УДК 519.2

ОПЕРАТОРИ КВАНТОВОЇ ФІЗИКИ В ДИСКРЕТНИХ ЙМОВІРНІСНИХ СТРУКТУРАХ

А. С. Грабовець[1, a]

[1] *Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», НН Фізико-технічний інститут*

Анотація

Однією з основних моделей, що описують системи бозонів зі змінним числом частинок є простір Фока з визначеними на ньому операторами. Ізоморфізм Сігала встановлює відповідність між простором Фока та простором інтегрованих з квадратом функціоналів від гаусового білого шуму.

В даній роботі побудовано наближення гаусового білого шуму шумом, побудованим на основі бернулівських випадкових величин. Показано, що елементи бернулівського шуму слабко збігаються до відповідних елементів гаусового білого шуму.

Доведено аналог формули Динкіна для обчислення моментів добутків елементів бернулівського шуму, існування стохастичної експоненти, загальну формулу для степенів Віка та аналог діаграм Фейнмана для обчислення моментів добутків Віка для елементів бернулівського шуму.

Ключові слова: простір Фока, гаусовий білий шум, степені Віка, стохастична експонента, діаграми Фейнмана

Вступ

Взаємозв'язок квантової теорії поля та статистичної фізики дає можливість переформулювати задачу побудови бозонного квантового поля у задачу побудови узагальненого випадкового поля, а до вирішення задач математичної фізики можуть бути застосовані методи теорії ймовірностей.

Однією з основних моделей, що описують системи елементарних частинок, є простір Фока, а ізоморфізм Сігала [1] встановлює відповідність між простором Фока та простором інтегрованих з квадратом функціоналів від гаусового білого шуму.

Основною метою даної роботи є дослідження властивостей простору функціоналів від гаусового білого шуму та побудова і дослідження наближення гаусового білого шуму шумом, побудованим на основі бернулівських випадкових величин. Випадкові величини, влаштовані схожим чином, досліджувались в роботах [2], [3].

1. Гаусове числення

1.1. Простір Фока

Простір Фока – конструкція, що використовується в квантовій теорії поля для опису стану системи однакових частинок. Для побудови простору Фока спершу введемо поняття тензорного добутку гільбертових просторів [4].

Нехай $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$– гільбертові простори зі скалярними добутками $(\cdot,\cdot)_1$ і $(\cdot,\cdot)_2$ відповідно. Для кожного $\varphi_1 \in \mathcal{H}_1, \varphi_2 \in \mathcal{H}_2$ визначимо білінійну форму $\varphi_1 \otimes \varphi_2$, що діє з $\mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2$:

$$(\varphi_1 \otimes \varphi_2)\langle \psi_1, \psi_2 \rangle = (\psi_1, \varphi_1)_1 (\psi_2, \varphi_2)_2 .$$

Нехай $\mathcal{E}$– множина скінченних лінійних комбінацій таких білінійних форм. Визначимо скалярний добуток $(\cdot,\cdot)$ та продовжимо його на $\mathcal{E}$ за лінійністю:

$$(\varphi \otimes \psi, \eta \otimes \mu) = (\varphi, \eta)_1 (\psi, \mu)_2 .$$

Означення 1.1. *Визначимо тензорний добуток $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ як поповнення $\mathcal{E}$ відносно скалярного добутку $(\cdot,\cdot)$.*

Нехай $\mathcal{H}$ – комплексний гільбертів простір. Визначимо $\mathcal{F}_n(\mathcal{H}) = \mathcal{H} \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}$ (n разів), $\mathcal{F}_0(\mathcal{H}) = \mathbb{C}$.

Нехай $f_n \in \mathcal{F}_n$. Назвемо елемент f_n симетричним, якщо

$$\forall \sigma \in P_n \quad f_n = f_n(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) = f_n\left(\varphi_{\sigma(1)}, \ldots, \varphi_{\sigma(n)}\right).$$

Множину $\mathcal{F}_n^s$ таких симетричних f_n, що є підпростором $\mathcal{F}_n$, називатимемо n-кратним симетричним тензорним добутком $\mathcal{H}$ [4].

