

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ ІМЕНІ ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

ТЕОРІЯ КЕРУВАННЯ І ПРОГНОЗУВАННЯ СКЛАДНИХ СИСТЕМ

Рекомендації до виконання курсової роботи

Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для здобувачів ступеня магістра
за освітньою програмою «Системний аналіз і управління»
спеціальності 124 Системний аналіз

Укладач: В. Д. Романенко

Електронне мережеве навчальне видання

2-ге видання, перероблене

Київ
КПІ ім. ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО
2023

УДК 681.5 (075.8)

Т33

Укладач: *Романенко Віктор Демидович, д-р техн. наук, професор*

Рецензент *Мухін В.Є., д-р техн. наук, професор,
завідувач кафедри системного проєктування ННПСА
КПІ ім. Ігоря Сікорського*

Відповідальний
редактор *Тимошук О.Л., канд. техн. наук, доцент*

*Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
(протокол № 4 від 01.02.2024 р.)*

*за поданням вченої ради Навчально-наукового інституту прикладного системного аналізу
(протокол № 11 від 18.12.2023 р.)*

Т33 **Теорія керування і прогнозування складних систем** [Електронний ресурс] : рек. до виконання курсової роботи : навч. посіб. для здобувачів ступеня магістра за освіт. програмою «Системний аналіз і управління» спец. 124 Системний аналіз / КПІ ім. Ігоря Сікорського ; уклад.: В. Д. Романенко. – 2-ге вид., переробл. – Електрон. текст. дані (1 файл). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2023. – 64 с.

В навчальному посібнику викладено методику прогнозування змінних дисперсій та стандартних відхилень вихідних координат процесів, описаних авторегресійними моделями з різнометровою дискретизацією.

Посібник призначений для студентів, що навчаються за другим (магістерським) рівнем вищої освіти за спеціальністю 124 Системний аналіз.

УДК 681.5 (075.8)

Реєстр. № НП 23/24-250. Обсяг 2,8 авт. арк.

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
проспект Берестейський, 37, м. Київ, 03056
<https://kpi.ua>

Свідectво про внесення до Державного реєстру видавців, виготовлювачів
і розповсюджувачів видавничої продукції ДК № 5354 від 25.05.2017 р.

© КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2023

З М І С Т

Вступ.....	4
Розділ 1. Завдання до курсової роботи та загальні методичні вказівки	6
Розділ 2. Розробка різнотемпових моделей авторегресії і ковзного середнього (АРКС) [2, 3]	11
Розділ 3. Прогнозування умовної дисперсії гетероскедастичних процесів на основі моделі процесу з однотемповою дискретизацією шляхом побудови моделі ARCH.....	16
Розділ 4 Прогнозування максимальної вибіркової умовної дисперсії на основі моделей процесів з однотемповою дискретизацією [4]	17
Розділ 5. Прогнозування максимальних вибірових умовних дисперсій багатовимірних процесів з однотемповою дискретизацією	20
Розділ 6. Прогнозування умовної дисперсії на основі моделей процесів з різнотемповою дискретизацією	22
Розділ 7. Прогнозування максимальної вибіркової умовної дисперсії на основі моделей процесів з різнотемповою дискретизацією [4].....	25
Розділ 8. Прогнозування максимальних вибірових умовних дисперсій багатовимірних процесів з різнотемповою дискретизацією [4, 5].....	27
Розділ 9. Розробка моделі GARCH при періоді дискретизації $h = mT_0$ [6].....	30
Розділ 10. Прогнозування максимальних вибірових умовних дисперсій нев'язок співвідношень координат багатовимірних процесів з різнотемповою дискретизацією [7].....	35
Розділ 11. Адаптивна настройка коефіцієнтів моделей GARCH [5, 6].....	41
Розділ 12. Прогнозування одновимірних стаціонарних процесів на основі моделей авторегресії і ковзного середнього з різнотемповою дискретизацією [2, 3].....	47
Розділ 13. Прогнозування багатовимірних стаціонарних процесів на основі матричних моделей авторегресії і ковзного середнього з різнотемповою дискретизацією [2, 3]	50
Розділ 14. Прогнозування нестаціонарних процесів на основі моделей авторегресії і інтегрованого ковзного середнього з різнотемповою дискретизацією [2, 3]	55
Розділ 15. Синтез та адаптивна настройка функцій прогнозування динамічних процесів у приростах змінних для моделей з різнотемповою дискретизацією [8]	57
Список використаних джерел	63

Вступ

Дисперсію та стандартне відхилення часто використовують як міру ризику при дослідженні фінансово-економічних процесів. При дослідженні фінансових процесів дисперсію та стандартне відхилення використовують як міру волатильності (мінливості) процесу.

Дисперсія фінансово-економічних і соціальних процесів може змінюватися в часі. Процеси зі змінною в часі дисперсією називають гетероскедистичними. Ці процеси відносяться до широкого класу нестационарних процесів, таких як:

- процеси зі змінною дисперсією;
- процеси, які характеризуються змінними у часі математичним сподіванням та змінною дисперсією одночасно;
- процеси зі змінною коваріацією;
- процеси з детермінованими і стохастичними трендами.

Оскільки дисперсія змінюється за часом, то необхідно мати таку математичну модель, яка дозволить адекватно описувати динаміку зміни дисперсії і прогнозувати її значення на один або більше періодів дискретизації вперед.

Для опису динаміки стаціонарних процесів у курсовій роботі використовуються моделі авторегресії і ковзного середнього (АРКС), а нестационарних процесів — авторегресії і інтегрованого ковзного середнього (АРІКС).

При прогнозуванні дисперсій віддають перевагу умовному прогнозуванню, яке ґрунтується на відомих поточних та минулих значеннях ряду.

Одним із простих підходів для опису динаміки умовної дисперсії основної змінної застосовуються моделі авторегресії АР (q) до квадратів оцінок залишків, наприклад [1]:

$$\begin{aligned}\hat{\xi}^2(k) = & a_1 \hat{\xi}^2(k-1) + a_2 \hat{\xi}^2(k-2) + \dots + \\ & + a_q \hat{\xi}^2(k-q) + a_0 + v(k),\end{aligned}\tag{0.1}$$

де $v(k)$ — процес білого шуму з нульовим середнім. Це рівняння можна використовувати для прогнозування умовної дисперсії на один період дискретизації T_0 вперед:

$$M_k[\hat{\xi}^2(k+1)] = a_1 \hat{\xi}^2(k) + a_1 \hat{\xi}^2(k-1) + \dots + \\ + a_q \hat{\xi}^2(k-q+1) + a_0.$$

Оскільки рівняння (0.1) може бути побудоване при умові, що $\text{var}\{y(k)\} \neq \text{const}$, то його називають *autoregressive conditional heteroskedasticity* (*ARCH*).

Наступним розширенням моделі ARCH є описання динаміки умовної дисперсії як процесу АРКС, яка складається з двох частин — авторегресії та ковзного середнього відносно умовної дисперсії гетероскедастичного процесу. Ця модель називається *GARCH* (*generalized autoregressive conditional heteroskedasticity*).

Указані моделі використовуються у курсовій роботі для прогнозування умовних дисперсій вихідних координат процесів.

Розділ 1. Завдання до курсової роботи та загальні методичні вказівки

1.1. На основі заданої моделі авторегресії і ковзного середнього (АРКС) стохастичного процесу з однотемповою дискретизацією (2.1) або (2.9) на основі методики, приведеної в розділі 2, розробити модель процесу з різнотемповою дискретизацією (2.4) або (2.13) при заданому коефіцієнті m у співвідношенні (2.2) $h = mT_0$.

1.2. На основі заданої моделі АРКС з однотемповою дискретизацією (2.1) або (2.9) на основі методики розділу 3 розробити модель ARCH і виконати прогнозування умовної дисперсії на один період дискретизації T_0 .

На основі розробленої студентом комп'ютерної програми побудувати графік прогнозованої умовної дисперсії (3.5) та порівняти його з графіком розрахованої умовної дисперсії на основі виразу (3.3).

Дослідити точність прогнозування за критерієм:

$$\begin{aligned} RSME\{\hat{\xi}^2[(k+1)T_0]\} = \\ = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \{\hat{\xi}^2[(k+1)T_0]\} - \hat{\xi}_p^2[(k+1)T_0]}, \end{aligned} \quad (1.1)$$

де $\hat{\xi}_p^2[(k+1)T_0]$ — обчислене значення умовної дисперсії на основі (3.3) для дискретного відліку $[(k+1)T_0]$.

1.3. На основі заданої моделі АРКС (3.1) за методикою, описаною у розділі 4, виконати розробку комп'ютерної програми для побудови моделі динаміки максимальної вибіркової умовної дисперсії ARCH (4.5).

Виконати прогнозування цієї дисперсії (4.6) на один період T_0 та визначити точність прогнозування на основі критерію

$$RSME\{\hat{\xi}_{\max}^2[(k+1)T_0]\} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \{\hat{\xi}_{\max}^2[(k+1)T_0] - \hat{\xi}_{p_{\max}}^2[(k+1)T_0]\}}, \quad (1.2)$$

де $\hat{\xi}_{p_{\max}}^2[(k+1)T_0]$ — розраховане на основі (4.2), (4.3) значення максимальної вибіркової умовної дисперсії для дискретних відліків $[(k+1)T_0]$.

1.4 На основі заданої моделі АРКС багатовимірною процесу з однотемповою дискретизацією (5.1) за методикою, яка приведена в розділі 5, виконати розробку комп'ютерної програми для побудови моделі ARCH (5.10), яка описує динаміку зміни максимальних вибірових умовних дисперсій (5.10) по кожному каналу багатовимірною процесу.

Виконати прогнозування вказаних дисперсій $\hat{\xi}_{i_{\max}}^2[(k+1)T_0]$ згідно з (5.11) та визначити точність прогнозування для i -го каналу ($i=1,2,\dots,n$) на основі критерію (1.2), де $\hat{\xi}_{p_{i_{\max}}}^2[(k+1)T_0]$ розраховується шляхом (5.6), (5.7), (5.8) для дискретних відліків $[(k+1)T_0]$.

1.5. На основі розробленої в п. 1.1 моделі АРКС з різнометровою дискретизацією для заданого коефіцієнта m побудувати модель ARCH (6.4) і виконати прогнозування умовної дисперсії (6.5) на один великий період дискретизації $h = mT_0$. За критерієм

$$RSME\left\{\hat{\xi}^2\left[\left(\left[\frac{k}{m}\right]+1\right)h\right]\right\} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{\left[\frac{k}{m}\right]=1}^N \left\{\hat{\xi}^2\left[\left(\left[\frac{k}{m}\right]+1\right)h\right] - \hat{\xi}_p^2\left[\left(\left[\frac{k}{m}\right]+1\right)h\right]\right\}^2} \quad (1.3)$$

дослідити точність прогнозування, де $\hat{\xi}_p^2\left[\left(\left[\frac{k}{m}\right]+1\right)h\right]$ розраховується на основі

(6.3) для дискретних відліків $\left[\left(\left[\frac{k}{m}\right]+1\right)h\right]$.

1.6. На основі методики, розробленої в розділі 7, для моделі АРКС з різнометровою дискретизацією при заданому в п. 1.1 коефіцієнті m , побудувати модель ARCH (7.5), яка описує динаміку максимальної вибіркової умовної дисперсії $\hat{\xi}_{\max}^2 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right]$. На основі розробленої комп'ютерної програми виконати прогнозування цієї дисперсії на один період дискретизації $h = mT_0$ та дослідити точність прогнозування на основі критерію

$$RSME\{\hat{\xi}_{\max}^2[(k+1)T_0]\} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{\left[\frac{k}{m} \right]=1}^N \left\{ \hat{\xi}_{\max}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] + 1 \right) h \right] - \hat{\xi}_{p_{\max}}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] + 1 \right) h \right] \right\}} \quad (1.4)$$

де $\hat{\xi}_{p_{\max}}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] + 1 \right) h \right]$ розраховується шляхом (7.2), (7.3) для дискретних відліків $\left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] + 1 \right) h \right]$.

1.7. Виконати програму п. 1.6 для багатовимірного процесу АРКС з різнометровою дискретизацією (8.1) на основі методики прогнозування, описаної в розділі 8.

1.8. На основі методики, яка приведена в розділі 9, при заданому коефіцієнті m , поліномі $(1 - \sigma_1 z^{-1} - \dots - \sigma_n z^{-n})$ і моделі АРКС (6.4) розробити модель GARCH (9.10). На основі цієї моделі виконати прогнозування умовної дисперсії на один великий період дискретизації $h = mT_0$ згідно з (9.11).

Дослідити точність прогнозування на основі критерію (1.3), де $\hat{\xi}_p^2 \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] + 1 \right) h \right]$ розраховується на основі (6.3) для дискретних відліків $\left(\left[\frac{k}{m} \right] + 1 \right) h$.

1.9. На основі методики адаптивної настройки, описаної в розділі 11 для першого варіанту, виконати оцінювання вектора невідомих коефіцієнтів $\bar{\theta} = [\hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2, \dots, \hat{\sigma}_n, 1]^T$ за допомогою РМНК (11.6), (11.7), (11.8).

1.10. На основі методики, описаної в розділі 11 для другого варіанту, виконати оцінювання вектора невідомих оптимальних коефіцієнтів моделі GARCH $\hat{\theta} = [(\sigma_1 + \tau_1), (\sigma_1 + \tau_1), \dots, (\sigma_n + \tau_n), \tau_{n+1}, \dots, \tau_{\mu+n}, \sigma_1, \dots, \sigma_n, 1]$ по РМНК (11.6), (11.7), (11.8).

1.11. При оцінених в пп. 1.9, 1.10 коефіцієнтах на основі моделі GARCH (9.10) виконати прогнозування умовної дисперсії на один великий період дискретизації $h = mT_0$ згідно з (9.11). За критерієм (1.3) дослідити точність прогнозування $RSME \left\{ \tilde{\xi}^2 \left[\left(\left\lfloor \frac{k}{m} \right\rfloor + 1 \right) h \right] \right\}$ та порівняти її з точністю, яка була отримана в п. 1.8.

1.12. На основі заданої моделі багатовимірного процесу з різноміною дискретизацією (10.1) по методиці, яка описана в розділі 10, побудувати модель GARCH максимальних вибірових умовних дисперсій нев'язки співвідношень вихідних координат (10.10) для кожного i -го каналу ($i=1,2,\dots,n$). Виконати прогнозування даних дисперсій на один великий період дискретизації $h = mT_0$.

Дослідити точність прогнозування на основі критерію (1.4), де $\hat{\xi}_{p_{i_{\max}}} \left[\left(\left\lfloor \frac{k}{m} \right\rfloor + 1 \right) h \right]$ розраховується згідно з (10.8), (10.9) для дискретних вдліків $\left[\left(\left\lfloor \frac{k}{m} \right\rfloor + 1 \right) h \right]$.

1.13. На основі розробленої в розділі 2 моделі АРКС (2.4) одновимірного процесу з різноміною дискретизацією при заданому коефіцієнті m за допомогою функцій прогнозування (12.5) та (12.8) виконати прогнозування вихідної координати y на один період дискретизації h та на p періодів h .

Дослідити точність прогнозування на основі критеріїв:

$$RSME\{e^2[(r+1)h]\} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{r=1}^N \{y^*[(r+1)h] - y[(r+1)h]\}^2}, \quad (1.5)$$

$$RSME\{e^2[(r+p)h]\} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{r=1}^N \{y^*[(r+p)h] - y[(r+p)h]\}^2}. \quad (1.6)$$

1.14. На основі заданої матричної моделі АРКС багатовимірному процесу (13.1) з різноміною дискретизацією виконати прогнозування координат y_i на час $p_i h_i$ за методикою, приведеною в розділі 13. На основі критерію (1.6) дослідити точність прогнозування для кожного i -го каналу ($i=1,2,\dots,n$).

1.15. На основі заданої моделі АРІКС нестационарного процесу з різноміною дискретизацією за методикою, приведеною в розділі 14, виконати прогнозування вихідної координати на період $h = mT_0$. Дослідити точність прогнозу на основі критерію (1.5).

1.16. На основі заданої динамічної моделі процесу другого порядку з різноміною дискретизацією (15.1) виконати синтез функції прогнозування вихідної координати (15.14) при відомих збуреннях (15.14):

а) виконати прогнозування вихідної координати $y^*[(r+d)h/rh]$ при заданому значенні d ;

б) дослідити точність прогнозування на основі критерію (1.6). При невідомих збуреннях $v(kT_0)$ синтезувати функцію прогнозування у приростах змінних (15.20).

Виконати прогнозування вихідної координати $y^*[(r+d)h/rh]$ на основі (15.20), попередньо реалізувавши адаптивну настройку вектора параметрів функції прогнозування $\bar{\theta}^T = \{1, -a_1, -a_2, f_0, f_1, f_2, f_3, b_0, b_1, b_2, b_3, b_4, a'_0\}$ на основі РМНК (15.24), (15.25), (15.26).

Дослідити точність прогнозування на основі критерію (1.6).

1.17. У розділах 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, в яких виконується прогнозування умовних дисперсій, у вихідних моделях процесів замість збурення у вигляді білого шуму ξ_t застосувати збурення v_t , які є виходом марківського процесу першого порядку $v[(k+1)T_0] = gv(kT_0) + \xi(kT_0)$ при коефіцієнті $g = [0,8 \div 0,95]$.

Виконати прогнозування дисперсій та визначити точність прогнозу при застосуванні указаних збурень на основі методик, приведених в розділах 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11.

Розділ 2. Розробка різнотемпових моделей авторегресії і ковзного середнього (АРКС) [2, 3]

2.1. Вихідна однотемпова модель АРКС $(1, n_b)$ має вигляд:

$$(1 + \alpha_1 z^{-1})y(kT_0) = (1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_{n_b} z^{-n_b})\xi(kT_0) + \delta, \quad (2.1)$$

де $\{\xi(kT_0)\}$ — послідовність вхідних збурень у вигляді дискретного білого шуму з нульовим середнім. Параметр δ визначає рівень процесу. Виберемо збільшений період дискретизації h для вихідної координати y , який визначається співвідношенням

$$h = mT_0, \quad (2.2)$$

де T_0 — базовий період дискретизації, а m — ціле число, яке є більшим за одиницю.

