

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ ІМ. ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»
МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ ІМ. ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»
МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Кваліфікаційна наукова праця
на правах рукопису

Юськович Віктор Костянтинович

УДК 519.21

ДИСЕРТАЦІЯ

АСИМПТОТИЧНА ПОВЕДІНКА РОЗВ'ЯЗКІВ СТОХАСТИЧНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ У БАГАТОВИМІРНОМУ ПРОСТОРИ

спеціальність 111 «Математика»

галузь знань 11 «Математика та статистика»

Подається на здобуття наукового ступеня доктора філософії

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело

В. К. Юськович

Науковий керівник Пилипенко Андрій Юрійович, д.ф.-м.н., професор

Київ – 2024

АНОТАЦІЯ

Юськович В. К. Асимптотична поведінка розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь у багатовимірному просторі. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 111 «Математика». – Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», Київ, 2024.

У даній дисертації розглядаються багатовимірні стохастичні диференціальні рівнянь (надалі – СДР) з вінерівським шумом вигляду

$$dX(t) = a(X(t))dt + b(X(t))dW(t).$$

Для розв'язків X наведеного СДР вивчається асимптотична поведінка майже напевно (скорочено «м.н.»), коли час прямує до нескінченності. Ми вивчаємо асимптотичну поведінку розв'язку багатовимірного СДР з допомогою двох складових: поведінки *норми* $|X|$ та поведінки багатовимірного полярного *кута* $X/|X|$. Зокрема, детально розглянуто випадок, коли коефіцієнт зносу a має деяку степеневу асимптотику ($a(x) \sim A|x|^{\alpha-1}x, |x| \rightarrow +\infty$), а коефіцієнт дифузії b обмежений деякою степеневою функцією. У дисертації ми наводимо достатні умови, в термінах коефіцієнтів a та b , того, що норма розв'язку прямує до нескінченності ($|X(t)| \rightarrow \infty, t \rightarrow \infty$, м.н.), кут розв'язку стабілізується (існує границя процесу $X(t)/|X(t)|$, коли час прямує до нескінченності, м.н.) та асимптотика норми розв'язку є деякою степеневою функцією (можливо, залежною від граничного кута), що має вигляд, схожий на асимптотику розв'язку x звичайного диференціального рівняння

$$dx(t) = A|x(t)|^{\alpha-1}x(t)dt.$$

Для доведення прямування норми розв'язку до нескінченності ми використовуємо теорію функцій Ляпунова у випадку неавтономних СДР з випадковими коефіцієнтами.

Для дослідження асимптотики одновимірних СДР отримано апріорні асимптотичні оцінки для інтегралів Лебега з випадковою підінтегральною функцією та для стохастичних інтегралів.

На момент початку роботи над цією дисертацією питання асимптотичної поведінки розв'язків СДР у багатовимірному просторі було недостатньо добре досліджене. Багатовимірні СДР можуть бути корисними в астрономії. Зокрема, за допомогою двовимірних та тривимірних СДР можна моделювати траєкторії руху космічних тіл та передбачати їх майбутню еволюцію для віддалених моментів часу. Також задача про асимптотичну поведінку СДР природно виникає в задачах регуляризації малим шумом динамічних систем в околі особливих точок.

Крім дослідження багатовимірних СДР, ми також розглядаємо одновимірні СДР з вінерівським і компенсованим пуассонівським шумом вигляду

$$dX(t) = a(X(t))dt + b(X(t))dW(t) + \int_{\mathbb{R}^c} c(X(t-), u)N(dt, du)$$

та вивчаємо щодо них схожі задачі.

СДР зі стрибками можуть бути корисними для моделювання випадкових процесів у страховій сфері. Наприклад, випадковий процес, що моделює грошові потоки страхової компанії, має стрибки в ті моменти, коли відбуваються страхові випадки, тому результати дисертації щодо СДР зі стрибками можуть бути корисними для дослідження поведінки таких процесів для віддалених моментів часу.

Питання про м.н. асимптотичну поведінку розв'язків СДР зі стрибками майже не досліджене в літературі. Аналогічно багатовимірному випадку, ми

накладаємо умови еквівалентності степеневій функції для коефіцієнту зносу a та умови обмеженості степеневою функцією для коефіцієнтів шуму b та c . Для розв'язків СДР зі стрибками досліджено асимптотику зростання майже напевно, коли час прямує до нескінченності. Знайдено умови, які гарантують $X(t) \rightarrow \infty, t \rightarrow \infty$, м.н., а також достатні умови, що забезпечують еквівалентність $X(t) \sim x(t), t \rightarrow \infty$, де x – розв'язок незбуреного звичайного диференціального рівняння.

Основна теоретична частина дисертації складається з чотирьох розділів, кожен з яких складається з секції та, за потреби, підсекцій. Наприкінці кожного розділу сформульовано висновки.

Розділ 1 дисертації є підготовчим для подальшого дослідження асимптотичної поведінки розв'язків СДР. У цьому розділі ми отримуємо умови прямування до нуля м.н. деяких типів випадкових процесів. Організований розділ 1 так: спочатку ми доводимо загальну достатню умову нескінченної малості м.н. для випадкових процесів, а потім використовуємо її для оцінювання порядку зростання інтегралів від випадкових процесів, субмартингалів та стохастичних інтегралів. У першій секції ми встановлюємо достатню умову того, що випадковий процес прямує до нуля майже напевно. У другій секції ми отримуємо асимптотичні оцінки інтегралів Лебега від випадкових процесів, а саме доводимо одну теорему, яка оцінює швидкість зростання таких інтегралів. У третій секції ми доводимо загальну теорему про асимптотичну поведінку субмартингалів, якою в подальшому користуватимемося для оцінювання швидкості зростання стохастичних інтегралів зі змінною верхньою межею. У четвертій секції ми знаходимо асимптотичні оцінки інтегралів Іто за вінерівським процесом як наслідок теореми третьої секції. У п'ятій секції ми знаходимо асимптотичні оцінки стохастичних інтегралів за компенсованою пуассонівською мірою, використовуючи теорему третьої секції; доведення результатів цієї секції схожі на відповідні результати з секції про асимптотичні оцінки інтегралів за

вінерівським процесом. У шостій секції ми знаходимо асимптотичні оцінки інтегралів за процесами Леві.

У розділі 2 ми досліджуємо одновимірні СДР зі стрибками. У таких рівняннях, окрім зсуву та дифузії, присутній стрибкоподібний доданок, що є стохастичним інтегралом за компенсованою пуассонівською мірою. У цьому розділі ми наводимо достатні умови існування степеневі асимптотики розв'язків таких СДР у випадку, коли зсув має деяку степеневу асимптотику, а шум (дифузія та стрибки) обмежений деякою степеневою функцією. У першій секції ми розглядаємо приклади СДР, що містять стохастичний диференціал за процесом Пуассона, та які можна розв'язати явно. У другій секції ми знаходимо асимптотику процесів Іто зі стрибками у випадку, коли коефіцієнт зносу має додатну границю, коли час прямує до нескінченності, а характеристики шуму зростають «не дуже» швидко. У третій секції ми наводимо деякі прості достатні умови, що гарантують прямування до нескінченності (транзйентність) м.н. розв'язків СДР зі стрибками. У четвертій секції ми розглядаємо СДР зі стрибками, коефіцієнти яких у певному розумінні є степеневими, а саме зсув еквівалентний деякій степеневій функції, а характеристики шуму мають не більш ніж деяке степеневе зростання.

У розділі 3 ми досліджуємо асимптотику розв'язків класичних СДР (з вінерівським шумом). У першій секції ми, використовуючи асимптотичні оцінки, отримуємо відомі результати щодо асимптотичної поведінки розв'язків СДР Орнштейна–Уленбека та СДР геометричного броунівського руху. У другій секції ми знаходимо умови виходу розв'язків СДР з деякого відрізка та оцінюємо імовірності виходу розв'язків через лівий та правий кінці відрізка. У третій секції ми знаходимо достатні умови прямування розв'язку СДР до нескінченності майже напевно; для цього ми використовуємо теорію функцій Ляпунова, розроблену в другій секції. Результати другої та третьої секцій узагальнюють теорію гармонічних функцій (шкал) для дослідження асимптотичної поведінки розв'язків неавтономних СДР. У четвертій секції ми

отримуємо теорему про асимптотику розв'язків СДР з вінерівським шумом, що є наслідком більш загального результату, отриманого у секції 2 розділу 4 для СДР зі стрибками.

У розділі 4 ми отримуємо результати щодо асимптотичної поведінки розв'язків багатовимірних СДР. У першій секції ми переходимо до сферичної системи координат, тобто переходимо від одного багатовимірного СДР до системи двох СДР: для процесу норми та процесу кута. У першій підсекції ми вводимо поняття радіальної та тангенціальної компонент матричного поля та досліджуємо їхні властивості. У другій підсекції ми виводимо СДР для процесу норми, використовуючи багатовимірну формулу Іто. У третій підсекції ми за допомогою формули Іто отримуємо багатовимірне СДР для процесу кута. У другій секції ми досліджуємо граничну поведінку норми розв'язку, використовуючи результати розділу 3. У підсекції 1 ми формулюємо достатні умови непотрапляння розв'язку в початок координат м.н. У другій підсекції ми формулюємо достатні умови прямування розв'язку до нескінченності (транзієнтності) м.н. У третій секції ми доводимо допоміжний результат про нижню степеневу асимптотику процесу норми, що буде необхідний та доведення стабілізації процесу кута. У четвертій секції ми формулюємо та доводимо загальну теорему про стабілізацію процесу кута у сферичній системі координат, після чого застосовуємо цю теорему до дослідження стабілізацію кута розв'язку у декартовій системі координат. У п'ятій секції ми розглядаємо систему СДР у сферичній системі координат та наводимо достатні умови, що гарантують існування степеневі асимптотики для процесу радіуса.

Ключові слова: стохастичне диференціальне рівняння, асимптотична поведінка стохастичних систем, асимптотична еквівалентність, степенева асимптотика, функції Ляпунова.

ABSTRACT

Yuskovych V. K. Asymptotic behavior of solutions of stochastic differential equations in multidimensional space. – Qualifying scientific work on manuscript rights.

Dissertation for obtaining the scientific degree of Doctor of Philosophy in specialty 111 “Mathematics”. - National Technical University of Ukraine "Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute", Kyiv, 2024.

The main results of this dissertation relate to the asymptotic behavior almost surely (abbreviated as “a.s.”), as time goes to infinity, of solutions of multidimensional stochastic differential equations (hereinafter referred to as SDE) with Wiener noise of the form

$$dX(t) = a(X(t))dt + b(X(t))dW(t).$$

We study the asymptotic behavior of the solution X of the multidimensional SDE with the help of two components: the behavior of the *norm* $|X|$ and behavior of the *angle* $X/|X|$. Consider the case when the drift coefficient a has some power-law asymptotics ($a(x) \sim A|x|^{\alpha-1}x$, $|x| \rightarrow +\infty$), and the diffusion coefficient b is bounded by some power-law function. In the dissertation, we present sufficient conditions, in terms of the coefficients a and b , such that the solution norm goes to infinity ($|X(t)| \rightarrow \infty$, $t \rightarrow \infty$, a.s.), the solution angle stabilizes (there exists the limit of $X(t)/|X(t)|$ as time goes to infinity a.s.) and the asymptotics of the solution norm is some power function (perhaps depending on the limit angle) having the form similar to the asymptotics of the solution x of an ordinary differential equation

$$dx(t) = A|x(t)|^{\alpha-1}x(t)dt.$$

To bring the solution norm to infinity, we use the theory of Lyapunov functions in the case of non-autonomous SDEs with random coefficients.

To study the asymptotics of one-dimensional SDEs, a priori asymptotic estimates for Lebesgue integrals with a random integrand function and stochastic integrals were obtained.

At the time of starting work on this dissertation, the issue of asymptotic behavior of SDE solutions in multidimensional space was not sufficiently well investigated. Multidimensional SDEs can be useful in astronomy. In particular, with the help of two-dimensional and three-dimensional SDEs, it is possible to model the trajectories of the movement of cosmic bodies and predict their future evolution for distant moments of time. Also, the problem of the asymptotic behavior of the SDE naturally arises in the problems of small noise regularization of dynamic systems around singular points.

In addition to the study of multidimensional SDEs, we also consider one-dimensional SDEs with Wiener and compensated Poisson noise of the form

$$dX(t) = a(X(t))dt + b(X(t))dW(t) + \int_{\mathbb{R}^c} c(X(t-), u)N(dt, du)$$

and study similar problems in relation to them.

SDEs with jumps can be useful for simulating random processes in the insurance industry. For example, a stochastic process simulating the cash flows of an insurance company has jumps at the moments when insurance events occur, so the results of the dissertation on SDEs with jumps can be useful for studying the behavior of such processes for distant moments of time.

Questions about the a.s. asymptotic behavior of SDE solutions with jumps is almost not studied in the literature. Similarly to the multidimensional case, we impose power-law equivalence conditions for the drift coefficient a and power-law boundedness conditions for the noise coefficients b and c . For SDE solutions with jumps, the asymptotic growth is investigated almost surely as time goes to infinity. We have found conditions that guarantee $X(t) \rightarrow \infty, t \rightarrow \infty$, a.s., as well as sufficient conditions that ensure the equivalence $X(t) \sim x(t), t \rightarrow \infty$, a.s., where x is the solution of an unperturbed ordinary differential equation.

The main theoretical part of the dissertation consists of four chapters, each of which consists of sections and, if necessary, subsections. Conclusions are formulated at the end of each chapter.

Chapter 1 of the dissertation is preparatory for the further study of the asymptotic behavior of SDE solutions. In this section, we obtain the conditions for going to zero a.s. for some types of random processes. Section 1 is organized as follows: first, we prove a general sufficient condition for the infinite smallness a.s. for random processes, and then we use it to estimate the order of growth of integrals of random processes, submartingales, and stochastic integrals. In the first section, we establish a sufficient condition that the random process goes to zero almost surely. In the second section, we obtain asymptotic estimates of Lebesgue integrals of random processes, namely, we prove a theorem that estimates the rate of growth of such integrals. In the third section, we prove a general theorem on the asymptotic behavior of submartingales, which we will later use to estimate the growth rate of stochastic integrals with a variable upper bound. In the fourth section, we find the asymptotic estimates of the Itô integrals with respect to a Wiener process as a consequence of the theorem of the third section. In the fifth section, we find asymptotic estimates for the stochastic integrals with respect to a compensated Poisson measure, using the theorem of the third section; the proofs of the results of this section are similar to the corresponding results from the section on asymptotic estimates of integrals with respect to a Wiener process. In the sixth section, we find asymptotic estimates of integrals over Lévy processes.

In Section 2, we investigate one-dimensional SDEs with jumps. In such equations, in addition to drift and diffusion, there is a jump-like term, which is a stochastic integral over a compensated Poisson measure. In this section, we present sufficient conditions for the existence of power-law asymptotics of the solutions of such SDEs in the case when the drift has some power-law asymptotics, and the noise (diffusion and jumps) is bounded by some power-law function. In the first section, we consider examples of SDEs containing a stochastic Poisson differential and

which can be solved explicitly. In the second section, we find the asymptotics of Itô processes with jumps in the case where the drift coefficient has a positive bound, when time goes to infinity and the noise characteristics grow "not very" fast. In the third section, we present some simple sufficient conditions that guarantee going to infinity (transience) a.s. of the SDE solutions with jumps. In the fourth section, we consider SDEs with jumps, the coefficients of which are power-law in a certain sense, namely, the drift is equivalent to some power-law function, and the noise characteristics have no more than some power-law growth.

In Section 3, we study the asymptotics of classical SDE solutions (with Wiener noise). In the first section, using asymptotic estimates, we obtain known results on the asymptotic behavior of the solutions of the Ornstein–Uhlenbeck SDE and the geometric Brownian motion SDE. In the second section, we find the conditions for the exit of SDE solutions from some segment and estimate the probabilities of exiting the solutions through the left and right ends of the segment. In the third section, we find sufficient conditions for the SDE solution to go to infinity almost surely; for this we use the theory of Lyapunov functions developed in the second section. The results of the second and third sections generalize the theory of harmonic functions (scales) to study the asymptotic behavior of solutions of non-autonomous SDEs. In the fourth section, we derive a theorem on the asymptotics of solutions of SDEs with Wiener noise, which is a consequence of the more general result obtained in Section 2 of Chapter 4 for SDEs with jumps.

In Section 4, we obtain results on the asymptotic behavior of solutions of multidimensional SDEs. In the first section, we move to a spherical coordinate system, that is, we move from one multidimensional SDE to a system of two SDEs: for the norm process and the angle process. In the first subsection, we introduce the concept of radial and tangential components of a matrix field and explore their properties. In the second subsection, we derive the SDE for the norm process using the multivariate Itô formula. In the third subsection, we use Itô's formula to obtain a multidimensional SDE for the angle process. In the second section, we investigate

the limiting behavior of the norm of the solution, using the results of Section 3. In subsection 1, we formulate sufficient conditions for the solution not to fall into the origin of the coordinates a.s. In the second subsection, we formulate sufficient conditions for the angle of the solution to go to infinity (transience) a.s. In the third section, we prove an auxiliary result about the lower power asymptotics of the norm process, which will be necessary in the proof of the stabilization of the angle process. In the fourth section, we formulate and prove a general theorem on the stabilization of the angle process in the spherical coordinate system, after which we apply this theorem to the study of the stabilization of the solution angle in the Cartesian coordinate system. In the fifth section, we consider the SDE system in the spherical coordinate system and state sufficient conditions that guarantee the existence of power-law asymptotics for the radius process.

Key words: stochastic differential equation, asymptotic behavior of stochastic systems, asymptotic equivalence, power-law asymptotics, Lyapunov functions.

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

Основні наукові результати дисертації:

Статті, проіндексовані у базі Scopus:

1. Yuskovych V. “On the Asymptotics of Solutions of Stochastic Differential Equations with Jumps”. *Ukrainian Mathematical Journal* **75** (2024): 1778-1795, Q3.
2. Yuskovych V. K. “On asymptotic behavior of solutions of stochastic differential equations in multidimensional space”. *Theory of Stochastic Processes* **27.1** (2023): 53-66.

Апробація матеріалів дисертації:

Матеріали конференцій:

1. Юськович В. К. «Асимптотична поведінка розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь у багатовимірному просторі». *X всеукраїнська наукова конференція молодих математиків* (16-17 квітня 2021, дистанційно): 55.
2. Yuskovych V. “On Asymptotic Behavior of Solutions of Stochastic Differential Equations in Multidimensional Space”. *Modern Stochastics: Theory and Applications V* (June 1-4, 2021, online): 115.
3. Yuskovych V. “Asymptotic behaviour of solutions of multidimensional stochastic differential equations”. *International Conference of Young Mathematicians* (June 1-3, 2023, online).
4. Юськович В. К. «Про асимптотику розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь зі стрибками». *XIX міжнародна наукова конференція ім. академіка М. Кравчука* (11-12 жовтня 2023, дистанційно): 187.
5. Yuskovych V. K. “On asymptotics of solutions of stochastic differential equations with jumps”. *International Uzbek-Ukrainian conference “Modern problems of the theory of stochastic processes and their applications”* (October 10-11, 2023, online): 49.

Зміст

Перелік умовних позначень	15
Вступ	19
Огляд літератури	27
1 Асимптотичні оцінки	31
1.1 Асимптотичні оцінки випадкових процесів	31
1.2 Асимптотичні оцінки інтегралів від випадкових процесів	32
1.3 Асимптотичні оцінки субмартингалів	34
1.4 Асимптотичні оцінки інтегралів за вінерівським процесом	35
1.5 Асимптотичні оцінки стохастичних інтегралів зі стрибками	36
1.6 Асимптотичні оцінки інтегралів за процесами Леві	38
1.7 Висновки до розділу 1	44
2 Асимптотика розв'язків СДР зі стрибками	45
2.1 Приклади СДР зі стрибками	45
2.2 Лінійна асимптотика процесів Іто зі стрибками	49
2.3 Прямування розв'язків СДР зі стрибками до нескінченності	54
2.4 Степенева асимптотика розв'язків СДР зі стрибками	61
2.5 Висновки до розділу 2	75
3 Асимптотика розв'язків СДР з вінерівським шумом	76

3.1	Приклади СДР з вінерівським шумом	76
3.2	Локальна поведінка розв'язків СДР	79
3.3	Гранична поведінка розв'язків СДР	83
3.4	Асимптотика розв'язків СДР	88
3.5	Висновки до розділу 3	89
4	Асимптотична поведінка розв'язків багатовимірних СДР	90
4.1	Перехід до сферичної системи координат	91
4.1.1	Радіальна та тангенціальна компоненти	91
4.1.2	СДР для норми розв'язку	95
4.1.3	СДР для кута розв'язку	97
4.2	Гранична поведінка норми розв'язку	100
4.2.1	Непотрапляння розв'язку в початок координат	102
4.2.2	Прямування розв'язку до нескінченності	103
4.3	Нижня степенева асимптотика норми розв'язку	107
4.4	Стабілізація кута	109
4.5	Степенева асимптотика норми розв'язку	112
4.6	Висновки до розділу 4	113
	Висновки	115
	Бібліографія	117

Перелік умовних позначень

Текстові скорочення

- càdlàg – «неперервний справа з лівими границями» (випадковий процес).
- ЗДР – звичайне диференціальне рівняння.
- СДР – стохастичне диференціальне рівняння.

Математичні позначення та означення

- a_k – k -та координата вектора a .
- b_{kl} – елемент k -го рядка l -го стовпця матриці b .
- b_k – k -й рядок матриці b .
- $|a| := \sqrt{\sum_i a_i^2}$ – евклідова норма вектора a .
- $\|b\| := \sqrt{\sum_{i,j} b_{ij}^2}$ – норма (Гільберта–Шмідта) матриці b .
- \mathbb{I}_X – індикатор множини X .
- $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$.
- $\mathbb{N}_0 := \{0\} \cup \mathbb{N}$.
- $\mathbb{R}_+ := [0, +\infty)$.
- $\mathcal{B}(X)$ – борелівська сигма-алгебра у метричному просторі X .

- $S := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$ – одинична сфера в n -вимірному евклідовому просторі.
- $C^2(X)$ – клас двічі неперервно диференційовних функцій $X \rightarrow \mathbb{R}$.
- $f(t-) := \lim_{h \rightarrow +0} f(t - h)$, де f – функція.
- $f(t) \sim g(t) \iff \frac{f(t)}{g(t)} \rightarrow 1$, де f, g – функції.
- o – «о» мале.
- O – «о» велике.
- Ω – множина елементарних подій, $\omega \in \Omega$.
- \mathcal{F} – сигма-алгебра подій на множині Ω .
- $\{P\} := \{\omega \in \Omega : P(\omega)\}$, де $P = P(\omega)$ – випадкове співвідношення.
- \mathbb{P} – імовірність на сигма-алгебрі \mathcal{F} .
- $\mathbb{F} := (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ – потік сигма-алгебр у ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Усі розглядувані у дисертації випадкові процеси, поля, міри за замовчуванням вважаємо узгодженими з потоком \mathbb{F} .
- \mathbb{E} – математичне сподівання в імовірнісному просторі $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.
- Випадковий процес $F = F(t)$ назвемо прогресивно вимірним, якщо для будь-яких $t \geq 0$ звуження відображення F на множину $[0, t] \times \Omega$ є вимірним відносно сигма-алгебри $\mathcal{B}([0, t]) \otimes \mathcal{F}_t$.
- \mathcal{P} – передбачувана сигма-алгебра для випадкових полів. Формально: позначимо через \mathcal{P} сигма-алгебру, породжену випадковими полями вигляду

$$c(t, u) = \zeta_1 \mathbb{I}_{t \in [t_0, t_1], u \in U_1} + \sum_{k=2}^n \zeta_k \mathbb{I}_{t \in (t_{k-1}, t_k], u \in U_k}, \quad t \geq 0, \quad u \in \mathbb{R},$$

де $n \in \mathbb{N}$, $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = \infty$, $\zeta_k \in \mathcal{F}_{t_{k-1}}$ -вимірною випадковою величиною, $U_k \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $k \in \{1, 2, \dots, n\}$. Випадкові поля $c = c(t, u)$ та випадкові процеси $c = c(t)$, вимірні відносно передбачуваної сигма-алгебри, називатимемо *передбачуваними*.

Домовленості щодо спрощення позначень

- Літери, що позначають аргумент функції (t, x, r, φ тощо), за замовчуванням вважаються довільними та неявно зв'язуються з квантором загальності \forall . Наприклад, $t \geq 0$ – «довільний момент часу» (якщо не вказано інше). Формально: нехай $P(t)$ – деяке твердження, що залежить від t ; тоді пишучи твердження $P(t)$, ми маємо на увазі

$$\forall t \geq 0 \quad P(t).$$

- $C > 0$ – універсальна константа, що «може змінюватися від рядка до рядка». Формально: нехай $F(C)$ та $G(C)$ – вирази, що взагалі кажучи, залежать від C ; тоді пишучи $F(C) \leq G(C)$, ми маємо на увазі

$$\exists C_1 > 0 \exists C_2 > 0 \quad F(C_1) \leq G(C_2).$$

- М.н. – «майже напевно», тобто майже скрізь за мірою \mathbb{P} . Формально: нехай $A \in \mathcal{F}$; тоді пишучи « A м.н.», ми маємо на увазі

$$\mathbb{P}(A) = 1.$$

Квантори навішуються у порядку слідування вищенаведених пунктів. Наприклад, нехай $F = F(t)$ – випадковий процес; якщо ми пишемо щось на кшталт

$$F(t) \leq C (1 + t^2) \text{ м.н.,}$$

то формально маємо на увазі

$$\mathbb{P} \{ \exists C > 0 \forall t \geq 0 \quad F(t) \leq C (1 + t^2) \} = 1.$$

Нехай круглі дужки (\cdot) позначають залежність. Якщо у таких круглих дужках стоїть вираз у дужках, то ми опускаємо круглі дужки. Наприклад, якщо P – випадкове співвідношення, то замість $\mathbb{P}(\{P\})$ ми пишемо $\mathbb{P}\{P\}$.

Нехай фігурні дужки $\{\cdot\}$ позначають подію. Якщо подія задана співвідношенням, то ми іноді опускаємо фігурні дужки. Наприклад, якщо $F = F(t)$ – випадковий процес, то замість $\{\lim_{t \rightarrow \infty} F(t) = 0\}$ м.н. пишемо просто $\lim_{t \rightarrow \infty} F(t) = 0$ м.н.

Вступ

Обґрунтування вибору теми дослідження

Першими асимптотичну поведінку розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь (надалі – СДР) почали досліджувати Гіхман Й. І. та Скороход А. В. (див. [2], [3], [7], [10], [12], [15], [16], [29]). У своїх працях вони досліджували граничну поведінку розв'язків (умови прямування до нескінченності / рекурентності), а також шукали точну детерміновану асимптотику розв'язку для одновимірних автономних СДР. У даній дисертації ми узагальнюємо ці результати на неавтономний випадок, а також для багатовимірних СДР.

У багатовимірному випадку дослідження асимптотичної поведінки розв'язків СДР не обмежується питанням прямування розв'язку до нескінченності, а додатково виникає задача з'ясування напрямку прямування розв'язку до нескінченності. У двовимірному випадку таким напрямком можна вважати полярний кут, а у випадку вищих розмірностей в якості напрямку можна розглядати вектор напрямних косинусів розв'язку. Задача про асимптотичну поведінку розв'язків багатовимірних СДР природно виникає в задачах регуляризації малим шумом динамічних систем в околі особливих точок. Багатовимірний випадок цієї задачі суттєво відрізняється від одновимірного через відсутність лінійного впорядкування в багатовимірному просторі. Актуальність запропонованої теми полягає у тому, що асимптотична поведінка розв'язків СДР у багатовимірному просторі на даний момент недостатньо вивчена.

Тема дисертації пов'язана з сучасними дослідженнями Пилипенка А. Ю., Проске Ф. Н., Павлюкевича І. Є., Кулика О. М. (див. [63], [64], [66], [67]); у цих робо-

тах досліджено задачу регуляризації звичайних диференціальних рівнянь шляхом додавання малого шуму, а також з дослідженнями Булдігіна В. В., Клесова О. І., Тимошенко О. А., Штайнебаха Й. Г., Індлекофера К.-Ф. (див. [43], [47], [48], [49], [53], [54], [57], [58], [61]), які вивчали асимптотичну еквівалентність розв'язків стохастичних та звичайних диференціальних рівнянь.

Мета і завдання дослідження

Об'єктом дослідження є стохастичне диференціальне рівняння. Предметом дослідження є асимптотична поведінка стохастичних диференціальних рівнянь.

Мета дослідження полягає в отриманні нових результатів щодо асимптотичної поведінки розв'язків багатовимірних стохастичних диференціальних рівнянь. Зокрема, ми ставимо перед собою завдання дослідити умови прямування розв'язку до нескінченності та стабілізації його кута, а також дослідити асимптотику норми розв'язку.

Методи дослідження

Для отримання асимптотичних оцінок для стохастичних інтегралів ми використали методи теорії мартингалів. Для дослідження асимптотики розв'язків СДР ми використали методи теорії стохастичних диференціальних рівнянь, стохастичного аналізу та теорії функцій Ляпунова.