Означення 1.2. $\mathcal{F}_s(\mathcal{H}) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{F}_n^s(\mathcal{H})$ *– симетричний простір Фока над $\mathcal{H}$ або бозонний простір Фока над $\mathcal{H}$.*

1.2. Гаусовий білий шум в гільбертовому просторі

Означення 1.3. *Випадкова величина ξ називається нормально розподіленою з параметрами a і σ^2, якщо її густина ймовірності має вигляд:*

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-a)^2\right\}.$$

[a] nastiahrabovets@gmail.com

Характеристична функція нормального розподілу з параметрами a і σ^2 має вигляд:

$$\varphi(t) = \exp\left\{ita - \frac{t^2\sigma^2}{2}\right\}.$$

Можна помітити, що нормальний розподіл повністю визначається значенням середнього та дисперсії.

Означення 1.4. *Нехай $H-$ гільбертів простір зі скалярним добутком $(\cdot,\cdot)$. Припустимо, для кожного $h \in H$ існує нормально розподілена випадкова величина (h,ξ) з наступними властивостями:*

1) лінійність: $\forall a_1, a_2 \in \mathbb{R}, h_1, h_2 \in H$:

$$(a_1h_1 + a_2h_2, \xi) = a_1(h_1,\xi) + a_2(h_2,\xi),$$

2) $E(h,\xi)^2 = \|h\|^2, E(h,\xi) = 0.$

Набір сумісно гаусових випадкових величин $\{(h,\xi); h \in H\}$ будемо називати гаусовим білим шумом в H.

Означення 1.5. *Нехай $\xi-$ випадкова величина зі скінченними моментами. Тоді n-тий степінь Віка $:\xi^n:, n = 0,1,\ldots$ – це поліном n-го степеня $P_n(\xi)$, що однозначно визначається співвідношеннями:*

$$P_0(x) = 1,$$

$$\frac{\partial}{\partial x}P_n(x) = nP_{n-1}(x), n = 1,2,\ldots,$$

$$E(P_n(\xi)) = 0, n = 1,2,\ldots.$$

Приклад 1.1. *Нехай $\xi-$ випадкова величина зі стандартним нормальним розподілом. Тоді $:\xi^n: = H_n(\xi)$, де*

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2/2}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2/2}$$

– многочлен Ерміта.

Якщо ж ξ – випадкова величина з розподілом $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$, то $:\xi^n: = \sigma^n H_n\left(\frac{\xi}{\sigma}\right)$.

Означення 1.6. *Експоненційна генератриса для послідовності $\{:\xi^n:\}-$ це степеневий ряд виду:*

$$:e^{\alpha\xi}: = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n :\xi^n:}{n!}$$

Ця величина називається стохастичною експонентою (або експонентою Віка) для випадкової величини ξ.

Лема 1.1. *Якщо ряд, даний в означенні 1.6 збігається, то стохастична експонента може бути визначена наступним чином:*

$$:\exp(\alpha\xi): = \frac{\exp(\alpha\xi)}{E\exp(\alpha\xi)}.$$

1.3. Діаграми Фейнмана

Теорема 1.2 (Формула Динкіна)**.** *Нехай H – гільбертів простір зі скалярним добутком $(\cdot,\cdot)$, $\{(h,\xi)\}$ – гаусовий білий шум на H. Тоді для довільного парного n:*

$$E[(h_1,\xi)\cdot\ldots\cdot(h_n,\xi)] = \sum_{\pi\in\Pi}\prod_{s\in\pi}(h_i,h_j),$$

де Π – множина всіх можливих розбиттів множини $\{1,\ldots,n\}$ на пари.

Якщо n – непарне, то:

$$E[(h_1,\xi)\cdot\ldots\cdot(h_n,\xi)] = 0.$$

Приклад 1.2. *Нехай H – гільбертів простір зі скалярним добутком $(\cdot,\cdot)$, (h,ξ) – гаусовий білий шум на H. Тоді:*

$$E[(h_1,\xi)\cdot(h_2,\xi)\cdot(h_3,\xi)\cdot(h_4,\xi)] =$$

$$= (h_1,h_2)(h_3,h_4) + (h_1,h_3)(h_2,h_4) + (h_1,h_4)(h_2,h_3).$$

Наслідок 1.1. *Формула Динкіна дає можливість побудувати мнемонічне правило для обчислення математичного очікування добутків гаусових випадкових величин – діаграми Фейнмана.*

