

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ ІМЕНІ ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

ОСНОВИ МЕТРОЛОГІЇ

Опрацювання результатів прямих вимірювань з багаторазовими незалежними спостереженнями

Рекомендації до виконання розрахункової роботи

Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра
за освітньою програмою «Інформаційно-обчислювальні засоби радіоелектронних систем»
спеціальності G5 Електроніка, електронні комунікації, приладобудування та радіотехніка

Укладачі: О.М. Лисенко, Г.В.Іваннік

Електронне мережеве навчальне видання

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2026

УДК 621.317.006.91
О-62

Укладачі: *Лисенко Олександр Миколайович, д-р техн. наук, проф.*
Іваннік Геннадій Васильович, канд. техн. наук

Рецензент: *Микитенко В.І., д-р техн. наук, проф.,*
кафедра комп'ютерно-інтегрованих оптичних та навігаційних
систем КПІ ім. Ігоря Сікорського

Відповідальний
редактор: *Яганов П.О., канд. техн. наук, доц.*

Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
(протокол №5 від 05.03.2026 р.)
за поданням вченої ради факультету електроніки
(протокол № 02/2026 від 23.02.2026 р.)

Основи метрології. Опрацювання результатів прямих вимірювань з багаторазовими незалежними спостереженнями [Електронний ресурс]: рек. до виконання розрахунк. роботи: навч. посіб. для здобувачів ступеня бакалавра за освіт. програмою «Інформаційно-обчислювальні засоби радіоелектронних систем» спец. G5 Електроніка, електронні комунікації, приладобудування та радіотехніка/ КПІ ім. Ігоря Сікорського ; уклад.: О.М. Лисенко, Г. В. Іваннік. – Електрон. текст. данні (1 файл). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2026. – 24 с.

Навчальний посібник містить варіанти індивідуальних завдань, методику і приклади розв'язання типових завдань та посилання на літературні джерела щодо виконання студентами розрахункової роботи з дисципліни «Основи метрології». Основну увагу приділено практичному засвоєнню студентами стандартної методики опрацювання результатів прямих вимірювань з багаторазовими незалежними спостереженнями та оцінки похибок результатів вимірювань. Навчальний посібник призначений для здобувачів ступеня бакалавра за спеціальністю G5 Електроніка, електронні комунікації, приладобудування та радіотехніка, також буде корисним для самостійного вивчення і практичного застосування студентами інших суміжних освітніх програм вказаної вище та інших технічних спеціальностей.

УДК 621.317.006.91

Реєстр. № НП 25/26-226. Обсяг **0,7** авт. арк.

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
проспект Перемоги, 37, м. Київ, 03056
<https://kpi.ua>

Свідectво про внесення до Державного реєстру видавців,
виготовлювачів розповсюджувачів видавничої продукції ДК № 5354
від 25.05.2017 р.

© КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2026

Зміст

Вступ.....	4
1. МЕТА ТА ЗАВДАННЯ РОБОТИ.....	5
2. ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ.....	6
2.1. Короткі теоретичні відомості.....	6
3. СКЛАД, ОБСЯГ І СТРУКТУРА РОБОТИ.....	12
4. МЕТОДИКА ВИКОНАННЯ РОБОТИ.....	13
5. РЕКОМЕНДАЦІЇ ДО ОФОРМЛЕННЯ.....	20
Список рекомендованої літератури.....	21
Додаток А. Варіанти індивідуальних завдань.....	22
Додаток Б. Шаблон титульного аркушу.....	24

Вступ

У навчальному посібнику наведені варіанти індивідуальних завдань, вимоги, методика та приклади розв'язання типового завдання, а також посилання на літературні джерела щодо виконання студентами спеціальності G5 «Електроніка, електронні комунікації, приладобудування та радіотехніка» розрахункової роботи (РР) з дисципліни «Основи метрології». РР направлена на практичне засвоєння студентами стандартної методики опрацювання результатів прямих вимірювань з багаторазовими незалежними спостереженнями та оцінки похибок результатів вимірювань.

Вимірювання з багаторазовими спостереженнями, тобто з повторенням одним і тим же дослідником одноразових спостережень в однакових умовах з використанням одного і того ж засобу вимірювань (рівноточні спостереження), досить часто використовуються у вимірювальній практиці для підвищення точності вимірювань [1, 2]. При цьому прийнято вважати, що кількість спостережень під час багаторазових вимірювань більше за 4-5. В результаті відповідного статистичного опрацювання отриманих даних вдається зменшити вплив випадкової складової похибки на результат вимірювань. Слід також зазначити, що відповідно до згаданої вище стандартної методики при обробці ряду спостережень в переважній більшості практичних застосувань приймається модель нормального розподілу випадкових похибок.