Наукова новизна отриманих результатів

Отримано нові результати щодо асимптотики розв'язків СДР зі стрибками. Ці результати стверджують, що за певних обмежень на порядок зростання шуму, асимптотика розв'язку СДР зі стрибками визначається лише асимптотикою зносу. Отримані результати є загальнішими, ніж відомі до цього результати для СДР з вінерівським шумом. Для розв'язків багатовимірних СДР отримано умови прямування до нескінченності та стабілізації кута, а також досліджено асимптотику норми. Дані результати узагальнюють відомі результати з одновимірною випад-

ку.

Особистий внесок здобувача

Усі результати дисертації здобувач отримав самостійно. Здобувач висловлює подяку своєму науковому керівнику Пилипенку Андрію Юрійовичу за керівництво та консультації в процесі підготовки цієї дисертації.

Апробація матеріалів дисертації

Результати досліджень було представлено на наступних конференціях:

- X всеукраїнська наукова конференція молодих математиків (16-17 квітня 2021, дистанційно).
- Modern Stochastics: Theory and Applications V (June 1-4, 2021, online).
- International Conference of Young Mathematicians (June 1-3, 2023, online).
- XIX міжнародна наукова конференція ім. академіка М. Кравчука (11-12 жовтня 2023, дистанційно).
- International Uzbek-Ukrainian conference “Modern problems of the theory of stochastic processes and their applications” (October 10-11, 2023, online).

Зроблено доповіді на наступних наукових семінарах:

- “Malliavin Calculus and its Applications” (April 19, 2022, online).
- «Статистичні проблеми для випадкових процесів і полів» (13 жовтня 2022, дистанційно).
- “Malliavin Calculus and its Applications” (November 7, 2023, online).

Структура та обсяг дисертації

Теоретична частина дисертації складається з чотирьох розділів: асимптотичні оцінки, асимптотика розв'язків СДР зі стрибками, асимптотика розв'язків СДР з вінерівським шумом, асимптотика розв'язків багатовимірних СДР. Кожен розділ складається з секцій (та за потреби підпунктів), що поділяються на параграфи.

Загальний обсяг дисертації складає 124 сторінки (не враховуючи додатки).

Зв'язок роботи з науковими програмами

Тема даного дисертаційного дослідження відповідає основному напрямку досліджень кафедри МАтаТІ ФМФ КПІ – теорія ймовірностей, математична статистика та теорія випадкових процесів.

Робота над даною дисертацією частково проводилася в рамках норвезько-українського співробітництва у галузі математичної освіти (2017-2022 р., номер проекту СРЕА-LT-2016/10139, спонсор «Норвезький центр міжнародного співробітництва у галузі освіти», програма «Євразія»).

Основні результати дисертації

Наведемо важливі результати, отримані у даній дисертації.

Нехай X – розв'язок (необов'язково єдиний) СДР

$$dX(t) = a(X(t))dt + b(X(t))dW(t) + \int_{\mathbb{R}} c(X(t-), u)d\tilde{N}(dt, du), \quad (1)$$

$$X(0) = x_0 \in \mathbb{R},$$

де W – вінерівський процес, N – пуассонівська випадкова міра з характеристичною мірою $dt \cdot \nu(du)$, де ν – деяка міра Леві, \tilde{N} – компенсована пуассонівська міра, відповідна до міри N , причому W та N незалежні, $a = a(x)$, $b = b(x)$, $c = c(x, u)$ – локально обмежені вимірні функції. Нехай $0 \leq \alpha < 1$.

Наступна теорема дає деякі достатні умови того, що розв'язок СДР зі стрибками прямує до нескінченності м.н.

Наслідок 2.3.3*. Припустимо, що:

(А) $\underline{A} \leq a(x) \leq \bar{A}$, $x \in \mathbb{R}$, для деяких сталих $\underline{A} > 0$, $\bar{A} > 0$;

(Б) для деяких сталих $C \geq 0$ та $\beta \in [0, \frac{1}{2})$

$$b^2(x) + \int_{\mathbb{R}} c^2(x, u) \nu(\mathrm{d}u) \leq C (1 + |x|^{2\beta}), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Тоді

$$X(t) \rightarrow +\infty, \quad t \rightarrow \infty, \text{ м.н.}$$

У наступній теоремі знайдено степеневу асимптотику розв'язку СДР зі стрибками, коли коефіцієнти зносу та дифузії мають степеневе зростання. Додатково припускається, що розв'язок прямує до нескінченності м.н.

Теорема 2.4.1*. Припустимо, що:

- $X(t) \rightarrow +\infty$, $t \rightarrow \infty$, м.н.;
- для деякого числа $A_+ \geq 0$

$$|a(x)| \leq A_+ x^\alpha, \quad x \geq 1;$$

- для деякого числа $\beta \in [0, \frac{1+\alpha}{2})$

$$b^2(x) + \int_{\mathbb{R}} c^2(x, u) \nu(\mathrm{d}u) \leq C (1 + |x|^{2\beta}), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Тоді м.н.

$$((1 - \alpha)\underline{A})^{\frac{1}{1-\alpha}} \leq \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{X(t)}{t^{\frac{1}{1-\alpha}}} \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{X(t)}{t^{\frac{1}{1-\alpha}}} \leq ((1 - \alpha)\bar{A})^{\frac{1}{1-\alpha}},$$

де

$$\underline{A} := \liminf_{x \rightarrow +\infty} \frac{a(x)}{x^\alpha}, \quad \bar{A} := \limsup_{x \rightarrow +\infty} \frac{a(x)}{x^\alpha}.$$

Наслідок 2.4.5*. Припустимо, що виконуються умови теореми 2.4.1* та додатково для деякої не випадкової сталої $A > 0$

$$a(x) \sim Ax^\alpha, \quad x \rightarrow +\infty.$$

Тоді

$$X(t) \sim ((1 - \alpha)At)^{\frac{1}{1-\alpha}}, \quad t \rightarrow \infty, \text{ м.н.}$$

Також отримано наступні результати, що стосуються асимптотичної поведінки розв'язків багатовимірних СДР.

Нехай тепер X – розв'язок n -вимірною ($n \geq 2$) СДР

$$dX(t) = a(X(t))dt + b(X(t))dW(t), \quad X(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n,$$

в якому W – m -вимірний вінерівський процес ($m \in \mathbb{N}$), $a: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $b: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$ – вимірні вектор-функції.

Переходячи до сферичної системи координат, використовуючи формули

$$R := |X| \quad \Phi := \frac{X}{|X|},$$

ми зводимо вивчення асимптотичної поведінки розв'язку X до вивчення асимптотичної поведінки розв'язку (R, Φ) наступної системи СДР:

$$dR(t) = \mu(R(t), \Phi(t))dt + \sigma(R(t), \Phi(t))dW(t), \quad R(0) = r_0,$$

$$d\Phi(t) = \nu(R(t), \Phi(t))dt + \chi(R(t), \Phi(t))dW(t), \quad \Phi(0) = \varphi_0,$$

де коефіцієнти $\mu: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\sigma: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\nu: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\chi: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n \times m} \rightarrow \mathbb{R}^m$ вимірні та локально обмежені на компактних підмножинах множини $(0, +\infty) \times \mathbb{R}^n$, $r_0 \in \mathbb{R}$, $\varphi_0 \in \mathbb{R}^n$. Назвемо R процесом *норми*, а Φ – процесом *кута*. Наступні теореми справедливі для загальних (не пов'язаних з a та b) коефіцієнтів μ , σ , ν , χ .

Наступна теорема наводить достатні умови прямування процесу норми до нескінченності.

Теорема 4.2.9. *Припустимо, що:*

- для будь-якої точки (r_0, φ_0) , $r_0 > 0$, існує єдиний розв'язок (R, Φ) вищевказаної системи СДР, що є строго марковським процесом;

- коефіцієнти μ, σ неперервні, коефіцієнт $\mu = \mu(r, \varphi)$ обмежений на множині $[\delta, \Delta] \times \mathbb{R}^n$, $|\sigma(r, \varphi)| \geq \sigma_* > 0$, $r > 0$, $\varphi \in \mathbb{R}^n$;
- існує зростаюча функція $v_0: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ та $\delta > 0$ такі, що $v_0(0) = -\infty$ та

$$\forall r \in (0, \delta) \forall \varphi \in \mathbb{R}^n L_\varphi v_0(r) \geq 0;$$

- існують зростаюча функція $v_\infty: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ та стала $\Delta > \delta$ такі, що $v_\infty(+\infty)$ скінченне та

$$\forall r > \Delta \forall \varphi \in \mathbb{R}^n L_\varphi v_\infty(r) \geq 0.$$

Тоді

$$R(t) \rightarrow \infty, t \rightarrow \infty, \text{ м.н.}$$

Наступна теорема наводить достатні умови стабілізації процесу кута.

Теорема 4.4.1. Припустимо, що для деякого $\gamma > 0$:

- для деякого $\underline{R} > 0$

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{R(t)}{t^\gamma} \geq \underline{R} \text{ м.н.};$$

- для деякого $\delta > \frac{1}{\gamma}$

$$\sup_{\varphi \in \mathbb{R}^n} \left(|\nu(r, \varphi)| + \|\chi(r, \varphi)\|^2 \right) = O(r^{-\delta}), \quad r \rightarrow \infty.$$

Тоді існує границя

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(t) =: \Phi_\infty \text{ м.н.}$$

Наступна теорема наводить достатні умови існування точної асимптотики процесу норми.

Теорема 4.5.1. Припустимо, що виконуються наступні умови:

- $R(t) \rightarrow \infty, t \rightarrow \infty, \text{ м.н.};$

- $\exists \Phi_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(t)$ м.н.;
- коефіцієнт μ неперервний;
- для деякої неперервної функції $M: \mathbb{R}^n \rightarrow (0, \infty)$ та сталої $\alpha \in [0, 1)$

$$\mu(r, \varphi) \sim M(\varphi)r^\alpha, \quad t \rightarrow \infty, \quad \varphi \in \mathbb{R}^n;$$

- для деякого $\beta \in [0, \frac{1+\alpha}{2})$

$$\sup_{\varphi \in \mathbb{R}^n} \sigma^2(r, \varphi) = O(r^{2\beta}), \quad r \rightarrow \infty.$$

Тоді

$$R(t) \sim ((1 - \alpha)M(\Phi_\infty)t)^{\frac{1}{1-\alpha}}, \quad t \rightarrow \infty, \quad \text{м.н.}$$

Огляд літератури

Гіхман Й. І. та Скороход А. В. започаткували дослідження асимптотичної поведінки розв'язків СДР (див. [2], [3], [7], [10], [12], [15], [16], [29]). У своїх працях вони досліджували асимптотичну поведінку майже напевно (надалі – м.н.) розв'язків СДР, коли час прямує до нескінченності, а також точну детерміновану асимптотику розв'язку м.н. Вони розглядали одновимірне автономне СДР з вінерівським шумом (надалі ми називатимемо такі СДР *класичними*) вигляду

$$dX(t) = a(X(t))dt + b(X(t))dW(t), \quad X(0) = x_0 \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Припускається, що дифузія b невироджена та існує єдиний (сильний) розв'язок цього СДР. Указані автори використовували теорію гармонічних функцій (шкал), тобто нетривіальних розв'язків v диференціальних рівнянь вигляду

$$a(x)v'(x) + \frac{1}{2}b^2(x)v''(x) = 0,$$

для дослідження асимптотичної поведінки розв'язків СДР (2). Ними отримано результати, що дозволяють за асимптотичними властивостями функції v досліджувати асимптотичну поведінку розв'язку X СДР, а саме:

- якщо $|v(-\infty)| = \infty$ та $|v(+\infty)| < \infty$, то $X(t) \rightarrow +\infty$, $t \rightarrow \infty$, м.н. (розв'язок прямує до додатної нескінченності);
- якщо $|v(-\infty)| < \infty$ та $|v(+\infty)| = \infty$, то $X(t) \rightarrow -\infty$, $t \rightarrow \infty$, м.н. (розв'язок прямує до від'ємної нескінченності);
- якщо $|v(-\infty)| < \infty$ та $|v(+\infty)| < \infty$, то $|X(t)| \rightarrow \infty$, $t \rightarrow \infty$ (норма

розв'язку прямує до нескінченності), більш того

$$\mathbb{P} \left\{ \lim_{t \rightarrow \infty} X(t) = -\infty \right\} = \frac{v(+\infty) - v(x_0)}{v(+\infty) - v(-\infty)},$$

$$\mathbb{P} \left\{ \lim_{t \rightarrow \infty} X(t) = +\infty \right\} = \frac{v(x_0) - v(-\infty)}{v(+\infty) - v(-\infty)};$$

- якщо $|v(-\infty)| < \infty$ та $|v(+\infty)| < \infty$, то

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} X(t) = -\infty, \quad \limsup_{t \rightarrow \infty} X(t) = +\infty \quad \text{м.н.}$$

(розв'язок рекурентний).

Також для вищенаведеного СДР досліджується задача існування детермінованої асимптотики x розв'язку X , тобто такої функції, що

$$X(t) \sim x(t), \quad t \rightarrow \infty, \text{ м.н.} \quad (3)$$

Встановлено, що якщо $a(x) \sim Ax^\alpha$, $x \rightarrow +\infty$ для деяких сталих $A > 0$ та $-1 < \alpha < 1$ (степенева асимптотика зносу), коефіцієнт дифузії b обмежений та $X(t) \rightarrow +\infty$, $t \rightarrow \infty$, то еквівалентність (3) виконується для функції x , що є асимптотикою звичайного диференціального рівняння

$$dx(t) = Ax^\alpha(t)dt, \quad x(0) = 1,$$

а саме

$$x(t) = (A(1 - \alpha)t)^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

У багатовимірному випадку дослідження асимптотичної поведінки розв'язків СДР не обмежується питанням прямування розв'язку до нескінченності, а додатково виникає задача з'ясування напрямку прямування розв'язку до нескінченності. У двовимірному випадку таким напрямком можна вважати полярний кут. Спіцер (див. [5]) вивчав асимптотичні властивості двовимірного вінерівського процесу. Зокрема, він отримав деякі цікаві результати щодо асимптотичної поведінки полярного кута $\phi = \phi(t)$ двовимірного вінерівського процесу (тут ϕ позначає про-

цес полярного кута з врахуванням намотування). Спіцер довів, що

$$\frac{\phi(t)}{\ln \sqrt{t}} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} C(0, 1),$$

тобто відповідним чином нормований полярний кут двовимірного вінерівського процесу прямує за розподілом до стандартного розподілу Коші $C(0, 1)$. Раніше П. Леві вдалося показати, що граничний розподіл процесу $\frac{\phi(t)}{\ln \sqrt{t}}$ має нескінченну дисперсію.

Схожий підхід, що й у Гіхмана та Скорохода, для дослідження умов прямування до нескінченності та рекурентності розв'язків багатовимірних СДР було застосовано Фрідманом та Пінські (див. [17], [18], [19], [24]). Крім того, у книзі [24] для двовимірних СДР розглянуто задачу про швидкість обертання розв'язку навколо початку координат.

Використовуючи інший підхід, Келер, Керстінг, Рьослер (див. [33]) для СДР (2) дослідили схожі задачі. Крім того, вони дослідили збіжність розв'язку за розподілом за умови $X(t) \rightarrow \infty$, $t \rightarrow \infty$. У статті [30] розглянуто багатовимірний випадок СДР (2) та досліджено умови, що дозволяють відкинути зсув або дифузію при дослідженні асимптотичної поведінки розв'язку. У першому випадку досліджуються умови існування детермінованої асимптотики (3), а в другому випадку – умови існування випадкової асимптотики Y такої, що $X(t) \sim Y(t)$, $t \rightarrow \infty$, м.н., де Y – розв'язок СДР

$$dY(t) = b(Y(t))dW(t).$$

У статті [30] наведено деякі достатні умови, що гарантують прямування розв'язку до нескінченності та стабілізацію кута:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |X(t)| = \infty \text{ м.н.}, \quad \exists \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{X(t)}{|X(t)|} \text{ м.н.}$$

Крім того, знайдено деякі асимптотичні оцінки для норми розв'язку.

Булдигін В.В., Клесов О.І., Коваль В.О., Тимошенко О.А., Штайнебах Й.Г. у своїх працях (див. [37], [43], [47], [48], [49], [54], [57], [58], [61]) досліджували асимптотичну поведінку одновимірних СДР з коефіцієнтами, залежними від ча-

су. Основна увага в їхніх роботах присвячена питанням асимптотичної еквівалентності розв'язків СДР та звичайних диференціальних рівнянь (надалі – ЗДР) м.н. Автори припускають, що $X(t) \rightarrow \infty, t \rightarrow \infty$, та досліджують умови того, що розв'язок одновимірного СДР вигляду

$$dX(t) = a_1(X(t))a_2(t)dt + b_1(X(t))b_2(t)dW(t)$$

майже напевно асимптотично еквівалентний розв'язку ЗДР

$$dx(t) = a_1(x(t))a_2(t)dt.$$

Крім того, розглянуто більш загальну задачу так названої ψ -асимптотичної еквівалентності розв'язків X та x , а саме задачу дослідження таких умов, що

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\psi(X(t))}{\psi(x(t))} = 1 \text{ м.н.},$$

де ψ – деяка функція. Таке узагальнення асимптотичної еквівалентності має сенс, бо не всі функції ψ зберігають еквівалентність. Зв'язок функцій, що зберігають еквівалентність, та так названих *псевдорегулярних (PRV)* функцій також досліджений указаними авторами. За допомогою методів звичайних диференціальних рівнянь Самойленко А.М., Станжицький О.М., Новак І.Г., Крєневич А.П. (див. [52], [56], [46]) вивчали задачу асимптотичної еквівалентності розв'язків систем нелінійних СДР та лінійних ЗДР, де під асимптотичною еквівалентністю розв'язків X та x розумілося

$$X(t) - x(t) \rightarrow 0, t \rightarrow \infty, \text{ м.н.}$$

Серед останніх досліджень за темою цієї дисертації можна відмітити праці Пилипенка А.Ю., Проске Ф.Н., Павлюкевича І.Є., Кулика О.М. (див. [63], [64], [66], [67]). В їхніх працях дослідження асимптотичної поведінки розв'язків СДР є важливою складовою при вивченні задачі регуляризації сингулярних ЗДР за допомогою додавання малого шуму.

Розділ 1

Асимптотичні оцінки

Цей розділ є підготовчим для подальшого дослідження асимптотичної поведінки розв'язків СДР. Тут ми отримуємо умови прямування до нуля м.н. деяких типів випадкових процесів. Організований розділ так: спочатку ми доводимо загальну достатню умову нескінченної малості м.н. для випадкових процесів, а потім використовуємо її для оцінювання порядку зростання інтегралів від випадкових процесів, субмартингалів та стохастичних інтегралів.

1.1 Асимптотичні оцінки випадкових процесів

У цій секції ми встановимо достатню умову того, що випадковий процес прямує до нуля майже напевно. У подальшому цей результат буде корисним для отримання асимптотичних оцінок інтегралів від випадкових процесів та стохастичних інтегралів.

Теорема 1.1.1. *Нехай $F = F(t)$, $t \geq 1$, – випадковий процес такий, що*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E} \sup_{2^k \leq t \leq 2^{k+1}} F^2(t) < \infty. \quad (1.1)$$

Тоді

$$F(t) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty, \quad \text{м.н.}$$

Доведення. Маємо

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E} \sup_{2^k \leq t \leq 2^{k+1}} F^2(t) < \infty$$

$$\text{(за теоремою Фубіні)} \implies \mathbb{E} \sum_{k=0}^{\infty} \sup_{2^k \leq t \leq 2^{k+1}} F^2(t) < \infty$$

$$\implies \sum_{k=0}^{\infty} \sup_{2^k \leq t \leq 2^{k+1}} F^2(t) < \infty \text{ м.н.}$$

$$\implies \sup_{2^k \leq t \leq 2^{k+1}} F^2(t) \rightarrow 0, k \rightarrow \infty, \text{ м.н.}$$

$$\implies F^2(t) \rightarrow 0, t \rightarrow \infty, \text{ м.н.}$$

$$\implies F(t) \rightarrow 0, t \rightarrow \infty, \text{ м.н.}$$

□

1.2 Асимптотичні оцінки інтегралів від випадкових процесів

У цій секції ми отримаємо асимптотичні оцінки інтегралів Лебега від випадкових процесів, а саме доведемо одну теорему, яка оцінює швидкість зростання таких інтегралів.

Нехай $a = a(t)$ – прогресивно вимірний випадковий процес.

Теорема 1.2.1. *Якщо для деякого $\alpha \geq 0$*

$$\mathbb{E}a^2(t) \leq C(1 + t^{2\alpha}),$$

то для-будь якого $\gamma > 1 + \alpha$

$$\int_0^t a(s) ds = o(t^\gamma), t \rightarrow \infty, \text{ м.н.}$$

Доведення. Застосуємо теорему 1.1.1 з

$$F(t) := \frac{\int_0^t |a(s)| \mathbf{d}s}{t^\gamma}, \quad t \geq 1.$$

Маємо

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E} \sup_{2^k \leq t \leq 2^{k+1}} F^2(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E} \sup_{2^k \leq t \leq 2^{k+1}} \left(\frac{\int_0^t |a(s)| \mathbf{d}s}{t^\gamma} \right)^2 \\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty} (2^{-2\gamma})^k \mathbb{E} \left(\int_0^{2^{k+1}} |a(s)| \mathbf{d}s \right)^2 \end{aligned}$$

$$\text{(за нерівністю Коші–Буняковського)} \quad \leq 2 \sum_{k=0}^{\infty} (2^{1-2\gamma})^k \mathbb{E} \int_0^{2^{k+1}} a^2(s) \mathbf{d}s$$

$$\text{(за теоремою Фубіні)} \quad \leq 2 \sum_{k=0}^{\infty} (2^{1-2\gamma})^k \int_0^{2^{k+1}} \mathbb{E} a^2(s) \mathbf{d}s$$

$$\text{(за умовою теореми)} \quad \leq C \sum_{k=0}^{\infty} (2^{1-2\gamma})^k \int_0^{2^{k+1}} (1 + s^{2\alpha}) \mathbf{d}s$$

$$\leq C \sum_{k=0}^{\infty} (4^{1-\gamma})^k + C \sum_{k=0}^{\infty} (4^{1+\alpha-\gamma})^k < \infty$$

(останні два ряди збіжні, оскільки за умовою $\gamma > 1 + \alpha$ та $\alpha \geq 0$).

Отже, за теоремою 1.1.1

$$F(t) = \frac{\int_0^t |a(s)| \mathbf{d}s}{t^\gamma} \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty, \text{ м.н.}$$

$$\implies \frac{\int_0^t a(s) \mathbf{d}s}{t^\gamma} \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty, \text{ м.н.,}$$

що й треба було довести. □

Строгість нерівності $\gamma > 1 + \alpha$ є суттєвою, що показує наступний детермінований контрприклад.

Приклад 1.2.2. Покладемо $a(t) := t^\alpha$ для деякого $\alpha \geq 0$ та нехай $\gamma := 1 + \alpha$. Тоді

$$\int_0^t a(s) ds \neq o(t^\gamma), t \rightarrow \infty.$$

Розв'язання.

$$\frac{1}{t^\gamma} \int_0^t a(s) ds = \frac{1}{t^{1+\alpha}} \int_0^t s^\alpha ds = \frac{1}{t^{1+\alpha}} \frac{t^{1+\alpha}}{1+\alpha} = \frac{1}{1+\alpha} \not\rightarrow 0, t \rightarrow \infty.$$

□

1.3 Асимптотичні оцінки субмартигалів

Доведемо загальну теорему про асимптотичну поведінку субмартигалів, якою в подальшому користуватимемося для оцінювання швидкості зростання стохастичних інтегралів зі змінною верхньою межею.

Теорема 1.3.1. Нехай M – субмартигал. Якщо для деякого $\mu \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{E}M^2(t) = O(t^{2\mu}), t \rightarrow \infty,$$

то $M(t) = o(t^\gamma)$, $t \rightarrow \infty$, м.н. для будь-якого $\gamma > \mu$.

Доведення. З умови випливає, що

$$\mathbb{E}M^2(t) \leq Ct^{2\mu}, t \geq 1. \tag{1.2}$$

Застосуємо теорему 1.1.1 з

$$F(t) := \frac{M(t)}{t^\gamma}, t \geq 1.$$

Маємо

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E} \sup_{2^k \leq t \leq 2^{k+1}} F^2(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E} \sup_{2^k \leq t \leq 2^{k+1}} \frac{M^2(t)}{t^{2\gamma}} \\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty} (4^{-\gamma})^k \mathbb{E} \sup_{t \leq 2^{k+1}} M^2(t) \end{aligned}$$

$$\text{(за нерівністю Дуба)} \leq 4 \sum_{k=0}^{\infty} (4^{-\gamma})^k \mathbb{E} M^2(2^{k+1})$$

$$\text{(за оцінкою (1.2))} \leq C \sum_{k=0}^{\infty} (4^{\mu-\gamma})^k < \infty$$

(останній ряд збігається, оскільки за умовою $\gamma > \mu$).

Отже, за теоремою 1.1.1

$$F(t) = \frac{M(t)}{t^\gamma} \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty, \quad \text{м.н.},$$

що й треба було довести. □

1.4 Асимптотичні оцінки інтегралів за вінерівським процесом

У цій секції ми знайдемо асимптотичні оцінки інтегралів Іто за вінерівським процесом W , отримавши наслідок з теореми 1.3.1.

Нехай b – прогресивно вимірний випадковий процес.

Теорема 1.4.1. *Якщо для деякого $\beta \geq 0$*

$$\mathbb{E} \int_0^t b^2(s) ds = O(t^{1+2\beta}), \quad t \rightarrow \infty, \quad (1.3)$$

то для будь-якого $\gamma > \frac{1}{2} + \beta$

$$\int_0^t b(s) dW(s) = o(t^\gamma), \quad t \rightarrow \infty, \quad \text{м.н.} \quad (1.4)$$

Доведення. Покладемо $M(t) = \int_0^t b(s) dW(s)$. Відомо, що M є мартингалом (а отже, і субмартингалом). Тоді

$$\mathbb{E} M^2(t) = \mathbb{E} \left(\int_0^t b(s) dW(s) \right)^2$$

$$\text{(за ізометрією Іто)} = \mathbb{E} \int_0^t b^2(s) ds$$

(за умовою (1.4.1)) $= O(t^{1+2\beta})$, $t \rightarrow \infty$.

Застосовуючи теорему 1.3.1 з $\mu := \frac{1}{2} + \beta$, отримуємо результат теореми. \square

Зауваження 1.4.2. З умови

$$\mathbb{E}b^2(t) \leq C(1 + t^{2\beta}) \quad (1.5)$$

впливає умова (1.3).

Доведення. Дійсно, за теоремою Фубіні

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \int_0^t b^2(s) ds &= \int_0^t \mathbb{E}b^2(s) ds \\ \text{(за умовою (1.5))} \quad &\leq \int_0^t C(1 + s^{2\beta}) ds = C \left(t + \frac{t^{1+2\beta}}{1 + 2\beta} \right) \\ &\leq C(1 + t^{1+2\beta}) = O(t^{1+2\beta}), \quad t \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

\square

Зауваження 1.4.3. Строгість нерівності $\gamma > \frac{1}{2} + \beta$ у наслідку 1.4.1 є суттєвою.

Доведення. Покладемо, наприклад, $b(t) := 1$. Тоді умова (1.3) виконується для $\beta := 0$. Але для $\gamma := \frac{1}{2}$

$$\frac{1}{t^\gamma} \int_0^t b(s) dW(s) = \frac{W(t)}{\sqrt{t}}$$

не має границі при $t \rightarrow \infty$ м.н., що впливає із закону повторного логарифму для вінерівського процесу. Отже, твердження (1.4) не виконується. \square

1.5 Асимптотичні оцінки стохастичних інтегралів зі стрибками

У цій секції ми знайдемо асимптотичні оцінки стохастичних інтегралів за компенсованою пуассонівською мірою \tilde{N} , використовуючи теорему 1.3.1. Доведення

наступних результатів цієї секції схожі на відповідні доведення з секції про асимптотичні оцінки інтегралів за вінерівським процесом.

Нехай $c = c(t, u)$ – передбачуване випадкове поле.

Теорема 1.5.1. *Якщо для деякого $\beta \geq 0$*

$$\mathbb{E} \int_0^t \int_{\mathbb{R}} c^2(s, u) \nu(\mathrm{d}u) \mathrm{d}s = \mathcal{O}(t^{1+2\beta}), \quad t \rightarrow \infty, \quad (1.6)$$

то для будь-якого $\gamma > \frac{1}{2} + \beta$

$$\int_0^t \int_{\mathbb{R}} c(s, u) \tilde{N}(\mathrm{d}s, \mathrm{d}u) = o(t^\gamma), \quad t \rightarrow \infty, \quad \text{м.н.}$$

Доведення. Покладемо $M(t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}} c(s, u) \tilde{N}(\mathrm{d}s, \mathrm{d}u)$. Відомо, що M є мартингалом. Тоді

$$\begin{aligned} \mathbb{E} M^2(t) &= \mathbb{E} \left(\int_0^t \int_{\mathbb{R}} c(s, u) \tilde{N}(\mathrm{d}s, \mathrm{d}u) \right)^2 \\ (\text{за ізометрією Іто}) &= \mathbb{E} \int_0^t \int_{\mathbb{R}} c^2(s, u) \nu(\mathrm{d}u) \mathrm{d}s \\ (\text{за умовою (1.6)}) &= \mathcal{O}(t^{2\beta+1}), \quad t \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Застосовуючи теорему 1.3.1 з $\mu := \frac{1}{2} + \beta$, отримуємо результат теореми. \square

Зауваження 1.5.2. *З умови*

$$\mathbb{E} \int_{\mathbb{R}} c^2(t, u) \nu(\mathrm{d}u) \leq C(1 + t^{2\beta}) \quad (1.7)$$

впливає умова (1.6).

