Щоб повністю розмагнітити зразок, до нього треба прикласти протилежне за знаком поле напруженістю H_C . Значення напруженості поля H_C називають коерцитивною силою феромагнетика.

Контрольні запитання і завдання

1. Замкнений соленоїд (тороїд) зі сталевим осердям має $n = 10$ витків на кожний сантиметр довжини. По соленоїду проходить струм $I = 2$ А. Обчислити магнітний потік в осерді, якщо його переріз $S = 4$ см². Для розв'язання задачі необхідно використати графік, зображений на рис. 14.11.
2. У залізному осерді соленоїда індукція $B=1,3$ Тл. Залізне осердя замінили сталевим. Визначити, у скільки разів необхідно змінити силу струму в обмотці соленоїда, щоб індукція в осерді залишилася незмінною. Для розв'язання задачі необхідно використати графік, зображений на рис.



14.11.

Рис.14.11

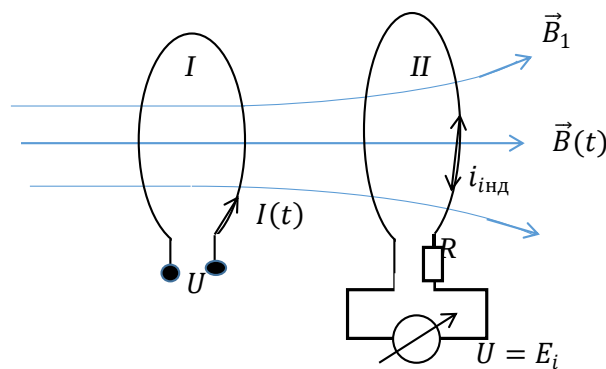
3. На залізному осерді у вигляді тора міститься обмотка з $N= 700$ витків. Середній діаметр тора $d= 20$ см, площа поперечного перерізу $S=6$ см². Визначити потік магнітної індукції Φ через поперечний переріз осердя, μ магнітну проникність J заліза, а також намагніченість за умови сили струму $I=0.5$ А. Використати графік, зображений на рис. 14.11.

15. Електромагнітна індукція. Закон Фарадея

15.1 Закон електромагнітної індукції

Явище електромагнітної індукції (ЕМІ), полягає в тому, що при зміні магнітного потоку крізь поверхню, обмежену замкненим провідним контуром, в ньому виникає електричний струм.

Такий струм називається індукційним струмом і створюється електрорушійною силою (ЕРС) індукції.



$$\mathcal{E}_{i2} = -\frac{d\Phi_2}{dt} \quad (15.1)$$

Як показали досліди Фарадея, виникнення ЕРС індукції не залежить від причини та способу зміни потоку, тому його називають законом електромагнітної індукції, або законом Фарадея.

Для будь-якого замкнутого контуру індукована електрорушійна сила (ЕРС) індукції дорівнює швидкості зміни магнітного потоку, що проходить крізь площу, що охоплена контуром, взятого зі знаком "мінус".

Напрямок індукційного струму визначається за правилом Ленца індукційний струм у контурі має такий напрям, при якому перешкоджає зміні магнітного потоку, що його породжує.

Щоб встановити природу електромагнітної індукції: розглянемо наступний дослід. По двох довгих паралельних і замкнених з одного боку горизонтальних рейках, уміщених у вертикальне магнітне поле $\vec{B}$, поперечка довжиною l може ковзати зі швидкістю $\vec{v}$, рис.15.1.

На рухомій поперечці на електрони в провіднику в магнітному полі діє сила Лоренца $\vec{F}_L = q[\vec{v} \times \vec{B}] = e[\vec{v} \times \vec{B}]$. Під впливом цієї сили вільні електрони накопичуються на одному із кінців провідника, створюючи там від'ємний потенціал, а на іншому кінці провідника завдяки браку електронів утворюється додатний потенціал. Таким чином, завдяки дії сили Лоренца на кінцях провідника створюється різниця потенціалів – ЕРС індукції.

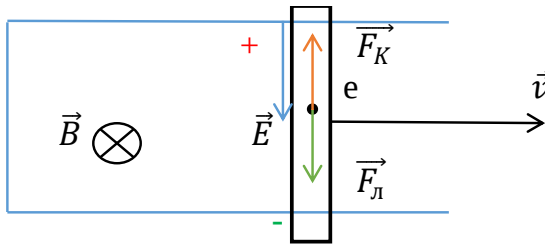


Рис.15.1

Сила Лоренца тут виконує роль сторонньої сили – сили, яка розділяє заряди на додатні та від'ємні. Завдяки такому розділенню зарядів в середині провідника утворюється електричне поле із певною напруженістю $\vec{E}$, що створює силу Кулона $\vec{F}_K = -e\vec{E}$.