1. МЕТА ТА ЗАВДАННЯ РОБОТИ

Головна мета виконання індивідуальних завдань (тобто РР) полягає у засвоєнні студентами знань про особливості статистичного опрацювання результатів прямих вимірювань з багаторазовими незалежними спостереженнями з перевіркою їх на аномальність при заданому рівні значущості та оволодінні практичними вміннями і навичками самостійного виконання розрахунків згідно наведеної в посібнику стандартної методики.

Формально у межах виконання РР студент має виконати наступні складові отриманого індивідуального завдання:

- визначити середнє арифметичне ряду з n спостережень, яке приймають за оцінку результату вимірювання;
- знайти абсолютні випадкові відхилення (похибки);
- обчислити суму квадратів випадкових похибок, яка має бути мінімальною;
- визначити оцінку середньоквадратичного відхилення (СКВ) абсолютних випадкових відхилень кожного із одноразових спостережень;
- перевірити найбільші відхилені від середнього значення результату спостережень на можливість їх спотворення грубими похибками чи наявністю промахів (перевірка результатів спостережень на аномальність при заданому рівні значущості α);
- знайти оцінку СКВ середнього арифметичного значення, яку називають середньоквадратичним відхиленням результату вимірювання;
- оцінити довірчі границі похибки з використанням коефіцієнта розподілу Стьюдента і записати результат вимірювання за умови відсутності систематичної похибки.

2. ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ

Завдання. Для зменшення впливу випадкових похибок виконано серію з n лабораторних вимірювань напруги U та отримано наступні результати спостережень у *вольтах* (див. варіанти виконання в табл. 1 Додатку А). З попередніх досліджень відомо, що похибки результатів спостережень розподілені за законом Стюдента, однак, дисперсія випадкових похибок невідома.

Необхідно в рамках виконання завдання:

- перевірити на аномальність n результатів спостережень з рівнем значущості α (див. табл. 1 Додатку А).
- оцінити результат вимірювання та його довірчі границі при заданому значенні довірчої ймовірності $P_{дов.}$ (див. табл. 1 Додатку А).

2.1. Короткі теоретичні відомості

Опрацювання результатів прямих вимірювань з багаторазовими незалежними спостереженнями

У вимірювальній практиці для підвищення якості вимірювань часто звертаються до вимірювань з багаторазовими спостереженнями, тобто до повторення одним і тим же дослідником одноразових спостережень в однакових умовах з використанням одного і того ж засобу вимірювань (*рівноточні спостереження*). Прийнято вважати, що кількість спостережень під час багаторазових вимірювань більше за 4-5 [2].

В результаті відповідного статистичного опрацювання отриманих даних вдається зменшити вплив випадкової складової похибки на результат вимірювань. При цьому можуть бути використанні різні методики опрацювання результатів вимірювань, які залежать від апріорної інформації про параметри розподілу випадкових похибок.

Нижче в розд. 4 описана стандартна методика виконання прямих вимірювань з багаторазовими незалежними спостереженнями і основні положення з обробки результатів спостережень та оцінки похибок результатів вимірювань. Відповідно до методики при обробці ряду спостережень в переважній більшості практичних застосувань приймається *модель нормального розподілу* випадкових похибок. Якщо в якомусь конкретному вимірюванні заздалегідь невідомий закон розподілу, то необхідно провести детальні дослідження на предмет встановлення форми розподілу. Найчастіше на основі експериментальних даних спочатку *будують гістограму* і за її формою роблять попередній висновок про вид розподілу.

Перевірка результатів спостережень на наявність грубих похибок [1]

Аналізуючи результати спостережень, наприклад, зобразивши їх на графіку, видно, що інколи один чи більше результатів різко відхиляються від сукупності решти. Таке відхилення може бути спричинене надмірними для цього експерименту (*грубими*) похибками або помилковим записуванням результату. Такі різко відмінні результати можуть істотно спотворити середнє значення – оцінку результату вимірювання. Щоб цього не сталося, обтяжені грубими похибками результати спостережень (аномальні результати) необхідно виявити і відкинути.

Для виявлення аномальних результатів використовують побудований *варіаційний ряд* – упорядкований список результатів спостережень у порядку зростання або спадання. Очевидно, що в такому ряді аномальними можуть бути (або не бути) його крайні члени. Тому необхідно перевірити гіпотезу про те, що результат, який найбільше відхиляється від середнього значення, спотворений грубою похибкою.

Для перевірки результатів спостережень на аномальність використовується ряд статистичних критеріїв, які враховують кількість виконаних вимірювань і ґрунтуються на тому, що відхилення крайнього члена варіаційного ряду від середнього значення (звичайно, пронормоване до оцінки стандартного

відхилення), якщо задано рівень значущості α , не перевищує встановленого значення. Тут рівень значущості – це ймовірність зарахувати аномальний результат до таких, які не спотворені грубими похибками.

Якщо відомо, що розподіл похибок нормальний, то для відомого стандартного відхилення σ похибок знаходять відношення (зведене відхилення)

$$V_{\sigma} = \frac{\max |x_i - \bar{x}_{(n)}|}{\sigma}$$

і порівнюють його з допустимим значенням $V_{\sigma, \text{ доп.}}$ (див. табл. 1).