Доведення. Дійсно, за теоремою Фубіні

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \int_0^t \int_{\mathbb{R}} c^2(s, u) \nu(\mathrm{d}u) \mathrm{d}s &= \int_0^t \mathbb{E} \int_{\mathbb{R}} c^2(s, u) \nu(\mathrm{d}u) \mathrm{d}s \\ (\text{за умовою (1.7)}) &\leq \int_0^t C(1 + s^{2\beta}) \mathrm{d}s = C \left(t + \frac{t^{1+2\beta}}{1 + 2\beta} \right) \\ &\leq C(1 + t^{1+2\beta}) = \mathcal{O}(t^{1+2\beta}), \quad t \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

□

Зауваження 1.5.3. У теорії процесів Леві часто розглядають випадкові поля вигляду $c(t, u) = c(t)u$, де $c = c(t)$ – передбачуваний випадковий процес. Якщо припустити, що $\int_{\mathbb{R}} u^2 \nu(\mathrm{d}u) < \infty$, то з умови

$$\mathbb{E}c^2(t) \leq C(1 + t^{2\beta}) \quad (1.8)$$

впливає умова (1.7).

Доведення. Дійсно,

$$\mathbb{E} \int_{\mathbb{R}} c^2(t, u) \nu(\mathrm{d}u) = \mathbb{E} \int_{\mathbb{R}} c^2(t) u^2 \nu(\mathrm{d}u) = \mathbb{E}c^2(t) \int_{\mathbb{R}} u^2 \nu(\mathrm{d}u)$$

$$\text{(за умовою (1.8))} \leq C(1 + t^{2\beta}).$$

□

Зауваження 1.5.4. Нехай $d = d(t, u)$ – передбачуване випадкове поле. Для дослідження асимптотичної поведінки інтегралів за пуассонівською мірою можна скористатися представленням

$$\int_0^t \int_{\mathbb{R}} d(s, u) N(\mathrm{d}s, \mathrm{d}u) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}} d(s, u) \tilde{N}(\mathrm{d}s, \mathrm{d}u) + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} d(s, u) \nu(\mathrm{d}u) \mathrm{d}s$$

та досліджувати асимптотичну поведінку кожного доданку (за умови, що кожен з інтегралів у правій частині коректно означений).

1.6 Асимптотичні оцінки інтегралів за процесами Леві

Розглянемо приклад інтеграла за пуассонівським процесом, який можна явно обчислити та визначити для нього точну асимптотику.

Приклад 1.6.1. Нехай $N = N(t)$ – пуассонівський процес з інтенсивністю λ . Тоді

$$\int_0^t N(s-) \mathrm{d}N(s) = \frac{(N(t) - 1)N(t)}{2} \sim \frac{\lambda^2}{2} t^2, \quad t \rightarrow \infty, \text{ м.н.}$$

Розв'язання. Позначимо через τ_1, τ_2, \dots моменти стрибків процесу N . Помітимо, що кількість стрибків процесу N до моменту t включно становить $N(t)$, а отже,

$$N(\tau_k) = k, \quad N(\tau_k-) = k - 1, \quad k \in \mathbb{N},$$

при цьому величина кожного стрибка

$$N(\tau_k) - N(\tau_k-) = 1, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Тоді за означенням інтеграла Стільтєса

$$\begin{aligned} \int_0^t N(s-)dN(s) &= \sum_{k=1}^{N(t)} N(\tau_k-)(N(\tau_k) - N(\tau_k-)) \\ &= \sum_{k=1}^{N(t)} (k - 1) = \frac{(N(t) - 1)N(t)}{2}. \end{aligned}$$

З відомої асимптотики процесу Пуассона

$$N(t) \sim \lambda t, \quad t \rightarrow \infty, \text{ м.н.}$$

впливає асимптотика нашого стохастичного інтеграла. □

Далі у цій секції ми застосуємо попередні результати даного розділу для отримання асимптотичних оцінок інтегралів за процесами Леві.

Нехай $Z = Z(t)$ – процес Леві зі скінченним другим моментом (зауважимо, що скінченність другого моменту процесу Z еквівалентна тому, що міра Леві ν цього процесу така, що $\int_{\mathbb{R}} u^2 \nu(du) < \infty$), $h = h(t)$ – передбачуваний випадковий процес. Розглянемо компенсований процес Леві

$$\tilde{Z} = \tilde{Z}(t) := Z(t) - \mathbb{E}Z(t) = Z(t) - t\mathbb{E}Z(1).$$

Тоді \tilde{Z} – процес Леві з $\mathbb{E}\tilde{Z}(t) = 0$.

Теорема 1.6.2. *Припустимо, що $\int_{\mathbb{R}} u^2 \nu(du) < \infty$ та для деякого $\beta \geq 0$*

$$\mathbb{E}h^2(t) \leq C(1 + t^{2\beta}). \tag{1.9}$$

Тоді:

(А) для будь-якого $\gamma > \frac{1}{2} + \beta$

$$\int_0^t h(s) d\tilde{Z}(s) = o(t^\gamma), \quad t \rightarrow \infty, \text{ м.н.}; \quad (1.10)$$

(Б) для будь-якого $\gamma > 1 + \beta$

$$\int_0^t h(s) dZ(s) = o(t^\gamma), \quad t \rightarrow \infty, \text{ м.н.}$$

Доведення. За представленням Леві–Іто процес Z можна подати у вигляді

$$Z(t) = at + bW(t) + \int_0^t \int_{|u|<1} u \tilde{N}(ds, du) + \int_0^t \int_{|u|\geq 1} u N(ds, du),$$

де $a \in \mathbb{R}$, $b \geq 0$, W – вінерівський процес, N – пуассонівська випадкова міра з характеристичною мірою $dt \cdot \nu(du)$, де ν – деяка міра Леві, \tilde{N} – компенсована пуассонівська міра, відповідна до міри N , причому W та N незалежні. Це представлення неважко переписати у вигляді

$$Z(t) = \tilde{a}t + bW(t) + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} u \tilde{N}(ds, du), \quad (1.11)$$

де

$$\tilde{a} := a + \int_{|u|\geq 1} u \nu(du).$$

Зауважимо, що інтеграл у правій частині рівності (1.11) коректно означений, оскільки за припущенням $\int_{\mathbb{R}} u^2 \nu(du) < \infty$. Оскільки

$$\mathbb{E}W(t) = \mathbb{E} \int_0^t \int_{\mathbb{R}} u \tilde{N}(ds, du) = 0$$

як математичні сподівання від мартингалів з нульовим середнім, то

$$\mathbb{E}Z(t) = \tilde{a}t. \quad (1.12)$$

Таким чином, компенсований процес Леві має представлення

$$\tilde{Z}(t) = bW(t) + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} u \tilde{N}(ds, du). \quad (1.13)$$

(А) Використовуючи представлення (1.13), розпишемо інтеграл за компенсо-

ваним процесом Леві у вигляді суми:

$$\int_0^t h(s) d\tilde{Z}(s) = b \int_0^t h(s) dW(s) + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} h(s) u \tilde{N}(ds, du)$$

та дослідимо асимптотичну поведінку обох інтегралів у правій частині.

За зауваженнями 1.4.2 та 1.5.3 з умови теореми випливає, що для будь-якого $\gamma > \frac{1}{2} + \beta$

$$\int_0^t h(s) dW(s) = o(t^\gamma), \quad t \rightarrow \infty, \text{ м.н.}$$

та

$$\int_0^t \int_{\mathbb{R}} h(s) u \tilde{N}(ds, du) = o(t^\gamma), \quad t \rightarrow \infty, \text{ м.н.}$$

Таким чином, для будь-якого $\gamma > \frac{1}{2} + \beta$

$$\int_0^t h(s) d\tilde{Z}(s) = o(t^\gamma), \quad t \rightarrow \infty, \text{ м.н.}, \quad (1.14)$$

що й треба було довести у пункті (А).

(Б) Інтеграл за процесом Леві Z можна подати у вигляді суми

$$\int_0^t h(s) dZ(t) = \int_0^t h(s) d\tilde{Z}(t) + \tilde{a} \int_0^t h(s) ds.$$

У пункті (А) ми довели збіжність (1.14) для першого інтеграла останньої суми.

За теоремою 1.2.1 для будь-якого $\gamma > 1 + \beta$

$$\int_0^t h(s) ds = o(t^\gamma), \quad t \rightarrow \infty, \text{ м.н.}$$

Таким чином, для будь-якого $\gamma > 1 + \beta$

$$\int_0^t h(s) dZ(t) = o(t^\gamma), \quad t \rightarrow \infty, \text{ м.н.},$$

що й треба було довести у пункті (Б). □

Як наслідок з доведення теореми 1.6.2 можна отримати відомі результати про асимптотичну поведінку процесів Леві (див., наприклад, § 24 у [8]).

Наслідок 1.6.3. (А) Для будь-якого $\gamma > \frac{1}{2}$

$$\tilde{Z}(t) = o(t^\gamma), \quad t \rightarrow \infty, \text{ м.н.}$$

(Б) Для будь-якого $\gamma > 1$

$$Z(t) = o(t^\gamma), \quad t \rightarrow \infty, \text{ м.н.}$$

(В) Більш того,

$$\frac{Z(t)}{t} \rightarrow \mathbb{E}Z(1), \quad t \rightarrow \infty, \text{ м.н.}$$

Доведення. Покладемо $h(t) := 1$. Тоді умова (1.9) виконується для $\beta := 0$.

(А) Маємо

$$\int_0^t h(t) d\tilde{Z}(t) = \int_0^t d\tilde{Z}(t) = \tilde{Z}(t).$$

Тоді з пункту (А) теореми 1.6.2 випливає твердження цього пункту.

(Б) Маємо

$$\int_0^t h(t) dZ(t) = \int_0^t dZ(t) = Z(t).$$

Тоді з пункту (Б) теореми 1.6.2 випливає твердження цього пункту.

(В) Маємо

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{Z(t)}{t}$$

$$\text{(за представленням (1.11))} \quad = \tilde{a} + b \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{W(t)}{t} + \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \int_{\mathbb{R}} u \tilde{N}(ds, du).$$

Знайдемо кожен з границь у правій частині. Із закону повторного логарифму випливає, що

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{W(t)}{t} = 0 \text{ м.н.}$$

Застосовуючи до другої границі зауваження 1.5.3 з $c(t) := 1$ та $\beta := 0$, отримуємо, що для будь-якого $\gamma > \frac{1}{2}$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t^\gamma} \int_0^t \int_{\mathbb{R}} u \tilde{N}(ds, du) = 0, \text{ м.н.},$$

зокрема, при $\gamma := 1$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \int_{\mathbb{R}} u \tilde{N}(ds, du) = 0, \text{ м.н.}$$

З формули (1.12) при $t := 1$ отримуємо, що $\tilde{a} = \mathbb{E}Z(1)$. Таким чином,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{Z(t)}{t} = \mathbb{E}Z(1) \text{ м.н.},$$

що й треба було довести у цьому пункті. \square

У прикладі 1.6.1 ми знайшли точну асимптотику деякого інтеграла зі стрибками шляхом явного обчислення цього інтеграла. Тепер застосуємо теорему 1.6.2 для дослідження асимптотичної поведінки цього інтеграла. Хоча результат теореми не дає точної асимптотики цього інтеграла, її результат узгоджується з результатом прикладу 1.6.1.

Приклад 1.6.4. Нехай $N = N(t)$ – пуассонівський процес з інтенсивністю λ . Тоді для будь-якого $\gamma > 2$

$$\int_0^t N(s-)dN(s) = o(t^\gamma), \quad t \rightarrow \infty, \text{ м.н.}$$

Розв'язання. Застосуємо теорему 1.6.2, покладаючи $Z := N$ та $h(t) := N(t-)$. Відомо, що N – процес Леві, і неважко бачити, що h – передбачуваний випадковий процес. Маємо

$$\begin{aligned} \mathbb{E}h^2(t) &= \mathbb{E}N^2(t-) = \mathbb{E} \lim_{s \rightarrow t-} N^2(s) = \mathbb{E} \liminf_{s \rightarrow t-} N^2(s) \\ &\text{(за лемою Фату)} \leq \liminf_{s \rightarrow t-} \mathbb{E}N^2(s) = \liminf_{s \rightarrow t-} (\lambda s + \lambda^2 s^2) \\ &= \lambda t + \lambda^2 t^2 \leq C(1 + t^2). \end{aligned}$$

Отже, умова теореми 1.6.2 виконана з $\beta = 1$, тому за пунктом (Б) цієї теореми для будь-якого $\gamma > 2$

$$\int_0^t N(s-)dN(s) = o(t^\gamma).$$

\square

1.7 Висновки до розділу 1

У даному розділі ми отримали асимптотичні оцінки для різного типу стохастичних інтегралів у випадку, коли підінтегральні процеси обмежені деякими степеневими функціями від часу. Конкретно, ми розглянули стохастичні інтеграли з наступними інтеграторами: мірою Лебега, вінерівським процесом, пуассонівською компенсованою мірою та процесами Леві.

Отримані асимптотичні оцінки неодноразово використовуватимуться в подальших розділах, зокрема при дослідженні асимптотичної поведінки розв'язків СДР.

Розділ 2

Асимптотика розв'язків СДР зі стрибками

У цьому розділі ми досліджуємо одновимірні СДР зі стрибками. У таких рівняннях, окрім зсуву та дифузії, присутній стрибкоподібний доданок, що є стохастичним інтегралом за компенсованою пуассонівською мірою. Ми наведемо достатні умови існування степеневі асимптотики розв'язків таких СДР у випадку, коли зсув має деяку степеневу асимптотику, а шум (дифузія та стрибки) обмежений деякою степеневою функцією.

2.1 Приклади СДР зі стрибками

У цій секції ми розглянемо приклади СДР, що містять стохастичний диференціал за процесом Пуассона, та які можна розв'язати явно. Ця секція несе ілюстративний характер.

Нехай протягом даної секції $N = N(t)$ – процес Пуассона.

Приклад 2.1.1. *Легко бачити, що СДР*

$$dX(t) = c(X(t-))dN(t), \quad X(0) = x_0 \in \mathbb{R},$$

в якому $c = c(x)$ – вимірна функція, має єдиний розв’язок

$$X(t) = X_{N(t)}, \quad (2.1)$$

де послідовність $k \mapsto X_k$ означена рекурентно:

$$X_0 := x_0, \quad X_{k+1} := X_k + c(X_k), \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Розв’язання. Нехай $\tau_1 < \tau_2 < \dots$ – моменти стрибків процесу N . В інтегральному вигляді СДР записується як

$$X(t) = x_0 + \int_0^t c(X(s-))dN(s) = x_0 + \sum_{k=1}^{N(t)} c(X(\tau_k-)).$$

Знайдемо розв’язок на кожному з проміжків $[0, \tau_1)$, $[\tau_1, \tau_2)$, $[\tau_2, \tau_3)$, ... окремо:

$$t \in [0, \tau_1) \implies X(t) = x_0;$$

$$t \in [\tau_1, \tau_2) \implies X(t) = x_0 + c(X(\tau_1-)) = x_0 + c(x_0);$$

$$t \in [\tau_2, \tau_3) \implies X(t) = x_0 + c(X(\tau_1-)) + c(X(\tau_2-)) = x_0 + c(x_0) + c(x_0 + c(x_0));$$

...

Продовжуючи за індукцією, отримуємо формулу (2.1). □

Приклад 2.1.2. СДР

$$dX(t) = aX(t)dt + cX(t-)dN(t), \quad X(0) = x_0 \in \mathbb{R},$$

в якому $\{a, c\} \subset \mathbb{R}$, має єдиний розв’язок

$$X(t) = x_0(1 + c)^{N(t)}e^{at}.$$

Розв’язання. Нехай $\tau_1 < \tau_2 < \dots$ – моменти стрибків процесу N . СДР в інтегральному вигляді записується як

$$X(t) = x_0 + a \int_0^t X(s)ds + c \int_0^t X(s-)dN(s),$$

або, якщо розписати інтеграл за стрибками,

$$X(t) = x_0 + a \int_0^t X(s) ds + c \sum_{k=1}^{N(t)} X(\tau_k-). \quad (2.2)$$

Доведемо, що для будь-якого $k \in \mathbb{N}_0$

$$X(t) = x_0(1+c)^n e^{at}, \quad \tau_{k-1} \leq t < \tau_k. \quad (2.3)$$

Для цього застосуємо принцип повної математичної індукції. Припустимо, що формула (2.3) виконується для $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, де $n \in \mathbb{N}_0$. Тоді при $\tau_{n+1} \leq t < \tau_{n+2}$

$$\text{(за формулою (2.2))} \quad X(t) = x_0 + a \int_0^t X(s) ds + c \sum_{k=1}^{n+1} X(\tau_k-)$$

$$= x_0 + a \int_0^{\tau_{n+1}} X(s) ds + a \int_{\tau_{n+1}}^t X(s) ds + c \sum_{k=1}^{n+1} X(\tau_k-)$$

(за формулою (2.3))

$$= x_0 + a \sum_{k=1}^{n+1} \int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} x_0(1+c)^{k-1} e^{as} ds + a \int_{\tau_{n+1}}^t X(s) ds + c \sum_{k=1}^{n+1} x_0(1+c)^{k-1} e^{a\tau_k}$$

$$= x_0 + x_0 \sum_{k=1}^{n+1} (1+c)^{k-1} (e^{\tau_k} - e^{\tau_{k-1}}) + cx_0 \sum_{k=1}^{n+1} (1+c)^{k-1} e^{a\tau_k} + a \int_{\tau_{n+1}}^t X(s) ds$$

$$= x_0 + x_0 \sum_{k=1}^{n+1} (1+c)^{k-1} (e^{a\tau_k} - e^{a\tau_{k-1}} + ce^{a\tau_k}) + a \int_{\tau_{n+1}}^t X(s) ds$$

$$= x_0 + x_0 \sum_{k=1}^{n+1} (1+c)^k e^{a\tau_k} - x_0 \sum_{k=0}^n (1+c)^k e^{a\tau_k} + a \int_{\tau_{n+1}}^t X(s) ds$$

$$= x_0 + x_0(1+c)^{n+1} e^{a\tau_{n+1}} - x_0 + a \int_{\tau_{n+1}}^t X(s) ds$$

$$= x_0(1+c)^{n+1} e^{a\tau_{n+1}} + a \int_{\tau_{n+1}}^t X(s) ds.$$

Отримали на проміжку $\tau_{n+1} \leq t < \tau_{n+2}$ ЗДР

$$dX(t) = aX(s)ds, \quad X(\tau_{n+1}) = x_0(1+c)^{n+1}e^{a\tau_{n+1}},$$

розв'язок якого має вигляд

$$X(t) = x_0(1+c)^{n+1}e^{at}, \quad \tau_{n+1} \leq t < \tau_{n+2}.$$

Таким чином, методом повної математичної індукції ми довели формулу (2.3) для будь-якого $n \in \mathbb{N}_0$. Враховуючи той факт, що

$$N(t) = n, \quad \tau_n \leq t < \tau_{n+1},$$

отримуємо результат прикладу. □

Приклад 2.1.3. СДР

$$dX(t) = cX(t-)dN(t), \quad X(0) = x_0 \in \mathbb{R},$$

де $c \in \mathbb{R}$, має єдиний розв'язок

$$X(t) = x_0(1+c)^{N(t)}. \tag{2.4}$$

Розв'язання. Застосуємо приклад 2.1.1 з $c(x) := cx$. Тоді $X(t) = X_{N(t)}$, де

$$X_0 = x_0,$$

$$X_1 = X_0 + cX_0 = x_0(1+c),$$

$$X_2 = X_1 + cX_1 = x_0(1+c) + cx_0(1+c) = x_0(1+c)^2,$$

...

Неважко бачити, що

$$X_k = x_0(1+c)^k, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Таким чином, отримуємо формулу (2.4). □

Зауваження 2.1.4. Наслідок 2.1.3 також впливає з прикладу 2.1.2 при $a := 0$.

2.2 Лінійна асимптотика процесів Іто зі стрибками

У цій секції ми знайдемо асимптотику процесів Іто зі стрибками у випадку, коли коефіцієнт зносу має додатну границю при $t \rightarrow \infty$, а характеристики шуму зростають не дуже швидко. Ця теорема є важливим результатом, який використовується далі при встановленні степеневого типу зростання для розв'язків СДР, коефіцієнти яких мають степеневе зростання.

Нехай випадковий процес $X = X(t)$ є càdlàg та має стохастичний диференціал

$$dX(t) = a(t)dt + b(t)dW(t) + \int_{\mathbb{R}} c(t, u)\tilde{N}(dt, du), \quad (2.5)$$

де a та b – прогресивно вимірні випадкові процеси, c – передбачуване випадкове поле, і нехай $\mathbb{E}X^2(0) < \infty$.

Теорема 2.2.1. *Припустимо, що:*

•

$$\mathbb{E}a^2(t) \leq C; \quad (2.6)$$

• для деякого $\beta \in [0, \frac{1}{2})$

$$b^2(t) + \int_{\mathbb{R}} c^2(t, u)\nu(du) \leq C (1 + X^2(t-)^{\beta}) \text{ м.н.} \quad (2.7)$$

Тоді

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} a(t) \leq \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{X(t)}{t} \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{X(t)}{t} \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} a(t) \text{ м.н.} \quad (2.8)$$

Доведення. Запишемо процес X в інтегральній формі

$$X(t) = X(0) + \int_0^t a(s)ds + \int_0^t b(s)dW(s) + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} c(s, u)\tilde{N}(ds, du) \quad (2.9)$$

та поділимо на $t > 0$:

$$\frac{X(t)}{t} = \frac{X(0)}{t} + \frac{\int_0^t a(s)ds}{t} + \frac{\int_0^t b(s)dW(s)}{t} + \frac{\int_0^t \int_{\mathbb{R}} c(s, u)\tilde{N}(ds, du)}{t} \quad (2.10)$$

$$=: T_1(t) + T_2(t) + T_3(t) + T_4(t).$$

Доведемо лему про оцінку другого моменту процесу X .

Лема 2.2.2.

$$\mathbb{E}X^2(t) \leq C(1 + t^2) \quad (2.11)$$

Доведення лем. Аналогічно до лем 3.3.2 з книги [65] можна перевірити, що з умов нашої теореми випливає, що

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \mathbb{E}X^2(t) < \infty, \quad T \geq 0.$$

За нерівністю Коші–Буняковського

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}\mathbb{E}X^2(t) &\leq \mathbb{E}X^2(0) + \mathbb{E} \left(\int_0^t a(s) \mathrm{d}s \right)^2 \\ &+ \mathbb{E} \left[\left(\int_0^t b(s) \mathrm{d}W(s) \right)^2 + \left(\int_0^t \int_{\mathbb{R}} c(s, u) \tilde{N}(\mathrm{d}s, \mathrm{d}u) \right)^2 \right] \\ &=: E_1 + E_2(t) + E_3(t). \end{aligned}$$

Оцінимо доданки у правій частині:

$$E_1 = \mathbb{E}X^2(0) < \infty \quad \text{за припущенням;}$$

$$E_2(t) = \mathbb{E} \left(\int_0^t a(s) \mathrm{d}s \right)^2$$

$$\text{(за нерівністю Коші–Буняковського)} \quad \leq t \mathbb{E} \int_0^t a^2(s) \mathrm{d}s$$

$$\text{(за теоремою Фубіні)} \quad = t \int_0^t \mathbb{E}a^2(s) \mathrm{d}s$$

$$\text{(за оцінкою (2.6))} \quad \leq t \int_0^t C \mathrm{d}s = Ct^2;$$

$$E_3(t) = \mathbb{E} \left[\left(\int_0^t b(s) \mathrm{d}W(s) \right)^2 + \left(\int_0^t \int_{\mathbb{R}} c^2(s, u) \tilde{N}(\mathrm{d}s, \mathrm{d}u) \right)^2 \right]$$

$$\text{(за ізометрією Іто)} \quad = \mathbb{E} \left[\int_0^t b^2(s) ds + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} c^2(s, u) \nu(du) ds \right]$$

$$\text{(за умовою (2.7))} \quad \leq C \mathbb{E} \int_0^t (1 + X^2(s-))^\beta ds$$

$$\text{(за теоремою Фубіні)} \quad = C \int_0^t (1 + \mathbb{E} X^2(s-))^\beta ds$$

$$\text{(за нерівністю Єнсена)} \quad \leq C \left(t + \int_0^t (\mathbb{E} X^2(s-))^\beta ds \right).$$

Таким чином, отримали оцінку

$$\mathbb{E} X^2(t) \leq C(1 + t^2) + C \int_0^t (\mathbb{E} X^2(s-))^\beta ds.$$

Використовуючи лему Вендроффа (див. теорему 7.3 у [35]), яка є узагальненням леми Гронуолла-Беллмана, отримуємо

$$\mathbb{E} X^2(t) \leq C \left((1 - \beta)t + (1 + t^2)^{1-\beta} \right)^{\frac{1}{1-\beta}}.$$

Поділивши останню нерівність на t^2 , отримаємо

$$\frac{\mathbb{E} X^2(t)}{t^2} \leq C \left(\frac{1 - \beta}{t^{1-2\beta}} + \left(\frac{1}{t^2} + 1 \right)^{1-\beta} \right)^{\frac{1}{1-\beta}} \rightarrow C, \quad t \rightarrow \infty,$$

з чого неважко вивести

$$\mathbb{E} X^2(t) \leq C(1 + t^2).$$

□

Продовжуємо доведення теореми. Дослідимо збіжність доданків у правій частині рівності (2.10) при $t \rightarrow \infty$.

- Маємо

$$T_1(t) = \frac{X(0)}{t} \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty.$$

- Можна показати, що

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} T_2(t) = \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t a(s) ds \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} a(t),$$

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} T_2(t) = \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t a(s) ds \geq \liminf_{t \rightarrow \infty} a(t).$$

Дійсно, перевіримо це, наприклад, для верхньої границі (для нижньої – аналогічно). Позначимо

$$\bar{a} := \limsup_{t \rightarrow \infty} a(t).$$

З означення верхньої границі випливає, що

$$\forall \varepsilon > 0 \exists T \geq 0 \forall s \geq T: a(s) \leq \bar{a} + \varepsilon.$$

Тому маємо

$$\begin{aligned} \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t a(s) ds &= \limsup_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{t} \int_0^T a(s) ds + \frac{1}{t} \int_T^t a(s) ds \right) \\ &\leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^T a(s) ds + \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_T^t (\bar{a} + \varepsilon) ds \\ &\leq \int_0^T a(s) ds \cdot \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} + (\bar{a} + \varepsilon) \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{t - T}{t} \\ &= \int_0^T a(s) ds \cdot 0 + (\bar{a} + \varepsilon) \cdot 1 = \bar{a} + \varepsilon. \end{aligned}$$

Переходячи до границі при $\varepsilon \rightarrow 0$ в останньому ланцюгу перетворень, отримуємо

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t a(s) ds \leq \bar{a}.$$

- За лемою 2.2.2 маємо оцінку (2.11). Для оцінки доданка T_3 зазначимо, що

$$\mathbb{E} b_k^2(t) \leq \mathbb{E} (C(1 + |X(t-)|^{2\beta})) = C \left(1 + \mathbb{E} (X^2(t-))^{\beta} \right)$$

$$\text{(за нерівністю Єнсена)} \leq C \left(1 + (\mathbb{E} X^2(t-))^{\beta} \right)$$

$$\begin{aligned} \text{(за оцінкою (2.11))} \quad &\leq C \left(1 + (C(1 + t^2))^\beta\right) \\ &\leq C(1 + t^{2\beta}), \quad k \in \{1, 2, \dots, m\}, \end{aligned}$$

тому за зауваженням 1.4.2

$$T_3(t) = \frac{1}{t} \int_0^t b(s) dW(s) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty, \text{ м.н.}$$

- Аналогічно попередньому пункту,

$$\mathbb{E} \int_{\mathbb{R}} c^2(t, u) \nu(du) \leq C(1 + t^{2\beta}), \quad k \in \{1, 2, \dots, l\},$$

тому за наслідком 1.5.2

$$T_4(t) = \frac{1}{t} \int_0^t \int_{\mathbb{R}} c(s, u) \tilde{N}(ds, du) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty, \text{ м.н.}$$

Таким чином, використовуючи одержані вище збіжності, переходячи до нижньої та верхньої границь при $t \rightarrow \infty$ у формулі (2.10), отримуємо твердження теореми. □

Наслідок 2.2.3. *Припустимо, що:*

- виконана умова (2.6) та для деякого випадкового $A > 0$

$$a(t) \rightarrow A, \quad t \rightarrow \infty, \text{ м.н.};$$

- виконана оцінка (2.7).