Розглянемо рекурентну процедуру перетворення вихідної моделі (2.1) в різнотемпову при дискретизації вихідної координати y з періодом дискретизації h . Для цього вихідну модель (2.1) запишемо в різницевій формі:

$$y(kT_0) = -\alpha_1 y[(k-1)T_0] + \xi(kT_0) + b_1 \xi[(k-1)T_0] + b_2 \xi[(k-2)T_0] + \dots + b_{n_b} \xi[(k-n_b)T_0] + \delta;$$

а) при $k=1$ будемо мати:

$$y(1 \cdot T_0) = -\alpha_1 y(0T_0) + \xi(1T_0) + b_1 \xi(0T_0) + \delta;$$

б) при $k = 2$ після врахування попереднього кроку:

$$\begin{aligned} y(2 \cdot T_0) = & -\alpha_1 y(1T_0) + \xi(2T_0) + b_1 \xi(1T_0) + b_2 \xi(1T_0) + \\ & + \delta = \alpha_1^2 y(0T_0) + \xi(2T_0) + (b_1 - \alpha_1) \xi(1T_0) \delta + \\ & + (b_2 - \alpha_1 b_1) \xi(0T_0) + (1 - \alpha_1) \delta; \end{aligned}$$

в) при $k = 3$ після врахування попереднього кроку при умові $n_b \geq 3$ будемо мати:

$$\begin{aligned} y(3T_0) = & -\alpha_1 y(2T_0) + \xi(3T_0) + b_1 \xi(2T_0) + \\ & + b_2 \xi(1T_0) + b_3 \xi(0T_0) + \delta = -\alpha_1^3 y(0T_0) + \\ & + \xi(3T_0) + (b_1 - \alpha_1) \xi(2T_0) + (\alpha_1^2 - \alpha_1 b_1 + \\ & + b_2) \xi(1T_0) + (\alpha_1^2 b_1 - \alpha_1 b_2 + b_3) \xi(0T_0) + \\ & + [1 - \alpha_1(1 - \alpha_1)] \delta; \end{aligned}$$

г) при $k = 4$ після врахування попереднього кроку при умові $n_b \geq 4$ дістанемо:

$$\begin{aligned} y(4T_0) = & -\alpha_1 y(3T_0) + \xi(4T_0) + b_1 \xi(3T_0) + \\ & + b_2 \xi(2T_0) + b_3 \xi(1T_0) + b_4 \xi(0T_0) + \delta = \\ & = \alpha_1^4 y(0T_0) + \xi(4T_0) + (b_1 - \alpha_1) \xi(3T_0) + \\ & + (\alpha_1^2 - \alpha_1 b_1 + b_2) \xi(2T_0) + (-\alpha_1^3 + \alpha_1^2 b_1 - \alpha_1 b_2 + b_3) \xi(1T_0) + \\ & + (-\alpha_1^3 b_1 + \alpha_1^2 b^2 - \alpha_1 b_3 + b_4) \xi(0T_0) + \\ & + [1 + \alpha_1^2(1 - \alpha_1) - \alpha_1] \delta. \end{aligned}$$

Продовжуючи рекурентну процедуру до $k = m$, при умові, що $m \geq n_b$, дістанемо різнотемпову модель в узагальненій різницевій формі:

$$\begin{aligned} y\left[\left[\frac{k}{m}\right]h\right] = & -\alpha_1 y\left[\left(\left[\frac{k}{m}\right] - 1\right)h\right] + \xi(kT_0) + c_1 \xi[(k-1)T_0] + \\ & + c_2 \xi[(k-2)T_0] + \dots + c_m \xi[(k-m)T_0] + a_0, \end{aligned} \quad (2.3)$$

де $\left[\frac{k}{m} \right]$ — ціле число від ділення номера дискретного відліку k на коефіцієнт

m . Вираз (2.3) можна записати у вигляді різнотемпової моделі АРКС:

$$A(z_1^{-1})y(rh) = C(z^{-1})\xi(kT_0) + a_0, \quad (2.4)$$

де

$$A(z_1^{-1}) = 1 + a_1 z_1^{-1}, \quad (2.5)$$

$$C(z^{-1}) = 1 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2} + \dots + c_m z^{-m}. \quad (2.6)$$

Співвідношення операторів зворотного зсуву в поліномах (2.5), (2.6) на основі виразу (2.2) буде:

$$z_1^{-1} = z^{-m}. \quad (2.7)$$

Тоді рівність (2.5) набуде вигляду:

$$A(z^{-1}) = 1 + a_1 z^{-m}. \quad (2.8)$$

2.2. Вихідна однотемпова модель АРКС (2.2) має вигляд [4]:

$$(1 + \alpha_1 z^{-1} + \alpha_2 z^{-2})y(kT_0) = (1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2})\xi(kT_0) + \delta, \quad (2.9)$$

де $\{\xi(kT_0)\}$ — послідовність збурень у вигляді дискретного білого шуму з нульовим середнім. Рекурентна процедура перетворення вихідної моделі (2.9) у різнотемпову при дискретизації вихідної координати y з періодом дискретизації $h = 2T_0$ виконана на основі методики, описаної в підрозділі 2.1.

Для цього модель (2.9) зображується в різницевій формі:

$$\begin{aligned} y(kT_0) = & -\alpha_1 y[(k-1)T_0] - \alpha_2 y[(k-2)T_0] + \\ & + \xi(kT_0) + b_1 \xi[(k-1)T_0] + b_2 \xi[(k-2)T_0] + \delta. \end{aligned} \quad (2.10)$$

На основі рекурентної процедури розроблена різнотемпова модель при $h = 2T_0$ в різницевій формі:

$$\begin{aligned}
y\left[\left[\frac{k}{2}\right]h\right] &= a_1 y\left[\left(\left[\frac{k}{2}\right]-1\right)h\right] + a_2 y\left[\left(\left[\frac{k}{2}\right]-2\right)h\right] + \\
&+ \xi\left[\left[\frac{k}{2}\right]h\right] + c_1 \xi\left[\left[\frac{k}{2}\right]h - T_0\right] + c_2 \xi\left[\left[\frac{k}{2}\right]h - 2T_0\right] + \\
&+ c_3 \xi\left[\left[\frac{k}{2}\right]h - 3T_0\right] + c_4 \xi\left[\left[\frac{k}{2}\right]h - 4T_0\right] + a_0, \quad (2.11)
\end{aligned}$$

де $\left[\frac{k}{2}\right]$ — ціле число від ділення номера дискретного відліку на 2. Коефіцієнти

цієї моделі дорівнюють $a_1 = (\alpha_1^2 - 2\alpha_2)$; $a_2 = -\alpha_2^2$; $c_1 = b_1 - \alpha_1$; $c_2 = (-\alpha_1 b_1 + \alpha_2 + b_2)$; $c_3 = (\alpha_2 b_1 - \alpha_1 b_2)$; $c_4 = \alpha_2 b_2$; $a_0 = (1 - \alpha_1 + \alpha_2)\delta$.

Координати $y\left[\left[\frac{k}{2}\right]h\right]$ різнотемпової моделі (2.11) та $y(kT_0)$ вихідної

моделі (2.10) будуть співпадати у вузлових точках відліку $\left[\frac{k}{2}\right]h$. На основі методики, описаної в підрозділі 2.1 модель (2.11) можна перетворити в різнотемпову модель при $h = 4T_0$.

2.3. Розробка різнотемпової моделі при $h = 3T_0$ [4]. При дискретизації вихідної координати y з періодом дискретизації $h = 3T_0$ вихідна однотемпова модель (2.10) на основі методики (підрозділ 2.1) перетворюється до наступної різнотемпової моделі АРКС:

$$\begin{aligned}
y\left[\left[\frac{k}{3}\right]h\right] &= a_1' y\left[\left(\left[\frac{k}{3}\right]-1\right)h\right] + a_2' y\left[\left(\left[\frac{k}{3}\right]-2\right)h\right] + \\
&+ \xi\left[\left[\frac{k}{3}\right]h\right] + c_1' \xi\left[\left[\frac{k}{3}\right]h - T_0\right] + c_2' \xi\left[\left[\frac{k}{3}\right]h - 2T_0\right] + \\
&+ c_3' \xi\left[\left[\frac{k}{3}\right]h - 3T_0\right] + c_4' \xi\left[\left[\frac{k}{3}\right]h - 4T_0\right] +
\end{aligned}$$

$$+ c_5' \xi \left[\left[\frac{k}{3} \right] h - 5T_0 \right] + c_6' \xi \left[\left[\frac{k}{3} \right] h - 6T_0 \right] + a_0',$$

де $\left[\frac{k}{3} \right]$ — ціле число від ділення номера дискретного відліку k на 3.

Коефіцієнти цієї моделі дорівнюють: $a_1' = (-\alpha_1^3 + 3\alpha_1\alpha_2)$; $a_2' = -\alpha_2^3$;

$$c_1 = (b_1 - \alpha_1); c_2' = -(\alpha_1^2 - \alpha_1 b_1 - \alpha_2 + b_2); c_3' = (\alpha_1^2 b_1 - \alpha_1 \alpha_2 - \alpha_2 b_1 - \alpha_1 b_2);$$

$$c_4' = (\alpha_2^2 - \alpha_1 \alpha_2 b_1 + \alpha_1^2 b_2 - \alpha_2 b_2); c_5' = (-\alpha_1 \alpha_2 b_2 + \alpha_2^2 b_1); c_6 = \alpha_2^2 b_2;$$

$$a_0' = (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - \alpha_1 \alpha_2 - \alpha_1 - \alpha_2 + 1) \delta.$$

На основі запропонованої методики (підрозділ 2.1) можна перетворити модель (2.12) в різнотемпову при $h = 6T_0$ або $h = 9T_0$.

У загальному випадку для вихідної моделі АРКС (2.2), (2.9) різнотемпова модель при $h = mT_0$ буде мати такий вигляд [4]:

$$\begin{aligned} y \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] &= a_1'' \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - 1 \right) h \right] + a_2'' y \left[\left(\left[\frac{k}{2} \right] - 2 \right) h \right] + \\ &+ \xi \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] + c_1'' \xi \left[\left[\frac{k}{m} \right] h - T_0 \right] + c_2'' \xi \left[\left[\frac{k}{m} \right] h - 2T_0 \right] + \\ &+ \dots + c_{2m}'' \xi \left[\left[\frac{k}{m} \right] h - 2mT_0 \right] + a_0''. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Розділ 3. Прогнозування умовної дисперсії гетероскедастичних процесів на основі моделі процесу з однотемповою дискретизацією шляхом побудови моделі ARCH

Динаміка процесу описана моделлю АРКС (2.2)

$$y(kT_0) = a_1 y[(k-1)T_0] + a_2 y[(k-2)T_0] + \xi(kT_0) + b_1 \xi[(k-1)T_0] + b_2 \xi[(k-2)T_0] + \delta, \quad (3.1)$$

де $M\{\xi(kT_0)\} = 0$, $M\{\xi^2(kT_0)\} = \sigma_\xi^2$; $M\{\xi(kT_0)y[(k-l)T_0]\} = 0$ $l > 0$ (M — оператор математичного сподівання).

Алгоритм прогнозування умовної дисперсії послідовності $\{y(kT_0)\}$ виконується на основі рекурентної процедури:

а). Визначення умовного математичного сподівання для послідовності $\{y(kT_0)\}$

$$M_{k-1}\{y(kT_0)\} = a_1 y[(k-1)T_0] + a_2 y[(k-2)T_0] + b_1 \xi[(k-1)T_0] + b_2 \xi[(k-2)T_0] + \delta; \quad (3.2)$$

б). Обчислення умовної дисперсії для послідовності $\{y(kT_0)\}$

$$\begin{aligned} M_{k-1}\{\xi^2(kT_0)\} &= \text{var}\{y(kT_0) | y[(k-1)T_0], y[(k-2)T_0]\} = \\ &= M_{k-1}\{[y(kT_0) - a_1 y[(k-1)T_0] - a_2 y[(k-2)T_0] - \\ &\quad - b_1 \xi[(k-1)T_0] - b_2 \xi[(k-2)T_0] - \delta]^2\} = \hat{\xi}^2(kT_0); \end{aligned} \quad (3.3)$$

в). Обчислення ряду умовних дисперсій на основі виразів (3.2), (3.3)

$$\begin{aligned} \hat{\xi}^2[(k-1)T_0] &= M_{k-2}\{[y[(k-1)T_0] - a_1 y[(k-2)T_0] - \\ &\quad - a_2 y[(k-3)T_0] - b_1 \xi[(k-2)T_0] - \\ &\quad - b_2 \xi[(k-3)T_0] - \delta]^2\}, \\ \hat{\xi}^2[(k-2)T_0] &= M_{k-3}\{[y[(k-2)T_0] - a_1 y[(k-3)T_0] - \\ &\quad - a_2 y[(k-4)T_0] - b_1 \xi[(k-3)T_0] - \end{aligned}$$

$$-b_2\xi[(k-4)T_0]-\delta]^2\}$$

$$\begin{aligned}\hat{\xi}^2[(k-q)T_0] = & M_{k-q-1}\{[y[(k-q)T_0]- \\ & -a_1y[(k-q-1)T_0]-a_2y[(k-q-2)T_0]- \\ & -b_1\xi[(k-q-1)T_0]-b_2\xi[(k-q-2)T_0]-\delta]^2\};\end{aligned}$$

г). Побудова математичної моделі динаміки умовних дисперсій у вигляді $AP(q)$ на основі даних обчисленого ряду умовних дисперсій шляхом застосування методу найменших квадратів (МНК)

$$\begin{aligned}\hat{\xi}^2(kT_0) = & \hat{\alpha}_1\hat{\xi}^2[(k-1)T_0] + \hat{\alpha}_2\hat{\xi}^2[(k-2)T_0] + \\ & + \dots + \hat{\alpha}_q\hat{\xi}^2[(k-q)T_0] + \nu(kT_0) + \gamma,\end{aligned}\quad (3.4)$$

де $\gamma(kT_0)$ — процес дискретного білого шуму з нульовим середнім.

Поза як модель (3.4) може бути побудована при умові, що $\text{var}\{y(k)\} \neq \text{const}$, то рівняння (3.4) називається авторегресійним умовно гетероскедастичним (ARCH);

д). Виконання прогнозування умовної дисперсії на основі моделі (3.4) на один період квантування T_0

$$\begin{aligned}\hat{\xi}^2[(k+1)T_0] = & \hat{\alpha}_1\hat{\xi}^2(kT_0) + \hat{\alpha}_2\hat{\xi}^2[(k-1)T_0] + \\ & + \dots + \hat{\alpha}_q\hat{\xi}^2[(k-q+1)T_0].\end{aligned}\quad (3.5)$$

Розділ 4 Прогнозування максимальної вибіркової умовної дисперсії на основі моделей процесів з однотемповою дискретизацією [4]

При змінній дисперсії її максимальне значення необхідно обчислювати на деякому змінному проміжку часу $t = lT_0$ (змінній виборці). При цьому вибірка вхідних і вихідних даних буде зміщуватися вперед з кожним періодом T_0 і дисперсія буде перераховуватися на кожному періоді дискретизації.

Динаміка процесу описана моделлю (3.1). Тоді вибіркове умовне математичне сподівання вихідної координати протягом вибірки l буде визначатися таким чином:

$$\begin{aligned} \frac{1}{l} \sum_{i=k-l+1}^k M_{i-1}[y(iT_0)] &= \frac{1}{l} \{a_1 y[(k-1)T_0] + a_2 y[(k-2)T_0] + \\ &+ b_1 \xi[(k-1)T_0] + b_2 \xi[(k-2)T_0] + \dots + a_1 y[(k-l)T_0] + \\ &+ a_2 y[(k-l-1)T_0] + b_1 \xi[(k-l)T_0] + \\ &+ b_2 \xi[(k-l-1)T_0] + l \cdot \delta\}. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Вибіркова умовна дисперсія $\{y(lT_0)\}$ обчислюється за формулою:

$$\begin{aligned} \text{var}\{y(kT_0) | y[(k-1)T_0], y[(k-2)T_0], \dots, y[(k-l)T_0]\} = \\ = \frac{1}{l} \sum_{i=k-l+1}^k \left\{ y(iT_0) - \frac{1}{l} \sum_{i=k-l+1}^k M_{i-1}[y(iT_0)] \right\}^2. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Для обчислення максимальної вибіркової умовної дисперсії необхідно використовувати ковзну довжину «вікна» $l_{\min}T_0 \leq lT_0 \leq l_{\max}T_0$. При кожному l в указаному діапазоні з дискретністю в один період дискретизації T_0 визначається вибірка умовна дисперсія на основі (4.2) і вибирається її максимальне значення при визначеному значенні вибірки l :

$$\begin{aligned} \hat{\xi}_{\max}^2(kT_0) = \sup_{l_{\min} \leq l \leq l_{\max}} \text{var}\{y(kT_0) | y[(k-1)T_0], \\ y[(k-2)T_0], \dots, y[(k-l)T_0]\}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Максимальне значення вибірки $l_{\max}$ визначається з розрахунку $l_{\max}T_0 = T_{\text{пост}}$, де $T_{\text{пост}}$ — постійна часу процесу, яка характеризує його інерційність.

Для прогнозування максимальної вибіркової умовної дисперсії необхідно розробити її динамічну модель. Для цього на основі (4.1)—(4.3) будується ряд:

$$\begin{aligned} \text{а) } \hat{\xi}_{\max}^2[(k-1)T_0] &= \sup_{l_{\min} \leq l \leq l_{\max}} \text{var}\{y[(k-1)T_0] | y[(k-2)T_0], \\ &\dots, y[(k-l-1)T_0]\}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{б) } \hat{\xi}_{\max}^2[(k-2)T_0] &= \sup_{l_{\min} \leq l \leq l_{\max}} \text{var}\{y[(k-2)T_0] | y[(k-3)T_0], \\
&\quad \dots, y[(k-l-2)T_0]\}; \\
&\vdots \\
\text{в) } \hat{\xi}_{\max}^2[(k-q)T_0] &= \sup_{l_{\min} \leq l \leq l_{\max}} \text{var}\{[(k-q)T_0] | y[(k-q-1)T_0], \\
&\quad \dots, y[(k-q-l)T_0]\}.
\end{aligned} \tag{4.4}$$

На основі побудованого ряду (4.3), (4.4) по МНК позробляється математична модель динаміки максимальної вибіркової умовної дисперсії у вигляді моделі *ARCH*:

$$\begin{aligned}
\hat{\xi}_{\max}^2(kT_0) &= \hat{\alpha}_1 \hat{\xi}_{\max}^2[(k-1)T_0] + \dots + \hat{\alpha}_q \hat{\xi}_{\max}^2[(k-q)T_0] + \\
&\quad + \gamma + v_1(kT_0).
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Тоді на основі моделі (4.5) виконується прогнозування на один період T_0 максимальної вибіркової умовної дисперсії:

$$\begin{aligned}
\hat{\xi}_{\max}^2[(k+1)T_0] &= \hat{\alpha}_1 \hat{\xi}_{\max}^2[(kT_0)] + \dots + \\
&\quad + \hat{\alpha}_q \hat{\xi}_{\max}^2[(k-q+1)T_0] + \gamma.
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Рекурентна процедура прогнозування (4.1)—(4.6) повторюється на кожному періоді дискретизації T_0 .

