УДК 517.3+519.65

В.П. Денисюк, Л.В. Рибачук

КЛАС МЕТОДІВ НАБЛИЖЕНОГО ДРОБОВОГО ІНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ

Вступ

У багатьох випадках при практичних обчисленнях доводиться визначати дробові похідні та інтеграли від досить складних функцій. Проте операції дробового диференціювання та інтегрування навіть від порівняно простих функцій виконуються досить складно. Оскільки це значною мірою стримує впровадження методів теорії дробового інтегро-диференціювання в інженерну практику, актуальним є питання про методи наближеного обчислення результатів виконання цих операцій. У даній статті розглядається клас методів наближеного обчислення дробових похідних та інтегралів у розумінні Ліувілля та Вейля, який базується на інтерполяції функцій тригонометричними многочленами та тригонометричними сплайнами.

При наближеному інтегро-диференціюванні знаходять дробові похідні та інтеграли функцій, використовуючи лише значення цих функцій в окремих точках. У таких випадках звичайно говорять про чисельне інтегро-диференціювання.

У досить загальному випадку задачу чисельного інтегро-диференціювання можна сформулювати таким чином. Нехай на відрізку $[a, b]$ задано довільну сітку Δ_N і нехай у вузлах цієї сітки відомі значення функції $f(t)$, $f(t) \in$ $\in C^m[a, b]$, $m = 1, 2, \ldots$ Ставиться задача про оцінювання похідної порядку α функції $f(t)$ (α в загальному випадку неціле).

Задача чисельного диференціювання для цілих значень α має давню історію; різні аспекти цієї задачі досить детально висвітлено в численних підручниках (див., наприклад, [1, 2]).

Як відомо, загальний метод отримання формул чисельного інтегро-диференціювання полягає в тому, що функцію $f(t), t \in [a, b]$, подають у вигляді

$$f(t) = \varphi_N^*(t) + R_N(t), \qquad (1)$$

де $\varphi_N^*(t)$ – функція, що наближує вихідну функцію $f(t)$ в тому чи іншому розумінні на сітці Δ_N; $R_N(t)$ – залишковий член.

Рівність (1) диференціюють, інтегрують і наближено подають у вигляді

$$D^{(\alpha)} f(t) \approx D^{(\alpha)} \varphi_N(t), \quad I^{(\alpha)} f(t) \approx I^{(\alpha)} \varphi_N(t).$$

Похибки отриманих таким чином наближених рівностей визначаються відповідно значеннями величин

$$D^{(\alpha)}(R_N t), \quad I^{(\alpha)}(R_N t).$$

Наведений нами загальний метод отримання формул чисельного інтегро-диференціювання називають методом аналітичної заміни. Залежно від вибраного способу побудови функції $\varphi_N^*(t)$, що наближує функцію $f(t)$ на сітці Δ_N, отримують ті чи інші класи формул чисельного інтегро-диференціювання.

Постановка задачі

Метою статті є розробка чисельних методів дробового інтегро-диференціювання, заснованих на попередньому наближенні функцій тригонометричними многочленами та тригонометричними сплайнами.

Вихідні положення

Для нецілих значень α задача чисельного інтегро-диференціювання має ряд особливостей, які визначаються насамперед такими факторами:

а) наявністю кількох підходів до визначення дробового інтегро-диференціювання;

б) відсутністю методик наближення функцій із врахуванням їх подальшого дробового інтегро-диференціювання;

в) відсутністю методики оцінювання похибок чисельного дробового інтегро-диференціювання.

Розглянемо перелічені фактори більш детально.

Як відомо [3], існують різні варіанти введення операцій дробового інтегро-диференціювання, зокрема підходи Ліувілля, Рімана–Ліувілля, Грюнвальда–Лєтнікова, Адамара, Вейля та їх різноманітні модифікації. Деякі з цих підходів на певних класах функцій приводять до однакових результатів; зокрема, дробове інтегро-диференціювання тригонометричних функцій у розумінні Ліувілля збігається з дробовим інтегро-диференціюванням таких же функцій у розумінні Вейля.