Тоді

$$X(t) \sim At, \quad t \rightarrow \infty, \text{ м.н.}$$

Доведення. За теоремою 2.2.1

$$A \leq \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{X(t)}{t} \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{X(t)}{t} \leq A \text{ м.н.}$$

Оскільки у цьому ланцюгу нерівностей зліва та справа стоїть одна й та сама випадкова величина, то нерівності перетворюються у рівності, тому

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{X(t)}{t} = A \text{ м.н.},$$

що й треба було довести. □

2.3 Прямування розв'язків СДР зі стрибками до нескінченності

Підхід доведення прямування розв'язку СДР до нескінченності м.н. за допомогою знаходження гармонічних функцій, або шкал (див., наприклад, [15]), виявляється неефективним для випадку СДР зі стрибками. У цій секції ми наведемо деякі прості достатні умови, що гарантують прямування до нескінченності (*транзієнтність*) м.н. розв'язку СДР зі стрибками.

Нехай W – вінерівський процес, N – пуассонівська випадкова міра на множині $\mathbb{R} \times [0, \infty)$ з мірою інтенсивності $\nu(du) \cdot dt$, причому процес W та випадкова міра N незалежні. Позначимо через \tilde{N} компенсовану пуассонівську випадкову міру, що відповідає пуассонівській випадковій мірі N , тобто $\tilde{N}(du, dt) = N(du, dt) - \nu(du)dt$.

Нехай X – розв'язок стохастичного диференціального рівняння зі стрибками вигляду

$$dX(t) = a(X(t))dt + b(X(t))dW(t) + \int_{\mathbb{R}} c(X(t-), u)\tilde{N}(du, dt), \quad (2.12)$$

$$X(0) = x_0 \in \mathbb{R}.$$

У цій секції ми вивчатимемо достатні умови того, що $X(t) \rightarrow +\infty$, $t \rightarrow \infty$, м.н.

Одержимо апріорну оцінку для другого моменту розв'язку рівняння (2.12) у випадку, коли знос обмежений, а шум степеневно обмежений. Доведення наступної леми аналогічне доведенню леми 2.2.2.

Лема 2.3.1. *Припустимо, що:*

(A) *функція a обмежена;*

(Б) функції b та c задовольняють умову степеневого зростання

$$\exists C \geq 0 \exists \beta \in [0, \frac{1}{2}) \forall x \in \mathbb{R} \quad b^2(x) + \int_{\mathbb{R}} c^2(x, u) \nu(\mathrm{d}u) \leq C \left(1 + (x^2)^\beta\right). \quad (2.13)$$

Тоді

$$\exists \tilde{C} \geq 0 \quad \forall t \geq 0 \quad \mathbb{E}X^2(t) \leq \tilde{C} (1 + t^2).$$

Доведення. Перепишемо рівняння (2.12) в інтегральному вигляді:

$$X(t) = x_0 + \int_0^t a(X(s)) \mathrm{d}s + \int_0^t b(X(s)) \mathrm{d}W(s) + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} c(X(s-), u) \tilde{N}(\mathrm{d}u, \mathrm{d}t). \quad (2.14)$$

Добре відомо, що другий момент процесу X локально обмежений, тобто

$$\forall T \geq 0 \quad \sup_{t \in [0, T]} \mathbb{E}X^2(t) < \infty.$$

За нерівністю Коші–Буняковського:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}X^2(t) &\leq 4 \left(x_0^2 + \mathbb{E} \left(\int_0^t a(s) \mathrm{d}s \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \mathbb{E} \left(\int_0^t b(s) \mathrm{d}W(s) \right)^2 + \mathbb{E} \left(\int_0^t \int_{\mathbb{R}} c(s, u) \tilde{N}(\mathrm{d}s, \mathrm{d}u) \right)^2 \right) \\ &= 4 (x_0^2 + E_1(t) + E_2(t) + E_3(t)), \end{aligned}$$

де через E_1, E_2, E_3 позначено відповідні математичні сподівання.

Враховуючи умову (А),

$$\exists A \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad |a(x)| \leq A. \quad (2.15)$$

Оцінимо доданок E_1 . За нерівністю Коші–Буняковського

$$E_1(t) = \mathbb{E} \left(\int_0^t a(X(s)) \mathrm{d}s \right)^2 \leq t \mathbb{E} \int_0^t a^2(X(s)) \mathrm{d}s$$

$$\text{(за теоремою Фубіні)} \quad = t \int_0^t \mathbb{E} a^2(X(s)) \mathrm{d}s$$

$$\text{(за формулою (2.15))} \quad \leq t \int_0^t A^2 ds = A^2 t^2.$$

Зауважимо, що інтеграли у доданках E_2, E_3 є мартингалами. Оцінимо ці доданки:

$$E_2(t) + E_3(t) = \mathbb{E} \left(\int_0^t b(X(s)) dW(s) \right)^2 + \mathbb{E} \left(\int_0^t \int_{\mathbb{R}} c^2(X(s-), u) \tilde{N}(ds, du) \right)^2$$

$$\text{(за ізометрією Іто)} \quad = \mathbb{E} \int_0^t b^2(X(s)) ds + \mathbb{E} \int_0^t \int_{\mathbb{R}} c^2(X(s-), u) \nu(du) ds$$

$$= \mathbb{E} \int_0^t \left(b^2(X(s-)) + \int_{\mathbb{R}} c^2(X(s-), u) \nu(du) \right) ds$$

$$\text{(за умовою (Б))} \quad \leq C \mathbb{E} \int_0^t (1 + X^2(s-))^\beta ds$$

$$\text{(за теоремою Фубіні)} \quad = C \int_0^t (1 + \mathbb{E} X^2(s-))^\beta ds$$

$$\text{(за нерівністю Єнсена)} \quad \leq C \left(t + \int_0^t (\mathbb{E} X^2(s-))^\beta ds \right).$$

Таким чином, отримали нерівність

$$\mathbb{E} X^2(t) \leq 4 \left(x_0^2 + A^2 t^2 + C \left(t + \int_0^t (\mathbb{E} X^2(s-))^\beta ds \right) \right),$$

з якої неважко отримати нерівність

$$\mathbb{E} X^2(t) \leq C_1 \left(1 + t^2 + \int_0^t (\mathbb{E} X^2(s-))^\beta ds \right),$$

де позначили $C_1 = 8 \max(x_0^2, A^2, C)$.

Використовуючи узагальнену лему Гронуолла–Беллмана (див. Corollary 7.5 з книги [35]), отримуємо оцінку

$$\mathbb{E} X^2(t) \leq \left(C_1^{1-\beta} (1 + t^2)^{1-\beta} + C_1 (1 - \beta) t \right)^{\frac{1}{1-\beta}}.$$

Поділивши останню нерівність на $t^2 > 0$, отримаємо, що

$$\frac{\mathbb{E}X^2(t)}{t^2} \leq \left(C_1^{1-\beta} \left(1 + \frac{1}{t^2} \right)^{1-\beta} + \frac{C_1(1-\beta)}{t^{1-2\beta}} \right)^{\frac{1}{1-\beta}} \rightarrow C_1, \quad t \rightarrow \infty,$$

з чого неважко вивести, що

$$\exists \tilde{C} \geq 0 \quad \forall t \geq 0 \quad \mathbb{E}X^2(t) \leq \tilde{C}(1+t^2),$$

що й треба було довести. □

Використаємо вищенаведену лему для доведення наступного результату щодо лінійної оцінки нижньої асимптотики розв'язку майже напевно за умов обмеженості зносу, його відокремленості від нуля та степеневі обмеженості шуму.

Теорема 2.3.2. *Припустимо, що виконуються умови лему 2.3.1. Тоді*

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{X(t)}{t} \geq \underline{A} \quad \text{м.н.},$$

де $\underline{A} = \inf_{x \in \mathbb{R}} a(x)$.

Доведення. Поділимо стохастичне рівняння (2.14) на $t > 0$:

$$\begin{aligned} \frac{X(t)}{t} &= \frac{x_0}{t} + \frac{1}{t} \int_0^t a(X(s)) ds + \frac{1}{t} \int_0^t b(X(s)) dW(s) + \frac{1}{t} \int_0^t \int_{\mathbb{R}} c(X(s-), u) \tilde{N}(ds, du) \\ &= \frac{x_0}{t} + T_1(t) + T_2(t) + T_3(t), \end{aligned} \quad (2.16)$$

де через T_1, T_2, T_3 позначено відповідні доданки. Очевидно, що $\frac{x_0}{t} \rightarrow 0, t \rightarrow \infty$.

Дослідимо збіжність доданків T_1, T_2, T_3 .

Маємо, що $\liminf_{t \rightarrow \infty} T_1(t) \geq \underline{A}, t \rightarrow \infty$. Дійсно,

$$\begin{aligned} \liminf_{t \rightarrow \infty} T_1(t) &= \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t a(X(s)) ds \\ (\text{за умовою (A)}) &\geq \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \underline{A} ds = \underline{A}. \end{aligned}$$

Покажемо, що $T_2(t) \rightarrow 0, t \rightarrow \infty$, м.н. Оцінимо другий момент підінтегрального процесу у доданку T_2 . За умовою (2.13)

$$\mathbb{E}b^2(t) \leq \mathbb{E} \left(C \left(1 + (X^2(t))^\beta \right) \right) = C \left(1 + \mathbb{E} (X^2(t))^\beta \right)$$

$$\text{(за нерівністю Єнсена)} \quad \leq C \left(1 + (\mathbb{E}X^2(t-))^\beta \right)$$

$$\text{(за лемою 2.3.1)} \quad \leq C \left(1 + \left(\tilde{C} ((1+t^2))^\beta \right) \right) \leq C_1(1+t^{2\beta})$$

для деякої сталої $C_1 \geq 0$. Тоді, використовуючи наслідок 1 зі статті [69], отримуємо збіжність

$$T_2(t) = \frac{1}{t} \int_0^t b(s) dW(s) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty, \quad \text{м.н.}$$

Покажемо, що $T_3(t) \rightarrow 0, t \rightarrow \infty, \text{ м.н.}$ Аналогічно оцінюванню другого моменту підінтегрального процесу у доданку T_2 , можна отримати оцінку підінтегрального процесу у доданку T_3 :

$$\mathbb{E} \int_{\mathbb{R}} c^2(X(t-), u) \nu(du) \leq C(1+t^{2\beta}).$$

Тоді, використовуючи наслідок 2 зі статті [69], отримуємо збіжність

$$T_3(t) = \frac{1}{t} \int_0^t \int_{\mathbb{R}} c(X(s-), u) \tilde{N}(ds, du) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty, \quad \text{м.н.}$$

Таким чином, використовуючи одержані вище збіжності, переходячи до нижньої границі при $t \rightarrow \infty$ у формулі (2.16), отримуємо твердження теореми. \square

З попередньої теореми неважко отримати наступний наслідок щодо прямування розв'язку до нескінченності майже напевно.

Наслідок 2.3.3. *Припустимо, що виконуються умови теореми 2.3.2, причому $\underline{A} > 0$. Тоді*

$$X(t) \rightarrow +\infty, \quad t \rightarrow \infty, \quad \text{м.н.}$$

Останній наслідок надає деякі прості достатні умови того, що розв'язок стохастичного диференціального рівняння прямує до нескінченності майже напевно. Умову обмеженості для коефіцієнта зносу можна послабити, якщо не вимагати її виконання в деякому відрізку. Сформулюємо та доведемо наступну теорему.

Теорема 2.3.4. *Припустимо, що:*

(А) функції a, b, c задовольняють локальну умову Ліпшиця:

$$\forall R \geq 0 \quad \exists L \geq 0 \quad \forall \{x, y\} \subset [-R, R]$$

$$(a(x) - a(y))^2 + (b(x) - b(y))^2 + \int_{\mathbb{R}} (c(x, u) - c(y, u))^2 \, du \leq L(x - y)^2.$$

Крім того, припустимо, що для деякого числа $\delta > 0$ виконуються умови:

(Б) функція a обмежена та, крім того, відокремлена від нуля поза відрізком:

$$\exists \underline{A} > 0 \quad \forall x \notin [-\delta, \delta] \quad a(x) \geq \underline{A};$$

(В) функції b, c задовольняють умову степеневого зростання (2.13), а також умову локальної невиродженості:

$$\forall R \geq 2\delta \quad \exists \underline{C} > 0 \quad \begin{cases} \forall x \in [-2\delta, R] & |b(x)| \geq \underline{C}, \\ \forall x \in [-2\delta, R] & \int_{\mathbb{R}} c(x, u) \nu(\,du) \geq \underline{C}. \end{cases} \quad (2.17)$$

Тоді $X(t) \rightarrow +\infty, t \rightarrow \infty$, м.н.

Доведення. З умови (А) теореми випливає, що для будь-якого початкового значення $X(0)$ існує єдиний сильний розв'язок рівняння (2.12), що є строго марковським процесом. Для $x \in \mathbb{R}$ позначимо через X_x розв'язок рівняння (2.12) з початковою умовою $X_x(0) = x$ та через

$$\tau_x(A) = \inf \{t \geq 0: X_x(t) \in A\}$$

позначимо момент потрапляння розв'язку в множину A .

Крок 1. Покажемо, що розв'язок X виходить з інтервалу $(-\infty, -\delta)$ майже напевно. Позначимо через \tilde{a} ліпшицеву функцію таку, що $\tilde{a}(x) = a(x), x \notin [-\delta, \delta]$, та $\tilde{a}(x) \geq \underline{A}, x \in [-\delta, \delta]$. Для $x \in \mathbb{R}$ позначимо через \tilde{X}_x розв'язок стохастичного рівняння

$$d\tilde{X}_x(t) = \tilde{a}(\tilde{X}_x(t))dt + b(\tilde{X}_x(t))dW(t) + \int_{\mathbb{R}} c(\tilde{X}_x(t), u)\tilde{N}(du, dt) \quad (2.18)$$

з початковою умовою $\tilde{X}_x(0) = x$. Стохастичне рівняння (2.18) задовольняє умови

наслідку 2.3.3, тому

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \tilde{X}_x(t) \rightarrow +\infty, \quad t \rightarrow \infty, \quad \text{м.н.} \quad (2.19)$$

З властивості локальності стохастичних інтегралів та єдиності розв'язку випливає, що

$$\forall x \notin [-\delta, \delta] \quad \forall t \in [0, \tau_x[-\delta, \delta]) \quad X_x(t) = \tilde{X}_x(t) \quad \text{м.н.} \quad (2.20)$$

Таким чином, з формул (2.19) та (2.20) випливає, що $\tau_{x_0}[-\delta, +\infty) < \infty$ м.н.

Крок 2. Покажемо, що для довільного числа $R \geq 2\delta$ розв'язок X досягає множини $[R, +\infty)$ майже напевно. З умови (В) випливає, що розв'язок X майже напевно виходить з проміжку $[-2\delta, R]$. Більш того, для будь-якого числа $R \geq 2\delta$ існує таке число $p > 0$, що для будь-якої початкової умови $x \geq -\delta$ імовірність того, що розв'язок X_x вийде з проміжку $[-2\delta, R]$ через правий кінець, не менше, ніж p . Враховуючи крок 1, отримуємо, що з імовірністю 1 знайдеться момент часу t такий, що $X(t) > R$.

Крок 3. Покажемо нарешті, що розв'язок X прямує до нескінченності майже напевно. Виконуючи оцінки, як у теоремі 2.3.2, можна показати, що

$$\inf_{x \geq R} \mathbb{P} \left\{ \inf_{t \geq 0} \tilde{X}_x(t) > \delta \right\} \rightarrow 1, \quad R \rightarrow \infty.$$

Тоді, враховуючи формули (2.19) та (2.20), отримуємо, що

$$\inf_{x \geq R} \mathbb{P} \{X_x(t) \rightarrow +\infty\} \rightarrow 1, \quad R \rightarrow \infty.$$

Враховуючи кроки 1, 2 та строго марковську властивість, з останньої збіжності отримуємо

$$\mathbb{P} \{X(t) \rightarrow +\infty\} = 1,$$

що й треба було довести. □

2.4 Степенева асимптотика розв'язків СДР

зі стрибками

У цій секції ми розглянемо СДР зі стрибками, коефіцієнти яких в певному розумінні є степеневими, а саме зсув еквівалентний деякій степеневій функції, а характеристики шуму мають не більш ніж деяке степеневе зростання. Для дослідження таких СДР ми будемо застосовувати узагальнену формулу Іто зі стрибками з деякою степеневою функцією, що дозволить звести СДР до стохастичних диференціалів вигляду (2.5) для подальшого застосування теореми 2.2.1.

Нехай X – розв’язок (необов’язково єдиний) СДР

$$dX(t) = a(X(t), t)dt + b(X(t), t)dW(t) + \int_{\mathbb{R}} c(X(t-), u)d\tilde{N}(dt, du), \quad (2.21)$$

де $a = a(x, t)$, $b = b(x, t)$ – випадкові локально обмежені функції такі, що для всіх $t \geq 0$ їхні звуження на множини $\mathbb{R} \times [0, t] \times \Omega \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \mathcal{B}([0, t]) \times \mathcal{F}_t$ -вимірними, $c = c(x, u)$ – локально обмежена вимірна функція. Припустимо, що $\mathbb{E}X^2(0) < \infty$, та нехай $0 \leq \alpha < 1$.

Теорема 2.4.1. *Припустимо, що:*

-

$$X(t) \rightarrow +\infty, \quad t \rightarrow \infty, \quad \text{м.н.}; \quad (2.22)$$

- для деякого числа $A_+ \geq 0$

$$|a(x, t)| \leq A_+ x^\alpha, \quad x \geq 1, \quad t \geq 0; \quad (2.23)$$

- для деякого числа $\beta \in [0, \frac{1+\alpha}{2})$

$$b^2(x, t) + \int_{\mathbb{R}} c^2(x, u)\nu(du) \leq C(1 + |x|^{2\beta}), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0. \quad (2.24)$$

Тоді м.н.

$$((1 - \alpha)\underline{A})^{\frac{1}{1-\alpha}} \leq \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{X(t)}{t^{\frac{1}{1-\alpha}}} \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{X(t)}{t^{\frac{1}{1-\alpha}}} \leq ((1 - \alpha)\overline{A})^{\frac{1}{1-\alpha}}, \quad (2.25)$$

де

$$\underline{A} := \liminf_{x,t \rightarrow \infty} \frac{a(x,t)}{x^\alpha}, \quad \overline{A} := \limsup_{x,t \rightarrow \infty} \frac{a(x,t)}{x^\alpha}.$$

Доведення. Справедливість теореми у випадку $\alpha = 0$ випливає з теореми 2.2.1; надалі вважаємо, що $0 < \alpha < 1$.

Візьмемо таку двічі неперервно диференційовну функцію $f = f(x)$, що:

- $f(x) := 0$ для $x \leq 0$;
- $|f(x)| \leq \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}$ для $0 < x < 1$;
- $f(x) := \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}$ для $x \geq 1$.

Помітимо, що f' і f'' обмежені та

$$f(x) \leq \frac{|x|^{1-\alpha}}{1-\alpha}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Позначимо

$$\tilde{X}(t) := f(X(t)).$$

За узагальненою формулою Іто

$$d\tilde{X}(t) = \tilde{a}(t)dt + \tilde{b}(t)dW(t) + \int_{\mathbb{R}} \tilde{c}(t, u) \tilde{N}(dt, du), \quad (2.26)$$

де

$$\begin{aligned} \tilde{a}(t) &= a(X(t-), t)f'(X(t-)) + \frac{1}{2}b^2(X(t-), t)f''(X(t-)) \\ &+ \int_{\mathbb{R}} \left(f(X(t-) + c(X(t-), u)) - f(X(t-)) - c(X(t-), u)f'(X(t-)) \right) \nu(du) \end{aligned}$$

$$=: \tilde{a}_1(t) + \tilde{a}_2(t) + \tilde{a}_3(t),$$

$$\tilde{b}(t) = b(X(t-), t)f'(X(t-)),$$

$$\tilde{c}(t, u) = f(X(t-) + c(X(t-), u)) - f(X(t-)).$$

Для подальшого доведення необхідні наступні дві лема, які досліджують поведінку деяких інтегралів, що виникають після застосування узагальненої формули Іто.

Лема 2.4.2.

$$\int_{\mathbb{R}} (f(x + c(x, u)) - f(x) - f'(x)c(x, u))\nu(\mathbf{d}u) \leq \frac{C}{x^{1+\alpha-2\beta}}, \quad x \geq 1.$$

Доведення лема. Нехай $x \geq 1$. Розіб'ємо інтеграл:

$$\int_{\mathbb{R}} [\dots]\nu(\mathbf{d}u) = \int_{c^2(x, u) < \frac{x^2}{4}} [\dots]\nu(\mathbf{d}u) + \int_{c^2(x, u) \geq \frac{x^2}{4}} [\dots]\nu(\mathbf{d}u),$$

де

$$[\dots] := f(x + c(x, u)) - f(x) - f'(x)c(x, u).$$

Нехай спочатку u таке, що

$$c^2(x, u) < \frac{x^2}{4}.$$

За формулою Тейлора

$$f(x + c(x, u)) - f(x) - f'(x)c(x, u) = \frac{1}{2}f''(\xi_{x, u})c^2(x, u),$$

де

$$\xi_{x, u} \in [x \wedge (x + c(x, u)), x \vee (x + c(x, u))].$$

Маємо

$$\begin{aligned} |\xi_{x, u} - x| &\leq |c(x, u)| \\ \implies (\xi_{x, u} - x)^2 &\leq c^2(x, u) \leq \frac{x^2}{4} \\ \implies |\xi_{x, u} - x| &\leq \frac{x}{2} \\ \implies \frac{1}{2}x &\leq \xi_{x, u} \leq \frac{3}{2}x. \end{aligned} \tag{2.27}$$

Отже,

$$\begin{aligned} \int_{c^2(x,u) < \frac{x^2}{4}} [\dots] \nu(\mathbf{d}u) &= \int_{c^2(x,u) < \frac{x^2}{4}} f''(\xi_{x,u}) c^2(x,u) \nu(\mathbf{d}u) \\ &\leq C \int_{c^2(x,u) < \frac{x^2}{4}} \frac{c^2(x,u)}{\xi_{x,u}^{\alpha+1}} \nu(\mathbf{d}u) \end{aligned}$$

(за лівою нерівністю формули (2.27)) $\leq C \left(\frac{1}{2}x\right)^{-(\alpha+1)} \int_{\mathbb{R}} c^2(x,u) \nu(\mathbf{d}u)$

(за оцінкою (2.24)) $\leq C \frac{1}{x^{\alpha+1}} \cdot C x^{2\beta} \leq \frac{C}{x^{1+\alpha-2\beta}}$.

Оцінимо тепер інтеграл за множиною $\{u \in \mathbb{R} : c^2(x,u) \geq \frac{x^2}{4}\}$:

$$\begin{aligned} \int_{c^2(x,u) \geq \frac{x^2}{4}} [\dots] \nu(\mathbf{d}u) &= \int_{c^2(x,u) \geq \frac{x^2}{4}} f(x + c(x,u)) \nu(\mathbf{d}u) \\ &\quad - f(x) \int_{c^2(x,u) \geq \frac{x^2}{4}} \nu(\mathbf{d}u) - f'(x) \int_{c^2(x,u) \geq \frac{x^2}{4}} c(x,u) \nu(\mathbf{d}u) \\ &=: I_1(x) - I_2(x) - I_3(x) \end{aligned}$$

Оцінимо кожен доданок у правій частині.

$$\begin{aligned} I_1(x) &= \int_{c^2(x,u) \geq \frac{x^2}{4}} f(x + c(x,u)) \nu(\mathbf{d}u) \\ &\leq \frac{1}{1-\alpha} \int_{c^2(x,u) \geq \frac{x^2}{4}} 1 \cdot |x + c(x,u)|^{1-\alpha} \nu(\mathbf{d}u) \end{aligned}$$

(за нерівністю Гьольдера)

$$\begin{aligned} &\leq \frac{1}{1-\alpha} \left(\int_{c^2(x,u) \geq \frac{x^2}{4}} 1^{\frac{2}{1+\alpha}} \nu(\mathbf{d}u) \right)^{\frac{1+\alpha}{2}} \left(\int_{c^2(x,u) \geq \frac{x^2}{4}} \left(|x + c(x,u)|^{1-\alpha} \right)^{\frac{2}{1-\alpha}} \nu(\mathbf{d}u) \right)^{\frac{1-\alpha}{2}} \\ &= \frac{1}{1-\alpha} \left(\int_{c^2(x,u) \geq \frac{x^2}{4}} \nu(\mathbf{d}u) \right)^{\frac{1+\alpha}{2}} \left(\int_{c^2(x,u) \geq \frac{x^2}{4}} (x + c(x,u))^2 \nu(\mathbf{d}u) \right)^{\frac{1-\alpha}{2}}. \end{aligned}$$

Окремо оцінимо кожен з останніх двох інтегралів:

$$\int_{c^2(x,u) \geq \frac{x^2}{4}} \nu(\mathbf{d}u)$$

(за нерівністю Чебишова) $\leq \frac{4}{x^2} \int_{\mathbb{R}} c^2(x, u) \nu(\mathbf{d}u)$

(за оцінкою (2.24)) $\leq \frac{4}{x^2} \cdot Cx^{2\beta} \leq \frac{C}{x^{2-2\beta}};$ (2.28)

$$\int_{c^2(x,u) \geq \frac{x^2}{4}} (x + c(x, u))^2 \nu(\mathbf{d}u)$$

(за нерівністю Коші–Буняковського)

$$\leq 2x^2 \int_{c^2(x,u) \geq \frac{x^2}{4}} \nu(\mathbf{d}u) + 2 \int_{c^2(x,u) \geq \frac{x^2}{4}} c^2(x, u) \nu(\mathbf{d}u)$$

(за оцінкою (2.28)) $\leq 2x^2 \frac{C}{x^{2-2\beta}} + 2 \int_{c^2(x,u) \geq \frac{x^2}{4}} c^2(x, u) \nu(\mathbf{d}u)$

$$\leq Cx^{2\beta} + 2 \int_{\mathbb{R}} c^2(x, u) \nu(\mathbf{d}u)$$

(за оцінкою (2.24)) $\leq Cx^{2\beta} + 2Cx^{2\beta} \leq Cx^{2\beta}.$ (2.29)

Таким чином, за оцінками (2.28) та (2.29)

$$I_1(x) \leq \frac{1}{1-\alpha} \left(\frac{C}{x^{2-2\beta}} \right)^{\frac{1+\alpha}{2}} (Cx^{2\beta})^{\frac{1-\alpha}{2}} \leq \frac{C}{x^{1+\alpha-2\beta}}.$$

$$I_2(x) = f(x) \int_{c^2(x,u) \geq \frac{x^2}{4}} \nu(\mathbf{d}u) \leq \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \int_{c^2(x,u) \geq \frac{x^2}{4}} \nu(\mathbf{d}u)$$

(за оцінкою (2.28)) $\leq \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \frac{C}{x^{2-2\beta}} \leq \frac{C}{x^{1+\alpha-2\beta}}.$

$$|I_3(x)| = \left| f'(x) \int_{c^2(x,u) \geq \frac{x^2}{4}} c(x, u) \nu(\mathbf{d}u) \right| \leq \frac{1}{x^\alpha} \int_{c^2(x,u) \geq \frac{x^2}{4}} |c(x, u)| \nu(\mathbf{d}u).$$

Окремо оцінимо останній інтеграл:

$$\int_{c^2(x,u) \geq \frac{x^2}{4}} |c(x,u)| \nu(\mathbf{d}u) = \int_{c^2(x,u) \geq \frac{x^2}{4}} 1 \cdot |c(x,u)| \nu(\mathbf{d}u).$$

(за нерівністю Коші–Буняковського)

$$\left(\int_{c^2(x,u) \geq \frac{x^2}{4}} 1^2 \nu(\mathbf{d}u) \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{c^2(x,u) \geq \frac{x^2}{4}} |c(x,u)|^2 \nu(\mathbf{d}u) \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \left(\int_{c^2(x,u) \geq \frac{x^2}{4}} \nu(\mathbf{d}u) \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}} c^2(x,u) \nu(\mathbf{d}u) \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{(за оцінками (2.28) та (2.24))} \leq \left(\frac{C}{x^{2-2\beta}} \right)^{\frac{1}{2}} (Cx^{2\beta})^{\frac{1}{2}} \leq \frac{C}{x^{1-2\beta}}.$$

Отже,

$$|I_3(x)| \leq \frac{1}{x^\alpha} \frac{C}{x^{1-2\beta}} = \frac{C}{x^{1+\alpha-2\beta}}.$$

Усі три доданки $I_1(x)$, $I_2(x)$, $I_3(x)$ оцінюються як $\frac{C}{x^{1+\alpha-2\beta}}$, тому

$$\int_{c^2(x,u) \geq \frac{x^2}{4}} [\dots] \nu(\mathbf{d}u) \leq \frac{C}{x^{1+\alpha-2\beta}}.$$

Таким чином, лема доведена. □

Лема 2.4.3.