Розділ 5. Прогнозування максимальних вибірових умовних дисперсій багатовимірних процесів з однотемповою дискретизацією

Модель АРКС з однотемповою дискретизацією багатовимірного процесу має вигляд:

$$\begin{bmatrix} A_{11}(z^{-1}) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ 0 & & A_{nn}(z^{-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(kT_0) \\ \vdots \\ y_n(kT_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11}(z^{-1}) & \cdots & c_{1n}(z^{-1}) \\ \vdots & \ddots & \\ c_{n1}(z^{-1}) & \cdots & c_{nn}(z^{-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1(kT_0) \\ \vdots \\ \xi_n(kT_0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{0_1} \\ \vdots \\ a_{0_n} \end{bmatrix}. \quad (5.1)$$

Структура поліномів в моделі (5.1) є такою:

$$A_{ii}(z^{-1}) = 1 + a_{1_i} z^{-i}, \quad (5.2)$$

$$c_{ij}(z^{-1}) = 1 + c_{1_{ij}} + \dots + c_{r_{ij}} z^{-r_{ij}}, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (5.3)$$

При цьому a_{0_i} — зміщення i -ї вихідної координати, яке дорівнює $A_{ii}(1) \cdot y_{i_{\text{сеп}}}$. Модель (5.1) можна записати в різницевій формі для кожної вихідної координати:

$$\begin{aligned} y_i(kT_0) = & -a_{1_i} y_i[(k-1)T_0] + \xi_1(kT_0) + c_{1_{i_1}} \xi_1[(k-1)T_0] + \\ & + \dots + c_{r_{i_1}} \xi_1[(k-r_{i_1})T_0] + \xi_2(kT_0) + c_{1_{i_2}} \xi_2[(k-1)T_0] + \\ & + \dots + c_{r_{i_2}} \xi_2[(k-r_{i_2})T_0] + \dots + \xi_n(kT_0) + \\ & + c_{1_{i_n}} \xi_n[(k-1)T_0] + \dots + c_{r_{i_n}} \xi_n[(k-r_{i_n})T_0] + a_{0_i}; \quad (i = 1, 2, \dots, n). \end{aligned} \quad (5.4)$$

Алгоритм прогнозування складається з таких етапів.

1. Вибіркове умовне математичне сподівання вихідної координати y_i протягом «вікна» $p_i T_0$ буде дорівнювати:

$$\begin{aligned} \frac{1}{p_i} \sum_{l_i=k-p_i+1}^k M_{l_i-1}[y_i(l_i T_0)] = & \frac{1}{p_i} \{-a_{1_i} y_i[(k-1)T_0] + \\ & + c_{1_{i_1}} \xi_1[(k-1)T_0] + \dots + c_{r_{i_1}} \xi_1[(k-r_{i_1})T_0] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + c_{1_{i_2}} \xi_2[(k-1)T_0] + \dots + c_{r_{i_2}} \xi_2[(k-r_{i_2})T_0] + \\
& + \dots + c_{1_{i_n}} \xi_n[(k-1)T_0] + \dots + c_{r_{i_n}} \xi_n[(k-r_{i_n})T_0] - \\
& \dots - a_{1_i} y_i[(k-p_i)T_0] + c_{1_{i_1}} \xi_1[(k-p_i)T_0] + \\
& \dots + c_{r_{i_1}} \xi_1[(k-p_i-r_{i_1}+1)T_0] + c_{1_{i_2}} \xi_2[(k-p_i)T_0] + \\
& + \dots + c_{r_{i_2}} \xi_2[(k-p_i-r_{i_2}+1)T_0] + \dots + c_{1_{i_n}} \xi_n[(k-p_i)T_0] + \\
& + \dots + c_{r_{i_n}} \xi_n[(k-p_i-r_{i_n}+1)T_0] + p_i a_{0_i} \}. \tag{5.5}
\end{aligned}$$

2. На інтервалі $p_i T_0$ обчислити вибірккові умовні дисперсії $y_i(l_i T_0)$:

$$\begin{aligned}
\hat{\xi}_i^2(l_i T_0) = & \frac{1}{p_i} \sum_{l_i=k-p_i+1}^k \left\{ y_i(l_i T_0) - \right. \\
& \left. - \frac{1}{p_i} \sum_{l=k-p_i-1}^k M_{l_{i-1}} \{y_i(l_i T_0)\} \right\}^2. \tag{5.6}
\end{aligned}$$

3. На основі виразів (5.5), (5.6) обчислити максимальні вибірккові умовні дисперсії на довжині «вікна»:

$$p_{i_{\min}} T_0 \leq p_i T_0 \leq p_{i_{\max}} T_0. \tag{5.7}$$

При цьому на кожному значенні p_i в указаному діапазоні (5.7) з дискретністю в один період квантування T_0 визначити вибірккові умовні дисперсії на основі виразів (5.5), (5.6) і вибрати їх максимальні значення:

$$\begin{aligned}
\hat{\xi}_{i_{\max}}^2(k T_0) = & \sup_{p_{i_{\min}} \leq p_i \leq p_{i_{\max}}} \text{var}\{y_i(k T_0) | y_1[(k-1)T_0], \\
& y_i[(k-2)T_0], \dots, y_i[(k-p_i)T_0]\}. \tag{5.8}
\end{aligned}$$

4. Для побудови моделі динаміки максимальної вибіркової умовної дисперсії по i -му каналу на основі виразів (5.5), (5.6) обчислити ряд вибіркових умовних дисперсій $\hat{\xi}_i^2[(k-1)T_0], \dots, \hat{\xi}_i^2[(k-q)T_0]$, після чого упродовж «вікна» (5.7) відповідно до (5.8) визначити їхнє максимальне значення $\hat{\xi}_{i_{\max}}^2[(l-1)T_0], \dots, \hat{\xi}_{i_{\max}}^2[(k-2)T_0], \dots, \hat{\xi}_{i_{\max}}^2[(k-q)T_0]$.

5. За допомогою методу найменших квадратів на основі даних побудованого ряду (5.8), (5.9) оцінити коефіцієнти математичної моделі ARCH для опису динаміки максимальних вибірових умовних дисперсій по кожному каналу:

$$\begin{aligned}\hat{\xi}_{i_{\max}}^2(kT_0) = & \hat{\alpha}_{1_i} \hat{\xi}_{i_{\max}}^2[(k-1)T_0] + \dots + \\ & + \hat{\alpha}_{q_i} \hat{\xi}_{i_{\max}}^2[(k-q)T_0] + \gamma_i + v_i(kT_0), \quad (i=1,2,\dots,n). \quad (5.10)\end{aligned}$$

6. На основі розробленої моделі ARCH (5.10) виконати прогнозування максимальної вибіркової умовної дисперсії координати y_i на один період квантування T_0 :

$$\begin{aligned}\hat{\xi}_{i_{\max}}^2[(k+1)T_0] = & \hat{\alpha}_{1_i} \hat{\xi}_{i_{\max}}^2(kT_0) + \dots + \\ & + \hat{\alpha}_{q_i} \hat{\xi}_{i_{\max}}^2[(k-q+1)T_0] + \gamma_i. \quad (5.11)\end{aligned}$$

Примітка. Рекурентна процедура прогнозування максимальних вибірових умовних дисперсій $\hat{\xi}_{i_{\max}}^2$ повторюється на кожному періоді квантування T_0 на основі приведенного алгоритму (5.5), (5.6), (5.7), (5.8), (5.9), (5.10).

Розділ 6. Прогнозування умовної дисперсії на основі моделей процесів з різномовною дискретизацією

Для моделі АРКС (2.2) з одностемповою дискретизацією (3.1) різномовна модель при $h = mT_0$ буде мати вигляд [4]:

$$\begin{aligned}y\left[\left[\frac{k}{m}\right]h\right] = & \alpha_1 y\left[\left(\left[\frac{k}{m}\right]-1\right)h\right] + \alpha_2 y\left[\left(\left[\frac{k}{m}\right]-2\right)h\right] + \\ & + \xi\left[\left[\frac{k}{m}\right]h\right] + c_1 \xi\left[\left[\frac{k}{m}\right]h - T_0\right] + c_2 \xi\left[\left[\frac{k}{m}\right]h - 2T_0\right] +\end{aligned}$$

$$+ \dots + c_{2m} \xi \left[\left[\frac{k}{m} \right] h - 2mT_0 \right] + a_0, \quad (6.1)$$

де $\left[\frac{k}{m} \right]$ — ціле число від ділення дискретного відліку k на m .

Алгоритм прогнозування умовної дисперсії послідовності $\left\{ y \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] \right\}$

виконується на основі такої рекурентної процедури:

а). Визначення умовного математичного сподівання для послідовності $\left\{ y \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] \right\}$:

$$\begin{aligned} M_{\left[\frac{k}{m} \right] - 1} \left\{ y \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] \right\} = & \alpha_1 y \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - 1 \right) h \right] + \alpha_2 y \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - 2 \right) h \right] + \\ & + c_m \xi \left[\left[\frac{k}{m} \right] h - mT_0 \right] + \dots + c_{2m} \xi \left[\left[\frac{k}{m} \right] h - 2mT_0 \right] + a_0; \end{aligned} \quad (6.2)$$

б). Обчислення умовної дисперсії для послідовності $\left\{ y \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] \right\}$ при

$h = mT_0$:

$$\begin{aligned} \tilde{\xi}^2 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] = & \text{var} \left\{ y \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] \mid y \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - 1 \right) h \right], y \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - 2 \right) h \right] \right\} = \\ = & M_{\left[\frac{k}{m} \right] - 1} \left\{ y \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] - M_{\left[\frac{k}{m} \right] - 1} \left\{ y \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] \right\} \right\}^2 = \\ = & M_{\left[\frac{k}{m} \right] - 1} \left\{ y \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] - \alpha_1 y \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - 1 \right) h \right] - \alpha_2 y \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - 2 \right) h \right] - \right. \\ & - c_m \xi \left[\left[\frac{k}{m} \right] h - mT_0 \right] - c_{m+1} \xi \left[\left[\frac{k}{m} \right] h - (m+1)T_0 \right] - \\ & \left. - \dots - c_{2m} \xi \left[\left[\frac{k}{m} \right] h - 2mT_0 \right] - a_0 \right\}^2. \end{aligned} \quad (6.3)$$

в). Обчислення ряду умовних дисперсій на основі виразів (6.2), (6.3):

$$\tilde{\xi}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - 1 \right) h \right] = M_{\left[\frac{k}{m} \right] - 2} \left\{ y \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - 1 \right) h \right] - M_{\left[\frac{k}{m} \right] - 2} \left\{ y \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - 1 \right) h \right] \right\} \right\}^2 ;$$

$$\tilde{\xi}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - 2 \right) h \right] = M_{\left[\frac{k}{m} \right] - 3} \left\{ y \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - 2 \right) h \right] - M_{\left[\frac{k}{m} \right] - 3} \left\{ y \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - 2 \right) h \right] \right\} \right\}^2 ;$$

$$\tilde{\xi}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - \mu \right) h \right] = M_{\left[\frac{k}{m} \right] - \mu - 1} \left\{ y \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - \mu \right) h \right] - M_{\left[\frac{k}{m} \right] - \mu - 1} \left\{ y \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - \mu \right) h \right] \right\} \right\}^2 .$$

г). Побудова математичної моделі динаміки умовних дисперсій на основі їхніх даних обчисленого ряду шляхом застосування методу найменших квадратів (МНК) у вигляді моделі авторегресії (ARCH):

$$\begin{aligned} \hat{\xi}^2 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] &= \hat{\beta}_1 \tilde{\xi}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - 1 \right) h \right] + \hat{\beta}_2 \tilde{\xi}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - 2 \right) h \right] + \\ &+ \dots + \hat{\beta}_\mu \tilde{\xi}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - \mu \right) h \right] + \hat{\gamma} + w \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right], \end{aligned} \quad (6.4)$$

де $w \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right]$ — процес дискретного білого шуму з нульовим середнім. Рівняння

(6.4) є авторегресивною умовно гетероскедастичною моделлю ARCH для моделей процесу (6.1) з різномістовою дискретизацією.

На основі моделі ARCH (6.4) виконуємо прогнозування умовної дисперсії (6.3) на один великий період дискретизації $h = mT_0$

$$\begin{aligned} \tilde{\xi}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] + 1 \right) h \right] &= \hat{\beta}_1 \tilde{\xi}^2 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] + \hat{\beta}_2 \tilde{\xi}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - 1 \right) h \right] + \\ &+ \hat{\beta}_m \tilde{\xi}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - \mu + 1 \right) h \right] + \hat{\gamma}. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Розділ 7. Прогнозування максимальної вибіркової умовної дисперсії на основі моделей процесів з різнометровою дискретизацією [4]

Динаміка стаціонарного процесу описана моделлю (6.1) з різнометровою дискретизацією при $h = mT_0$. Вибіркове умовне математичне сподівання вихідної координати упродовж «вікна» ph буде дорівнювати:

$$\begin{aligned} \frac{1}{p} \sum_{i=\left[\frac{k}{m}\right]-p+1}^{\left[\frac{k}{m}\right]} M_{i-1}[y(ih)] = & \frac{1}{p} \left\{ \alpha_1 y \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - 1 \right) h \right] + \right. \\ & + \alpha_1 y \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - 2 \right) h \right] + c_m \xi \left[\left[\frac{k}{m} \right] h - mT_0 \right] + \dots + \\ & + c_{2m} \xi \left[\left[\frac{k}{m} \right] h - 2mT_0 \right] + \dots + \alpha_1 y \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - p \right) h \right] + \\ & + \alpha_2 y \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - p - 1 \right) h \right] + c_m \xi \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - p + 1 \right) h - mT_0 \right] + \\ & \left. + \dots + c_{2m} \xi \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] h - p + 1 \right) h - 2mT_0 \right] + pa_0 \right\}. \end{aligned} \quad (7.1)$$

Обчислення вибіркової умовної дисперсії на інтервалі ph виконується за формулою:

$$\begin{aligned} \text{var} \left\{ y \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] | y \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - 1 \right) h \right], \dots, y \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - p \right) h \right] \right\} = \\ = \frac{1}{p} \sum_{i=\left[\frac{k}{m}\right]-p+1}^{\left[\frac{k}{m}\right]} \left\{ y(ih) - \frac{1}{p} \sum_{i=\left[\frac{k}{m}\right]-p+1}^{\left[\frac{k}{m}\right]} M_{i-1}[y(ih)] \right\}^2. \end{aligned} \quad (7.2)$$

Для обчислення максимальної вибіркової умовної дисперсії необхідно використовувати ковзну довжину «вікна» $p_{\min}h \leq ph \leq p_{\max}h$ на основі виразів (7.1), (7.2). При кожному p в указаному діапазоні з дискретністю в один період

дискретизації h визначається вибіркова умовна дисперсія (7.2) і на довжині «вікна» вибирається її максимальне значення:

$$\hat{\xi}_{\max}^2 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] = \sup_{p_{\min} \leq p \leq p_{\max}} \text{var} \left\{ y \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] | y \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - 1 \right) h \right], \dots, y \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - p \right) h \right] \right\}. \quad (7.3)$$

При цьому $p_{\max}$ установлюється на основі $p_{\max} h = T_{\text{пост}}$. Для розробки моделі динаміки максимальної вибіркової умовної дисперсії за алгоритмом (7.1), (7.2), (7.3) будується ряд:

$$\hat{\xi}_{\max}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - 1 \right) h \right]; \hat{\xi}_{\max}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - 2 \right) h \right], \dots, \hat{\xi}_{\max}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - \mu \right) h \right]. \quad (7.4)$$

На основі побудованого ряду (7.3), (7.4) із застосуванням МНК розробляється математична модель ARCH для описання динаміки максимальної вибіркової умовної дисперсії:

$$\begin{aligned} \hat{\xi}_{\max}^2 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] &= \hat{\beta}_1 \hat{\xi}_{\max}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - 1 \right) h \right] + \\ &+ \hat{\beta}_2 \hat{\xi}_{\max}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - 2 \right) h \right] + \dots + \hat{\beta}_{\mu} \hat{\xi}_{\max}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - \mu \right) h \right] + \\ &+ \nu \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] + \hat{\gamma}, \end{aligned} \quad (7.5)$$

де $\nu \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right]$ — процес дискретного білого шуму з нульовим середнім.

Тоді прогнозування максимальної вибіркової умовної дисперсії на один період дискретизації $h = mT_0$ виконується на основі розробленої моделі ARCH (7.5):

$$\begin{aligned} \hat{\xi}_{\max}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] + 1 \right) h \right] &= \hat{\beta}_1 \hat{\xi}_{\max}^2 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] + \\ &+ \hat{\beta}_2 \hat{\xi}_{\max}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - 1 \right) h \right] + \dots + \hat{\beta}_{\mu} \hat{\xi}_{\max}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - \mu + 1 \right) h \right] + \hat{\gamma}. \end{aligned} \quad (7.6)$$

Рекурентна процедура прогнозування (7.1)—(7.6) повторюється на кожному періоді дискретизації h .

Розділ 8. Прогнозування максимальних вибіркових умовних дисперсій багатовимірних процесів з різнотемповою дискретизацією [4, 5]

Динаміка стаціонарного багатовимірної процесу описана моделлю АРКС з різнотемповою дискретизацією

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} A_{11}(z_1^{-1}) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_{22}(z_2^{-1}) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & \dots & A_{nn}(z_n^{-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(r_1 h_1) \\ y_2(r_2 h_2) \\ \vdots \\ y_n(r_n h_n) \end{bmatrix} = \\
 & = \begin{bmatrix} C_{11}(z^{-1}) & C_{12}(z^{-1}) & \dots & C_{1n}(z^{-1}) \\ C_{21}(z^{-1}) & C_{22}(z^{-1}) & \dots & C_{2n}(z^{-1}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{n1}(z^{-1}) & C_{n2}(z^{-1}) & \dots & C_{nn}(z^{-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1(kT_0) \\ \xi_2(kT_0) \\ \vdots \\ \xi_n(kT_0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{0_1} \\ a_{0_2} \\ \vdots \\ a_{0_n} \end{bmatrix}.
 \end{aligned}
 \tag{8.1}$$

При цьому співвідношення періодів дискретизації для дискретних відліків вихідних координат буде таким:

$$h_i = m_i T_0, \quad (i = 1, 2, \dots, n), \tag{8.2}$$

де m_i — ціле число, яке більше одиниці. Тоді співвідношення операторів зворотного зсуву

$$z_i^{-1} = z^{-m_i}, \tag{8.3}$$

де z^{-1} — оператор зворотного зсуву на один період дискретизації T_0 ; z_i^{-1} — оператор зворотного зсуву на один період h_i .