Таблиця 1

Граничні значення $V_{\sigma, \text{ доп.}}$ при нормальному розподілі похибок і відомому σ

n	Рівень значущості α				n	Рівень значущості α			
	0,1	0,05	0,01	0,005		0,1	0,05	0,01	0,005
3	1,497	1,738	2,215	2,396	14	2,352	2,589	3,072	3,261
4	1,696	1,941	2,431	2,618	15	2,382	2,617	3,099	3,287
5	1,835	2,080	2,574	2,764	16	2,409	2,644	3,124	3,312
6	1,939	2,184	2,679	2,870	17	2,434	2,668	3,147	3,334
7	2,022	2,267	2,761	2,952	18	2,458	2,691	3,168	3,355
8	2,091	2,334	2,828	3,019	19	2,480	2,712	3,188	3,375
9	2,150	2,392	2,884	3,074	20	2,500	2,732	3,207	3,393
10	2,200	2,441	2,931	3,122	21	2,538	2,768	3,240	3,425
11	2,245	2,484	2,973	3,163	22	2,555	2,784	3,255	3,439
12	2,284	2,523	3,010	3,199	23	2,571	2,800	3,269	3,453
13	2,320	2,557	3,043	3,232					

Якщо $V_{\sigma} > V_{\sigma, \text{ доп.}}$, то відповідний результат (перший чи останній, чи обидва) відкидають і знаходять середнє значення для скороченої вибірки результатів спостережень.

Якщо невідоме стандартне відхилення похибок, встановлюють їх експериментальну оцінку S_n та обчислюють відношення

$$V_S = \frac{\max |x_i - \bar{x}_{(n)}|}{S_n}$$

і порівнюють його з допустимим значенням $V_{S, \text{ доп.}}$ (див. табл. 2).

Таблиця 2

Граничні значення $V_{S, \text{ доп.}}$ при нормальному розподілі похибок і невідомому σ

n	Рівень значущості α				n	Рівень значущості α			
	0,1	0,075	0,05	0,025		0,1	0,075	0,05	0,025
3	1,15	1,15	1,15	1,15	12	2,13	2,20	2,29	2,41
4	1,42	1,44	1,46	1,48	13	2,17	2,24	2,33	2,47
5	1,60	1,64	1,67	1,72	14	2,21	2,28	2,37	2,50
6	1,73	1,77	1,82	1,89	15	2,25	2,32	2,41	2,55
7	1,83	1,88	1,94	2,02	16	2,28	2,35	2,44	2,58
8	1,91	1,96	2,03	2,13	17	2,31	2,38	2,48	2,62
9	1,98	2,04	2,11	2,21	18	2,34	2,41	2,50	2,66
10	2,03	2,10	2,18	2,29	19	2,36	2,44	2,53	2,68
11	2,09	2,14	2,23	2,36	20	2,38	2,46	2,56	2,71

Знов-таки, якщо $V_S > V_{S, \text{ доп.}}$, то відповідний результат (перший чи останній, чи обидва) відкидають і знаходять середнє значення для скороченої вибірки результатів спостережень.

Таку процедуру повторюють доти, доки не будуть вилучені всі аномальні результати.

Оцінку стандартного відхилення похибок результатів спостережень розраховують за виразом

$$S_n = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n)^2}{n-1}}$$

Заокруглення похибок [2]

Результат вимірювання складається з оцінки вимірюваної величини (її дійсного значення) і похибки вимірювання, яка характеризує точність

вимірювання. Недоцільно утримувати у виразі для отриманого значення вимірної фізичної величини велике число цифр, оскільки цифри молодших розрядів можуть виявитись недостовірними. Поширеною помилкою при оцінюванні результатів і похибок вимірювань є обчислення їх і запис з великим числом значущих цифр. Цьому сприяє використання для розрахунків комп'ютерів (калькуляторів), які дозволяють одержувати результати з чотирма і більше значущими цифрами.

Похибки вимірювань не завжди треба знати з дуже високою точністю. Так, для технічних вимірювань допустимою вважається похибка в (15-20) %. Відповідним стандартом встановлено, що в числових показниках точності вимірювань (включаючи похибки) повинно бути не більше двох значущих цифр.

В практичній метрології вироблені наступні *правила округлення* результатів і похибок вимірювань:

1. У виразі похибки результату вимірювання утримується не більше двох значущих цифр. Однак, при цьому:

- для технічних вимірювань похибка результату вимірювання вказується двома значущими цифрами, якщо перша з них дорівнює 1 або 2, і однією – якщо перша цифра 3 або більше;

- для лабораторних вимірювань похибки, перші значущі цифри яких є 1, 2, 3 та 4, необхідно заокруглювати до двох значущих цифр і однією – якщо перша цифра 5 або більше;

- для високоточних (прецизійних) вимірювань, всі похибки необхідно заокруглювати до двох значущих цифр.