$$\int_{\mathbb{R}} (f(x+c(x,u)) - f(x))^2 \nu(\mathbf{d}u) \leq Cx^{2(\beta-\alpha)}, \quad x \geq 1.$$

Доведення леми. Нехай $x \geq 1$. Розіб'ємо інтеграл:

$$\int_{\mathbb{R}} [\dots] \nu(\mathbf{d}u) = \int_{c^2(x,u) < \frac{x^2}{4}} [\dots] \nu(\mathbf{d}u) + \int_{c^2(x,u) \geq \frac{x^2}{4}} [\dots] \nu(\mathbf{d}u),$$

де

$$[\dots] := (f(x+c(x,u)) - f(x))^2.$$

Нехай спочатку u таке, що

$$c^2(x,u) < \frac{x^2}{4}.$$

За формулою Лагранжа

$$f(x + c(x, u)) - f(x) = f'(\xi_{x,u})c(x, u),$$

де

$$\xi_{x,u} \in [x \wedge (x + c(x, u)), x \vee (x + c(x, u))].$$

Як і в доведенні леми 2.4.2, маємо

$$\frac{1}{2}x \leq \xi_{x,u} \leq \frac{3}{2}x.$$

Тому

$$\begin{aligned} \int_{c^2(x,u) < \frac{x^2}{4}} [\dots] \nu(\mathbf{d}u) &= \int_{c^2(x,u) < \frac{x^2}{4}} (f'(\xi_{x,u}))^2 c^2(x, u) \nu(\mathbf{d}u) \\ &\leq \int_{c^2(x,u) < \frac{x^2}{4}} \frac{c^2(x, u)}{\xi_{x,u}^{2\alpha}} \nu(\mathbf{d}u) \\ &\leq \left(\frac{1}{2}x\right)^{-2\alpha} \int_{\mathbb{R}} c^2(x, u) \nu(\mathbf{d}u) \leq Cx^{-2\alpha} \end{aligned}$$

$$\text{(за оцінкою (2.24))} \quad \leq Cx^{-2\alpha} \cdot Cx^{2\beta} \leq Cx^{2(\beta-\alpha)}.$$

Оцінимо тепер інтеграл за множиною $\left\{u \in \mathbb{R} : c^2(x, u) \geq \frac{x^2}{4}\right\}$:

$$\int_{c^2(x,u) \geq \frac{x^2}{4}} [\dots] \nu(\mathbf{d}u)$$

(за нерівністю Коші–Буняковського)

$$\begin{aligned} &\leq 2 \int_{c^2(x,u) \geq \frac{x^2}{4}} f^2(x + c(x, u)) \nu(\mathbf{d}u) + 2f^2(x) \int_{c^2(x,u) \geq \frac{x^2}{4}} \nu(\mathbf{d}u) \\ &=: 2J_1(x) + 2J_2(x). \end{aligned}$$

Оцінимо кожен доданок у правій частині, використовуючи оцінки, отримані при доведенні леми 2.4.2:

$$J_1(x) = \int_{c^2(x,u) \geq \frac{x^2}{4}} f^2(x + c(x, u)) \nu(\mathbf{d}u)$$

$$\leq \frac{1}{(1-\alpha)^2} \int_{c^2(x,u) \geq \frac{x^2}{4}} 1 \cdot |x + c(x,u)|^{2(1-\alpha)} \nu(\mathbf{d}u)$$

(за нерівністю Гьольдера)

$$\leq \frac{1}{(1-\alpha)^2} \left(\int_{c^2(x,u) \geq \frac{x^2}{4}} 1^{\frac{1}{\alpha}} \nu(\mathbf{d}u) \right)^\alpha \left(\int_{c^2(x,u) \geq \frac{x^2}{4}} \left(|x + c(x,u)|^{2(1-\alpha)} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \nu(\mathbf{d}u) \right)^{1-\alpha}$$

$$= \frac{1}{(1-\alpha)^2} \left(\int_{c^2(x,u) \geq \frac{x^2}{4}} \nu(\mathbf{d}u) \right)^\alpha \left(\int_{c^2(x,u) \geq \frac{x^2}{4}} (x + c(x,u))^2 \nu(\mathbf{d}u) \right)^{1-\alpha}$$

$$\text{(за оцінками (2.28) та (2.29))} \leq \frac{1}{(1-\alpha)^2} \left(\frac{C}{x^{2-2\beta}} \right)^\alpha (Cx^{2\beta})^{1-\alpha} \leq Cx^{2(\beta-\alpha)};$$

$$J_2(x) = f^2(x) \int_{c^2(x,u) \geq \frac{x^2}{4}} \nu(\mathbf{d}u) \leq \left(\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right)^2 \int_{c^2(x,u) \geq \frac{x^2}{4}} \nu(\mathbf{d}u)$$

$$\text{(за оцінкою (2.28))} \leq \left(\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right)^2 \frac{C}{x^{2-2\beta}} \leq Cx^{2(\beta-\alpha)}.$$

Обидва доданки $J_1(x)$ та $J_2(x)$ оцінюються як $Cx^{2(\beta-\alpha)}$, тому

$$\int_{c^2(x,u) \geq \frac{x^2}{4}} [\dots] \nu(\mathbf{d}u) \leq Cx^{2(\beta-\alpha)}.$$

Таким чином, лема доведена. □

Продовжуємо доведення теореми. Перевіримо, що нове стохастичне диференціальне рівняння (2.26) задовольняє умови теореми 2.2.1.

Доведемо, що математичне сподівання $\mathbb{E}\tilde{a}^2(t)$ обмежене. Оскільки

$$\mathbb{E}\tilde{a}^2(t) = \mathbb{E}(\tilde{a}_1(t) + \tilde{a}_2(t) + \tilde{a}_3(t))^2$$

$$\text{(за нерівністю Коші–Буняковського)} \leq 2\mathbb{E}\tilde{a}_1^2(t) + 2\mathbb{E}\tilde{a}_2^2(t) + 2\mathbb{E}\tilde{a}_3^2(t),$$

то для цього достатньо довести обмеженість кожного з останніх трьох математичних сподівань. Нехай у наступних трьох пунктах $t \geq 0$ фіксоване.

- Нехай спочатку $\omega \in \Omega$ таке, що $X(t-, \omega) \leq 0$. Тоді

$$f(X(t-, \omega)) = f'(X(t-, \omega)) = f''(X(t-, \omega)) = 0,$$

і тому $\tilde{a}^2(t, \omega) = 0 \leq C$.

- Нехай тепер $\omega \in \Omega$ таке, що $0 < X(t-, \omega) < 1$. Оскільки функції a, b, c локально обмежені (а значить, обмежені на інтервалі $(0, 1)$) та функції f, f', f'' обмежені на інтервалі $(0, 1)$, то $\tilde{a}_1^2(t, \omega) \leq C$ та $\tilde{a}_2^2(t, \omega) \leq C$. За формулою Тейлора (тут ξ з леми 2.4.2)

$$\begin{aligned} \tilde{a}_3^2(t, \omega) &= \left(\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} f''(\xi_{X(t-, \omega), u}) c^2(X(t-, \omega), u) \nu(\mathbf{d}u) \right)^2 \\ &= \frac{1}{4} \left(\int_{\mathbb{R}} |f''(\xi_{X(t-, \omega), u})| c^2(X(t-, \omega), u) \nu(\mathbf{d}u) \right)^2 \\ &\leq C \left(\int_{\mathbb{R}} c^2(X(t-, \omega), u) \nu(\mathbf{d}u) \right)^2 \end{aligned}$$

$$\text{(за умовою (2.24))} \quad \leq C (C (1 + |X(t-, \omega)|^{2\beta}))^2$$

$$\leq C (1 + |X(t-, \omega)|^{4\beta}) \leq C.$$

Отже, $\tilde{a}^2(t, \omega) \leq C$.

- Нехай нарешті $\omega \in \Omega$ таке, що $X(t-, \omega) \geq 1$. Тоді

$$f(X(t-, \omega)) = \frac{X^{1-\alpha}(t-, \omega)}{1-\alpha},$$

$$f'(X(t-, \omega)) = \frac{1}{X^\alpha(t-, \omega)},$$

$$f''(X(t-, \omega)) = -\frac{\alpha}{X^{1+\alpha}(t-, \omega)}.$$

Тому

$$\tilde{a}_1^2(t, \omega) = (a(X(t-, \omega))f'(X(t-, \omega)))^2$$

$$= a^2(X(t-, \omega)) (f'(X(t-, \omega)))^2$$

$$\text{(за умовою (2.23))} \quad \leq A_+^2 \left(X^{2\alpha}(t-, \omega) \left(\frac{1}{X^\alpha(t-, \omega)} \right)^2 \right) \leq A_+^2;$$

$$\tilde{a}_2^2(t, \omega) = \left(\frac{1}{2} b^2(X(t-, \omega)) f''(X(t-, \omega)) \right)^2$$

$$= \frac{1}{4} (b^2(X(t-, \omega)) |f''(X(t-, \omega))|)^2$$

$$\text{(за умовою (2.24))} \quad \leq \frac{\alpha^2}{4} \left(C X^{2\beta}(t-, \omega) \frac{1}{X^{1+\alpha}(t-, \omega)} \right)^2$$

$$\leq C \left(\frac{1}{X^{1+\alpha-2\beta}(t-, \omega)} \right)^2 \leq C,$$

оскільки $1 + \alpha - 2\beta > 0$; за лемою (2.4.2)

$$\tilde{a}_3^2(t, \omega) \leq \mathbb{E} \left(\frac{C}{X^{1+\alpha-2\beta}(t-, \omega)} \right)^2 \leq C,$$

оскільки $1 + \alpha - 2\beta > 0$.

Таким чином, ми довели, що

$$\tilde{a}^2(t, \omega) \leq C, \quad \omega \in \Omega,$$

а отже, $\mathbb{E}\tilde{a}^2(t) \leq C$.

Дослідимо асимптотичну поведінку коефіцієнта \tilde{a} , дослідивши поведінку кожного з його доданків $\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \tilde{a}_3$:

•

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \tilde{a}_1(t) = \liminf_{t \rightarrow \infty} a(X(t), t) f'(X(t)) = \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{a(X(t), t)}{X^\alpha(t)}$$

$$\text{(за умовою (2.22))} \quad = \liminf_{x, t \rightarrow \infty} \frac{a(x, t)}{x^\alpha} = \underline{A} \text{ м.н.}$$

та аналогічно

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \tilde{a}_1(t) = \bar{A} \text{ м.н.};$$

•

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\tilde{a}_2(t)| = \lim_{t \rightarrow \infty} |b^2(X(t), t) f''(X(t))|$$

$$\text{(за умовою (2.24))} \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{C\alpha X^{2\beta}(t)}{X^{1+\alpha}(t)}$$

$$\leq C \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{X^{1+\alpha-2\beta}(t)} = 0, \quad t \rightarrow \infty, \text{ м.н.,}$$

оскільки $1 + \alpha - 2\beta > 0$ та $X(t) \rightarrow \infty, t \rightarrow \infty$, м.н. за умовою;

•

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{a}_3(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} \left(f(X(t-) + c(X(t-), u)) - f(X(t-)) - c(X(t-), u) f'(X(t-)) \right) \nu(\mathbf{d}u)$$

$$\text{(за лемою 2.4.2)} \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{C}{X^{1+\alpha-2\beta}(t-)} = 0, \quad t \rightarrow \infty, \text{ м.н.,}$$

оскільки $1 + \alpha - 2\beta > 0$ та виконується умова (2.22).

Отже, м.н.

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \tilde{a}(t) = \underline{A}, \quad \limsup_{t \rightarrow \infty} \tilde{a}(t) = \bar{A}.$$

Оцінимо величину

$$\tilde{b}^2(t) = b^2(X(t-), t) (f'(X(t-)))^2 :$$

• якщо $X(t-) \geq 1$, то з умови (2.24)

$$\tilde{b}^2(t) \leq \frac{CX^{2\beta}(t-)}{X^{2\alpha}(t-)} \leq CX^{2(\beta-\alpha)}(t-) = C\tilde{X}^{\frac{2(\beta-\alpha)}{1-\alpha}}(t-) = C\tilde{X}^{2\tilde{\beta}}(t-),$$

де

$$2\tilde{\beta} := \frac{2(\beta - \alpha)}{1 - \alpha} < 1;$$

- якщо ж $X(t-) < 1$, то з умови (2.24) та з обмеженості f'

$$\tilde{b}^2(t) \leq C (1 + |X(t-)|^{2\beta}) \leq C.$$

Отже,

$$\tilde{b}^2(t) \leq C \left(1 + |\tilde{X}(t-)|^{2\tilde{\beta}}\right), \quad t \geq 0.$$

Оцінимо інтеграл

$$\int_{\mathbb{R}} \tilde{c}^2(t, u) \nu(\mathrm{d}u) = \int_{\mathbb{R}} (f(X(t-) + c(X(t-), u)) - f(X(t-)))^2 \nu(\mathrm{d}u) :$$

- якщо $X(t-) \geq 1$, то за лемою 2.4.3

$$\int_{\mathbb{R}} \tilde{c}^2(t, u) \nu(\mathrm{d}u) \leq C X^{2(\beta-\alpha)}(t-) = C \tilde{X}^{\frac{2(\beta-\alpha)}{1-\alpha}}(t-) = C \tilde{X}^{2\tilde{\beta}}(t-);$$

- якщо ж $X(t-) < 1$, то за формулою Тейлора (тут ξ з леми 2.4.3)

$$\int_{\mathbb{R}} \tilde{c}^2(t, u) \nu(\mathrm{d}u) = \int_{\mathbb{R}} (f'(\xi_{X(t-), u}) c(X(t-), u))^2 \nu(\mathrm{d}u)$$

$$\text{(за умовою (2.24))} \leq C (1 + |X(t-)|^{2\beta}) \leq C.$$

Отже,

$$\int_{\mathbb{R}} \tilde{c}^2(t, u) \nu(\mathrm{d}u) \leq C \left(1 + |\tilde{X}(t-)|^{2\tilde{\beta}}\right).$$

Таким чином, коефіцієнти \tilde{a} , \tilde{b} , \tilde{c} задовольняють умови теореми 2.2.1. Отже,

$$\underline{A} \leq \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{\tilde{X}(t)}{t} \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\tilde{X}(t)}{t} \leq \overline{A} \quad \text{м.н.} \quad (2.30)$$

Застосовуючи обернену функцію

$$f^{-1}(\tilde{x}) = ((1 - \alpha)\tilde{x})^{\frac{1}{1-\alpha}}, \quad \tilde{x} \geq 1,$$

до ланцюга нерівностей (2.30), отримуємо ланцюг нерівностей (2.25), що й треба було довести. \square

Зауваження 2.4.4. Припустимо, що коефіцієнти a, b, c задовольняють умову Ліпшиця, тобто існує $L \geq 0$ таке, що для всіх $x, y \in \mathbb{R}$

$$(a(x) - a(y))^2 + (b(x) - b(y))^2 + \int_{\mathbb{R}} (c(x, u) - c(y, u))^2 \nu(\mathrm{d}u) \leq L(x - y)^2.$$

Тоді у попередній теоремі від вимоги $\mathbb{E}X^2(0) < \infty$ можна відмовитися.

Наслідок 2.4.5. Припустимо, що виконуються умови (2.22), (2.23), (2.24) та додатково для деякої невід'язкової сталої $A > 0$

$$a(x, t) \sim Ax^\alpha, \quad x, t \rightarrow \infty. \quad (2.31)$$

Тоді

$$X(t) \sim ((1 - \alpha)At)^{\frac{1}{1-\alpha}}, \quad t \rightarrow \infty, \text{ м.н.} \quad (2.32)$$

Доведення. Застосовуючи теорему 2.4.1, отримуємо м.н.

$$((1 - \alpha)A)^{\frac{1}{1-\alpha}} \leq \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{X(t)}{t^{\frac{1}{1-\alpha}}} \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{X(t)}{t^{\frac{1}{1-\alpha}}} \leq ((1 - \alpha)A)^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

Оскільки в останньому ланцюгу нерівностей зліва та справа стоїть одна й та сама стала, то в цьому ланцюгу нерівності перетворюються в рівності, тому

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{X(t)}{t^{\frac{1}{1-\alpha}}} = ((1 - \alpha)A)^{\frac{1}{1-\alpha}} \quad \text{м.н.,}$$

з чого випливає твердження наслідку. □

Застосуємо останній наслідок до СДР з шумом Леві.

Наслідок 2.4.6. Нехай X – розв'язок (необов'язково єдиний) СДР

$$\mathrm{d}X(t) = a(X(t))\mathrm{d}t + h(X(t-))\mathrm{d}\tilde{Z}(t),$$

де $a = a(x)$, $h = h(x)$ – локально обмежені вимірні функції, \tilde{Z} – компенсований процес Леві з мірою Леві ν такою, що $\int_{\mathbb{R}} u^2 \nu(\mathrm{d}u) < \infty$, причому $\mathbb{E}X^2(0) < \infty$.

Припустимо, що виконані умови (2.22), (2.23), (2.31) та для деякого $2\beta \in [0, 1 + \alpha)$

$$h^2(x) \leq C(1 + |x|^{2\beta}), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Тоді справедлива асимптотика (2.32).

Доведення. Запишемо процес \tilde{Z} у представленні Леві–Іто (1.13). Тоді застосовуючи наслідок 2.4.5 з коефіцієнтами $b(x) := bh(x)$ та $c(x, u) := h(x)u$, отримуємо результат цього наслідку. \square

Зауваження 2.4.7. Помітимо, що асимптотика (2.32) є нічим іншим, як асимптотикою розв'язку ЗДР

$$dx(t) = Ax^\alpha(t)dt, \quad x(0) = 1, \quad (2.33)$$

отриманого зі СДР (2.21) шляхом заміни зносу еквівалентним та відкидання шуму. Таким чином, наслідок 2.4.5 встановлює еквівалентність розв'язків СДР та ЗДР.

Зауваження 2.4.8. Випадок $\alpha = 1$ є критичним, і для нього асимптотичні нерівності (2.25) необов'язково мають місце. Для випадку $\alpha > 1$ розв'язок x ЗДР (2.33) вибухає, а розв'язок X СДР (2.21) може мати вибух.

Доведення. Помітимо, що у випадку $\alpha = 1$ асимптотика ЗДР (2.33) є експоненційною, а саме

$$x(t) \sim e^{At}, \quad t \rightarrow \infty.$$

Доводячи теорему 2.4.1, ми зробили заміну фазового простору з функцією f такою, що

$$f(x) = \int_0^x \frac{dy}{\bar{a}(y)} = \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}, \quad x \geq 1,$$

де

$$\bar{a}(x) := x^\alpha, \quad x \geq 1,$$

– асимптотика коефіцієнта зносу з точністю до додатної сталої A . Для випадку $\alpha = 1$ ми би отримали

$$f(x) = \int_1^x \frac{dy}{y} = \ln x \quad \text{та} \quad f^{-1}(\tilde{x}) = e^{\tilde{x}}.$$

Застосовуючи функцію f^{-1} до ланцюга нерівностей (2.30), ми використали той факт, що степенева функція зберігає асимптотичні нерівності. Однак експоненційна функція може їх порушити.

Для випадку $\alpha > 1$ розв'язок ЗДР (2.33) має вигляд

$$x(t) = ((1 - \alpha)At + 1)^{\frac{1}{1-\alpha}},$$

а тому зазнає вибуху в момент $t = \frac{1}{A(\alpha-1)}$. □

2.5 Висновки до розділу 2

Дослідженню асимптотики розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь зі стрибками присвячена стаття [69] автора цієї дисертації.

У даному розділі було досліджено асимптотичну поведінку розв'язків одновимірних СДР зі стрибками. Доведено теорему про лінійну асимптотику розв'язку СДР зі стрибками для випадку, коли коефіцієнт зносу прямує до сталої. Наведено деякі достатні умови прямування розв'язку СДР зі стрибками до нескінченності. Розглянуто автономне стохастичне диференціальне рівняння зі стрибками та наведено деякі достатні умови, що гарантують прямування його розв'язку до нескінченності (транзйентність) майже напевно. Головним результатом цього розділу є теорема про степеневу асимптотику розв'язків СДР зі стрибками, якщо коефіцієнт зносу має степеневу асимптотику на нескінченності.

Результати даного розділу узагальнюють відомі результати про асимптотичну поведінку класичних одновимірних СДР з вінерівським шумом.

Розділ 3

Асимптотика розв'язків СДР з вінерівським шумом

У цьому розділі ми дослідимо асимптотику розв'язків класичних СДР (з вінерівським шумом). У секції 3.1 ми, використовуючи асимптотичні оцінки, отримаємо відомі результати щодо асимптотичної поведінки розв'язків СДР Орнштейна-Уленбека та СДР геометричного броунівського руху. У секціях 3.2 та 3.3 ми розробимо узагальнену теорію гармонічних функцій (шкал) для дослідження асимптотичної поведінки розв'язків неавтономних СДР.

3.1 Приклади СДР з вінерівським шумом

У цій секції ми розглянемо деякі приклади класичних (з вінерівським шумом W) СДР, для яких можна явно знайти розв'язок та дослідити його асимптотичну поведінку. Приклади цієї секції носять ілюстративний характер.

Приклад 3.1.1 (СДР Орнштейна–Уленбека). Нехай X – розв'язок СДР

$$dX(t) = -aX(t)dt + bdW(t), \quad (3.1)$$

де $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$. Тоді для будь-якого $\gamma > 1$

$$X(t) = o(t^\gamma), \quad t \rightarrow \infty, \quad \text{м.н.} \quad (3.2)$$

Розв'язання. Незавжно отримати явний розв'язок СДР Орнштейна–Уленбека, застосовуючи формулу Іто до СДР (3.1):

$$d(e^{at}X(t)) = ae^{-at}X(t)dt - ae^{at}X(t)dt + be^{at}dW(t)$$

$$\implies d(e^{at}X(t)) = be^{at}dW(t)$$

$$\implies e^{at}X(t) = X(0) + b \int_0^t e^{as}dW(s) \quad \text{м.н.}$$

$$\implies X(t) = X(0)e^{-at} + b \int_0^t e^{-a(t-s)}dW(s) \quad \text{м.н.}$$

Використовуючи явний розв'язок, отримаємо оцінку для $\mathbb{E}X^2(t)$:

$$\mathbb{E}X^2(t) = \mathbb{E} \left(X(0)e^{-at} + b \int_0^t e^{-a(t-s)}dW(s) \right)^2$$

(за нерівністю Коші–Буняковського)

$$\leq 2e^{-2at}\mathbb{E}X^2(0) + 2b^2\mathbb{E} \left(\int_0^t e^{-a(t-s)}dW(s) \right)^2$$

$$\text{(за ізометрією Іто)} = 2e^{-2at}\mathbb{E}X^2(0) + 2b^2 \int_0^t e^{-2a(t-s)}ds$$

$$= 2e^{-2at}\mathbb{E}X^2(0) + \frac{b^2}{a}(1 - e^{-2at}) \leq C.$$

Тоді використовуючи теорему 1.2.1 з $\alpha := 0$, отримуємо, що для-будь якого $\gamma > 1$

$$\int_0^t X(s)ds = o(t^\gamma), \quad t \rightarrow \infty, \quad \text{м.н.} \quad (3.3)$$

Запишемо СДР (3.1) в інтегральному вигляді:

$$X(t) = X(0) - a \int_0^t X(s)ds + bW(t).$$

Маємо для будь-якого $\varepsilon > 0$:

- $X(t) = o(t^\varepsilon), \quad t \rightarrow \infty;$

- з формули (3.3) випливає, що

$$\int_0^t X(s) ds = o(t^{1+\varepsilon}), \quad t \rightarrow \infty, \text{ м.н.}$$

- із закону повторного логарифма для вінерівського процесу випливає, що

$$W(t) = o(t^{\frac{1}{2}+\varepsilon}), \quad t \rightarrow \infty, \text{ м.н.}$$

Таким чином, отримуємо твердження прикладу. □

Приклад 3.1.2 (геометричний броунівський рух). Нехай X – розв’язок СДР

$$dX(t) = aX(t)dt + bX(t)dW(t), \quad X(0) = x_0 > 0,$$

де $\{a, b\} \subset \mathbb{R}$. Тоді:

(А) якщо $a > \frac{b^2}{2}$, то $X(t) \rightarrow +\infty$ м.н.;

(Б) якщо $a < \frac{b^2}{2}$, то $X(t) \rightarrow 0$ м.н.;

(В) якщо $a = \frac{b^2}{2}$, то м.н.

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} X(t) = 0, \quad \limsup_{t \rightarrow \infty} X(t) = +\infty.$$

Розв’язання. Для геометричного броунівського руху відомо, що якщо $X(0) > 0$, то $X(t) > 0$. Тоді неважко знайти розв’язок, застосовуючи формулу Іто:

$$d(\ln X(t)) = \frac{1}{X(t)} aX(t)dt + \frac{1}{X(t)} bX(t)dW(t) - \frac{1}{2} \frac{1}{X^2(t)} b^2 X^2(t)dt$$

$$\implies d(\ln X(t)) = \left(a - \frac{b^2}{2} \right) dt + b dW(t)$$

$$\implies \ln X(t) = \ln x_0 + \left(a - \frac{b^2}{2} \right) t + b \int_0^t dW(s) \text{ м.н.}$$

$$\implies X(t) = x_0 \exp \left(\left(a - \frac{b^2}{2} \right) t + bW(t) \right) \text{ м.н.} \quad (3.4)$$

Із зауваження 1.4.2 випливає (при $\gamma := 1$), що

$$\int_0^t b(s)dW(s) = o(t), \quad t \rightarrow \infty, \text{ м.н.}$$

- (А) Якщо $\delta := a - \frac{b^2}{2} > 0$, то

$$\lim_{t \rightarrow \infty} X(t) = x_0 \exp \lim_{t \rightarrow \infty} (\delta t + o(t)) = x_0 \exp(+\infty) = +\infty \text{ м.н.}$$

- (Б) Якщо $-\delta := a - \frac{b^2}{2} < 0$, то

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |X(t)| = x_0 \exp \lim_{t \rightarrow \infty} (-\delta t + o(t)) = x_0 \exp(-\infty) = 0 \text{ м.н.}$$

Доведемо пункт (В). Із закону повторного логарифму для вінерівського процесу випливає, що м.н.

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} W(t) = -\infty, \quad \limsup_{t \rightarrow \infty} W(t) = +\infty.$$

Тому якщо $a = \frac{b^2}{2}$, то

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} X(t) = x_0 \exp \left(\limsup_{t \rightarrow \infty} W(t) \right) = x_0 \exp(+\infty) = +\infty \text{ м.н.},$$

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} X(t) = x_0 \exp \left(\liminf_{t \rightarrow \infty} W(t) \right) = x_0 \exp(-\infty) = 0 \text{ м.н.}$$

□

3.2 Локальна поведінка розв'язків СДР

У цій секції ми знайдемо умови виходу розв'язків СДР з деякого відрізка та оцінимо ймовірності виходу розв'язків через лівий та правий кінці відрізка. Теореми цієї секції узагальнюють результати § 16 книги [15].

Розглянемо СДР

$$dX(t) = a(X(t), t)dt + b(X(t), t)dW(t), \quad X(0) = x_0 \in \mathbb{R}, \quad (3.5)$$

де $a = a(x, t)$, $b = b(x, t)$ – локально обмежені випадкові поля такі, що їхні звуження на множину $\mathbb{R} \times [0, t] \times \Omega \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \mathcal{B}([0, t]) \times \mathcal{F}_t$ -вимірними, $t \geq 0$.

Означимо сім'ю випадкових операторів

$$L_t v(x) := a(x, t)v'(x) + \frac{1}{2}b^2(x, t)v''(x), \quad v \in C^2, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0.$$

та назвемо її сім'єю диференціальних операторів, що відповідають СДР (3.5). Означимо марковські моменти

$$\tau_x := \inf\{t \geq 0: X(t) = x\}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Нехай (x_1, x_2) – деякий обмежений інтервал. Позначимо $\tau := \tau_{x_1} \wedge \tau_{x_2}$ – перший момент виходу розв'язку X з інтервалу (x_1, x_2) .

Теорема 3.2.1. *Припустимо, що існує така функція $v \in C^2$, що*

$$L_t v(x) \leq -1, \quad x \in (x_1, x_2), \quad t \geq 0, \quad \text{м.н.} \quad (3.6)$$

Тоді $\mathbb{E}\tau < \infty$.

Доведення. Застосовуючи формулу Іто до процесу $v(X(t))$, отримуємо

$$v(X(t)) = v(x_0) + \int_0^t L_s v(X(s))ds + \int_0^t b(X(s), s)v'(X(s))dW(s).$$

Нехай $n \in \mathbb{N}$. Підставимо в останню рівність $t := \tau \wedge n$ та візьмемо математичне сподівання:

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}u(X(\tau \wedge n)) \\ &= v(x_0) + \mathbb{E} \int_0^{\tau \wedge n} L_s v(X(s))ds + \mathbb{E} \int_0^{\tau \wedge n} b(X(s), s)v'(X(s))dW(s). \end{aligned}$$

Дослідимо останні два математичні сподівання:

- за формулою (3.6)

$$\mathbb{E} \int_0^{\tau \wedge n} L_s v(X(s))ds \leq \mathbb{E} \int_0^{\tau \wedge n} (-1)ds = -\mathbb{E}(\tau \wedge n);$$

- оскільки підінтегральна функція обмежена,

$$\mathbb{E} \int_0^{\tau \wedge n} b(X(s), s)v'(X(s))dW(s)$$

$$= \mathbb{E} \int_0^n \mathbb{I}_{s \leq \tau} b(X(s), s) v'(X(s)) dW(s) = 0$$

як математичне сподівання від стохастичного інтеграла.