Розглядаючи другий фактор, відзначаємо, що одними з найбільш поширених методів наближення функцій є методи, засновані на використанні як наближувальні функції алгебричних і тригонометричних многочленів та їх модифікацій. У даній статті обмежимось розглядом виконання операцій дробового інтегро-диференціювання в розумінні Ліувілля–Вейля лише над тригонометричними рядами, тригонометричними многочленами та тригонометричними сплайнами.

Розглядаючи, нарешті, питання оцінювання похибки чисельного дробового інтегро-диференціювання, насамперед відзначаємо той факт, що практично у всіх відомих випадках цілочисельного диференціювання збільшення порядку оцінюваної похідної веде до збільшення похибки її оцінювання в метриці простору C. Враховуючи цей факт, цілком природно припустити, що

$$D^{(\alpha)}(R_N t) \le D^{(E[\alpha]+1)}(R_N t)\,, \tag{2}$$

де $E[\alpha]$ – функція Антьє від α (ціла частина числа α).

Таке припущення дає можливість використовувати при оцінюванні похибок чисельного інтегро-диференціювання для нецілих значень α відомі результати оцінювання похибок чисельного інтегро-диференціювання для цілих значень $E[\alpha]+1$.

Дробове інтегро-диференціювання за Ліувіллем. Як відомо [3], дробові інтеграли в розумінні Ліувілля порядку α ($\alpha > 0$) функції $f(x)$ визначаються таким чином:

$$\begin{aligned} I_+^{\alpha}(f)(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{-\infty}^{x}\frac{f(t)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}},\\ I_-^{\alpha}(f)(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{x}^{\infty}\frac{f(t)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}}. \end{aligned} \tag{3}$$

Дробова похідна за Ліувіллем порядку α ($0 < \alpha < 1$) визначається в такому вигляді:

$$D_+^{\alpha}(f)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{x}\frac{f(t)\,dt}{(x-t)^{\alpha}},$$

$$D_-^{\alpha}(f)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_{x}^{\infty}\frac{f(t)\,dt}{(x-t)^{\alpha}}. \tag{4}$$

Надалі, не втрачаючи загальності, обмежимося розглядом лише перших частин формул (3), (4), опускаючи при цьому нижній індекс:

$$I_+^{\alpha}(f)(x) = I^{\alpha}(f)(x),\;\; D_+^{\alpha}(f)(x) = D^{\alpha}(f)(x)\,.$$

Можна показати [3], що

$$\begin{aligned} I^{\alpha}(\sin bx) &= b^{-\alpha}\sin\left(bx - \frac{\pi\alpha}{2}\right),\\ I^{\alpha}(\cos bx) &= b^{-\alpha}\cos\left(bx - \frac{\pi\alpha}{2}\right). \end{aligned} \tag{5}$$

Аналогічно матимемо

$$\begin{aligned} D^{\alpha}(\sin bx) &= b^{\alpha}\sin\left(bx + \frac{\pi\alpha}{2}\right),\\ D^{\alpha}(\cos bx) &= b^{\alpha}\cos\left(bx + \frac{\pi\alpha}{2}\right). \end{aligned} \tag{5a}$$

Дробове інтегро-диференціювання за Вейлем. Перейдемо тепер до розгляду дробового інтегро-диференціювання в розумінні Вейля. Нехай періодичну з періодом 2π функцію $\varphi(x)$ подано її рядом Фур'є:

$$\varphi(x) = \sum_{|k|=1}^{\infty} c_k e^{ikx}\,,\;\; c_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(x)\,e^{-ikx}\,dx\,. \tag{6}$$

Зауважимо, що завжди вважається, що

$$c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(x)\,dx = 0\,.$$

За Вейлем, дробове інтегрування порядку α функції e^{ikx} виконується таким чином:

$$I^{(\alpha)}(e^{ikx}) = \frac{e^{ikx}}{(ik)^{\alpha}} = (ik)^{-\alpha}e^{ikx}, \tag{7}$$

а дробове диференціювання того ж порядку – за формулою

$$D^{(\alpha)}(e^{ikx}) = (ik)^{\alpha}e^{ikx}. \tag{8}$$

Зрозуміло, що при $\alpha > 0$ маємо операцію дробового диференціювання, а при $\alpha < 0$ – дробового інтегрування. Слід враховувати, що операцію дробового диференціювання можна виконувати лише за певних умов щодо збіжності отримуваних рядів.