Перерозподіл електронів під дією сили лоренца з боку магнітного поля та електричного завершиться при умові $\vec{F}_L + \vec{F}_K = 0$. Це означає, що загальне значення сили, що діє на електрони задовольняють рівнянню

$$e[\vec{v} \times \vec{B}] + e\vec{E} = 0. \quad (15.2)$$

З рівняння (15.2) знаходимо вектор напруженості електричного поля

$$\vec{E} = -[\vec{v} \times \vec{B}] \quad (15.3)$$

Скористаємося виразом для знаходження різниці потенціалів через вектор $\vec{E}$.

$$\begin{aligned} \Delta\varphi = \varepsilon_i &= \int_{T_1}^{T_2} \vec{E} d\vec{l} = \int_{T_1}^{T_2} -[\vec{v} \times \vec{B}] d\vec{l} = -[\vec{v} \times \vec{B}] \int_{T_1}^{T_2} d\vec{l} = -[\vec{v} \times \vec{B}] \vec{l} = \\ &= -\vec{B}[\vec{l} \times \vec{v}] \frac{dt}{dt} = -\frac{\vec{B}[\vec{l} \times \vec{v} dt]}{dt} = -\frac{\vec{B} d\vec{S}}{dt} = -\frac{d\Phi}{dt}. \end{aligned} \quad (15.4)$$

В досліді ми забезпечили рух лише однієї частини замкнутого контуру. Нескладно представити, що при русі інших частин контуру, за

тим самим алгоритмом, ми отримаємо той самий результат. Тому різниця потенціалів $\Delta\varphi$ розглядається як різниця потенціалів у всьому контурі, незалежно від руху його частин. Отриманий результат підтверджує дослід Фарадея. Вираз $\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt}$, носить назву закон ЕМІ в інтегральній формі.

Дослід за рис.15.1 показує, що якщо друге дротяне кільце нерухоме та знаходиться в однорідному нестационарному магнітному полі $\vec{B}(t)$, за рахунок змінного струму $\vec{I}(t)$ першого вітка створюється ЕРС індукції в другому вітку.

Виникає проблема з поясненням появи ЕРС. Немає руху зарядів, немає сили Лоренца. Звідки виникає ЕРС індукції? Пояснення запропонував Максвел.

Так як на нерухомі електричні заряди сила Лоренца не діє, за теорією Максвела, ЕРС індукції у цьому випадку породжується вихровим електричним полем, яке в свою чергу породжується нестационарним магнітним полем $\vec{B}(t)$. Контур в такому випадку є лише інструментом за допомогою якого реєструється наявність такого поля. Різниця потенціалів (ЕРС індукції) в контурі складе

$$\mathcal{E}_i = \Delta\varphi = \int_{T_1}^{T_2} \vec{E} d\vec{L} = \oint_L \vec{E} d\vec{L} \quad (15.5)$$

Скористаємося теоремою Остроградського–Гауса $\oint_L \vec{E} d\vec{L} = \iint_S \text{rot} \vec{E} d\vec{S}$. Представимо закон ЕМІ у вигляді

$$\mathcal{E}_i = \Delta\varphi = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} d\vec{S} = -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S} \quad (15.6)$$

З виразів (15.5) та (15.6) отримаємо $\iint_S \text{rot} \vec{E} d\vec{S} = -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}$

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (15.7)$$

Вираз (15.7) носить назву закону ЕМІ в диференціальній формі. За Максвелом, навколо ліній вектору індукції магнітного поля $\vec{B}(t)$ утворюється вихрове електричне поле $\vec{E}$. Лінії вихрового електричного поля замкнені, на відміну від електростатичного поля.

15.2 Індуктивність

Розглянемо котушку, яка містить певну кількість витків. При пропусканні крізь котушку струму силою I навколо утворюється магнітне поле. В силу закону Біо–Савара_Лапласа $d\vec{B} = \frac{\mu_0 I [d\vec{l} \times \vec{r}]}{4\pi r^3}$, індукція цього поля пропорційна струму I . З іншого боку, магнітний потік через кожен виток Φ_i дорівнює $\Phi_i = \iint_S \vec{B} d\vec{S}$.

Сумарний магнітний потік Ψ , який проходить крізь котушку називають потокозчепленням: $\Psi = \sum_{i=1}^N \Phi_i$, N – кількість витків.