Таким чином,

$$\mathbb{E}u(X(\tau \wedge n)) \leq v(x_0) - \mathbb{E}(\tau \wedge n). \quad (3.7)$$

Спрямуємо n до нескінченності. Тоді:

- $\tau \wedge n \rightarrow \tau$, $n \rightarrow \infty$, тому за теоремою про монотонну збіжність

$$\mathbb{E}(\tau \wedge n) \rightarrow \mathbb{E}\tau, \quad n \rightarrow \infty;$$

- за теоремою Лебега про мажоровну збіжність

$$\mathbb{E}u(X(\tau \wedge n)) \rightarrow \mathbb{E}u(X(\tau)), \quad n \rightarrow \infty.$$

Таким чином, переходячи до границі в нерівності (3.7),

$$\mathbb{E}u(X(\tau)) \leq u(x_0) - \mathbb{E}\tau.$$

Звідси, враховуючи обмеженість функції u на інтервалі (x_1, x_2) ,

$$\mathbb{E}\tau \leq u(x_0) - \mathbb{E}u(X(\tau))$$

$$\leq |u(x_0)| + |\mathbb{E}u(X(\tau))| \leq 2 \max_{x \in (x_1, x_2)} |u(x)| < \infty.$$

□

Зауваження 3.2.2. З того, що $\mathbb{E}\tau < \infty$, випливає те, що $\tau < \infty$ м.н. Таким чином, остання теорема наводить достатні умови того, що розв'язок СДР колись вийде з інтервалу (x_1, x_2) майже напевно.

Наслідок 3.2.3. Нехай коефіцієнти a та b обмежені на множині $(x_1, x_2) \times \mathbb{R}_+$ та $b(x, t) \geq \delta$ на цій множині для деякого $\delta > 0$. Тоді $\mathbb{E}\tau < \infty$.

Доведення. Нехай $x \in (x_1, x_2)$. Покладемо

$$\tilde{v}(x) := -e^{px},$$

де $p > 0$. За умовою $|a| \leq C$ на множині $(x_1, x_2) \times \mathbb{R}_+$. Маємо

$$\begin{aligned} L_t[\tilde{v}](x) &= a(x, t)\tilde{v}'(x) + \frac{1}{2}b^2(x, t)\tilde{v}''(x) = -a(x, t)pe^{px} - \frac{1}{2}b^2(x, t)p^2e^{px} \\ &= pe^{px} \left(-a(x, t) - \frac{1}{2}b^2(x, t)p \right) \leq pe^{px} \left(C - \frac{1}{2}\delta^2 p \right). \end{aligned}$$

Обираючи $p > \frac{2C}{\delta^2}$, отримуємо

$$L_t[\tilde{v}](x) =: -\varepsilon(x) < 0$$

для деякого $\varepsilon(x) > 0$, тому

$$L_t[\tilde{v}](x) < -\varepsilon, \quad \varepsilon := \min_{x \in (x_1, x_2)} \varepsilon(x).$$

Тоді для функції $v(x) := \frac{1}{\varepsilon}\tilde{v}(x)$ маємо $L_tv(x) \leq -1$. Отже, за теоремою 3.2.1 $\mathbb{E}\tau < \infty$. □

Наступна теорема дозволяє оцінювати ймовірності виходу розв'язку СДР через лівий або правий кінець інтервалу (x_1, x_2) .

Теорема 3.2.4. *Припустимо, що $\tau < \infty$ м. н. та нехай існує зростаюча двічі неперервно диференційовна функція $v = v(x)$ така, що*

$$L_tv(x) \geq 0, \quad x \in (x_1, x_2), \quad t \geq 0, \quad \text{м. н.} \tag{3.8}$$

Тоді

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{X(\tau) = x_1\} &\leq \frac{v(x_2) - v(x_0)}{v(x_2) - v(x_1)}, \\ \mathbb{P}\{X(\tau) = x_2\} &\geq \frac{v(x_0) - v(x_1)}{v(x_2) - v(x_1)}. \end{aligned}$$

Доведення. Аналогічно доведенню теореми 3.2.1, застосовуючи формулу Іто до процесу $v(X(t))$ та враховуючи умову (3.8), в результаті отримаємо

$$\mathbb{E}v(X(\tau)) \geq v(x_0). \tag{3.9}$$

Позначимо

$$\mathbb{P}\{X(\tau) = x_1\} =: p, \quad \mathbb{P}\{X(\tau) = x_2\} =: q$$

та помітимо, що $p + q = 1$. За формулою повної ймовірності

$$\begin{aligned}\mathbb{E}v(X(\tau)) &= v(x_1)p + v(x_2)q = v(x_1)p + v(x_2)(1 - p) \\ &= v(x_2) - (v(x_2) - v(x_1))p,\end{aligned}$$

тому за нерівністю (3.9) маємо

$$v(x_2) - (v(x_2) - v(x_1))p \geq v(x_0) \implies p \leq \frac{v(x_2) - v(x_0)}{v(x_2) - v(x_1)}.$$

Оскільки $q = 1 - p$,

$$q \geq 1 - \frac{v(x_2) - v(x_0)}{v(x_2) - v(x_1)} = \frac{v(x_0) - v(x_1)}{v(x_2) - v(x_1)}.$$

□

Зауваження 3.2.5. Подія $\{X(\tau) = x_1\} = \{\tau_{x_1} < \tau_{x_2}\}$ полягає в тому, що розв'язок X досягає лівого кінця інтервалу (x_1, x_2) швидше, ніж правого. Аналогічно, подія $\{X(\tau) = x_2\} = \{\tau_{x_2} < \tau_{x_1}\}$ полягає в тому, що розв'язок X досягає правого кінця інтервалу (x_1, x_2) швидше, ніж лівого.

Функції $v \in C^2$, що задовольняють деякі нерівності з операторами L_t , $t \geq 0$, називатимемо функціями Ляпунова.

3.3 Гранична поведінка розв'язків СДР

У цій секції ми знайдемо достатні умови прямування розв'язку СДР (3.5) до нескінченності майже напевно. Для цього ми використаємо теорію функцій Ляпунова, розроблену в попередній секції.

Нехай X – глобальний розв'язок СДР (3.5), коефіцієнти якого задовольняють умови з секції 3.2. Нехай $x_0 \in (x_1, x_2)$, де $x_1 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $x_2 > x_1$.

Теорема 3.3.1. Припустимо, що існує зростаюча функція $v \in C^2(x_1, x_2)$ така, що

$$L_t v(x) \geq 0, \quad x \in (x_1, x_2), \quad t \geq 0,$$

причому $v(x_{1+}) = -\infty$. Тоді $X(t) > x_1$, $t \geq 0$, м.н.

Доведення. Доведемо від супротивного. Припустимо, що

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}\{\forall t \geq 0 X(t) > x_1\} < 1 \\ \Rightarrow & \mathbb{P}\{\exists t \geq 0 X(t) \leq x_1\} > 0 \\ \Rightarrow & \mathbb{P}\{\exists t \geq 0 X(t) = x_1\} > 0. \end{aligned}$$

Нехай $\omega \in \Omega$ таке, що $\exists t \geq 0 X(t) = x_1$. Тоді для деякого $t^* \geq 0$ маємо $X(t^*) = x_1$.

Позначимо

$$\tau^* := \sup \left\{ t \leq t^* : X(t) = \frac{x_1 + x_0}{2} \right\}.$$

Розглянемо випадковий процес

$$X^*(t) := X(\tau^* + t), \quad t \geq 0.$$

Неважко бачити, що для сім'ї операторів L^* , що відповідає процесу X^* , виконується умова

$$L_t^* v(x) \geq 0, \quad x \in (x_1, x_2), \quad t \geq 0.$$

Нехай $m \in (x_1, x_0)$. За наслідком 3.2.3 з локальної обмеженості коефіцієнтів СДР випливає, що $\tau_m^* \wedge \tau_{x_2}^* < \infty$ м.н., де зірочка позначає те, що моменти зупинки стосуються процесу X^* . Тоді за теоремою 3.2.4 маємо

$$\mathbb{P}\{\tau_{x_1}^* < \tau_{x_2}^*\} \leq \mathbb{P}\{\tau_m^* < \tau_{x_2}^*\} \leq \frac{v(x_2) - v(x_0)}{v(x_2) - v(m)}.$$

Переходячи до границі при $m \rightarrow x_1+$ та враховуючи умову $v(x_1+) = -\infty$, отримуємо, що $\mathbb{P}\{\tau_{x_1}^* < \tau_{x_2}^*\} = 0$. Але це суперечить припущенню, з якого випливає, що $\mathbb{P}\{\tau_{x_1}^* < \tau_{x_2}^*\} > 0$. Таким чином, теорему доведено. \square

Теорема 3.3.2. *Нехай існує зростаюча функція $v \in C^2(x_1, +\infty)$ така, що*

$$L_t v(x) \geq 0, \quad x \in (x_1, +\infty), \quad t \geq 0, \quad (3.10)$$

причому

$$v(x_1+) = -\infty, \quad v(+\infty) \text{ скінченне.} \quad (3.11)$$

Тоді

$$X(t) \rightarrow +\infty, \quad t \rightarrow \infty, \text{ м.н.}$$

Доведення. Нехай $x_1 < m < x_0 < M$. За наслідком 3.2.3 маємо $\tau_m \wedge \tau_M < \infty$ м.н.

Тому за теоремою 3.2.4

$$\mathbb{P}\{\tau_M < \infty\} \geq \mathbb{P}\{\tau_M < \tau_m\} \geq \frac{v(x_0) - v(m)}{v(M) - v(m)}.$$

Переходячи до границі при $m \rightarrow x_1+$ та враховуючи першу границю з умови (3.11), отримуємо

$$\mathbb{P}\{\tau_M < \infty\} = 1.$$

Оскільки X – глобальний розв’язок,

$$\tau_M \rightarrow \infty, \quad M \rightarrow +\infty. \quad (3.12)$$

Маємо

$$\mathbb{P}\{X(t) \rightarrow +\infty\} = \mathbb{P}\{\forall N \in \mathbb{N} \quad \exists T \geq 0 \quad \forall t \geq T \quad X(t) > N\}$$

$$= \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{P}\{\exists T \geq 0 \quad \forall t \geq T \quad X(t) > N\}$$

$$\text{(за формулою (3.12))} \quad \geq \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{P}\{\exists M \geq N \quad \forall t \geq \tau_M \quad X(t) > N\}$$

$$= \lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{M \rightarrow \infty} \mathbb{P}\{\forall t \geq \tau_M \quad X(t) > N\} =: (*).$$

Окремо дослідимо останню ймовірність. Нехай $M \in \mathbb{N}$. Позначимо

$$\tilde{X}(t) := X(\tau_M + t), \quad t \geq 0,$$

$$\tilde{\tau}_x := \inf\{t \geq 0: \tilde{X}(t) = x\}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Тоді в деякому новому ймовірнісному просторі процес \tilde{X} задовольняє СДР

$$d\tilde{X}(t) = \tilde{a}(\tilde{X}(t), \tau_M + t)dt + \tilde{b}(\tilde{X}(t), \tau_M + t)d\tilde{W}(t), \quad (3.13)$$

де

$$\tilde{a}(\tilde{x}, t) := a(\tilde{x}, \tau_M + t), \quad \tilde{x} \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0,$$

$$\tilde{b}(\tilde{x}, t) := b(\tilde{x}, \tau_M + t), \quad \tilde{x} \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0,$$

$$\tilde{W}(t) := W(\tau_M + t) - W(\tau_M), \quad t \geq 0.$$

Відомо, що \tilde{W} – вінерівський процес. Позначимо через \tilde{L} сім'ю диференціальних операторів, що відповідають СДР (3.13). Неважко бачити, що

$$\tilde{L}_t = L_{\tau_M + t}, \quad t \geq 0,$$

тому з умови (3.10) випливає умова

$$\tilde{L}_t v(x) \geq 0, \quad x \in (x_1, +\infty), \quad t \geq 0.$$

Таким чином, для будь-якого $N \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{P} \{ \forall t \geq \tau_M \quad X(t) > N \} = \mathbb{P} \{ \forall t \geq 0 \quad \tilde{X}(t) > N \}$$

$$\geq \mathbb{P} \{ \forall K \geq M \quad \tilde{\tau}_K < \tilde{\tau}_N \} = \lim_{K \rightarrow \infty} \mathbb{P} \{ \tilde{\tau}_K < \tilde{\tau}_N \}$$

$$\text{(за теоремою 3.2.4)} \quad \geq \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{v(N) - v(M)}{v(N) - v(K)} = \frac{v(N) - v(M)}{v(N) - v(+\infty)}.$$

Використовуючи останню оцінку, продовжуємо ланцюг перетворень:

$$(*) \geq \lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{v(N) - v(M)}{v(N) - v(+\infty)} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{v(N) - v(+\infty)}{v(N) - v(+\infty)} = 1.$$

Таким чином, теорема доведена. □

Розглянемо приклад СДР зі степеневими коефіцієнтами та застосуємо до нього вищенаведені теореми.

Приклад 3.3.3. Нехай X – глобальний розв’язок СДР

$$dX(t) = a(X(t), t)dt + b(X(t), t)dW(t), \quad X(0) > 0,$$

де $\alpha \leq 1$ і коефіцієнти a, b такі, що

$$a(x, t) \geq Ax^\alpha, \quad b(x, t) \leq Bx^{\frac{\alpha+1}{2}}, \quad x > 0, \quad t \geq 0,$$

де $A > 0, B > 0$, причому $A > \frac{B^2}{2}$.

Тоді:

- $X(t) > 0, t \geq 0$, м.н.;
- $X(t) \rightarrow +\infty, t \rightarrow \infty$, м.н.

Розв’язання. Зауважимо, що умова $\alpha \leq 1$ гарантує відсутність вибуху розв’язку.

Неважко перевірити, що $C^2(\mathbb{R})$ -функція

$$v(x) := -x^{1-\frac{2a}{b^2}}, \quad x > 0,$$

є зростаючою та задовольняє умови

$$Lv(x) \geq 0, \quad x > 0, \quad v(0+) = -\infty, \quad v(+\infty) = 0.$$

Таким чином, застосовуючи теореми 3.3.1 та 3.3.2 з $x_1 := 0$, отримуємо твердження прикладу. □

Зауваження 3.3.4. СДР бesselівського процесу порядку n

$$dX(t) = \frac{n-1}{2X(t)}dt + dW(t), \quad X(0) > 0,$$

є частинним випадком СДР прикладу 3.3.3, якщо покласти

$$\alpha := -1, \quad a := \frac{n-1}{2}, \quad b := 1,$$

причому при $n > 2$ такі значення параметрів задовольняють умови прикладу 3.3.3.

3.4 Асимптотика розв'язків СДР

У цій секції отримаємо теорему про асимптотику розв'язків СДР з вінерівським шумом, що є наслідком більш загального результату, отриманого у секції 2.4 для СДР зі стрибками.

Нехай X – розв'язок СДР

$$dX(t) = a(X(t), t)dt + b(X(t), t)dW(t),$$

де функції $a = a(x, t, \omega)$, $b = b(x, t, \omega)$ локально обмежені та такі, що для всіх $t \geq 0$ їхні звуження на множину $\mathbb{R} \times [0, t] \times \Omega \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \mathcal{B}([0, t]) \times \mathcal{F}_t$ -вимірними. Припустимо, що $\mathbb{E}X^2(0) < \infty$ та нехай $\alpha \in [0, 1)$.

Наступні теорема та наслідок є тривіальними наслідками з теореми 2.4 та наслідку 2.4.5 відповідно, якщо покласти в них $c := 0$.

Теорема 3.4.1. *Припустимо, що:*

-

$$X(t) \rightarrow +\infty, t \rightarrow \infty, \text{ м.н.}; \tag{3.14}$$

- для деякої випадкової величини $A_+ \geq 0$

$$|a(x, t)| \leq A_+ x^\alpha, \quad x \geq 1; \tag{3.15}$$

- для деякого числа $\beta \in [0, \frac{\alpha+1}{2})$

$$b^2(x, t) \leq C (1 + |x|^{2\beta}), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{3.16}$$

Тоді

$$((1 - \alpha)\underline{A})^{\frac{1}{1-\alpha}} \leq \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{X(t)}{t^{\frac{1}{1-\alpha}}} \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{X(t)}{t^{\frac{1}{1-\alpha}}} \leq ((1 - \alpha)\overline{A})^{\frac{1}{1-\alpha}} \text{ м.н.},$$

де

$$\underline{A} := \liminf_{x, t \rightarrow +\infty} \frac{a(x, t)}{x^\alpha}, \quad \overline{A} := \limsup_{x, t \rightarrow +\infty} \frac{a(x, t)}{x^\alpha}.$$

Наслідок 3.4.2. Припустимо, що виконуються умови (3.14), (3.15), (3.16) та додатково для деякої випадкової величини $A > 0$

$$a(x, t) \sim Ax^\alpha, \quad x, t \rightarrow +\infty.$$

Тоді

$$X(t) \sim ((1 - \alpha)At)^{\frac{1}{1-\alpha}}, \quad t \rightarrow \infty, \text{ м.н.}$$

3.5 Висновки до розділу 3

У даному розділі досліджено асимптотичну поведінку одновимірних СДР з вінерівським шумом. Деякі результати були отримані як наслідки з більш загальних теорем про СДР зі стрибками, отриманих у попередньому розділі.

На відміну від СДР зі стрибками, для СДР з вінерівським шумом ефективно працює теорія функцій Ляпунова, яка використовується для неавтономних СДР з випадковими коефіцієнтами.

Результати розділу є потужним інструментом для подальших досліджень асимптотичної поведінки розв'язків багатовимірних СДР у наступних розділах.

Розділ 4

Асимптотична поведінка розв'язків багатовимірних СДР

У даному розділі ми отримаємо результати щодо асимптотичної поведінки розв'язків багатовимірних СДР.

Нехай X – розв'язок n -вимірного ($n \geq 2$) СДР

$$dX(t) = a(X(t))dt + b(X(t))dW(t), \quad X(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n, \quad (4.1)$$

в якому W – m -вимірний вінерівський процес ($m \in \mathbb{N}$), $a: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $b: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$ – вимірні вектор-функції. Позначимо через

$$S := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$$

одиничну сферу у просторі \mathbb{R}^n .

У даному розділі ми вивчатимо асимптотичну поведінку багатовимірного розв'язку X СДР (4.1) при $t \rightarrow \infty$, а саме шукатимемо достатні умови такі, що:

- розв'язок іде на нескінченність м.н., тобто

$$|X(t)| \rightarrow \infty, \quad t \rightarrow \infty, \quad \text{м.н.};$$

- кут розв'язку стабілізується м.н., тобто

$$\exists \Phi_\infty := \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{X(t)}{|X(t)|} \in S \text{ м.н.};$$

- існує асимптотика норми розв'язку м.н., яка, можливо, залежить від граничного кута Φ_∞ , тобто

$$\exists r: S \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+ \quad |X(t)| \sim r_{\Phi_\infty}(t), \quad t \rightarrow \infty, \text{ м.н.}$$

4.1 Перехід до сферичної системи координат

У цій секції ми від СДР (4.1) для процесу X перейдемо до системи двох СДР: для процесу *норми* розв'язку $|X|$ та процесу *кута* розв'язку $\frac{X}{|X|}$. Зауважимо, що $\frac{X(t)}{|X(t)|}$ невизначено, якщо $X(t)$ є нульовим вектором. Нехай

$$\tau := \inf\{t \geq 0: |X(t)| = 0\}.$$

У цій секції ми розглядатимемо процес X на проміжку часу $0 \leq t < \tau$. У подальшому ми наведемо достатні умови того, що $\tau = \infty$ м.н.

4.1.1 Радіальна та тангенціальна компоненти

Для зручності подальших позначень ми введемо поняття *радіальної* і *тангенціальної* компонент матричного поля та дослідимо їхні властивості.

Нехай $b: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times l}$ ($l \in \mathbb{N}$), I – одинична матриця $n \times n$, $O_{i \times j}$ – нульова матриця $i \times j$ ($\{i, j\} \subset \mathbb{N}$), $O := O_{n \times 1}$.

Означення 4.1.1. Назвемо b_{rad} та b_{tan} , означені як

$$b_{\text{rad}}(x) := \frac{xx^T}{|x|^2} b(x), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

$$b_{\text{tan}}(x) := \left(I - \frac{xx^T}{|x|^2} \right) b(x), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

відповідно радіальною та тангенціальною компонентами матричного поля b .

Зауваження 4.1.2. Легко бачити, що операції \cdot_{rad} , \cdot_{tan} є лінійними та

$$b_{\text{rad}} + b_{\text{tan}} = b.$$

Доведемо основні властивості радіальної та тангенціальної компонент, які знадобляться при спрощенні рівнянь для норми та кута розв'язку.

Радіальна та тангенціальна компоненти володіють наступною властивістю ідемпотентності.

Властивість 4.1.3. $(b_{\text{rad}})_{\text{rad}} = b_{\text{rad}}$, $(b_{\text{tan}})_{\text{tan}} = b_{\text{tan}}$.

Доведення. Дійсно, оскільки $x^T x = |x|^2$,

$$\begin{aligned} (b_{\text{rad}}(x))_{\text{rad}} &= \left(\frac{xx^T}{|x|^2} b(x) \right)_{\text{rad}} = \frac{xx^T}{|x|^2} \frac{xx^T}{|x|^2} b(x) = \frac{xx^T xx^T}{|x|^4} b(x) \\ &= \frac{x|x|^2 x^T}{|x|^4} b(x) = \frac{xx^T}{|x|^2} b(x) = b_{\text{rad}}(x) \end{aligned}$$

та

$$\begin{aligned} (b_{\text{tan}}(x))_{\text{tan}} &= \left(I - \frac{xx^T}{|x|^2} b(x) \right)_{\text{tan}} = \left(I - \frac{xx^T}{|x|^2} \right) \left(I - \frac{xx^T}{|x|^2} \right) b(x) \\ &= \left(II - I \frac{xx^T}{|x|^2} - \frac{xx^T}{|x|^2} I + \frac{xx^T}{|x|^2} \frac{xx^T}{|x|^2} \right) b(x) \\ &= \left(I - \frac{xx^T}{|x|^2} - \frac{xx^T}{|x|^2} + \frac{xx^T}{|x|^2} \right) b(x) = \left(I - \frac{xx^T}{|x|^2} |x|^2 \right) b(x) = b_{\text{tan}}(x). \end{aligned}$$

□

Маємо наступні «правила спрощення» радіальної та тангенціальної компонент.

Властивість 4.1.4.

$$\frac{x^T}{|x|} b_{\text{rad}}(x) = \frac{x^T}{|x|} b(x), \quad b_{\text{rad}}^T(x) \frac{x}{|x|} = b^T(x) \frac{x}{|x|}, \quad x \in \mathbb{R}^n; \quad (\text{A})$$

$$\frac{x^T}{|x|} b_{\text{tan}}(x) = O_{1 \times l}, \quad b_{\text{tan}}^T(x) \frac{x}{|x|} = O_{l \times 1}, \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (\text{Б})$$

Доведення. (А) Оскільки $x^T x = |x|^2$, то

$$\frac{x^T}{|x|} b_{\text{rad}}(x) = \frac{x^T}{|x|} \frac{xx^T}{|x|^2} b(x) = \frac{x^T}{|x|} b(x).$$

Друга рівність отримана транспонуванням першої.

(Б) Оскільки $x^T x = |x|^2$, то

$$\begin{aligned} \frac{x^T}{|x|} b_{\text{tan}}(x) &= \frac{x^T}{|x|} \left(I - \frac{xx^T}{|x|^2} \right) b(x) = \left(\frac{x^T}{|x|} I - \frac{x^T}{|x|} \frac{xx^T}{|x|^2} \right) b(x) \\ &= \left(\frac{x^T}{|x|} - \frac{x^T}{|x|} \right) b(x) = O_{1 \times n} b(x) = O_{1 \times l}. \end{aligned}$$

Друга рівність отримана транспонуванням першої. □

Будемо позначати

$$b_{\text{rad}}^T := (b_{\text{rad}})^T, \quad b_{\text{tan}}^T := (b_{\text{tan}})^T.$$

Зауважимо, що вирази $(b^T)_{\text{rad}}$ та $(b^T)_{\text{tan}}$ в загальному випадку не мають змісту через неузгодженість розмірів матриць. Маємо наступні «правила множення» радіальної та тангенціальної компонент.

Властивість 4.1.5.

(А) $b_{\text{rad}}^T b_{\text{rad}} = b^T b_{\text{rad}} = b_{\text{rad}}^T b$;

(Б) $b_{\text{rad}}^T b_{\text{tan}} = b_{\text{tan}}^T b_{\text{rad}} = O_{l \times l}$;

(В) $b_{\text{tan}}^T b_{\text{tan}} = b_{\text{tan}}^T b = b^T b_{\text{tan}}$.

Доведення. (А) Дійсно,

$$b_{\text{rad}}^T(x) b_{\text{rad}}(x) = \left(\frac{xx^T}{|x|^2} b(x) \right)^T b_{\text{rad}}(x) = b^T(x) \frac{xx^T}{|x|^2} b_{\text{rad}}(x)$$

(за властивістю 4.1.4(А)) $= b^T(x) \frac{xx^T}{|x|^2} b(x) = b^T(x) b_{\text{rad}}(x),$

що доводить першу рівність пункту (А). Транспонуючи цю рівність,

$$(b_{\text{rad}}^T b_{\text{rad}})^T = (b^T b_{\text{rad}})^T \implies b_{\text{rad}}^T b_{\text{rad}} = b_{\text{rad}}^T b,$$

отримуємо другу рівність пункту (А).

(Б) Дійсно,

$$\begin{aligned}
 \text{(за зауваженням 4.1.2)} \quad b_{\text{rad}}^{\text{T}} b_{\text{tan}} &= b_{\text{rad}}^{\text{T}} (b - b_{\text{rad}}) \\
 &= b_{\text{rad}}^{\text{T}} b - b_{\text{rad}}^{\text{T}} b_{\text{rad}} \\
 \text{(за пунктом (А))} \quad &= b_{\text{rad}}^{\text{T}} b - b_{\text{rad}}^{\text{T}} b = O_{l \times l}.
 \end{aligned}$$

Транспонуючи доведену рівність $b_{\text{rad}}^{\text{T}} b_{\text{tan}} = O_{l \times l}$, отримуємо $b_{\text{tan}}^{\text{T}} b_{\text{rad}} = O_{l \times l}$.

(В) Дійсно,

$$\begin{aligned}
 \text{(за зауваженням 4.1.2)} \quad b_{\text{tan}}^{\text{T}} b_{\text{tan}} &= b_{\text{tan}}^{\text{T}} (b - b_{\text{rad}}) \\
 &= b_{\text{tan}}^{\text{T}} b - b_{\text{tan}}^{\text{T}} b_{\text{rad}} \\
 \text{(за пунктом (Б))} \quad &= b_{\text{tan}}^{\text{T}} b - O_{l \times l} = b_{\text{tan}}^{\text{T}} b,
 \end{aligned}$$

що доводить першу рівність пункту (В). Транспонуючи цю рівність,

$$(b_{\text{tan}}^{\text{T}} b_{\text{tan}})^{\text{T}} = (b_{\text{tan}}^{\text{T}} b)^{\text{T}} \implies b_{\text{tan}}^{\text{T}} b_{\text{tan}} = b^{\text{T}} b_{\text{tan}},$$

отримуємо другу рівність пункту (В). □

Позначимо норму Гільберта–Шмідта матриці через $\| \cdot \|$. Для радіальної та тангенціальної компонент виконується наступна «теорема Піфагора».

Властивість 4.1.6. $\|b\|^2 = \|b_{\text{rad}}\|^2 + \|b_{\text{tan}}\|^2$.

Доведення. Дійсно,

$$\begin{aligned}
 \|b\|^2 &= \text{tr}(b^{\text{T}} b) \\
 \text{(за зауваженням 4.1.2)} \quad &= \text{tr}\left((b_{\text{rad}}^{\text{T}} + b_{\text{tan}}^{\text{T}})(b_{\text{rad}} + b_{\text{tan}})\right) \\
 &= \text{tr}(b_{\text{rad}}^{\text{T}} b_{\text{rad}}) + \text{tr}(b_{\text{rad}}^{\text{T}} b_{\text{tan}}) + \text{tr}(b_{\text{tan}}^{\text{T}} b_{\text{rad}}) + \text{tr}(b_{\text{tan}}^{\text{T}} b_{\text{tan}}) \\
 \text{(за властивістю 4.1.5(Б))} \quad &= \text{tr}(b_{\text{rad}}^{\text{T}} b_{\text{rad}}) + 0 + 0 + \text{tr}(b_{\text{tan}}^{\text{T}} b_{\text{tan}})
 \end{aligned}$$

$$= \|b_{\text{rad}}\|^2 + \|b_{\text{tan}}\|^2.$$

□

4.1.2 СДР для норми розв'язку

У цій підсекції ми перейдемо від СДР (4.1) для процесу X до СДР для процесу $|X|$, використовуючи багатовимірну формулу Іто.