Використовуючи означення (7), (8), дробове інтегрування (при $\alpha < 0$) і дробове диференціювання (при $\alpha > 0$) функції $\varphi(x)$, поданої рядом Фур'є, можна розглядати як згортку

$$I^{(\alpha)}(\varphi(x)) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(x-t)\,\Phi_\alpha(t)\,dt\,, \qquad (9)$$

де

$$\Phi_\alpha(t) = \sum_{|n|=1}^{\infty} \frac{e^{int}}{(in)^\alpha} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nt + \pi\alpha/2)}{n^\alpha}\,.$$

Часто саме означення (9) називають дробовим інтегралом Вейля (див., наприклад, [4]).

Легко бачити, що на класах 2π-періодичних функцій з нульовим середнім дробові інтеграли Ліувілля і Вейля збігаються.

Надалі, не втрачаючи загальності, при інтегро-диференціюванні тригонометричних многочленів та їх модифікацій будемо використовувати формули (5), (5а).

У багатьох випадках періодична з періодом 2π функція $f(x)$ має досить складний аналітичний вираз і побудова її ряду Фур'є є проблематичною; відповідно, задача інтегро-диференціювання такої функції є досить складною задачею. У таких випадках доцільно використовувати метод аналітичної заміни, про який мова йшла вище. Так, зокрема, функцію $f(x)$ можна наближати в тому чи іншому розумінні тригонометричними многочленами або тригонометричними сплайнами (які детально викладені в [5]) і лише потім виконувати операції дробового інтегро-диференціювання.

Обмежимось розглядом випадку, коли функцію $f(x)$ наближають інтерполяційними тригонометричними многочленами та тригонометричними сплайнами.

Інтегро-диференціювання тригонометричного інтерполяційного многочлена

Покладаючи $N = 2n+1$, задаємо на проміжку $[0, 2\pi]$ сітку Δ_N таким чином:

$$\Delta_N = \{t_j\}_{j=1}^{N}, \;\; t_j = \frac{2\pi}{N}(j-1)\,.$$

Відомо, що тригонометричний многочлен $T_n(t)$, який інтерполює функцію $f(t)$ у вузлах сітки Δ_N, має вигляд

$$T_n(t) = \frac{a_0^*}{2} + \sum_{k=1}^{n}[a_k^* \cos kt + b_k^* \sin kt]\,,$$

де коефіцієнти $a_0^*, a_k^*, b_k^*, k = 1, 2, \ldots, n,$ визначаються за формулами

$$a_0^* = \frac{2}{N}\sum_{j=1}^{N} f(t_j)\,,\;\; a_k^* = \frac{2}{N}\sum_{j=1}^{N} f(t_j)\cos kt_j\,,$$

$$b_k^* = \frac{2}{N}\sum_{j=1}^{N} f(t_j)\sin kt_j\,,\;\; k = 1, 2, \ldots, n.$$

Зауважимо, що, взагалі кажучи, інтерполяційний многочлен $T_n(t)$ інтерполює періодичну з періодом 2π функцію $f(t)$ у $N+1$ вузлах. Пояснюється це тим, що функція $f(t)$ у точках $t = 0$ і $t = 2p$ в силу періодичності набуває однакових значень. Оскільки тригонометричний многочлен також є періодичною функцією, то з того, що він інтерполює функцію в точці $t = 0$, випливає, що інтерполяція здійснюється і в точці $t = 2p$.

Якщо ж інтерпольована функція сама є тригонометричним многочленом, порядок якого не перевищує n, то інтерполяційний тригонометричний многочлен збігається з цією функцією.