Нехай H – гільбертів простір зі скалярним добутком $(\cdot,\cdot)$, $\{(h,\xi)\}$ – гаусовий білий шум на H, $\{(h_1,\xi),\ldots,(h_n,\xi)\} \subset \{(h,\xi)\}$. Для того, щоб обчислити $E\left[(h_1,\xi)^{k_1}\cdot\ldots\cdot(h_n,\xi)^{k_n}\right]$, побудуємо граф, де кожному множнику $(h_i,\xi)^{k_1}$ відповідає набір вершин $\{(h_i)_1,\ldots,(h_i)_{k_i}\}$, з кожної вершини виходить по одному відростку. Діаграму G отримуємо, з'єднавши всі відростки між собою. Тоді:

$$E\left[(h_1,\xi)^{k_1}\cdot\ldots\cdot(h_n,\xi)^{k_n}\right] = \sum_{\{G\}}\prod_{((h_i)_l,(h_j)_m)\in L_G}(h_i,h_j),$$

де $\{G\}$ – множина всіх можливих діаграм, L_G – множина ребер в діаграмі G.

Приклад 1.3. *Для того, щоб обчислити значення $E[(h_1,\xi)\cdot(h_2,\xi)\cdot(h_3,\xi)\cdot(h_4,\xi)]$, побудуємо граф з набором вершин $\{h_1,h_2,h_3,h_4\}$. З кожної вершини виходить по одному відростку:*

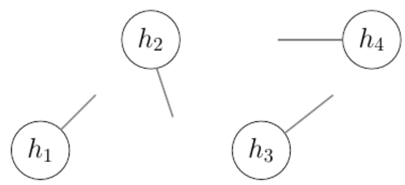

Рис. 1

Побудуємо множину діаграм $\{G\}$. Кожна така діаграма буде відповідати одному з сопособів розбиття на пари множини $\{h_1,h_2,h_3,h_4\}$. Для даного прикладу їх буде всього три:

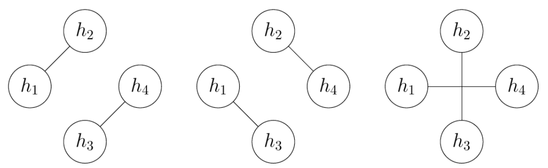

Рис. 2

Першій діаграмі буде відповідати доданок $(h_1, h_2)(h_3, h_4)$, другій діаграмі – $(h_1, h_3)(h_2, h_4)$, а третій – $(h_1, h_4)(h_2, h_3)$. Просумувавши, отримуємо такий же результат, як в прикладі 1.2:

$$E\left[(h_1, \xi) \cdot (h_2, \xi) \cdot (h_3, \xi) \cdot (h_4, \xi)\right] =$$

$$= (h_1, h_2)(h_3, h_4) + (h_1, h_3)(h_2, h_4) + (h_1, h_4)(h_2, h_3)$$

Діаграми Фейнмана також використовуються для знаходження моментів більш складних функцій, таких, як, наприклад, степенів та добутків Віка [5].

Нехай H – гільбертів простір зі скалярним добутком $(\cdot, \cdot)$, (h, ξ) – гаусовий білий шум на H. Введемо величину

$$A((h, \xi)) := \prod_{i=1}^{N} :(h_i, \xi)^{k_i}: .$$

Побудуємо граф, де кожному множнику $:(h_i, \xi)^{k_i}:$ відповідає вершина h_i з k_i різними вільними відростками. Діаграму G отримуємо, з'єднавши всі відростки між собою (при цьому з'єднувати відростки, що виходять з однієї вершини не можна).

Теорема 1.3 (Діаграми Фейнмана для степенів Віка)**.**

$$EA((h, \xi)) = \sum_{\{G\}} \prod_{(i_m, j_l) \in L_G} (h_i, h_j),$$

де $\{G\}$ – множина всіх можливих діаграм, L_G – множина спарованих відростків в діаграмі G.

Приклад 1.4. *Нехай H – гільбертів простір зі скалярним добутком $(\cdot, \cdot)$, (h, ξ) – гаусовий білий шум на H.*

$$A((h, \xi)) =: (h_1, \xi)^2 :: (h_2, \xi)^2 :$$

Побудуємо граф з вершинами h_1, h_2 і відростками $1_1, 1_2, 2_1, 2_2$:

Рис. 3

Побудуємо множину діаграм $\{G\}$. Кожна така діаграма буде відповідати одному способу з'єднати всі відростки, що виходять з різних вершин, між собою. Для даного прикладу їх буде всього дві:

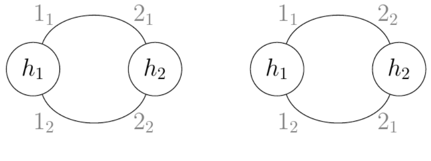

Рис. 4

В даному прикладі і першій, і другій діаграмі буде відповідати доданок $(h_1, h_2)^2$, отже:

$$EA((h, \xi)) = 2(h_1, h_2)^2.$$

2. Бернулівський шум

2.1. Означення бернулівсього шуму та слабка збіжність

Нехай $\{\varepsilon_n, n \geq 1\}$ – послідовність незалежних випадкових величин з розподілом Бернуллі:

$$\varepsilon = \begin{cases} 1, & \frac{1}{2} \\ -1, & \frac{1}{2} \end{cases}$$

Визначимо

$$\forall f \in C\left([0, 1]\right) : \ \varphi\left(f\right) := \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{\varepsilon_k}{\sqrt{n}}.$$

Означення 2.1. *Множину випадкових величин $\{\varphi(f) : f \in C\left([0, 1]\right)\}$ будемо називати бернулівським шумом на $C\left([0, 1]\right)$.*

Наступна теорема показує можливість та коректність наближення гаусового білого шуму бернулівським шумом.

Теорема 2.1 (Про слабку збіжність)**.** *Для довільної $f \in C\left([0, 1]\right)$:*

$$\varphi(f) \Longrightarrow N(0, \|f\|^2), n \to \infty.$$

2.2. Властивості бернулівського шуму

Лема 2.2. *Для довільних $f_1, \ldots, f_j$, що належать $L_2([0, 1])$ та довільних $q_1, \ldots q_j$, з множини $\mathbb{N}$ виконується:*

$$E\left[\varphi^{q_1}(f_1) \cdot \ldots \cdot \varphi^{q_j}(f_j)\right] =$$

$$= \sum_{\Pi} \prod_{D \in \Pi} \sum_{k=1}^{n} \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^{p+1} \frac{b_p}{(2p - |D|)!} \prod_{d \in D} \left(f_d\left(\frac{k}{n}\right) \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \cdot$$

$$\cdot \left(\sum_{m=1}^{j} \lambda_m f_m\left(\frac{k}{n}\right) \frac{1}{\sqrt{n}} \right)^{2p - |D|} \mathbb{1}_{(2p - |D| \geqslant 0)}, \ \text{при } \overline{\lambda} = 0,$$

де Π – всі можливі розбиття множини $\left\{1_1, 1_2, \ldots 1_{q_1}, 2_1, \ldots, 2_{q_2}, \ldots, j_{q_j}\right\}$, $b_p = \frac{|B_{2p}| 2^{2p}\left(2^{2p} - 1\right)}{2p}$, B_{2p} – числа Бернуллі.

Приклад 2.1. *Обчислимо*

$$\mathbb{E}\left[\varphi(f_1) \cdot \varphi(f_2) \cdot \varphi(f_3) \cdot \varphi(f_4)\right].$$

Розбиття множини $\{1, 2, 3, 4\}$, що дадуть ненульовий внесок у математичне очікування:

$$\{\{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}, \{\{1, 3\}, \{2, 4\}\}, \{\{1, 4\}, \{2, 3\}\},$$
$$\{\{1, 2, 3, 4\}\}\}.$$

Отже,

$$\mathbb{E}\left[\varphi(f_1) \cdot \varphi(f_2) \cdot \varphi(f_3) \cdot \varphi(f_4)\right] =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} f_1\left(\frac{k}{n}\right) f_2\left(\frac{k}{n}\right) \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} f_3\left(\frac{k}{n}\right) f_4\left(\frac{k}{n}\right) \frac{1}{n} +$$

$$+\sum_{k=1}^{n} f_1\left(\frac{k}{n}\right) f_3\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n} f_2\left(\frac{k}{n}\right) f_4\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}+$$

$$+\sum_{k=1}^{n} f_1\left(\frac{k}{n}\right) f_4\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n} f_2\left(\frac{k}{n}\right) f_3\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}-$$

$$-2\sum_{k=1}^{n} f_1\left(\frac{k}{n}\right) f_2\left(\frac{k}{n}\right) f_3\left(\frac{k}{n}\right) f_4\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n^2}.$$