Структура поліномів в моделі (8.1) має вигляд:

$$A_{ii}(z_i^{-1}) = 1 + a_{1_i} z_i^{-1}, \tag{8.4}$$

$$C_{ij}(z^{-1}) = 1 + c_{1_{ij}} z^{-1} + c_{2_{ij}} z^{-2} + \dots + c_{m_{ij}} z^{-m_i}, \tag{8.5}$$

$$i=1,2,\dots,n; \quad j=1,2,\dots,n.$$

При цьому a_{0_i} — зміщення i -ї вихідної координати, яке дорівнює $A_i(1)y_{i_{\text{сер}}}$.

Різнотемпову модель (8.1) можна записати в різницевій формі для кожної вихідної координати:

$$\begin{aligned} y_i \left[\left[\frac{k}{m_i} \right] h_i \right] = & -a_{1_i} y_i \left[\left(\left[\frac{k}{m_i} \right] - 1 \right) h_i \right] + \xi_1 \left[\left[\frac{k}{m_i} \right] h_i \right] + \\ & + c_{1_{i1}} \xi_1 \left[\left[\frac{k}{m_i} \right] h_i - T_0 \right] + \dots + c_{m_{i1}} \xi_1 \left[\left[\frac{k}{m_i} \right] h_i - m_i T_0 \right] + \\ & + \xi_2 \left[\left[\frac{k}{m_i} \right] h_i \right] + c_{1_{i2}} \xi_2 \left[\left[\frac{k}{m_i} \right] h_i - T_0 \right] + \dots + \\ & + c_{m_{i2}} \xi_2 \left[\left[\frac{k}{m_i} \right] h_i - m_i T_0 \right] + \dots + \xi_n \left[\left[\frac{k}{m_i} \right] h_i \right] + \\ & + c_{1_{in}} \xi_n \left[\left[\frac{k}{m_i} \right] h_i - T_0 \right] + \dots + c_{m_{in}} \xi_n \left[\left[\frac{k}{m_i} \right] h_i - m_i T_0 \right] + a_{0_i}, \\ & (i=1,2,\dots,n). \end{aligned} \quad (8.6)$$

Вибіркове умовне математичне сподівання вихідної координати y_i упродовж «вікна» $p_i h_i$ буде дорівнювати:

$$\begin{aligned} \frac{1}{p_i} \sum_{l_i=\left[\frac{k}{m_i}\right]-p_i+1}^{\left[\frac{k}{m_i}\right]} M_{l_{i-1}}[y_i(l_i h_i)] = & \frac{1}{p_i} \left\{ -a_{1_i} y_i \left[\left(\left[\frac{k}{m_i} \right] - 1 \right) h_i \right] + \right. \\ & + c_{m_{i1}} \xi_1 \left[\left[\frac{k}{m_i} \right] h_i - m_i T_0 \right] + \dots + c_{m_{ij}} \xi_j \left[\left[\frac{k}{m_i} \right] h_i - m_i T_0 \right] + \\ & + \dots + c_{m_{in}} \xi_n \left[\left[\frac{k}{m_i} \right] h_i - m_i T_0 \right] - \dots - a_{1_i} y_i \left[\left(\left[\frac{k}{m_i} \right] - p_i \right) h_i \right] + \\ & \left. + c_{m_{ij}} \xi_j \left[\left(\left[\frac{k}{m_i} \right] - p_i + 1 \right) h_i - m_i T_0 \right] + \dots + c_{m_{i1}} \xi_1 \left[\left(\left[\frac{k}{m_i} \right] - \right. \right. \right. \end{aligned}$$

$$-p_i+1)h_i - m_i T_0] + \dots + c_{m_{in}} \xi_n \left[\left(\left[\frac{k}{m_i} \right] - p_i + 1 \right) h_i - m_i T_0 \right] + p_i a_{0_i} \}. \quad (8.7)$$

На інтервалі «вікна» $p_i h_i$ обчислюється вибіркова умовна дисперсія:

$$\begin{aligned} \text{var} \left\{ y_i \left[\left[\frac{k}{m_i} \right] h_i \right] \middle| y_i \left[\left(\left[\frac{k}{m_i} \right] - 1 \right) h_i \right], \dots, y_i \left[\left(\left[\frac{k}{m_i} \right] - p_i \right) h_i \right] \right\} = \\ = \frac{1}{p_i} \sum_{l_i = \left[\frac{k}{m_i} \right] - p_i + 1}^{\left[\frac{k}{m_i} \right]} \left\{ y_i(l_i h_i) - \frac{1}{p_i} \sum_{l_i = \left[\frac{k}{m_i} \right] - p_i + 1}^{\left[\frac{k}{m_i} \right]} M_{l_i-1} [y_i(l_i h_i)] \right\}^2. \end{aligned} \quad (8.8)$$

За формулами (8.7) і (8.8) обчислюється максимальне значення вибіркової умовної дисперсії упродовж «вікна» $1 \leq p_i \leq p_{i_{\max}}$ згідно із

$$\begin{aligned} \sup_{1 \leq p_i \leq p_{i_{\max}}} \text{var} \left\{ y_i \left[\left[\frac{k}{m_i} \right] h_i \right] \middle| y_i \left[\left(\left[\frac{k}{m_i} \right] - 1 \right) h_i \right], \dots \right. \\ \left. \dots, y_i \left[\left(\left[\frac{k}{m_i} \right] - p_i \right) h_i \right] \right\} = \hat{\xi}_{i_{\max}}^2 \left[\left[\frac{k}{m_i} \right] h_i \right]. \end{aligned} \quad (8.9)$$

Для побудови моделі ARCH для описання динаміки максимальної вибіркової умовної дисперсії по i -му каналу на основі (8.8), (8.9), (8.10) обчислюється ряд

$$\hat{\xi}_{i_{\max}}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{m_i} \right] - 1 \right) h_i \right], \dots, \hat{\xi}_{i_{\max}}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{m_i} \right] - \eta \right) h_i \right]. \quad (8.10)$$

За допомогою методу найменших квадратів на основі даних побудованого ряду (8.9), (8.10) оцінюються коефіцієнти математичної моделі ARCH для описання динаміки максимальних вибірових умовних дисперсій по кожному каналу:

$$\hat{\xi}_{i_{\max}}^2 \left[\left[\frac{k}{m_i} \right] h_i \right] = \hat{\beta}_{1_i} \hat{\xi}_{i_{\max}}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{m_i} \right] - 1 \right) h_i \right] + \dots +$$

$$+ \hat{\beta}_{\eta_i} \hat{\xi}_{i_{\max}}^2 \left[\left(\left\lfloor \frac{k}{m_i} \right\rfloor - \eta \right) h_i \right] + v_i \left[\left\lfloor \frac{k}{m_i} \right\rfloor h_i \right] + \gamma_i. \quad (8.11)$$

На основі розробленої моделі (8.11) виконати прогнозування максимальної вибіркової умовної дисперсії координати y_i на один період дискретизації h_i :

$$\begin{aligned} \hat{\xi}_{i_{\max}}^2 \left[\left(\left\lfloor \frac{k}{m_i} \right\rfloor + 1 \right) h_i \right] &= \hat{\beta}_{1_i} \hat{\xi}_{i_{\max}}^2 \left[\left\lfloor \frac{k}{m_i} \right\rfloor h_i \right] + \dots \\ &+ \hat{\beta}_{\eta_i} \hat{\xi}_{i_{\max}}^2 \left[\left(\left\lfloor \frac{k}{m_i} \right\rfloor - \eta + 1 \right) h_i \right] + \gamma_i. \end{aligned} \quad (8.12)$$

Примітка. Рекурентна процедура прогнозування максимальних вибірових умовних дисперсій $\hat{\xi}_{i_{\max}}^2$ повторюється на кожному періоді квантування h_i на основі приведенного алгоритму (8.7), (8.8), (8.9), (8.10), (8.11).

Розділ 9. Розробка моделі GARCH при періоді дискретизації $h = mT_0$ [6]

Математична модель динаміки умовних дисперсій ARCH (6.4) при $h = mT_0$

$$\begin{aligned} \tilde{\xi}^2 \left[\left\lfloor \frac{k}{m} \right\rfloor h \right] &= \hat{\beta}_1 \tilde{\xi}^2 \left[\left(\left\lfloor \frac{k}{m} \right\rfloor - 1 \right) h \right] + \hat{\beta}_2 \tilde{\xi}^2 \left[\left(\left\lfloor \frac{k}{m} \right\rfloor - 2 \right) h \right] + \\ &+ \dots + \hat{\beta}_\mu \tilde{\xi}^2 \left[\left(\left\lfloor \frac{k}{m} \right\rfloor - \mu \right) h \right] + \hat{\gamma} + w \left[\left\lfloor \frac{k}{m} \right\rfloor h \right] \end{aligned} \quad (9.1)$$

розробляється на кожному періоді h за методикою, приведеною у розділі 6.

Уведемо нові змінні:

$$\tilde{\xi} \left[\left\lfloor \frac{k}{m} \right\rfloor h \right] = \sqrt{H \left[\left\lfloor \frac{k}{m} \right\rfloor h \right]} v \left[\left\lfloor \frac{k}{m} \right\rfloor h \right], \quad (9.2)$$

де $v \left[\left\lfloor \frac{k}{m} \right\rfloor h \right]$ — нормальна послідовність з нульовим середнім та одиничною дисперсією:

$$M\left\{v\left[\left[\frac{k}{m}\right]h\right]\right\}=0; \quad M\left\{v^2\left[\left[\frac{k}{m}\right]h\right]\right\}=1. \quad (9.3)$$

Якщо

$$H\left[\left[\frac{k}{m}\right]h\right]=\beta_1\tilde{\xi}^2\left[\left(\left[\frac{k}{m}\right]-1\right)h\right]+\dots+\beta_\mu\tilde{\xi}^2\left[\left(\left[\frac{k}{m}\right]-\mu\right)h\right]+\gamma, \quad (9.4)$$

то відповідно до (9.3) можна записати:

$$\left\{\tilde{\xi}^2\left[\left[\frac{k}{m}\right]h\right], \tilde{\xi}^2\left[\left(\left[\frac{k}{m}\right]-1\right)h\right], \tilde{\xi}^2\left[\left(\left[\frac{k}{m}\right]-2\right)h\right], \dots\right\}= \\ \beta_1\tilde{\xi}^2\left[\left(\left[\frac{k}{m}\right]-1\right)h\right]+\dots+\beta_\mu\tilde{\xi}^2\left[\left(\left[\frac{k}{m}\right]-\mu\right)h\right]+\gamma.$$

Якщо підставити (9.3), (9.4) у вираз (9.1), то дістанемо:

$$\begin{aligned} \tilde{\xi}^2\left[\left[\frac{k}{m}\right]h\right] &= H\left[\left[\frac{k}{m}\right]h\right] \cdot v^2\left[\left[\frac{k}{m}\right]h\right] = \\ &= H\left[\left[\frac{k}{m}\right]h\right] + w\left[\left[\frac{k}{m}\right]h\right]. \end{aligned} \quad (9.5)$$

Таким чином, $H\left[\left[\frac{k}{m}\right]h\right]$ є прогнозом для умовної дисперсії $\tilde{\xi}^2\left[\left[\frac{k}{m}\right]h\right]$.

Враховуючи зображення (9.3), інновацію $w\left[\left[\frac{k}{m}\right]h\right]$ у рівнянні ARCH (9.1)

можна виразити:

$$w\left[\left[\frac{k}{m}\right]h\right] = \tilde{\xi}^2\left[\left[\frac{k}{m}\right]h\right] - H\left[\left[\frac{k}{m}\right]h\right] = \quad (9.6)$$

.

У той час, як безумовна дисперсія $w\left[\left[\frac{k}{m}\right]h\right]$ є постійною, умовна

дисперсія згідно з (9.6) із часом змінюється.

Запишемо формулу (9.4) у формі:

$$H\left[\left[\frac{k}{m}\right]h\right] = (\beta_1 z^{-1} + \beta_2 z^{-2} + \dots + \beta_\mu z^{-\mu}) \cdot \tilde{\xi}^2\left[\left[\frac{k}{m}\right]h\right] + \gamma, \quad (9.7)$$

де z^{-1} — оператор зворотного зсуву на період дискретизації $h = mT_0$. Запишемо поліном $(\beta_1 z^{-1} + \beta_2 z^{-2} + \dots + \beta_\mu z^{-\mu})$ у вигляді відношення

$$(\beta_1 z^{-1} + \beta_2 z^{-2} + \dots + \beta_\mu z^{-\mu}) = \frac{(r_1 z^{-1} + r_2 z^{-2} + \dots + r_{\mu+n} z^{-(\mu+n)})}{(1 - \sigma_1 z^{-1} - \sigma_2 z^{-2} - \dots - \sigma_n z^{-n})}, \quad (9.8)$$

в якому корені рівняння $(1 - \sigma_1 z^{-1} - \sigma_2 z^{-2} - \dots - \sigma_n z^{-n}) = 0$ мають знаходитися в середині круга одиничного радіусу.

Застосовуючи вираз (9.8), рівність (9.7) можна записати у вигляді кінцево-різницевого рівняння:

$$\begin{aligned} H\left[\left[\frac{k}{m}\right]h\right] &= \sigma_1 H\left[\left(\left[\frac{k}{m}\right] - 1\right)h\right] + \sigma_2 H\left[\left(\left[\frac{k}{m}\right] - 2\right)h\right] + \\ &+ \dots + \sigma_n H\left[\left(\left[\frac{k}{m}\right] - n\right)h\right] + r_1 \tilde{\xi}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{m}\right] - 1\right)h\right] + \\ &+ r_2 \tilde{\xi}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{m}\right] - 2\right)h\right] + \dots + r_{\mu+n} \tilde{\xi}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{m}\right] - \mu - n\right)h\right] + \lambda, \end{aligned} \quad (9.9)$$

де $\lambda = (1 - \sigma_1 - \sigma_2 - \dots - \sigma_n)\gamma$.

Прибавимо до обох частин рівності (9.9) $\tilde{\xi}^2 \left[\left[\frac{k}{m}\right]h\right]$ і виконаємо

перетворення отриманого виразу з використанням (9.6):

$$\begin{aligned} H\left[\left[\frac{k}{m}\right]h\right] + \tilde{\xi}^2 \left[\left[\frac{k}{m}\right]h\right] &= \lambda - \sigma_1 w\left[\left(\left[\frac{k}{m}\right] - 1\right)h\right] - \\ &- \sigma_2 w\left[\left(\left[\frac{k}{m}\right] - 2\right)h\right] - \dots - \sigma_n w\left[\left(\left[\frac{k}{m}\right] - n\right)h\right] + \\ &+ (\sigma_1 + r_1) \tilde{\xi}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{m}\right] - 1\right)h\right] + (\sigma_2 + r_2) \tilde{\xi}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{m}\right] - 2\right)h\right] + \\ &+ \dots + (\sigma_n + r_n) \tilde{\xi}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{m}\right] - n\right)h\right] + r_{n+1} \tilde{\xi}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{m}\right] - n - 1\right)h\right] + \\ &+ \dots + r_{\mu+n} \tilde{\xi}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{m}\right] - \mu - n\right)h\right] + \tilde{\xi}^2 \left[\left[\frac{k}{m}\right]h\right]. \end{aligned}$$

При $w\left[\left[\frac{k}{m}\right]h\right] = \tilde{\xi}^2\left[\left[\frac{k}{m}\right]h\right] - H\left[\left[\frac{k}{m}\right]h\right]$ перетворимо попередній вираз до

вигляду

$$\begin{aligned} \tilde{\xi}^2\left[\left[\frac{k}{m}\right]h\right] &= \lambda + (\sigma_1 + r_1) \cdot \tilde{\xi}^2\left[\left(\left[\frac{k}{m}\right] - 1\right)h\right] + \\ &+ (\sigma_2 + r_2) \tilde{\xi}^2\left[\left(\left[\frac{k}{m}\right] - 2\right)h\right] + \dots + (\sigma_n + r_n) \tilde{\xi}^2\left[\left(\left[\frac{k}{m}\right] - n\right)h\right] + \\ &+ r_{n+1} \tilde{\xi}^2\left[\left(\left[\frac{k}{m}\right] - n - 1\right)h\right] + \dots + r_{\mu+n} \tilde{\xi}^2\left[\left(\left[\frac{k}{m}\right] - \mu - n\right)h\right] + \\ &+ w\left[\left[\frac{k}{m}\right]h\right] - \sigma_1 w\left[\left(\left[\frac{k}{m}\right] - 1\right)h\right] - \dots - \sigma_n w\left[\left(\left[\frac{k}{m}\right] - n\right)h\right]. \end{aligned} \quad (9.10)$$

де збурення визначаються так:

$$w\left[\left(\left[\frac{k}{m}\right] - 1\right)h\right] = \tilde{\xi}^2\left[\left(\left[\frac{k}{m}\right] - 1\right)h\right] - H\left[\left(\left[\frac{k}{m}\right] - 1\right)h\right],$$

$$w\left[\left(\left[\frac{k}{m}\right] - n\right)h\right] = \tilde{\xi}^2\left[\left(\left[\frac{k}{m}\right] - n\right)h\right] - H\left[\left(\left[\frac{k}{m}\right] - n\right)h\right].$$

Вираз (9.10) являє собою модель GARCH для описання динаміки умовної дисперсії при періоді дискретизації $h = mT_0$. При цьому враховується динаміка зміни четвертого моменту $(1 - \sigma_1 z^{-1} - \sigma_2 z^{-2} - \dots - \sigma_n z^{-n})w\left[\left[\frac{k}{m}\right]h\right]$.