Потокозчеплення буде також пропорційно струму. Використав коефіцієнт пропорційності між сумарним магнітним потоком та током, отримаємо коефіцієнт індуктивності, або просто *індуктивність*.

$$\Psi = LI \quad (15.8)$$

ЕРС у контурі може з'являтися як при зміні зовнішнього магнітного поля, так і за рахунок змін власного поля, створюваного струмом самому контурі.

Виникнення електрорушійної сили у провіднику при зміні сили струму в цьому ж провіднику називається *явищем самоіндукції*.

При змінному струмі $I(t)$ потокозчеплення $\Psi = \Psi(t)$, тому закон ЕМІ набуває вигляду

$$\mathcal{E}_S = -\frac{d\Psi}{dt} = -L \frac{dI}{dt},$$

де величина $\mathcal{E}_S$ називається ЕРС самоіндукції.

$$\mathcal{E}_S = -L \frac{dI}{dt} \quad (15.9)$$

Приклад. Визначити індуктивність соленоїду

Розглянемо котушку у вигляді соленоїду. Структуру магнітного поля в соленоїді ми вже визначали раніше. Скористуємося тим, що поле соленоїда однорідне та існує всередині соленоїда. Оскільки за формулою

(15.8) струм по витках котушки є струмом провідності, то знаходимо вектор $\vec{H}$ за теоремою про циркуляцію вектора: $\int_L \vec{H} d\vec{l} = \sum_i I_i$. Виберемо контур L у вигляді прямокутника з кутами 1–2–3–4, рис.15.2.

$$\int_L \vec{H} d\vec{l} = \int_1^2 H_{\text{вн}} dl \cos 0^\circ + \int_2^3 H dl \cos 90^\circ + \int_3^4 H_{\text{зовн}} dl \cos 0^\circ + \int_4^1 H dl \cos 90^\circ \quad (15.10)$$

Сумарний струм, що охоплюється контуром становить $\sum_i I_i = NI$, де N – кількість витків, що уміщується на довжині контуру a . Отримуємо

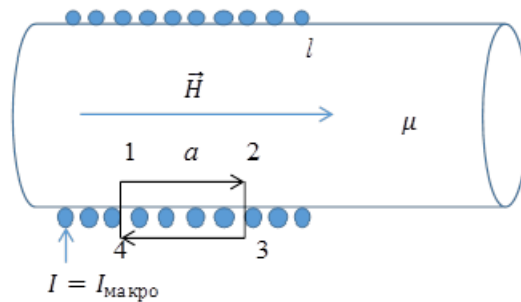


Рис.15.2.

$Ha = NI$, напруженість поля всередині соленоїду $H = \frac{NI}{a} = nI$, де n – густина намотки, тобто кількість витків на одиницю довжини соленоїду.

Врахуємо, що індукція магнітного поля $\vec{B} = \mu\mu_0\vec{H}$, та поле однорідне всередині, магнітний потік крізь виток соленоїду складе $\Phi_i = BS$.

У випадку, коли котушка містить не один а декілька витків користуються поняттям потокозчеплення, або сумарного магнітного потоку.

$$\Psi = \sum_i \Phi_i \quad (15.11)$$

За цим визначенням для соленоїда, довжиною l , та площею поперечного перерізу S ,

$$\Psi = N\Phi_i = N\mu\mu_0 nIS = N\mu\mu_0 nIS \frac{l}{l} = \mu\mu_0 n^2 VI = LI, \quad (15.12)$$

де $L = \mu\mu_0 n^2 V$ – індуктивність соленоїда.

15.3 Взаємна індуктивність

Взаємодукція (взаємна індукція) – явище виникнення ЕРС індукції в одному контурі за умови зміни сили струму в іншому контурі і навпаки.

Розглянемо два витки, або котушки, для яких існує можливість взаємного обміну магнітними полями. Припустимо, що в першій котушці протікає струм силою I_1 , що утворює магнітне поле в межах другої котушки з індукцією $\vec{B}_{21}$, рис.15.3.