Як було зазначено раніше, розглядаємо лише періодичні функції з нульовим середнім на періоді, з чого випливає, що завжди покладається $a_0^* = 0$. Відповідно, тригонометричний многочлен $T_n(t)$, який інтерполює функцію $f(t)$ у вузлах сітки Δ_N, має вигляд

$$T_n(t) = \sum_{k=1}^{n}[a_k^* \cos kt + b_k^* \sin kt]\,.$$

Виконуючи операції дробового інтегро-диференціювання порядку α тригонометричного многочлена $T_n(t)$, отримуємо

$$I^\alpha(T_n(t)) = \sum_{k=1}^{n} k^{-\alpha}\left[a_k^* \cos\left(kt - \frac{\pi\alpha}{2}\right) + b_k^* \sin\left(kt - \frac{\pi\alpha}{2}\right)\right],$$

$$D^\alpha(T_n(t)) = \sum_{k=1}^{n} k^{\alpha}\left[a_k^* \cos\left(kt + \frac{\pi\alpha}{2}\right) + b_k^* \sin\left(kt + \frac{\pi\alpha}{2}\right)\right].$$

Легко бачити, що при цілих значеннях α отримуємо звичайні операції інтегро-диференціювання.

Інтегро-диференціювання тригонометричного інтерполяційного сплайна

Інший клас формул чисельного диференціювання можна отримати у випадку, коли як наближувальні функції використовуються прості тригонометричні сплайни. Зауважимо, що однією з важливих переваг тригонометричних сплайнів є можливість зручного керування їх диференціальними властивостями. Не обмежуючи загальності, розглянемо використання лише тригонометричного сплайна першого роду $St_r(f,\Delta_N,t)$.

Отже, нехай на відрізку $[0,2\pi]$ задано рівномірну сітку Δ_N і нехай відомо коефіцієнти $a_0^*, a_k^*, a_k^*,\ k=1,2,\ldots,n$, тригонометричного многочлена $T_n(t)$, що інтерполює функцію $f(t)$ з нульовим середнім у вузлах цієї сітки. Нагадаємо, що простий тригонометричний сплайн 1-го роду, що інтерполює таку функцію $f(t)$ у вузлах сітки Δ_N, має вигляд

$$St_r(f,\Delta_N,t)=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k(r,N)[a_k^*\Phi_k^c(r,N,t)+b_k^*\Psi_k^s(r,N,t)], \quad (10)$$

де

$$\Phi_k^c(r,N,t)=$$

$$=\frac{\cos kt}{k^{r+1}}+\sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{\cos(mN+k)t}{(mN+k)^{r+1}}+\frac{\cos(mN-k)t}{(mN-k)^{r+1}}\right],$$

$$\Psi_k^s(r,N,t)=\frac{\sin kt}{k^{r+1}}+$$

$$+\sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{\sin(mN+k)t}{(mN+k)^{r+1}}-\frac{\sin(mN-k)t}{(mN-k)^{r+1}}\right],$$

$$[\alpha_k(r,N)]^{-1}=\frac{1}{k^{r+1}}+$$

$$+\sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{1}{(mN+k)^{r+1}}+\frac{1}{(mN-k)^{r+1}}\right].$$

Диференціюючи (10), отримуємо

$$D^\alpha[St_r(f,\Delta_N,t)]=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\tilde{a}_k(r,N)\{a_k^*D^\alpha[\Phi_k^c(r,N,t)]+$$

$$+b_k^*D^\alpha[\Psi_k^s(r,N,t)]\}. \quad (11)$$

Обчислимо похідні функцій $\Phi_k^c(r,N,t)$ і $\Psi_k^s(r,N,t)$, що входять до правої частини (11). Враховуючи визначення цих функцій, отримуємо

$$D^\alpha[\Phi_k^c(r,N,t)]=\frac{\cos(kt+\pi\alpha/2)}{k^{r-\alpha}}+$$

$$+\sum_{m=1}^{\infty}\left\{\frac{\cos[(mN+k)t+\pi\alpha/2]}{(mN+k)^{r-\alpha}}+\right.$$