На основі моделі GARCH (9.10) можна прогнозувати умовну дисперсію на один великий період дискретизації $h = mT_0$

$$\begin{aligned} \tilde{\xi}^2\left[\left(\left[\frac{k}{m}\right] + 1\right)h\right] &= \lambda + (\sigma_1 + r_1) \tilde{\xi}^2\left[\left[\frac{k}{m}\right]h\right] + \\ &+ (\sigma_2 + r_2) \tilde{\xi}^2\left[\left(\left[\frac{k}{m}\right] - 1\right)h\right] + \dots + (\sigma_n + r_n) \cdot \\ &\cdot \tilde{\xi}^2\left[\left(\left[\frac{k}{m}\right] - n + 1\right)h\right] + r_{n+1} \tilde{\xi}^2\left[\left(\left[\frac{k}{m}\right] - n\right)h\right] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \dots + r_{\mu+n} \tilde{\mathfrak{S}}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - \mu - n + 1 \right) h \right] - \sigma_1 w \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] - \\
& - \dots - \sigma_n w \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - n + 1 \right) h \right].
\end{aligned} \tag{9.11}$$

Розділ 10. Прогнозування максимальних вибірових умовних дисперсій нев'язок співвідношень координат багатовимірних процесів з різнотемповою дискретизацією [7]

Ставиться задача обчислення та прогнозування максимальних умовних вибірових дисперсій нев'язок співвідношень між координатами багатовимірної об'єкта в стохастичному середовищі.

Багатовимірна модель динаміки об'єкта з різнотемповою дискретизацією подана у вигляді

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} A_1(z_1^{-1}) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_z(z_1^{-1}) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & \dots & A_n(z_1^{-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1\left(\left[\frac{k}{m}\right]h\right) \\ y_2\left(\left[\frac{k}{m}\right]h\right) \\ \vdots \\ y_n\left(\left[\frac{k}{m}\right]h\right) \end{bmatrix} = \\
 & = \begin{bmatrix} C_{11}(z^{-1}) & C_{12}(z^{-1}) & \dots & C_{1n}(z^{-1}) \\ C_{21}(z^{-1}) & C_{22}(z^{-1}) & \dots & C_{2n}(z^{-1}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ C_{n1}(z^{-1}) & C_{n2}(z^{-1}) & \dots & C_{nn}(z^{-1}) \end{bmatrix} \times \\
 & \times \begin{bmatrix} \xi_1(kT_0) \\ \xi_2(kT_0) \\ \vdots \\ \xi_n(kT_0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{0_1} \\ a_{0_2} \\ \vdots \\ a_{0_n} \end{bmatrix}. \tag{10.1}
 \end{aligned}$$

При цьому співвідношення періодів квантування для дискретних відліків вихідних координат буде

$$h = mT_0, \tag{10.2}$$

де m — ціле число, більше за одиницю. Тоді визначимо співвідношення операторів зворотного зсуву:

$$z_1^{-1} = z^{-m},$$

де z^{-1} — оператор зворотного зсуву на один період квантування T_0 , z_1^{-1} — оператор зворотного зсуву на один період h . Структура поліномів у моделі (10.1) має вигляд

$$\begin{aligned} A_i(z_1^{-1}) &= 1 + a_{i_1} z_1^{-1} + \dots + a_{i_s} z_1^{-s}, \\ C_{ij}(z^{-1}) &= c_{0_{ij}} + c_{0_{ij}} z^{-2} + \dots + c_{q_{ij}} z^{-q}, \end{aligned} \quad (10.3)$$

$i=1,2,\dots,n$; $j=1,2,\dots,n$. При цьому a_{0_i} — зміщення i -ої вихідної координати.

Нехай задано множину співвідношень між вихідними координатами об'єкта у вигляді

$$\mathbf{S}\mathbf{Y}\left(\left[\frac{k}{m}\right]h\right) = \mathbf{b}, \quad (10.4)$$

де $\mathbf{Y} = (y_1, \dots, y_n)^T$ — вектор вихідних координат, $\mathbf{S}$ — матриця розмірності

$l \times n$, $l < n$, $\text{rang}(\mathbf{S}) = l$, $S = \begin{pmatrix} S_1 \\ \dots \\ S_l \end{pmatrix}$, $S_1, \dots, S_l$ — вектор-рядки, що її формують, $\mathbf{b}$ —

вектор-стовпчик розмірності l . Лінійні співвідношення (10.4) мають виконуватися у кожний момент часу, але у стохастичному середовищі це недосяжно, тому введемо вектор нев'язок співвідношень

$\mathbf{e}\left(\left[\frac{k}{m}\right]h\right) = \mathbf{S}\mathbf{Y}\left(\left[\frac{k}{m}\right]h\right) - \mathbf{b}$. В такому разі дисперсії координат вектора $\mathbf{e}$ є

мірами якості керування співвідношеннями, оскільки чим менша дисперсія i -ої координати нев'язки $e_i (i=1, \dots, l)$, тим з більшою точністю виконується i -те співвідношення $S_i \mathbf{Y} = b_i$.

Умовне математичне сподівання нев'язки співвідношень дорівнює

$M_{j-1}[e(jh)] = M_{j-1}[\mathbf{S}\mathbf{Y}(jh) - \mathbf{b}] = \mathbf{S}[M_{j-1}\mathbf{Y}(jh) - \mathbf{b}]$ для довільного моменту часу jh , тому необхідно спочатку обчислити умовне математичне сподівання вектора вихідних координат. Оскільки $M_{j-1}[y(jh)] = (M_{j-1}[y_1(jh)], \dots,$

$M_{j-1}[y_n(jh)]^T$ достатньо знайти умовне математичне сподівання кожної вихідної координати. Для цього різнотемпову модель (10.1) треба подати у різницевій формі для i -ої вихідної координати:

$$\begin{aligned}
y_i \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] = & -a_{1_i} y_i \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - 1 \right) h \right] - \dots - \\
& -a_{s_i} y_i \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - s \right) h \right] + c_{0_n} \xi_1 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] + \\
& + c_{1_{i1}} \xi_1 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h - T_0 \right] + \dots + c_{m_{i1}} \xi_1 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h - m T_0 \right] + \dots + \\
& + c_{q_{i1}} \xi_1 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h - q T_0 \right] + c_{0_{i2}} \xi_2 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] + \\
& + c_{1_{i2}} \xi_2 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h - T_0 \right] + \dots + c_{m_{i2}} \xi_2 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h - m T_0 \right] + \dots + \\
& + c_{q_{i2}} \xi_2 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h - q T_0 \right] + \dots + c_{0_{in}} \xi_n \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] + \\
& + c_{1_{in}} \xi_n \left[\left[\frac{k}{m} \right] h - T_0 \right] + \dots + c_{m_{in}} \xi_n \left[\left[\frac{k}{m} \right] h - m T_0 \right] + \dots + \\
& + c_{q_{in}} \xi_n \left[\left[\frac{k}{m} \right] h - q T_0 \right] + a_{0_i}, \\
& i = 1, 2, \dots, n.
\end{aligned} \tag{10.5}$$

Досі природа збурення не бралася до уваги. Пропонується розглянути поширений на практиці і досить загальний випадок, коли збурення є процесом авторегресії першого порядку, що можна подати у вигляді

$$\xi(kT_0) = g\xi((k-1)T_0) + \nu(kT_0), \tag{10.6}$$

де $\nu(kT_0)$ — векторний незалежний гауссів дискретний білий шум, $g \approx 0,8 \dots 0,9$ — відомий скалярний коефіцієнт.

Для подальших обчислень корисно знайти умовне математичне сподівання $\xi(kT_0)$ відносно інформації, наявної на момент часу $(k-i)T_0$, тобто $M_{k-i}\xi(kT_0)$. Запишемо:

$$\begin{aligned}
\xi(kT_0) &= g\xi((k-1)T_0) + \nu(kT_0) = g(g\xi((k-2)T_0) + \\
&+ \nu((k-1)T_0)) + \nu(kT_0) = g(g(g\xi((k-3)T_0) + \\
&+ \nu((k-2)T_0)) + \nu((k-1)T_0)) + \nu(kT_0) = \dots = \\
&= g(g(\dots(g\xi((k-i)T_0) + \nu((k-i+1)T_0)) + \\
&+ \nu((k-i+2)T_0)) + \dots + \nu((k-1)T_0)) + \nu(kT_0),
\end{aligned}$$

тоді, враховуючи $M_{k-i}\nu((k-i+1)T_0) = M_{k-i}\nu((k-i+2)T_0) = \dots = M_{k-i}\nu(kT_0) = 0$,

отримаємо $M_{k-i}\xi(kT_0) = g^i\xi((k-i)T_0)$, що і потрібно було знайти.

З урахуванням цього та формули (10.5) знайдемо умовне математичне сподівання вихідної координати $y_i(jh)$ для довільного j та кожного $i = 1, \dots, n$:

$$\begin{aligned}
M_{j-1}y_i(jh) &= -a_{1_i}y_i[(j-1)h] - \dots - a_{s_i}y_i[(j-s)h] + \\
&+ (c_{0_{i1}}g^m + c_{1_{i1}}g^{m-1} + \dots + c_{m-1_{i1}}g + c_{m_{i1}})\xi_1[jh - mT_0] + \\
&+ c_{m+1_{i1}}\xi_1[jh - (m+1)T_0] + \dots + c_{q_{i1}}\xi_1[jh - qT_0] + \\
&+ (c_{0_{i2}}g^m + c_{1_{i2}}g^{m-1} + \dots + c_{m-1_{i2}}g + c_{m_{i2}})\xi_2[jh - mT_0] + \\
&+ c_{m+1_{i2}}\xi_2[jh - (m+1)T_0] + \dots + c_{q_{i2}}\xi_2[jh - qT_0] + \dots + \\
&+ (c_{0_{in}}g^m + c_{1_{in}}g^{m-1} + \dots + c_{m-1_{in}}g + c_{m_{in}}) \times \\
&\times \xi_n[jh - mT_0] + c_{m+1_{in}}\xi_n[jh - (m+1)T_0] + \\
&+ \dots + c_{q_{in}}\xi_n[jh - qT_0] + a_{0_i}.
\end{aligned} \tag{10.7}$$

Визначимо вибіркове умовне математичне сподівання нев'язки співвідношення e_i упродовж «вікна» ph :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{p} \sum_{j=\left[\frac{k}{m}\right]-p+1}^{\left[\frac{k}{m}\right]} M_{j-1}\{e_i(jh)\} &= \\
= \frac{1}{p} \left(\sum_{j=\left[\frac{k}{m}\right]-p+1}^{\left[\frac{k}{m}\right]} S_i M_{j-1}\{\mathbf{Y}(jh)\} - pb_i \right) &=
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{p} S_i \sum_{j=\left[\frac{k}{m}\right]-p+1}^{\left[\frac{k}{m}\right]} M_{j-1}\{\mathbf{Y}(jh)\} - b_i,$$

де $M_{j-1}\{\mathbf{Y}(jh)\}$ — вектор-стовпчик, що складається з умовних математичних сподівань вихідних координат, розрахованих згідно з (10.7). Визначимо вибірккову умовну дисперсію на інтервалі ph для $\left\{e_i\left[\left[\frac{k}{m}\right]h\right]\right\}$, $i=1,2,\dots,l$:

$$\begin{aligned} \text{var}_p \left\{ \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] \right\} &= \\ &= \frac{1}{p} \sum_{j=\left[\frac{k}{m}\right]-p+1}^{\left[\frac{k}{m}\right]} \left\{ e_i(jh) - \frac{1}{p} \sum_{u=\left[\frac{k}{m}\right]-p+1}^{\left[\frac{k}{m}\right]} M_{u-1}\{e_i(uh)\} \right\}^2 = \\ &= \frac{1}{p} \sum_{j=\left[\frac{k}{m}\right]-p+1}^{\left[\frac{k}{m}\right]} \left\{ S_i \mathbf{Y}(jh) - \right. \\ &\quad \left. - b_i - \frac{1}{p} S_i \sum_{u=\left[\frac{k}{m}\right]-p+1}^{\left[\frac{k}{m}\right]} M_{u-1}\{\mathbf{Y}(uh)\} + b_i \right\}^2 = \frac{1}{p} \times \\ &\times \sum_{j=\left[\frac{k}{m}\right]-p+1}^{\left[\frac{k}{m}\right]} \left\{ S_i \left[\mathbf{Y}(jh) - \frac{1}{p} \sum_{u=\left[\frac{k}{m}\right]-p+1}^{\left[\frac{k}{m}\right]} M_{u-1}\{\mathbf{Y}(uh)\} \right] \right\}^2. \end{aligned} \quad (10.8)$$

Визначимо максимальну вибірккову умовну дисперсію при зміні p в інтервалі $1 \leq p \leq p_{\max}$ на основі виразів (11.7), (11.8):

$$\bar{\bar{\xi}}_{i_{\max}}^2 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] = \max_{1 \leq p \leq p_{\max}} \text{var}_p \left\{ e_i \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] \right\}, \quad (10.9)$$

де $p_{\max}$ встановлюється залежно від інерційності процесу, $i=1,2,\dots,l$.

10.1. Прогнозування максимальних дисперсій нев'язок співвідношень на основі моделей GARCH. Для прогнозування та аналізу динаміки максимальних вибірових умовних дисперсій побудуємо узагальнену авторегресійну умовно гетероскедастичну модель (GARCH) для кожної нев'язки e_i на основі методики розділів 8 і 9.

$$\begin{aligned} \bar{\bar{\xi}}_{i_{\max}}^2 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] = & \lambda_i + \sigma_{1i} \bar{\bar{\xi}}_{i_{\max}}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - 1 \right) h \right] + \\ & + \sigma_{2i} \bar{\bar{\xi}}_{i_{\max}}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - 2 \right) h \right] + \dots + \sigma_{ri} \bar{\bar{\xi}}_{i_{\max}}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - r_i \right) h \right] + \\ & + w_i \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] + \rho_{1i} w_i \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - 1 \right) h \right] + \dots + \\ & + \rho_{ti} w_i \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - t_i \right) h \right], \end{aligned} \quad (10.10)$$

де w_i — процеси дискретного білого шуму з нульовим середнім, r_i , t_i — порядки моделі (знаходяться емпірично, якщо $t_i = 0$, то отримуємо модель ARCH), λ_i , $\sigma_{1i}, \dots, \sigma_{ri}$, $\rho_{1i}, \dots, \rho_{ti}$ — коефіцієнти моделі, які необхідно оцінити (методика розробляється нижче).

На основі рівняння (10.10) виконаємо прогнозування максимальної вибіркової умовної дисперсії (10.9) на один великий період квантування $h = mT_0$:

$$\begin{aligned} \hat{\bar{\bar{\xi}}}_{i_{\max}}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] + 1 \right) h \right] = & \lambda_i + \sigma_{1i} \hat{\bar{\bar{\xi}}}_{i_{\max}}^2 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] + \\ & + \sigma_{2i} \hat{\bar{\bar{\xi}}}_{i_{\max}}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - 1 \right) h \right] + \dots + \sigma_{ri} \times \\ & \times \hat{\bar{\bar{\xi}}}_{i_{\max}}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - r_i + 1 \right) h \right] + \\ & + \rho_{1i} w_i \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] + \rho_{2i} w_i \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - 1 \right) h \right] + \dots + \end{aligned}$$

$$+ \rho_{t,i} w_i \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - t_i + 1 \right) h \right]. \quad (10.11)$$

Розділ 11. Адаптивна настройка коефіцієнтів моделей GARCH [5, 6]

Експериментально встановлено, що коефіцієнти $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ моделей GARCH (9.10) та (10.10) значно впливають на точність прогнозування умовних дисперсій згідно з (9.11) та (10.11) при виконанні умови, що корені рівняння

$$(1 - \sigma_1 z^{-1} - \sigma_2 z^{-2} - \dots - \sigma_n z^{-n}) = 0$$

вибираються по модулю менші за одиницю. Тому для досягнення максимальної точності прогнозування згідно з (9.11) та (10.11) необхідно виконувати адаптивну настройку коефіцієнтів моделей GARCH за умовою мінімізації критерію оптимальності

$$J_N = \sum_{\left[\frac{k}{m} \right] = 1}^N \left\{ \tilde{\xi}^2 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] - \tilde{\xi}^2 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] \right\}^2, \quad (11.1)$$

де $\tilde{\xi}^2 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right]$ — обчислене значення умовної дисперсії на основі виразу (6.3) та

(8.8), а $\tilde{\xi}^2 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right]$ — умовна дисперсія, яка визначається на основі моделі

GARCH (9.10), (10.10). Розглянемо різні варіанти адаптивної настройки коефіцієнтів моделей GARCH.