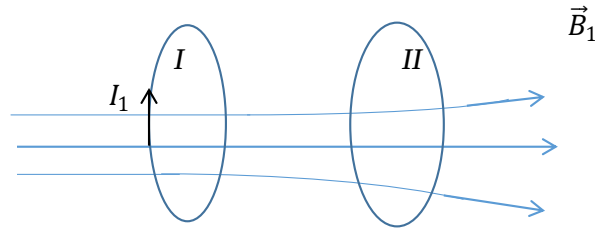


Рис.15.3

Магнітний потік у другому контурі пропорційний струму I_1 у першому контурі. Ми можемо записати

$$\Psi_{21} = L_{21}I_1 \quad (15.13)$$

де L_{21} – коефіцієнт взаємної індуктивності. При зміні сили струму в першому контурі I_1 , у другому виникає ЕРС взаємної індукції $\mathcal{E}_{i21}$:

$$\mathcal{E}_{i21} = -\frac{d\Psi_{21}}{dt} = -L_{21} \frac{dI_1}{dt}; \quad (15.14)$$

Розглянув, аналогічно струм у другому контурі, як джерело магнітного поля отримаємо L_{12} . За відсутності феромагнітного осердя $L_{12} = L_{21}$.

Під час змінювання сили струму в другому контурі, у першому виникає ЕРС:

$$\mathcal{E}_{i12} = -\frac{d\Psi_{12}}{dt} = -L_{12} \frac{dI_2}{dt}.$$

Приклад. Струми при розмиканні/замиканні електричного кола

Переведемо перемикач П із положення "2" у положення "1", рис.15.4. Для цього випадку згідно II правила Кірхгофа запишемо: $IR = \mathcal{E} + \mathcal{E}_S$;

$$IR = \mathcal{E} - L \frac{dI}{dt} \quad (15.15)$$

Після розв'язку диференціального рівняння отримаємо струм в контурі

$$I(t) = I_0(1 - e^{-\frac{R}{L}t}), \quad I_0 = \frac{\varepsilon}{R} \quad (15.16)$$

Таким чином при замиканні електричного кола сила струму в ньому збільшується з часом за експонентою (Рис. 15.5, крива 1).

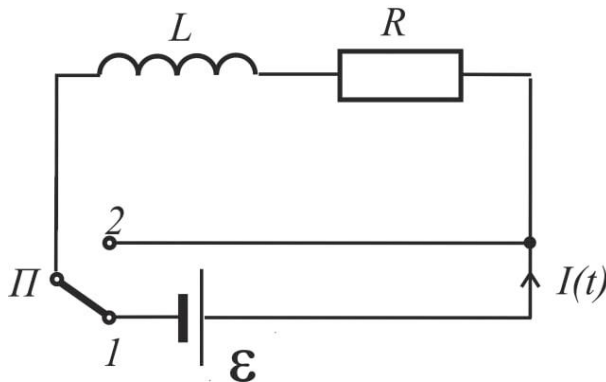


Рис.15.4

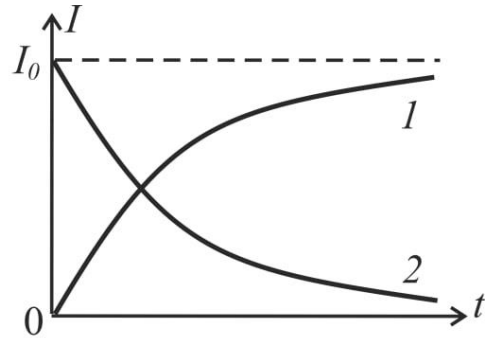


Рис.15.5

Тепер переведемо перемикач П із положення "1" у положення "2".

Для цього випадку, згідно II правила Кірхгофа: $IR = \varepsilon_s = -L \frac{dI}{dt}$.

Знайдемо розв'язок рівняння $\int_{I_0}^{I(t)} \frac{dI}{I} = -\frac{R}{L} \int_0^t dt$; $\ln I |_{I_0}^{I(t)} = -\frac{R}{L} t$;

Отримаємо

$$I(t) = I_0 e^{-\frac{R}{L}t}. \quad (15.17)$$

Таким чином, сила струму в замкненому колі зменшується у часі за експонентою (Рис.15.5, крива 2). Джерелом енергії є сама котушка індуктивності. Так ми перейшли до наступного питання, енергії котушки зі струмом та енергії магнітного поля.