Лема 2.3 (Степінь Віка для бернулівських випадкових величин)**.** *Степінь Віка для елементу бернулівського шуму виражається наступною формулою:*

$$:\varphi^l(f): = \sum_{\pi\in\Pi}\prod_{D\in\pi}\left[\varphi^d(f)\lambda^{1-|D|}\mathbb{1}_{(1-|D|\geqslant 0)}+\right.$$

$$+(-1)^p b_p\frac{1}{(2p-|D|)!}\sum_{k=1}^{n}\left(f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{|D|}\cdot$$

$$\left.\cdot\left(\lambda f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{2p-|D|}\mathbb{1}_{(2p-|D|\geqslant 0)}\right]_{\lambda=0},$$

де Π *– всі можливі розбиття множини* $\{1_1, 1_2, \ldots, 1_l\}$, $b_p = \frac{|B_{2p}|2^{2p}(2^{2p}-1)}{2p}$, *а* B_{2p}*– числа Бернуллі.*

Приклад 2.2. *Обчислимо вираз для* $:\varphi^4(f):$. *Ненульовий внесок матимуть наступні розбиття множини* $\{1_1, 1_2, 1_3, 1_4\}$:

- $\{\{1_1, 1_2, 1_3, 1_4\}\}$,
- $\{\{1_1\},\{1_2\},\{1_3\},\{1_4\}\}$,
- *три варіанти розбиття виду* $\{\{1,1\},\{1,1\}\}$,
- *шість варіантів розбиття виду* $\{\{1\},\{1\},\{1,1\}\}$.

Отже,

$$:\varphi^4(f): = \varphi^4(f) - 6\varphi^2(f)\sum_{k=1}^{n} f^2\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}+$$

$$+3\left(\sum_{k=1}^{n} f^2\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}\right)^2 + 2\sum_{k=1}^{n} f^4\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n^2}.$$

2.3. Аналог Діаграм Фейнмана для бернулівського шуму

Для обчислення математичного очікування добутків Віка бернулівських випадкових величин також можна побудувати діаграми, аналогічні діаграмам Фейнмана для гаусових випадкових величин.

Визначимо випадкову величину

$$A(\varphi) := \prod_{i=1}^{N} :\varphi^{n_i}(f_i):$$

Для обчислення $EA(\varphi)$ побудуємо граф, де множнику $:\varphi^{n_i}(f_i):$ буде відповідати набір вершин-«клонів» $\left\{f_i^1, \ldots, f_i^{n_i}\right\}$. Визначимо бієктивне відображення, що присвоює кожній вершині індивідуальний номер:

$$\psi : F \to \{1, 2, \ldots, K\},$$

де F – множина всіх вершин f_{i_j}, $|F| = K = \sum_{i=1}^{N} n_i$ – кількість вершин в діаграмі.

Побудуємо діаграму G за наступними правилами:

1) Будуємо розбиття множини $\{1, 2, \ldots, K\}$ з парною кількістю елементів в кожному елементі розбиття. Розбиття, до яких входить множина, що містить лише такі вершини, що відповідають одному і тому ж множнику $:\varphi^{n_i}(f_i):$, не враховуються.
2) Для кожного елементу розбиття S будуємо спосіб обходу всіх його вершин, що не проходить по одному і тому ж ребру більше одного разу, з врахуванням напрямку обходу. Обхід починається з вершини з найменшим порядковим номером. Тобто для кожного елементу розбиття S ми обираємо вершину з найменшим номером:

$$s_1 = \min_{s_1\in S} s_i,$$

а відповідний спосіб обходу буде задаватись впорядкованим набором вершин:

$$\{s_1\} \cup \sigma(S\setminus\{s_1\}),$$

де $\sigma(\cdot)$ – перестановка.

Теорема 2.4 (Діаграми Фейнмана для бернулівських випадкових величин)**.**

$$EA(\varphi) = \sum_{\{G\}} I(G), \text{де}$$

$$I(G) = \prod_{s\in S}(-1)^{m-1}\sum_{k=1}^{n}\prod_{i:\psi(f_i)\in s} f_i\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{\sqrt{n}}, \quad (1)$$

де $\{G\}$ *– множина всіх можливих діаграм,* S *– розбиття, в якому кожен елемент* $s\in S$ *впорядкований відповідно до порядку і напрямку обходу,* m *– кількість пар* (a_1, a_2) *двох сусідніх елементів з* s, *де* $a_1 \leqslant a_2$.