Варіант 1 [6]. Модель GARCH (9.10)

$$\begin{aligned} \tilde{\xi}^2 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] = & \lambda + (\sigma_1 + r_1) \tilde{\xi}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - 1 \right) h \right] + (\sigma_2 + r_2) \cdot \\ & \cdot \tilde{\xi}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - 2 \right) h \right] + \dots + (\sigma_n + r_n) \tilde{\xi}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - n \right) h \right] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + r_{n+1} \tilde{\xi}^2 \left[\left(\left\lfloor \frac{k}{m} \right\rfloor - n - 1 \right) h \right] + \dots + r_{\mu+n} \tilde{\xi}^2 \left[\left(\left\lfloor \frac{k}{m} \right\rfloor - \mu - n \right) h \right] + \\
& + w \left[\left\lfloor \frac{k}{m} \right\rfloor h \right] - \sigma_1 w \left[\left(\left\lfloor \frac{k}{m} \right\rfloor - 1 \right) h \right] - \dots - \sigma_n w \left[\left(\left\lfloor \frac{k}{m} \right\rfloor - n \right) h \right]
\end{aligned} \tag{11.2}$$

при врахуванні співвідношення (9.8) може бути записано у вигляді:

$$\begin{aligned}
\tilde{\xi}^2 \left[\left\lfloor \frac{k}{m} \right\rfloor h \right] = & \left\{ \tilde{\xi}^2 \left[\left(\left\lfloor \frac{k}{m} \right\rfloor - 1 \right) h \right] - \beta_1 \tilde{\xi}^2 \left[\left(\left\lfloor \frac{k}{m} \right\rfloor - 2 \right) h \right] - \right. \\
& - \beta_2 \tilde{\xi}^2 \left[\left(\left\lfloor \frac{k}{m} \right\rfloor - 3 \right) h \right] - \dots - \beta_{n-1} \tilde{\xi}^2 \left[\left(\left\lfloor \frac{k}{m} \right\rfloor - n \right) h \right] - \\
& - \beta_n \tilde{\xi}^2 \left[\left(\left\lfloor \frac{k}{m} \right\rfloor - n - 1 \right) h \right] - \dots - \beta_\mu \tilde{\xi}^2 \left[\left(\left\lfloor \frac{k}{m} \right\rfloor - \mu - 1 \right) h \right] - \\
& - w \left[\left(\left\lfloor \frac{k}{m} \right\rfloor - 1 \right) h \right] \cdot \sigma_1 + \left\{ \tilde{\xi}^2 \left[\left(\left\lfloor \frac{k}{m} \right\rfloor - 2 \right) h \right] - \right. \\
& - \beta_1 \tilde{\xi}^2 \left[\left(\left\lfloor \frac{k}{m} \right\rfloor - 3 \right) h \right] - \beta_2 \tilde{\xi}^2 \left[\left(\left\lfloor \frac{k}{m} \right\rfloor - 4 \right) h \right] - \\
& - \dots - \beta_{n-2} \tilde{\xi}^2 \left[\left(\left\lfloor \frac{k}{m} \right\rfloor - n \right) h \right] - \beta_{n-1} \tilde{\xi}^2 \left[\left(\left\lfloor \frac{k}{m} \right\rfloor - n - 1 \right) h \right] - \\
& - \dots - w \left[\left(\left\lfloor \frac{k}{m} \right\rfloor - 2 \right) h \right] \cdot \sigma_2 + \dots + \left\{ \tilde{\xi}^2 \left[\left(\left\lfloor \frac{k}{m} \right\rfloor - n \right) h \right] - \right. \\
& - \beta_1 \tilde{\xi}^2 \left[\left(\left\lfloor \frac{k}{m} \right\rfloor - n - 1 \right) h \right] - \dots - \beta_{\mu-1} \tilde{\xi}^2 \left[\left(\left\lfloor \frac{k}{m} \right\rfloor - \mu - n + 1 \right) h \right] - \\
& - \beta_\mu \tilde{\xi}^2 \left[\left(\left\lfloor \frac{k}{m} \right\rfloor - \mu - n \right) h \right] - w \left[\left(\left\lfloor \frac{k}{m} \right\rfloor - n \right) h \right] \cdot \sigma_n + \\
& + \left\{ \lambda + \beta_1 \tilde{\xi}^2 \left[\left(\left\lfloor \frac{k}{m} \right\rfloor - 1 \right) h \right] + \beta_2 \tilde{\xi}^2 \left[\left(\left\lfloor \frac{k}{m} \right\rfloor - 2 \right) h \right] + \dots \right. \\
& + \beta_n \tilde{\xi}^2 \left[\left(\left\lfloor \frac{k}{m} \right\rfloor - n \right) h \right] + \dots + \beta_\mu \tilde{\xi}^2 \left[\left(\left\lfloor \frac{k}{m} \right\rfloor - \mu \right) h \right] \left. \right\} +
\end{aligned}$$

$$+ w \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right].$$

Запишемо цей вираз у векторній формі:

$$\hat{\xi}^2 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] = \bar{X}^T \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] \cdot \bar{\theta} + w \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right], \quad (11.3)$$

де вектор обчислювальних координат має вигляд:

$$\begin{aligned} \bar{X}^T \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] = & \left\{ \left\{ \hat{\xi}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - 1 \right) h \right] - \beta_1 \hat{\xi}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - 2 \right) h \right] - \right. \right. \\ & - \dots - \beta_{n-1} \hat{\xi}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - n \right) h \right] - \beta_n \hat{\xi}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - n - 1 \right) h \right] - \\ & - \dots - \beta_\mu \hat{\xi}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - \mu - 1 \right) h \right] - w \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - 1 \right) h \right] \right\}, \\ & \left\{ \hat{\xi}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - 2 \right) h \right] - \beta_1 \hat{\xi}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - 3 \right) h \right] - \dots - \right. \\ & - \beta_{n-1} \hat{\xi}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - n - 1 \right) h \right] - \dots - w \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - 2 \right) h \right] \right\}, \\ & \dots, \left\{ \hat{\xi}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - n \right) h \right] - \beta_1 \hat{\xi}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - n - 1 \right) h \right] - \right. \\ & - \dots - \beta_{\mu-1} \hat{\xi}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - \mu - n + 1 \right) h \right] - \beta_{\mu-1} \hat{\xi}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - \mu - n \right) h \right] - \\ & - w \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - n \right) h \right] \right\}, \left\{ \lambda + \beta_1 \hat{\xi}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - 1 \right) h \right] + \dots + \beta_n \hat{\xi}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - n \right) h \right] + \right. \\ & \left. + \dots + \beta_\mu \hat{\xi}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - \mu \right) h \right] \right\} \right\}, \end{aligned}$$

а вектор невідомих коефіцієнтів

$$\hat{\bar{\theta}} = [\hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2, \hat{\sigma}_3, \dots, \hat{\sigma}_n, 1]^T. \quad (11.4)$$

Тоді критерій оптимальності (11.1) набуде вигляду

$$J_N = \sum_{\left[\frac{k}{m}\right]=1}^N \left\{ \tilde{\xi}_{\max}^2 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] - \bar{X}^T \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] \cdot \hat{\bar{\theta}} \right\}^2 \rightarrow \min. \quad (11.5)$$

Для оцінювання вектора невідомих коефіцієнтів $\hat{\bar{\theta}}$ (11.4), при яких мінімізується критерій (11.5), застосовується рекурентний метод найменших квадратів (РМНК):

$$\begin{aligned} \hat{\bar{\theta}} \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] &= \hat{\bar{\theta}} \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - 1 \right) h \right] + K \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] \cdot \left\{ \tilde{\xi}^2 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] - \right. \\ &\quad \left. - \bar{X}^T \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] \hat{\bar{\theta}} \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - 1 \right) h \right] \right\}, \end{aligned} \quad (11.6)$$

$$\begin{aligned} K \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] &= P \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - 1 \right) h \right] \cdot \bar{X} \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] \left\{ 1 + \bar{X}^T \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] \cdot \right. \\ &\quad \left. P \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - 1 \right) h \right] \cdot \bar{X} \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] \right\}^{-1}, \end{aligned} \quad (11.7)$$

$$\begin{aligned} P \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] &= P \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - 1 \right) h \right] - P \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - 1 \right) h \right] \cdot \\ &\quad \cdot \bar{X} \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] \left\{ 1 + \bar{X}^T \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] \cdot P \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - 1 \right) h \right] \cdot \right. \\ &\quad \left. \cdot \bar{X} \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] \right\}^{-1} \cdot \bar{X}^T \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] \cdot P \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - 1 \right) h \right]. \end{aligned} \quad (11.8)$$

Початкове значення коефіцієнтів вектора $\hat{\bar{\theta}}(0)$ формується на основі $(z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n) = 0$, де $|z_i| < 1$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Варіант 2 [5]. На основі моделі GARCH (11.2) у критерії оптимальності (11.6) вектор оцінюваних коефіцієнтів $\hat{\bar{\theta}}$ можна записати у вигляді

$$\hat{\bar{\theta}} = [(\sigma_1 + r_1), (\sigma_2 + r_2), \dots, (\sigma_n + r_n), r_{n+1}, \dots, r_{\mu+n}, \sigma_1, \dots, \sigma_n, 1],$$

а вектор обчислюваних координат на попередніх тактах дискретизації:

$$\bar{X}^T \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] = \left\{ \tilde{\xi}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - 1 \right) h \right], \tilde{\xi}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - 2 \right) h \right], \dots, \right.$$

$$\begin{aligned} & \hat{\xi}^2 \left[\left(\left\lfloor \frac{k}{m} \right\rfloor - n \right) h \right], \hat{\xi}^2 \left[\left(\left\lfloor \frac{k}{m} \right\rfloor - n - 1 \right) \right], \dots, \hat{\xi}^2 \left[\left(\left\lfloor \frac{k}{m} \right\rfloor - \mu - n \right) h \right], \\ & w \left[\left(\left\lfloor \frac{k}{m} \right\rfloor - 1 \right) h \right], \dots, w \left[\left(\left\lfloor \frac{k}{m} \right\rfloor - n \right) h \right], 1 \}. \end{aligned} \quad (11.10)$$

Для оцінювання невідомих коефіцієнтів $\hat{\theta}$ згідно з (11.9), при яких мінімізується критерій (11.5), застосовується РМНК (11.6), (11.7), (11.8).

Варіант 3 [7]. Для прогнозування максимальних вибірових умовних дисперсій нев'язок співвідношень координат багатовимірних процесів згідно з (10.11) необхідно виконувати адаптивну настройку коефіцієнтів моделі GARCH (10.10) відповідно до умови мінімізації критерію оптимальності:

$$I_{N_i} = \sum_{\left\lfloor \frac{k}{m} \right\rfloor=1}^N \left\{ \bar{\xi}_{i_{\max}}^2 \left[\left\lfloor \frac{k}{m} \right\rfloor h \right] - \hat{\xi}_{i_{\max}}^2 \left[\left\lfloor \frac{k}{m} \right\rfloor h \right] \right\}^2, \quad (11.11)$$

де $\bar{\xi}_{i_{\max}}^2$ — обчислене значення максимальної вибіркової умовної дисперсії i -го співвідношення на основі (10.9), $\hat{\xi}_{i_{\max}}^2$ — прогнозована дисперсія, що визначається згідно з (10.11).

Запишемо критерій (11.11) у формі

$$I_{N_i} = \sum_{\left\lfloor \frac{k}{m} \right\rfloor=1}^N \left\{ \hat{\xi}_{i_{\max}}^2 \left[\left\lfloor \frac{k}{m} \right\rfloor h \right] - \mathbf{X}_i^T \left[\left\lfloor \frac{k}{m} \right\rfloor h \right] \cdot \hat{\theta}_i \right\}^2 \rightarrow \min, \quad (11.12)$$

де вектор оцінюваних коефіцієнтів $\hat{\theta}_i$ згідно з моделлю (10.10) буде дорівнювати

$$\hat{\theta}_i = [\sigma_{1i}, \dots, \sigma_{r_i i}, \rho_{1i}, \dots, \rho_{t_i i}, \lambda_i]^T, \quad (11.13)$$

а вектор обчислюваних координат становитиме

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_i^T \left[\left\lfloor \frac{k}{m_i} \right\rfloor h_i \right] &= \left[\hat{\xi}_{i_{\max}}^2 \left[\left(\left\lfloor \frac{k}{m} \right\rfloor - 1 \right) h \right], \dots, \hat{\xi}_{i_{\max}}^2 \left[\left(\left\lfloor \frac{k}{m} \right\rfloor - r_i \right) h \right], \right. \\ & \left. w_i \left[\left(\left\lfloor \frac{k}{m} \right\rfloor - 1 \right) h \right], \dots, w_i \left[\left(\left\lfloor \frac{k}{m} \right\rfloor - t_i \right) h \right], 1 \right], \end{aligned} \quad (11.14)$$

при цьому для всіх j виконується:

$$w_i \left[\left(\left\lfloor \frac{k}{m} \right\rfloor - j \right) h \right] = \\ = \bar{\bar{\xi}}_{i_{\max}}^2 \left[\left(\left\lfloor \frac{k}{m} \right\rfloor - j \right) h \right] - \hat{\bar{\bar{\xi}}}_{i_{\max}}^2 \left[\left(\left\lfloor \frac{k}{m} \right\rfloor - j \right) h \right].$$

Для оцінювання невідомих оптимальних коефіцієнтів $\hat{\theta}_i$, при яких мінімізується критерій (11.12) застосовується рекурентний метод найменших квадратів:

$$\hat{\theta}_i \left[\left\lfloor \frac{k}{m} \right\rfloor h \right] = \hat{\theta}_i \left[\left(\left\lfloor \frac{k}{m} \right\rfloor - 1 \right) h \right] + K_i \left[\left\lfloor \frac{k}{m} \right\rfloor h \right] \times \\ \times \left\{ \bar{\bar{\xi}}_{i_{\max}}^2 \left[\left\lfloor \frac{k}{m} \right\rfloor h \right] - \mathbf{X}_i^T \left[\left\lfloor \frac{k}{m} \right\rfloor h \right] \cdot \hat{\theta}_i \left[\left(\left\lfloor \frac{k}{m} \right\rfloor - 1 \right) h \right] \right\}, \quad (11.15)$$

$$K_i \left[\left\lfloor \frac{k}{m} \right\rfloor h \right] = P_i \left[\left(\left\lfloor \frac{k}{m} \right\rfloor - 1 \right) h \right] - \mathbf{X}_i \left[\left\lfloor \frac{k}{m} \right\rfloor h \right] \cdot \{ 1 + \\ + \mathbf{X}_i^T \left[\left\lfloor \frac{k}{m} \right\rfloor h \right] \cdot P_i \left[\left(\left\lfloor \frac{k}{m} \right\rfloor - 1 \right) h \right] \mathbf{X}_i \left[\left\lfloor \frac{k}{m} \right\rfloor h \right] \}^{-1}, \quad (11.16)$$

$$P_i \left[\left\lfloor \frac{k}{m} \right\rfloor h \right] = P_i \left[\left(\left\lfloor \frac{k}{m} \right\rfloor - 1 \right) h \right] - P_i \left[\left(\left\lfloor \frac{k}{m} \right\rfloor - 1 \right) h \right] \times \\ \times \mathbf{X}_i \left[\left\lfloor \frac{k}{m} \right\rfloor h \right] \cdot \left\{ 1 + \mathbf{X}_i^T \left[\left\lfloor \frac{k}{m} \right\rfloor h \right] \cdot P_i \left[\left(\left\lfloor \frac{k}{m} \right\rfloor - 1 \right) h \right] \times \right. \\ \left. \times \mathbf{X}_i \left[\left\lfloor \frac{k}{m} \right\rfloor h \right] \right\}^{-1} \cdot \mathbf{X}_i^T \left[\left\lfloor \frac{k}{m} \right\rfloor h \right] \cdot P_i \left[\left(\left\lfloor \frac{k}{m} \right\rfloor - 1 \right) h \right], \quad (11.17)$$

$i=1,2,...,l$, $P_i(0) = p_0 I$, p_0 — деяке велике додатне число, $\hat{\theta}_i(0)$ — початкове наближення вектора коефіцієнтів.

Таким чином, процедура (10.15)—(11.17) повторюється на кожному кроці l разів для оцінки коефіцієнтів $\hat{\theta}_i$ моделей динаміки нев'язок кожного співвідношення.

Розділ 12. Прогнозування одновимірних стаціонарних процесів на основі моделей авторегресії і ковзного середнього з різнометровою дискретизацією [2, 3]

У розділі 2 було розроблено модель АРКС (2.4) з різнометровою дискретизацією:

$$A(z^{-1})y(rh) = C(z^{-1})\xi(kT_0) + a_0. \quad (12.1)$$

При врахуванні рівностей (2.2), (2.7), (2.8) запишемо модель (12.1) у вигляді

$$y[(r+1)h] = y[(k+m)T_0] = z^m \frac{C(z^{-1})}{A(z^{-1})} \xi(kT_0) + \frac{a_0}{A(z^{-1})}. \quad (12.2)$$

Розглянемо процедуру прогнозування вихідної координати y на один період дискретизації h . Для розділення впливу вхідних збурень, які діяли до поточного часу і будуть діяти згідно з виразом (12.2) на майбутній час, складемо діофантове рівняння [3]:

$$C(z^{-1}) = A(z^{-1})L(z^{-1}) + z^{-m}F(z^{-1}), \quad (12.3)$$

на основі якого рівність (12.2) можна записати таким чином:

$$\begin{aligned} y[(r+1)h] = y[(k+m)T_0] = & z^m L(z^{-1})\xi(kT_0) + \\ & + \frac{F(z^{-1})}{A(z^{-1})}\xi(kT_0) + \frac{1}{A(z^{-1})}a_0. \end{aligned} \quad (12.4)$$

При $L(z^{-1}) = C(z^{-1})$ із діофантового рівняння (12.3) при врахуванні (2.8) однозначно визначаємо поліном:

$$F(z^{-1}) = -a_1 C(z^{-1}) = -a_1(1 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2} + \dots + c_m z^{-m}).$$

Позаяк порядок полінома $L(z^{-1})$ дорівнює m , то перший член рівності (12.4) представляє майбутню помилку прогнозування на один період дискретизації h :

$$e[(r+1)h] = e[(k+m)T_0] = z^m L(z^{-1}) \cdot \xi(kT_0).$$

Беручи до уваги цю помилку, на основі (12.4) можна записати функцію прогнозування вихідної координати y на один період дискретизації в рекурентній формі:

$$y^*[(r+1)h | rh] = \frac{F(z^{-1})}{A(z^{-1})} \xi(kT_0) + \frac{a_0}{A(z^{-1})} = y^*[(k+m)T_0 | kT_0]. \quad (12.5)$$

Розробка процедури прогнозування на p періодів дискретизації h . При врахуванні рівностей (2.2), (2.7), (2.8) запишемо на основі (2.4) значення вихідної координати із зсувом вперед на p періодів h

$$y[(r+p)h] = y[(k+pm)T_0] = z^{pm} \frac{C(z^{-1})}{A(z^{-1})} \xi(kT_0) + \frac{a_0}{A(z^{-1})}, \quad (12.6)$$

де $p = 2, 3, \dots$

Складемо діофантове рівняння

$$C(z^{-1}) = A(z^{-1})L(z^{-1}) + z^{-pm}F_p(z^{-1}), \quad (12.7)$$

на основі якого вираз (12.6) можна перетворити до вигляду

$$\begin{aligned} y[(r+p)h] = y[(k+pm)T_0] &= z^{pm}L(z^{-1})\xi(kT_0) + \\ &+ \frac{F_p(z^{-1})}{A(z^{-1})}\xi(kT_0) + \frac{a_0}{A(z^{-1})}. \end{aligned}$$

Тоді функція прогнозування на p періодів дискретизації h буде аналогічна виразу (12.5):

$$y^*[(r+p)h | rh] = y^*[(k+pm)T_0 | kT_0] = \frac{F_p(z^{-1})}{A(z^{-1})} \xi(kT_0) + \frac{a_0}{A(z^{-1})}, \quad (12.8)$$

а помилка прогнозування:

$$e[(r+p)h] = e[(k+pm)T_0] = z^{pm}L(z^{-1})\xi(kT_0).$$

Визначення полінома $F_p(z^{-1})$ розглянемо на основі різнотемпової моделі процесу (2.4), (2.5), (2.8):

$$(1 + a_1 z^{-m})y(rh) = C(z^{-1})\xi(kT_0) + a_0. \quad (12.9)$$

а). При прогнозуванні на $2m$ періодів T_0 при $p=2$ діофантове рівняння (12.7) запишеться у вигляді:

$$C(z^{-1}) = (1 + a_1 z^{-m})L(z^{-1}) + z^{-2m}F_p(z^{-1}).$$

Вибираємо поліном $L(z^{-1}) = (1 - a_1 z^{-m})C(z^{-1})$. Тоді із діофантового рівняння однозначно визначається $F_p(z^{-1}) = a_1^2 C(z^{-1})$.