15.4 Енергія магнітного поля

В замкненому контурі зі струмом і з індуктивністю джерело струму виконує роботу по подоланню ЕРС самоіндукції. Тому його енергія витрачається не тільки на джоулеву теплоту, а й частково переходить в іншу форму, що називається магнітною енергією струму. Про це свідчить те, що після відключення джерела у колі з індуктивністю продовжує текти

струм і виділятися тепло. Використаємо рівняння $IR = \mathcal{E}_S = -L \frac{dI}{dt}$. Елементарна робота струму $dA_{\text{стор}} = \mathcal{E}_{is} Idt = -\mathcal{E}_{is} Idt = -LI \frac{dI}{dt} dt$. Після інтегрування, робота струму

$$A = - \int_{I_0}^0 LI dI = L \frac{I^2}{2} = W_{\text{магн}} \quad (15.18)$$

Енергія, яку запасає котушка за виразом (15.18) можна записати

$$W_{\text{магн}} = \frac{LI^2}{2} = \frac{\Psi I}{2} = \frac{\Psi^2}{2L} \quad (15.19)$$

На прикладі соленоїду, виразимо енергію котушки через параметри магнітного поля. Скористаємося виразом для індуктивності, виразом для напруженості магнітного поля в соленоїді та виразом (15.19). Отримаємо енергію

$$W_{\text{магн}} = \frac{LI^2}{2} = \frac{\mu\mu_0 H^2}{2} V \quad (15.20)$$

Оскільки всередині соленоїда магнітне поле однорідне, то об'ємна густина енергії магнітного поля $\omega_B = \frac{dW_{\text{магн}}}{dV} = \frac{\mu\mu_0 H^2}{2}$;

$$\omega_B = \frac{dW_{\text{магн}}}{dV} = \frac{\mu\mu_0 H^2}{2} = \frac{(\vec{B}\vec{H})}{2} = \frac{B^2}{2\mu\mu_0} \quad (15.21).$$

І наостанок, при неоднорідному магнітному полі для знаходження енергії в об'ємі, необхідно об'єм розбити на елементарні об'єми dV . Розмір та форми dV повинні забезпечити однорідність поля в його межах. Тоді, енергія магнітного поля в об'ємі складе

$$W_{\text{магн}} = \int_V \omega_B dV \quad (15.22)$$

Скін-ефект – явище проникнення електричного струму на певну глибину, яка називається скін-шар. Тобто скін-ефект – це проходження змінного електричного струму високої частоти не через увесь поперечний переріз провідника, а переважно лише в поверхневому шарі. Пояснимо появу скін-ефекту за допомогою рис.15.6. По провіднику круглого поперечного перерізу протікає змінний струм з вектором густини $\vec{j}_0(t)$.

Навколо ліній $\vec{j}_0(t)$ виникає магнітне поле з напруженістю $\mathbf{B}(t)$. Змінне магнітне поле за виразом (15.7) утворює вихори електричного поля навколо змінного у часі вектору індукції $\mathbf{B}$: $\text{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$. Далі, за законом Ома вихрове електричне поле створює додатковий струм $\vec{j}_B = \sigma\vec{E}$. Загальний струм в провіднику $\vec{j}(r) = \vec{j}_0(t) + \vec{j}_B$.

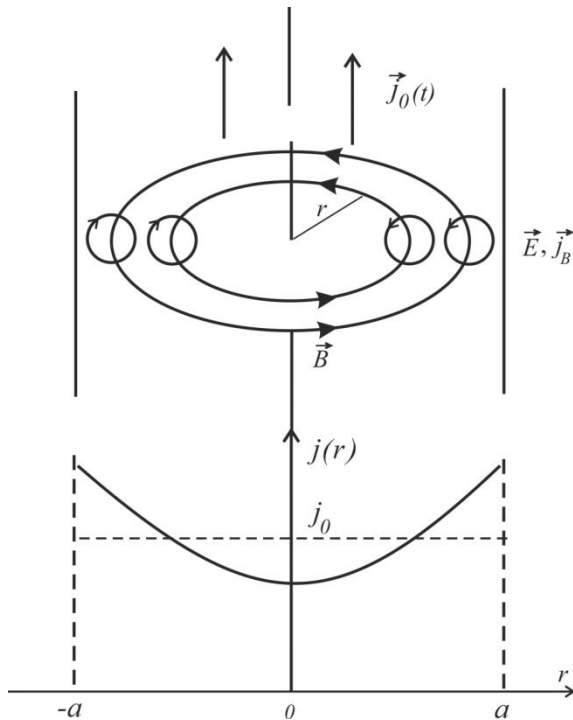


Рис.15.6

Враховуючи напрям густини струму $\vec{j}_B$, та його зменшення до осі провідника, функція розподілу $\vec{j}(r)$ приймає вигляд, зображений на рисунку.

Густина струму в провіднику спадає від поверхні за експонентою $j = j(a)e^{-x/\delta}$, де j – густина струму, x – відстань від поверхні, δ – глибина скін-шару.