2. Числове значення результату вимірювання повинно закінчуватись цифрою того ж розряду, що і значення похибки.

Наприклад: $235,744 \pm 0,15$ заокруглюється до $235,74 \pm 0,15$.

3. Якщо перша з відкинутих цифр ≥ 5 , а за нею є значущі цифри, тоді останню з цифр, що зберігається, збільшують на одиницю.

Наприклад, заокруглюючи число 36,754 до трьох значущих цифр, записуємо 36,8.

4. Якщо відкидається цифра 5, а за нею немає значущих цифр, тоді останню цифру, що зберігається, залишають незмінною, якщо вона парна, і збільшують на одиницю, якщо вона непарна.

Наприклад, заокруглюючи число 36,75 до трьох значущих цифр, записуємо 36,8. Для числа 36,65 заокруглене значення – 36,6.

5. Якщо перша з цифр, що відкидаються, менша 5, тоді останню цифру, що зберігається, не змінюють.

Наприклад, заокруглюючи число 318,74 до чотирьох значущих цифр, записуємо 318,7.

6. Заокруглення проводиться лише в кінцевій відповіді, а всі попередні обчислення проводять з одним-двома зайвими розрядами.

3. СКЛАД, ОБСЯГ ТА СТРУКТУРА РОБОТИ

РР має складатися з одного розділу, який містить результати проведеного опрацювання даних прямих вимірювань з багаторазовими незалежними спостереженнями та оцінки похибок результатів вимірювань відповідно до отриманого варіанту індивідуального завдання.

Результати розрахунків мають супроводжуватися письмовими коментарями здобувача щодо виконаних ним дій.

Загальний обсяг РР не має перевищувати 4 сторінок формату А4.

Структура РР має включати титульний аркуш (Додаток Б) та сторінки з проведеними розрахунками та коментарями, які оформлені відповідно до рекомендацій розділу 5 даного документу.

4. МЕТОДИКА ВИКОНАННЯ РОБОТИ

Вхідною інформацією для обробки є ряд з n результатів вимірювань $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$. Число n залежить як від вимоги до точності результату, так і від реальної можливості виконати повторні вимірювання.

Послідовність обробки результатів прямих багаторазових вимірювань складається із ряду етапів [2]:

- Середнє арифметичне значення $\bar{x}$ ряду спостережень, яке приймають за оцінку результату вимірювання: $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$.

Це значення є математичним очікуванням $M = \bar{x}$.

- Знаходять абсолютні випадкові відхилення (похибки)

$$\Delta_1 = x_1 - \bar{x}, \Delta_2 = x_2 - \bar{x}, \Delta_3 = x_3 - \bar{x}, \dots, \Delta_n = x_n - \bar{x}.$$

- Обчислюється сума квадратів випадкових похибок і ця сума має бути мінімальною: $\sum_{i=1}^n \Delta_i^2 = \min$.

Такий висновок заснований на аксіомі розподілу, що при великій кількості вимірювань малі похибки зустрічаються частіше, ніж великі, а дуже великі похибки практично не зустрічаються.

- Визначається оцінка СКВ S_n абсолютних випадкових відхилень кожного із одноразових n спостережень:

$$S_n = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \Delta_i^2}{n-1}}.$$

- Перевіряються найбільш відхилені від середнього значення результату спостережень на можливість їх спотворення грубими похибками чи наявністю промахів. Процедуру перевірки результатів спостережень на аномальність детально розглянуто раніше при заданому рівні значущості α .

При потребі результати з грубими похибками відкидають і повторно виконуються вище зазначені пункти при скороченій вибірці.

Оцінка стандартного відхилення випадкової похибки середнього значення

(результату вимірювання) в $\sqrt{n}$ разів менша за оцінку стандартного відхилення випадкових похибок окремих результатів спостережень:

$$S_{\bar{x}} = \frac{S_n}{\sqrt{n}}$$

Довірчі границі випадкової похибки результату вимірювання (середнього значення) розраховуємо за виразом:

$$\Delta_{\bar{x}} = \pm t(n-1, P_{\text{дов.}}) \cdot S_{\bar{x}} = \pm t(n-1, P_{\text{дов.}}) \cdot \frac{S_n}{\sqrt{n}},$$

де $t(n-1, P_{\text{дов.}})$ – коефіцієнт, взятий із табл. 3 розподілу Стюдента, що залежить від кількості спостережень n та довірчої ймовірності $P_{\text{дов.}}$.