$$\left.+\frac{\cos[(mN+k)t+\pi\alpha/2]}{(mN-k)^{r-\alpha}}\right\}, \quad (12)$$

$$D^\alpha[\Psi_k^s(r,N,t)]=\frac{\sin(kt+\pi\alpha/2)}{k^{r-\alpha}}+$$

$$+\sum_{m=1}^{\infty}\left\{\frac{\sin[(mN+k)t+\pi\alpha/2]}{(mN+k)^{r-\alpha}}-\right.$$

$$\left.-\frac{\sin[(mN+k)t+\pi\alpha/2]}{(mN-k)^{r-\alpha}}\right\}. \quad (13)$$

Отже, дробова похідна тригонометричного сплайна знаходиться за виразом (11), де функції $D^\alpha[\Phi_k^c(r,N,t)]$ і $D^\alpha[\Psi_k^s(r,N,t)]$ визначаються за формулами (12), (13).

Розмірковуючи аналогічно, отримуємо, що інтеграл дробового порядку знаходиться за формулою

$$I^\alpha[S_{1,1}t_r(f,\Delta_N^I,t)]=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\tilde{a}_k^I(r,N)\{a_k^*I^\alpha[\Phi_k^c(r,N,t)]+b_k^*I^\alpha[\Psi_k^s(r,N,t)]\},$$

де функції $I^\alpha[\Phi_k^c(r,N,t)]$ і $I^\alpha[\Psi_k^s(r,N,t)]$ мають вигляд

$$I^\alpha[\Phi_k^c(r,N,t)]=\frac{\cos(kt-\pi\alpha/2)}{k^{r+\alpha}}+$$

$$+\sum_{m=1}^{\infty}\left\{\frac{\cos[(mN+k)t-\pi\alpha/2]}{(mN+k)^{r+\alpha}}+\right.$$

$$\left.+\frac{\cos[(mN+k)t-\pi\alpha/2]}{(mN-k)^{r+\alpha}}\right\},$$

$$I^\alpha[\Psi_k^s(r,N,t)]=\frac{\sin(kt-\pi\alpha/2)}{k^{r+\alpha}}+$$

$$+\sum_{m=1}^{\infty}\left\{\frac{\sin[(mN+k)t-\pi\alpha/2]}{(mN+k)^{r+\alpha}}-\right.$$

$$\left.-\frac{\sin[(mN+k)t-\pi\alpha/2]}{(mN-k)^{r+\alpha}}\right\}.$$

Зауважимо, що при цілих значеннях α отримуємо операції звичайного інтегро-диференціювання.

Оцінка похибки чисельного диференціювання. Нехай функція $f(t)$, яка має достатню кількість неперервних похідних, інтерполюється на сітці Δ_N тригонометричним сплайном $St_r(f,\Delta_N,t)$. Тоді похибки чисельного диференціювання для випадку $r=3$ подаються виразами:

для $\alpha \le 1$

$$\| St_3'(f,\Delta_N,t)-f'(t)\|_C \le \frac{1}{24}h^3\| f^{(4)}\|_C = o(h^3);$$

для $1<\alpha\le 2$

$$\| S_3''(f,\Delta_N,t)-f''(t)\|_C \le \frac{3}{8}h^2\| f^{(4)}\|_C = o(h^2);$$

для $2<\alpha\le 3$

$$\| S_3'''(f,\Delta_N,t)-f'''(t)\|_C \le h\| f^{(4)}\|_C = o(h).$$

Легко бачити, що ці формули при цілих значеннях α фактично оцінюють похибку чисельного диференціювання для випадку, коли функція $f(t)$ інтерполюється простим поліноміальним кубічним сплайном $S_3(f,\Delta_N,t)$ (див. [6]). Однак, враховуючи те, що $S_3(f,\ \Delta_N,\ t)\equiv$ $\equiv St_3(f,\Delta_N,t)$ (див. [5]), ці формули можна перенести і на розглядуваний випадок.