Глибина скін-шару зменшується зі збільшенням частоти. Якщо при частоті 50 Гц глибина скін-шару в міді становить 0,7 см, то на частоті 0,5 МГц – 0,007 см. Скін-ефект призводить до збільшення опору провідника високочастотному струму.

Іншим розповсюдженим проявом закону електромагнітної індукції є *струми Фуко*. Струми Фуко виникають під дією змінного електромагнітного поля і за своєю фізичною природою нічим не відрізняються від індукційних струмів, що виникають у лінійних провідниках. Струми Фуко виникають у масивних магнітних осердях при зміні магнітного потоку, який їх пронизує. За законом Джоуля Ленца, токи Фуко призводять до виділення теплоти в об'ємі осердя. Теплова дія струмів Фуко використовується в індукційних печах.

Контрольні запитання і завдання

1. На відстанях a і b від довгого прямого провідника з постійним струмом I_0 розміщені два паралельні йому провідники, замкнені на одному кінці опором R (рис. 15.7). По проводах без тертя переміщують зі сталою швидкістю v стрижень–перемичку. Нехтуючи опором проводів, стрижня, контактів, а також індуктивністю контуру, визначити: а) значення й напрямок індукційного струму в стрижні; б) силу, яку необхідно прикласти для підтримання сталої швидкості.
2. Знайти індуктивність одиниці довжини кабелю, що являє собою два тонкостінних коаксіальних металевих циліндри, якщо радіус зовнішнього циліндра в $\eta = 3,6$ рази більший, ніж радіус внутрішнього. Магнітну проникність середовища між циліндрами вважати такою, що дорівнює одиниці.
3. Обчислити взаємну індуктивність довгого прямого проводу й прямокутної рамки зі сторонами a й b . Рамка і прямий провід лежать в одній площині, причому найближча до проводу сторона рамки довжиною b паралельна йому й знаходиться від нього на відстані l .
4. Довгий циліндр радіусом a , поверхня якого рівномірно заряджена, обертається навколо своєї осі з кутовою швидкістю ω . Знайти енергію магнітного поля на одиницю довжини циліндра, якщо лінійна густина заряду циліндра дорівнює λ й $\mu = 1$.

16. Струм зміщення. Система рівнянь Максвелла

16.1 Струм зміщення

Ми з вами розглядали два типи струмів. Мікроструми (молекулярні струми), які виникають всередині молекул, атомів. Друга категорія макроструми (струми провідності).

Струм провідності – це спрямований рух вільних зарядів (наприклад, іонів або вільних електронів). У разі, якщо цей струм йде не в речовині, а у вільному просторі, нерідко замість терміна «струм провідності» вживають термін «струм переносу». Інакше кажучи, струм переносу обумовлений перенесенням електричних зарядів у вільному просторі зарядженими частинками або тілами під дією електричного поля.

Розглянемо наступний дослід, рис.16.1. При розриві кола постійного струму, або увімкненні у нього конденсатора, струм у розімкнутому контурі відсутній.

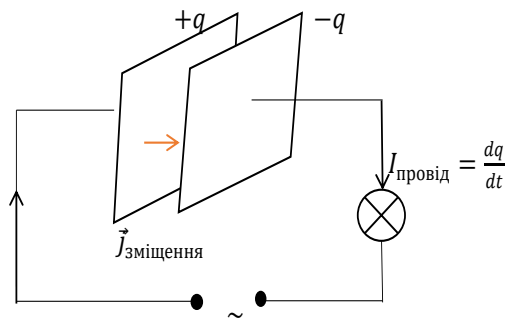


Рис.16.1

При живленні такого контуру від джерела змінної напруги в ньому реєструється змінний струм (при досить високій частоті і ємності конденсатора загоряється лампа, увімкнена послідовно з конденсатором). На частині кола до конденсатора по проводах протікає струм провідності, пов'язаний з переносом зарядів $I_{\text{провід}} = \frac{dq}{dt}$. Виникає питання, яким чином між обкладинками конденсатора протікає струм, яка його природа? Для опису «проходження» змінного струму через конденсатор (розрив за

постійним струмом) Максвелл увів поняття *струму зміщення*. Позначимо його густину $\vec{j}_{\text{зміщення}}$.

Струм провідності призводить до зміни електричного заряду на обкладинках $I_{\text{провід}} = \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt} \int_S \sigma dS = \frac{d}{dt} \int_S \vec{D} d\vec{S} = \int_S \frac{d\vec{D}}{dt} d\vec{S}$, де σ – поверхнева густина заряду на обкладинках, S – площа конденсатору.