Результат вимірювання записують у стандартній формі:

$$X = \bar{x} \pm \Delta_{\bar{x}}, P_{\text{дов.}} = , n = , \text{вип. похибка: розп. за законом Стюдента}$$

Таблиця 3

Значення коефіцієнтів Стюдента $t_p = t(n_{\text{св.}}, P_{\text{дов.}})$

Число ст. своб., $n_{\text{св.}} = (n-1)^*$	$P_{\text{дов.}}$				Число ст. своб., $n_{\text{св.}} = (n-1)^*$	$P_{\text{дов.}}$			
	0,9	0,95	0,99	0,999		0,9	0,95	0,99	0,999
1	6,314	12,7	63,657	636,6	18	1,734	2,101	2,878	3,922
2	2,920	4,303	9,925	31,598	19	1,729	2,093	2,861	3,883
3	2,353	3,182	5,841	12,941	20	1,725	2,086	2,845	3,850
4	2,132	2,776	4,604	8,610	21	1,721	2,080	2,831	3,819
5	2,015	2,571	4,032	6,859	22	1,717	2,074	2,819	3,792
6	1,943	2,447	3,707	5,959	23	1,714	2,069	2,807	3,767
7	1,895	2,365	3,499	5,405	24	1,711	2,064	2,797	3,745
8	1,860	2,306	3,355	5,041	25	1,708	2,060	2,787	3,725
9	1,833	2,262	3,250	4,781	26	1,706	2,056	2,779	3,707
10	1,812	2,228	3,169	4,587	27	1,703	2,052	2,763	3,690
11	1,796	2,201	3,106	4,437	28	1,701	2,048	2,761	3,674
12	1,782	2,179	3,055	4,318	29	1,699	2,045	2,756	3,659
13	1,771	2,160	3,012	4,221	30	1,697	2,042	2,750	3,646
14	1,761	2,145	2,977	4,140	40	1,684	2,021	2,704	3,551
15	1,753	2,131	2,947	4,073	60	1,671	2,000	2,660	3,460
16	1,748	2,120	2,921	4,015	120	1,658	1,980	2,617	3,373
17	1,740	2,110	2,898	3,965	∞	1,645	1,960	2,576	3,291

*) де n – кількість незалежних спостережень (вимірювань).

Якщо кількість результатів спостережень становить кілька десятків (переважно більше, ніж 30), то розподіл Стюдента практично трансформується у

нормальний і тоді довірчі границі непевності результату можна оцінити за відповідними квантилями нормального розподілу.

Отже, для зменшення впливу випадкових похибок у n разів необхідно здійснити n^2 спостережень, зокрема, для зменшення похибки в 10 разів необхідно виконати 100 спостережень. Очевидно, що збільшення кількості спостережень спричиняє пропорційне зростання часу вимірювання. Крім того, збільшення часу спостережень призводить до зростання впливу прогресуючих та регулярних похибок.

Нижче наведено приклади виконання розрахунків при виконанні індивідуального завдання в межах РР при проведенні лабораторних вимірювань.

Приклад 1.

Завдання. Для зменшення впливу випадкових похибок здійснено серію з $n=25$ лабораторних вимірювань напруги U та отримано наступні результати (у мВ): 4,956; 4,995; 4,973; 5,090; 5,024; 4,893; 4,931; 5,053; 5,027; 4,998; 5,033; 5,067; 5,055; 5,113; 4,932; 4,911; 4,949; 5,194; 4,999; 4,901; 5,010; 5,144; 5,188; 5,099; 5,060. З попередніх досліджень відомо, що похибки результатів розподілені за законом Стюдента, однак, дисперсія випадкових похибок невідома. Оцінити результат вимірювання та його довірчі границі, якщо $P_{дов.} = 0,95$. Перевірити на аномальність результати з рівнем значущості $\alpha = 0,05$ [1].

Розв'язання.

1. Сортуємо результати вимірювання U_c у порядку зростання (будуємо варіаційний ряд): 4,893; 4,901; 4,911; 4,931; 4,932; 4,949; 4,956; 4,973; 4,988; 4,995; 4,999; 5,010; 5,024; 5,027; 5,033; 5,053; 5,055; 5,060; 5,067; 5,090; 5,099; 5,113; 5,144; 5,188; 5,194.
2. Обчислюємо середнє значення струму $\bar{U} = \frac{1}{25} \sum_{i=1}^{25} U_i = 5,0234$ мВ.
3. Знаходимо оцінку стандартного відхилення випадкових похибок:

$$S_{25} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{25} (U_i - \bar{U})^2}{25-1}} = 0,08444 \text{ мВ}.$$

4. Обчислюємо зведені відхилення від середнього значення найменшого

$$V_{s1} = \frac{|U_{c1} - \bar{U}|}{S_{25}} = 1,544 \text{ та найбільшого } V_{s2} = \frac{|U_{c25} - \bar{U}|}{S_{25}} = 2,020$$

значень варіаційного ряду. Для рівня значущості $\alpha = 0,05$ з табл. 2

знаходимо $V_{s, \text{don}} = 2,56$, тому робимо висновок, що серед отриманих результатів ймовірно відсутні такі, що спотворені грубими похибками.