Приклад 2.3. *Нехай*

$$A(\varphi) =: \varphi^2(f_1) :: \varphi^2(f_2):$$

Граф буде складатись з чотирьох вершин $f_{1_1}, f_{1_2}, f_{2_1}, f_{2_2}$. *Нехай*

$$\psi(f_{1_1}) = 1,\ \psi(f_{1_2}) = 2,\ \psi(f_{2_1}) = 3,\ \psi(f_{2_2}) = 4.$$

Розбитя множини $\{1, 2, 3, 4\}$, *по яким будуються діаграми:*

$$\Pi = \{\{\{1,3\},\{2,4\}\},\{\{1,4\},\{2,3\}\},\{\{1,2,3,4\}\}\}.$$

Розглянемо перший варіант розбиття $\pi_1 = \{\{1,3\},\{2,4\}\}$. *Такому розбиттю буде відповідати лише одна діаграма* G_1, *так як існує лише один варіант обходу двох вершин. Отже,* $S_1 = \pi_1 = \{\{1,3\},\{2,4\}\}$, $m_{1_1} = 1$, *(так як* $1 \leqslant 3$*),* $m_{1_2} = 1$, *(так як* $2 \leqslant 4$*).*

Аналогічно, діаграмі G_2 *відповідатиме розбиття* $S_2 = \pi_2 = \{\{1,4\},\{2,3\}\}$, $m_{2_1} = 1$, *(так як* $1 \leqslant 4$*),* $m_{2_2} = 1$, *(так як* $2 \leqslant 3$*).*

Діаграми G_1 *та* G_2 *зображені на рисунку 5.*

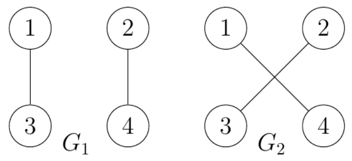

Рис. 5

Визначимо, яким доданкам відповідають діаграми G_1 і G_2:

$$I(G_1) = I(G_2) = \left(\sum_{k=1}^{n} f_1\left(\frac{k}{n}\right) f_2\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}\right)^2.$$

Тепер розглянемо розбиття $\pi_3 = \{\{1,2,3,4\}\}$. Такому розбиттю буде відповідати шість різних варіантів обходу:

$$S_3 = \{\{1,2,3,4\}\}, m_3 = 3\ (1<2,\ 2<3,\ 3<4),$$

$$S_4 = \{\{1,4,3,2\}\}, m_4 = 1\ (1<4),$$

$$S_5 = \{\{1,3,4,2\}\}, m_5 = 2\ (1<3,\ 3<4),$$

$$S_6 = \{\{1,2,4,3\}\}, m_6 = 2\ (1<2,\ 2<4),$$

$$S_7 = \{\{1,3,2,4\}\}, m_7 = 2\ (1<3,\ 2<4),$$

$$S_8 = \{\{1,4,2,3\}\}, m_8 = 2\ (1<4,\ 2<3).$$

Відповідні діаграми зображені на рисунку 6.

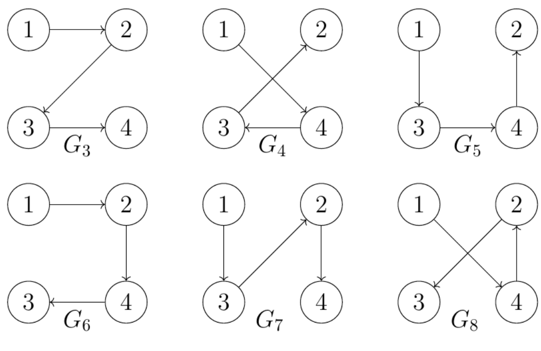

Рис. 6

Визначимо якому доданку відповідатиме кожна з діаграм:

$$I(G_3) = I(G_4) = \sum_{k=1}^{n} f_1^2\left(\frac{k}{n}\right) f_2^2\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n^2},$$

$$I(G_5) = I(G_6) = I(G_7) = I(G_8) =$$

$$= -\sum_{k=1}^{n} f_1^2\left(\frac{k}{n}\right) f_2^2\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n^2}.$$

Отже,

$$E\left[:\varphi^2(f_1)::\varphi^2(f_2):\right] = \sum_{\{G\}} I(G) =$$

$$= 2\left(\sum_{k=1}^{n} f_1\left(\frac{k}{n}\right) f_2\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}\right)^2 -$$

$$-2\sum_{k=1}^{n} f_1^2\left(\frac{k}{n}\right) f_2^2\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n^2}.$$

3. Збіжність діаграм для бернулівського шуму до діаграм Фейнмана

З теореми 2.1 відомо, що при $n \to \infty$ шум, побудований на основі бернулівських випадкових величин, збігається до гаусового білого шуму. Розглянемо, як будуть змінюватись діаграми при такому граничному переході.