Похідна $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ має значення густини струму, отримала назву густина струму зміщення

$$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{j}_{\text{зміщення}}. \quad (16.1)$$

У загальному випадку, струми провідності і зміщення в просторі не розділені, вони можуть існувати в одному і тому ж об'ємі. Тому, Максвелл увів поняття повного струму, що дорівнює сумі струмів провідності і зміщення.

$$\vec{j}_{\text{повн}} = \vec{j}_{\text{провід}} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (16.2)$$

За теоремою про циркуляцію вектору $\vec{H}$:

$$\text{rot} \vec{H} = \vec{j}_{\text{провід}} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \quad (16.3)$$

Також рівняння (16.3) в інтегральній формі

$$\begin{aligned} \iint_S \text{rot} \vec{H} d\vec{S} &= \iint_S \left(\vec{j}_{\text{провід}} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d\vec{S}; \\ \oint_L \vec{H} d\vec{l} &= - \iint_S \left(\vec{j}_{\text{провід}} + \frac{d\vec{D}}{dt} \right) d\vec{S} \end{aligned} \quad (16.4)$$

16.2 Система рівнянь Максвелла

Система рівняння Максвелла в диференціальній формі:

$$\text{rot} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (16.5a)$$

$$\text{rot} \vec{H} = \vec{j}_{\text{провід}} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (16.5б)$$

$$\text{div} \vec{D} = \rho \quad (16.5в)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad (16.5\Gamma)$$

Рівняння Максвелла в інтегральній формі:

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = - \iint_S \frac{d\vec{B}}{dt} d\vec{S} \quad (16.6a)$$

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = - \iint_S \left(\vec{j}_{\text{провід}} + \frac{d\vec{D}}{dt} \right) d\vec{S} \quad (16.6б)$$

$$\oiint_S \vec{D} d\vec{S} = \iiint_V \rho_{\text{стор}} dV \quad (16.6в)$$

$$\oiint_S \vec{B} d\vec{S} = 0 \quad (16.6г)$$

Рівняння (16.5) – (16.6) мають наступний зміст:

Рівняння (а) показує, що електричне поле створюється магнітним полем, яке змінюється у часі $\left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right)$;

Рівняння (б) показує, що магнітне поле створюється електричними струмами провідності ($\vec{j}_{\text{провід}}$) та електричним полем, яке змінюється із часом $\left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right)$;

Рівняння (в) – теорема Гауса для вектору електричного зміщення, де $\rho_{\text{стор}}$ – густина електричного заряду.

Рівняння (г) – теорема Гауса для вектору магнітної індукції. Показує, що лінії індукції магнітного поля замкнені.

Систему рівнянь Максвелла (16.5) та (16.6) доповнюють системою матеріальних рівнянь

$$\vec{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E} \quad (16.7a)$$

$$\vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H} \quad (16.7б)$$

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} \quad (16.7в)$$

Контрольні запитання і завдання

1. Плоский конденсатор з обкладинками у формі дисків і відстанню між ними d , який заповнено однорідним слабо провідним середовищем із питомою провідністю σ і діелектричною проникністю ϵ , підключений до джерела змінної напруги $U = U_m \cos \omega t$. Визначити напруженість магнітного поля $H(r)$ у конденсаторі в залежності від відстані r до його осі.
2. Напруженість однорідного електричного поля всередині плоского конденсатора з обкладинками у формі дисків лінійно зростає з часом за законом $E = \alpha t$, де $\alpha = 10^{11} \frac{\text{В/м}}{\text{с}}$. Знайти індукцію магнітного поля всередині конденсатору на відстані r від його осі.
3. Поясніть яким чином антена мобільного телефону у вигляді короткого відрізка провідника створює навколо у просторі магнітне поле.

Перелік посилань.

1. Механіка. Збірник задач до розділу «Механіка» [Електронний ресурс] : навчальний посібник для студентів спеціальності 123 «Комп'ютерна інженерія», / КПІ ім. Ігоря Сікорського ; уклад. В. П. Бригінець, О. В. Дімарова, Л. П. Пономаренко, І. М. Репалов, Н. О. Якуніна. – Електронні текстові дані (1 файл: 2,73 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. – 83 с. – Назва з екрана. <https://ela.kpi.ua/handle/123456789/46056>
2. Лисенко О. В. Розв'язування задач із фізики: електрика та магнетизм : навчальний посібник / О. В. Лисенко, Г. А. Олексієнко. – Суми : Сумський держ. університет, 2017 – 284 с., ISBN 978-966-657-680-7.
3. Л. Д. Дідух Електрика та магнетизм : підручник /. – Тернопіль : Підручники і посібники, 2020. –464 с. ISBN 978-966-07-3614-6.
4. Загородній В. В. Загальна фізика. Механіка: підручник / В.В. Загородній, КПІ ім. Ігоря Сікорського. – 2-е вид., виправл. і доповн. – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2020. – 364с., <https://ela.kpi.ua/handle/123456789/38392>.
5. Кучерук І.М., Горбачук І.І., Луцик П.П. Загальний курс фізики. Електрика і магнетизм.- К: Техніка, 2001.