Іноді у цій секції задля стислості ми будемо позначати залежність випадкових процесів від t за допомогою нижнього індексу замість дужок, наприклад,

$$X_t := X(t).$$

Теорема 4.1.7. *Процес норми $|X|$ задовольняє СДР*

$$d|X_t| = \left(\frac{X_t^T}{|X_t|} a(X_t) + \frac{\|b_{\text{tan}}(X_t)\|^2}{2|X_t|} \right) dt + \frac{X_t^T}{|X_t|} b(X_t) dW_t, \quad 0 \leq t < \tau.$$

Доведення. Зауважимо, що функція $x \mapsto |x|$ не є двічі неперервно диференційовною в нулі. Тим не менш, в силу локальності інтеграла Іто, використовуючи формулу Іто, ми можемо отримати СДР для $|X|$ до моменту τ потрапляння в нуль.

Нехай $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{O\}$. Неважко знайти наступні частинні похідні:

$$\frac{\partial |x|}{\partial x} = \frac{x}{|x|},$$

$$\frac{\partial^2 |x|}{\partial x_k^2} = \frac{1}{|x|} - \frac{x_k^2}{|x|^3}, \quad k \in \{1, 2, \dots, n\},$$

$$\frac{\partial^2 |x|}{\partial x_k \partial x_l} = -\frac{x_k x_l}{|x|^3}, \quad \{k, l\} \subset \{1, 2, \dots, n\}, \quad k \neq l.$$

Застосуємо багатовимірну формулу Іто до процесу

$$|X| = \sqrt{X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2}$$

(ми не пишемо залежність від t задля стислості):

$$d|X| = \frac{X^T}{|X|} dX + \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{|X|} - \frac{X_k^2}{|X|^3} \right) \sum_{i=1}^m b_{ki}^2(X) - \sum_{k \neq l} \frac{X_k X_l}{|X|^3} \sum_{i=1}^m b_{ki}(X) b_{li}(X) \right) dt$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{X^\top}{|X|} dX + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{|X|} \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m b_{ki}^2(X) - \frac{1}{|X|} \sum_{k,l=1}^n \frac{X_k X_l}{|X|^2} \sum_{i=1}^m b_{ki}(X) b_{li}(X) \right) dt \\
&= \frac{X^\top}{|X|} dX + \frac{\|b(X)\|^2 - \|b_{\text{rad}}(X)\|^2}{2|X|} dt \\
&\quad (\text{за властивістю 4.1.6}) = \frac{X^\top}{|X|} dX + \frac{\|b_{\text{tan}}(X)\|^2}{2|X|} dt \\
&= \left(\frac{X^\top}{|X|} a(X) + \frac{\|b_{\text{tan}}(X)\|^2}{2|X|} \right) dt + \frac{X^\top}{|X|} b(X) dW.
\end{aligned}$$

□

Наведемо приклад СДР для норми. Нехай $\alpha \in \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}$, $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Задля зручності позначимо

$$x^\alpha := |x|^{\alpha-1} x, \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus \{O\}.$$

Як приклад, покладемо в СДР (4.1)

$$m := n, \quad a(x) := Ax^\alpha + g(x), \quad b := I.$$

Тоді СДР (4.1) перетворюється у

$$dX_t = \left(AX_t^\alpha + g(X_t) \right) dt + dW_t, \quad X(0) =: x_0 \neq O. \quad (4.2)$$

Приклад 4.1.8. Для СДР (4.2) рівняння норми має вигляд

$$d|X_t| = \left(A|X_t|^\alpha + \frac{X_t^\top}{|X_t|} g(X_t) + \frac{n-1}{2|X_t|} \right) dt + d\tilde{W}_t, \quad 0 \leq t < \tau, \quad (4.3)$$

де \tilde{W} – одновимірний вінерівський процес.

Доведення. Згідно з теоремою 4.1.7,

$$d|X_t| = \left(\frac{X_t^\top}{|X_t|} \left(AX_t^\alpha + g(X_t) \right) + \frac{\|I_{\text{tan}}(X_t)\|^2}{2|X_t|} \right) dt + \frac{X_t^\top}{|X_t|} dW_t.$$

Знайдемо $\|I_{\text{tan}}(x)\|^2$, $x \in \mathbb{R}^n$. Легко бачити, що $\|I\|^2 = n$. Далі,

$$\|I_{\text{rad}}(x)\|^2 = \left\| \frac{xx^\top}{|x|^2} I \right\|^2 = \frac{1}{|x|^4} \|xx^\top\|^2 = \frac{1}{|x|^4} \text{tr}(xx^\top xx^\top)$$

$$= \frac{1}{|x|^4} \text{tr} \left(x |x|^2 x^\top \right) = \frac{1}{|x|^2} \text{tr} \left(x x^\top \right) = \frac{1}{|x|^2} |x|^2 = 1.$$

Отже, за властивістю 4.1.6,

$$\|I_{\tan}(x)\|^2 = \|I\|^2 - \|I_{\text{rad}}(x)\|^2 = n - 1.$$

Розпишемо перший доданок зносу в рівнянні норми:

$$\frac{x^\top}{|x|} \left(A|x|^{\alpha-1}x + g(x) \right) = A|x|^{\alpha-2}x^\top x + \frac{x^\top}{|x|}g(x) = A|x|^\alpha + \frac{x^\top}{|x|}g(x).$$

Перетворимо дифузію $\frac{X_t^\top}{|X_t|}dW_t$. Оскільки

$$\left| \frac{X^\top}{|X|} \right| = \frac{|X^\top|}{|X|} = \frac{|X|}{|X|} = 1,$$

то за теоремою Леві існує одновимірний вінерівський процес \tilde{W} такий, що

$$\frac{X_t^\top}{|X_t|}dW_t = d\tilde{W}_t.$$

Таким чином, отримали потрібне СДР. □

Як наслідок останнього прикладу, знайдемо СДР для норми багатовимірною вінерівського процесу W (так званого бesselівського процесу).

Зауваження 4.1.9. Відомо, що при $n \geq 2$ багатовимірний вінерівський процес, що не стартує з нуля, майже ніколи не потрапляє в нуль, а отже, $\tau = \infty$ м.н. У такому випадку СДР для норми та кута будуть справедливими для всіх $t \geq 0$.

Приклад 4.1.10. Норма процесу $X := x_0 + W$ задовольняє СДР

$$d|X_t| = \frac{n-1}{2|X_t|}dt + d\tilde{W}_t, \quad t \geq 0,$$

де \tilde{W} – одновимірний вінерівський процес.

Розв'язання. Покласти у рівнянні (4.2) $A := 0$, $g(x) := 0$ та застосувати приклад 4.1.8. Враховуючи зауваження 4.1.9, отримуємо результат прикладу. □

4.1.3 СДР для кута розв'язку

У цій підсекції за допомогою формули Іто ми отримаємо СДР для кута $\frac{X}{|X|}$.

Теорема 4.1.11. Процес кута $\frac{X}{|X|}$ задовольняє n -вимірне СДР

$$d\frac{X_t}{|X_t|} = \left(\frac{a_{\tan}(X_t)}{|X_t|} - \frac{\|b_{\tan}(X_t)\|^2 I + 2(bb^T)(X_t)_{\tan} X_t}{2|X_t|^3} \right) dt + \frac{b_{\tan}(X_t)}{|X_t|} dW_t$$

для моментів часу $0 \leq t < \tau$.

Доведення. Задля стислості протягом доведення ми будемо опускати залежність від t . Нехай $k \in \{1, 2, \dots, n\}$. Згадаємо вигляд стохастичних диференціалів для k -ї координати процесу X

$$dX_k = a_k(X)dt + \sum_{l=1}^m b_{kl}(X)dW_l$$

(див. формулу (4.1)) та СДР для процесу норми

$$d|X| = \left(\frac{X^T a(X)}{|X|} + \frac{\|b_{\tan}(X)\|^2}{2|X|} \right) dt + \frac{X^T b(X)}{|X|} dW$$

(див. теорему 4.1.7).

Застосуємо формулу Іто до k -ї координати кута:

$$\begin{aligned} d\frac{X_k}{|X|} &= \frac{1}{|X|} dX_k + \left(\frac{X_k}{|X|^2} d|X| \right) + \frac{1}{2} \left(2 \cdot \left(-\frac{1}{|X|^2} dX_k \cdot d|X| \right) + \frac{2X_k}{|X|^3} (d|X|)^2 \right) \\ &= \frac{a_k(X)}{|X|} dt + \frac{1}{|X|} \sum_{l=1}^m b_{kl}(X) dW_l - \frac{X_k X^T}{|X|^3} a(X) dt - \frac{X_k \|b_{\tan}\|^2}{2|X|^3} dt \\ &\quad - \frac{X_k X^T}{|X|^3} b(X) dW - \frac{1}{|X|^3} \sum_{i=1}^n \sum_{l=1}^m b_{kl} b_{il} X_i dt + \frac{X_k}{|X|^5} \sum_{i,j=1}^n \sum_{l=1}^m b_{il} b_{jl} X_i X_j dt \\ &= \frac{a_k(X) - \frac{X_k X^T}{|X|^2} a(X)}{|X|} dt + \frac{b_k(X) - \frac{X_k X^T}{|X|^2} b(X)}{|X|} dW \\ &\quad - \frac{\|b_{\tan}(X)\|^2 X_k + 2 \left(((bb^T)(X)X)_k - \frac{X_k X^T}{|X|^2} (bb^T)(X)X \right)}{2|X|^3} dt. \end{aligned}$$

Запишемо отримані СДР у векторному вигляді:

$$d\frac{X}{|X|} = \left(\frac{a(X) - \frac{X X^T}{|X|^2} a(X)}{|X|} - \frac{\|b_{\tan}(X)\|^2 I - 2 \left((bb^T)(X) - \frac{X X^T}{|X|^2} (bb^T)(X) \right)}{2|X|^3} X \right) dt$$

$$+ \frac{b(X) - \frac{XX^T}{|X|^2}b(X)}{|X|}dW.$$

Згідно з означенням тангенціальної компоненти,

$$a(X) - \frac{XX^T}{|X|^2}a(X) = \left(I - \frac{XX^T}{|X|^2} \right) a(X) = a_{\tan}(X)$$

та аналогічно

$$b(X) - \frac{XX^T}{|X|^2}b(X) = b_{\tan}(X),$$

$$(bb^T)(X) - \frac{XX^T}{|X|^2}(bb^T)(X) = (bb^T)_{\tan}(X).$$

Таким чином, отримали потрібне СДР для кута $\frac{X}{|X|}$. □

Як приклад, знайдемо СДР для кута рівняння (4.2).

Приклад 4.1.12. Для СДР (4.2) рівняння кута має вигляд

$$d \frac{X_t}{|X_t|} = \left(\frac{g_{\tan}(X_t)}{|X_t|} - \frac{(n-1)I + 2I_{\tan}(X_t)}{2|X_t|^3} X_t \right) dt + \frac{I_{\tan}(X_t)}{|X_t|} dW_t$$

для моментів часу $0 \leq t < \tau$.

Доведення. За теоремою 4.1.11 маємо

$$d \frac{X_t}{|X_t|} = \left(\frac{(AX_t^\alpha + g(X_t))_{\tan}(X_t)}{|X_t|} - \frac{\|I_{\tan}(X_t)\|^2 I + 2I_{\tan}(X_t)}{2|X_t|^3} X_t \right) dt + \frac{I_{\tan}(X_t)}{|X_t|} dW_t.$$

Спростимо наступний вираз:

$$(Ax^\alpha + g(x))_{\tan} = (A|x|^{\alpha-1}x + g(x))_{\tan}$$

$$\text{(за зауваженням 4.1.2)} = A|x|^{\alpha-1}x_{\tan} + g_{\tan}(x)$$

$$= A|x|^{\alpha-1} \left(I - \frac{xx^T}{|x|^2} \right) x + g_{\tan}(x)$$

$$= A|x|^{\alpha-1}(x - x) + g_{\tan}(x) = g_{\tan}(x).$$

При розв'язанні прикладу 4.1.8 було знайдено

$$\|I_{\tan}(x)\|^2 = n - 1.$$

Таким чином, отримали потрібне СДР. □

Як приклад, знайдемо СДР для кута багатовимірного вінерівського процесу, яке є прикладом СДР на сфері.

Приклад 4.1.13. Кут процесу $X := x_0 + W$ задовольняє СДР

$$d \frac{X_t}{|X_t|} = -\frac{n-1}{2|X_t|^3} X_t dt + \frac{|X_t|^2 I - X_t X_t^\top}{|X_t|^3} dW_t, \quad t \geq 0.$$

Розв'язання. Покладаючи у рівнянні (4.2) $A := 0$, $g(x) := 0$ та застосовуючи приклад 4.1.12, отримуємо

$$d \frac{X_t}{|X_t|} = -\frac{n-1 + 2I_{\tan}(X_t)}{2|X_t|^3} X_t dt + \frac{|X_t|^2 I - X_t X_t^\top}{|X_t|^3} dW_t, \quad t \geq 0.$$

Легко бачити, що матриця

$$I_{\tan}(x) = \left(I - \frac{xx^\top}{|x|^2} \right) I = I - \frac{xx^\top}{|x|^2}$$

симетрична, а тому за властивістю 4.1.4(Б) маємо

$$I_{\tan}(x) \frac{x}{|x|} = I_{\tan}^\top(x) \frac{x}{|x|} = O.$$

Враховуючи зауваження 4.1.9, отримуємо результат прикладу. □

4.2 Гранична поведінка норми розв'язку

Розглянемо систему СДР

$$dR(t) = \mu(R(t), \Phi(t))dt + \sigma(R(t), \Phi(t))dW(t), \quad R(0) = r_0, \quad (4.4)$$

$$d\Phi(t) = \nu(R(t), \Phi(t))dt + \chi(R(t), \Phi(t))dW(t), \quad \Phi(0) = \varphi_0, \quad (4.5)$$

де коефіцієнти

$$\mu : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad \sigma : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m,$$

$$\nu : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \chi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n \times m} \rightarrow \mathbb{R}^m$$

вимірні та локально обмежені на компактних підмножинах множини $(0, +\infty) \times \mathbb{R}^n$, $r_0 \in \mathbb{R}$, $\varphi_0 \in \mathbb{R}^n$. Назвемо R процесом *норми*, а Φ – процесом *кута*. Надалі ми отримуємо результати для R та Φ , які потім застосовуватимемо до норми $|X|$ та кута $\frac{X}{|X|}$ розв’язку X .

Наведемо лему, яка дозволить перейти від багатовимірному коефіцієнту дифузії у рівнянні радіуса до одновимірному.

Лема 4.2.1. *Нехай σ – m -вимірний прогресивно вимірний випадковий процес, причому $\sigma(t) \neq 0$, W – m -вимірний вінерівський процес. Тоді існують одновимірний прогресивно вимірний випадковий процес $\tilde{\sigma}$ та одновимірний вінерівський процес \tilde{W} такі, що*

$$\sigma(t)dW(t) = \tilde{\sigma}(t)d\tilde{W}(t).$$

Доведення. Подамо вираз у наступному вигляді:

$$\sigma(t)dW(t) = |\sigma(t)| \frac{\sigma(t)}{|\sigma(t)|} dW(t) =: \tilde{\sigma}(t)d\tilde{W}(t),$$

де ми позначили

$$\tilde{\sigma}(t) := |\sigma(t)|, \quad d\tilde{W}(t) := \frac{\sigma(t)}{|\sigma(t)|} dW(t).$$

Доведемо, що \tilde{W} – вінерівський процес. Дійсно, оскільки

$$\left| \frac{\sigma(t)}{|\sigma(t)|} \right| = \frac{|\sigma(t)|}{|\sigma(t)|} = 1,$$

то за теоремою Леві \tilde{W} – вінерівський процес. □

Зауваження 4.2.2. *Легко бачити, що*

$$|\tilde{\sigma}(t)| = |\sigma(t)|,$$

тобто модуль числа $\tilde{\sigma}(t)$ дорівнює нормі вектора $\sigma(t)$.

У цій секції ми вивчатимемо граничну поведінку розв’язку рівняння радіуса

$$dR(t) = \mu(R(t), \Phi(t))dt + \tilde{\sigma}(R(t), \Phi(t))d\tilde{W}(t), \quad R(0) = r_0, \quad (4.6)$$

де $\tilde{\sigma}$ та \tilde{W} визначаються попередньою лемою.

Аналогічно до означення сім'ї диференціальних операторів для СДР для X означимо сім'ю диференціальних операторів для СДР для R :

$$L_\varphi v(r) := \mu(r, \varphi)v'(r) + \frac{1}{2}\tilde{\sigma}(r, \varphi)v''(r), \quad r > 0, \quad \varphi \in \mathbb{R}^n, \quad v \in C^2(0, +\infty).$$

4.2.1 Непотрапляння розв'язку в початок координат

Зауважимо, що непотрапляння розв'язку в початок координат еквівалентно додатності його норми, тобто

$$X(t) \neq O \quad \Leftrightarrow \quad |X(t)| > 0.$$

Наступна теорема наводить загальні достатні умови того, що процес R додатний майже напевно.

Теорема 4.2.3. *Припустимо, що $r_0 > 0$ та існує зростаюча функція $v \in C^2(0, +\infty)$ така, що*

$$L_\varphi v(r) \geq 0, \quad r \in (0, r_2), \quad \varphi \in \mathbb{R}^n, \quad (4.7)$$

де $r_2 > 0$, причому $v(0+) = -\infty$. Тоді

$$R(t) > 0, \quad t \geq 0, \quad \text{м.н.}$$

Доведення. Застосовуючи теорему 3.3.1 для СДР (4.4) із операторами $L_{\Phi(t)}$ в якості $L_t, t \geq 0$, та покладаючи $x_1 := 0, x_2 := r_2$, отримуємо твердження теореми. \square

Як приклад, розглянемо СДР (4.2) та доведемо, що за деяких умов його розв'язок X майже напевно не потрапляє в початок координат.

Приклад 4.2.4. *Нехай X – розв'язок СДР (4.2). Якщо виконується одна з двох наступних умов, то $X(t) \neq O, t \geq 0, \text{ м.н.}$:*

(A) $n = 2, A \geq 0$ та

$$x^T g(x) \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}^2;$$

(Б) $n \geq 3, \alpha > -1$ та

$$x^T g(x) > -2(n-2)|x|^3, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Розв'язання. Рівняння норми R розв'язку X згідно з прикладом 4.1.8 має вигляд (4.3), тобто його коефіцієнти зносу та дифузії дорівнюють відповідно

$$\mu(r, \varphi) = Ar^\alpha + \varphi^T g(r\varphi) + \frac{n-1}{2r}, \quad \tilde{\sigma}(r, \varphi) = 1. \quad (4.8)$$

Розглянемо функцію $v(r) := \ln r, r > 0$, що є зростаючою, $v(0+) = -\infty$.

Маємо

$$\begin{aligned} L_\varphi v(r) &= \left(Ar^\alpha + \varphi^T g(r\varphi) + \frac{n-1}{2r} \right) \frac{1}{r} + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{r^2} \right) \\ &= \frac{A}{r^{1-\alpha}} + \frac{\varphi^T g(r\varphi)}{r} + \frac{n-2}{2r^2}, \quad r > 0. \end{aligned}$$

Неважко бачити, що умова (А) або (Б) гарантує невід'ємність останнього виразу в деякому околі нуля. Таким чином, за теоремою 4.2.3 отримуємо результат даного прикладу. \square

Зауваження 4.2.5. Застосовуючи попередній приклад з $A := 0$ та $g(x) := 0$, отримуємо відомий факт: n -вимірний ($n \geq 2$) вінерівський процес $X = x_0 + W$, де $x_0 \neq O$, майже ніколи не потрапляє в початок координат.

4.2.2 Прямування розв'язку до нескінченності

Зауважимо, що прямування розв'язку до нескінченності означає прямування до нескінченності принаймні однієї його координати, що еквівалентно прямуванню до нескінченності норми розв'язку, тобто

$$X(t) \rightarrow \infty \quad \Leftrightarrow \quad \exists i \in \{1, 2, \dots, n\} X_i(t) \rightarrow \infty \quad \Leftrightarrow \quad |X(t)| \rightarrow \infty.$$

Наступна теорема наводить загальні достатні умови того, що процес $R = R(t)$ прямує до нескінченності, коли $t \rightarrow \infty$.

Теорема 4.2.6. Припустимо, що існує зростаюча функція $v \in C^2(0, +\infty)$ така, що

$$L_\varphi v(r) \geq 0, \quad r \in (0, +\infty), \quad \varphi \in \mathbb{R}^n,$$

причому $v(0+) = -\infty$, а $v(+\infty)$ скінченне. Тоді

$$R(t) \rightarrow \infty, \quad t \rightarrow \infty, \quad \text{м.н.}$$

Доведення. Застосовуючи теорему 3.3.2 для СДР (4.4) із операторами $L_{\Phi(t)}$ в якості L_t , $t \geq 0$, та покладаючи $x_1 = 0$, отримуємо твердження теореми. \square

Як приклад, знову розглянемо СДР (4.2) та доведемо, що за деяких умов його розв'язок X майже напевно прямує до нескінченності.

Приклад 4.2.7. Нехай X – розв'язок n -вимірного СДР (4.2), причому $n \geq 3$. Припустимо, що $A \geq 0$ та

$$x^T g(x) \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Тоді

$$X(t) \rightarrow +\infty, \quad t \geq 0, \quad \text{м.н.}$$

Розв'язання. Як і у прикладі 4.2.4, коефіцієнти рівняння норми R розв'язку X мають вигляд (4.8).

Розглянемо функцію

$$v(r) := -\frac{1}{r}, \quad r > 0,$$

що є зростаючою, $v(0+) = -\infty$, $v(+\infty) = 0$. Маємо

$$\begin{aligned} L_\varphi v(r) &= \left(Ar^\alpha + \varphi^T g(r\varphi) + \frac{n-1}{2r} \right) \frac{1}{r^2} + \frac{1}{2} \left(-\frac{2}{r^3} \right) \\ &= \frac{A}{r^{2-\alpha}} + \frac{\varphi^T g(r\varphi)}{r^2} + \frac{n-3}{2r^3} \geq 0, \quad r > 0. \end{aligned}$$

Таким чином, за теоремою 4.2.6 отримуємо результат даного прикладу. \square

Зауваження 4.2.8. Застосовуючи попередній приклад з $A := 0$ та $g(x) := 0$, отримуємо відомий факт: n -вимірний ($n \geq 3$) вінерівський процес $X = x_0 + W$, де $x_0 \neq 0$, майже напевно прямує до нескінченності.

Наведемо інший варіант теореми про прямування норми розв'язку до нескінченності, який дозволяє замість глобальної функції v (як в теоремі 4.2.6) знаходити локальні функції v_0 та v_∞ .

Теорема 4.2.9. Припустимо, що:

(А) для будь-якої точки (r_0, φ_0) , $r_0 > 0$, існує єдиний розв'язок (R, Φ) системи (4.4)-(4.5), що є строго марковським процесом;

(Б) коефіцієнти μ, σ неперервні, коефіцієнт $\mu = \mu(r, \varphi)$ обмежений на множині $[\delta, \Delta] \times \mathbb{R}^n$ та

$$|\sigma(r, \varphi)| \geq \sigma_* > 0, \quad r > 0, \quad \varphi \in \mathbb{R}^n;$$

(В) існує зростаюча функція $v_0: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ та $\delta > 0$ такі, що $v_0(0) = -\infty$ та

$$\forall r \in (0, \delta) \quad \forall \varphi \in \mathbb{R}^n \quad L_\varphi v_0(r) \geq 0;$$

(Г) існують зростаюча функція $v_\infty: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ та стала $\Delta > \delta$ такі, що $v_\infty(+\infty)$ скінченне та

$$\forall r > \Delta \quad \forall \varphi \in \mathbb{R}^n \quad L_\varphi v_\infty(r) \geq 0.$$

Тоді

$$R(t) \rightarrow \infty, \quad t \rightarrow \infty, \quad \text{м.н.}$$

Доведення. Зауважимо, що оскільки коефіцієнти μ, σ неперервні, то вони обмежені на компактах, отже, за наслідком 3.2.3 процес R виходить з будь-якого інтервалу $(a, b) \subset (0, \infty)$ майже напевно. Означимо

$$\tau_r := \inf\{t \geq 0: R(t) = r\}, \quad r \geq 0.$$

Крок 1. Припустимо спочатку, що $R(0) = r_0 \in (0, \delta)$. Нехай $\varepsilon \in (0, r_0)$. Оскільки розв'язок виходить з будь-якого інтервалу м.н. (за наслідком 3.2.3), $\tau_\varepsilon \wedge \tau_\delta < \infty$ м.н. Тоді за теоремою 3.2.4 маємо

$$\mathbb{P}\{\tau_\delta < \tau_\varepsilon\} \geq \frac{v_0(r_0) - v_0(\varepsilon)}{v_0(\delta) - v_0(\varepsilon)} \rightarrow 1, \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Таким чином, $\tau_\delta < \infty$ м.н. та $\mathbb{P}\{\tau_0 < \tau_\delta\} = 0$. З цього випливає (внаслідок неперервності процесу R), що

$$\mathbb{P}\{R(t) > 0, t \geq 0\} = 1.$$

Крок 2. За строго марковською властивістю, розподіл процесу¹

$$(R(\tau_\delta + t), \Phi(\tau_\delta + t))_{t \geq 0}$$

збігається з розподілом процесу $(R_\delta(t), \Phi_\xi(t))$, де $\xi \sim \Phi(\tau_\delta)$, ξ незалежне від $\Phi(\tau_\delta)$.

Таким чином, без втрати загальності, ми тепер припускаємо, що $R(0) = \delta$. Нехай $\tilde{\Delta} > \Delta$. Оскільки μ та σ неперервні та $|\sigma| \geq \sigma_* > 0$, μ і σ обмежені для $r \in [\delta/2, \tilde{\Delta}]$ ($|\mu| \leq M$, $|\sigma| \leq \Sigma$ для деяких M , $\Sigma > 0$). Виберемо деяку зростаючу функцію v так, що $L_\varphi v(r) \geq 0$ для $r \in [\delta/2, \tilde{\Delta}]$ та $\varphi \in \mathbb{R}^n$ (наприклад, $v(r) = -e^{-\frac{2M}{\Sigma^2}r}$). Оскільки розв'язок виходить з будь-якого інтервалу м.н. (за наслідком 3.2.3), $\tau_{\tilde{\Delta}} \wedge \tau_{\delta/2} < \infty$ м.н. Тоді за теоремою 3.2.4

$$\mathbb{P}_\delta \{\tau_{\tilde{\Delta}} < \tau_{\delta/2}\} \geq \frac{v(\delta) - v(\delta/2)}{v(\tilde{\Delta}) - v(\delta/2)} =: p > 0,$$

$$\mathbb{P}_\delta \{\tau_{\delta/2} < \tau_{\tilde{\Delta}}\} \geq \frac{v(\tilde{\Delta}) - v(\delta)}{v(\tilde{\Delta}) - v(\delta/2)} = 1 - p < 1.$$

Використовуючи строго марковську властивість k разів, можна показати, що ймовірність виходу з інтервалу $(\frac{\delta}{2}, \tilde{\Delta})$ k разів через лівий кінець та повернення в інтервал $(\delta, \tilde{\Delta})$ не більша за $(1 - p)^k \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$. Отже, $\tau_{\tilde{\Delta}} < \infty$ м.н.

Крок 3. За строго марковською властивістю, розподіл процесу

$$((R(\tau_{\tilde{\Delta}} + t), \Phi(\tau_{\tilde{\Delta}} + t)))_t$$

¹ R_δ позначає розв'язок відповідного СДР з початковою умовою $R(0) = \delta$. Аналогічно Φ_ξ .