Лема 3.1. *Розглянемо діаграму G та відповідне їй розбиття S. Якщо існує така $s \in S$, що $|s| > 2$, то*

$$I(G) \longrightarrow 0, n \to \infty.$$

Отже, при граничному переході ненульовий внесок даватимуть лише діаграми з розбиттям на пари. Кожна така діаграма буде влаштована наступним чином: кожен "клон" для f_i з'єднується з одним із "клонів" для f_j, де $i \neq j$. Оскільки при обході двох елементів поняття "підйомів" і "спусків" втрачають сенс, то і створення, і нумерацію клонів можна не здійснювати. Для кожної f_i "клони" знищуються, залишаючи по собі одну вершину f_i та n_i різних відростків, що виходять з цієї вершини, а діаграми визначаються способами спарування відростків між різними вершинами. Це в точності описує діаграми Фейнмана для гаусових випадкових величин. Отримали:

$$E\left[:\varphi^{n_1}(f_1):\cdot\ldots\cdot:\varphi^{n_N}(f_N):\right] \longrightarrow$$

$$\longrightarrow E\left[:(f_1,\xi)^{n_1}:\cdot\ldots\cdot:(f_N,\xi)^{n_N}:\right], n \to \infty.$$

Приклад 3.1. *З прикладу 2.3 для математичного очікування*

$$E\left[:\varphi^2(f_1)::\varphi^2(f_2):\right]$$

ми отримали наступні діаграми:

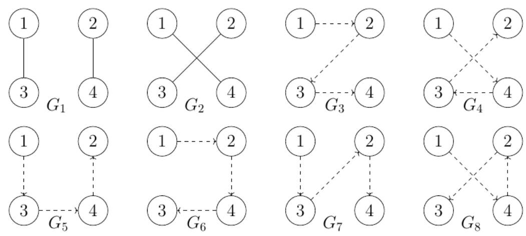

Рис. 7

Діаграми з пунктирними стрілками даватимуть нульовий внесок при граничному переході, оскільки там обхід виконується по множині з чотирьох вершин: $|s| > 2$.

В перших двох діаграмах ототожнимо вершини, що відповідають одній f_i, але залишимо n_i різних відростків (рис. 8), що відповідає діаграмам Фейнмана в прикладі 1.4.

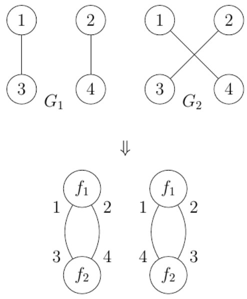

Рис. 8

Висновки

У даній роботі було розглянуто поняття простору Фока та ізоморфного йому простору функціоналів від гаусового білого шуму. Було досліджено властивості білого шуму та методи обчислення моментів функціоналів від нього, зокрема метод діаграм Фейнмана.

Для наближення гаусового білого шуму було побудовано бернулівський шум. Теорема про слабку збіжність елементів бернулівського шуму до відповідних елементів гаусового білого шуму доводить можливість і коректність такого наближення.

Для подальшої роботи з простором функціоналів від бернулівського шуму було виведено ряд корисних тверджень та теорем. Було виведено аналог формули Динкіна, що дозволяє обчислювати моменти добутків елементів бернулівського шуму. Також було показано загальний вигляд степенів Віка для бернулівського шуму. Було побудовано графічний метод, що використовує діаграми для обчислення моментів добутків Віка для бернулівського шуму.

Перелік використаних джерел

1. Simon Barry. The Phi 2 Euclidean (Quantum) Field Theory. — 1974.
2. Bobkov S. G. Concentration of distributions of the weighted sums with Bernoullian coefficients. Geometric aspects of functional analysis // Lecture Notes in Math. — 2003. — no. 1807. — P. 27–36.
3. On Gaussian and Bernoulli covariance representations / Bobkov S. G., Sergey G., Friedrich Götze, and Christian Houdré // Bernoulli Journal. — 2001. — Vol. 7, no. 3. — P. 439–451.
4. Reed M., Simon B. Methods of Modern Mathematical Physics Vol.1: Functional Analysis. — 1972.
5. Glimm J., Jaffe A. Quantum Physics: A Functional Integral Point of View. — 1981.