Список Літератури

6. Кучерук І.М., Горбачук І.І., Луцик П.П. Загальний курс фізики. Механіка, молекулярна фізика і термодинаміка.- К: Техніка, 1999.
7. В.Г.Бар'яхтар, І.В. Бар'яхтар, Л.П. Гермаш, С.О. Довгий. Механіка. – Київ, Наукова думка. 2011, 350 с
8. Т. Г. Січкарь, Електрика і Магнетизм. Курс Лекцій. Навчальний Посібник Для Студентів Фізичних Спеціальностей (НПУ імені М.П. Драгоманова, Київ, 2021).

Предметний покажчик

Вектор –переміщення 8 –прискорення 9 –кутової швидкості 19 швидкості 8 – електричного зміщення 74 – електричного поля 48 Взаємна індуктивність 128 Взаємоіндукція 129 Гістерезис – магнітний 122 Дивергенція 67,73 Диполь електричний 57 Діамагнетики 118 Діелектрична проникність 74 Довжина вільного пробігу 89 Домен магнітний 121 Еквіпотенціальна поверхня 56 Електропровідність – металів 89 Електрорушійна сила 125 – взаємоіндукції 130 – електромагнітної індукції 128 Енергія – електричного поля 84 кінетична 34 – конденсатора 83 – магнітного поля 131 – потенціальна 35 Ефект – Холла 100 Ємність електрична 80 – конденсатора 81,82 Закон – Ампера 94 – Біо-Савара-Лапласа 95 – Джоуля-Ленца 91 – збереження —енергії 36 – імпульсу 25 —заряду 48 – Кулона 47	Опір – питомий 91 – провідника 91 Парамагнетики 118 Петля гістерезису 122 Плече диполя 59 Поле – електричне 48 –вихрове 127 Поляризація – діелектрика 69 Потенціал – електричного поля 53 Потік – вектора напруженості електричного поля 61 Потужність – постійного струму 91 Правила Кірхгофа 92 Правило Ленца 125 Прискорення –абсолютне 29 –нормальне 11 –повне 10 –тангенціальне 10 Принцип суперпозиції – електростатичних полів 49 – магнітних полів 96 Проникність – діелектрична 74 – магнітна 116 Рівняння –динамики —поступального руху 24 —обертального руху 44 – Максвелла 136 –неперервності 87 Система відліку –інерціальна 27 –неінерціальна 27 Ротор вектора 105 Сила 24 –відносна30
--	---

– інерції 22 – Ньютона 24 – Ома 89 – електромагнітної індукції 125 Заряд – елементарний 47 – пробний 49 – точковий 48 Індуктивність 128 – соленоїда 128 Індукція – взаємна 129 – електромагнітна 125 Конденсатор 49 – плоский 52 – сферичний 52 – циліндричний 53 Ларморова частота 120 Лінії – силові електричного поля 48,75 Магнетики 111 Момент дипольний – електричний 13 – магнітний 108 – орбітальний 108 – імпульсу 40 – сили 39 – інерції 40 Намагніченість 112 – феромагнетиків 121 Намагнічування 121 Напруженість – електричного поля 48 – коерцитивна 123 – магнітного поля 115	– коріоліса 30 – відцентрова 30 – Ампера 244 – електрорушійна 94 – коерцитивна 123 – Лоренца 98,126 – струму 86 Скін-ефект 132 Соленоїд 106,128 Сприйнятливість – діелектрична 74 – магнітна 116 Стала – Холла 100 Теорема Гаусса 60 – Остроградського-Гауса 68,73 – про — циркуляцію магнітної індукції 105 — зміну кінетичної енергії 34 – Штейнера 43 Феромагнетики 121 Центр мас 44 Циркуляція векторного – електричного поля 137 – магнітного поля 103,113 Швидкість – вектор 8 – відносна 28 Явище електромагнітної індукції 125
--	---