У багатьох випадках у застосуваннях доцільно уникати операцій диференціювання інтерполяційних функцій, застосовуючи інший підхід до оцінювання похідних. Цей підхід полягає в тому, що з використанням відомих методів, будуються оцінки похідних у вузлах інтерполяційної сітки, а потім – функції, що інтерполюють ці значення у вузлах тієї ж сітки. Часто такий метод приводить до кращих результатів, ніж безпосереднє диференціювання інтерполяційних функцій. Це пояснюється тим, що у вузлах інтерполяції графік інтерполяційних функцій звичайно перетинають графік наближуваної функції, і, відповідно, значення похідних у вузлах інтерполяції можуть істотно відрізнятися. З цієї точки зору вузли інтерполяції є найгіршими точками для оцінювання похідних методом диференціювання інтерполюючих функцій. Навпаки, в точках, розміщених усередині відрізків, обмежених вузлами інтерполяційних сіток, оцінки похідних, побудованих методом диференціювання інтерполюючих функцій, можуть бути досить точними.

Таким чином, можна зробити висновок про доцільність застосування в задачах оцінювання похідних переважно тригонометричних сплайнів, які припускають певну свободу у виборі вузлів інтерполяційних сіток.

Необхідно зауважити, що в багатьох випадках порядок точності формул чисельного диференціювання можна підвищити, якщо при їх побудові як наближувальні функції використати згладжуючі тригонометричні сплайни [5].

Висновки

У статті запропоновано клас наближених методів дробового інтегро-диференціювання в розумінні Ліувілля та Вейля, які полягають у тому, що функція попередньо наближується лінійними комбінаціями тригонометричних функцій гармонічних частот; як такі комбінації можуть виступати тригонометричні ряди Фур'є, інтерполяційні тригонометричні многочлени та інтерполяційні тригонометричні сплайни. Надалі операції дробового інтегро-диференціювання виконуються над цими наближеннями стандартним чином.

Нами запропоновано підхід до оцінки похибки дробового диференціювання; наведено деякі оцінки похибок, які базуються на тому, що тригонометричні сплайни, розглянуті в статті, збігаються з простими поліноміальними сплайнами.

Оскільки застосування наближених методів дробового інтегро-диференціювання значно спрощує виконання цих операцій, можна очікувати широке впровадження таких методів в інженерну практику.

В.П. Денисюк, Л.В. Рыбачук

КЛАСС МЕТОДОВ ПРИБЛИЖЕННОГО ДРОБНОГО ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

Рассмотрен класс методов приближенного вычисления дробных производных и интегралов в смысле Лиувилля и Вейля, который основан на интерполяции функций тригонометрическими многочленами и тригонометрическими сплайнами.

V.P. Denysiuk, L.V. Rybachuk

A CLASS OF APPROXIMATE FRACTIONAL INTEGRO-DIFFERENTIATION

The study examines a class of methods of approximate calculation of fractional derivatives and Liouville-Weyl integrals. It is based on interpolation of functions by trigonometric polynomials and trigonometric splines.

1. *Березин И.С., Жидков Н.П.* Методы вычислений. Т. 1. – М.: Физматгиз, 1965. – 464 с.
2. *Волков Е.А.* Численные методы. – М.: Наука, 1987. – 248 с.
3. *Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.* Интегралы и производные дробного порядка и их некоторые приложения. – Минск: Наука и техника, 1987. – 688 с.
4. *Ахиезер Н.И.* Лекции по теории аппроксимации. – М.: Наука, 1965. – 408 с.
5. *Денисюк В.П.* Сплайни та сигнали. – К.: ЗАТ "ВІпол", 2007. – 228 с.
6. *Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л.*. Методы сплайн-функций. – М.: Наука, 1980. – 352 с.

Рекомендована Радою
фізико-математичного факультету
НТУУ "КПІ"

Надійшла до редакції
31 травня 2010 року