5. Для $n=25$ та $P_{\text{дов.}} = 0,95$ знаходимо коефіцієнт Стьюдента (див. табл. 3) $t(25-1, 0,95)=2,064$ і відповідні довірчі границі випадкової похибки середнього значення напруги:

$$\Delta_{\bar{U} \text{ дов.}} = \pm t(n-1, P_{\text{дов.}}) \cdot S_{\bar{U}} = \pm 2,064 \cdot \frac{0,08444}{\sqrt{25}} = \pm 0,03485 \text{ мВ}$$

Заокруглюємо похибку до двох значущих цифр $\Delta_{\bar{U} \text{ дов.}} = \pm 0,035 \text{ мВ}$.

6. Припускаючи, що систематичні похибки під час вимірювань незначні записуємо результат вимірювання напруги:

$$U = (5,023 \pm 0,035) \text{ мВ}; P_{\text{дов.}} = 0,95; n=25, \text{ вип. пох.: розп. за законом Стьюдента.}$$

Приклад 2.

Завдання. Для зменшення впливу випадкових похибок здійснено серію з $n=19$ лабораторних вимірювань напруги U і отримано результати (B): 9,852; 9,891; 9,896; 9,910; 9,889; 9,887; 9,902; 9,878; 9,905; 9,873; 9,914; 9,898; 9,880; 9,912; 9,883; 9,879; 9,885; 9,908; 9,900. З попередніх досліджень відомо, що похибки результатів розподілені за законом Стьюдента, однак дисперсія випадкових похибок невідома. Оцінити результат вимірювання та його довірчі границі, якщо довірча ймовірність $P_{\text{дов.}} = 0,9$. Перевірити на аномальність

результати з рівнем значущості $\alpha = 0,1$.

Розв'язання.

1. Сортуємо результати вимірювань напруги U (В) у порядку зростання:
9.852; 9.873; 9.878; 9.879; 9.880; 9.883; 9.885; 9.887; 9.889; 9.891; 9.896;
9.898; 9.900; 9.902; 9.905; 9.908; 9.910; 9.912; 9.914.
2. Обчислюємо середнє значення напруги за формулою:

$$\bar{U} = \frac{1}{19} \sum_{i=1}^{19} U_i = 9.8917 \text{ В}$$

3. Знаходимо абсолютні випадкові похибки:

$\Delta 1 = -0.0397 \text{ В}$	$\Delta 8 = -0.0047 \text{ В}$	$\Delta 15 = +0.0133 \text{ В}$
$\Delta 2 = -0.0187 \text{ В}$	$\Delta 9 = -0.0027 \text{ В}$	$\Delta 16 = +0.0163 \text{ В}$
$\Delta 3 = -0.0137 \text{ В}$	$\Delta 10 = -0.0007 \text{ В}$	$\Delta 17 = +0.0183 \text{ В}$
$\Delta 4 = -0.0127 \text{ В}$	$\Delta 11 = +0.0043 \text{ В}$	$\Delta 18 = +0.0203 \text{ В}$
$\Delta 5 = -0.0117 \text{ В}$	$\Delta 12 = +0.0063 \text{ В}$	$\Delta 19 = +0.0223 \text{ В}$
$\Delta 6 = -0.0087 \text{ В}$	$\Delta 13 = +0.0083 \text{ В}$	
$\Delta 7 = -0.0067 \text{ В}$	$\Delta 14 = +0.0103 \text{ В}$	

4. Обчислюємо суму квадратів абсолютних похибок:

$$\sum_{i=1}^{19} (U_i - \bar{U})^2 = 0.004482 \text{ В}^2$$

5. Оцінку стандартного середньоквадратичного відхилення випадкових похибок знаходимо відповідно до формули:

$$S_{19} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{19} (U_i - \bar{U})^2}{19-1}} = 0.01578 \text{ В}$$

6. Обчислюємо зведені відхилення від середнього значення найменшого та найбільшого значень варіаційного ряду:

$$V_{s1} = \frac{|U_{c1} - \bar{U}|}{S_{19}} = 2.5158; \quad V_{s2} = \frac{|U_{c19} - \bar{U}|}{S_{19}} = 1.4132$$

Для рівня значущості $\alpha = 0,1$ з табл. 2 граничних значень визначаємо $V_{s, \text{don}} = 2.36$. Робимо висновок, що зведене відхилення від середнього значення найменшого значення з ряду перевищує граничне значення відхилення, тож перший член треба прибрати з ряду та провести повторні обчислення вище знайдених значень.