б). При прогнозуванні на $3m$ періодів T_0 при $p=3$ запишемо діофантове рівняння

$$C(z^{-1}) = (1 + a_1 z^{-m})L(z^{-1}) + z^{-3m}F_p(z^{-1}).$$

При виборі полінома $L(z^{-1}) = (1 - a_1 z^{-m} + a_1^2 z^{-2m})C(z^{-1})$ поліном $F_p(z^{-1})$ однозначно визначається як $F_p(z^{-1}) = -a_1^3 C(z^{-1})$.

с). При прогнозуванні на $4m$ періодів T_0 при $p=4$ діофантове рівняння буде мати вигляд:

$$C(z^{-1}) = (1 + a_1 z^{-m})L(z^{-1}) + z^{-4m}F_p(z^{-1}).$$

Вибираємо поліном $L(z^{-1}) = (1 - a_1 z^{-m} + a_1^2 z^{-2m} - a_1^3 z^{-3m})C(z^{-1})$. Тоді дістанемо: $F_p(z^{-1}) = a_1^4 C(z^{-1})$.

Таким чином, при прогнозуванні вихідної координати процесу (12.9) на p періодів квантування h на основі функції (12.8) поліном $F_p(z^{-1})$ буде визначатися однозначно із діофантового рівняння (12.7) в такому вигляді:

$$F_p(z^{-1}) = (-1)^p a_1^p C(z^{-1}).$$

Розділ 13. Прогнозування багатовимірних стаціонарних процесів на основі матричних моделей авторегресії і ковзного середнього з різнометровою дискретизацією [2, 3]

Різнотемпова багатовимірна дискретна модель АРКС має вигляд:

$$\begin{bmatrix} A_{11}(z_1^{-1}) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_{22}(z_2^{-1}) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A_{nn}(z_n^{-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(r_1 h_1) \\ y_2(r_2 h_2) \\ \vdots \\ y_n(r_n h_n) \end{bmatrix} = \\ = \begin{bmatrix} C_{11}(z^{-1}) & C_{12}(z^{-1}) & \dots & C_{1n}(z^{-1}) \\ C_{21}(z^{-1}) & C_{22}(z^{-1}) & \dots & C_{2n}(z^{-1}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{n1}(z^{-1}) & C_{n2}(z^{-1}) & \dots & C_{nn}(z^{-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1(kT_0) \\ \xi_2(kT_0) \\ \vdots \\ \xi_n(kT_0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{0_1} \\ a_{0_2} \\ \vdots \\ a_{0_n} \end{bmatrix}. \quad (13.1)$$

При цьому співвідношення періодів дискретизації для дискретних відліків вихідних координат дорівнює:

$$h_i = m_i T_0, \quad (i=1,2,\dots,n), \quad (13.2)$$

де m_i — ціле число, що є більшим за одиницю.

Тоді співвідношення операторів зворотного зсуву:

$$z_i^{-1} = z^{-m_i}, \quad (13.3)$$

де z^{-1} — оператор зворотного зсуву на один період T_0 , а z_i^{-1} — оператор зворотного зсуву на один період h_i .

Структура поліномів в моделі (13.1) має вигляд:

$$A_{ii}(z_i^{-1}) = 1 + a_{1_i} z_i^{-1}, \quad (13.4)$$

$$C_{ij}(z^{-1}) = 1 + c_{1_{ij}} z^{-1} + c_{2_{ij}} z^{-2} + \dots + c_{m_{ij}} z^{-m}, \quad (13.5)$$

$$(i=1,2,\dots,n), (j=1,2,\dots,n)$$

При цьому припускаємо, що $\xi(kT_0)$ — це дискретний білий шум, а a_{0_i} — зміщення i -ї вихідної координати, яке дорівнює $A_{ii}(1)y_{i_{cep}}$. На основі рівності

(13.3) динамічні поліноми $A_i(z_i^{-1})$ можна записати через базовий оператор z таким чином:

$$A_{ii}(z^{-1}) = 1 + a_{1i} z^{-m_i}. \quad (13.6)$$

Розв'яжемо дискретну модель (13.1) відносно $y_i(r_i h_i)$:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} y_1(r_1 h_1) \\ \vdots \\ y_n(r_n h_n) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{A_{11}(z_1^{-1})} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{1}{A_{nn}(z_n^{-1})} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{11}(z^{-1}) & \cdots & C_{1n}(z^{-1}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n1}(z^{-1}) & \cdots & C_{nn}(z^{-1}) \end{bmatrix} \times \\ &\times \begin{bmatrix} \xi_1(kT_0) \\ \vdots \\ \xi_n(kT_0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{A_{11}(z_1^{-1})} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{1}{A_{nn}(z_n^{-1})} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{0_1} \\ \vdots \\ a_{0_n} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (13.7)$$

Домножимо ліву і праву частину на $diag\{z^{p_i m_i}\}$:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} y_1[(r_1 + p_1)h_1] \\ \vdots \\ y_n[(r_n + p_n)h_n] \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} z^{p_1 m_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & z^{p_n m_n} \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{A_{11}(z_1^{-1})} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{1}{A_{nn}(z_n^{-1})} \end{bmatrix} \times \right. \\ &\times \begin{bmatrix} C_{11}(z^{-1}) & \cdots & C_{1n}(z^{-1}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n1}(z^{-1}) & \cdots & C_{nn}(z^{-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1(kT_0) \\ \vdots \\ \xi_n(kT_0) \end{bmatrix} + \\ &+ \begin{bmatrix} \frac{1}{A_{11}(z_1^{-1})} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{1}{A_{nn}(z_n^{-1})} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{0_1} \\ \vdots \\ a_{0_n} \end{bmatrix} \left. \right\}. \end{aligned} \quad (13.8)$$

З урахуванням (13.3), (13.6) складемо таке діофантове рівняння:

$$\begin{bmatrix} C_{11}(z^{-1}) & \cdots & C_{1n}(z^{-1}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n1}(z^{-1}) & \cdots & C_{nn}(z^{-1}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}(z^{-1}) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & A_{nn}(z^{-1}) \end{bmatrix} \times$$

$$\begin{aligned}
& \times \begin{bmatrix} L_{11}(z^{-1}) & \cdots & C_{1n}(z^{-1}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{n1}(z^{-1}) & \cdots & L_{nn}(z^{-1}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} z^{-p_1 m_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & z^{-p_n m_n} \end{bmatrix} \times \\
& \times \begin{bmatrix} F_{11}(z^{-1}) & \cdots & C_{1n}(z^{-1}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ F_{n1}(z^{-1}) & \cdots & F_{nn}(z^{-1}) \end{bmatrix}. \tag{13.9}
\end{aligned}$$

За допомогою (13.9) та з урахуванням (13.6) визначимо першу складову правої частини моделі (13.8):

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} z^{-p_1 m_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & z^{p_n m_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{A_{11}(z^{-1})} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{1}{A_{nn}(z^{-1})} \end{bmatrix} \times \\
& \times \begin{bmatrix} C_{11}(z^{-1}) & \cdots & C_{1n}(z^{-1}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n1}(z^{-1}) & \cdots & C_{nn}(z^{-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1(kT_0) \\ \vdots \\ \xi_n(kT_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z^{-p_1 m_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & z^{p_n m_n} \end{bmatrix} \times \\
& \times \left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{A_{11}(z^{-1})} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{1}{A_{nn}(z^{-1})} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_{11}(z^{-1}) & \cdots & C_{1n}(z^{-1}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{n1}(z^{-1}) & \cdots & L_{nn}(z^{-1}) \end{bmatrix} + \right. \\
& + \left. \begin{bmatrix} z^{-p_1 m_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & z^{-p_n m_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{11}(z^{-1}) & \cdots & C_{1n}(z^{-1}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ F_{n1}(z^{-1}) & \cdots & F_{nn}(z^{-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1(kT_0) \\ \vdots \\ \xi_n(kT_0) \end{bmatrix} \right\} = \\
& = \begin{bmatrix} z^{p_1 m_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & z^{p_n m_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_{11}(z^{-1}) & \cdots & L_{1n}(z^{-1}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{n1}(z^{-1}) & \cdots & L_{nn}(z^{-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1(kT_0) \\ \vdots \\ \xi_n(kT_0) \end{bmatrix} +
\end{aligned}$$

$$+ \begin{bmatrix} \frac{1}{A_{11}(z^{-1})} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{1}{A_{nn}(z^{-1})} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{11}(z^{-1}) & \cdots & F_{1n}(z^{-1}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ F_{n1}(z^{-1}) & \cdots & F_{nn}(z^{-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1(kT_0) \\ \vdots \\ \xi_n(kT_0) \end{bmatrix}. \quad (13.10)$$

Перша складова в правій частині цього рівняння представляє вектор майбутніх помилок прогнозування $\{e_1[(k + p_1 m_1)T_0], \dots, e_n[(k + p_n m_n)T_0]\}^T$.

Якщо вираз (13.10) підставити в рівняння (13.8), то майбутнє значення вихідних координат буде дорівнювати:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} y_1[(r_1 + p_1)h_1] \\ \vdots \\ y_n[(r_n + p_n)h_n] \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{A_{11}(z^{-1})} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{1}{A_{nn}(z^{-1})} \end{bmatrix} \times \\ &\times \begin{bmatrix} F_{11}(z^{-1}) & \cdots & C_{1n}(z^{-1}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ F_{n1}(z^{-1}) & \cdots & F_{nn}(z^{-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1(kT_0) \\ \vdots \\ \xi_n(kT_0) \end{bmatrix} + \\ &+ \begin{bmatrix} \frac{1}{A_{11}(z^{-1})} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{1}{A_{nn}(z^{-1})} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{0_1} \\ \vdots \\ a_{0_n} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_1[(k + p_1 m_1)T_0] \\ \vdots \\ e_n[(k + p_n m_n)T_0] \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} y_1^*[(r_1 + p_1)h_1 | r_1 h_1] \\ \vdots \\ y_n^*[(r_n + p_n)h_n | r_n h_n] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_1[(k + p_1 m_1)T_0] \\ \vdots \\ e_n[(k + p_n m_n)T_0] \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

де прогнозовані значення вихідних координат:

$$\begin{bmatrix} y_1^*[(r_1 + p_1)h_1 | r_1 h_1] \\ \vdots \\ y_n^*[(r_n + p_n)h_n | r_n h_n] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{A_{11}(z^{-1})} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{1}{A_{nn}(z^{-1})} \end{bmatrix} \times$$

$$\begin{aligned}
& \times \begin{bmatrix} F_{11}(z^{-1}) & \cdots & F_{1n}(z^{-1}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ F_{n1}(z^{-1}) & \cdots & F_{nn}(z^{-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1(kT_0) \\ \vdots \\ \xi_n(kT_0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{A_{11}(z^{-1})} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{1}{A_{nn}(z^{-1})} \end{bmatrix} \times \\
& \times \begin{bmatrix} a_{0_1} \\ \vdots \\ a_{0_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1^*[(k + p_1 m_1)T_0 | kT_0] \\ \vdots \\ y_n^*[(k + p_n m_n)T_0 | kT_0] \end{bmatrix}. \tag{13.11}
\end{aligned}$$

Тоді на основі врахування (13.3), (13.6) визначення кожної складової $y_j^*[(r_j + p_j)h_j | r_j h_j]$ із виразу (13.11) виконується на основі різницевої рекурентної процедури:

$$\begin{aligned}
y_j^*[(r_j + p_j)h_j | r_j h_j] &= -a_{1j} y_j^*[(r_j + p_j - 1)h_j | r_j h_j] + \\
&+ F_{j1}(z^{-1})\xi_1(kT_0) + \dots + F_{jn}(z^{-1})\xi_n(kT_0) + a_{0_j}.
\end{aligned}$$

Визначення матричного полінома $\begin{bmatrix} F_{11}(z^{-1}) & \cdots & F_{1n}(z^{-1}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ F_{n1}(z^{-1}) & \cdots & F_{nn}(z^{-1}) \end{bmatrix}$ виконується

шляхом розв'язування матричного діофантового рівняння (13.9), яке можна записати у формі одновимірних діофантових рівнянь:

$$C_{ij}(z^{-1}) = A_{ii}(z^{-1})L_{ij}(z^{-1}) + z^{-p_i m_i} F_{ij}(z^{-1})$$

при $i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, n$.

Ці рівняння розв'язуються відносно поліномів $F_{ij}(z^{-1})$ при заданих p_i і поліномах $A_{ii}(z^{-1})$, $C_{ij}(z^{-1})$ на основі методики, приведеної в розділі 12, згідно з

$$F_{ij}(z^{-1}) = (-1)^{p_i} a_{1_{ii}}^{p_i} c_{ij}(z^{-1}). \tag{13.12}$$

Розділ 14. Прогнозування нестационарних процесів на основі моделей авторегресії і інтегрованого ковзного середнього з різномітровою дискретизацією [2, 3]

Динаміка нестационарного процесу представлена математичною моделлю АРІКС з різномітровою дискретизацією:

$$A(z_1^{-1})\nabla y(rh) = C(z^{-1})\xi(kT_0) + a_0, \quad (14.1)$$

де перша різниця $\nabla y(rh) = y(rh) - y[(r-1)h]$.

Поліном $A(z_1^{-1})$ має вигляд (2.5):

$$A(z_1^{-1}) = 1 + a_1 z_1^{-1}, \quad (14.2)$$

а поліном

$$C(z^{-1}) = 1 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2} + \dots + c_{n_c} z^{-n_c}. \quad (14.3)$$

Співвідношення періодів дискретизації у (14.1) дорівнює:

$$h = mT_0, \quad (14.4)$$

при якому оператори зворотного зсуву в поліномах (14.2), (14.3) зв'язані співвідношенням

$$z_1^{-1} = z^{-m}. \quad (14.5)$$

У результаті поліном $A(z_1^{-1})$ можна записати:

$$A(z_1^{-1}) = 1 + a_1 z^{-m}. \quad (14.6)$$

На основі рівностей (14.4), (14.5), (14.6) рівняння АРІКС (14.1) запишемо у формі:

$$(1 - z^{-m})A(z^{-1})y(kT_0) = C(z^{-1})\xi(kT_0) + a_0.$$

Розв'яжемо це рівняння відносно $y(kT_0)$ і зробимо зсув вперед на $h = mT_0$:

$$\begin{aligned} y[(k+m)T_0] &= y\left[\left(\left[\frac{k}{m}\right] + 1\right)h\right] = \\ &= z^m \frac{C(z^{-1})}{(1 - z^{-m})A(z^{-1})} \xi(kT_0) + \frac{a_0}{(1 - z^{-m})A(z^{-1})}. \end{aligned} \quad (14.7)$$

Складемо діофантове рівняння:

$$C(z^{-1}) = (1 - z^{-m})A(z^{-1})L(z^{-1}) + z^{-m}F(z^{-1}), \quad (14.8)$$

на основі якого вираз (14.7) можна перетворити до вигляду:

$$\begin{aligned} y[(k+m)T_0] &= y\left[\left(\left[\frac{k}{m}\right] + 1\right)h\right] = \\ &= z^m L(z^{-1})\xi(kT_0) + \frac{F(z^{-1})}{(1 - z^{-m})A(z^{-1})} + \frac{a_0}{(1 - z^{-m})A(z^{-1})}. \end{aligned} \quad (14.9)$$

Перша складова в правій частині (14.9) представляє помилку прогнозування вихідного сигналу y на m періодів дискретизації T_0 або на один період h , тобто:

$$e[(k+m)T_0] = e\left[\left(\left[\frac{k}{m}\right] + 1\right)h\right] = z^m L(z^{-1})\xi(kT_0).$$

Тоді прогнозоване значення вихідного сигналу буде:

$$\begin{aligned} y^*[(k+m)T_0 | kT_0] &= y^*\left[\left(\left[\frac{k}{m}\right] + 1\right)h \middle| \left[\frac{k}{m}\right]h\right] = \\ &= \frac{F(z^{-1})}{(1 - z^{-m})A(z^{-1})} + \frac{a_0}{(1 - z^{-m})A(z^{-1})}. \end{aligned} \quad (14.10)$$

Поліном $F(z^{-1})$ однозначно визначається із діофантового рівняння (14.8)

при $L(z^{-1}) = C(z^{-1})$, тобто:

$$F(z^{-1}) = (1 - a_1 + a_1 z^{-m})c(z^{-1}).$$

Розділ 15. Синтез та адаптивна настройка функцій прогнозування динамічних процесів у приростах змінних для моделей з різнотемповою дискретизацією [8]

Вихідна динамічна модель процесу другого порядку з різнотемповою дискретизацією має вигляд [4]:

$$\begin{aligned} y\left[\left[\frac{k}{m}\right]h\right] = & -a_1 y\left[\left(\left[\frac{k}{m}\right]-1\right)h\right] - a_2 y\left[\left(\left[\frac{k}{m}\right]-2\right)h\right] + \\ & + b_1 u\left[\left(\left[\frac{k}{m}\right]-d\right)h\right] + b_2 u\left[\left(\left[\frac{k}{m}\right]-d-1\right)h\right] + \\ & + v\left[\left[\frac{k}{m}\right]h\right] + c_1 v\left[\left[\frac{k}{m}\right]h - T_0\right] + \dots + c_{2m} v\left[\left[\frac{k}{m}\right]h - 2mT_0\right] + a_0, \end{aligned} \quad (15.1)$$

яку можна записати у формі ARMAX:

$$A(z_1^{-1})y(rh) = z_1^{-d}B(z_1^{-1})u(rh) + C(z^{-1})v(kT_0) + a_0, \quad (15.2)$$

де збільшений період дискретизації h вихідної координати y визначається співвідношенням:

$$h = mT_0, \quad (15.3)$$

в якому m — ціле число, що є більшим за одиницю, а $\frac{k}{m}$ — ціле число від ділення номера дискретного відліку k на коефіцієнт m . Поліноми різнотемпової моделі (15.2) мають вигляд:

$$A(z_1^{-1})y(rh) = 1 + a_1 z_1^{-1} + a_2 z_1^{-2}, \quad (15.4)$$

$$B(z_1^{-1}) = b_0 + b_1 z_1^{-1}, \quad (15.5)$$

$$C(z^{-1}) = 1 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2} + \dots + c_{2m} z^{-2m}. \quad (15.6)$$

На основі (5.3) співвідношення операторів зворотного зсуву в поліномах (15.4), (15.5), (15.6) буде:

$$z_1^{-1} = z^{-m}. \quad (15.7)$$

Таким чином, оператор z^{-m} визначає зворотний зсув на період h . Тоді рівності (15.4), (15.5) приймуть вигляд

$$A(z^{-1}) = 1 + a_1 z^{-m} + a_2 z^{-2m}, \quad (15.8)$$

$$B(z^{-1}) = b_0 + b_1 z^{-m}, \quad (15.9)$$

а вихідна модель (15.2) запишеться так:

$$A(z^{-1})y(rh) = z^{-dm}B(z^{-1})u(rh) + C(z^{-1})v(kT_0) + a_0. \quad (15.10)$$

Випадкові збурення $v(kT_0)$ постійно дрейфують з низькою частотою і на проміжках часу, які можна порівняти з інерційністю процесу, мають ненульове середнє. Модель динаміки такого збурення можна описати марківським процесом першого порядку:

$$v[(k+1)T_0] = g \cdot v(kT_0) + \xi(kT_0), \quad (15.11)$$

де $\{\xi(kT_0)\}$ — послідовність збурень у вигляді дискретного білого шуму з нульовим середнім. Згідно з [9] у випадку $g = [0,8 \div 0,95]$ на виході фільтра (15.11) в спектрі сигналу $v(k+1)$ будуть мати вплиове значення низькочастотні складові. Параметр a_0 в моделі (15.10) визначає рівень процесу і може змінюватися за часом внаслідок зміни середнього значення координати y .