збігається з розподілом процесу $((R_{\tilde{\Delta}}(t), \Phi_{\xi}(t)))_{t \geq 0}$, де $\xi \sim \Phi(\tau)$ та ξ незалежне від $\Phi(\tau)$. Таким чином, без втрати загальності ми припускаємо тепер, що $R(0) = \tilde{\Delta}$. Нехай $L > \tilde{\Delta}$ та $\Delta^* \in (\Delta, \tilde{\Delta})$. Оскільки розв'язок виходить з будь-якого інтервалу (за наслідком 3.2.3), $\tau_L \wedge \tau_{\Delta^*} < \infty$ м.н. За теоремою 3.2.4

$$\mathbb{P}_{\tilde{\Delta}} \{ \tau_{\Delta^*} < \tau_L \} \leq \frac{v_{\infty}(L) - v_{\infty}(\tilde{\Delta})}{v_{\infty}(L) - v_{\infty}(\Delta^*)}.$$

Коли $L \rightarrow \infty$, ми отримуємо

$$\mathbb{P}_{\tilde{\Delta}} \left\{ \inf_{t \geq 0} R(t) \leq \Delta^* \right\} \leq \frac{v_{\infty}(\infty) - v_{\infty}(\tilde{\Delta})}{v_{\infty}(\infty) - v_{\infty}(\Delta^*)}.$$

Тоді ми маємо наступні оцінки:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{\tilde{\Delta}} \left\{ \liminf_{t \rightarrow \infty} R(t) \leq \Delta^* \right\} &\leq \mathbb{P}_{\tilde{\Delta}} \left\{ \inf_{t \geq 0} R(t) \leq \Delta^* \right\} \leq \frac{v_{\infty}(\infty) - v_{\infty}(\tilde{\Delta})}{v_{\infty}(\infty) - v_{\infty}(\Delta^*)} = \\ &= 1 - \frac{v_{\infty}(\tilde{\Delta}) - v_{\infty}(\Delta^*)}{v_{\infty}(\infty) - v_{\infty}(\Delta^*)} =: p_{\tilde{\Delta}}. \end{aligned}$$

Зауважимо, що $p_{\tilde{\Delta}} \rightarrow 0$, коли $\tilde{\Delta} \rightarrow \infty$. При $\tilde{\Delta} \rightarrow \infty$, ми отримуємо

$$\mathbb{P} \left\{ \liminf_{t \rightarrow \infty} R(t) \leq \Delta^* \right\} = 0.$$

При $\Delta^* \rightarrow \infty$, ми отримуємо

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left\{ \liminf_{t \rightarrow \infty} R(t) < +\infty \right\} &= 0 \\ \Rightarrow \mathbb{P} \left\{ \liminf_{t \rightarrow \infty} R(t) = +\infty \right\} &= 1 \\ \Rightarrow \mathbb{P} \left\{ \lim_{t \rightarrow \infty} R(t) = +\infty \right\} &= 1. \end{aligned}$$

□

4.3 Нижня степенева асимптотика норми розв'язку

Для доведення стабілізації процесу кута Φ , що ми проведемо у наступній секції, необхідний певний результат про нижню степеневу асимптотику процесу

норми R .

Теорема 4.3.1. *Припустимо, що:*

- $R(t) \rightarrow \infty, t \rightarrow \infty$, м.н.;
- для деякої сталої $M_+ \geq 0$

$$|\mu(r, \varphi)| \leq M_+ r^\alpha, \quad r \geq 1, \varphi \in \mathbb{R}^n;$$

- для деякого числа $\beta \in [0, \frac{1+\alpha}{2})$

$$\tilde{\sigma}^2(r, \varphi) \leq C (1 + r^{2\beta}), \quad r \geq 0.$$

Тоді

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{R(t)}{t^{\frac{1}{1-\alpha}}} \geq ((1 - \alpha) \underline{M}(\varphi))^{\frac{1}{1-\alpha}} \text{ м.н.},$$

де

$$\underline{M}(\varphi) := \liminf_{r \rightarrow \infty} \inf_{\varphi \in \mathbb{R}^n} \frac{\mu(r, \varphi)}{r^\alpha}, \quad \varphi \in \mathbb{R}^n.$$

Доведення. Застосовуючи теорему 3.4.1 до рівняння радіуса R , неважко отримати потрібний результат. □

Як приклад, застосуємо попередню теорему до СДР (4.2).

Приклад 4.3.2. *Нехай X – розв’язок n - вимірною СДР (4.2), причому $n \geq 3$. Припустимо, що*

$$|X(t)| \rightarrow \infty, \quad t \rightarrow \infty,$$

$\alpha \in (-1, 1)$, $A > 0$ та

$$|x^T g(x)| \leq C |x|^{1+\alpha}, \quad |x| \geq 1.$$

Тоді

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{|X(t)|}{t^{\frac{1}{1-\alpha}}} \geq ((1 - \alpha)A)^{\frac{1}{1-\alpha}} \text{ м.н.}$$

Розв'язання. Покладемо $(R, \Phi) := \left(|X|, \frac{X}{|X|}\right)$. Перша умова теореми 4.3.1 виконана за умовою. Згідно з прикладом 4.1.8

$$\mu(r, \varphi) = Ar^\alpha + \varphi^T g(r\varphi) + \frac{n-1}{2r}, \quad \tilde{\sigma}(r, \varphi) = 1.$$

Отже, в теоремі 4.3.1 друга умова виконана з деяким M_+ , третя умова виконана з $C := 1$, $\beta := 0$ та $\underline{M}(\varphi) := A$. Таким чином, за теоремою 4.3.1 отримуємо результат прикладу. \square

Зауваження 4.3.3. *Насправді в умовах попереднього прикладу для розв'язку СДР (4.2) можна довести навіть точну асимптотику:*

$$|X(t)| \sim ((1-\alpha)At)^{\frac{1}{1-\alpha}}, \quad t \rightarrow \infty, \text{ м.н.}$$

4.4 Стабілізація кута

У цій секції ми сформулюємо та доведемо загальну теорему про стабілізацію процесу кута Φ , після чого застосуємо цю теорему до дослідження стабілізації кута $\frac{X}{|X|}$ розв'язку X .

Теорема 4.4.1. *Припустимо, що для деякого $\gamma > 0$:*

- для деякого $\underline{R} > 0$

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{R(t)}{t^\gamma} \geq \underline{R} \text{ м.н.}; \quad (4.9)$$

- для деякого $\delta > \frac{1}{\gamma}$

$$\sup_{\varphi \in \mathbb{R}^n} \left(|\nu(r, \varphi)| + \|\chi(r, \varphi)\|^2 \right) = \mathcal{O}(r^{-\delta}), \quad r \rightarrow \infty. \quad (4.10)$$

Тоді існує границя

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(t) =: \Phi_\infty, \quad \text{м.н.}$$

Доведення. Перепишемо СДР (4.5) в інтегральній формі:

$$\Phi(t) = \varphi_0 + \int_0^t \nu(R(s), \Phi(s)) ds + \int_0^t \chi(R(s), \Phi(s)) dW(s).$$

Тоді границя

$$\Phi_\infty = \varphi_0 + \int_0^\infty \nu(R(t), \Phi(t)) dt + \int_0^\infty \chi(R(t), \Phi(t)) dW(t)$$

існуватиме м.н., якщо обидва інтеграли у правій частині збіжні м.н.

З умови (4.10) випливає, що існує стала $\bar{R} \geq 0$ така, що

$$|\nu(r, \varphi)| + \|\chi(r, \varphi)\|^2 \leq \frac{C}{r^\delta}, \quad r \geq \bar{R}, \varphi \in \mathbb{R}^n. \quad (4.11)$$

Нехай

$$\tau := \inf \{t \geq 0 : \forall s \geq t R(s) \geq \bar{R}\}.$$

З умови (4.9) випливає, що

$$R(t) \rightarrow +\infty, \quad t \rightarrow \infty, \text{ м.н.},$$

а отже, $\tau < \infty$ м.н.

Маємо

$$\int_0^\infty |\nu(R(t), \Phi(t))| dt = \int_0^\tau |\nu(R(t), \Phi(t))| dt + \int_\tau^\infty |\nu(R(t), \Phi(t))| dt.$$

Оскільки (R, Φ) – розв’язок системи (4.4)-(4.5), то перший інтеграл останньої суми скінченний. Оцінимо другий інтеграл останньої суми:

$$\text{(за формулою (4.11))} \quad \int_\tau^\infty |\nu(R(t), \Phi(t))| dt \leq C \int_\tau^\infty \frac{dt}{R^\delta(t)}$$

$$\text{(за умовою (4.9))} \quad \leq C \int_\tau^\infty \frac{dt}{t^{\gamma\delta}} < \infty \text{ м.н.},$$

оскільки $\gamma\delta > 1$. Таким чином, інтеграл $\int_0^\infty \nu(R(t), \Phi(t)) dt$ збіжний м.н.

Аналогічно отримуємо

$$\int_0^\infty \|\chi(R(t), \Phi(t))\|^2 dt < \infty \text{ м.н.},$$

з чого випливає, що інтеграл

$$\int_0^\infty \chi(R(t), \Phi(t)) dW(t)$$

збіжний м.н. □

Розглянемо знову СДР (4.2) та знайдемо достатні умови стабілізації кута його розв'язку.

Приклад 4.4.2. Нехай X – розв'язок СДР (4.2) з $\alpha \in (-1, 1)$. Припустимо, що:

- для деякого $\theta < \alpha$

$$|g_{\tan}(x)| = \mathcal{O}(|x|^\theta), \quad |x| \rightarrow \infty;$$

Тоді м.н. існує границя

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{X(t)}{|X(t)|}.$$

Розв'язання. Покладемо $(R, \Phi) := \left(|X|, \frac{X}{|X|}\right)$. У прикладі 4.1.12 було знайдено коефіцієнти СДР для Φ :

$$\nu(r, \varphi) = \frac{g_{\tan}(r\varphi)}{r} - \frac{(n-1)I + 2I_{\tan}(r\varphi)}{2r^2}\varphi, \quad \chi(r, \varphi) = \frac{I_{\tan}(r\varphi)}{r}.$$

Перевіримо виконання умов теореми 4.4.1. Нижня асимптотика (4.9) має місце з $\underline{R} := A$ та $\gamma := \frac{1}{1-\alpha}$ завдяки прикладу 4.3.2. Перевіримо умову (4.10). Оцінимо окремо коефіцієнти ν та χ , використовуючи властивості норми:

$$\begin{aligned} |\nu(r, \varphi)| &= \left| \frac{g_{\tan}(r\varphi)}{r} - \frac{(n-1)I + 2I_{\tan}(r\varphi)}{2r^2}\varphi \right| \\ &\leq \frac{|g_{\tan}(r\varphi)|}{r} + \frac{(n-1)|\varphi| + 2\|I_{\tan}(r\varphi)\|\|\varphi\|}{2r^2} \\ &= \frac{|g_{\tan}(r\varphi)|}{r} + \frac{n-1 + 2\sqrt{n-1}}{2r^2} \\ (\text{за умовою прикладу}) &= \frac{\mathcal{O}(r^\theta)}{r} + \frac{n-1 + 2\sqrt{n-1}}{2r^2} = \mathcal{O}(r^{\theta-1}) + \mathcal{O}(r^{-2}) \\ &= \mathcal{O}\left(r^{\max(\theta-1, -2)}\right) = \mathcal{O}\left(r^{-\min(1-\theta, 2)}\right); \\ \|\chi(r, \varphi)\|^2 &= \left\| \frac{I_{\tan}(r\varphi)}{r} \right\|^2 = \frac{n-1}{r^2} = \mathcal{O}(r^{-2}) \\ &= \mathcal{O}\left(r^{\max(\theta-1, -2)}\right) = \mathcal{O}\left(r^{-\min(1-\theta, 2)}\right). \end{aligned}$$

За умовою $\alpha > \theta$ та $\alpha > -1$, отже, $\alpha > \max(\theta, -1)$. Оскільки для $\delta := \min(1 - \theta, 2)$ виконується нерівність

$$\frac{1}{\gamma} = 1 - \alpha < 1 - \max(\theta, -1) = \min(1 - \theta, 2) = \delta,$$

то умова (4.10) теореми 4.4.1 виконана.

Таким чином, отримали твердження прикладу. □

4.5 Степенева асимптотика норми розв'язку

У даній секції ми розглянемо систему СДР (4.5)-(4.6) та наведемо достатні умови того, що гарантують існування степеневі асимптотики для процесу радіуса R .

Теорема 4.5.1. *Припустимо, що виконуються наступні умови:*

(А) $R(t) \rightarrow \infty$, $t \rightarrow \infty$, м.н.;

(Б) $\exists \Phi_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(t)$ м.н.;

(В) коефіцієнт μ неперервний;

(Г) для деякої неперервної функції $M: \mathbb{R}^n \rightarrow (0, \infty)$ та сталої $\alpha \in [0, 1)$

$$\mu(r, \varphi) \sim M(\varphi)r^\alpha, \quad t \rightarrow \infty, \quad \varphi \in \mathbb{R}^n;$$

(Г) для деякого $\beta \in [0, \frac{1+\alpha}{2})$

$$\sup_{\varphi \in \mathbb{R}^n} \sigma^2(r, \varphi) = O(r^{2\beta}), \quad r \rightarrow \infty.$$

Тоді

$$R(t) \sim ((1 - \alpha)M(\Phi_\infty)t)^{\frac{1}{1-\alpha}}, \quad t \rightarrow \infty, \quad \text{м.н.}$$

Доведення. Враховуючи умови (Б)-(Г), отримуємо

$$\mu(r, \Phi(t)) \sim M(\Phi_\infty)r^\alpha, \quad r \wedge t \rightarrow \infty, \quad \text{м.н.}$$

Застосовуючи наслідок 3.4.2 до СДР для процесу R з $A := M(\Phi_\infty)$, отримуємо твердження даної теореми. \square

Розглянемо узагальнення прикладу (4.2), в якому A може залежати від кута $\frac{X}{|X|}$, а саме

$$dX(t) = \left(A \left(\frac{X(t)}{|X(t)|} \right) |X(t)|^\alpha + g(X(t)) \right) dt + dW(t), \quad (4.12)$$

$$X(0) =: x_0 \neq O,$$

де $\alpha \in [0, 1)$ та A, g – деякі неперервні функції.

Приклад 4.5.2. Нехай X – розв’язок СДР (4.12). Припустимо, що:

$$(A) \quad |X(t)| \rightarrow \infty, \quad t \rightarrow \infty, \text{ м.н.};$$

$$(B) \quad \exists \Phi_\infty := \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{X(t)}{|X(t)|} \text{ м.н.};$$

$$(B) \quad |x^\top g(x)| = o(|x|^{1+\alpha}), \quad |x| \rightarrow \infty.$$

Тоді

$$X(t) \sim ((1 - \alpha)A(\Phi_\infty)t)^{\frac{1}{1-\alpha}}, \quad t \rightarrow \infty, \text{ м.н.}$$

Розв’язання. Позначимо $(R, \Phi) := \left(|X|, \frac{X}{|X|} \right)$. Узагальнюючи результат прикладу (4.1.8), неважко отримати коефіцієнти СДР для процесу R :

$$\mu(r, \varphi) = A(\varphi)r^\alpha + \varphi^\top g(r\varphi) + \frac{n-1}{2r}, \quad \tilde{\sigma}(r, \varphi) = 1.$$

За умовою прикладу умови (А)-(В) теореми 4.5.1 виконані. Умова (Г) тієї теореми впливає з умови (В) даного прикладу. Умова (Г) тієї теореми виконується з $\beta := 0$. Таким чином, за теоремою 4.5.1 отримуємо результат цього прикладу. \square

4.6 Висновки до розділу 4

Дослідженню асимптотичної поведінки розв’язків багатовимірних стохастичних диференціальних рівнянь присвячена стаття [70] автора цієї дисертації.

У даному розділі, використовуючи результати попередніх розділів, ми дослідили асимптотичну поведінку розв'язків багатовимірних СДР. Отримано вигляд СДР для норми та кута розв'язку багатовимірного СДР. Встановлено достатні умови прямування норми розв'язку (а отже, і самого розв'язку) до нескінченності. Важливим результатом цього розділу є теорема про стабілізацію кута. Знайдено точну степеневу асимптотику норми розв'язку, що залежить від граничного кута.

Висновки

У першому розділі отримано асимптотичні оцінки для різного типу стохастичних інтегралів у випадку, коли підінтегральні процеси обмежені деякими степеневими функціями від часу. Конкретно, розглянуто стохастичні інтеграли з наступними інтеграторами: мірою Лебега, вінерівським процесом, пуассонівською компенсованою мірою та процесами Леві.

У другому розділі досліджено асимптотичну поведінку розв'язків одновимірних СДР зі стрибками, а саме:

- доведено теорему про лінійну асимптотику розв'язку СДР зі стрибками для випадку, коли коефіцієнт зносу прямує до сталої;
- наведено деякі достатні умови прямування розв'язку СДР зі стрибками до нескінченності;
- доведено теорему про степеневу асимптотику розв'язків СДР зі стрибками, якщо коефіцієнт зносу має степеневу асимптотику на нескінченності.

У третьому розділі досліджено асимптотичну поведінку одновимірних СДР з вінерівським шумом. Деякі результати отримані як наслідки з більш загальних теорем про СДР зі стрибками, доведених у другому розділі.

У четвертому розділі, використовуючи результати попередніх розділів, досліджено асимптотичну поведінку розв'язків багатовимірних СДР, а саме:

- отримано вигляд СДР для норми та кута розв'язку багатовимірного СДР;

- встановлено достатні умови прямування норми розв'язку (а отже, і самого розв'язку) до нескінченності;
- отримано достатні умови стабілізації кута розв'язку;
- знайдено точну асимптотику норми розв'язку, що, взагалі кажучи, залежить від граничного кута.

Бібліографія

- [1] Itô K. “On stochastic differential equations”. *Pro Jap. Acad.* **14** (1946): 32-35.
- [2] Гихман И. И. «О некоторых дифференциальных уравнениях со случайными функциями». *Украинский математический журнал* **2.3** (1950): 45-69.
- [3] Гихман И. И. «К теории дифференциальных уравнений случайных процессов». *Украинский математический журнал* **2.4** (1950): 37-63
- [4] Doob J.-L. “Martingales and one-dimensional diffusion”. *Trans. Amer. Math. Soc.* **78** (1955): 168-208.
- [5] Spitzer F. “Some theorems concerning 2-dimensional Brownian motion”. *California Institute of Technology* (January 1956): 187-197.
- [6] Скороход А. В. «Исследования по теории случайных процессов (стохастические дифференциальные уравнения и предельные теоремы для процессов Маркова)». *Изд. Киевского ун-та* (Киев, 1961).
- [7] Скороход А. В. «Об однородных непрерывных марковских процессах, являющихся мартингалами». *Теория вероятн. и её применен.* **8** (1961).
- [8] Скороход А. В. «Случайные процессы с независимыми приращениями». (1964).
- [9] Hartman P. “Ordinary differential equations”. *John Wiley & Sons* (New York, 1964).

- [10] Гихман И. И. «Дифференциальные уравнения со случайными функциями». *Зимняя школа по теории вероятностей и математической статистике* (Киев, 1964): 41-85.
- [11] Skorokhod A. V. “Studies in the theory of random processes”. *Addison-Wesley Publ. Co., Inc., Reading. Mass* (1965).
- [12] Гихман И. И., Дороговцев А. Я. «Об устойчивости решений стохастических дифференциальных уравнений». *Украинский математический журнал* **18.6** (1965): 3-21.
- [13] Гихман И. И., Скороход А. В. «Введение в теорию случайных процессов». *Наука* (Москва, 1965).
- [14] Кулинич Г. Л. «Предельное поведение решения стохастического дифференциального уравнения». *Украинский математический журнал* **19.3** (1967): 119-125.
- [15] Гихман И. И., Скороход А. В. «Стохастические дифференциальные уравнения». *Наукова думка* (Киев, 1968).
- [16] Гихман И. И. «Стохастические дифференциальные уравнения и предельные теоремы». *Шестая летняя математическая школа по теории вероятностей и математической статистике* (Киев, Институт математики АН УССР, 1969): 5-58.
- [17] Friedman A. “Limit behaviour of solutions of stochastic differential equations”. *Frans. Amer. Math. Soc.* (1972): 359-384.
- [18] Friedman A., Pinsky M. A. “Asymptotic behavior of solutions of linear stochastic differential systems”. *Transactions of the American Mathematical Society* **181** (1973): 1-22.

- [19] Friedman, A., Pinsky M. A. “Asymptotic stability and spiraling properties for solutions of stochastic equations”. *Transactions of the American Mathematical Society* **186** (1973): 331-358.
- [20] Itô K., McKean H. “Diffusion Processes and Their Sample Paths”. *Berlin: Springer Verlag* (1974).
- [21] Tanaka H., Tsuchiya M., Watanabe S. “Perturbation of drift-type for Lévy processes”. *Journal of Mathematics of Kyoto University* **14.1** (1974): 73-92.
- [22] Zvonkin A. K. “A transformation of the phase space of a diffusion process that removes the drift”. *Mathematics of the USSR – Sbornik* **22.1** (1974): 129.
- [23] Arnold L. “Stochastic differential equations”. *John Willey & Sons* (London, 1974).
- [24] Friedman A. “Stochastic differential equations and applications”. *Stochastic differential equations*, Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg (1975).
- [25] Strook D., Varadhan S. R. S. “Multidimensional Diffusion Processes”. *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Springer, Berlin* (1979).
- [26] Веретенников А. Ю. “О сильных решениях и явных формулах для решений стохастических интегральных уравнений”. *Математический сборник* **3.3** (1980): 434-452.
- [27] Harrison, J. M., Lawrence A. S. “On skew Brownian motion”. *The Annals of probability* (1981): 309-313.
- [28] Pruitt W. E. “The growth of random walks and Lévy processes”. *The Annals of Probability* **9.6** (1981): 948-956.
- [29] Гихман И. И., Скороход А. В. «Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения». *Наукова думка* (Киев, 1982).

- [30] Kersting G. “Asymptotic properties of solutions of multidimensional stochastic differential equations”. *Probab. Th. Rel. Fields* **88** (1982): 187-211.
- [31] Melnikov A. V. “On strong solutions of stochastic differential equations with respect to semimartingales”. *Stochastic Differential Systems Lecture Notes in Control and Information Sciences* **43** (1982): 122-127.
- [32] Veretennikov A. Yu. “Approximation of ordinary differential equations by stochastic differential equations”. *Mathematical Notes of the Academy of Sciences of the USSR* **33.6** (1983): 476-477.
- [33] Keller G., Kersting G., Rösler U. “On the asymptotic behaviour of solutions of stochastic differential equations”. *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete* **68** (1984): 163-189.
- [34] Protter P. “Stochastic integration and differential equations – a new approach”. *Springer-Verlag* (Berlin, 1990).
- [35] Mao X. “Exponential stability of stochastic differential equations”. *Marcel Dekker* (1994)
- [36] Mao X. “Stochastic differential equations and Applications”. *Horwood Publishing, Chichester* (1997).
- [37] Буддигін В. В., Коваль В. О. «Про асимптотичні властивості розв’язків лінійних стохастичних диференціальних рівнянь». *Український математичний журнал* **52.9** (2000): 1166-1175.
- [38] Jacod J., Shiryaev A. N. “Limit Theorems for Stochastic Processes”. *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Springer, Berlin* **288** (2003).
- [39] Oksendal B. K. “Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications”. *Springer* (Berlin, 2003).

- [40] Protter P. E. “Stochastic integration and differential equations”. *Applications of mathematics* (2004).
- [41] Булдигін В. В., Клесов О. І., Штайнебах Й. Г. «Про деякі властивості асимптотично квазіобернених функцій та їх застосування (I)». *Теорія ймовірностей та математична статистика* **70** (2004): 9-25.
- [42] Булдигін В. В., Клесов О. І., Штайнебах Й. Г. «Про деякі властивості асимптотично квазіобернених функцій та їх застосування (II)». *Теорія ймовірностей та математична статистика* **71** (2004): 63-78.
- [43] Булдигін В. В., Клесов О. І., Штайнебах Й. Г. «PRV властивість функцій та асимптотична поведінка розв’язків стохастичних диференціальних рівнянь». *Теорія ймовірностей та математична статистика* **72** (2004): 63-78.
- [44] Situ R. “Theory of Stochastic Differential Equations with Jumps and Applications”. *Springer, New York* (2005).
- [45] Cherny A. S., Engelbert H. J. “Singular stochastic differential equations”. *Springer Science & Business Media* **1858** (2005).
- [46] Крєневич А. П. «Асимптотична еквівалентність розв’язків лінійних стохастичних систем Іто». *Український математичний журнал* **58.10** (2006): 1368-1384.
- [47] Булдигін В. В., Тимошенко О. А. «Про асимптотичну стійкість розв’язків стохастичних диференціальних рівнянь». *Наукові вісті НТУУ «КПІ»* **6** (2007): 126-129.
- [48] Булдигін В. В., Тимошенко О. А. «Точний порядок росту розв’язків стохастичних диференціальних рівнянь». *Наукові вісті НТУУ «КПІ»* **1** (2008): 127-132.
- [49] Buldygin V. V., Klesov O. I., Steinebach J. G., Tymoshenko O. A. “On the φ -asymptotic behaviour of solutions of stochastic differential equations”. (2008).

- [50] Applebaum D. "Lévy processes and stochastic calculus". *Cambridge university press* (2009).
- [51] Леваков А. А. «Стохастические дифференциальные уравнения». БГУ (Минск, 2009).
- [52] Самойленко А. М., Станжицький О. М. «Якісний та асимптотичний аналіз диференціальних рівнянь з випадковими збуреннями». *Наукова думка* (Київ, 2009).
- [53] Тимошенко О. А. «Точний порядок росту розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь зі знакозмінним коефіцієнтом зсуву». *Наукові вісті НТУУ «КПІ»* 5 (2009): 145-152.
- [54] Buldygin V. V., Tymoshenko O. A. "On the exact order of growth of solutions of stochastic differential equations with time-dependent coefficients". *Theory of stochastic processes* 16.2 (2010): 12-22.
- [55] Khasminskii R. "Stochastic stability of differential equations". *Springer Science & Business Media* 66 (2011).
- [56] Самойленко А. М., Станжицький О. М., Новак І. Г. «Про асимптотичну відповідність між розв'язками стохастичних та звичайних рівнянь». *Український математичний журнал* 63.8 (2011): 1103-1127.
- [57] Klesov O. I., Tymoshenko O. A. "Unbounded solutions of stochastic differential equations with time-dependent coefficients". *Annales Univ. Sci. Budapest., Sect. Comp.* 41 (2013): 25-35.
- [58] Клесов О. І., Тимошенко О. А. «PRV-умови необмеженості розв'язку стохастичного диференціального рівняння». *Наукові вісті НТУУ «КПІ»* 4 (2013): 63-66.

- [59] Zhang L. “Random perturbation of some multidimensional non-Lipschitz ordinary differential equations”. *arXiv preprint* **1202.4131v5** (2013).
- [60] Ikeda N., Watanabe S. “Stochastic differential equations and diffusion processes”. *Elsevier* (2014).
- [61] Буддигін В. В., Клесов О. І., Тимошенко О. А. «Асимптотична поведінка стохастичних диференціальних рівнянь». *ФОП Кушнір Ю. В., Вінниця* (2018).
- [62] Buldygin V. V., Indlekofer K.-H., Klesov O. I., Steinebach J. G. “Pseudo-Regularly Varying Functions and Generalized Renewal Processes”. *Probability Theory and Stochastic Modelling, Springer, Cham* **91** (2018).
- [63] Pilipenko A., Proske F. N. “On a selection problem for small noise perturbation in the multidimensional case”. *Stochastics and Dynamics* **18.06** (2018).
- [64] Pilipenko A., Proske F. N. “On perturbations of an ODE with non-Lipschitz coefficients by a small self-similar noise”. *Statistics & Probability Letters*: **132** (2018): 62-73.
- [65] Kunita H. “Stochastic flows and jump-diffusions”. *Springer Singapore* (2019).
- [66] Pavlyukevich I., Pilipenko A. “Generalized Peano problem with Lévy noise”. *Electronic Communications in Probability* **25.85** (2020): 1-14.
- [67] Kulik A., Pilipenko A. Yu. “On regularization by a small noise of multidimensional ODEs with non-Lipschitz coefficients”. *Ukrainian Mathematical Journal* **72.9** (2020): 1254-1285.
- [68] Gradinaru M., Luirard E. “Asymptotic behavior for a time-inhomogeneous stochastic differential equation driven by an α -stable Lévy process”. *arXiv preprint* **2112.07287** (2021).

- [69] Юськович В. К. «Про асимптотику розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь зі стрибками». *Український математичний журнал* **75.11** (2023): 1570-1584.
- [70] Yuskovych V. K. “On asymptotic behavior of solutions of stochastic differential equations in multidimensional space”. *Theory of Stochastic Processes* **27.1** (2023): 53-66.

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ**Основні наукові результати дисертації:**Статті, проіндексовані у базі Scopus:

1. Yuskovych V. “On the Asymptotics of Solutions of Stochastic Differential Equations with Jumps”. *Ukrainian Mathematical Journal* **75** (2024): 1778-1795, Q3.
2. Yuskovych V. K. “On asymptotic behavior of solutions of stochastic differential equations in multidimensional space”. *Theory of Stochastic Processes* **27.1** (2023): 53-66.

Апробація матеріалів дисертації:Матеріали конференцій:

1. Юськович В. К. «Асимптотична поведінка розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь у багатовимірному просторі». *X всеукраїнська наукова конференція молодих математиків* (16-17 квітня 2021, дистанційно): 55.
2. Yuskovych V. “On Asymptotic Behavior of Solutions of Stochastic Differential Equations in Multidimensional Space”. *Modern Stochastics: Theory and Applications V* (June 1-4, 2021, online): 115.
3. Yuskovych V. “Asymptotic behaviour of solutions of multidimensional stochastic differential equations”. *International Conference of Young Mathematicians* (June 1-3, 2023, online).
4. Юськович В. К. «Про асимптотику розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь зі стрибками». *XIX міжнародна наукова конференція ім. академіка М. Кравчука* (11-12 жовтня 2023, дистанційно): 187.
5. Yuskovych V. K. “On asymptotics of solutions of stochastic differential equations with jumps”. *International Uzbek-Ukrainian conference “Modern problems of the theory of stochastic processes and their applications”* (October 10-11, 2023, online): 49.