Для оновленого ряду отримуємо у (В): 9.873; 9.878; 9.879; 9.880; 9.883; 9.885; 9.887; 9.889; 9.891; 9.896; 9.898; 9.900; 9.902; 9.905; 9.908; 9.910; 9.912; 9.914.

$$\bar{U} = \frac{1}{18} \sum_{i=1}^{18} U_i = 9.8939 \text{ В}$$

$$\Delta 1 = -0.0209 \text{ В}$$

$$\Delta 9 = -0.0029 \text{ В}$$

$$\Delta 17 = +0.0181 \text{ В}$$

$$\Delta 2 = -0.0159 \text{ В}$$

$$\Delta 10 = +0.0021 \text{ В}$$

$$\Delta 18 = +0.0201 \text{ В}$$

$$\Delta 3 = -0.0149 \text{ В}$$

$$\Delta 11 = +0.0041 \text{ В}$$

$$\Delta 4 = -0.0139 \text{ В}$$

$$\Delta 12 = +0.0061 \text{ В}$$

$$\Delta 5 = -0.0109 \text{ В}$$

$$\Delta 13 = +0.0081 \text{ В}$$

$$\Delta 6 = -0.0089 \text{ В}$$

$$\Delta 14 = +0.0111 \text{ В}$$

$$\Delta 7 = -0.0069 \text{ В}$$

$$\Delta 15 = +0.0141 \text{ В}$$

$$\Delta 8 = -0.0049 \text{ В}$$

$$\Delta 16 = +0.0161 \text{ В}$$

Оцінку стандартного відхилення випадкових похибок знаходимо:

$$S_{18} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{18} (U_i - \bar{U})^2}{18-1}} = 0.01288 \text{ В}$$

Обчислюємо зведені відхилення від нового середнього значення найменшого та найбільшого значень варіаційного ряду:

$$V_{s1} = \frac{|U_{c1} - \bar{U}|}{S_{18}} = 1.6227; \quad V_{s2} = \frac{|U_{c18} - \bar{U}|}{S_{18}} = 1.5606$$

Для рівня значущості $\alpha = 0,1$ з табл. 2 граничних значень визначаємо $V_{s.don} = 2.34$. В оновленому ряді вимірювань зведені відхилення від середнього значення крайніх членів варіаційного ряду не перевищують граничного значення. Тому робимо висновок, що серед отриманих результатів ймовірно відсутні такі, що спотворені грубими похибками.

7. Для $n=18$ та $P_{дов.} = 0,9$ знаходимо коефіцієнт Стьюдента $t(18-1, 0,9)=1.740$ і відповідні довірчі границі випадкової похибки середнього значення напруги:

$$\Delta \bar{U}_{дов.} = \pm t(n-1, P_{дов.}) \cdot S_{\bar{x}} = \pm 1,740 \cdot \frac{0,01288}{\sqrt{18}} = \pm 0,005282 \text{ мВ}$$

8. Припускаючи, що систематичні похибки під час вимірювань незначні, записуємо результат вимірювання напруги:

$U = (9.894 \pm 0.005) \text{ В}; P_{дов.} = 0,9, n=18, \text{ закон Стьюдента розподілу випадкових похибок, коефіцієнт Стьюдента } 1.740.$

5. РЕКОМЕНДАЦІЇ ДО ОФОРМЛЕННЯ

Розрахункова робота оформлюється у вигляді текстового документа з титульним листом в електронному вигляді на аркушах А4 (210 мм х 297 мм) з використанням текстового редактора MS Word або Google Docs. Загальні параметри тексту: шрифт Times New Roman; розмір шрифту (кегель) 14 пунктів (для таблиць допускається 12); міжрядковий інтервал: 1,5 (півторачний); абзацний відступ п'ять знаків; вирівнювання по ширині сторінки; поля: ліве: 30 мм, праве: 10 мм, верхнє та нижнє: по 20 мм. При написанні формул потрібно використовувати вбудований редактор формул MS Word або Google Docs.

Розрахункова робота повинна мати пояснення виконаних розрахунків.

Титульний аркуш РР (Додаток Б) містить: назву дисципліни та розрахункової роботи, ПІБ студента, номер групи, номер варіанту індивідуального завдання, дату виконання РР; ПІБ викладача, який буде перевіряти виконану роботу.

Список рекомендованої літератури

1. М.Дорожовець, В.Мотало, Б.Стадник, В.Василюк, Р.Борек, А.Ковальчук;
За ред. Б. Стадника. Основи метрології та вимірювальної техніки:
Підручник у 2т. Том 1 Основи метрології. Львів; видавництво
Національного університету «Львівська політехніка», 2005 р. – 528 с.
(НТБ КПІ ім. Ігоря Сікорського).
2. Шовкун І.Д. Вступ до техніки вимірювань. Конспект лекцій
[Електронний ресурс]: навч. посіб. для студ. спеціальності 153 «Мікро- та
наносистемна техніка», освітньої програми «Електронні мікро- і
наносистеми та технології» та спеціальності 171 «Електроніка», освітньої
програми «Електроніка та телекомунікації»/ КПІ ім. Ігоря Сікорського;
уклад.: І.Д. Шовкун, О.В. Семеновська, Т.А. Саурова – Електронні
текстові дані (1 файл: 3317 Кбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського,
2020. – 147 с. <https://ela.kpi.ua/server/api/core/bitstreams/0266d3b6-35a3-4d71-ba1f-cd0dc4f068e3/content>