При врахуванні рівності (5.3), (15.7), (15.8), (15.9) запишемо модель (15.10) у такому вигляді:

$$\begin{aligned} y[(r+d)h] = y[(k+dm)T_0] &= \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})}u(rh) + \\ &+ z^{dm} \frac{C(z^{-1})}{A(z^{-1})}v(kT_0) + \frac{a_0}{A(z^{-1})}. \end{aligned} \quad (15.12)$$

Складемо діофантове рівняння:

$$C(z^{-1}) = A(z^{-1})L(z^{-1}) + z^{-dm}F(z^{-1}), \quad (15.13)$$

на основі якого вираз (15.12) можна перетворити таким чином:

$$y[(r+d)h] = y[(k+dm)T_0] = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})}u(rh) +$$

$$+ z^{dm} L(z^{-1}) v(kT_0) + \frac{F(z^{-1})}{A(z^{-1})} v(kT_0) + \frac{a_0}{A(z^{-1})}.$$

Тоді функція прогнозування координати y на d періодів дискретизації h буде мати вигляд:

$$\begin{aligned} y^*[(r+d)h | rh] &= y^*[(k+dm)T_0 | kT_0] = \\ &= \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} u(rh) + \frac{F(z^{-1})}{A(z^{-1})} v(kT_0) + \frac{a_0}{A(z^{-1})}, \end{aligned} \quad (15.14)$$

а помилка прогнозування $e[(r+d)h] = e[(k+dm)T_0] = z^{dm} L(z^{-1}) v(kT_0)$.

Розглянемо методику визначення поліному $F(z^{-1})$ із діофантового рівняння (15.13) з врахуванням (15.6), (15.8), (15.10).

а). При прогнозуванні на $1h = mT_0$ діофантове рівняння (15.13) запишеться у вигляді:

$$C(z^{-1}) = (1 + a_1 z^{-m} + a_2 z^{-2m}) L(z^{-1}) + z^{-m} F(z^{-1}).$$

Вибираємо поліном $L(z^{-1}) = C(z^{-1})$. Тоді з діофантового рівняння визначаємо:

$$F(z^{-1}) = -(a_1 + a_2 z^{-m}) C(z^{-1}).$$

б). При прогнозуванні на $2h = 2mT_0$ діофантове рівняння запишеться так:

$$C(z^{-1}) = (1 + a_1 z^{-m} + a_2 z^{-2m}) L(z^{-1}) + z^{-2m} F(z^{-1}).$$

При виборі полінома $L(z^{-1}) = (1 - a_1 z^{-m}) C(z^{-1})$ поліном $F(z^{-1})$ однозначно визначається:

$$F(z^{-1}) = [(a_1^2 - a_2) + a_1 a_2 z^{-m}] C(z^{-1}).$$

с). При прогнозуванні на $3h = 3mT_0$ запишемо діофантове рівняння (13.13):

$$C(z^{-1}) = (1 + a_1 z^{-m} + a_2 z^{-2m}) L(z^{-1}) + z^{-3m} F(z^{-1}).$$

Виберемо поліном $L(z^{-1}) = [1 - a_1 z^{-m} + (a_1^2 - a_2) z^{-2m}] C(z^{-1})$.

Тоді однозначно визначаємо:

$$F(z^{-1}) = -[(a_1^3 - 2a_1 a_2) + a_2 (a_1^2 - a_2) z^{-m}] C(z^{-1}).$$

d). При прогнозуванні на $4h = 4mT_0$ діофантове рівняння буде:

$$C(z^{-1}) = (1 + a_1 z^{-m} + a_2 z^{-2m})L(z^{-1}) + z^{-4m}F(z^{-1}).$$

Шляхом вибору полінома $L(z^{-1}) = [1 - a_1 z^{-m} + (a_1^2 - a_2)z^{-2m}] -$
 $-(a_1^3 - 2a_1 a_2)z^{-3m}]C(z^{-1})$ із діофантового рівняння визначаємо:

$$F(z^{-1}) = -[(a_1^4 - 3a_1^2 a_2 + a_2^2) + a_2(a_1^3 - 2a_1 a_2)z^{-m}]C(z^{-1}).$$

Таким чином, при прогнозуванні вихідної координати процесу (15.10) на d періодів дискретизації h при $L(z^{-1}) = [1 + l_1 z^{-m} + l_2 z^{-2m} + \dots + l_{(d-1)} z^{-(d-1)m}] \times$
 $\times C(z^{-1})$ структура полінома $F(z^{-1})$ в загальному вигляді запишеться:

$$F(z^{-1}) = (f_0 + f_1 z^{-m})C(z^{-1}), \quad (15.15)$$

а функція прогнозування (15.14) набуде вигляду:

$$\begin{aligned} y^*[(r+d)h | rh] &= y^*[(k+dm)T_0 | kT_0] = \\ &= \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})}u(rh) + \frac{(f_0 + f_1 z^{-m})}{A(z^{-1})}C(z^{-1})v(kT_0) + \frac{a_0}{A(z^{-1})}. \end{aligned} \quad (15.16)$$

Припустимо, що збурення $v(kT_0)$ в реальному процесі не вимірюється.

Тоді з моделі (15.10) визначимо:

$$C(z^{-1})v(kT_0) = A(z^{-1})y(rh) - z^{-dm}B(z^{-1})u(rh) - a_0.$$

Підставимо це значення в рівняння (15.16). В результаті будемо мати:

$$\begin{aligned} y^*[(r+d)h | rh] &= y^*[(k+dm)T_0 | kT_0] = \\ &= \frac{[1 - z^{-dm}(f_0 + f_1 z^{-m})B(z^{-1})]}{A(z^{-1})}u(rh) + \\ &+ (f_0 + f_1 z^{-m})y(rh) + \frac{a_0(1 - f_0 - f_1 z^{-m})}{A(z^{-1})}. \end{aligned}$$

Враховуючи вираз (15.8), дістанемо функцію прогнозування вихідної координати:

$$\begin{aligned} y^*[(r+d)h | rh] &= -a_1 y^*\{[r+(d-1)]h | (r-1)h\} - \\ &- a_2 y^*\{[r+(d-2)]h | (r-2)h\} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (1 + a_1 z^{-m} + a_2 z^{-2m})(f_0 + f_1 z^{-m})y(rh) + [1 - z^{-dm}(f_0 + \\
& + f_1 z^{-m})]B(z^{-1})u(rh) + a_0(1 - f_0 - f_1 z^{-m}). \quad (15.7)
\end{aligned}$$

Запишемо це рівняння із зворотним зсувом за часом на dh :

$$\begin{aligned}
y^*[rh|(r-d)h] &= -a_1 y^*[(r-1)h|(r-d-1)h] - \\
& - a_2 y^*[(r-2)h|(r-d-2)h] + \\
& + (1 + a_1 z^{-m} + a_2 z^{-2m})(f_0 + f_1 z^{-m})y[(r-d)] + \\
& + [1 - z^{-dm}(f_0 + f_1 z^{-m})]B(z^{-1})u[(r-d)] + \\
& + a_0(1 - f_0 - f_1 z^{-m})z^{-dm}. \quad (15.8)
\end{aligned}$$

Введемо такі різницеві оператори:

$$\begin{aligned}
\Delta_{dh} y^* \{[r + (d-1)]h|(r-1)h\} &= y^*[[r + (d-1)]h|(r-1)h] - \\
& - y^*[(r-1)h|(r-d-1)h], \\
\Delta_{dh} y^* \{[r + (d-2)]h|(r-2)h\} &= \\
& y^*[[r + (d-2)]h|(r-2)h] - y^*[(r-2)h|(r-d-2)h], \\
\Delta_{dh} y(rh) &= y(rh) - y[(r-d)h], \\
\Delta_{dh} u(rh) &= u(rh) - u[(r-d)h], \\
\Delta_{dh} a_0(1 - f_0 - f_1 z^{-m}) &= a_0(1 - f_0 - f_1 z^{-m}) - \\
& - a_0(1 - f_0 - f_1 z^{-m})z^{-dm}. \quad (15.19)
\end{aligned}$$

Віднімемо почленно вираз (15.18) з (15.17) при врахуванні (15.8). Тоді прогнозоване значення y буде виражене через прирости змінних:

$$\begin{aligned}
y^*[(r+d)h|rh] &= y(rh) - a_1 \Delta_{dh} y^* \{[r + (d-1)]h|(r-1)h\} - \\
& - a_2 \Delta_{dh} y^* \{[r + (d-2)]h|(r-2)h\} + \\
& + (1 + a_1 z^{-m} + a_2 z^{-2m})(f_0 + f_1 z^{-m})\Delta_{dh} u(rh) + \\
& + [1 - z^{-dm}(f_0 + f_1 z^{-m})]B(z^{-1})\Delta_{dh} u(rh) + \\
& + \Delta_{dh} a_0(1 - f_0 - f_1 z^{-m}), \quad (15.20)
\end{aligned}$$

де прогнозовані координати $y^*[r+(d-1)h|(r-1)h]$, $y^*[r+(d-2)h|(r-2)h]$, які входять до різницевих операторів (15.19), визначаються на основі процедури (15.17), відповідно, при прогнозуванні на $(d-1)h$ та $(d-2)h$. При цьому необхідно окремо обчислити коефіцієнти f_0, f_1 при визначенні $F(z^{-1})$ з діофантового рівняння (15.13), відповідно, для прогнозування на час $(d-1)h$ та $(d-2)h$.

Адаптивна настройка параметрів функції прогнозування. Коефіцієнти математичної моделі (15.10) і розробленої функції прогнозування (15.20) можуть змінюватися за часом. Тому необхідно передбачати адаптивну настройку параметрів функції (15.20). Для цього її запишемо із зворотним зсувом на час dh :

$$\begin{aligned} y(rh) = & y[(r-d)h] - a_1 \Delta_{dh} y[(r-1)h] - a_2 \Delta_{dh} y[(r-2)h] + \\ & + (1 + a_1 z^{-m} + a_2 z^{-m})(f_0 + f_1 z^{-m}) \Delta_{dh} y[(r-d)h] + \\ & + [1 - z^{-dm}(f_0 + f_1 z^{-m})] B(z^{-1}) \Delta_{dh} u[(r-d)h] + \\ & + \Delta_{dh} a_0 (1 - f_0 - f_1 z^{-m}). \end{aligned}$$

Після перемноження складових і врахування (15.7), (15.8), (15.9) попередній вираз можна записати так:

$$\begin{aligned} y(rh) = & y[(r-d)h] - a_1 \Delta_{dh} y[(r-1)h] - a_2 \Delta_{dh} y[(r-2)h] + \\ & + f_0 \Delta_{dh} y[(r-d)h] + (a_1 f_0 + f_1) \Delta_{dh} y[(r-d-1)h] + \\ & + (a_2 f_0 + a_1 f_1) \Delta_{dh} y[(r-d-2)h] + a_2 f_1 \Delta_{dh} y[(r-d-3)h] + \\ & + b_0 \Delta_{dh} u(rh) + b_1 \Delta_{dh} u[(r-1)h] - b_0 f_0 \Delta_{dh} u[(r-d)h] - \\ & - (b_0 f_1 + b_1 f_0) \Delta_{dh} u[(r-d-1)h] - \\ & - b_1 f_1 \Delta_{dh} u[(r-d-2)h] + \Delta_{dh} a_0 (1 - f_0 - f_1 z^{-m}). \end{aligned} \quad (15.21)$$

При введенні коефіцієнтів $f'_1 = a_1 f_0 + f_1$, $f'_2 = a_2 f_0 + a_1 f_1$, $f'_3 = a_2 f_1$, $b'_2 = -b_0 f_0$, $b'_3 = -b_0 f_1 + b_1 f_0$, $b'_4 = -b_1 f_1$, $a'_0 = \Delta_{dh} a_0 (1 - f_0 - f_1 z^{-m})$ вираз (15.21) можна представити у формі перемноження векторів:

$$y(rh) = \bar{X}^T(rh) \cdot \bar{\theta} + \xi(rh), \quad (15.22)$$

де $\bar{X}(rh)$ — вектор вимірюваних відліків координат:

$$\begin{aligned}\bar{X}^T(rh) = \{ & y[(r-d)h], \Delta_{dh}y[(r-1)h], \Delta_{dh}y[(r-2)h], \\ & \Delta_{dh}y[(r-d)h], \Delta_{dh}y[(r-d-1)h], \Delta_{dh}y[(r-d-2)h], \\ & \Delta_{dh}y[(r-d-3)h], \Delta_{dh}u(rh), \Delta_{dh}u[(r-1)h], \\ & \Delta_{dh}u[(r-d)h], \Delta_{dh}u[(r-d-1)h], \Delta_{dh}u[(r-d-2)h], 1\},\end{aligned}\quad (15.23)$$

$\bar{\theta}^T$ — вектор невідомих параметрів функції прогнозування, який необхідно періодично оцінювати на основі вимірюваних відліків вектора (15.23):

$\bar{\theta}^T = \{1, -a_1, -a_2, f_0, f'_1, f_2, f_3, b_0, b_1, b_2, b_3, b_4, a'_0\}$; $\varepsilon(rh)$ — дискретний білий шум.

Для оцінки вектора параметрів в реальному часі астосуємо рекурентний метод найменших квадратів [8].

$$\hat{\bar{\theta}}(rh) = \hat{\bar{\theta}}[(r-1)h] + K(rh)\{y(rh) - \bar{X}^T(rh)\hat{\bar{\theta}}[(r-1)h]\}, \quad (15.24)$$

$$K(rh) = P[(r-1)h]\bar{X}(rh)\{\beta + \bar{X}^T(rh)\bar{P}[(r-1)h]\bar{X}(rh)\}^{-1}, \quad (15.25)$$

$$\begin{aligned}P(rh) = & \frac{1}{\beta}\{P[(r-1)h] - P[(r-1)h]\bar{X}(rh)\} \times \\ & \times \{\beta + \bar{X}^T(rh)\{P[(r-1)h]\bar{X}(rh)\}^{-1}\bar{X}^T(rh)P[(r-1)h]\},\end{aligned}\quad (15.26)$$

де фактор експоненціального забування доцільно вибрати в межах $0,9 < \beta < 1$.

Початкові значення матриці коваріації $P(0)$ можна вибрати $P(0) = \alpha I$, де α — велике додатне число, а I — одинична матриця.

Список використаних джерел

1. Бідюк П.І. Методи прогнозування. Т. 1 / Бідюк П.І., Меньяйленко О.С., Половцев О.В. — Луганськ: Альма-матер, 2008. — 301 с.
2. Бідюк П.І. Аналіз часових рядів: навч. посібник / Бідюк П.І., Романенко В.Д., Тимощук О.Л. — К.: Політехніка, 2012. — 317 с.
3. Романенко В.Д. Прогнозирование динамических процессов на основе математических моделей временных рядов с разнотемповой дискретизацией /

Романенко В.Д. // Системні дослідження та інформаційні технології. – 2005. – № 2. – С. 23-41.

4. Романенко В.Д. Прогнозирование и минимизация дисперсий гетероскедастических процессов на основе моделей с разнотемповой дискретизацией / Романенко В.Д. // Системні дослідження та інформаційні технології. – 2007. – № 2. – С. 115-130.

5. Романенко В.Д. Прогнозирование максимальных условных дисперсий многомерных процессов с разнотемповой дискретизацией на основе адаптивных моделей GARCH / Романенко В.Д., Милявский Ю.Л. // Системні дослідження та інформаційні технології. – 2009. – № 4. – С. 92-108.

6. Романенко В.Д. Синтез и адаптивная настройка моделей GARCH для прогнозирования дисперсий гетероскедастических процессов с разнотемповой дискретизацией / Романенко В.Д., Билый А.В. // Системні дослідження та інформаційні технології. – 2008. – № 1. – С. 114-126.

7. Романенко В.Д. Метод адаптивного прогнозування максимальних умовних дисперсій співвідношень вихідних координат процесу з різнотемповою дискретизацією / Романенко В.Д., Мілявський Ю.Л. // Наукові вісті НТУУ «КПІ». – 2011. – № 5. – С. 59-64.

8. Романенко В.Д. Синтез и адаптивная настройка функций прогнозирования динамических процессов в приращениях переменных для моделей с разнотемповой дискретизацией / Романенко В.Д. // Системні дослідження та інформаційні технології. – 2007. – № 4. – С. 15-25.

9. Box, George E.P. Time series analysis : forecasting and control / George E.P. Box, Gwilym M. Jenkins, Gregory C. Reinsel, Greta M. Ljung. – 5th edition. – Hoboken, New Jersey : Wiley, 2016. – 712 p. – ISBN 978-1-118-67502-1.