Додаток А

Таблиця 1

Варіанти індивідуальних завдань

Варіант завдання	Число вимірювань, n	Результати спостережень U, B	Довірча ймовірність, $P_{\text{дов.}}$	Рівень значущості, α
1	20	5,412; 5,401; 5,409; 5,422; 5,419; 5,397; 5,417; 5,404; 5,392; 5,407; 5,413; 5,431; 5,422; 5,390; 5,435; 5,400; 5,427; 5,415; 5,399; 5,405	0,99	0,075
2	19	2,882; 2,871; 2,886; 2,920; 2,879; 2,897; 2,912; 2,888; 2,915; 2,883; 2,924; 2,889; 2,890; 2,922; 2,893; 2,887; 2,875; 2,918; 2,910	0,95	0,1
3	16	3,008; 3,002; 2,990; 3,015; 2,987; 2,997; 3,022; 3,035; 2,981; 2,991; 2,972; 3,027; 3,005; 2,999; 2,985; 3,023	0,95	0,05
4	17	12,703; 12,720; 12,742; 12,709; 12,732; 12,690; 12,723; 12,729; 12,696; 12,715; 12,725; 12,705; 12,700; 12,730; 12,684; 12,669; 12,735	0,999	0,025
5	20	1,025; 1,051; 1,029; 1,033; 1,009; 1,044; 1,039; 1,067; 1,001; 1,017; 0,994; 1,042; 1,012; 1,019; 1,023; 0,990; 1,007; 1,040; 1,049; 0,980	0,95	0,05
6	19	3,809; 3,821; 3,815; 3,800; 3,834; 3,798; 3,790; 3,805; 3,811; 3,795; 3,844; 3,829; 3,817; 3,807; 3,824; 3,789; 3,813; 3,830; 3,826	0,9	0,1
7	18	8,201; 8,220; 8,211; 8,205; 8,218; 8,227; 8,209; 8,199; 8,215; 8,222; 8,202; 8,226; 8,194; 8,243; 8,190; 8,231; 8,224; 8,197	0,99	0,075
8	15	4,344; 4,329; 4,333; 4,349; 4,318; 4,321; 4,354; 4,345; 4,336; 4,311; 4,358; 4,339; 4,326; 4,330; 4,340	0,95	0,1
9	19	7,720; 7,770; 7,743; 7,756; 7,734; 7,750; 7,740; 7,738; 7,747; 7,751; 7,729; 7,749; 7,725; 7,736; 7,719; 7,730; 7,741; 7,753; 7,715	0,9	0,05
10	18	9,001; 9,023; 9,012; 8,990; 8,998; 9,005; 9,014; 9,020; 9,033; 9,041; 9,030; 9,009; 9,034; 9,026; 9,018; 9,028; 9,006; 8,993	0,95	0,025
11	18	24,020; 24,034; 24,016; 24,002; 23,994; 23,989; 24,012; 24,007; 24,019; 24,004; 24,024; 24,027; 24,041; 24,032; 24,009; 24,017; 23,980; 23,996	0,999	0,05
12	19	6,504; 6,523; 6,512; 6,542; 6,490; 6,509; 6,517; 6,533; 6,529; 6,487; 5,525; 6,500; 6,511; 6,526; 6,496; 6,530; 6,515; 6,502; 6,518	0,95	0,1

Варіант завдання	Число вимірювань, n	Результати спостережень U, B	Довірча ймовірність, $P_{\text{дов.}}$	Рівень значущості, α
13	17	10,777; 10,749; 10,796; 10,760; 10,779; 10,753; 10,766; 10,780; 10,764; 10,757; 10,773; 10,769; 10,750; 10,758; 10,770; 10,768; 10,755	0,9	0,075
14	20	18,022; 18,002; 18,011; 17,990; 18,043; 17,989; 18,025; 18,041; 17,977; 17,969; 18,005; 18,019; 17,984; 17,975; 18,055; 18,040; 18,003; 18,038; 17,986; 18,009	0,99	0,05
15	18	15,505; 15,530; 15,549; 15,515; 15,520; 15,527; 15,490; 15,476; 15,509; 15,537; 15,541; 15,533; 15,524; 15,488; 15,497; 15,550; 15,531; 15,494	0,95	0,025

Додаток Б
Шаблон титульного аркушу

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ ІМЕНІ ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»
Кафедра конструювання електронно-обчислювальної апаратури
факультету електроніки

ОСНОВИ МЕТРОЛОГІЇ

Розрахункова робота

Опрацювання результатів прямих вимірювань
з багаторазовими незалежними спостереженнями

Виконав студент

групи ДК-____

_____ *ПІБ* _____

Варіант № _____

Дата виконання: __. __. 202__

Перевірив: *ПІБ викладача*

Київ – 202__